

复变函数论第八次作业

20234544 毛华豪

Task1:

证明 这里仅仅需要证明不等式，所以考虑放缩相应的值。设 $f(z) = x^2 + iy^2$ 由于：

$$\left| \int_L f(z) dz \right| \leq \int_L |f(z)| |dz|$$

而：

$$|f(z)| = |x^2 + iy^2| = \sqrt{x^4 + y^4} \xrightarrow{x=0} \sqrt{y^4} = |y^2| \leq 1$$

并且有：

$$|dz| = ds$$

所以有：

$$\begin{aligned} \left| \int_L f(z) dz \right| &\leq \int_L |f(z)| |dz| \\ &\leq 1 \cdot \int_{-1}^1 ds = 1 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

□

Task2:

证明 同 Task1 的思路有:

$$\left| \int_L \frac{dz}{z^2} \right| \leq \int_L \left| \frac{1}{z^2} \right| |dz|$$

由于:

$$\left| \frac{1}{z^2} \right| = \frac{1}{|z|^2} \leq 1$$

并且有:

$$|dz| = ds$$

所以有:

$$\begin{aligned} \left| \int_L \frac{dz}{z^2} \right| &\leq \int_L \left| \frac{1}{z^2} \right| |dz| \\ &\leq 1 \cdot \int_L ds = 1 \cdot 1 = 1 \leq 2 \end{aligned}$$

□

Task3:

证明 由于原点是奇点所以在此处无法使用柯西积分定理, 考虑:

$$2\pi f(0) = \int_0^{2\pi} f(0) d\theta$$

则即证明:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) - f(0) d\theta = 0$$

由于函数在原点处解析所以, 点 $z = re^{i\theta}$ 即原点外半径为 r 的圆上的点, 可以得到存在原点处的导数 $f'(0)$ 使得:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{f(re^{i\theta}) - f(0)}{re^{i\theta}} = f'(0)$$

由于:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} r e^{i\theta} f'(0) d\theta = \lim_{r \rightarrow 0^+} r \cdot f'(0) \cdot \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta = 0$$

所以 $\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) - f(0) d\theta = 0$ 成立。 \square

Task4:

解 利用 *Cauchy* 积分定理证明复积分: (1) 对于积分 $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2}$, 由于函数 $f(z) = \frac{1}{z^2+2}$ 的奇点为 $z = \pm\sqrt{2}i$ 处于圆周 $|z|=1$ 之外, 所以由柯西积分定理: $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2} = 0$ (2) 对于积分 $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2}$, 由于函数 $f(z) = \frac{1}{z^2+2}$ 的奇点在圆周 $C: |z|=2$ 之内, 考虑两个小圆周 $C_1: |z-\sqrt{2}i|=r$ 以及 $C_2: |z+\sqrt{2}i|=r$, 方向均取逆时针为正方向, 则函数在 $C \cup C_1^- \cup C_2^-$ 所围成的多连通区域上是解析的, 由柯西积分定理原积分:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{z^2+2} &= \int_{C \cup C_1^- \cup C_2^- \cup C_1^+ \cup C_2^+} \frac{dz}{z^2+2} \\ &= \int_{C \cup C_1^- \cup C_2^-} \frac{dz}{z^2+2} + \int_{C_1^+} \frac{dz}{z^2+2} + \int_{C_2^+} \frac{dz}{z^2+2} \\ &= 0 + \int_{C_1^+} \frac{dz}{z^2+2} + \int_{C_2^+} \frac{dz}{z^2+2} \end{aligned}$$

由于:

$$\begin{aligned} &\int_{|z-a|=r} \frac{dz}{z^2-a^2} \\ &= \frac{1}{2a} \left(\int_{|z-a|=r} \frac{dz}{z-a} - \int_{|z-a|=r} \frac{dz}{z+a} \right) \\ &= \frac{1}{2a} (2\pi i - 0) = \frac{\pi i}{a} \end{aligned}$$

所以原积分为:

$$\begin{aligned} & 0 + \int_{C_1^+} \frac{dz}{z^2 + 2} + \int_{C_2^+} \frac{dz}{z^2 + 2} \\ &= 0 + \frac{\pi i}{\sqrt{2}i} + \frac{\pi i}{-\sqrt{2}i} = 0 \end{aligned}$$

(3) 对于积分 $\int_{|z|=1} \frac{dz}{(2z+1)(z-2)}$, 由于圆周 $C: |z|=1$ 之内包含函数 $g(z) = \frac{1}{(2z-1)(z-2)}$ 的奇点 $z = -\frac{1}{2}$, 所以考虑一个小圆周 $C': |z + \frac{1}{2}| = r$, 方向为逆时针, 则同 (2), 原积分可以变为:

$$\begin{aligned} & \int_{|z|=1} \frac{1}{5} \left(\frac{1}{z-2} - \frac{2}{2z+1} \right) dz \\ &= -\frac{1}{5} \int_{C'^+} \left(\frac{2}{2z+1} \right) dz = -\frac{2\pi i}{5} \end{aligned}$$

Task5:

证明 要求证明柯西积分公式:

