

EE3235 Analog Integrated Circuit Analysis and Design I

Homework 4

Ideal OP circuit

姓名：朱豐蔚

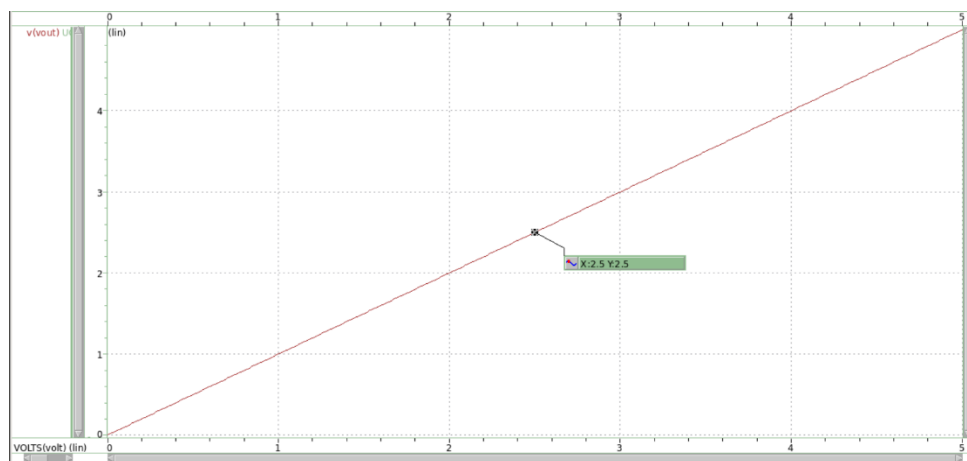
學號：110060027

系級：電資院學士班 25

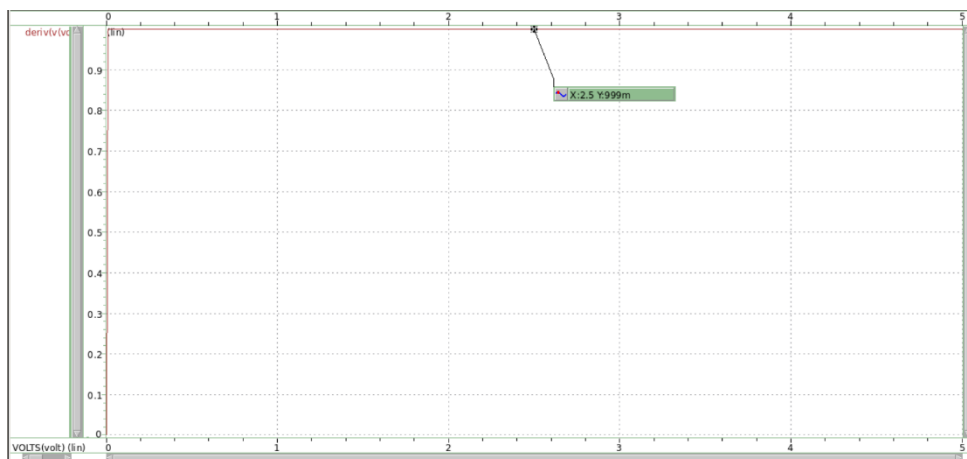
Part I – Unity-gain Amplifier

此題沒有設計，直接進行量測與比較。

(a) DC Sweep：

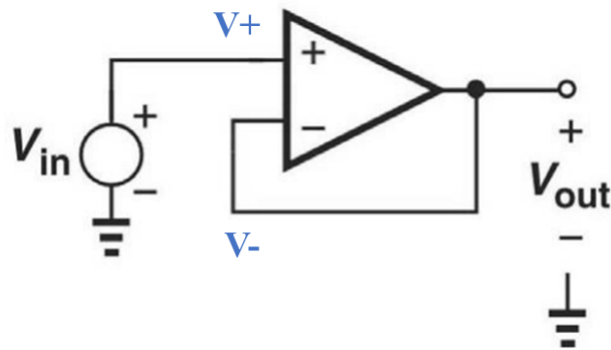


$V_{out}(V)$ vs. $V_{in}(V)$ ($V_{out} = 2.5\text{ V}$ at $V_{in} = 2.5\text{ V}$)



dV_{out}/dV_{in} vs. $V_{in}(V)$ ($dV_{out}/dV_{in} = 0.999$ at $V_{in} = 2.5\text{ V}$)

(b) TF Analysis :



先使用上圖的資訊與 Op Amp 的特性分析電壓的關係如下：

$$V_+ = V_{in}, \quad V_- = V_{out},$$

$$V_{out} = A_0(V_+ - V_-), \quad A_0 = 1000$$

可以得到 $\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{A_0}{1+A_0} = 999.001 \text{ m}$ ，再來進行 TF Analysis 去驗證結果是否正確。

**** small-signal transfer characteristics

v(vout)/v1	=	999.0010m
input resistance at v1	=	1.000e+20
output resistance at v(vout)	=	0.

