数学分析教程

作者：Xiaohu
组织：Xiaohu 的数学空间
时间：2023.2

ElegantLATEX Program

不要以为抹消过去，重新来过，即可发生什么改变。——比企谷八幡

目录

第 1 章 预备知识

内容提要

- ❑ 实数、集合和函数
- ❑ 分情形定义的函数
- ❑ 初等函数
- ❑ 平面曲线

1.1 实数、集合和函数

定义 1.1 (有理数)

在数学分析中我们研究的对象是实函数，实数包括有理数和无理数：

有理数：形如 $\frac{p}{q}$ 的实数，其中 p、q 是两个互素的实数，且 q>0。

♣

定义 1.2 (集合)

集合的概念是中学多次提到的，如：实数集 R、有理数集 Q、整数集 Z、自然数集 N、正整数集 N^*。

邻域：设 x 是一个实数，a 为正数，我们称开区间（x-a，x+a）为 x 的 a 邻域，记 $B_a x$。

♣

性质

- 数集 S 无界的充分必要条件是：对任意的实数 M，都存在 $x_0 \in S$，使得 $x_0 > M$
- 数集 S 无下界的充分必要条件是：对任意的实数 m，都存在 $x_0 \in S$，使得 $x_0 < m$
- 数集 S 是无界集的充分必要条件是：对任意的实数 M，都存在 $x_0 \in S$，使得 $x_0 > M$

定义 1.3 (函数)

设 X 是一个非空数集，对 X 中的元素，按照确定的法则 f，都有唯一确定的实数 y 与它对应，则该对应关系叫做集合 X 上的一个函数。

另外：单射、单调函数、奇函数与偶函数、周期函数、有界函数与无界函数、反函数、复合函数

♣

1.2 初等函数

函数类型：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数

1.3 分情形定义的函数

定义 1.4 (符号函数)

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

♣

定义 1.5 (取整函数)

$f(x) = \lfloor x \rfloor = n \quad n \leq x < n+1$

♣

定义 1.6 (特征函数)

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

♣

定义 1.7 (dirichlet 函数)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \text{ is irrational} \\ 1 & \text{if } x \text{ is rational} \end{cases}$$

♣

定义 1.8 (Riemann 函数)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \text{ is irrational} \\ r & \text{if } x \text{ is rational, } r \text{ is a rational number} \end{cases}$$

♣

第 2 章 数列极限

内容提要

- ❑ 数列极限的定义
- ❑ 收敛数列的性质与极限的运算法则
- ❑ 数列敛散的判别定理
- ❑ 函数极限的定义
- ❑ 函数极限的性质与运算法则
- ❑ 函数极限存在的判别定理
- ❑ 无穷大量与无穷小量

2.1 数列极限的定义

定义 2.1 (数列极限的定义)

对于给定的数列 $\{X_n\}$，若存在某个实数 a，当 n 无限增大时，X_n 无限的接近 a，则称数列为收敛数列且以 a 为极限，反之成为发散数列（或极限不存在）。

ϵ-N 定义: 设 a∈ R, 如果对于任意的 $\epsilon > 0$, 都存在正整数 N，当 n>N 时，就有 $|x_n - a| < \epsilon$, 则称数列 $\{X_n\}$ 以 a 为极限，记为：$\lim\limits_{n\to\infty} = a$ ♣

定义 2.2 (极限定义的否定形式)

$\exists\epsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N : |a_n - L| \geq \epsilon$ ♣

注意：正数 ϵ 的存在性，N 的存在性，N 对 ϵ 的依赖性

2.2 收敛数列的性质与极限的运算法则

定理 2.1 (收敛数列的性质)

- 唯一性：如果 $\lim_{n\to\infty} a_n$存在，则其极限是唯一的。
- 有界性：如果数列(a_n)有极限L，则存在一个正数M，对于所有的n，都有$|a_n| \leq M$
- 保号性：如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = L > 0$，则存在一个正整数$N$，对于所有的$n > N$，都有$a_n > 0$ ♡

四则运算法则略

2.3 数列敛散的判别定理

定理 2.2 (两边夹定理)

设$(a_n), (b_n), (c_n)$是数列，如果$a_n \leq b_n \leq c_n$对于所有的正整数n成立并且$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$，那么 $\lim_{n\to\infty} b_n = L$。 ♡

