复变函数论期中考试复习题

20234544 毛华豪

$Task1$：是否存在解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，其中 u 和 v 都是实值函数，且满足

$$u+v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)-2(x+y), \quad z=x+iy$$

若存在，求出 $f(z)$; 否则，请说明理由.

证明 因为 $f(z)$ 要求是一个解析函数，所以一定满足柯西黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

所以对等式两边同时求偏导得到:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+6xy-3y^2-2=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-6xy-3y^2-2=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}$$

所以有 $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2-2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-6xy$。又因为

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

所以对两边求导，可以得出 $u(x,y)$ 从而解出 $v(x,y)$

$$u(x,y)=x^3-3xy^2-2x \quad v(x,y)=-y^3+3x^2y-2y$$

从而 $f(z)=u+iv=x^3-3xy^2-2x-iy^3+3ix^2y-2iy=z^3-2z$(可以直接代入 $x=iy-z$ 或 $y=-i(x+z)$ 得到)，所以最终答案为 $\boxed{f(z)=z^3-2z}$ □

$Task2$：确定满足不等式

$$1<\left|\frac{z-i}{z+i}\right|<2$$

的 z 所构成的平面点集，并作出其图形.

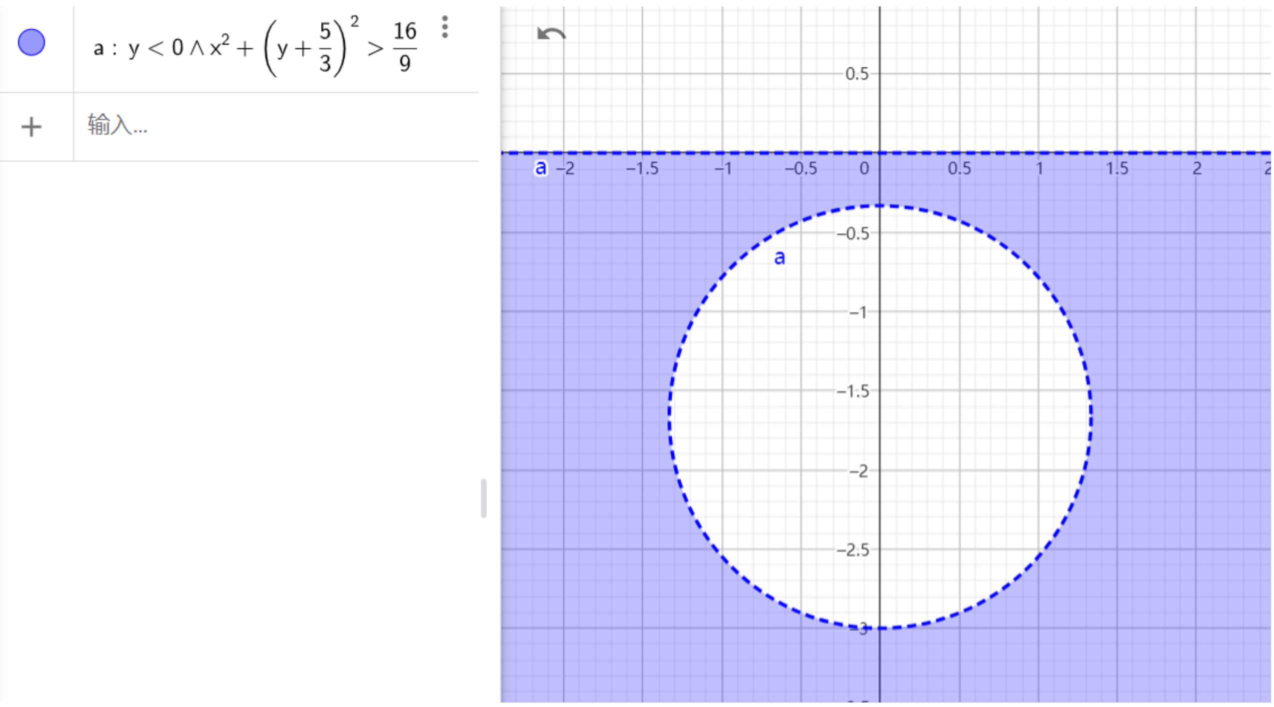

图 1: 平面点集图形

解 图形如上，具体分析如下：不妨设 $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=r, 1<r<2$，则这个不等式表示的是一个以 $(0,\frac{1-r}{1+r}),(0,-\frac{1+r}{r-1})$ 为直径，以 $(0,-\frac{r^2+1}{r^2-1})$ 为圆