TF Analysis 的數據會被存放在 .lis 檔中，如上圖所示，其中第一項 $gain = 999.001 \text{ m}$ ，完全符合手算的結果，且與 DC Sweep 微分曲線的結果相同。

第二項的 $R_{in} = 10^{20} \Omega$ ，這是由於從 V_{in} 來看，電阻會等於理想 Op Amp 的 $R_{in} = \infty$ ($10^{20} \Omega$ 為 TF Analysis 的上限)。

而最後一項的 $R_{out} = 0 \Omega$ ，若要計算 R_{out} ，只要將 $v_{in} = 0$ 代入模型中計算 v_{out} 與電流的比值即可。此時 $R_{out} = R_{out.op} // R_{in.op} = 0 // \infty = 0$ ，與測量結果相符合。

由上述可以知道，測量結果都與手算結果相符合，代表 Op Amp 模型的建立與使用是正確的。

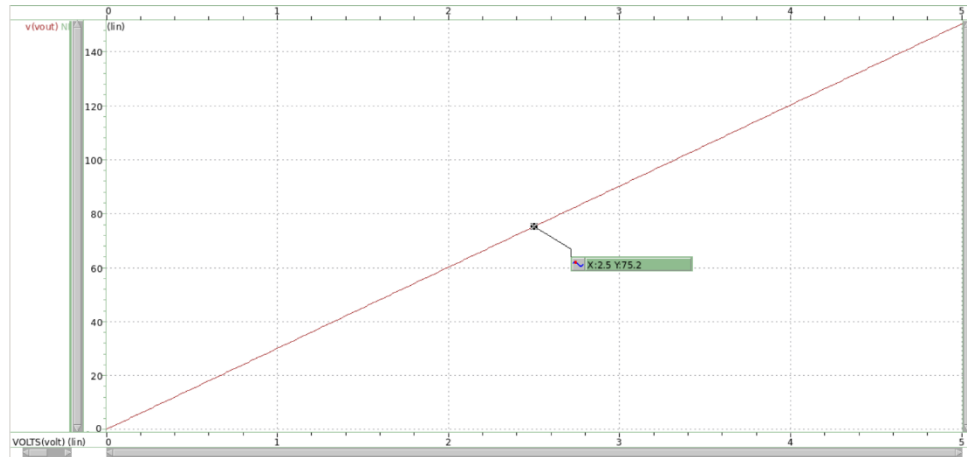
綜上來看，Unity-gain Amplifier 能夠維持小訊號的振幅，加上其有 $R_{in} = \infty$ 、 $R_{out} = 0$ 的特點，能使外來訊號能夠百分百的傳入與傳出 Unity-gain Amplifier，不受 Input 端、Output 端外接電阻的影響，很適合作為 buffer 來去做使用。

Part II – Noninverting Amplifier

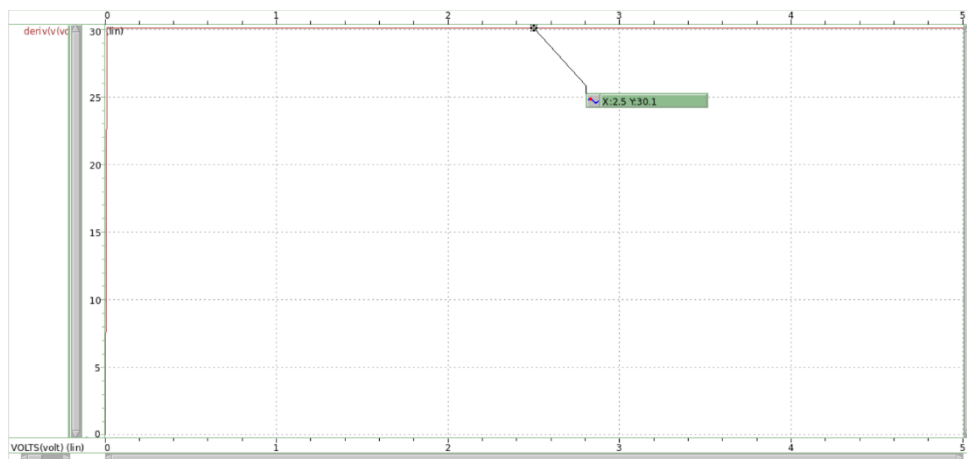
參數選用：(選用原因在後續會進行說明)