定理 2.3 (单调收敛定理)

如果数列(a_n)是单调递增的，并且(a_n)有上界则(a_n)收敛。 ♡

定理 2.4 (Cauchy 收敛原理)

数列(a_n)是收敛的 $\iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n > N : |a_m - a_n| < \epsilon$

第 3 章 函数极限与连续函数

内容提要

- 函数极限的定义
- 函数极限存在的判别定理
- 函数极限的性质与运算法则
- 无穷大量与无穷小量

3.1 函数极限的定义

定义 3.1 (函数在定点的极限)

$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{if} \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{such that} \quad 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$ ♣

f(x) 在点 x 处极限存在的**充分必要条件**是：f(x) 在点 x 左右极限存在且相等

3.2 函数极限的性质与运算法则

定理 3.1 (收敛数列的性质)

- 唯一性：
- 有界性：
- 保号性：

♡

3.3 函数极限存在的判别定理

3.4 无穷大量与无穷小量

第 4 章 微分

第 5 章 微分中值定理及其应用

5.1 微分中值定理

5.2 L'Hospital 法则

5.3 Taylor 公式

5.4 函数的 Taylor 公式

第 6 章 不定积分

内容提要

- 不定积分
- 换元积分法和分部积分法
- 有理函数的不定积分及其应用

6.1 积分的定义

定义 6.1 (不定积分的定义)

若在某个区间上，函数 F(x) 和 f(x) 成立关系

$$F'(x) = f(x)$$

或等价地：

$$d(F(x)) = f(x)dx$$

则称 F(x) 是 f(x) 在这个区间上的一个原函数且称一个函数 f(x) 的原函数全体称为这个函数的不定积分，记作：

$$\int f(x)dx$$

♣

在此处，$\int$ 称为积分号，f(x) 称为被积函数，x 称为积分变量。

不定积分的线性性质

定理 6.1 (线性性)

若函数 f(x) 和 g(x) 的原函数均存在，则对任意常数 a,b。函数 af(x)+bg(x) 的原函数也存在，且有：

$$\int [af(x)] + bg(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

♡

6.2 换元积分法和分部积分法

定理 6.2 (两类换元积分法)

以下提出两种换元积分法：

第一类换元积分法：

$$\int f(x)dx = \int \overline{f}(g(x))g'(x)dx = \int \overline{f}(g(x))dg(x) = \int \overline{f}(u)du = \overline{F}(u) + C = \overline{F}(g(x)) + C$$

第二类换元积分法：

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))d\phi(t) = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \overline{F}(t) + C = \overline{F}(\phi^{-1}(x)) = C$$

♡

定理 6.3 (分部积分法)

分部积分法的理论基础是函数乘积的微分公式

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

上式就是分部积分公式

6.3 有理函数的不定积分及其应用

有理函数的不定积分

定义 6.2 (有理函数)

形如 $\frac{p_m(x)}{q_n(x)}$ 的函数称为有理函数，这里 $p_m(x), q_n(x)$ 分别是 m 次和 n 次多项式。

定理 6.4

设有理函数 $\frac{p(x)}{q(x)}$ 是真分式，多项式 q(x) 有 k 重实根 a，即 $q(x) = (x-a)^k q_1(x), q_1(a) \neq 0$，则存在实数 λ 与多项式 $p_1(x), p_1(x)$ 的次数低于 $(x-a)^{k-1}q_1(x)$ 的次数，成立：

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lambda}{(x-a)^k} + \frac{p_1(x)}{(x-a)^{k-1}q_1(x)}$$

.

练习 6.1 求 $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x-3}}$

解 令 $\sqrt{4x-3} = t$，则 $x = \frac{1}{4}(t^2+3), dx = \frac{t}{2}dt$ 所以：

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{4x-3}} = \frac{1}{8}\int (t^2+3)dx = \frac{t^3}{24} + \frac{3t}{8} + C = \frac{\sqrt{4x-3}}{12}(2x+3) + C$$

第 7 章 定积分

内容提要

- 定积分的概念和可积条件
- 定积分的基本性质
- 微积分基本定理
- 定积分在几何计算中的应用
- 为积分实际应用举例
- 定积分数值计算

7.1 定积分的概念和可积条件

定义 7.1 (定积分的概念)

