复变函数论第五次作业

20234544 毛华豪

Task1:

证明 证明线性分式变换的保圆性，圆方程可以表示为 $|z-a_0|=R,(R\neq\infty)$ $\bar{a}z+a\bar{z}+c=0, a\in\mathbb{C}, c\in\mathbb{R},(R=\infty)$ 或者 $Az\bar{z}+B\bar{z}+\bar{B}z+C; A,C\in\mathbb{R}, |B|^2-AC>0$。因为任何线性分式变换都可以由平移，旋转，伸缩以及反演变换复合得到，所以只要证明这四个变换具有保圆性即可。对于平移，旋转和伸缩，从几何直观来看很容易证明它们具有保圆性，具体地：

对于平移变换，令 $z\to z+a, a\in\mathbb{C}$，圆方程变为 $|z+a-a_0|=R\to|z-(a_0-a)|=R$ 所以还是一个圆，直线方程变为 $\bar{a}z+a\bar{z}+2a\bar{a}+c=0$ 还是一条直线。

对于旋转变换，令 $z\to z\cdot e^{i\theta}$，则圆方程变成 $|z-a_0|=R\to|z\cdot e^{i\theta}-a_0|=R\xrightarrow{a_0=|a_0|\cdot e^{it}}|z-|a_0|\cdot e^{i(t-\theta)}|\cdot|e^{i\theta}|=R\xrightarrow{a_0'=|a_0|\cdot e^{i(t-\theta)},|e^{i\theta}|=1}|z-a_0'|=R$ 所以还是一个圆，直线方程变为 $\bar{a}z\cdot e^{i\theta}+a\bar{z}\cdot e^{-i\theta}+c\xrightarrow{a=|a|e^{it},a'=|a|e^{it}\cdot e^{-i\theta},|a|e^{i(t-\theta)}}\bar{a}'z+a'\bar{z}+c=0$ 还是一条直线。

对于伸缩变换，令 $z\to rz, r\in\mathbb{C}$ 则圆方程变为 $|rz-a_0|=R\to|z-\frac{a_0}{r}|=\frac{R}{|r|}$ 所以还是一个圆。直线方程变为 $\bar{a}rz+a\overline{rz}+c=0\xrightarrow{a'=a\bar{r}}\bar{a}'z+a'\bar{z}+c=0$ 所以还是一条直线。

对于反演变换，可令 $z\to\frac{1}{z}, z\neq0$，则圆方程 $|\frac{1}{z}-a_0|=R\to|a_0z-1|=R\cdot|z|$，若 $a_0=0$ 原方程变为 $|z|=\frac{1}{R}$ 也是一个圆，若 $a_0\neq0$ 原方程变

为 $|z-\frac{1}{a_0}| = \frac{R\cdot|z|}{|a_0|}$ 若 $|a_0| \neq R$ 则此方程满足阿波罗尼斯圆的定义为一个圆周，若 $|a_0| = R$ 则方程变为 $|z-\frac{1}{a_0}| = |z|$ 为一条直线，也可以看作一个圆周。直线方程变为 $\bar{a}\frac{1}{z} + a\frac{1}{\bar{z}} + c = 0 \xrightarrow{\times z\cdot\bar{z}} \bar{a}\bar{z} + az + cz\bar{z} = 0$ 可能是一个圆 $(c \neq 0)$ 可能是一条直线 $(c = 0)$。对于反演变换用一般的圆方程和直线方程讨论比较复杂，我们考虑 $A|z|^2 + \bar{B}z + \bar{z}B + C = 0; A, C \in \mathbb{R}, |B|^2 - AC > 0$，令 $w = \frac{1}{z} \to z = w^{-1}$ 原方程 (包含一般圆和直线两种情况) 变为 $A\left|\frac{1}{w}\right|^2 + \bar{B}\frac{1}{w} + B\frac{1}{\bar{w}} + C = 0 \xrightarrow{\times|w|^2 = w\bar{w}} = C|w|^2 + Bw + \bar{B}\bar{w} + A = 0$ 所以也是一个圆周 (包含一般圆周和直线两种情况)。 □