$$R_1 = 30000\ \Omega、R_2 = 1000\ \Omega$$

(a) DC Sweep：



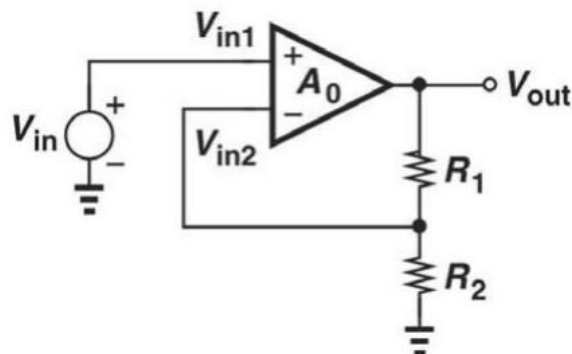
Vout(V) vs. Vin(V) ($V_{out} = 75.2\text{ V}$ at $V_{in} = 2.5\text{ V}$)



dV_{out}/dV_{in} vs. Vin(V) ($dV_{out}/dV_{in} = 30.1$ at $V_{in} = 2.5\text{ V}$)

可以看到當 $V_{in} = 2.5\text{ V}$ 時，斜率為 30.1，代表設計有滿足 SPEC 的所求。

(b) TF Analysis：



先使用上圖的資訊與 Op Amp 的特性分析電壓的關係如下：

$$V_{in1} = V_{in}, \quad V_{in2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{out},$$

$$V_{out} = A_0(V_{in1} - V_{in2}), \quad A_0 = 1000$$

可以得到 $\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{A_0}{1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} A_0} = 30.068$ ，再來進行 TF Analysis 去驗證結果是否正確。

```
****      small-signal transfer characteristics
v(vout)/v1      = 30.0679
input resistance at v1      = 1.000e+20
output resistance at v(vout) = 0.
```

TF Analysis 的數據會被存放在.lis 檔中，如上圖所示，其中第一項 $gain = 30.068$ ，完全符合手算的結果，且與 DC Sweep 微分曲線的結果相同。

第二項的 $R_{in} = 10^{20} \Omega$ ，這是由於從 V_{in} 來看，電阻會等於理想 Op Amp 的 $R_{in} = \infty$ ($10^{20} \Omega$ 為 TF Analysis 的上限)。

而最後一項的 $R_{out} = 0 \Omega$ ，若要計算 R_{out} ，只要將 $v_{in} = 0$ 代入模型中計算 v_{out} 與電流的比值即可。此時 $R_{out} = R_{out.op} // (R_1 + R_{in.op} // R_2) = 0$ ，與測量結果相符合。

由上述可以知道，測量結果都與手算結果相符合，代表 Op Amp 模型的建立與使用是正確的。

綜上來看，Noninverting Amplifier 能夠將訊號放大約 30 倍，加上其有 $R_{in} = \infty$ 、 $R_{out} = 0$ 的特點，能使外來訊號能夠百分百的傳入與傳出 Noninverting Amplifier，不受 Input 端、Output 端外接電阻的影響。

(c) 設計過程：

首先考慮(b)中所計算的 gain 值公式 $\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{A_0}{1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} A_0} = \frac{1 + \frac{R_1}{R_2}}{1 + \frac{1}{A_0}(1 + \frac{R_1}{R_2})}$ ，在 $\frac{1}{A_0}(1 + \frac{R_1}{R_2}) \ll 1$ 時，有 $gain \cong (1 + \frac{R_1}{R_2})[1 - \frac{1}{A_0}(1 + \frac{R_1}{R_2})]$ ，由於 SPEC 中要求 gain 值要為 30，可以先將 $1 + \frac{R_1}{R_2}$ 估算為 30 代入後者誤差項：

$$1 - \frac{1}{A_0}(1 + \frac{R_1}{R_2}) \cong 0.97, \quad A_0 = 1000$$

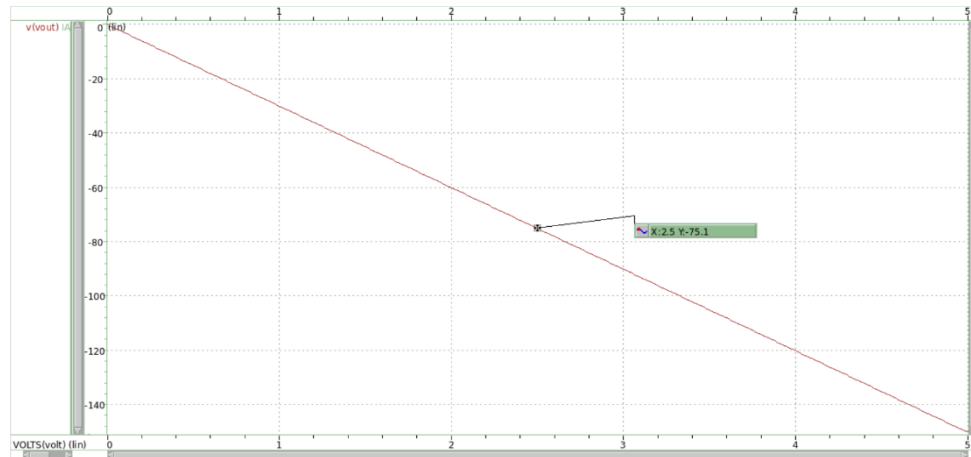
可以知道由於 A_0 不是無限大，會導致 gain 值有誤差，會比預期小約 3%，因此需要調大 $1 + \frac{R_1}{R_2}$ 成 $\frac{30}{0.97} = 30.93 \cong 31$ ，因此選擇 $R_1 = 30000 \Omega$ 、 $R_2 = 1000 \Omega$ 作為本題的設計。