定积分的极限形式：

定义 f(x) 是 [a,b] 上的有界函数，在 [a,b] 上任意取分点 x_i, 作成一种划分：

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 <, .., < x_n = b$$

并且取任意点 $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. 且记小区间的长度为 $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, 并且记 $i = max(\Delta x)$, 若当 $i \to 0$ 时，极限：

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

存在，称为 f(x) 在 [a,b] 上 Riemann 可积，其极限值记为 f(x) 在 [a,b] 上的定积分，记为

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

♣

定义 7.2 (可积条件)

1. 有界函数 f(x) 在 [a,b] 可积的充分必要条件是：对于任意划分 P，Darboux 大和和 Darboux 小和的极限相等。
2. 有界性：被积函数 $f(x)$ 必须在积分区间 $[a, b]$ 上有界。
3. 有限性：被积函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上必须是有限的。
4. 有限间断点：被积函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上的间断点个数必须有限。
5. 可测性：被积函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上必须是可测的。
6. 黎曼可积性：$\lim_{\Delta x_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = 0$ 在这里，M_i 和 m_i 分别表示区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的上确界和下确界，Δx_i 表示区间的长度。

♣

7.2 定积分的基本性质

定理 7.1 (定积分的线性性质)

设 f(x) 和 g(x) 都在 [a,b] 上可积，k_1 和 k_2 是常数，则函数 $k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 在 [a,b] 上也可积，且有：

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)]dx = k_1 \int_a^b f(x)dx + k_2 \int_a^b g(x)dx$$

♡

推论 7.1

若 f(x) 在 [a,b] 上可积，而 g(x) 只在有限个点上与 f(x) 的取值不相同，则 g(x) 在 [a,b] 上也可积，并且有：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

也就是说，在有限个点上改变一个可积函数的函数值，并不影响其可积性和积分值。♡

定理 7.2 (可乘可积性)

设 f(x) 和 g(x) 都在 [a,b] 上可积，则 f(x)g(x) 在 [a,b] 上也可积 ♡

定理 7.3 (保序性)

设 f(x) 和 g(x) 都在 [a,b] 上可积，且在 [a,b] 上恒有 f(x)≥ g(x), 则成立：

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$
♡

定理 7.4 (绝对可积性)

设 f(x) 在 [a,b] 上可积，则 $|f(x)|$ 在 [a,b] 上也可积，且成立：

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$
♡

定理 7.5 (区间可加性)

设 f(x) 在 [a,b] 上可积，则对任意点 $c \in [a,b]$,f(x) 在 [a,c] 和 [c,b] 上都可积，反之也成立，则此时有：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
♡

定理 7.6 (积分第一中值定理)

设 f(x) 和 g(x) 都在 [a,b] 上可积，g(x) 在 [a,b] 上不变号，则存在 $\eta \in [m, M]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \eta \int_a^b g(x)\,dx$$

这里 M 和 m 分别表示 f(x) 在 [a,b] 的上确界和下确界。♡

定理 7.7 (Holder 不等式)

设 f(x),g(x) 在 [a,b] 上连续，p，q 为满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的正数，则有：

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$
♡

7.3 微积分基本定理

定理 7.8 (微积分基本定理-Newton-Leibniz 公式)

设 f(x) 在 [a,b] 上连续，F(x) 是 f(x) 在 [a,b] 上的一个原函数，则成立：

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$
♡

定积分的分部积分法和换元积分法

定理 7.9

设 u(x),v(x) 在区间 [a,b] 上有连续导数，则：

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

上式称为定积分的分部积分法

定义 7.3

设 $g_n(x)$ 是定义在 [a,b] 上的一列函数，若对任意的 m，n，$g_m(x)g_n(x)$ 在 [a,b] 上可积，且有：

$$\int_a^b g_m(x)g_n(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \int_a^b g_n^2(x)dx & m = n \end{cases}$$

则称 $\{g_n(x)\}$ 是 [a,b] 上的正交函数列。特别的，当 $g_n(x)$ 是 n 次多项式时，称 $\{g_n(x)\}$ 是 [a,b] 上的正交多项式列。

定理 7.10 (定积分的换元积分法)