心，$\dfrac{2r}{r^2-1}$ 为半径的一列圆的集合。由于 $r \to 1^+$ 时过 y 轴的直径的上顶点 $(0,\dfrac{1-r}{1+r}) \to (0,0)$ 并且半径 $\dfrac{2r}{r^2-1} \to \infty$. 分析 y 轴上的两个直径顶点以及半径的变化趋势可以得到 $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = r_1$ 所表示的圆一定包含在 $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = r_2$ 内如果 $r_1 < r_2$，那么，满足不等式的点集即为 x 轴下半平面挖去 $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 2$ 及内部的点得到的空间，解得 $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 2$ 表示的边界圆为 $\left|z+\dfrac{5i}{3}\right| = \dfrac{4}{3}$. 所以平面点集为 $\boxed{\{z \in \mathbb{C} : Im(z) < 0 \cap \left|z+\dfrac{5i}{3}\right| > \dfrac{4}{3}\}}$

$Task3$: 证明：关于实轴的对称变换 $f(z) = \bar{z}$ 一定不是分式线性变换。

证明 分式线性变换具有保交比不变性，而 $f(z) = \bar{z}$ 不具有这个性质，所以一定不是分式线性变换。具体地考虑 $z_1 = 1+i, z_2 = 2, z_3 = 0, z_4 = 1$ 则

$$
\begin{aligned}
&(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)} = \frac{1+i}{2i} \\
&(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = \\
&\frac{(f(z_1)-f(z_3))(f(z_2)-f(z_4))}{(f(z_1)-f(z_4))(f(z_2)-f(z_3))} = \frac{1-i}{-2i}
\end{aligned}
$$

两者不相同，所以不具有保交比不变性，不是分式线性变换。 □

$Task4$: 计算复积分

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z(z-1)^2}$$

其中积分曲线 $|z| = 2$ 取逆时针方向.

证明 函数 $\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 的奇点 $z = 0, 1$ 都在圆周 $|z| < 2$ 中，所以考虑奇点外包围奇点足够小的圆周 C_1, C_2，方向取逆时针方向。则在 C_1, C_2 之外，

$|z| < 2$ 之内函数是解析的，所以利用柯西积分定理得到积分的计算公式为

$$\int_{|z|=2} = \int_{C_1} + \int_{C_2} \tag{1}$$

再利用柯西积分公式计算 $\int_{C_1}, \int_{C_2}$。回顾柯西积分公式，对于单连通区域或者多连通区域的边界 C 及其内部 D，如果 f 在 D 上解析，且在 $D \cup C$ 上连续，则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D,$$

并且 f 在 D 内有各阶导数，还满足

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{(n+1)}} d\xi, \quad z \in D, n \in \mathbb{N}$$

所以原积分为

$$2\pi i \cdot \left(\frac{1}{(z-1)^2}\right) |_{z=0} + 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{z}\right)' |_{z=1} = 0$$

所以积分为$\boxed{0}$. $\square$

$Task5$: 计算复积分

$$\int_C \frac{z^4}{(z^2+1)(z^2+2)^3} dz$$

其中 C 是取逆时针方向的圆周 $|z| = 4$.

解　函数 $\dfrac{z^4}{(z^2+1)(z^2+2)^3}$ 的奇点 $\pm i, \pm\sqrt{2}i$ 都在圆周 $|z| = 4$ 内部，所以考虑在这些奇点外部做一个小圆周分别记为 C_1, C_2, C_3, C_4 都以逆时针为正，则在 C 内 C_1, C_2, C_3, C_4 外的区域函数解析，可以利用柯西积分定理得到原

积分的计算公式为

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$$

再类似 $Task4$ 利用柯西积分公式可以得到原积分：假设 $f_1(z) = \dfrac{z^4}{(z-i)(z^2+2)^3}, f_2(z) = \dfrac{z^4}{(z+i)(z^2+2)^3}, f_3(z) = \dfrac{z^4}{(z^2+1)(z-\sqrt{2}i)^3}, f_4(z) = \dfrac{z^4}{(z^2+1)(z+\sqrt{2}i)^3}$ 则原积分变为

$$2\pi i[f_1(-i) + f_2(i) + f_3''(-\sqrt{2}i) + f_4''(\sqrt{2}i)]$$

前面两个值算出来分别是 $\dfrac{1}{2i}$ 和 $-\dfrac{1}{2i}$ 相互抵消，主要的困难在于求解 f_3, f_4 的二阶导数，我们采用对数微分法，即对函数两侧取自然对数

$$\begin{aligned}\ln f_3 &= \ln z^4 - \ln(z^2+1) - \ln(z-\sqrt{2}i)^3 \\ &= 4\ln z - \ln(z^2+1) - 3\ln(z-\sqrt{2}i)\end{aligned}$$