Part III – Inverting Amplifier

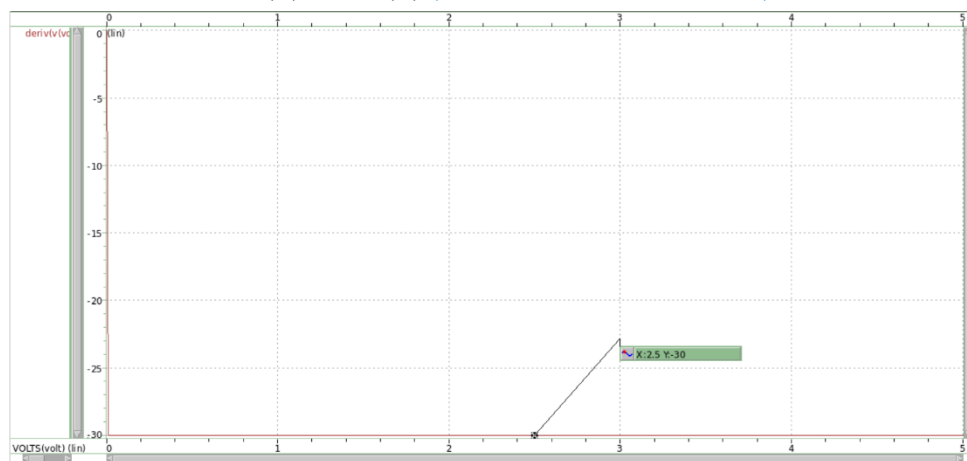
參數選用：(選用原因在後續會進行說明)

$$R_1 = 31000 \, \Omega, R_2 = 1000 \, \Omega$$

(a) DC Sweep：



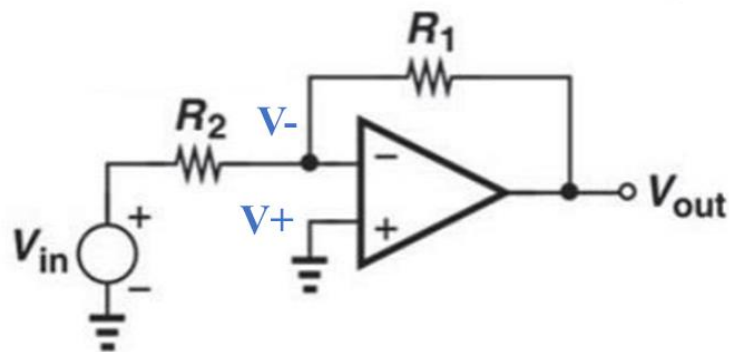
Vout(V) vs. Vin(V) ($V_{out} = -75.1 \text{ V}$ at $V_{in} = 2.5 \text{ V}$)



dV_{out}/dV_{in} vs. Vin(V) ($dV_{out}/dV_{in} = -30$ at $V_{in} = 2.5 \text{ V}$)

可以看到當 $V_{in} = 2.5 \text{ V}$ 時，斜率為-30，代表設計有滿足 SPEC 的所求。

(b) TF Analysis：



先使用上圖的資訊與 Op Amp 的特性分析電壓的關係如下：

$$V_+ = GND, \quad \frac{V_- - V_{in}}{R_2} + \frac{V_- - V_{out}}{R_1} = 0 \text{ (by KCL),}$$

$$V_{out} = A_0(V_+ - V_-), \quad A_0 = 1000$$

可以得到 $\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{-R_1}{R_1+R_2}A_0}{1+\frac{R_2}{R_1+R_2}A_0} = -30.039$ ，再來進行 TF Analysis 去驗證結果是否正確。

```

****      small-signal transfer characteristics

v(vout)/v1                      = -30.0388
input resistance at v1          = 1.0310k
output resistance at v(vout)    = 0.