设 f(x) 在区间 [a,b] 上连续，$x =$
$varphi(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上有连续导数，其值域包含于 [a,b]，且满足 $\varphi(\alpha) = a$ 和
$varphi(\beta) = b$，则：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

7.4 定积分在几何计算中的应用

定理 7.11 (弧长公式)

若参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ t \in [T_1, T_2] y = y(t) \end{cases} \tag{7.1}$$

确定的曲线是光滑曲线，则它是可求长的，其弧长为：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

第 8 章 反常积分

内容提要

- 反常积分的概念和计算
- 反常积分的收敛判别法

8.1 反常积分的概念和计算

定义 8.1 (反常积分的收敛性)

设函数 f(x) 在 $[a,\infty)$ 有定义，且在任意有限区间 [a,A]⊂ $[a,\infty)$ 上可积，若极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx$$

存在，则反常积分 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 收敛，其积分值为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\,dx$$

否则称反常积分 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 发散

判断反常积分敛散性等价于判断函数极限 $\lim\limits_{A\to\infty} F(A)$ 的收敛性

定义 8.2 (反常积分收敛性的等价定义)

奇点如果函数 f(x) 在点 x_0 的任何一个去心邻域上是无界的，则称 x_0 为 f(x) 的奇点，我们假定 f(x) 在 [a,b] 上只有一个奇点 x=b.

设函数 f(x) 在 x=b 的左邻域无界，若对于任意 $\eta\in(0,b-a)$, $f(x)$ 在区间 $[a,b-\eta]$ 上有界可积，且极限

$$\lim_{\eta\to0^+}\int_a^{b-\eta} f(x)\,dx$$

存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛，其积分值为:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to0^+}\int_a^{b-\eta} f(x)\,dx$$

否则称反常积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 发散

x=a 为奇点和 $x = c\in(a,b)$ 为奇点的情况可以类似定义。当 x=c 为奇点时，注意只有当 $\int_a^c f(x)\,dx$ 和 $\int_c^b f(x)\,dx$ 都收敛时，才认为 $\int_a^b f(x)\,dx$ 是收敛的，且规定:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

定义 8.3 (Cauchy 主值)

若

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^A f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}[F(A)-F(-A)]$$

收敛，则称该极限值为 $\int_\infty^{+\infty} f(x)\,dx$ 的 Cauchy 主值，记为 $(cpv)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

当 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛时，显然有

$$(cpv)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

而当 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散时，他的 Cauchy 主值也有可能存在，因此 Cauchy 主值推广了反常积分的收敛概念

8.2 反常积分的收敛判别法

反常积分的 Cauchy 收敛原理

定理 8.1 (Cauchy 收敛原理)

假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\infty)$ 上连续，且对于任意的 $b>a$ 都有

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx = L$$

如果对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $A>a$，使得对于任意的 $A<p<q$，有

$$\left|\int_p^q f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

那么，反常积分 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 收敛。

定义 8.4 (绝对收敛和条件收敛)

考虑反常积分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

如果 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ 收敛，则称该反常积分**绝对收敛**。如果 $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛，但 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ 发散，则称该反常积分**条件收敛**。

由 Cauchy 收敛原理，可推出绝对收敛的反常积分一定收敛

非负函数反常积分的收敛判别法

定理 8.2 (比较判别法)

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是区间 $[a,\infty)$ 上的非负函数。如果存在常数 $c>0$ 和 $N>a$，使得对于所有 $x>N$ 有 $f(x)\le cg(x)$，那么有以下结论：

1. 若 $\int_a^\infty g(x)\,dx$ 收敛，则 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 收敛；
2. 若 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 发散，则 $\int_a^\infty g(x)\,dx$ 发散。

定理 8.3 (Cauchy 判别法)

设 $f(x)$ 是区间 $[a,\infty)$ 上的非负函数。对于任意的 $M>a$，如果存在 $N>a$，使得对于所有 $p,q>N$

$$\left|\int_p^q f(x)\,dx\right| < M$$

那么 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 收敛。

1. 若 f(x)≤ $\frac{K}{x^p}$, 且 P>1，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛
2. 若 f(x)≥ $\frac{K}{x^p}$, 且 $p\le 1$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散

一般函数反常积分的收敛判别法

定理 8.4 (积分第二中值定理)

设 f(x) 在 [a,b] 上可积，g(x) 在 [a,b] 上单调，则存在 $\xi\in$[a,b], 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

