复变函数论第九次作业

20234544 毛华豪

Task1:

证明 叙述并证明 $Liouville$ 定理:
若 f 在复平面 $\mathbb{C}$ 上解析 (这种函数称为整函数) 且有界，则 f 必为常值函数:
$Proof: \forall a \in \mathbb{C}, \forall R > 0$ 有 f 在 $|z-a| < R$ 上解析，在 $|z-a| \leq R$ 上连续，由 $Cauchy$ 估计有:

$$|f^n(a)| \leq \frac{n!}{R^{n+1}} \max_{|z-a|=R} |f(z)|, \forall n \geq 0$$

特别地，

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{R} M$$

其中 $M > |f(z)|, z \in \mathbb{C}$ 固定 a，让 $R \to \infty$,

$$\Rightarrow f'(a) = 0$$

由 a 的任意性，$f'(z) \equiv 0, z \in \mathbb{C}$，所以 $f(z) \equiv$ 常数。 □

Task2:

证明 叙述并证明 $Morera$ 定理 ($Cauchy$ 积分定理的逆定理)
若 f 在单连通区域 D 上连续，且对于 D 内任意一条分段光滑的闭曲线都有：

$$\int_C f(z)dz = 0$$

则 f 在 D 上解析。
$Proof$: 由条件知道 f 在 D 内的曲线积分与路径无关，所以可以定义函数:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)dw$$

其中 $z_0 \in D$ 为一定点，$z \in D$ 为一动点，由复变函数对积分路径无关的证明过程可得到：F 在 D 上解析且 $F'(z) = f(z), z \in D$，再由 $Cauchy$ 积分公式的证明知道 F' 在 D 上解析，即 f 在 D 上解析。 □

Task3：

证明 叙述并证明解析函数的平均值定理
设函数 f 在开圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ 上解析，在 $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq R\}$ 上连续，则:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta})d\theta$$

$Proof$: 令 $z = a + Re^{i\theta}$，取逆时针方向的圆周，则 $\theta : 0 \to 2\pi$，由 $Cauchy$ 积分公式：

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{z-a}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} \cdot Rie^{i\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta})d\theta \end{aligned}$$

□

Task4:

解 由柯西积分公式可知:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$
$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$$

所以有:

$$\int_C \frac{3w^2+7w+1}{w-z}dw \overset{g(w)=3w^2+7w+1}{=} 2\pi i g(z)$$

因为 $1+i$ 在 C 包含区域之内，所以 $f(z) = 2\pi i g(z) \to f'(z) = 2\pi i g'(z) = 2\pi i(6z+7)|_{z=1+i} = 2\pi i(13+6i) = -12\pi + 26\pi i$

Task5:

证明 函数 $f(z)$ 在圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ 上连续，且对任意的 $r \in (0,1)$ 都有:

$$\int_{|z|=r} f(z)dz = 0$$

由连续的性质可知,$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall z_1, z_2, |z_1 - z_2| < \delta \to |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$
利用变量替换 $z = re^{i\theta}$，则积分变为:

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})ire^{i\theta}d\theta = 0$$
$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta = 0$$

因为在闭圆盘上连续，所以一定一致连续，积分和极限可交换，有:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r\to 1^-}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta \end{aligned}$$

所以有 $\int_{|z|=1} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta = 0$ □

Task6:

证明 设 $f(z)$ 在 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上解析，并且:

$$|f(z)| \le \frac{1}{1-|z|}, \quad |z| < 1.$$

因为 $z = 0$ 在这个圆盘内，且函数在圆盘内解析，取一个圆盘 $|z| = r < 1$，由柯西积分公式可以得到:

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=r<1} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$$

所以:

$$f^n(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=r<1} \frac{f(w)}{w^{n+1}}dw$$

对等式两边同时取模长得到:

$$\begin{aligned}
|f^n(0)| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=r<1} \frac{f(w)}{w^{n+1}}dw\right| \\
&\le \frac{n!}{2\pi}\int_{|z|=r<1} \frac{|f(w)|}{|w|^{n+1}} \cdot |dw| \\
&\le \frac{n!}{2\pi}\int_{|z|=r<1} \frac{1-\frac{1}{|w|}}{|w|^{n+1}} \cdot |dw| \\
&= \frac{n!}{(1-r)r^n}, \quad 0 < r < 1.
\end{aligned}$$

对分母求导可知在 $r = \dfrac{n}{n+1}$ 时达到最小值，因而函数值达到最大值，所以:

$$|f^n(0)| = \frac{n!}{(1-r)r^n} = (n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

□

Task7:

证明 (1): 任取 $z_0 \in D$，存在充分小的 $r > 0$ 使得 $K \triangleq \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subset D$。由 $Cauchy$ 积分定理，对于 K 内任意的一条分段光滑的简单封闭曲线 C 有:

$$\int_C f_n(z)dz = 0, \quad n = 1, 2 \ldots$$

每个 $f_n(z)$ 都在 K 上连续，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) \rightrightarrows f(z)(z \in K)$，则有 f 在 K 上连续。所以:

$$\int_C f(z)dz = \int_C \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)dz$$

由一致收敛级数的逐项积分定理，原式变为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(z)dz = 0$$