```

TF Analysis 的數據會被存放在 .lis 檔中，如上圖所示，其中第一項 $gain = -30.039$ ，完全符合手算的結果，且與 DC Sweep 微分曲線的結果相同。

第二項的 $R_{in} = 1031 \Omega$ ，若要計算 R_{in} ，只要將 v_{out} 與 GND 設成斷路，代入模型中計算 v_{in} 與電流的比值即可。此時 $R_{in} = \frac{R_1 + (1 + A_0)R_2}{1 + A_0} = 1031$ ，與測量結果相符合。

而最後一項的 $R_{out} = 0 \Omega$ ，若要計算 R_{out} ，只要將 $v_{in} = 0$ 代入模型中計算 v_{out} 與電流的比值即可。此時 $R_{out} = R_{out.op} // (R_1 + R_{in.op} // R_2) = 0$ ，與測量結果相符合。

由上述可以知道，測量結果都與手算結果相符合，代表 Op Amp 模型的建立與使用是正確的。

綜上來看，雖然 Inverting Amplifier 能夠將訊號放大約 30 倍，但是由於 R_{in} 不大，因此會讓外來訊號在傳入 Inverting Amplifier 時，受 Input 端外接電阻的影響，而導致放大效果不如預期來的大。

(c) 設計過程：

首先考慮(b)中所計算的 $gain$ 值公式 $\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{-R_1}{R_1+R_2}A_0}{1+\frac{R_2}{R_1+R_2}A_0} = \frac{\frac{-R_1}{R_2}}{1+\frac{1}{A_0}(1+\frac{R_1}{R_2})}$ ，在 $\frac{1}{A_0}(1 + \frac{R_1}{R_2}) \ll 1$ 時，有 $gain \cong -\frac{R_1}{R_2}[1 - \frac{1}{A_0}(1 + \frac{R_1}{R_2})]$ ，由於 SPEC 中要求 $gain$ 值要為-30，可以先將 $\frac{R_1}{R_2}$ 估算為 30 代入後者誤差項：

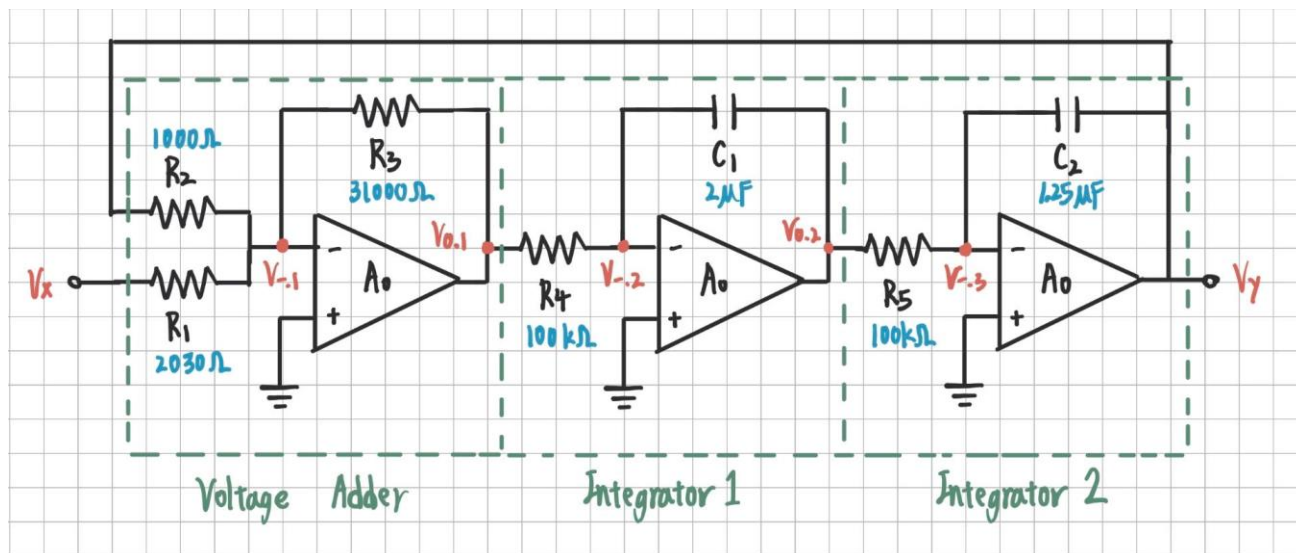
$$1 - \frac{1}{A_0}(1 + \frac{R_1}{R_2}) \cong 0.969, \quad A_0 = 1000$$

可以知道由於 A_0 不是無限大，會導致 $gain$ 值有誤差，會比預期小約 3%，因此需要調大 $\frac{R_1}{R_2}$ 成 $\frac{30}{0.969} = 30.96 \cong 31$ ，因此選擇 $R_1 = 31000 \Omega$ 、 $R_2 = 1000 \Omega$ 作為本題的設計。

