复变函数论第二次作业

20234544 毛华豪

Task1:

证明 对于函数 $f(z) = Im(z)$,$\forall z \in \mathbb{C}$ 有：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{Im(z+\Delta z) - Im(z)}{\Delta z} \\
&= \begin{cases} \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{Im(z) - Im(z)}{\Delta z} \to 0 & \Delta z \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{Im(z) + \Delta z - Im(z)}{\Delta z} \to 1 & \Delta z \in \{a \cdot i | a \in \mathbb{R}\} \end{cases}
\end{aligned}
$$

所以极限不存在，所以 $f(z) = Im(z)$ 在复平面上不解析。

对于函数 $g(z) = \frac{1}{z}$,$\forall z \in \mathbb{C}$ 有：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z+\Delta z) - g(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{1}{\overline{\overline{z+\Delta z}}} + \frac{1}{\bar{z}}}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-\bar{\Delta} z}{(\bar{z}^2 + \overline{\Delta z} \cdot \bar{z})\Delta z} \\
&= \begin{cases} \dfrac{-1}{\bar{z}^2} & \Delta z \in \mathbb{R} \\ \dfrac{1}{\bar{z}^2} & \Delta z \in \{a \cdot i | a \in \mathbb{R}\} \end{cases}
\end{aligned}
$$

所以极限不存在，所以 $g(z)=\dfrac{1}{z}$ 在复平面上处处不解析。
除定义之外我们还可以用 $Cauchy-Riemann$ 方程的方法来判断函数的解析性。设 $f=u+iv$ 在区域 D 上有定义则 f 在 D 上解析充分条件是

- u 和 v 的偏导数在 D 上连续
- u,v 满足 $Cauchy-Riemann$ 方程

对于函数 $f(z)=Im(z),\forall z\in\mathbb{C}$ 有 $f(z)=Im(z)\rightarrow f(x,y)=y$ 又因为：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0\neq\frac{\partial v}{\partial y}=1$$

所以不满足 $Cauchy-Riemann$ 方程，f 不解析。
对于函数 $g(z)=\dfrac{1}{z}$,$\forall z\in\mathbb{C}$ 有：
$g(z)=\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{x+iy}{x^2+y^2}\rightarrow u=\dfrac{x}{x^2+y^2},v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2xy}{x^2+y^2}\neq-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

所以函数 $g(z)=\dfrac{1}{z}$ 不解析。 □

Task2:

解 利用 $Cauchy-Riemann$ 方程
设 $f=u+iv$ 在区域 D 上有定义则 f 在 D 上解析充分必要条件是

- u 和 v 的偏导数在 D 上可微
- u,v 满足 $Cauchy-Riemann$ 方程

$f(z)=|z|^2=x^2+y^2+i\cdot 0.$
所以:$u(x,y)=x^2+y^2,v(x,y)=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0, (x \neq 0)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \neq -\frac{\partial v}{\partial x} = 0, (y \neq 0) \tag{1}$$

可知 $f(z) = \bar{z}$ 在原点处可微在其他点不可微且在整个复平面上不解析。

Task3:

证明 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$，因为 $x < 0, x > 0$ 对于绝对值运算和平方运算结果一致，所以仅考虑 $x \geq 0, y \geq 0$ 的情况。原不等式变成：

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq x+y$$

由于 $\frac{x^2-2xy+y^2}{2} = \frac{(x-y)^2}{2} \geq 0 \to \frac{x^2+2xy+y^2}{2} + \frac{x^2-2xy+y^2}{2} \geq \frac{x^2+2xy+y^2}{2}$

所以 $x^2+y^2 \geq \frac{x^2-2xy+y^2}{2} \to \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{\frac{x^2+2xy+y^2}{2}} = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$，故不等式左边成立。

再看右边，由于 $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \geq x^2+y^2 \to \sqrt{x^2+2xy+y^2} = x+y \geq \sqrt{x^2+y^2}$，所以不等式右侧成立。证毕。 □

Task4:

证明 设常数 $a \in \mathbb{C}, r > 0$，我们要证明 $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = r$ 为一个圆周，在作业一我们曾经用圆的一般方程求解过圆周的复平面表达式，为了得到新的表达式考虑圆的其他表示方法，考虑到这里用某个复数模长来表示一个圆周，想到和距离相关的圆的定义。

当 $a = 0$ 时，原式变成了 $|z| = r$ 为以原点为圆心，r 为半径的圆周。

当 $a \neq 0$ 时，因为 $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = r \to \left|\frac{z-a}{\frac{1}{\bar{a}}-z}\right| = \frac{r}{|\bar{a}|} \to \frac{|z-a|}{\left|\frac{1}{\bar{a}}-z\right|} = \frac{r}{|\bar{a}|}$，此即复

平面上一点到 a 和 $\frac{1}{\bar{a}}$ 的距离的比值为 $\frac{r}{|\bar{a}|}$ 的点，满足阿波罗尼斯圆的定义。
当 $|a|=r$ 时，原方程退化为一条直线 (例如取 $a=i, r=1$) 或者平面上所有的点 $(a=r=1)$ 或空集 $(a=1\neq r)$。
当 $|a|\neq r$ 时，原方程满足阿波罗尼斯圆的定义，设 $a=x+iy$ 由阿波罗尼斯圆的性质，半径 $R=\frac{r\left||a|^2-1\right|}{|r^2-|a|^2|}$.
对于圆心来说，因为 $a=x+iy \to \frac{1}{\bar{a}}=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{iy}{x^2+y^2}$, 两个点在一条过原点的直线上。利用阿波罗尼斯圆的性质，我们采用向量化的方式求圆心。
当 $0<\frac{r}{|\bar{a}|}=\frac{r}{|a|}<1$ 时，圆心所在的点为 $\frac{1}{\bar{a}}+\frac{|a|^2}{|a|^2-r^2}(a-\frac{1}{\bar{a}})=\frac{|a|^2}{|a|^2-r^2}\cdot a+\frac{-r^2}{|a|^2-r^2}\cdot\frac{1}{\bar{a}}$
当 $\frac{r}{|\bar{a}|}=\frac{r}{|a|}>1$ 时，圆心所在的点为 $\bar{a}+\frac{r^2}{r^2-|a|^2}(\frac{1}{\bar{a}}-a)=\frac{-|a|^2}{r^2-|a|^2}\cdot a+\frac{r^2}{r^2-|a|^2}\cdot\frac{1}{\bar{a}}$
综上圆心为 $\frac{-|a|^2}{r^2-|a|^2}\cdot a+\frac{r^2}{r^2-|a|^2}\cdot\frac{1}{\bar{a}}$，半径为 $R=\frac{r\left||a|^2-1\right|}{|r^2-|a|^2|}$. □

Task5:

解 利用 *Euler* 公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 我们有:
$(1+i)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, (1-i)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
所以:

$$(1+i)^n=(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^n=\sqrt{2}^n(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^n=\sqrt{2}^n(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})$$
$$(1-i)^n=(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^n=\sqrt{2}^n(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})^n=\sqrt{2}^n(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4})$$
$$(i+1)^n=(1-i)^n\to(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^n=(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^n$$
$$\to\sqrt{2}^n(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})=\sqrt{2}^n(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4})$$
$$\sin\frac{n\pi}{4}=0\to\frac{n\pi}{4}=k\pi, k\in\mathbb{Z}\to n=4k, k\in\mathbb{Z}$$

Task6:

解 讨论下列函数在复平面上的解析性。利用 $Cauchy-Riemann$ 方程。类似 Task2.(1)

(1): $f_1(z)=xy^2-2ixy \to u(x,y)=xy^2, v(x,y)=-2xy$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2 \not\equiv \frac{\partial v}{\partial y}=-2x$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=2xy \not\equiv -\frac{\partial v}{\partial x}=2y$$

