复变函数论第一次作业
20234544 毛华豪

Task1:

证明 由于：$|a| \leq 1, |z| \leq 1$

所以：$(1-|a|^2)\cdot(1-|z|^2) \geq 0$

整理得到：$|z|^2+|a|^2 \leq 1+|z|^2|a|^2$

又因为：$z\bar{z}=|z|^2, a\bar{a}=|a|^2$

代入得到：$z\bar{z}+a\bar{a} \leq 1+a\bar{a}z\bar{z}$

两边同时减去 $a\bar{z}+\bar{a}z$ 得到 $z\bar{z}+a\bar{a}-a\bar{z}-\bar{a}z \leq 1+a\bar{a}z\bar{z}-a\bar{z}-\bar{a}z$

整理得到：$(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) \leq (1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})$

即：$|z-a| \leq |1-\bar{a}z|$

所以 $\dfrac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|} \leq 1$ □

Task2:

解 $|z| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{-\sqrt{3}}{2})^2} = 1$

$arg(z) \in (-\pi, \pi]$ 所以：$arg(z) = -\dfrac{\pi}{3}$

相应的：$Arg(z) = \{\theta|\theta = -\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$

Task3:

证明 由于：$(z+w)\cdot(\overline{z+w})=|z+w|^2$ $(z-w)\cdot(\overline{z-w})=|z-w|^2$
所以原式左侧可以写成：$(z+w)\cdot(\overline{z+w})+(z-w)\cdot(\overline{z-w})$
即：$(z+w)\cdot(\bar{z}+\bar{w})+(z-w)\cdot(\bar{z}-\bar{w})$
整理可得到：$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$ □

Task4:

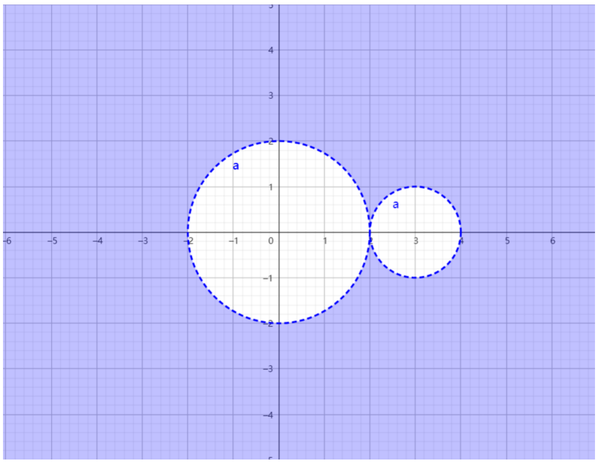

图 1: 4-(1) 答案

解 表示到原点距离大于 2 以及到复平面 $(3,0)$ 点的距离大于 1 的区域，如图所示，紫色区域代表的就是所求的区域。

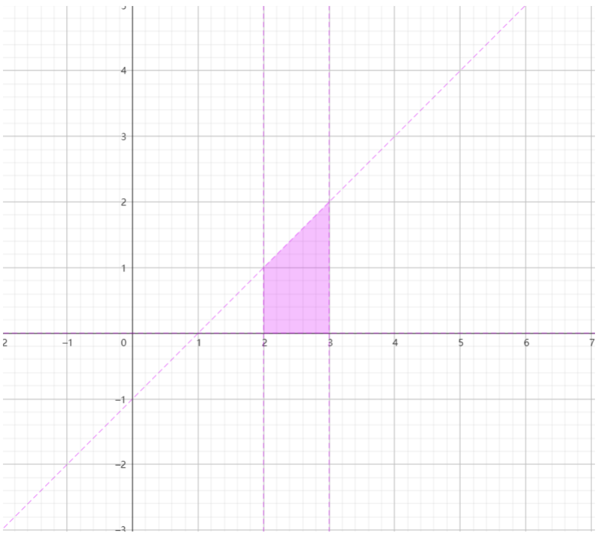

图 2: 4-(2) 答案

解 设 $z=x+iy$，则表示 $(x-1,y)$ 落在区间 $y>0$ 且 $x-1>y$ 的区域，如图所示，粉色区域就是所求的区域。

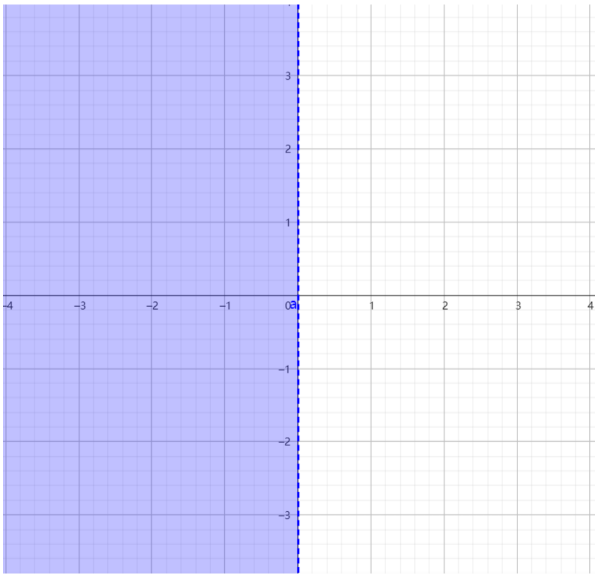

图 3: 4-(3) 答案

解 最终区域表示为 $x<0$，实际上是一列圆的交，这些圆满足中点在 x 轴上，并以 $(\frac{k-1}{k+1},0)$ 以及 $(\frac{k+1}{k-1},0)$ 为端点，其中 $k\in[0,1)$，最终张成的集合为 $x<0$。

Task5:

证明 (1): 在平面直角坐标系中，我们有 $ax+by+c=0$ 为一条直线，现在要对其作一般化。

设 z 是直线上一点，我们现在所说的 z 是复平面上的一个点，则 $z=x+iy$，其对应的坐标为 (x,y)。

由于：$z=x+iy$ 且 $\bar{z}=x-iy$

所以：$x=\frac{z+\bar{z}}{2}$ 且 $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$

又因为 (x,y) 在一条直线上，所以满足 $Ax+By+C=0$

将 x,y 代入直线方程有：$A\frac{z+\bar{z}}{2}+B\frac{z-\bar{z}}{2i}+C=0$

整理得到：$\frac{A-iB}{2}z+\frac{A+iB}{2}\bar{z}+C=0$

令 $\frac{A+iB}{2}=a$，则：$\frac{A-iB}{2}=\bar{a}$

所以原式 $\bar{a}z+a\bar{z}+c=0$ 成立。

(2): 在平面直角坐标系下，我们有 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, 同样我们用上面的方法

将 $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$ 和 $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ 代入得到

整理得到：$z\bar{z}-az-a\bar{z}+a^2+ibz-ib\bar{z}+b^2-r^2=0$
合并公因式得到再两百年同时乘以一个非零常实数得到：$A|z|^2+A(-a+ib)z+A(-a-ib)\bar{z}+A(a^2+b^2-r^2)=0$
令 $A(-a-ib)=B$, $A(a^2+b^2-r^2)=C$ 得到：$A|z|^2+\bar{B}z+B\bar{z}+C=0$
并且有：$|B|^2=A^2(a^2+b^2)>AC=A\cdot A(a^2+b^2-r^2)=A^2(a^2+b^2-r^2)$,
这里 $r^2\geq 0$，证毕。 □

Task6:

解 复数可以用极坐标表示 $z=|z|e^{Arg(z)}=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$
(1)：$-1+2i=\sqrt{5}(\cos\arctan(-2)+i\sin\arctan(-2))$

(2)：原式 $=-(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i=\sqrt{8}(\cos(\arctan(2-\sqrt{3})-\pi)+i\sin\arctan(2-\sqrt{3})-\pi)$
$=\sqrt{8}(\cos(\frac{-11\pi}{12})+i\sin(\frac{-11\pi}{12}))$

(3)：原式 $=\frac{3}{5}-\frac{4i}{5}=\cos\arctan(-\frac{4}{3})+i\sin\arctan(-\frac{4}{3})$

Task7:

证明 这道题和第四题的第三小问是一样的，相当于一列圆张成的区域包括了所有实部为正的虚数也就是虚轴右半平面。
这里给出代数证明：由于 $|\frac{1-z}{1+z}|=|1-z|/|1+z|$，所以即证 $|1-z|<|1+z|$ 和 $Re(z)>0$ 等价即可。
不妨设 $z=x+iy$。
模长非负，所以：$|1-z|<|1+z|\leftrightarrows|1-z|^2<|1+z|^2$
又因为：$|1-z|^2<|1+z|^2\leftrightarrows(1-z)\cdot(1-\bar{z})<(1+z)\cdot(1+\bar{z})\leftrightarrows 2(z+\bar{z})>0\leftrightarrows Re(z)>0$ □