Part IV – Voltage Adder + Integrator

(a) 設計過程：

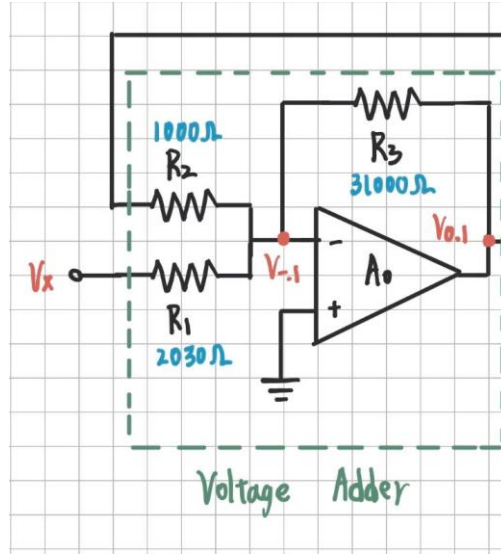
先觀察題目要我們設計的方程式，可以看到是先使用 Voltage Adder 將 V_x 和 V_y 加總後，再進行兩次的積分，可以注意到積分後的結果也是 V_y ，因此在設計時需要將最後的 Output 連接回 Voltage Adder 的其中一個 Input。因此這題的設計除了 Voltage Adder 和兩個 Integrator 各自各自的回授外，還有一個跨越三個 Op Amp 的回授系統，設計圖如下：



由前述小題的設計經驗，由於 A_0 不是無限大，會導致 gain 值有誤差，若 Voltage Adder 的放大倍率選擇太大的話，就會導致誤差過大而無法滿足設計的預期，加上 Voltage Adder 自身的 close loop gain 不可能超過使用的 Op Amp gain(1000)，因此設計將一部分的放大工作交給剩下兩個 Integrator 來做：

$$V_y(t) = \int \left(\int -600 V_x(t) - 1200 V_y(t) dt \right) dt = -8 \int \left(-5 \int -15 V_x(t) - 30 V_y(t) dt \right) dt$$

考慮在前述 IA 的設計中已經有設計完 gain 為 -30 的設計，因此採用上式的倍率分配，Voltage Adder 負責將 V_x 放大 -15 倍、將 V_y 放大 -30 倍，再由兩個 Integrator 負責再各自放大 -5 倍、-8 倍(這裡倍數設定不同只是為了讓倍率剛好是整數)，即等效於題目給的方程式。



首先看 Voltage Adder 的設計，先使用上圖的資訊與 Op Amp 的特性分析電壓的關係如下：

$$V_+ = GND,$$

$$\frac{V_- - V_x}{R_1} + \frac{V_- - V_y}{R_2} + \frac{V_- - V_{out}}{R_3} = 0 \text{ (by KCL),}$$

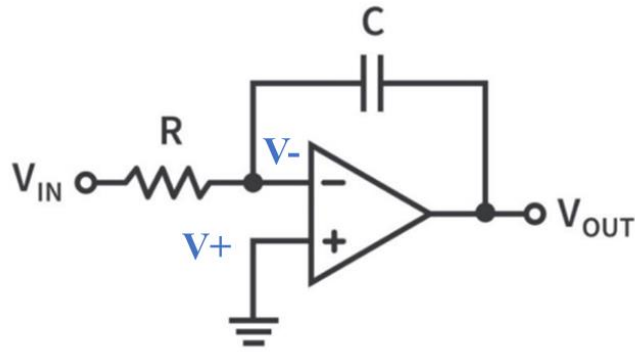
$$V_{out} = A_0(V_+ - V_-), \quad A_0 = 1000$$

$$\text{可以得到 } V_{out} = \frac{\frac{-R_3}{R_1}}{1 + \frac{1}{A_0}(1 + \frac{R_2 + R_3}{R_1})} V_x + \frac{\frac{-R_2}{R_1}}{1 + \frac{1}{A_0}(1 + \frac{R_2 + R_3}{R_1})} V_y.$$

再來考慮 R_1 、 R_2 、 R_3 的設計，在 $\frac{1}{A_0} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_3}{R_1}\right) \ll 1$ 時，有係數誤差項 $\cong 1 - \frac{1}{A_0} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_3}{R_1}\right)$ ，為了讓 V_x 係數等於-15、 V_y 係數等於-30，可以先將 $\frac{R_3}{R_1}$ 估算為 15、 $\frac{R_2}{R_1}$ 估算為 30 代入後者誤差項：

$$1 - \frac{1}{A_0} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_3}{R_1}\right) \cong 0.954, \quad A_0 = 1000$$

