复变函数论第四次作业

20234544 毛华豪

Task1:

证明 可以将原函数看成

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{(x^3-y^3)+i(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & z=x+iy\neq 0\\ 0, & z=0=0+i0\end{cases}$$

所以令 $u(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, v(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\rightarrow f(z)=f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$. 我们要证明它在原点满足 $Cauchy-Riemann$ 方程：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}_{(0,0)}&=\lim_{h\to 0}\frac{u(h,0)-u(0,0)}{h}=1\\ \frac{\partial u}{\partial y}_{(0,0)}&=\lim_{h\to 0}\frac{u(0,h)-u(0,0)}{h}=-1\\ \frac{\partial v}{\partial x}_{(0,0)}&=\lim_{h\to 0}\frac{v(h,0)-v(0,0)}{h}=1\\ \frac{\partial v}{\partial y}_{(0,0)}&=\lim_{h\to 0}\frac{v(0,h)-v(0,0)}{h}=1\\ \Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}_{(0,0)}&=\frac{\partial v}{\partial y}_{(0,0)}\\ \frac{\partial u}{\partial y}_{(0,0)}&=-\frac{\partial v}{\partial x}_{(0,0)}\end{aligned}$$

所以函数 $f(z)$ 在原点 $z=0$ 处满足 $Cauchy-Riemann$ 方程。下证其不可微。考虑函数 $u(x,y)$ 的可微性。因为:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x,y\to 0}\frac{u(x,y)-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot x-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot y-u(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\\
&=\lim_{x,y\to 0}\frac{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}-x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x,y\to 0}\frac{-xy^2+yx^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&\overset{y=kx,x\to 0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{k(1-k^2)}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{x^3}{|x|^3}
\end{aligned}$$

所以取值和 k 相关，即 $u(x,y)$ 在原点处不可微，由可微的充要条件,$f(z)$ 在原点不可微。 $\square$

Task2:

证明 根据调和函数的定义，我们有 $g(z)=ln(|z|)\overset{z=x+iy}{=}\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)$ 是一个调和函数，又因为 D 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个单连通区域，所以我们知道存在一个 $ln(|z|)$ 的共轭调和函数，记作 v，也是解析的，取 D 上的任意一点 z_0，令 $\alpha=arg(z_0)-v(z_0), f(z)=ln|z|+i(v(z)+\alpha), z\in D$，由于 $ln|z|+iv(z)$ 是一个解析函数，所以 $f(z)$ 也是一个解析函数。考虑 $\frac{e^{f(z)}}{z}$ 的模长，$\left|\frac{e^{f(z)}}{z}\right|=\frac{\left|e^{ln|z|+i(v(z)+\alpha)}\right|}{|z|}=\frac{|z|\left|e^{i(v(z)+\alpha)}\right|}{|z|}=1$，所以模长为定值，又是一个解析函数（$f(z)$ 解析故 $e^{f(z)}$ 解析且 $0\neq D$ 所以 $z\neq 0$ 且 z 解析）它一定是一个常值函数，假设 $\frac{e^{f(z)}}{z}=c\to e^{f(z)}=cz$，代入 $z=z_0$ 有:

$$z_0=|z_0|\cdot e^{iarg(z_0)}=cz_0\to c=1$$

所以有 $e^{f(z)}=z$ 即存在这样的单值解析分支。 $\square$

Task3:

解 求解 $\cos(1-i), (2i)^i$ 的值

$\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ 所以:

$$\begin{aligned}\cos(1-i) &= \frac{e^{1+i}+e^{-1-i}}{2} = \frac{e\cdot e^i + \frac{1}{e}\cdot e^{-i}}{2} \\ &\xrightarrow{e^i=\cos 1+i\sin 1, e^{-i}=\cos 1-i\sin 1} = \frac{(e^2+1)\cos 1 + i(e^2-1)\sin 1}{2e}\end{aligned}$$

