

Optimización de Costos

Método de Multiplicadores de Lagrange

Caso: Fábrica de Zapatos

Presentado por: Fiorella Yannet Paredes Coaguila

2 de junio del 2025

Problema

Situación Empresarial

Una fábrica de calzado recibe un pedido de **2000 pares de zapatos** que deben ser producidos en **dos plantas diferentes**.

Variables:

- x_1 : Número de pares producidos en la Planta 1
- x_2 : Número de pares producidos en la Planta 2

Función Objetivo

La función de costos totales está dada por:

$$C(x_1, x_2) = 0,3x_1^2 + 8x_1 + 0,2x_2^2 + 15x_2 \quad (1)$$

Restricción del Problema

El total de producción debe cumplir con el pedido:

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 2000 \quad (2)$$

Objetivo: Determinar cuántos pares debe producir cada planta para obtener el **costo mínimo**.

Paso 1: Calcular las Derivadas Parciales

Derivada respecto a x_1

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial x_1} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ 0,6x_1 + 8 &= \lambda \cdot 1 \\ \lambda &= 0,6x_1 + 8\end{aligned}$$

Derivada respecto a x_2

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial x_2} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ 0,4x_2 + 15 &= \lambda \cdot 1 \\ \lambda &= 0,4x_2 + 15\end{aligned}$$

Paso 2: Igualar las Expresiones de λ

$$\begin{aligned}0,6x_1 + 8 &= 0,4x_2 + 15 \\ 0,6x_1 &= 0,4x_2 + 7 \\ x_1 &= \frac{0,4x_2 + 7}{0,6}\end{aligned}$$

Paso 3: Sustituir en la Restricción

Sustituyendo en $x_1 + x_2 = 2000$

$$\begin{aligned}\frac{0,4x_2 + 7}{0,6} + x_2 &= 2000 \\ \frac{0,4x_2 + 7 + 0,6x_2}{0,6} &= 2000 \\ \frac{x_2 + 7}{0,6} &= 2000 \\ x_2 + 7 &= 1200 \\ x_2 &= 1193\end{aligned}$$

Resultado

$$x_2 = 1193$$

(3)

Paso 4: Calcular x_1

Cálculo de x_1

Usando la restricción:

$$x_1 = 2000 - x_2$$

$$x_1 = 2000 - 1193$$

$$x_1 = 807$$

Resultado

$$x_1 = 807$$

(4)

Paso 5: Calcular el Multiplicador λ

Cálculo de λ

Usando cualquiera de las expresiones:

$$\lambda = 0,6x_1 + 8$$

$$\lambda = 0,6(807) + 8$$

$$\lambda = 484,2 + 8$$

$$\lambda = 492,2$$

Costo Marginal

$$\lambda = 492,2$$

Paso 6: Verificación del Costo Mínimo

Cálculo del Costo Total

$$C = 0,3(807)^2 + 8(807) + 0,2(1193)^2 + 15(1193)$$

$$C = 0,3(651249) + 6456 + 0,2(1423249) + 17895$$

$$C = 195374,7 + 6456 + 284649,8 + 17895$$

$$C = 504,375,5$$

Costo Mínimo Total

\$504,376

Distribución de Producción

Planta	Producción	Porcentaje
Planta 1	807 pares	40.35 %
Planta 2	1193 pares	59.65 %
Total	2000 pares	100 %

Resumen de la Solución

- **Planta 1:** 807 pares de zapatos
- **Planta 2:** 1193 pares de zapatos
- **Costo mínimo:** \$504,376
- **Costo marginal:** \$492.20 por unidad adicional