复变函数论第八次作业

20234544 毛华豪

Task1:

证明 这里仅仅需要证明不等式，所以考虑放缩相应的值。设 $f(z) = x^2 + iy^2$ 由于:

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \leq \int_L |f(z)||dz|$$

而:

$$|f(z)| = |x^2 + iy^2| = \sqrt{x^4 + y^4} \xrightarrow{x=0} \sqrt{y^4} = |y^2| \leq 1$$

并且有：

$$|dz| = ds$$

所以有:

$$\begin{aligned}\left|\int_L f(z)dz\right| &\leq \int_L |f(z)||dz| \\ &\leq 1 \cdot \int_{-1}^{1} ds = 1 \cdot 2 = 2\end{aligned}$$

□

Task2:

证明 同 Task1 的思路有:

$$\left|\int_L \frac{dz}{z^2}\right| \le \int_L \left|\frac{1}{z^2}\right| |dz|$$

由于:

$$\left|\frac{1}{z^2}\right| = \frac{1}{|z|^2} \le 1$$

并且有：

$$|dz| = ds$$

所以有:

$$\left|\int_L \frac{dz}{z^2}\right| \le \int_L \left|\frac{1}{z^2}\right| |dz|$$
$$\le 1 \cdot \int_L ds = 1 \cdot 1 = 1 \le 2$$

□

Task3:

证明 由于原点是奇点所以在此处无法使用柯西积分定理，考虑:

$$2\pi f(0) = \int_0^{2\pi} f(0) d\theta$$

则即证明:

$$\lim_{r\to 0^+} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) - f(0) d\theta = 0$$

由于函数在原点处解析所以，点 $z = re^{i\theta}$ 即原点外半径为 r 的圆上的点，可以得到存在原点处的导数 $f'(0)$ 使得:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{f(re^{i\theta}) - f(0)}{re^{i\theta}} = f'(0)$$

由于:

$$\lim_{r\to 0^+}\int_0^{2\pi} re^{i\theta}f'(0)d\theta = \lim_{r\to 0^+} r\cdot f'(0)\cdot \int_0^{2\pi} e^{i\theta}d\theta = 0$$

所以 $\lim\limits_{r\to 0^+}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})-f(0)d\theta = 0$ 成立。 $\square$

Task4:

解 利用 $Cauchy$ 积分定理证明复积分：

(1) 对于积分 $\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2}$，由于函数 $f(z)=\frac{1}{z^2+2}$ 的奇点为 $z=\pm\sqrt{2}i$ 处于圆周 $|z|=1$ 之外，所以由柯西积分定理：$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2}=0$

(2) 对于积分 $\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+2}$,由于函数 $f(z)=\frac{1}{z^2+2}$ 的奇点在圆周 $C:|z|=2$ 之内，考虑两个小圆周 $C_1:|z-\sqrt{2}i|=r$ 以及 $C_2:|z+\sqrt{2}i|=r$，方向均取逆时针为正方向，则函数在 $C\cup C_1^-\cup C_2^-$ 所围成的多连通区域上是解析的，由柯西积分定理原积分：

$$\begin{aligned}&\int_C\frac{dz}{z^2+2}=\int_{C\cup C_1^-\cup C_2^-\cup C_1^+\cup C_2^+}\frac{dz}{z^2+2}\\&=\int_{C\cup C_1^-\cup C_2^-}\frac{dz}{z^2+2}+\int_{C_1^+}\frac{dz}{z^2+2}+\int_{C_2^+}\frac{dz}{z^2+2}\\&=0+\int_{C_1^+}\frac{dz}{z^2+2}+\int_{C_2^+}\frac{dz}{z^2+2}\end{aligned}$$

由于:

$$\begin{aligned}&\int_{|z-a|=r}\frac{dz}{z^2-a^2}\\&=\frac{1}{2a}\left(\int_{|z-a|=r}\frac{dz}{z-a}-\int_{|z-a|=r}\frac{dz}{z+a}\right)\\&=\frac{1}{2a}(2\pi i-0)=\frac{\pi i}{a}\end{aligned}$$