对于 $(2i)^i$，因为 $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ 所以有 $(2i)^i = 2^i \cdot e^{-\frac{\pi}{2}}$，只要求 2^i

$$2^i = e^{iln2} = \cos(ln2) + i\sin(ln2)$$
$$(2i)^i = e^{-\frac{\pi}{2}}\cdot(\cos(ln2)+i\sin(ln2))$$

Task4:

证明 因为 $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ 所以有：

$$\begin{aligned}\sin^2 z + \cos^2 z &= (\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i})^2 + (\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2})^2 \\ &= \frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4} = 1\end{aligned}$$

对于 $\cos(z+w)$，因为 $\cos(z+w) = \dfrac{e^{iz+iw}+e^{-iz-iw}}{2}$ 又因为:

$$\cos z\cos w = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\cdot\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} = \frac{e^{iz+iw}+e^{iz-iw}+e^{iw-iz}+e^{-iz-iw}}{4}$$

又因为 $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ 所以有:

$$\sin z\sin w = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i} = \frac{e^{iz+iw}-e^{iz-iw}-e^{iw-iz}+e^{-iz-iw}}{-4}$$

所以 $\cos z \cos w - \sin z \sin w$ 为:

$$\frac{e^{iz+iw}+e^{iz-iw}+e^{iw-iz}+e^{-iz-iw}}{4} - \frac{e^{iz+iw}-e^{iz-iw}-e^{iw-iz}+e^{-iz-iw}}{-4} =$$
$$\frac{e^{iz+iw}+e^{iz-iw}+e^{iw-iz}+e^{-iz-iw}}{4} + \frac{e^{iz+iw}-e^{iz-iw}-e^{iw-iz}+e^{-iz-iw}}{4} =$$
$$\frac{e^{iz+iw}+e^{-iz-iw}}{2} = \cos(z+w)$$

□

Task5:

证明 假设 $Log(z-1) = a+ib$ 我们只要求 a 的值即可，又因为

$$e^{Log(z-1)} = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a \cdot (\cos(b) + i\sin(b)) = z-1$$
$$\longrightarrow z = (e^a\cos(b)+1) + i(e^a\sin(b)) \quad z = r\cdot e^{i\theta} = r\cdot(\cos\theta+\sin\theta)$$
$$\longrightarrow \begin{cases} e^a\sin b = r\sin\theta \\ e^a\cos b + 1 = \cos\theta \end{cases} \longrightarrow (e^a)^2 = \sqrt{(r\sin\theta)^2 + (r\cos\theta-1)^2}$$
$$\longrightarrow a = \frac{1}{2}\ln(1+r^2-2r\cos\theta)$$

□

Task6:

证明 要求 $\dfrac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}$ 的实部。因为:

$$\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} = \frac{(e^{i\theta}+z)\cdot(e^{-i\theta}-\bar{z})}{(e^{i\theta}-z)\cdot(e^{-i\theta}-\bar{z})}$$
$$= \frac{1-\bar{z}e^{i\theta}+ze^{-i\theta}-|z|^2}{1-ze^{-i\theta}-\bar{z}e^{i\theta}+|z|^2}$$

考虑 $\left|1-\bar{z}e^{i\theta}\right|^2$:

$$\begin{aligned}
&\left|1-\bar{z}e^{i\theta}\right|^2 = (1-\bar{z}e^{i\theta})\overline{(1-\bar{z}e^{i\theta})} \\
&\because e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\
&\therefore \bar{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} \\
&\therefore (1-\bar{z}e^{i\theta})\overline{(1-\bar{z}e^{i\theta})} = (1-\bar{z}e^{i\theta})(1-ze^{-i\theta}) \\
&= 1 - ze^{-i\theta} - \bar{z}e^{i\theta} + |z|^2
\end{aligned}$$