♡

定理 8.5

若下列两个条件之一满足，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛:

1. **(Abel 判别法)**:$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，g(x) 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界
2. **(Dirichlet 判别法)**:$F(A)=\int_a^A f(x)\,dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界，g(x) 在 $[a,\infty)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$

♡

无界函数反常积分的收敛判别法

对于 f(x) 在 [a,b] 上只有一个奇点 x=b 的情况，有以下定理:

定理 8.6 (Cauchy 收敛原理 *)

反常积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛的充分必要条件是：对于给定的 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$, 使得对任意的 $\eta,\eta'\in(0,\delta)$, 有

$$\left|\int_{b-\eta}^{b+\eta'} f(x)\,dx\right| < \epsilon$$

♡

定理 8.7 (Cauchy 判别法 *)

设在 [a,b) 上恒有 $f(x)\geq 0$，若当 x 属于 b 的某个左邻域 $[b-\eta_0,b)$ 时，存在正整数 K, 使得:

1. 若 f(x)$\leq \frac{K}{(b-x)^p}$, 且 P<1，则 $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛
2. 若 f(x)$\geq \frac{K}{(b-x)^p}$, 且 $p\geq 1$，则 $\int_a^b f(x)\,dx$ 发散

♡

定理 8.8

若下列两个条件之一满足，则 $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ 收敛:

1. **(Abel 判别法 *)**:$\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛，g(x) 在 $[a,b)$ 上单调有界
2. **(Dirichlet 判别法 *)**:$F(\eta)=\int_a^{b-\eta} f(x)\,dx$ 在 $[0,b-a)$ 上有界，g(x) 在 $[a,b)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to b^-} g(x)=0$

♡

第 9 章 数项级数

内容提要

- 数项级数的收敛性
- 上极限与下极限
- 正项级数
- 任意项级数
- 无穷乘积

9.1 数项级数的收敛性

数项级数的定义

定义 9.1 (数项级数)

设 $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ 是无穷可列个实数，我们称它们的和为**无穷数项级数**，记为：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$，其中 x_n 称为级数的通项或一般项。

定义 9.2

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于有限数 S，则称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，且称它的和为 S，记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 发散，则称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散。

级数的基本性质

定理 9.1 (级数收敛的必要条件)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则其通项所构成的数列 $\{x_n\}$ 是无穷小量，即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

定理 9.2 (线性性)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$=A，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$=B，$\alpha, \beta$ 是两个常数，则：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a + \beta b) = \alpha A + \beta B$$

9.2 上极限与下极限

数列的上极限和下极限

定义 9.3

在有界数列 $\{x_n\}$ 中，若存在它的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得：

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$$

则称 ξ 为数列 $\{x_n\}$ 的一个极限点。

定理 9.3

E 的上确界 H 和下确界 h 均属于 E，即：

$$H = \max E, h = \min E$$

定义 9.4 (上极限与下极限)

E 的最大值 $H = \max E$ 称为数列 $\{x_n\}$ 的上极限，记为

$$H = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

E 的最小值 $h = \min E$ 称为数列 $\{x_n\}$ 的下极限，记为

$$h = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

定理 9.4

设 $\{x_n\}$ 是有界数列，则 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

定理 9.5

设 $\{x_n\}$ 是有界数列。则：

(1) $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = H$ 的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$

(i) 存在正整数 N，使得

$$x_n < H + \varepsilon$$

对一切 n>N 成立

(ii) $\{x_n\}$ 中有无穷多项，满足

$$x_n > H - \varepsilon$$

(2) $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = h$ 的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$

(i) 存在正整数 N，使得

$$x_n > h - \varepsilon$$

对一切 n>N 成立

(ii) $\{x_n\}$ 中有无穷多项，满足

$$x_n < h + \varepsilon$$

上极限与下极限的运算

定理 9.6

设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是两数列，则

(1)

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n+y_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ y_n$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n+y_n \ge \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ y_n$

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n+y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ y_n$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n+y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ y_n$

定理 9.7

设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是两数列，则

(1) 若 $x_n\ge 0, y_n\ge 0$, 则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_ny_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n * \overline{\lim_{n\to\infty}}\ y_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_ny_n \ge \underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n * \underline{\lim_{n\to\infty}}\ y_n$$