对等式两侧进行求导得到

$$\begin{aligned}\frac{f_3'}{f_3} &= \frac{4}{z} - \frac{2z}{z^2+1} - \frac{3}{z-\sqrt{2}i} \\ f_3'(z) &= f_3(z)\left(\frac{4}{z} - \frac{2z}{z^2+1} - \frac{3}{z-\sqrt{2}i}\right)\end{aligned}$$

再对等式两侧求导得到

$$\begin{aligned}f_3''(z) &= f_3'(z)\left(\frac{4}{z} - \frac{2z}{z^2+1} - \frac{3}{z-\sqrt{2}i}\right) \\ &+ f_3(z)\left(-\frac{4}{z^2} - \frac{2(1-z^2)}{(z^2+1)^2} + \frac{3}{(z-\sqrt{2}i)^2}\right)\end{aligned}$$

代入 $-\sqrt{2}i$ 后得到的值为 $-\dfrac{11i}{8\sqrt{2}}$ 同理 $f_4''(\sqrt{2}i) = \dfrac{11i}{8\sqrt{2}}$ 所以最终的积分值为 $\boxed{0}$

$Task6$: 假设函数 $f(z)$ 在开圆盘 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 上解析，$f(0)=0$. 求证：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(z^n)$ 在 $\mathbb{D}$ 上收敛，且其和函数在 $\mathbb{D}$ 上解析.

证明 不妨令 $f_n(z)=f(z^n), n=1,2\ldots$，则由于 $|z|<\Rightarrow |z^n|=|z|^n<1$ 所以 $f_n(z)=f(z^n)$ 在 $\mathbb{D}$ 上解析，并且可以知道在开圆盘的任意一个闭子区间上解析，故函数在 $\mathbb{D}$ 上一致连续。由 $f(0)=0$ 和 $f_n(z)=f(z^n)$ 在原点的连续性可知

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta=\delta(\epsilon)>0,\forall|z^n-0|<\delta:|f(z^n)-0|=|f_n(z)|<\frac{\epsilon}{2^n}$$

函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(z^n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的收敛性，对于上面的 $\epsilon,\delta(\epsilon)$ 以及 $\forall z\in D$ 考虑 $N=\frac{\log\delta}{\log z}$，有：对于所有 $m>n>N\Rightarrow|z^n|=|z|^n<|z|^{\frac{\log\delta}{\log|z|}}=\delta,|z^m|=|z|^m<|z|^{\frac{\log\delta}{\log|z|}}=\delta$，故有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(z)\right|<\sum_{k=n+1}^{m}|f_k(z)|\le\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\epsilon}{2^k}<\epsilon$$

所以根据柯西收敛原理可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathbb{D}$ 上收敛，并且是内闭一致收敛的，因为若取 $\mathbb{D}$ 内的一个闭子集，则一定存在 $|z_0|<1$ 使得 $|z|<|z_0|$，所以对于上述的 N 取 $\frac{\log\delta}{\log|z_0|}=N(\delta(\epsilon))=N(\epsilon)$ 可以控制所有闭子区域的点且只与 ϵ 有关。故由和函数的定义可以得出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(z^n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上内闭一致收敛于它的和函数，因为已知 $f_n(z)$ 在区域 $\mathbb{D}$ 上是解析的，由 $Weierstrass$ 定理知道其和函数在 $\mathbb{D}$ 上解析。 $\square$

$Task7$: 求将区域 $\{z\in\mathbb{C}:-\frac{\pi}{3}<arg(z)<\frac{\pi}{3}\}$ 单叶解析地映射为圆盘 $\Omega=\{w\in\mathbb{C}:|w-1|<1\}$ 的函数 $w=f(z)$.