Task8:

解 对 $\frac{1+z}{1-z}$ 分子分母同时乘以 $1-\bar{z}$ 得到原式 $= \frac{i\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$\frac{i\sin\theta}{1-\cos\theta} = i\cot\frac{\theta}{2}$ 所以原式等于 $i\cot\frac{\theta}{2}$

Task9:

证明 若 $|z| <= |w|$，则不等式左侧显然成立，现在考虑 $|z| > |w|$

则由于 $|z| < 1, |w| < 1$ 不等式串三个式子都为正数

故不等式串等价于证明 $(\frac{|z|-|w|}{1-|zw|})^2 \le (|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}|)^2 \le (\frac{|z|+|w|}{1+|zw|})^2$

展开得到：

$\frac{|z|^2-2|z||w|+|w|^2}{1-2|z||w|+|z|^2|w|^2} \le \frac{|z|^2-z\bar{w}-w\bar{z}+|w|^2}{1-z\bar{w}-w\bar{z}+|z|^2|w|^2} \le \frac{|z|^2+2|z||w|+|w|^2}{1+2|z||w|+|z|^2|w|^2}$

由于三个式子都为正数，且由 $Task1$ 知道，$\frac{|z|-|w|}{1-|zw|} = |\frac{|z|-|w|}{1-|z||w|}| = |\frac{|z|-|w|}{1-|\bar{z}||w|}| < 1, |\frac{z-w}{1-\bar{z}w}| = |\frac{w-z}{1-\bar{z}w}| < 1$

又因为：$(1-|w|^2)\cdot(1-|z|^2) > 0$

整理得到：$|z|^2+|w|^2 < 1+|w|^2|a|^2 \to |z|^2+2|z||w|+|w|^2 < 1+2|z||w|+|z|^2|w|^2$

两边同时平方根得到 $|z|+|w| < 1+|z||w| \to \frac{|z|+|w|}{1+|zw|} < 1$

所以不等式串三个式子都 $\in [0,1)$

设 $z=a+ib$, $w=c+id$，则 $|z||w| = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$

由柯西不等式知道 $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)} \ge \sqrt{(ac+bd)^2} = |ac+bd|$

通过计算可得：$z\bar{w}+w\bar{z} = 2(ac+bd)$

所以综合上述几个式子可知：$|z\bar{w}+w\bar{z}| \le 2|z||w|$

结合糖水不等式：对于所有的真分数 $\frac{b}{a}$，有 $\frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}, (c > 0)$ 以及 $|z\bar{w}+w\bar{z}| \le 2|z||w|$ 可知:

不等式串：

$\frac{|z|^2-2|z||w|+|w|^2}{1-2|z||w|+|z|^2|w|^2} \le \frac{|z|^2-z\bar{w}-w\bar{z}+|w|^2}{1-z\bar{w}-w\bar{z}+|z|^2|w|^2} \le \frac{|z|^2+2|z||w|+|w|^2}{1+2|z||w|+|z|^2|w|^2}$ 成

立，故不等式 $(\frac{|z|-|w|}{1-|zw|})^2 \le (|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}|)^2 \le (\frac{|z|+|w|}{1+|zw|})^2$ 成立，所以对于 $|z|>|w|$ 情况不等式左边也成立，而不等式右边由如上证明可知始终成立，证毕。 □

Task10:

证明 不妨设 $z=a+ib,\ w=c+id$，我们只要证明 $ac \le 0$
因为 $zw<0$，所以 zw 的虚部等于 0
计算得到：$zw=ac-bd+i(ad+bc)$，所以 $ac-bd<0$ 并且 $ad+bc=0$
如果 $d=0$ 那么代入 $ad+bc=0$ 可以得到 $ac<0$
如果 $d \ne 0$ 由于 $ad+bc=0$，所以 $ad=-bc \to a=\frac{-bc}{d} \to ac=\frac{-bc^2}{d}$
又因为 $ac-bd<0$，所以 $\frac{-bc^2}{d}-bd<0$ 而且 $c^2 \ge 0$，所以 b,d 一定同号并且不能为 0
又因为 $ad+bc=0$，所以 a,c 异号或都为 0，故得 $ac \le 0$ 证。 □