复变函数论第十次作业

20234544 毛华豪

Task1:

证明 第一步证明解析函数的泰勒展开：
假设函数 f 在区域 $D \subset \mathbb{C}$ 上解析，$a \in D$，且圆盘 $K = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\} \subset D$，则 f 可展开为泰勒级数：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

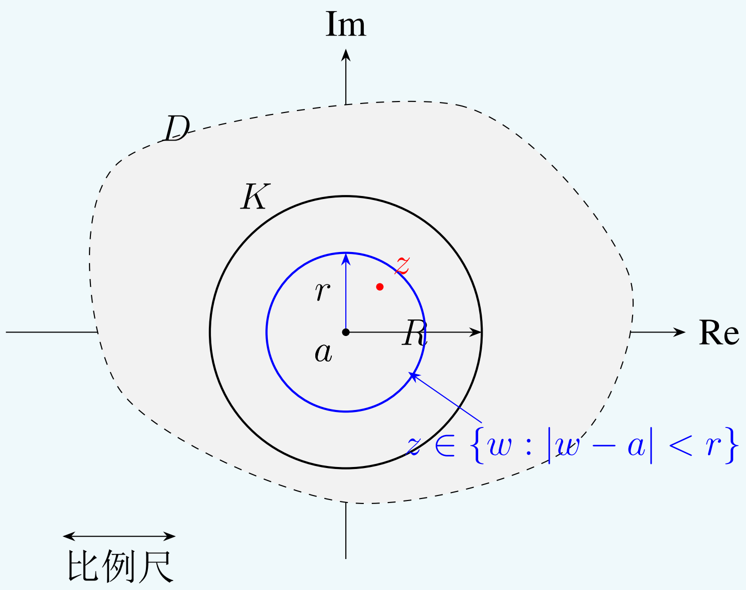
其中泰勒系数满足：

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r\in(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

积分路径方向为逆时针。此外，该展开是唯一的。
任取一点 $z \in K$，则存在 $r \in (0,R)$ 使得 $z \in \{w : |w-a| < r\}$。应用柯西积分公式有：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

积分路径为逆时针方向。



于是得到如下等式：

$$\begin{aligned}\frac{f(w)}{w-z} &= \frac{f(w)}{(w-a)-(z-a)} \\ &= \frac{f(w)}{w-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} \\ &\overset{\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n=\frac{1}{1-\lambda}}{\underset{|\lambda|<1}{=}} \frac{f(w)}{w-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\end{aligned}$$

注意到 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n$ 满足：

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right| = \frac{|z-a|}{r} \triangleq s < 1$$

由于 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n$ 收敛，故 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n$ 一致收敛，因此有：

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-a|=r}\frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-a|=r}\frac{f(w)}{w-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n dw \\ &\overset{UC}{=} \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\int\limits_{|w-a|=r}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw \triangleq \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n\end{aligned}$$

系数 a_n 满足：

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$
$$\overset{Cauchy}{=} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2\ldots$$

最后证明展开的唯一性。若 f 在 K 上有另一展开式：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n, \quad z \in K$$

则对 $n \geq 0$ 有：

$$f(a) = b_0, f'(a) = b_1, f''(a) = 2!b_2, \ldots, f^{(n)}(a) = n!b_n$$

因此 $b_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} = a_n$，这说明展开式是唯一的。下面再证明此结论：$f$ 在 D 上解析 $\Leftrightarrow$ 对于任意 $a \in D$，f 可在某邻域内展开为关于 $(z-a)$ 的泰勒级数。

$\Rightarrow$: 由前述解析函数的泰勒展开直接可得。

$\Leftarrow$: 设 f 在圆盘 $K = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ 上可展开为 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$。根据幂级数性质（在收敛域内内闭一致收敛），$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ 在 $|z-a| < R$ 上内闭一致收敛于 $f(z)$。由于每一项 $a_n(z-a)^n$ 都是解析函数，根据 $Weierstrass$ 定理，f 在 $|z-a| < R$ 上解析，因此在 D 上解析。 □

Task2:

证明 证明解析函数的零点孤立性:

设 f 在 $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$ 上解析，且 a 是 f 的零点。若 f 在 $|z-a| < r$ 上不恒为零，则存在 a 的某个邻域内除 a 外不含 f 的其他零点，即 a 是 f 的孤立零点。

根据泰勒定理，f 可表示为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,\quad |z-a|<r$$

由于 f 在 $|z-a|<r$ 上不恒为零，可设 a 是 f 的 m 阶零点，即

$$f(z)=(z-a)^m\phi(z)$$

其中 ϕ 在 $|z-a|<r$ 上解析且 $\phi(a)\neq 0$。特别地，ϕ 在 a 点连续，故 $|\phi|$ 在 a 点连续且 $|\phi(a)|>0$，因此存在邻域 $O(a,\delta)$ 使得

$$|f(z)|=|z-a|^m\cdot|\phi(z)|>0,\quad z\in O(a,\delta)\backslash\{a\}$$

所以 a 孤立零点。 □

Task3:

证明 因为 f 在区域 D 上解析，$z_0\in D$。由泰勒定理，考虑函数在 a_0 点附近的 $Taylor$ 展开。$f(z)=C_0+C_1(z-a_0)+C_2(z-a_0)^2+\cdots+C_n(z-a_0)^n+\dots$ 代入 $f^{(n)}(z_0)=0,n=1,2,\dots$ 可以得到 $C_1=C_2=\cdots=C_n=\cdots=0$ 所以函数 $f=C_0$ 为常值函数。 □

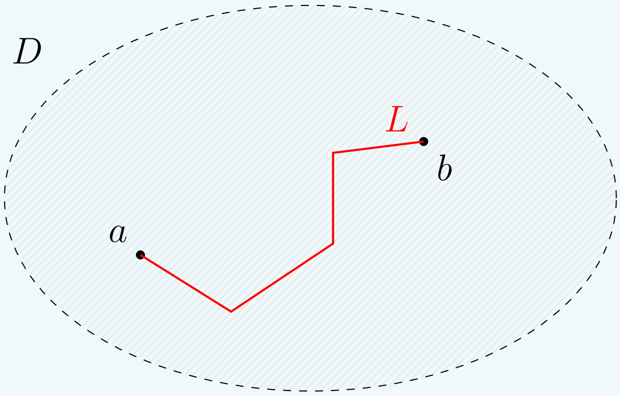
Task4:

证明 考虑解析函数零点孤立性的推论：设函数 f 在圆盘 $|z-a|<r$ 上解析，且存在一列零点 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 a（$z_n\neq a,n=1,2,\dots$），则 f 在 $|z-a|<r$ 上恒为零。
由于 f 在 a 点解析，故在 a 点连续：

$$f(a)=\lim_{n\to\infty}f(z_n)=0,\quad \forall n\geq 1$$

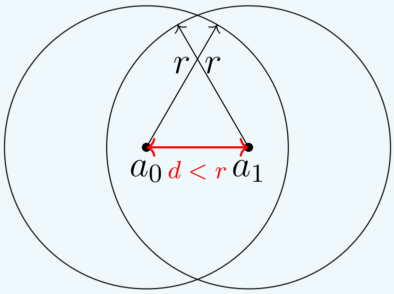
因此 a 是 f 的零点。但 $z_n\to a(n\to\infty)$ 表明 a 不是孤立零点，根据零点孤立性定理可得 $f\equiv 0$ 在 $|z-a|<r$ 上成立。
设 f 和 g 都在区域 D 上解析，且存在点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$（$z_n\neq a,n=1,2,\dots$）

使得 $f(z_n) = g(z_n)$（$n = 1, 2, \dots$），则 $f(z) = g(z)$ 在 D 上成立。



由于 D 是连通开集，任取 $a, b \in D$ 并用折线 L 连接。设 L 到边界 ∂D 的距离为

$$d = \inf |z - w| > 0, \quad z \in L, w \in \partial D$$



在 L 上取分点 $a = a_0, a_1, \dots, a_n = b$ 使得相邻两点距离小于 $r \in (0, d)$。根据前述定理，$f - g \equiv 0$ 在 $|z - a_0| < r$ 上成立。由于 $|a_1 - a_0| < r$，前两个圆盘交集非空。重复此过程可得 $f(b) = g(b)$。因 b 位置任意选取，故 $f \equiv g$ 于 D。

（详细证明：令 $h(z) = f(z) - g(z)$，由 $h(z_n) = 0$ 且 $z_n \to a$，根据推论得 $h \equiv 0$ 于 $|z - a_0| < r$。在 a_0 与 a_1 连线上取点列 $\{w_n\} \subset \{z : |z - a_1| < r\}$ 使得 $h(w_n) = 0$ 且 $w_n \to a_1$，再次应用推论得 $h \equiv 0$ 于 $|z - a_1| < r$。重复此过程最终得 $h(b) = 0$，由 b 的任意性知 $f \equiv g$ 于 D。） □

Task5:

证明 不存在这样的函数，因为 $\frac{1}{2k} \to 0$，k 取 $1, 2 \dots$ 时为一列趋向于原点的点列，满足 $f(\frac{1}{2k}) = 0$，在原点解析意味着在原点的某一个领域内解析，假设在开圆盘 $|z| < \rho$ 上解析，则由零点孤立性的推论可以知道在 $|z| < \rho$ 上恒为 0，取 $k > \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{N}$ 则有 $\frac{1}{2k-1} < \rho$，所以此时 $f(\frac{1}{2k-1}) = 0 \neq 1$。所以不存在这样的解析函数。 $\square$

Task6:

解 指出下面两个函数在零点 $z = 0$ 点的阶数。

(1):$z^2(e^{z^2} - 1) = z^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{n!} - 1 \right) = z^4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2(n-1)}}{n!} \right)$，所以在 $z = 0$ 处的阶数为 4.