可以知道由於 A_0 不是無限大，會導致 gain 值有誤差，會比預期小約 4.5%，因此需要調大 $\frac{R_3}{R_1}$ 成 $\frac{15}{0.954} = 15.72$ ，先令 R_3 選擇 31000 歐姆，因此選擇 $R_1 = \frac{R_3}{15.72} = 1972 \Omega$ ，2030 Ω 作為本題的設計(取較大是考慮後續積分器放大倍率會因為 finite gain 而變小)。需要調大 $\frac{R_2}{R_1}$ 成 $\frac{30}{0.954} = 31.44$ ，因此選擇 $R_2 = \frac{R_3}{31.44} = 986 \Omega \cong 1000 \Omega$ 作為本題的設計。



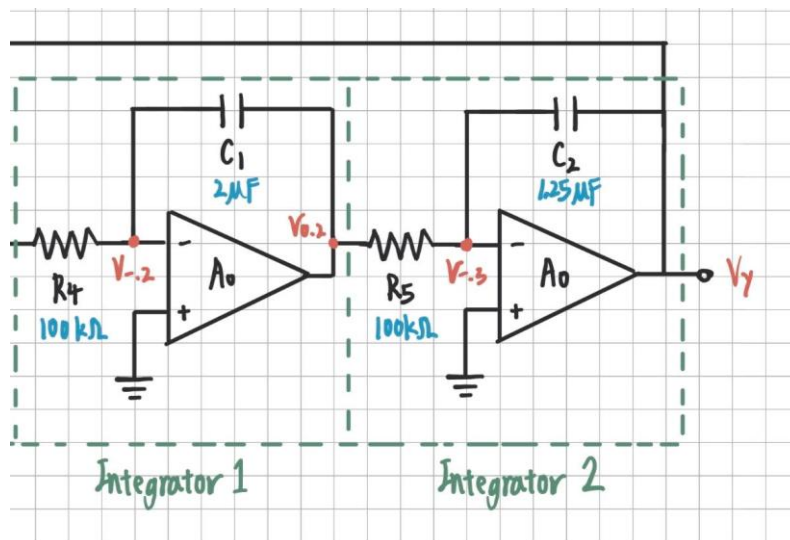
再來看 Integrator 的設計，先使用上圖的資訊與 Op Amp 的特性分析電壓的關係如下：

$$V_+ = GND,$$

$$\frac{V_- - V_{in}}{R} + \frac{V_- - V_{out}}{\frac{1}{sC}} = 0 \text{ (by KCL),}$$

$$V_{out} = A_0(V_+ - V_-), \quad A_0 = 1000$$

可以得到 $\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-1}{\frac{1}{A_0} + (1 + \frac{1}{A_0})sRC} \cong \frac{-1}{sRC}$ ，也就是 $V_{out}(t) = \frac{-1}{RC} \int V_{in}(t) dt$ 。



如前述所提到，Integrator 1 和 Integrator 2 各自需要再放大訊號-5 倍、-8 倍。因此若要使 Integrator 1 放大-5 倍，就要讓 $R_4 C_1 = 0.2$ ，選擇 $R_4 = 100 \text{ k}\Omega$ 、 $C_1 = 2 \text{ }\mu\text{F}$ 即可。而若要使 Integrator 2 放大-8 倍，就要讓 $R_5 C_2 = 0.125$ ，因此選擇 $R_5 = 100 \text{ k}\Omega$ 、 $C_2 = 1.25 \text{ }\mu\text{F}$ 即可。

(b) 計算 V_y 函式與週期：

首先使用在(a)中所選擇的元件，計算 Voltage Adder、Integrator 確切的放大倍率為何。

● **Voltage Adder：**

將所選擇的元件參數 $R_1 = 2030 \Omega$ 、 $R_2 = 1000 \Omega$ 、 $R_3 = 31000 \Omega$ 代入推論的式子中：

$$V_{out} = \frac{\frac{-R_3}{R_1}}{1 + \frac{1}{A_0} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_3}{R_1}\right)} V_x + \frac{\frac{-R_2}{R_1}}{1 + \frac{1}{A_0} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_3}{R_1}\right)} V_y, \quad A_0 = 1000$$

可以得到 $V_{out} = -15.026 V_x - 30.039 V_y$ 。

● **Integrator 1：**

將所選擇的元件參數 $R_4 = 100 \text{ k}\Omega$ 、 $C_1 = 2 \mu\text{F}$ 代入推論的式子中：

=

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-1}{\frac{1}{A_0} + \left(1 + \frac{1}{A_0}\right) s R_4 C_1} \cong \frac{-1}{\left(1 + \frac{1}{A_0}\right) s R_4 C_1}, \quad A_0 = 1000$$