证明 我们需要先将区域 D 映射为右半平面，再将右半平面映射为上半平面，再将上半平面映射为单位圆周，最后做一个平移映射为最后的圆周。考虑将 D 映射为右半平面的映射 $u = h(z) = z^{\frac{3}{2}} = \sqrt{z^3}$ 并取根式函数的主值分支。对于所有的 $z \in D$ 有 $z = |z|e^{i\theta} \Rightarrow z^{\frac{3}{2}} = |z|^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3\theta}{2}i}$ 模长 $|z|^{\frac{3}{2}} > 0$ 角度 $\frac{3\theta}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 所以映射到右半平面，而对于右半平面上的任意一点 $z' = |z'|e^{i\alpha}, \alpha \in (-\frac{\pi}{2} < arg(z) < \frac{\pi}{2})$ 有 $|z'|^{\frac{2}{3}}e^{\frac{2\alpha}{3}i} \in D$ 满足 $h(|z'|^{\frac{2}{3}}e^{\frac{2\alpha}{3}i}) = |z'|e^{i\alpha} = z'$，所以这个映射是一个双射，即将扇形区域 D 映射为右半平面。考虑右半平面 $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$ 变为上半平面的映射，实际为一个逆时针 90° 的旋转，即映射为 $v = g(u) = iu$。再考虑上半平面映射到单位圆周的分式线性变换 $\xi = p(v)$，其一般形式为 $p(v) = e^{i\theta}\frac{v-a}{v-\bar{a}}$。最后再考虑平移变换将 $|\xi| < 1$ 映射为 $|w-1| < 1$ 的映射 $q(\xi)$，直接令 $\xi = w - 1 \Rightarrow w = q(\xi) = \xi + 1$。所以最终的变换 $w = f(z) = q(\xi) = q(p(v)) = q(p(g(u))) = q(p(g(h(z)))) = qpgh(z) = e^{i\theta}\frac{iz^{\frac{3}{2}}-a}{iz^{\frac{3}{2}}-\bar{a}} + 1$，其中我们取 $u = h(z)$ 的主值分支，而 g, p, q 都是分式线性变换，复合以后仍然是单值解析的。所以最后的答案为 $\boxed{f(z) = e^{i\theta}\frac{iz^{\frac{3}{2}}-a}{iz^{\frac{3}{2}}-\bar{a}} + 1}$ □

$Task8 :$ 设函数 f 在闭圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$ 上解析，且

$$|f(z)| > 2025, \quad |z| = R$$

$f(0) < 2025.$ 证明：存在 z_0 使得 $|z_0| < R$ 满足 $f(z_0) = 0$

证明 假设不存在内点使得函数值为 0，那么考虑函数 $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ 在闭圆盘上也是解析的。根据解析函数的最大模原理可以得出 $\left|\frac{1}{f(z)}\right| = |g(z)|$ 在 $|z| = R$ 上取到最大值，故 $|g(z)| = \left|\frac{1}{f(z)}\right| > \left|\frac{1}{f(0)}\right| > \frac{1}{2025}, \quad |z| = R$，又因为 $|z| = R$ 上 $|f(z)| > 2025$ 所以 $|g(z)| = \left|\frac{1}{f(z)}\right| < \frac{1}{2025}$ 矛盾，所以 $\frac{1}{f}$ 不解析于闭圆盘，则一定存在一个点 $z_0 \in \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$ 使得 $f(z_0) = 0$

且这个点 $|z_0| \neq R$ 否则与条件矛盾。所以 $\boxed{\exists z_0 : |z_0| < R s.t. f(z_0) = 0}$ $\square$

$Task9$:(1) 叙述解析函数的最大模原理，并给出证明；
(2): 设函数 $B(z)$ 满足下列三个条件:
(i) 在单位圆盘 $|z| < 1$ 内解析，在闭圆盘 $|z| \leq 1$ 上连续;
(ii) 在单位圆周 $|z| = 1$ 上，$|B(z)| = 1$;
(iii) 在 $|z| < 1$ 内部 $B(z)$ 只有有限个零点.
试利用 (1) 中的定理证明：$B(z)$ 是一个有限 $Blaschke$ 乘积:

$$B(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^{N} \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z},$$

其中 $\theta \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}, |z_k| < 1 \quad (1 \leq k \leq N).$

证明 (1): 定理叙述：设 f 在 D 上解析，则 $|f(z)|$ 在 D 内任何一点都不能取到最大值，除非它是常数函数.
$Proof$: 设 $M = \sup\limits_{z \in D} |f(z)|$，由于 f 不恒为 0，所以 $M > 0$。用反证法，设 $\exists z_0 \in D s.t. |f(x_0)| = M$，由此 $0 < M < +\infty$. 则取 z_0 为心，充分小的 R 为半径作圆周 $|z - z_0| = R$，取逆时针方向，使得:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\} \subset D$$

由平均值定理

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta$$

从而有

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(z_0 + Re^{i\theta})|}_{\leq M} d\theta \leq M$$

由此可知 $|f(z_0+Re^{i\theta})| = M, \forall \theta$，若不然，$\exists \theta_0 \in [0, 2\pi) s.t. |f(z_0+Re^{i\theta})| < M$ 由连续函数的局部保号性可以知道 $\exists (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta) \subset [0, 2\pi) s.t. |f(z_0 +$

