复变函数论第十一次作业

20234544 毛华豪

Task1: 叙述并证明解析函数的最大模原理

证明 设 f 在 D 上解析，则 $|f(z)|$ 在 D 内任何一点都不能取到最大值，除非它是常数函数.

$Proof$: 设 $M = \sup_{z\in D}|f(z)|$，由于 f 不恒为 0，所以 $M > 0$。用反证法，设 $\exists z_0 \in D s.t. |f(x_0)| = M$，由此 $0 < M < +\infty$. 则取 z_0 为心，充分小的 R 为半径作圆周 $|z - z_0| = R$，取逆时针方向，使得:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\} \subset D$$

由平均值定理

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})d\theta$$

从而有

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{|f(z_0 + Re^{i\theta})|}_{\leq M} d\theta \leq M$$

由此可知 $|f(z_0+Re^{i\theta})| = M, \forall\theta$，若不然，$\exists\theta_0 \in [0, 2\pi) s.t. |f(z_0+Re^{i\theta})| < M$ 由连续函数的局部保号性可以知道 $\exists(\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta) \subset [0, 2\pi) s.t. |f(z_0 +$

$Re^{i\theta})| < M, \quad \theta \in (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$，所以有:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+Re^{i\theta})|d\theta = M\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} + \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi)\backslash(\theta_0-\delta,\theta_0+\delta)}\\
\leq &M\times\frac{2\delta}{2\pi} + \frac{M\times(2\pi-2\delta)}{2\pi} = M
\end{aligned}$$

$M < M$ 矛盾. 于是，以 z_0 为圆心，充分小的 $R > 0$ 为半径的圆周上 $f(z) \equiv M, \quad |z - z_0| = R$，由 R 的任意性可以知道，存在 z_0 的某个小邻域 $O(z_0, \delta) \subset D s.t. |f(z)| \equiv M, \quad z \in O(z_0, \delta)$，所以 $f(z) \equiv M$ 或者 $f(z) \equiv -M$，由解析函数零点孤立性的推论 f, g 在区域 D 上解析，且它们的 D 的某个子区域内的一段弧上相等，则 $f(z) \equiv g(z), z \in D$ 可以得出 $f(z) \equiv M, \quad z \in D$(或者取负值，总之是一个常数) □

Task2: 设 f 为区域 D 上不恒为常数的解析函数，且 $f(z_0) \neq 0$，其中 $z_0 \in D$ 求证 $|f(z_0)|$ 不可能是 $|f(z)|$ 在 D 上的最小值。

证明 因为 f 是区域 D 上的解析函数，并且 $f(z_0) \neq 0$，由于连续函数的局部保号性，可以知道在 z_0 的某个小邻域 $U = O(z_0, \delta)$ 上 $f(z) \neq 0$，在这个邻域上考虑 $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ 则函数 $g(z)$ 在 U 上解析并且不可能是常数函数 (否则由零点孤立性定理的推论可以知道区域上的函数 f 为常数与条件矛盾)，所以运用解析函数的最大模原理可知 $|g(z_0)|$ 不是区域 U 上的最大值，即存在 $z' \in \bar{U}, s.t. |g(z')| > |g(z_0)| \to |f(z')| < |f(z_0)|$ 此即 $|f(z)|$ 不是 D 上的最小值。 □

Task3: 设

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a_n)^n, \quad |z - a| < r < +\infty$$

证明：若恒有 $|f(z)| \le M$，其中 M 为常数，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^n r^{2n} \le M^2$$

并由此证明最大模原理

证明 由于函数可以在收敛域 $|z-a| \le r \le +\infty$ 中展开成幂级数，所以一定在 $|z-a| \le r$ 上是解析的。利用 $Parseval$ 恒等式可以得到，对于函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ 在圆周 $|z-a|\rho, (0<\rho<r)$ 上满足

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+\rho e^{i\theta})|^2 d\theta$$

(这个恒等式在第十次作业的第 8 题有证明)，故我们有:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n} \overset{|f(z)|\le M}{\le} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M^2 d\theta = M^2$$

令 $\rho \to r^-$ 可以得到不等式 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \le M$ 成立。