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$,0<x<+$\infty$, 则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_ny_n = \lim_{n\to\infty} x_n * \overline{\lim_{n\to\infty}}\ y_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_ny_n = \lim_{n\to\infty} x_n * \underline{\lim_{n\to\infty}}\ y_n$$

9.3 正项级数

正项级数

定义 9.5 (正项级数)

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 的各项都是非负实数，则此级数称为正项级数。

定理 9.8 (正项级数的收敛原理)

正项级数收敛的充分必要条件是它的部分和数列有上界。若正项级数的部分和数列无上界，则其必发散到 $+\infty$

比较判别法

定理 9.9 (比较判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 是两个正项级数，若存在常数 A>0，使得

$$x_n \le Ay_n$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 同敛散。

Cauchy 判别法与 d'Alembert 判别法

定理 9.10 (Cauchy 判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 是正项级数，$r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}$ 则：

（1） 当 r<1 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛。

（2） 当 r>1 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散。

（3） 当 r=1 时，判别法失效，即级数可能收敛，也可能发散。

定理 9.11

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n x_n \neq 0$ 是正项级数，则

(1) 当 $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \overline{r} < 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛。

（2） 当 $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \underline{r} \geq 1$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散。

（3） 当 $\overline{r} \geq 1$ 或 $\underline{r} \leq 1$, 判别法失效

Raabe 判别法

定理 9.12 (Raabe 判别法)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数，且满足以下条件之一：

1. 存在正整数 N，使得对于所有 $n > N$，有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n}$；
2. 存在正数 p，使得对于所有充分大的 n，有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{p}{n}$。

若以上条件满足，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。如果不满足以上条件，则级数可能收敛也可能发散。

积分判别法

定理 9.13 (积分判别法)

设 $f(x)$ 是一个在 $[1, \infty)$ 上连续、单调递减的正函数。那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 和积分 $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ 同时收敛或同时发散。且：

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx$$

9.4 任意项级数

任意项级数

定理 9.14 (级数的 Cauchy 收敛原理)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和序列为 S_n。如果对于任意给定的正数 ε，存在一个正整数 N，当 m 和 n 大于等于 N 时，级数的部分和的差的绝对值小于 ε，即 $|S_m - S_n| < \varepsilon$，那么级数是收敛的。

Leibniz 级数

定义 9.6 (Leibniz 级数)

Leibniz 级数是一个交错级数，形式为 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$，其中 a_n 是一个单调递减趋于零的正数数列。♣

定理 9.15 (Leibniz 判别法)

Leibniz 级数必定收敛 ♡

Abel 判别法与 Dirichlet 判别法

定理 9.16 (Abel 变换)

设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两数列，记 $B_k=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i$，则：

$$\sum_{k=1}^{p}a_k b_k=a_p B_p-\sum_{k=1}^{p-1}(a_{k+1}-a_k)B_k$$

♡

上式也称为分部求和公式，也是离散形式的分部积分公式。

定理 9.17 (级数的 A-D 判别法)

若下列两个条件之一满足，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 收敛。

(1)(**Abel 判别法**)$\{a_n\}$ 单调有界，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛。

(2)(**Dirichlet 判别法**)$\{a_n\}$ 单调趋于 0，$\{\sum_{n=1}^{\infty}b_n\}$ 有界。♡

级数的绝对收敛于条件收敛

定义 9.7 (条件收敛与绝对收敛)

绝对收敛：如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 是一个收敛的级数，则原始级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是绝对收敛的。

条件收敛：如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛的但不是绝对收敛的，则称它是条件收敛的。♣

定理 9.18

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^+$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^-$ 都收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^+$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^-$ 都发散到 $+\infty$ ♡

加法交换律

定理 9.19

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 绝对收敛，则它的更序级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 也绝对收敛，且和不变，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}x_n'$$

♡

定理 9.20 (Riemann)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛，则对任意给定的 a，必定存在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 的更序函数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n' = a$$

级数的乘法

定义 9.8 (Cauchy 乘积)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1)$$

为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的 **Cauchy** 乘积

定理 9.21

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛，则将 $a_i b_j$ 按任意方式排列求和而成的级数也绝对收敛，且其和等于 $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n)$