Task2:

解 求先线性分式变换 $w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ 的不动点。即求 $f(z): w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} = z$ 的解。

若 $a = 0$ 原方程 $w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} = z$ 为恒等变换所以不动点为全体复数。若 $a \neq 0$ 有：

$$
\begin{aligned}
\frac{z-a}{1-\bar{a}z} = z &\xrightarrow{\times(1-\bar{a}z)} \bar{a}z^2 = a \\
&\xrightarrow{a\neq 0} z^2 = \frac{a}{\bar{a}} = \frac{a^2}{a\cdot\bar{a}} = \frac{a^2}{|a|^2} \\
&\longrightarrow z = \pm\frac{a}{|a|}
\end{aligned}
$$

代入原式得到 $w(\frac{a}{|a|}) = \frac{\frac{a}{|a|} - a}{1 - \bar{a}\cdot\frac{a}{|a|}} \overset{|a|\neq 1}{=} \frac{\frac{a(1-|a|)}{|a|}}{1-|a|} = \frac{a}{|a|}$, 所以 $\frac{|a|}{a}$ 是一个不动点，同理 $\frac{-a}{|a|}$ 也是一个不动点，由于代数基本定理保证了这个方程最多只有有两个解，所以没有其他的不动点了, 经过验证可知 $z = \pm\frac{a}{|a|}$ 为不动点。

若 $|a| = 1 \to w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} = \frac{az-a^2}{a-a\cdot\bar{a}z} = \frac{az-a^2}{a-|a|^2z} = \frac{az-a^2}{a-z} = \frac{-a(z-a)}{z-a} \xrightarrow{z\neq a} -a = z$ 所以 $-a$ 为一个不动点，而 a 不是不动点而是

奇点。所以 $|a|=1$ 时有唯一不动点 $z=-a$.
综上，$a=0$ 时所有复数都是不动点；$a\neq 0,|a|\neq 1$ 时有两个不动点 $\pm\frac{a}{|a|}$；$|a|=1$ 时有唯一不动点 $z=-a$。

Task3:

证明 证明线性分式变换的保对称性。z_1,z_2 关于圆 γ 读对称的充要条件是 $Az_2\bar{z_1}+\bar{B}z_2+B\bar{z_1}+C=0 \quad A,C\in\mathbb{R},|B|^2>AC$。
对于平移变换，令 $w=z+a\rightarrow z=w-a$ 所以有 $z_1=w_1-a;z_2=w_2-a$。
原方程变为：$A(w_2-a)\overline{(w_1-a)}+\bar{B}(w_2-a)+B\overline{(w_1-a)}+C=0\rightarrow Aw_2\bar{w_1}+(B-Aa)\bar{w_1}+(\bar{B}-A\bar{a})w_2+(Aa\bar{a}-\bar{B}a-B\bar{a}+C)=0$ 并且有 $|B-Aa|^2=(B-Aa)\cdot(\bar{B}-A\bar{a})=B\bar{B}-A\bar{B}a-AB\bar{a}+A^2a\bar{a}>AC-A\bar{B}a-AB\bar{a}+A^2a\bar{a}=A(Aa\bar{a}-\bar{B}a-B\bar{a}+C)$ 满足圆的条件，所以 w_1,w_2 关于新的圆周 $Aw\bar{w}+(B-Aa)\bar{w}+(\bar{B}-A\bar{a})w+(Aa\bar{a}-\bar{B}a-B\bar{a}+C)$ 也是对称的。
对于旋转变换,令 $w=z{\cdot}e^{i\theta}\rightarrow z=w{\cdot}e^{-i\theta}$ 所以有 $z_1=w_1{\cdot}e^{-i\theta},z_2=w_2{\cdot}e^{-i\theta}$。
原方程变为：$A(w_2\cdot e^{-i\theta})\overline{(w_1\cdot e^{-i\theta})}+\bar{B}(w_2\cdot e^{-i\theta})+B\overline{(w_1\cdot e^{-i\theta})}+C=0\rightarrow Aw_2\bar{w_1}+\overline{(B\cdot e^{i\theta})}w_2+(B\cdot e^{i\theta})\bar{w_1}+C=0$ 并且有 $|B\cdot e^{i\theta}|^2=|B^2|\cdot|e^{i\theta}|^2=|B^2|>AC$ 满足圆的条件，所以 w_1,w_2 关于新的圆周 $Aw\bar{w}+\overline{(B\cdot e^{i\theta})}w+(B\cdot e^{i\theta})\bar{w}+C$ 也是对称的。
对于伸缩变换,令 $w=rz,r\neq 0\rightarrow z=\frac{w}{r}$ 所以有 $z_1=\frac{w_1}{r},z_2=\frac{w_2}{r}$。原方程变为:$A(\frac{w_2}{r})(\frac{\bar{w_1}}{r})+\bar{B}(\frac{w_2}{r})+B\frac{\bar{w_1}}{r}+C=0\rightarrow Aw_2\bar{w_1}+\overline{Br}w_2+Br\bar{w_1}+r\bar{r}C=0$ 且满足 $|Br|^2=|B|^2|r|^2>AC|r|^2=A(r\bar{r}C)$ 满足圆的条件。所以 w_1,w_2 关于新的圆周 $Aw\bar{w}+\overline{Br}w+Br\bar{w}+r\bar{r}C=0$ 也是对称的。
对于反演变换，令 $w=\frac{1}{z}\rightarrow z=\frac{1}{w}$ 所以有 $z_1=\frac{1}{w_1},z_2=\frac{1}{w_2}$。原方程变为：$A\frac{1}{w_2}\frac{1}{\bar{w_1}}+\bar{B}\frac{1}{w_2}+B\frac{1}{\bar{w_1}}+C=0\rightarrow A+\bar{B}\bar{w_1}+Bw_2+Cw_2\bar{w_1}=0$ 并且有 $|B|^2>AC$ 满足圆的条件。所以 w_1,w_2 关于新的圆周 $A+\bar{B}\bar{w}+Bw+Cw\bar{w}=0$ 也是对称的。 $\square$

Task4:

证明 考虑函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}, z=x+iy$，函数可以写作 $f(z)=f(x,y)=\sqrt{|xy|}+i0$，所以令 $u(x,y)=\sqrt{|xy|}, v(x,y)=0$ (1):$\frac{\partial u}{\partial x}_{(0,0)}=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$，同理 x 与 y 地位相同 $\frac{\partial u}{\partial y}_{(0,0)}=0$。又因为 $v=0\to\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\equiv 0$ 所以满足:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}_{(0,0)} &= \frac{\partial v}{\partial y}_{(0,0)} \\
\frac{\partial u}{\partial y}_{(0,0)} &= -\frac{\partial v}{\partial x}_{(0,0)}
\end{aligned}$$

所以在原点处满足 $Cauchy-Riemann$ 方程。(2): 考虑极限 $\lim_{x,y\to 0}\frac{f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}_{(0,0)}\cdot x-\frac{\partial f}{\partial y}_{(0,0)}\cdot y-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 因为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}_{(0,0)} &= \frac{\partial u}{\partial x}_{(0,0)}+i\frac{\partial v}{\partial x}_{(0,0)}=0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}_{(0,0)} &= \frac{\partial u}{\partial y}_{(0,0)}+i\frac{\partial v}{\partial y}_{(0,0)}=0
\end{aligned}$$

所以有:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x,y\to 0}\frac{f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}_{(0,0)}\cdot x-\frac{\partial f}{\partial y}_{(0,0)}\cdot y-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&=\lim_{x,y\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x,y\to 0}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&=\lim_{x,y\to 0}\sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}}\xrightarrow{y=kx,x\to 0}\lim_{y,x\to 0}\sqrt{\frac{|k|\cdot x^2}{(1+k^2)\cdot x^2}} \\
&=\lim_{y,x\to 0}\sqrt{\frac{|k|}{(1+k^2)}},(k\in\mathbb{R})
\end{aligned}$$