(2):$6\sin(z^3) + z^3(z^6 - 6) = 6(z^3 - \frac{z^9}{3!} + \frac{z^{15}}{5!} + \dots) + z^9 - 6z^3 = z^{15} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6z^{3n}}{(2n+5)!} \right)$，所以阶数为 15.

Task7:

证明 原函数 $f(z)$ 可以写成 $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$，记 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = g(z)$，因为幂级数的收敛半径 $R > r$，所以可知：

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \\
\Rightarrow |a_n| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} \frac{M}{r^{n+1}} dz \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n}
\end{aligned}
$$

有了系数之后可得到:

$$\begin{aligned}|g(z)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n||z|^n \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{r^n}|z|^n\\ &= M\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|z|}{r}\right)^n = M\cdot\frac{|z|/r}{1-|z|/r}\\ &= \frac{M|z|}{r-|z|}\end{aligned}$$

当 $|z| < \dfrac{|a_0|}{|a_0|+M}r$ 时有:

$$\frac{M|z|}{r-|z|} < \frac{\frac{M|a_0|r}{|a_0|+M}}{r-\frac{|a_0|}{|a_0+M|r}} = |a_0| \Rightarrow |g(z)| < |a_0|$$

所以 $f(z) = a_0 + g(z) \neq 0$(否则 $|a_0| = |g(z)|$) □

Task8:

证明 设在圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$，解析函数 $f(z)$ 的 $Taylor$ 展开式为 $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \ldots$，当 $0 \leq r < R$ 时，积分 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta$ 可以写为:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})\cdot\overline{f(re^{i\theta})}d\theta.\end{aligned}$$

将 $f(z)$ 解析式代入，原积分变为:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(a_0 + a_1re^{i\theta} + a_2re^{2i\theta} + \ldots)\cdot\overline{(a_0 + a_1re^{i\theta} + a_2re^{2i\theta} + \ldots)}d\theta\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^{2n} + (A_1re^{i\theta}) + (\bar{A}_1re^{-i\theta}) + \cdots + (A_nre^{ni\theta}) + \ldots)\end{aligned}$$

因为在收敛域内部，幂级数是内闭一致收敛的，可以逐项积分，又因为:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^k e^{ni\theta}d\theta = \frac{r^k}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ni\theta}d\theta = 0$$

所以原积分为:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n} + (A_1re^{i\theta}) + (\bar{A}_1re^{-i\theta}) + \dots + (A_nre^{ni\theta}) + \dots)\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}) + 0 + \dots + 0 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}\end{aligned}$$

□

Task9:

证明 设 f 为一个整函数，即在整个复平面上解析的函数，且存在正整数 n 以及两个正数 R 和 M 使得:

$$|f(z)| \leq M|z|^n, \quad |z| \geq R$$

因为 f 为整函数，所以在原点展开成泰勒级数得到:

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots$$

其中 a_k 满足:

$$|a_k| \leq \frac{max_{|z|=r}|f(z)|}{r^k}, \quad r > R$$

由题设可知,当 $|z| = r > R$ 时,满足 $|f(z)| \leq Mr^n$,故 $|a_k| \leq \frac{Mr^n}{r^k} = Mr^{n-k}$,当 $k > n$ 时，令 $r \to \infty$ 有 $r^{n-k} \to 0$ 从而 $|a_k| = 0$，所以 $a_k = 0, k > n$，所以这样的函数一定是一个次数最大为 n 的多项式或者常数函数。 □

Task10:

证明 这样的函数存在，考虑函数 $f(z)=\dfrac{z}{z+1}$，则函数满足:

- $f(\dfrac{1}{n})=\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{n+1},\quad n=1,2\ldots.$
- 函数在原点有定义并且解析

(前面我们提到了函数在某个区域 D 上解析的充要条件是对于区域内的任意一个点 a 都可以在某个收敛域内展开成关于 $(z-a)$ 的幂级数。对于一个点的解析来说，充要条件为在该点可以展开成幂级数。函数 $f(z)$ 可以展开成 $f(z)=\dfrac{z}{z+1}=z\cdot\dfrac{1}{z+1}=z\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n+1},\quad |z|<1$，所以函数解析并且满足条件，所以存在这样的函数。) □

Task11:

解 计算积分:$\displaystyle\int_C\frac{z^3dz}{(z-3)(z^2-1)}$，在圆周 $|z|=2$ 内部有奇点 ±1，所以积分可以变为:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_C\frac{z^3dz}{(z-1)(z-3)}-\frac{1}{2}\int_C\frac{z^3dz}{(z+1)(z-3)}\\=&\frac{1}{2}\int_C\frac{\frac{z^3}{(z-3)}dz}{(z-1)}-\frac{1}{2}\frac{\frac{z^3}{(z-3)}dz}{(z+1)}\end{aligned}$$

令 $g(z)=\dfrac{z^3}{z-3}$ 由柯西积分公式有原积分为:

$$\frac{1}{2}\cdot2\pi i\cdot g(1)-\frac{1}{2}\cdot2\pi i\cdot g(-1)=-\frac{3}{4}\pi i.$$