9.5 无穷级数

无穷乘积的定义

定义 9.9 (无穷乘积)

一个无穷级数是一串形如 $a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots$ 的数的和，其中 a_n 是级数的第 n 个项。记为 $\prod\limits_{n=1}^{n} p_n$

如果部分积数列收敛于一个非 0 的有限数 P，则称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{n} p_n$ 收敛，且称 P 为它的积，记为:

$$\prod_{n=1}^{n} p_n = P$$

如果 $\{P_n\}$ 发散或收敛于 0，则称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{n} p_n$ 发散。

定理 9.22

如果无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{n} p_n$ 收敛，则:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$

(2) $\lim\limits_{m\to\infty} \prod\limits_{n=m+1}^{\infty} p_n = 1$

无穷乘积与无穷级数

定理 9.23

无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛的充分必要条件级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛。

推论 9.1

设 $a_n > 0$, 则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充分必要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

推论 9.2

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充分必要条件是级数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛。

定义 9.10

当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln P_n$ 绝对收敛时，称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 绝对收敛。

定理 9.24

设 $a_n > -1, n = 1, 2, ...$, 则下述三命题等价：

（1）无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛.

（2）无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛。

（3）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛。

第 10 章 函数项级数

内容提要

- 函数项级数的一致收敛性
- 一致收敛级数的判别与性质
- 幂级数
- 函数的幂级数展开

10.1 函数项级数的一致收敛性

点态收敛

定义 10.1 (函数项级数)

设 $u_n(x)$ 是具有公共定义域 E 的一列函数，我们将这无穷个函数的'和'

$$u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

称为函数项级数，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

定义 10.2

设 $u_n(x)$ 在 E 上有定义，对于任意固定的 $x_0 \in E$，若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在点 x_0 处收敛，也成 x_0 为 **收敛点**。函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点全体所构成的集合作为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的 **收敛域** 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 $D \subset E$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 就定义了集合 D 上的一个函数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), x \in D$$

S(x) 称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数，由于这是通过逐点定义的方式得到的，因此称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上点态收敛域 S(x)

函数项级数的基本问题

定理 10.1 (函数项级数的一些性质)

- (逐项求极限)
- (逐项求微分)
- (逐项求积分)

函数项级数的一致收敛性

定义 10.3 (一致收敛性)

设 $\{S_n(x)\}(x \in D)$ 是一种函数序列，若对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在仅与 ε 相关的正整数 $N(\varepsilon)$，当 $n > N(\varepsilon)$ 时：

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$$

对一切 $x \in D$ 成立，则称 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 S(x), 记为：$S_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} S(x)$

推论 10.1

若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛，则函数序列 $\{U_n(x)\}$ 在 D 上一直收敛于 $u(x) \equiv 0$

定义 10.4 (内闭一致收敛)

若对于任意给定的闭区间 $[a, b] \subset D$, 函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 [a,b] 上一致收敛于 S(x)，则称 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上内闭一致收敛于 S(x)

显然，在 D 上一致收敛的函数序列必须在 D 上内闭一致收敛，但其逆命题不成立

定理 10.2

设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在集合 D 上点态收敛于 S(x)，定义 $S_n(x)$ 与 $S(x)$ 的'距离'为：

$$d(S_n, S) = \sup_{x \in D} |S_n(x) - S(x)|$$

则 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 S(x) 的充分必要条件是：

$$\lim_{n \to \infty} d(S_n, S) = 0$$

10.2 一致收敛级数的判别与性质

一致收敛的判别

定理 10.3 (函数项级数一致收敛的 Cauchy 收敛原理)

函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+1}(x) + ... + u_m(x)| < \varepsilon$$

对一切正整数 m>n>N 与一切 $x \in D$ 成立.