因为极限的值和 k 的取法有关，所以 f 在原点不可微。

(3): 由于函数在原点处不可微，所以根据解析的定义 f 在原点不解析。 □

Task5:

证明 分式线性变换可以写作 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$。要求它的不动点即求 $\frac{az+b}{cz+d} = z \to cz^2 + (d-a)z - b = 0$。
对于第一小问：
若 $c \neq 0$ 则根据代数学基本定理，原方程一定有两个根，若有两个重根 $z_1 = z_2 = \infty$ 则有 $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2} = 0$ 所以令 $w = \frac{1}{z}$ 方程 $bw^2 + (a-d)w - c = 0$ 有两个根为 0，即 $a-d = 0, c = 0$ 且 $b \neq 0$，这与 $c \neq 0$ 矛盾。所以只能 $c = 0$。原方程变为 $(d-a)z = b$ 有根为 ∞，此即 $bw = (d-a)$ 有根 $w = 0$

- 若 $b \neq 0$，则 $w = 0 \xrightarrow{b\neq 0} \frac{d-a}{b} = 0 \to a = d$，若 $a \neq 0$ 原线性分式变换变为 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{a} = z + \frac{b}{a}$ 即平移变换 $f(z) = z + a$(这里 a 和前面不同)。若 $a = 0$ 则此时 $ad - bc = 0$ 退化了，所以不满足线性分式变换的条件。

- 若 $b = 0$，则 $bw = (d-a) = 0 \to d = a$，若 $a \neq 0$ 原线性分式变换变为 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az}{d} = \frac{az}{a} = z$ 所以所有复数都是其不动点，与条件不符合。若 $a = 0 = d$ 此时 a, b, c, d 都为 0 所以不满足线性分式变换的条件。

综上只有 $f(z) = z + \frac{b}{a}$ 时才有唯一不动点 ∞，且 $\frac{b}{a} \neq \infty$ 否则 $f(z)$ 会有无穷多不动点。记 $\frac{b}{a} = a$ 即为所需要证明的结论。
对于第二小问：
方程 $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ 有两个根为 $0, \infty$，所以 $bw^2 + (a-d)w - c = 0$ 有两个根为 $0, \infty$。所以我们可以得到 $b = c = 0$。原线性分式变换变为 $f(z) = \frac{az}{d}; a, d \neq 0$ 否则不满足线性分式变换的定义 $ad - bc >$。记 $\frac{a}{d} = b$(这里的 b 和前面的不同) 即得到我们需要证明的伸缩变换 $f(z) = bz$。 □

Task6:

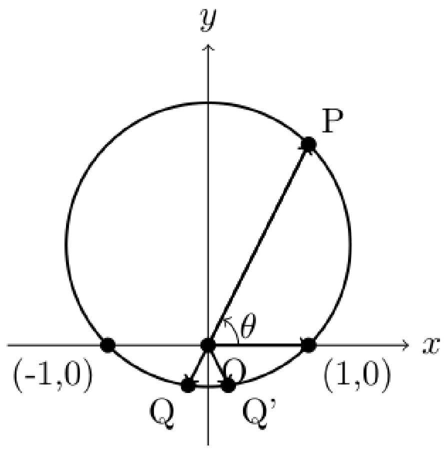

图 1: example

证明 由 $z_1 \cdot z_2 = 1$ 可知 $|z_1|e^{i\theta_1} \cdot |z_2|e^{i\theta_2} = |z_1z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} = |z_1z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) = 1$ 所以 $\theta_1+\theta_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 也即 z_1, z_2 与原点连线与 x 轴夹角相同且在 x 轴的两侧。如上图所示，z_1,z_2 分别落在 OP, OQ' 上。由平面几何的相交弦定理知识我们知道 $OP \cdot OQ' = OP \cdot OQ = 1 \times 1 = 1$，所以要使 $|z_1||z_2| = 1$ 且 z_1, z_2 又不能在圆周上，则若 z_1 在线段 OP 上，也即在圆内，$|z_1| < OP$。则要使 $|z_1||z_2| = 1 = OP \cdot OQ'$，$z_2$ 必须要在 OQ' 延长线之外，也即圆外。若 z_1 在线段 OP 延长线上，也即在圆外，$|z_1| > OP$。则要使 $|z_1||z_2| = 1 = OP \cdot OQ'$，$z_2$ 必须要在线段 OQ' 上，也即圆内。综上从几何上我们证明了 z_1, z_2 一定有一个在圆内侧一个在圆外侧。
从代数角度上看对于过 $(-1,0),(0,1)$ 的圆，其方程可以写为 $|z-ki| = \sqrt{1+k^2} \rightarrow |z-ki|^2 = 1+k^2 \rightarrow z\bar{z} - ki\bar{z} + kiz - 1 = 0$ 所以有若 $z\bar{z} - ki\bar{z} + kiz - 1 > 0$ 则 z 在圆外，若 $z\bar{z} - ki\bar{z} + kiz - 1 < 0$ 则 z 在圆内。现在我们有 $z_1z_2 = 1$。若 $z_1\bar{z}_1 - ki\bar{z}_1 + kiz_1 - 1 > 0$，即 z_1 在圆外。根据我们上面的分析有 $z_2 = \bar{z}_1 \cdot t, t \in \mathbb{R} > 0$。在不等式两边同时乘以 t 得到 $tz_1\bar{z}_1 - ki\bar{z}_1t + kiz_1t - t > 0 \xrightarrow{z_1t=\bar{z}_2, z_1\bar{z}_1t=z_1z_2=1, t=t\cdot 1=t\cdot z_1z_2=\bar{z}_2z_2} z_2\bar{z}_2 - ki\bar{z}_2 + kiz_2 - 1 < 0$ 即 z_2 在圆内。同理可证若 z_1 在圆内则 z_2 在圆外。得证。 □

Task7:

证明 假设 γ_1,γ_2 为经过 z_0 的两条光滑曲线，它们的参数方程为:

$$\gamma_k(t)=(x_k(t),y_k(t)),\quad t=[0,1],\quad \gamma_k(0)=z_0$$

其中 $k=1,2$,γ_k 在 z_0 处的切向量方向为 $\gamma_k(0)=(x_k'(0),y_k'(0))$，可以得到 $arg(\gamma_k'(0))$ 为切向量和实轴正方向所成的夹角，我们规定它的取值范围为 $(-\pi,\pi]$。假设 γ_1,γ_2 在 z_0 处的切向量为 $\vec{t_1},\vec{t_2}$, 我们设 $\vec{t_1}$ 到 $\vec{t_2}$ 的角为 α。若 $\alpha>0$ 则说明 $\vec{t_1}$ 逆时针旋转到 $\vec{t_2}$，若 $\alpha<0$ 则说明 $\vec{t_1}$ 顺时针旋转到 $\vec{t_2}$ 此即:

$$\alpha=arg[\gamma_2'(0)]-arg[\gamma_1'(0)]$$

经过变换 $w=f(z)$ 后曲线 γ_k 在 f 下的像变为 $\Gamma_k=f(\gamma_k)$，像曲线满足参数方程：

$$\Gamma: w_k(t)=f[\gamma_k(t)].\quad 0\leq t\leq 1$$

我们有 $w_k(0)=f[\gamma_k(0)]=f(z_0)=w_0$ 并且：

$$w_k'(0)=f[\gamma_k'(0)]\cdot\gamma_k'(0)$$

所以曲线 Γ_K 在 z_0 处的切向量的辐角为：

$$\begin{aligned}\Phi_k=arg[w_k'(0)]=arg[f[\gamma_k'(0)]\cdot\gamma_k'(0)]=arg[f'(z_0)\cdot\gamma_k'(0)]\\ \rightarrow\begin{cases}arg[w_1'(0)]=arg[f'(z_0)]+arg[\gamma_1'(0)]+2n_1\pi\\ arg[w_2'(0)]=arg[f'(z_0)]+arg[\gamma_2'(0)]+2n_2\pi\end{cases}\end{aligned}$$