定义函数 $F(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z}$, 其中 $z \in D$ 为一定点, 作为 ξ 的函数, F 在 D 上除了 $\xi = z$ 点之外都解析。以 z 为中心, 充分小的 $\rho > 0$ 为半径做一个顺时针方向的圆周 $\gamma_\rho: |\xi - z| = \rho$, 使得 γ_ρ 在 C_0^+ 之内, 在其余的 C_k^- 之外。令 $\Gamma = C \cup \gamma_\rho = C_0 + \cup C_1^- \cup C_2^- \cup \cdots \cup C_n^- \cup \gamma_\rho^-$, 记 Γ 围成的区域为 D' , 则 F 在 D' 上解析, 且在 $\Gamma \cup D'$ 上连续, 对 F 在 D' 上应用柯西积分定理有:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} F(\xi) d\xi = \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \left(\int_{C_0^+} + \int_{C_1^-} + \cdots + \int_{C_n^-} + \int_{\gamma_\rho^-} \right) F(\xi) d\xi \\ &= \left(\int_C - \int_{\gamma_\rho^+} \right) F(\xi) d\xi \end{aligned}$$

所以可以得到:

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

由于:

$$\int_{\gamma_\rho^+} \frac{1}{\xi - z} d\xi = \int_{|\xi - z| = \rho} \frac{1}{\xi - z} d\xi = 2\pi i$$

故:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

故我们所需要证明的第一个等式即:

$$\int_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi = \int_{\gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

考虑做差求解。事实上:

$$\left| \int_{\gamma_\rho^+} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| \leq \int_{\gamma_\rho^+} \frac{|f(\xi) - f(z)|}{|\xi - z|} |d\xi|$$

由于 f 在 $D \cup C$ 上连续, 即在一个闭的区域上连续, 因而一直连续, 故:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \quad s.t.$$

$$|w - z| < \delta (w, z \in \overline{D}) \Rightarrow |f(w) - f(z)| < \epsilon.$$

所以当 $\rho < \delta$ 时, 有 $|\xi - z| = \rho < \delta \Rightarrow |f(\xi) - f(z)| < \epsilon$, 所以:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\rho^+} \left| \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right| \cdot |d\xi| &\leq \int_{\gamma_\rho^+} \frac{\epsilon}{\rho} |d\xi| \\ &= \frac{\epsilon}{\rho} \int_{\gamma_\rho^+} |d\xi| = \frac{\epsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = 2\pi\epsilon \end{aligned}$$

所以原积分为:

$$\left| \int_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi - \int_{\gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| \leq 2\pi\epsilon \rightarrow 0 (\epsilon \rightarrow 0^+)$$

故而:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D \quad (1)$$

下一步证明: f 在 D 上内的各阶导数满足:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad z \in D, n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

当 $n = 1$ 时, 即证明:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi, \quad z \in D$$

我们有:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

当 Δz 足够小时, 我们有:

- $|\Delta z| > 0$
- $(z + \Delta z) \in D$

有上一步的结论可知:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \\ f(z + \Delta z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - (z + \Delta z)} d\xi \end{cases} \\ \Rightarrow & \left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z - \Delta z)} d\xi \right| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_C \frac{|f(\xi)| \cdot |d\xi|}{|\xi - z| \cdot |\xi - z - \Delta z|} \right| \end{aligned}$$

由于 f 在 C 上连续, 所以:

$$\exists M > 0 \text{ s.t. } |f(\xi)| \leq M, \forall \xi \in C.$$

另外, z 在开集 D 之内, 故 z 到 D 的边界上的点 ξ 的最小距离 $d > 0$ 即:

$$0 < d = \inf_{\xi \in C} |\xi - z| = \min_{\xi \in C} |\xi - z|$$

所有有:

$$\begin{cases} |\xi - z| \geq d, \forall \xi \in C; \\ |\xi - z - \Delta z| \geq |\xi - z| - |\Delta z| \\ \geq d - |\Delta z| \stackrel{|\Delta z| < \frac{d}{2}}{\geq} d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} \end{cases}$$

所有当 $|\Delta z| < \frac{d}{2}$ 时, 有:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z - \Delta z)} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{|\Delta z| \cdot |f(\xi)|}{|(\xi - z)^2(\xi - z - \Delta z)|} d\xi \leq \frac{M}{2\pi} \int_C \frac{|\Delta z|}{d^2 \times \frac{d}{2}} d\xi \\ &= \frac{M}{\pi d^3} |\Delta z| \cdot L \end{aligned}$$

其中 L 为 C 的弧长。所有当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时 $|f'(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi| \leq 0$, 所以 $n = 1$ 时, 结论成立, 有了 $f'(z)$ 之后, 重复上面的讨论即得到对任意的 $n \geq 1$ 结论成立 \square

Task6:

解 C 为逆时针方向的圆周 $|z| = 2$ 求积分: (1): 对于积分 $\int_C \frac{dz}{\cos(\frac{z}{2})} = \int_C \frac{\frac{z}{\cos \frac{z}{2}} dz}{z - 0}$, 因为函数 $f(z) = \frac{z}{\cos \frac{z}{2}}$ 在圆盘 $|z| < 2$ 内部解析, 且在 $|z| \leq 2$

