复变函数论第七次作业

20234544 毛华豪

Task1:

解 用定义计算复积分。取分点 $a = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = b$，在每一个小弧段上去任意的点 $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n$，考虑和式：

$$I_1 = \int_C dz = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} 1(z_k - z_{k-1}) = z_n - z_0 = b - a$$

其中 $||\Delta|| = \underset{1 \le k \le n}{max}(|\Delta z_k|)$ 再考虑 I_2 我们有：

$$I_2 = \int_C zdz = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \xi_k(z_k - z_{k-1})$$

取 $\xi_k = z_{k-1}$ 由于 $z_{k-1}(z_k - z_{k-1}) = \dfrac{z_k^2 - z_{k-1}^2}{2} - \dfrac{(\Delta z_k)^2}{2}$ 所有和式变为：

$$\lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \xi_k(z_k - z_{k-1}) = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{z_k^2 - z_{k-1}^2}{2} - \frac{(\Delta z_k)^2}{2} \right)$$

由于光滑函数的可求长的，所以有:

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| \le L$$

所以:

$$\sum_{k=1}^{n}|\Delta z_k|^2 \le ||\Delta z_k||\cdot\sum_{k=1}^{n}|\Delta z_k| \le ||\Delta z_k||\cdot L \xrightarrow{||\Delta z_k||\to 0} 0$$

所以

$$\lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{z_k^2-z_{k-1}^2}{2}-\frac{(\Delta z_k)^2}{2}\right)=\frac{b^2-a^2}{2}-0=\frac{b^2-a^2}{2}=S_{left}$$

同理取 $\xi = z_k$ 由于 $z_k(z_k-z_{k-1})=\dfrac{z_k^2-z_{k-1}^2}{2}+\dfrac{(\Delta z_k)^2}{2}$ 同样有:

$$\lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{z_k^2-z_{k-1}^2}{2}+\frac{(\Delta z_k)^2}{2}\right)=\frac{b^2-a^2}{2}+0=\frac{b^2-a^2}{2}=S_{right}$$

对于弧段 $\xi\in\widehat{z_{k-1}z_k}\to\xi=mz_k+nz_{k-1}$，当 $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}\to 0$ 时，$m+n\to 1$，此时:

$$\lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(z_k-z_{k-1})=\lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{k=1}^{n}(mz_k+nz_{k-1})(z_k-z_{k-1})$$
$$=mS_{right}+nS_{left}\xrightarrow{S_{right}=S_{left}=\frac{b^2-a^2}{2},m+n\to 1}1\cdot\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}$$

所以对于所有的点在弧段上其和式的极限都为 $\dfrac{b^2-a^2}{2}$ 所以复积分存在为 $\dfrac{b^2-a^2}{2}$

Task2:

解 计算复积分 $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}|z|dz$

(1): 对于连接-1 到 1 的直线段。$I=\displaystyle\int_{-1}^{0}(-z)dz+\int_{0}^{1}zdz\to\int_{1}^{0}zd(-z)+\int_{0}^{1}zdz=2\int_{0}^{1}zdz=2\frac{1^2-0^2}{2}=1.$

(2): 对于连接-1 到 1 的上半单位圆周。$I = \int_{-1}^{i} |z|dz + \int_{i}^{1} |z|dz = \int_{-1}^{i} 1dz + \int_{i}^{1} 1dz = (i-(-1)) + (1-i) = 2$
因为 $|z|$ 不是解析的所以两个积分不同。

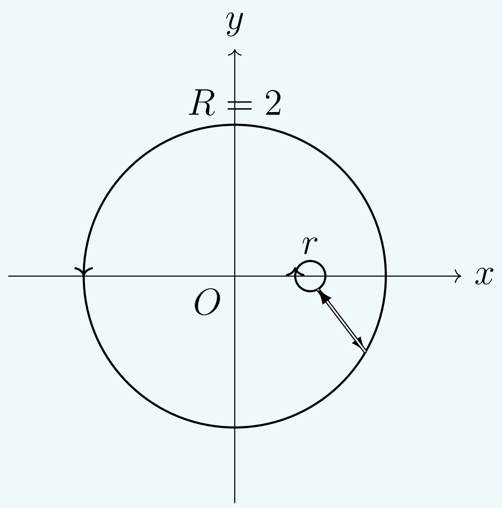
Task3:

解 计算复积分 $I = \int_C \frac{2z^2-z+1}{z-1}dz$，$C$ 取逆时针方向的圆周 $|z|=2$。可以知道函数 $\frac{2z^2-z+1}{z-1}$ 在 $z=1$ 处为奇点。取以 $z=1$ 为圆心的 r 为半径的圆周 Ω，取其逆时针为正方向。则原积分变为：

$$\int_{C\cup\Omega^-\cup\Omega^+} \frac{2z^2-z+1}{z-1}dz = \int_{C\cup\Omega^-} \frac{2z^2-z+1}{z-1}dz + \int_{\Omega^+} \frac{2z^2-z+1}{z-1}dz$$

对于区域 $C\cup\Omega^-$ 由于可以在两个圆之间做一个通道，可以构造两个单连通区域，可以知道:

$$\int_{C\cup\Omega^-} \frac{2z^2-z+1}{z-1}dz = 0$$



所以积分只要求:

$$\int_{\Omega^+} \frac{2z^2-z+1}{z-1}dz$$

因为 $|z-1|=r$ 令 $z-1=re^{i\theta}\rightarrow z=re^{i\theta}+1$。所以积分变成：

$$\int_0^{2\pi}\left(2re^{i\theta}+\frac{2}{r}e^{-i\theta}+3\right)ire^{i\theta}d\theta$$
$$=\left(r^2e^{2i\theta}+2i\theta+3re^{i\theta}\right)|_0^{2\pi}=4\pi i$$

所以原来的积分为 $4\pi i$.

Task4:

证明 柯西积分定理的核心内容是如果函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 上解析，则沿着 D 内的一条可求长的封闭曲线 C 的积分 $\int_C f(z)dz=0$. 因为 f 在 C 上每一点都解析，故存在一个开集 $\Omega:\overline{D}\subset\Omega$ 使得 f 在 Ω 上解析，从而 C 为 Ω 上的一个闭曲线，所以由柯西积分定理有：

$$\int_C f(z)dz=0$$

□

Task5:

证明 不一定成立，考虑反例，在复平面上的单位圆周 C，函数 $f(z)=z$ 在复平面上解析，满足柯西积分公式 $\int_C f(z)dz=0$，但是其虚部 $Im(z)=Im(e^{i\theta})=\sin\theta$. 有：

$$\int_C Im(f)dz=\int_C\sin\theta\cdot ie^{i\theta}d\theta=i\int_C\sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)d\theta$$
$$=\frac{i}{2}\int_C(\sin 2\theta-\cos 2\theta+i)\,d\theta=\frac{i}{2}\int_C\left(e^{i(2\theta)}+i\right)d\theta$$
$$=\frac{i}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}}{2i}+i\theta\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{i}{2}\left(\frac{e^{4i\pi}}{2i}+2i\pi-\frac{e^0}{2i}\right)=-\pi\neq 0$$

□

Task6:

证明 考虑复合映射，先通过映射 $\xi = g(z)$ 把带型区域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < Im(z) < \pi\}$ 映射成上半平面，再通过映射 $w = h(\xi)$ 把上半平面映射到单位圆盘 $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$
$g(z)$ 可以取 $g(z) = e^z$ 有 $\forall z \in \Omega : z = x + i\theta, x \in \mathbb{R}, \theta \in (0, \pi)$ 则 $f(z) = e^z = e^{x+i\theta} = e^x \cdot e^{i\theta} = e^x \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$，由 θ 的取值范围可以知道 $f(z) \in \{z|Im(z) > 0\}$，另外，对于 $\forall Z \in \{z|Im(z) > 0\}, \exists \log|Z| \in \mathbb{R}, \theta = arg(Z) \in (0, \pi) \to e^{\log|Z|} \cdot e^{iarg(Z)} = |Z| \cdot e^{i\theta} = Z$，因为 $\log|Z| + iarg(Z) \in \Omega$，所以 f 是双射。$f(z) = e^z$ 把 D 映射为上半平面。已知把上半平面映射为单位圆盘的线性分式变换为 $h(\xi) = e^{i\theta}\dfrac{\xi - a}{\xi - \bar{a}}$，所以所要求的 $f(z) = e^{i\theta}\dfrac{e^z - a}{e^z - \bar{a}}$
□