其中 $n_1,n_2\in\mathbb{Z}$。同理我们可以计算从 Γ_1 在 w_0 处的切向量到 Γ_2 在 w_0 处的切向量的角度值 β 也属于 $(-\pi,\pi]$:

$$\beta=\Phi_1-\Phi_2=\alpha+2(n_1-n_2)\pi$$

由 α,β 的范围可知 $n_1=n_2\rightarrow\alpha=\beta$，所以保角性成立。 $\square$

Task8:

解 对于分式线性变换 $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 由于保圆性，我们考虑在 z 平面上的实轴 x 轴，在 $w=f(z)$ 变换之后一定也是一个圆周或者一条直线。我们有 $w=f(z)$ 一定把 x 轴映射为 w 平面上的实轴 u 轴，这是因为如果映射成一个圆周，或者是一条直线 (这条直线由于必须要满足从上半平面映射到上半平面所以一定要平行于 u 轴)，记作 γ，都可以在 w 平面上做一个圆 Γ 与已知圆周或者直线有两个交点，由于 f 的反函数 g 也是一个分式线性变换。由于 f 和 g 是一对一的，所以当用 g 把 Γ 和 γ 映射回 z 平面后也有且仅有两个交点而这是不可能的，所以 $f(z)$ 把 z 平面上的实轴 x 轴映射为 w 平面上的实轴 u 轴。所以在 x 轴取三个点 x_1,x_2,x_3，映射之后 $f(z_1),f(z_2),f(z_3)\in\mathbb{R}$。再结合保交比不变性可以得到 $\forall z\in\{z\in\mathbb{C}|Im(z)>0\}$ 有 $(x_1,x_2,x_3,z)=(f(x_1),f(x_2),f(x_3),f(z))$ 解得 $f(z)=\dfrac{(f(x_3)-f(x_2))f(x_1)(z-x_2)+(f(x_2)-f(x_1))f(x_3)(z-x_1)}{(f(x_3)-f(x_2))(z-x_2)+(f(x_2)-f(x_1))(z-x_1)}\rightarrow\dfrac{az+b}{cz+d}$ 且 a,b,c,d 都是实数，代入 $f(0)=0\rightarrow\dfrac{b}{d}=0\rightarrow b=0$，代入 $f(i)=1+i\rightarrow\dfrac{ai}{ci+d}=1+i\rightarrow ai=(d-c)+(d+c)i\rightarrow 0=d-c,a=d+c$，$c\neq 0$ 否则四个数全为 0 不满足分式线性变换条件。所以原变换为 $f(z)=\dfrac{2cz}{cz+c}\rightarrow f(z)=\dfrac{2z}{z+1}$。

Task9:

解 设分式线性变换 $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$，类似 $Task8$ 可以证明 f 一定将 z 平面的实轴 x 轴映射为 w 平面的实轴 u 轴。且同上讨论有 a,b,c,d 都是实数。另外根据：

$$\begin{aligned}Im(w)=\frac{1}{2i}(w-\bar{w})&=\frac{1}{2i}(\frac{az+b}{cz+d}-\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d})\\&=\frac{z-\bar{z}}{2i}\frac{ad-bc}{|cz+d|^2}=\frac{ad-bc}{|cz+d|^2}Im(z)\end{aligned}$$

因此为了把上半平面映射到下半平面我们有 $ad-bc<0$。

所求的分式线性变换为:

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

其中 a, b, c, d 都是实数且 $ad - bc < 0$.