定理 10.4 (Weierstrass 判别法)

设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)(x \in D)$ 的每一项 $u_n(x)$ 满足

$$|u_n(x)| \leq a_n, x \in D$$

并且数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛。

定理 10.5 (A-D 判别法)

设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)(x \in D)$ 满足如下两个条件之一，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 D 上一直收敛。

- (Abel 判别法) 函数序列 $\{a_n(x)\}$ 对每一固定的 $x \in D$ 关于 n 是单调的，且 $\{a_n(x)\}$ 在 D 上一致有界：

$$|a_n(x)| \leq M, x \in D, n \in N^+$$

同时，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 D 上一致收敛。

- (Dirichlet 判别法) 函数序列 $\{a_n(x)\}$ 对每一固定的 $x \in D$ 关于 n 是单调的，且 $\{a_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 0；同时，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和序列在 D 上一致有界：

$$|\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)| \leq M, x \in D, n \in N^+$$

一致收敛级数的性质

定理 10.6 (连续性定理)

设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的每一项 $S_n(x)$ 在 [a,b] 上连续，且在 [a,b] 上一致收敛于 S(x)，则 S(x) 在 [a,b] 上也连续。

定理 10.7 (逐项求积分)

设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的每一项 $S_n(x)$ 在 [a,b] 上连续，且在 [a,b] 上一致收敛于 S(x)，则 S(x) 在 [a,b] 上可积，且

$$\int_a^b S(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx$$

定理 10.8

设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 满足

- S_n 在 [a,b] 上有连续的导函数
- $\{S_n(x)\}$ 在 [a,b] 上点态收敛于 S(x)
- $\{S'_n(x)\}$ 在 [a,b] 上一致收敛于 $\sigma(x)$

则 S(x) 在 [a,b] 上可导，且

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}S_n(x)$$

定理 10.9 (Dini 定理)

设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在闭区间 [a,b] 上点态收敛于 S(x)，如果：

- $S_n(x)$ 在 [a,b] 上连续
- S(x) 在 [a,b] 上连续
- $\{S_n(x)\}$ 关于 n 单调，即对任意固定的 $x \in [a,b]$，$\{S_n(x)\}$ 是单调数列，则 $\{S_n(x)\}$ 在 [a,b] 上一致收敛于 S(x)。

10.3 幂级数

定义 10.5 (幂级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + ...$$

这样的函数项级数称为幂级数

幂级数的收敛半径

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n$, 我们首先有:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}|x|$$

根据数项级数的 Cauchy 判别法，当上面的极限值小于 1 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n$ 绝对收敛，当上面的极限值大于 1 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n$ 发散，如果令

$$A = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$$

我们定义:

$$R = \begin{cases} +\infty & A = 0 \\ \frac{1}{A} & A \in (0, +\infty) \\ 0 & A = +\infty \end{cases}$$

则有:

定理 10.10 (Cauchy-Hadamard 定理)

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 | x | <R（R>0）时绝对收敛，当 | x | >R 时发散。数 R 称为幂级数的**收敛半径**, 当 $R = +\infty$ 时，幂级数对一切 x 都是绝对收敛的，当 R=0 时，幂级数当且仅当 $x = x_0$ 时收敛

定理 10.11 (d'Alembert 判别法)

如果对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n$ 成立

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = A$$

则次数幂级数的收敛半径为 $R = \frac{1}{A}$

幂级数的性质

定理 10.12 (Abel 定理)

- **(Able 第一定理)** 设 $x_0 = 0$, 如果幂级数在点 ξ 收敛，则当 | x | <|ξ| 时幂级数绝对收敛，如果幂级数绝对收敛，如果幂级数在点 η 发散，则当 |x|>|η| 时幂级数发散。
- **(Able 第二定理)** 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n$ 的收敛半径为 R，则
  - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n$ 在 (-R,R) 上内闭一致收敛，即在任意闭区间 [a,b]⊂(-R,R) 上一致连续
  - 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n$ 在 x=R 收敛，则在它的任意闭区间 [a,R]⊂(-R,R] 上一致连续

根据 Abel 第二定理，可以得到幂级数的如下性质：

- 和函数的连续性：幂级数在它的收敛域上连续
- 逐项可积性：幂级数在包含于收敛域中的任意闭区间上可以逐项求积分
- 逐项可导性：幂级数在它的收敛域内部可以逐项求导

10.4 函数的幂级数展开

Taylor 级数与余项公式

定义 10.6

- 泰勒系数：$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$
- 泰勒级数：$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

♣

定理 10.13

设函数 f(x) 在 $O(x_0, r)$ 上任意阶可导，则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x) x \in O(x_o, r)$$

其中：

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dx$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!} \int_{x_0}^{x} dx = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1}, 0 \le \theta \le 1$$

这一形式称为 Cauchy 余项

♡