所以原积分为：

$$\begin{aligned}&0+\int_{C_1^+}\frac{dz}{z^2+2}+\int_{C_2^+}\frac{dz}{z^2+2}\\&=0+\frac{\pi i}{\sqrt{2}i}+\frac{\pi i}{-\sqrt{2}i}=0\end{aligned}$$

(3) 对于积分 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{dz}{(2z+1)(z-2)}$，由于圆周 $C:|z|=1$ 之内包含函数 $g(z)=\dfrac{1}{(2z-1)(z-2)}$ 的奇点 $z=-\dfrac{1}{2}$，所以考虑一个小圆周 $C':|z+\dfrac{1}{2}|=r$，方向为逆时针，则同 (2)，原积分可以变为：

$$\begin{aligned}&\int_{|z|=1}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{2}{2z+1}\right)dz\\&=-\frac{1}{5}\int_{C'+}\left(\frac{2}{2z+1}\right)dz=-\frac{2\pi i}{5}\end{aligned}$$

Task5:

证明 要求证明柯西积分公式：
定义函数 $F(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}$, 其中 $z\in D$ 为一定点，作为 ξ 的函数，F 在 D 上除了 $\xi=z$ 点之外都解析。以 z 为中心，充分小的 $\rho>0$ 为半径做一个顺时针方向的圆周 $\gamma_\rho:|\xi-z|=\rho$，使得 γ_ρ 在 C_0^+ 之内，在其余的 C_k^- 之外。令 $\Gamma=C\cup\gamma_\rho=C_0+\cup C_1^-\cup C_2^-\cup\cdots\cup C_n^-\cup\gamma_\rho^-$，记 Γ 围成的区域为 D'，则 F 在 D' 上解析，且在 $\Gamma\cup D'$ 上连续，对 F 在 D' 上应用柯西积分定理有：

$$\begin{aligned}0&=\int_\Gamma F(\xi)d\xi=\int_\Gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\\&=\left(\int_{C_0^+}+\int_{C_1^-}+\cdots+\int_{C_n^-}+\int_{\gamma_\rho^-}\right)F(\xi)d\xi\\&=\left(\int_C-\int_{\gamma_\rho^+}\right)F(\xi)d\xi\end{aligned}$$

所以可以得到：

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

由于:

$$\int_{\gamma_\rho^+} \frac{1}{\xi - z} d\xi = \int_{|\xi - z| = \rho} \frac{1}{\xi - z} d\xi = 2\pi i$$

故：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi$$

故我们所需要证明的第一个等式即：

$$\int_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi = \int_{\gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

考虑做差求解。事实上：

$$\left| \int_{\gamma_\rho^+} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| \leq \int_{\gamma_\rho^+} \frac{|f(\xi) - f(z)|}{|\xi - z|} |d\xi|$$

由于 f 在 $D \cup C$ 上连续，即在一个闭的区域上连续，因而一直连续，故:

$$\begin{gathered} \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \quad s.t. \\ |w - z| < \delta (w, z \in \overline{D}) \Rightarrow |f(w) - f(z)| < \epsilon. \end{gathered}$$

所以当 $\rho < \delta$ 时，有 $|\xi - z| = \rho < \delta \Rightarrow |f(\xi) - f(z)| < \epsilon$，所以：

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\rho^+} \left| \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right| \cdot |d\xi| &\leq \int_{\gamma_\rho^+} \frac{\epsilon}{\rho} |d\xi| \\ &= \frac{\epsilon}{\rho} \int_{\gamma_\rho^+} |d\xi| = \frac{\epsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = 2\pi\epsilon \end{aligned}$$

所以原积分为：

$$\left| \int_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi - \int_{\gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| \leq 2\pi\epsilon \to 0 (\epsilon \to 0^+)$$

故而:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho^+}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi,\quad z\in D \tag{1}$$