再考虑分子 $1-\bar{z}e^{i\theta}+ze^{-i\theta}-|z|^2$，因为 $\overline{ze^{-i\theta}} = \bar{z}e^{i\theta}$ 所以 $-\bar{z}e^{i\theta}+ze^{-i\theta}$ 一定是纯虚数，所以 $Re(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}) = \frac{1-|z|^2}{1-ze^{-i\theta}-\bar{z}e^{i\theta}+|z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}e^{i\theta}|^2}$ □

Task7:

解 讨论多值函数 $f(z)=\sqrt[3]{(1-z)z^2}$ 的支点和支割线。
因为:

$$f(z)=\sqrt[3]{(1-z)z^2}=\sqrt[3]{|z|\cdot|z|\cdot|1-z|}\cdot e^{i\frac{2arg(z)+arg(1-z)+2k\pi}{3}}, k=0,1,2$$

考虑 $z=0$ 的情况，以 $z=0$ 为心做一个充分小的回路 C_0，$z=1$ 在回路之外，则当 $z_0\in C_0$ 沿着 C_0 转一圈的过程中，假设我们取 z_0 为 $k=0$ 这一支，$f(z_0)=\sqrt[3]{|z_0|\cdot|z_0|\cdot|1-z_0|}\cdot e^{i\frac{2arg(z_0)+arg(1-z_0)}{3}}$ 则函数值变为 $f(z_0)=\sqrt[3]{|z_0|\cdot|z_0|\cdot|1-z_0|}\cdot e^{i\frac{2(arg(z_0)+2\pi)+arg(1-z_0)}{3}} = f(z_0) = \sqrt[3]{|z_0|\cdot|z_0|\cdot|1-z_0|}\cdot e^{i\frac{2arg(z_0)+arg(1-z_0)}{3}}\cdot e^{\frac{4i\pi}{3}}$ 与原来的函数值不同 ($e^{\frac{4i\pi}{3}}\neq 1$) 所以 $z=0$ 是函数的支点。
同理考虑 $z=1$, 对于 $arg(z_0)$ 来说没有变化而对于 $arg(1-z_0)$ 来说改变了 2π, 由于 $e^{\frac{2i\pi}{3}}\neq 1$ 所以函数值改变了 $z=1$ 也是函数的支点。
对于 $z=\infty$，由于足够大的圆包围了 $z=0, z=1$ 所以当 z_0 沿着回路，设为 C_∞ 转一圈时，$arg(z_0), arg(1-z_0)$ 都变化了相同的 2π, 由于 $e^{\frac{6i\pi}{3}}=1$ 所以 $z=\infty$ 不是函数支点。
而对于 $\mathbb{C}\backslash\{0,1,\infty\}$ 的点来说沿着回路转一圈后 $arg(z_0), arg(1-z_0)$ 都没有发生变化，所以不是支点。

所以综上，函数的支点为 $z=0,z=1$ 支割线可以取线段 $[0,1]$.

Task8:

解　(1)$Log(z)$ 在 $z=1$ 的点取 $2\pi i$ 的分支假设为 $f(z)=\ln|z|+iarg(z)$ 则有 $f(1)=2i\pi$ 我们可知 $arg(1)=2\pi$ 相比于一般认为的 $[-\pi,\pi)$ 对应的 $arg(1)=0$ 增加了 2π，也即这个分支的辐角范围 $[\pi,3\pi)$，所以 $Log(8i)=\ln|8i|+iarg(8i)=\ln 8+iarg(i)=\ln 8+\dfrac{5\pi}{2}$。
(2)$\sqrt[3]{z}$ 在 $z=1$ 点取正值的分支，考虑 $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{|z|}\cdot e^{i\frac{arg(z)+2k\pi}{3}},k=0,1,2$，当 $z=1$ 时为正值，所以 $k=0$，此时我们一般定义的 $arg(z)\in[-\pi,\pi)$，所以 $\sqrt[3]{64i}=\sqrt[3]{|64i|}\cdot e^{i\frac{arg(64i)+0}{3}}=4\cdot e^{i\frac{arg(i)}{3}}=4\cdot e^{i\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{3}+2i$