可以得到積分後的訊號會放大-4.995 倍。

● **Integrator 2：**

將所選擇的元件參數 $R_5 = 100 \text{ k}\Omega$ 、 $C_2 = 1.25 \mu\text{F}$ 代入推論的式子中：

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-1}{\frac{1}{A_0} + \left(1 + \frac{1}{A_0}\right) s R_5 C_2} \cong \frac{-1}{\left(1 + \frac{1}{A_0}\right) s R_5 C_2}, \quad A_0 = 1000$$

可以得到積分後的訊號會放大-7.992 倍。

● **合併：**

將上述全部合併後的方程式如下：

$$\begin{aligned} V_y(t) &= -7.992 \int (-4.995 \int -15.026 V_x(t) - 30.039 V_y(t) dt) dt \\ &= \int (\int -599.839 V_x(t) - 1199.158 V_y(t) dt) dt \end{aligned}$$

將兩邊同時微分兩次並整理可得：

$$\frac{d^2}{dt^2} V_y(t) + 1199.158 V_y(t) = -599.839 V_x(t)$$

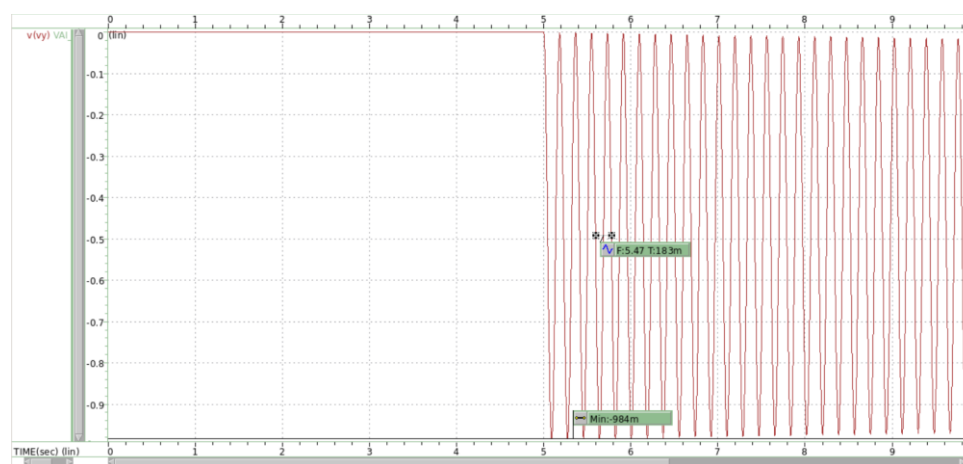
因為 $V_x(t)$ 為 unit step input，當 $V_x(t) = 0$ 時為穩態，此時 $V_y(t)$ 也會為 0。

而當 $V_x(t)$ 變為 1 後，令 $V_y(t) = A \cos \omega t + Bu(t)$ 代入解非齊次微分方程，可以得到：

$$A\omega^2 - 1199.158 A = 0, \quad A = \frac{599.839}{1199.158}, \quad B = \frac{-599.839}{1199.158} \text{ (By initial value)}$$

最後得到 $V_y(t) = 0.500 \cos 34.629t - 0.500u(t)$ ，振幅 = 0.500，週期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 181.4 \text{ msec}$ 。

(c) Hspice 測量結果：



Vy(V) vs. time(sec) (T = 183 msec) (min = -0.984 V)

(d) 誤差計算：

實際跑 Hspice 後的結果如上圖，可以看到所測量到的週期為 183 msec(5.47 Hz)，與計算結果 181.4 msec(5.51 Hz)相差約 0.9%。

另外看測量結果的 min 為 -0.984 V，代表振幅為 0.492 V，與計算結果 0.500 V 相差 1.6%。

結合週期與振幅，可以看出測量結果非常準確，但可以觀察到圖形有微小 decay 的情況，這是因為實際上 Integrator 的放大式子中，在分母有常數項(沒有 s 的項)，代表在 A_0 不是無限大的情況下，只能當作近似於積分的效果，實際上的 $V_y(t)$ 表達式還是要透過解 Laplace 逆轉換來得到(先將前述推論的放大倍率乘在一起用 s 表示，再使用線上數學工具進行逆轉換)。

可以看到其中有 e 項，會使振幅隨之遞減，讓圖形出現 decay，符合上題的結果趨勢。

$$\text{求反函数 拉普拉斯} \frac{-15.026}{s \cdot (0.001 + 0.2002s) \cdot (0.001 + 0.125125s) + 30.039s}$$

解答

$$-0.50021...H(t) + 0.50021...e^{-0.00649...t} \cos(34.62889...t) + 0.00009...e^{-0.00649...t} \sin(34.62889...t)$$