下一步证明：f 在 D 上内的各阶导数满足:

$$f^(n)(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi,\quad z\in D,n\in\mathbb{N} \tag{2}$$

当 $n=1$ 时，即证明:

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi,z\in D$$

我们有:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

当 Δz 足够小时，我们有:

- $|\Delta z|>0$
- $(z+\Delta z)\in D$

有上一步的结论可知:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi, \\ f(z+\Delta z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f(\xi)}{\xi-(z+\Delta z)}d\xi \end{cases}\\
&\Rightarrow\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z-\Delta z)}\right|\\
&\leq\frac{1}{2\pi}\left|\int_C\frac{|f(\xi)|\cdot|d\xi|}{|\xi-z|\cdot|\xi-z-\Delta z|}\right|
\end{aligned}$$

由于 f 在 C 上连续，所以：

$$\exists M>0 s.t.|f(\xi)|\leq M,\forall\xi\in C.$$

另外，z 在开集 D 之内，故 z 到 D 的边界上的点 ξ 的最小距离 $d > 0$ 即:

$$0 < d = \inf_{\xi \in C} |\xi - z| = \min_{\xi \in C} |\xi - z|$$

所有有:

$$\begin{cases} |\xi - z| \geq d, \forall \xi \in C; \\ |\xi - z - \Delta z| \geq |\xi - z| - |\Delta z| \\ \geq d - |\Delta z| \overset{|\Delta z| < \frac{d}{2}}{\geq} d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} \end{cases}$$

所有当 $|\Delta z| < \dfrac{d}{2}$ 时，有:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z - \Delta z)} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{|\Delta z| \cdot |f(\xi)|}{|(\xi - z)^2 (\xi - z - \Delta z)|} d\xi \leq \frac{M}{2\pi} \int_C \frac{|\Delta z|}{d^2 \times \frac{d}{2}} |d\xi| \\ &= \frac{M}{\pi d^3} |\Delta z| \cdot L \end{aligned}$$

其中 L 为 C 的弧长。所有当 $\Delta z \to 0$ 时 $|f'(z) - \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi| \leq 0$，所以 $n = 1$ 时，结论成立，有了 $f'(z)$ 之后，重复上面的讨论即得到对任意的 $n \geq 1$ 结论成立 $\square$

Task6:

解 C 为逆时针方向的圆周 $|z| = 2$ 求积分：(1): 对于积分 $\displaystyle\int_C \frac{dz}{\cos(\frac{z}{2})} = \int_C \frac{\frac{z}{\cos\frac{z}{2}} dz}{z - 0}$，因为函数 $f(z) = \dfrac{z}{\cos\frac{z}{2}}$ 在圆盘 $|z| < 2$ 内部解析，且在 $|z| \leq 2$

上连续，所以由柯西积分公式:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-0)}dz = f(0) = \frac{0}{\cos 0} = 0$$

所以原积分值为 0 (2): 对于积分 $\int_C \frac{e^{\sin z}}{100z^2=1}dz = \int_C \frac{e^{\sin z}}{(10z+i)(10z-i)} = \frac{1}{20i}\int_C(\frac{e^{\sin z}}{z-\frac{i}{10}} - \frac{e^{\sin z}}{z+\frac{i}{10}})$，由于 $f(z)=e^{\sin z}$ 在 C 的内部 $|z|<2$ 解析，在 $|z|\leq 2$ 上连续，所以由柯西积分公式，原积分变为:

$$\frac{1}{20i}\cdot 2\pi i\cdot(f(\frac{i}{10})-f(-\frac{i}{10})) = \frac{\pi}{5}\cdot\left(\frac{e^{\sin\frac{i}{10}}-e^{-\sin\frac{i}{10}}}{2}\right)$$