由 $Morera$ 定理，f 在 K 之内解析，特别的 f 在 z_0 点处解析，又因为 z_0 的任意性，f 在 D 上解析。

(2): 由 $Cauchy$ 积分公式:

$$f^k(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

则对于 $n \geq 1$，有:

$$f_n^k(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

其中 $|z - z_0| = r$ 取逆时针方向，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $|z - z_0| = r$ 上一致收敛于 $f(z)$，故:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \rightrightarrows \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$$

其中 $|z-z_0|=r$，故一方面:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{|z-z_0|=r}\frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi i}{k!}f_n^k(z_0)$$

另一方面:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{|z-z_0|=r}\frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz&=\int\limits_{|z-z_0|=r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\right)dz\\&=\int\limits_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz=\frac{2\pi i}{k!}f^k(z_0)\end{aligned}$$

所以综上由 z 的任意性有:

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z),\quad z\in D$$

(3): 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z)$ 在 D 上内闭一致收敛于 $f^{(k)}(z),k\in\mathbb{N}$，考虑利用柯西积分公式和有限覆盖定理。

设 $K\subset D$ 为任意的闭集。由于 D 是开集，对于每一个 $z_0\in K$，都存在闭圆盘 $\{z\in K:|z-z_0|\le r\}\subset D$，由于 K 是有界闭集，所以一定存在有限覆盖，即存在有限个点 $z_1,z_2\ldots,z_m$ 以及它们各自的闭集半径 $r_1,r_2\ldots,r_m$ 使得 K 中的所有点都落在某个闭集上，且这些闭集都在 D 内部，取 $r=min\{r_1,r_2,\ldots,r_m\}$。由柯西估计，对 $z\in K$ 有:

$$|f_n^{(k)}(z)|\le\frac{k!}{r^k}\sup_{|w-z|=r}|f_n(w)|$$

由条件可以知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 一致收敛与 $f(z)$，所以对于任意的 $\epsilon>0,\exists N$ 使得 $\forall m,n>N$ 有:

$$\left|\sum_{n=1}^{m}f_n(z)\right|<\epsilon$$

所以有:

$$\left|\sum_{n=1}^{m} f_n^{(k)}(z)\right| \le \frac{k!}{r^k}\epsilon$$

对于所有 $z \in K$ 成立 (因为 K 上的所有点一定落在某个半径为 r 的圆上)，而 ϵ 与 N 无关所以一定一致收敛。 □

Task8:

证明 若整函数 f 满足 $Re[f(z)] > 0, z \in \mathbb{C}$ 则 f 恒为常数。
考虑函数 $g(z) = e^{-f(z)}$，若 $f(z) = u(x) + iv(x)$ 则有:

$$|g(z)| = \left|e^{-f(z)}\right| = e^{-u(z)}.$$

因为 $Re[f(z)] > 0 \to u(x) > 0 \to e^{-u(z)} < e^0 = 1$，所以函数 $g(z)$ 有界，又因为 $f(z)$ 是整函数，所以 $g(z)$ 也是整函数，所以由 *Liouville* 定理，函数 $g(z)$ 一定是一个常值函数，所以 $f(z)$ 也是一个常值函数。 □

Task9:

证明 首先计算积分:

$$\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$$
$$= \int_{|z|=1} \left(z^2 + 1\right)^{2n} \frac{dz}{z^{2n+1}}$$

因为函数 $f(z) = (z^2 + 1)^{2n}$ 在圆盘 $|z| = 1$ 上解析，所以由柯西积分公式可得，原积分为 $f^{2n}(0) = 2\pi i C_{2n}^{n}$
接下来对积分变量做变量替换，找到和三角函数有关的关系，考虑 $|z| = 1$ 上的点可以用 $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 来表示，则 $\dfrac{1}{z} = \cos\theta - i\sin\theta$。所以

原积分可以表示为:

$$\int_0^{2\pi} (2\cos\theta)^{2n} id\theta = 2\pi i C_{2n}^n$$
$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = 2\pi \frac{C_{2n}^n}{4^n}$$

因为 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n-1)!!(2n)!!}{[(2n)!!]^2} = \frac{2n!}{(2^n \cdot n!)^2} = \frac{C_{2n}^n}{4^n}$. 所以:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = 2\pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

□

Task10:

证明 因为积分曲线 $|z| = R$ 并且 $|a| < R$，所以转换原积分为:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{z-a}{z+a} \frac{dz}{z}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \left(\frac{2}{(z+a)} - \frac{1}{z} \right) dz$$

由柯西积分公式可得原积分为 1.

在考虑积分变换 $z = Re^{i\theta} \to \frac{dz}{z} = id\theta$，所以:

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{z-a}{z+a} \frac{dz}{z}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(z-a)(\bar{z}+\bar{a})}{(z+a)(\bar{z}+\bar{a})} id\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |a|^2 + \bar{a}z - \bar{z}a}{|z+a|^2} d\theta$$

因为 $\bar{a}z - \bar{z}a$ 一定是一个纯虚数，所以我们有:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |a|^2}{|z+a|^2} d\theta = 1$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{a}z - \bar{z}a}{|z+a|^2} d\theta = 0$$

$\square$