$Re^{i\theta})| < M, \quad \theta \in (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$，所以有:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{i\theta})| d\theta = M \\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} + \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi)\setminus(\theta_0-\delta,\theta_0+\delta)} \\
\leq& M \times \frac{2\delta}{2\pi} + \frac{M\times(2\pi - 2\delta)}{2\pi} = M
\end{aligned}$$

$M < M$ 矛盾. 于是，以 z_0 为圆心，充分小的 $R > 0$ 为半径的圆周上 $f(z) \equiv M, \quad |z - z_0| = R$，由 R 的任意性可以知道，存在 z_0 的某个小邻域 $O(z_0, \delta) \subset D s.t. |f(z)| \equiv M, \quad z \in O(z_0, \delta)$，所以 $f(z) \equiv M$ 或者 $f(z) \equiv -M$，由解析函数零点孤立性的推论 f, g 在区域 D 上解析，且它们的 D 的某个子区域内的一段弧上相等，则 $f(z) \equiv g(z), z \in D$ 可以得出 $f(z) \equiv M, \quad z \in D$(或者取负值，总之是一个常数)

(2): 不妨设有限个零点为 $z_1, z_2, \ldots, z_M$，根据函数 $B(z)$ 在单位圆盘内解析，在闭圆盘上连续，且 $|z| = 1$ 上 $|B(z)| = 1$，考虑单位圆盘内部的闭圆盘 $C_r : |z| \leq r$ 由最大模原理在这个闭圆盘上 $|B(z)| \leq \max\{B(z) : z \in C_r\} = \max\{B(z) : |z| = r\}$ 令 $r \to 1^-$ 由于函数 $B(z)$ 的连续性可知 $|B(z)| \leq 1$ 且在内部 $|B(z)| < 1$(类似第 11 次作业第 4 题做法可证) 对于确定的 z_k 在闭圆盘内有 $B(z_k) = 0$，对于没有具体方向的函数，我们采用局部处理的方法，考虑 $B(z)$ 的零点的函数因子 $b_k(z) = \dfrac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z}, \quad k = 1, 2 \ldots, N$，对于每个函数因子 $1 - \bar{z}_k z \neq 0$ 所以在 $|z| < 1$ 上也是解析的，并且 $|z| = 1$ 时，$|b_k| = \dfrac{|z - z_k|}{|1 - \bar{z}_k z|} = \dfrac{|z - z_k|}{|1 - \bar{z}_k z| \cdot |\bar{z}|} = \dfrac{|z - z_k|}{|\bar{z} - \bar{z}_k|} = 1$，$B(z), b_k, k = 1, 2 \ldots, M$ 在 $|z| < 1$ 上都是解析的并且在闭圆盘也是连续。因为 $B(z)$ 在开圆盘上可以展开成级数形式，函数的零点一定可以提出因子 $(z - z_k)$ 即 $B(z) = (z - z_k)^{m_k} g(z), g(z_k \neq 0)$，$m_1 + m_2 + \cdots + m_M = N$，则我们考虑函数

$$F(z) = \frac{B(z)}{\prod_{k=1}^{N} b_k(z)}$$

其中 $b_k(z)$ 对应的指数 m_k 为多少就除以多少个 $b_k(z)$ 使得 $F(z)$ 在开圆盘上没有零点。(需要注意的时 m_k 一定是有限的，若 $m_k = \infty$ 在 z_k 周围的小邻域内展开的泰勒级数恒为零，由解析函数的性质可以知道 $B(z)$ 在整个区域上

为 0，而这与我们的条件矛盾，因为函数在闭圆盘上连续且在 $|z| = 1$ 上为 1，所以在靠近 $|z| = 1$ 的圆盘内一定接近 1，这就产生了矛盾，所以 m_k 有限，N 有限). 我们得到了函数 $F(z)$ 在开圆盘上解析，在闭圆盘上连续。由最大模原理可以证明 $|F(z)| \leq |F(1)| = \frac{1}{1} = 1$。再考虑 $\frac{1}{F(z)}$ 同样满足在开圆盘上解析，在闭圆盘上连续有 $\left|\frac{1}{F(z)}\right| \leq \left|\frac{1}{F(1)}\right| = 1 \Rightarrow F(z) \geq 1$，所以 $F(z) = 1$(这说明圆周上恒为 1 的条件限制住了 $F(z)$ 的取值)，所以 $F(z) = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$，故有 $\boxed{B(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^{N} \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z}}$ 其中 $\theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, |z_k| < q \quad (1 \leq k \leq N)$ □