因为:

$$\begin{aligned}
\sin\frac{i}{10} &= \frac{e^{-\frac{1}{10}}-e^{\frac{1}{10}}}{2i}\\
\sin\frac{-i}{10} &= \frac{e^{\frac{1}{10}}-e^{-\frac{1}{10}}}{2i}\\
\Rightarrow e^{\sin\frac{i}{10}} &= e^{\frac{e^{\frac{1}{10}}-e^{-\frac{1}{10}}}{2}i}\\
\overset{a=\frac{e^{\frac{1}{10}}-e^{-\frac{1}{10}}}{2}}{\Rightarrow} &\cos a + i\sin a
\end{aligned}$$

同理 $e^{\sin\frac{i}{10}} = \cos a - i\sin a$ 所以原积分为：

$$\frac{\pi}{5}i\sin a = \frac{\pi}{5}i\sin\left(\sinh\left(\frac{1}{10}\right)\right)$$

Task7:

解 利用柯西积分公式求解复积分:

$$\int_{C_j}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z^2-1}dz,\quad j=1,2,3$$

(j=1):$C_1 : |z+1| = \frac{1}{2}$，函数 $f(z) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z^2-1}$ 有奇点 $z=\pm1$。

原积分变为:

$$\frac{1}{2}\cdot\int_{C_1}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z-1}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z+1}\right)dz$$

由柯西积分定理，前一项为 0，所以原积分为:

$$-\frac{1}{2}\cdot\int_{C_1}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z+1}dz$$

由于函数 $g(z)=\sin\dfrac{\pi}{4}z$ 在 C_1 内部 D 解析，且在 $C_1\cup D$ 上连续，所以由柯西积分公式，原积分变为:

$$-\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\sin\frac{-1\cdot\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$$

(j=2):$C_2:|z-1|=\dfrac{1}{2}$，类似 (j=1) 分解可以得到原积分为:

$$\frac{1}{2}\cdot\int_{C_2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z-1}dz=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$$

(j=3):$C_3:|z|=4$ 则此时两个奇点都在 C_3 的内部。考虑 C_1,C_2，则原积分变为:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cdot\int_{C_3\cup C_1^-\cup C_2^-\cup C_1^+\cup C_2^+}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z-1}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z+1}\right)dz\\
&=\frac{1}{2}\cdot\int_{C_3\cup C_1^-\cup C_2^-}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z-1}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z+1}\right)dz\\
&+\frac{1}{2}\cdot\int_{C_1^+\cup C_2^+}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z-1}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z+1}\right)dz
\end{aligned}$$

由于函数 $\left(\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z-1}-\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z+1}\right)$ 在 $C_3\cup C_1^-\cup C_2^-$ 所包含的区域内解析，有柯西积分定理原积分变为:

$$0+\frac{1}{2}\cdot\int_{C_1^+\cup C_2^+}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z-1}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z+1}\right)dz=\sqrt{2}\pi i$$

Task8:

证明 函数 $f(z)=e^z$ 在 $C:|z|=1$ 内部 D 解析，且在 $D\cup C$ 上连续，所以由柯西积分公式：

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=\int_C\frac{e^z}{z-0}dz=2\pi i\cdot f(0)=2\pi i$$

令 $z=e^{i\theta},dz=ie^{i\theta}d\theta$ 则原积分变为:

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}}\cdot ie^{i\theta}d\theta=2\pi i\\ \Rightarrow&\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta+i\sin\theta}=2\pi\\ \Rightarrow&\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}e^{i\sin\theta}d\theta=2\pi\\ \Rightarrow&\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\left(\cos\sin\theta+i\sin\sin\theta\right)d\theta=2\pi\end{aligned}$$

通过实部和虚部相对应可以得到:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=2\pi\\ \int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta=0\end{aligned}$$

又令 $u=2\pi-\theta$，有:

$$\begin{aligned}2\pi&=\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta\\ &=\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta+\int_\pi^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta\\ &=\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta+\int_\pi^{0}e^{\cos(2\pi-u)}\cos(\sin(2\pi-u))d(2\pi-u)\\ &=2\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta\\ &\Rightarrow\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi\end{aligned}$$

□