上连续, 所以由柯西积分公式:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-0)} dz = f(0) = \frac{0}{\cos 0} = 0$$

所以原积分值为 0 (2): 对于积分 $\int_C \frac{e^{\sin z}}{100z^2} dz = \int_C \frac{e^{\sin z}}{(10z+i)(10z-i)} dz = \frac{1}{20i} \int_C \left(\frac{e^{\sin z}}{z - \frac{i}{10}} - \frac{e^{\sin z}}{z + \frac{i}{10}} \right) dz$, 由于 $f(z) = e^{\sin z}$ 在 C 的内部 $|z| < 2$ 解析, 在 $|z| \leq 2$ 上连续, 所以由柯西积分公式, 原积分变为:

$$\frac{1}{20i} \cdot 2\pi i \cdot \left(f\left(\frac{i}{10}\right) - f\left(-\frac{i}{10}\right) \right) = \frac{\pi}{5} \cdot \left(\frac{e^{\sin \frac{i}{10}} - e^{-\sin \frac{i}{10}}}{2} \right)$$

因为:

$$\begin{aligned} \sin \frac{i}{10} &= \frac{e^{-\frac{1}{10}} - e^{\frac{1}{10}}}{2i} \\ \sin \frac{-i}{10} &= \frac{e^{\frac{1}{10}} - e^{-\frac{1}{10}}}{2i} \\ \Rightarrow e^{\sin \frac{i}{10}} &= e^{\frac{e^{\frac{1}{10}} - e^{-\frac{1}{10}}}{2} i} \\ a = \frac{e^{\frac{1}{10}} - e^{-\frac{1}{10}}}{2} &\Rightarrow \cos a + i \sin a \end{aligned}$$

同理 $e^{\sin \frac{-i}{10}} = \cos a - i \sin a$ 所以原积分为:

$$\frac{\pi}{5} i \sin a = \frac{\pi}{5} i \sin \left(\sinh \left(\frac{1}{10} \right) \right)$$

Task7:

解 利用柯西积分公式求解复积分:

$$\int_{C_j} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} z \right)}{z^2 - 1} dz, \quad j = 1, 2, 3$$

(j=1): $C_1 : |z+1| = \frac{1}{2}$, 函数 $f(z) = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} z \right)}{z^2 - 1}$ 有奇点 $z = \pm 1$.

原积分变为:

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{C_1} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z-1} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z+1} \right) dz$$

由柯西积分定理, 前一项为 0, 所以原积分为:

$$-\frac{1}{2} \cdot \int_{C_1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z+1} dz$$

由于函数 $g(z) = \sin\frac{\pi}{4}z$ 在 C_1 内部 D 解析, 且在 $C_1 \cup D$ 上连续, 所以由柯西积分公式, 原积分变为:

$$-\frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \sin \frac{-1 \cdot \pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i$$

(j=2): $C_2 : |z-1| = \frac{1}{2}$, 类似 (j=1) 分解可以得到原积分为:

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{C_2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z-1} dz = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i$$

(j=3): $C_3 : |z| = 4$ 则此时两个奇点都在 C_3 的内部。考虑 C_1, C_2 , 则原积分变为:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \int_{C_3 \cup C_1^- \cup C_2^- \cup C_1^+ \cup C_2^+} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z-1} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z+1} \right) dz \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{C_3 \cup C_1^- \cup C_2^-} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z-1} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z+1} \right) dz \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \int_{C_1^+ \cup C_2^+} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z-1} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z+1} \right) dz \end{aligned}$$

由于函数 $\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z-1} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z+1} \right)$ 在 $C_3 \cup C_1^- \cup C_2^-$ 所包含的区域内解析, 有柯西积分定理原积分变为:

$$0 + \frac{1}{2} \cdot \int_{C_1^+ \cup C_2^+} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z-1} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z+1} \right) dz = \sqrt{2} \pi i$$

Task8:

证明 函数 $f(z) = e^z$ 在 $C: |z| = 1$ 内部 D 解析, 且在 $D \cup C$ 上连续, 所以由柯西积分公式:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz = \int_C \frac{e^z}{z-0} dz = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i$$

令 $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta} d\theta$ 则原积分变为:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}} \cdot ie^{i\theta} d\theta = 2\pi i \\ & \Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta + i \sin \theta} d\theta = 2\pi \\ & \Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} e^{i \sin \theta} d\theta = 2\pi \\ & \Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} (\cos \sin \theta + i \sin \sin \theta) d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

通过实部和虚部相对应可以得到:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta = 2\pi \\ & \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin(\sin \theta) d\theta = 0 \end{aligned}$$

又令 $u = 2\pi - \theta$, 有:

$$\begin{aligned} 2\pi &= \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta + \int_{\pi}^0 e^{\cos(2\pi-u)} \cos(\sin(2\pi-u)) d(2\pi-u) \\ &= 2 \int_0^{\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta \\ &\Rightarrow \int_0^{\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta = \pi \end{aligned}$$

□