所以当 $x=y=0$ 时等式成立，也就是 $f_1(z)$ 在原点处可微其余点不可微且在整个复平面上不解析。

(2):$f_2(z)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3) \to u(x,y)=x^3-3xy^2, v(x,y)=3x^2y-y^3$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2 \equiv \frac{\partial v}{\partial y}=-3x^2-3y^2$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-6xy \equiv -\frac{\partial v}{\partial x}=-6xy$$

且 $u(x,y), v(x,y)$ 在复平面上都是可微的，由可微和解析的定义和解析的充分必要条件知道 $f_2(z)$ 在整个复平面可微且解析。

Task7:

证明 同理 Task6,$u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y), v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y)$,$u(x,y), v(x,y)$ 都是三角函数和指数函数的乘积可微且：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y) \equiv \frac{\partial v}{\partial y}=e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^x(-x\sin y-\sin y-y\cos y) \equiv -\frac{\partial v}{\partial x}=-e^x(y\cos y+x\sin y+\sin y)$$

所以 $f(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上解析。

$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)+ie^x(y\cos y+x\sin y+\sin y)$

□

Task8:

证明 已知函数 $f = u + iv$ 在 D 上解析，$u(x,y), v(x,y)$ 分别为实部虚部。
(1): 若 $f(z)$ 是实值函数则 $f(z) = u = Re(f), v \equiv 0$ 由于在 D 上解析，由 $Cauchy - Riemann$ 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

由 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 积分知道 $f = \phi(y)$, 又由于 $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 得到 $\phi(y) = C$,C 为常数。所以 f 为 D 内的常值函数。
(2):$f'(z) = 0$，可以得到 $f'(z) = (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})(z) = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \nvdash$
所以 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
由第一小问，$u = C_1, v = C_2$ 都为常数，所以 $f = C_1 + iC - 2$ 为常值函数。
(3):$|f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2} = C$,$C$ 为常数，则 $u^2 + v^2 = C^2 \xrightarrow{\partial x, \partial y} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$
由于函数 f 解析，所以满足 $Cauchy - Riemann$ 方程, 代入上式可得:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$-u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

则有：$u \times (u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}) + v \times (-u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}) = 0$

$$\rightarrow (u^2+v^2)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 0 \rightarrow u, v = 0 \rightarrow f = 0 \\ u^2 + v^2 \neq 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \begin{cases} v = 0 \rightarrow (1) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \rightarrow (2) \end{cases} \end{cases}$$

所以转化为 (1)(2) 两小题可知 f 是一个常值函数。
(4): 若 u, v 都为常数，则 $f = u + iv$ 显然是一个常值函数。现在考虑 u, v 不同时为常数。

由于 f 解析于 D，所以满足 $Cauchy-Riemann$ 方程，不妨设 u 为常数：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

所以 $f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}_{(x_0,y_0)}+i\frac{\partial v}{\partial x}_{(x_0,y_0)}\equiv 0,\forall z_0\in D$, 所以转化为 (2)，可知 f 为一个常值函数。

(5): 存在不全为 0 的实常数 a,b,c 使得 $au+bv=c$，所以 a,b 不同是为 0，否则 $c=0$ 矛盾。即 $a^2+b^2>0$。

$au+bv=c\xrightarrow{\partial x,\partial y}\begin{cases}a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ a\frac{\partial u}{\partial y}+b\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$ 根据 $Cauchy-Riemann$ 方程，原方程组可以表示为:

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial x}=0$$
$$-a\frac{\partial v}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

所以：$a\cdot(a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial x})+b(-a\frac{\partial v}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial x})=0\to(a^2+b^2)\frac{\partial u}{\partial x}=0\to\frac{\partial u}{\partial x}=0$

所以：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0\to b\frac{\partial v}{\partial x}=0,a\frac{\partial u}{\partial y}=0$

$\begin{cases}b=0\to a\neq 0\to\frac{\partial u}{\partial y}=0\to f'=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0\to(2)\\ b\neq 0\to\frac{\partial v}{\partial x}=0\to f'=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\equiv 0\to(2)\end{cases}$

所以通过转化为题目 (2) 可知 f 是常值函数。 □