复变函数论第六次作业

20234544 毛华豪

Task1:

解 分式线性变换 $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$，要求把 $0, 1, \infty \to -1, -i, 1$。对于 $z = 0 z = 1$ 带入求解得到 $a = -id, b = -d$，对于无穷来说，取极限得到 $a = c$，令 $d = 1$ 则分式线性变换为 $f(z) = \dfrac{iz+1}{iz-1}$(d 的值也可以改变成其他值)。

Task2:

解 圆周半径为 2 圆心位置为 $(0, 1)$ 为 O，根据对称的定义对称点 z' 必须在 Oz 连线上，$z' = i + k(2 - i - i)$，对称要满足 $|z - i||z' - i| = 4 \Rightarrow |2 - 2i| \cdot |i + k(2 - 2i) - i| = 4 \Rightarrow k = \dfrac{1}{2}$，所以对称点为 $z' = 1$。

Task3:

解 把单位圆盘映射为单位圆盘的分式线性变换的一般形式。
首先 $w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 把边界映射到边界。这是因为如果没有把边界映射为边界，则映射在 w 平面边界内的一个圆周 Γ，一定可以做一个圆周 γ' 和 Γ 有两个交点，而由于分式线性变换为双射，所以取逆映射回到 z 平面时，$\gamma' \xrightarrow{f^{-1}} \gamma$ 也是一个圆周与 z 平面圆周边界一定存在且仅存在两个交点，而这是不可能的，所以 f 一定把边界映射到边界。再考虑 z 平面上的一个点

$a \neq 0 \xrightarrow{f} 0$，则由保对称性，其对称点 $\frac{1}{\bar{a}} \xrightarrow{f} \infty$(对称点的推导：由于对称的充要条件 $z_1 - a = \frac{R^2}{\bar{z}_2 - \bar{a}}$ 代入 $z_1 = a, a = 0$)，所以可以写出分式线性变换 $w = f(z) = c\frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}}, c \in \mathbb{C}$，可以变形为 $f(z) = c\bar{a}\frac{z-a}{\bar{a}z-1} = c_1\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, c_1 \in \mathbb{C}$。代入 $|z| = 1 \Rightarrow |w| = 1$ 得到：

$$|w| = |c_1| \cdot \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \overset{|z|=1}{=} |c_1| \cdot 1 = |c_1| = 1$$

所以 $c_1 = e^{i\theta}$，分式线性变换为 $f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$，对于 $a = 0$ 来说即一个旋转，满足条件。

Task4:

解 把单位圆周映射成一条直线，所以一定存在圆周上的一点要映射成 ∞，即 $\exists z : cz + d = 0 \to |\frac{d}{c}| = 1$，反之，如果存在圆周上的一点 $|z| = 1$ 包含 $z = -\frac{d}{c}$，那么变换会将圆周映射为直线，所以分式线性变换将圆周映射成直线的充分必要条件是系数满足 $|\frac{d}{c}| = 1$

Task5:

解 根据提示可以先用映射 f 将右半平面逆时针旋转 90° 变为上半平面，再用映射 g 把上半平面变为 w 平面上的单位圆盘。再变为单位圆盘。由于：

$$f(z) = e^{i\frac{\pi}{2}}z$$

$$g(\xi) = e^{i\theta}\frac{\xi - a}{\xi - \bar{a}}$$

所以复合变换 $g \cdot f(z) = e^{i\theta}\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}z - a}{e^{i\frac{\pi}{2}}z - \bar{a}} = e^{i\theta}\frac{z - \bar{a}'}{z + a'}, a' = i\bar{a} \in \mathbb{C}$

Task6:

证明 (1):$\forall z \in D: z = x + i\theta, x \in \mathbb{R}, \theta \in (0,\pi)$ 则 $f(z) = e^z = e^{x+i\theta} = e^x \cdot e^{i\theta} = e^x \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$，由 θ 的取值范围可以知道 $f(z) \in \{z|Im(z) > 0\}$，另外，对于 $\forall Z \in \{z|Im(z) > 0\}, \exists \log|Z| \in \mathbb{R}, \theta = arg(Z) \in (0,\pi) \rightarrow e^{\log|Z|} \cdot e^{iarg(Z)} = |Z| \cdot e^{i\theta} = Z$，所以 $f(z) = e^z$ 把 D 映射为上半平面。
(2): 类似第五题做复合映射，已知把上半平面映射为单位圆盘的线性分式变换为 $g(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{z-\bar{a}}$，所以所要求的 $f(z) = e^{i\theta}\dfrac{e^z-a}{e^z-\bar{a}}$ □

Task7:

解 类似做复合映射，可以先用映射 g 把圆盘 $|z| < 2$ 映射为 $|u| < 1$，再用映射将圆盘 h 将圆盘 $|u| < 1$ 映射到 $|w-1| < 1$。而 $u = f(z) = e^{i\theta}\dfrac{\frac{z}{2}-a}{1-\frac{\bar{a}z}{2}} = e^{i\theta}\dfrac{z-2a}{2-\bar{a}z}$, h 为 $w = h(u) = u+1$。所以 $w = h(g(z)) = f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-2a}{2-\bar{a}z}+1$, 将 $f(2) = 0, f(0) = \dfrac{1}{2}$ 代入可以得到 $a = 1$(舍去) 以及 $a = -\dfrac{1}{2} \rightarrow e^{i\theta} = -1 \rightarrow f(z) = \dfrac{2-z}{z+4}$。所以要求的线性分式变换为 $f(z) = \dfrac{2-z}{z+4}$。

Task8:

证明 区域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -\dfrac{\pi}{6} < arg(z) < \dfrac{\pi}{6}\}$，$D = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < 2\}$
(1):$\forall z \in \Omega : z = |z| \cdot e^{i\theta}, \theta \in (-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}), |z| \in \mathbb{R}$ 所以 $w = z^3 = |z|^3 \cdot e^{i\cdot(3\theta)}$ 且 $|z|^3 \in \mathbb{R}, 3\theta \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ 此即说明 $w \in \{w|Re(w) > 0\} \rightarrow im(\Omega) \subset \{w|Re(w) > 0\}$。又因为 $\forall w_0 \in \{w|Re(w) > 0\} : w_0 = |w_0| \cdot e^{iarg(w_0)}$ 取 $arg(w_0) \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$，则若令 $z_0 = \sqrt[3]{|w_0|} \cdot e^{\frac{iarg(w_0)}{3}}$(取 $k = 0$ 那一支)，有 $z_0^3 = w$, 因为 $\sqrt[3]{|w_0|} \in \mathbb{R}, \dfrac{arg(w_0)}{3} \in (-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6})$ 所以 $z_0 \in \Omega$ 所以 $\{w|Re(w) > 0\} \subset im(\Omega)$ 所以 $w = z^3$ 把 Ω 映射成右半平面。
(2): 做复合映射，可以先用 (1) 的映射将 Ω 映射为右半平面，再通过映射旋转映射把右半平面映射为上半平面，上半平面到单位圆的映射已知，最后再将单位圆映射到半径为 2 的圆上。将 (1) 中映射写作 $u = g(z) = z^3$，右半平面到上半平面的映射为 $w = h(u) = e^{i\frac{\pi}{2}}u = iu$，将上半平面映射为单

位圆的映射 $\eta = l(w) = e^{i\theta}\frac{w-a}{w-\bar{a}}$，最后单位圆周映射为半径为 2 的圆周的映射 $\xi = m(\eta) = 2\eta$。所以最终的映射为 $f(z) = mlhg(z) = 2e^{i\theta}\frac{iz^3-a}{iz^3-\bar{a}}$。□

Task9:

证明 去除实轴以后的集合 $\Omega = \mathbb{C}\backslash[0,+\infty)$

(1): 证明映射 $w = \sqrt{z}$ 把集合映射为上半平面。去掉一个轴后我们可以知道根式函数的没一个单值分支连续。$w = f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{|z|}\cdot e^{i\frac{arg(z)+2k\pi}{2}}, k = 0, 1$ 我们取它 $k = 0$ 的哪个分支，辐角范围 $arg(z) \in (0, 2\pi)$ 在区域上连续函数。则因为 $\sqrt{|z|} \in \mathbb{R}, \frac{arg(z)}{2} \in (0, \pi)$ 所以 $w \in \{w|Im(w) > 0\}$ 此即 $f(\Omega) \subset \{w|Im(w) > 0\}$，而对于上半平面的任一点 $w_0 \in \{w|Im(w) > 0\}, w_0 = |w_0| \cdot e^{iarg(w_0)}$ 取 $arg(w_0) \in (0, \pi)$ 则若令 $z_0 = |w_0|^2 \cdot e^{i(2arg(w_0))}$ 则有 $|w_0|^2 \in \mathbb{R}, 2arg(w_0) \in (0, 2\pi) \to z_0 \in \Omega$ 并且 $w_0 = \sqrt{z_0}$ 即 $\{w|Im(w) > 0\} \subset f(\Omega)$ 所有可以知道 $w = \sqrt{z}$ 把 Ω 映射为上半平面。

(2): 做复合映射，可以先把区域 Ω 映射为上半平面，再通过上半平面到单位圆盘的映射映射到单位圆盘，最后通过平移和伸缩变换映射到圆盘 $|\xi - 1| < \frac{1}{2}$。将 (1) 中的映射写作 $w = g(z) = \sqrt{z}$，上半平面到单位圆盘的映射为 $\eta = h(w) = e^{i\theta}\frac{w-a}{w-\bar{a}}$，最后将单位圆盘映射到目标圆盘的映射为 $\xi = l(\eta) = \frac{\eta+2}{2}$。所以最终的映射为 $f(z) = lhg(z) = \frac{e^{i\theta}}{2}\frac{\sqrt{z}-a}{\sqrt{z}-\bar{a}} + 1$。□

Task10:

解 把上半平面映射为单位圆盘的分式线性变换 $w = f(z)$ 形如 $f(z) =$

$e^{i\theta}\dfrac{z-a}{z-\bar{a}}$ 代入两个值有 $e^{i\theta}=1, a=i$：

$$
\begin{aligned}
&e^{i\theta}\frac{i-a}{i-\bar{a}}=0\\
&arg(e^{i\theta}\frac{(a-\bar{a})}{(i-\bar{a})^2})=-\frac{\pi}{2}\\
&\to\begin{cases} i-a=0\\ \theta-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}\end{cases} \quad \to\begin{cases} a=i\\ \theta=0\end{cases}
\end{aligned}
$$

所以分式线性变换为 $f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$

Task11:

解 取第五题的逆映射 $f(w)=\dfrac{e^{i\theta}\bar{a}+aw}{e^{i\theta}-w}$ 和映射 $w=g(z)=\dfrac{z}{2}$ 复合，$fg(z)=\dfrac{e^{i\theta}\bar{a}+a\frac{z}{2}}{e^{i\theta}-\frac{z}{2}}=\dfrac{2e^{i\theta}\bar{a}+az}{2e^{i\theta}-z}$ 代入两个值有:

$$
\begin{aligned}
&\bar{a}=1\to a=1\\
&arg(e^{i(-\theta)})=\frac{\pi}{2}\to\theta=-\frac{\pi}{2}\to e^{i\theta}=-i
\end{aligned}
$$

所有分式线性变换为 $fg(z)=\dfrac{-2i+z}{-2i-z}=\dfrac{2+iz}{2-iz}$