下一步，利用这个恒等式证明最大模原理。

假设在内部取到最大值，不妨就设在 a 点，(否则考虑在这个点的泰勒展开有如上相似的结论) 则有 $a_0 = |f(a)| = M$ 代入不等式有:

$$|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \le M^2 \Rightarrow M^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \le M^2$$

所以 $\forall n \ge 1$ 有 $a_n = 0$ 所以幂级数退化为常数。综上，若是在区域内部取到最大值，则一定为常值函数。 □

Task4: 设非常值函数 f 在有界区域 D 上解析，在 D 的闭包 $\overline{D}$ 上连续，且

f 在 D 内无零点。证明：若存在常数 $m > 0$ 使得

$$|f(z)| \geq m, \quad z \in D$$

则必有

$$|f(z)| > m, \quad z \in D$$

证明 由于 f 在 D 内无零点，所以我们考虑 $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ 在整个区域 D 上解析，并且在 $\overline{D}$ 上连续。$|f(z)| \geq m$ 可以推出 $\dfrac{1}{|f(z)|} = |g(z)| \leq \dfrac{1}{m}$。若存在 $z_0 \in D$ 使得 $|g(z_0)| = \dfrac{1}{m} \geq |g(z)|$，那么根据最大模原理，函数 $g(z)$ 一定是一个常值函数，故而 $f(z) = \dfrac{1}{g(z)}$ 也是一个常值函数，这和条件矛盾，所以不存在这样的内点 z_0 所以对于所有的 $z \in D$ 有 $|g(z)| < \dfrac{1}{m}$ 即 $|f(z)| > m$.
□

Task5: 设函数 f 在开的单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上解析，在闭的单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上连续，求证：存在一列多项式 $\{p_n\}_n^{\infty}$，使得该多项式在 $\overline{D}$ 上一致收敛于 f.

证明 根据提示，对于 $r = r(n) = \dfrac{n-1}{n}, n = 1, 2 \ldots$，考虑函数列 $f_{r_{(n)}}(z) = f(r_{(n)}z)$。因为 f 在 $\mathbb{D}$ 上解析，所以 $f_r(z)$ 在 $|z| \leq \dfrac{1}{r}$ 上解析，并且有 $\overline{\mathbb{D}} \subset \{z : |z| < \dfrac{1}{r}\}$，根据泰勒定理 (解析函数的泰勒展开) 以及幂级数的性质 (在收敛域内内闭一致收敛) 可以知道 f_r 的泰勒级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n z^n$$

在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上一致收敛于 $f_r = p_n, n = 1, 2, \ldots$. 根据函数项级数一致收敛的定义，

即对于任意的 $\epsilon > 0$，存在只与 ϵ 有关的正整数 N 使得

$$\sup_{z \in \overline{\mathbb{D}}} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n r^n z^n - f_r(z) \right| < \epsilon$$

即对于任意的 $|z| \leq 1$ 有

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n r(i)^n z^n - f(r(i)z) \right| < \epsilon, \quad i = 1, 2 \ldots$$

由于 f 在 $\overline{D}$ 上是连续的，因而是一致连续的，此即对于以上相同的 ϵ 有存在 $\delta > 0$ 当 $|z' - z| < \delta$ 时有 $|f(z') - f(z)| < \epsilon \quad \forall z \in \overline{\mathbb{D}}$ 考虑 $i \to \infty$ 即 $r(i) \to 1^-$，则有 $|r(i)z - z| = |z||r(i) - 1| \leq |r(i) - 1| \to 0$，所以

$$|f(r(i)z) - f(z)| \leq \epsilon \quad \forall z \in \overline{\mathbb{D}}$$

所以对于固定的 $z \in \overline{\mathbb{D}}$，令 $i \to \infty, r(i) \to 1^-$ 有

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n r(i)^n z^n - f(z) \right| \leq \left| \sum_{n=0}^{N} a_n r(i)^n z^n - f(rz) \right| + |f(rz) - f(z)| < 2\epsilon$$

所以多项式序列 $p_i' = \sum_{n=0}^{N} a_n r(i)^n z^n, i = 1, 2 \ldots, \infty$ 一致收敛于 f，考虑到 ϵ 的任意性我们取 $p_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r(i)^n z^n, i = 1, 2 \ldots$，所以这样的多项式序列存在。 $\square$