Random Walk en N dimensiones

Rodrigo Martín Amores

24 de noviembre de 2025

1. Introducción al problema en 1 dimensión

Un random walk es un proceso matemático en el que una partícula da pasos en direcciones aleatorias. Comenzamos este juego con una partícula situada en un punto q_s de la recta de números enteros. En cada turno, esta dará un paso a la derecha $(+1)$ o a la izquierda (-1) de manera completamente aleatoria. Tras haber realizado x turnos, ¿cuál es la probabilidad de encontrar la partícula en una posición q determinada?

2. Solución en 1 dimensión

Para comenzar con la resolución del problema, debemos comentar antes 3 cuestiones relevantes.

- Si en vez de empezar en el punto q_s, la partícula empezara en el punto 0, debido a que lo importante en este problema son las distancias relativas entre el punto de comienzo q_s y el punto final donde queremos encontrar la partícula q, las ecuaciones serían las mismas pero cambiando $q + q_s \to q$. Con el objetivo de simplificar las ecuaciones y porque no es relevante en la resolución de este problema, a partir de este punto escogeremos $q_s = 0$.

- Si $|q| > x$ parece evidente que no podremos llegar a q tras realizar x pasos, ya que en el mejor de los casos, en el que maximizamos el desplazamiento en alguna de las dos direcciones disponibles, alcanzaremos los puntos $-x$ o x, por lo tanto, la probabilidad de encontrar la partícula en la posición q tras x turnos, $P_1(x, q)$, debe ser 0.

- Para un número de turnos, x, par, solo podemos alcanzar posiciones, q, pares, y viceversa, si x es impar, solo podemos alcanzar posiciones, q, impares. Por lo tanto, si $x - q$ es impar, $P_1(x, q)$ debe ser 0.

Podemos resumir estas condiciones en la siguiente expresión:

$$P_1(x,q) = \begin{cases} 0, & \dfrac{x-|q|}{2} \notin \mathbb{N}_0 \\ p_1(x,q), & \dfrac{x-|q|}{2} \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \tag{1}$$

Entonces, nuestro objetivo será encontrar una expresión para $p_1 \equiv p_1(x,q)$.

Si el número total de caminos posibles para x turnos es 2^x, como todos los caminos son igual de probables, la probabilidad $p_1(x,q)$ será de la forma:

$$p_1(x,q) = \frac{n(x,q)}{2^x} \tag{2}$$

Donde $n \equiv n(x,q)$ es el número de caminos que llegan al punto q.

Vamos a definir el número de veces que vamos hacia la derecha como q^+ y el número de veces que hemos elegido la izquierda como q^-. Se cumple que:

$$q^+ + q^- = x$$

Para empezar, asumiremos que $q > 0$ para simplificar, luego trataremos el caso contrario.

Si $q > 0$, significa que, $q^+ \geq q$. Para que la posición final sea q el resto de caminos deben cancelarse entre si, por lo tanto, $q^+ - q = q^-$. Tenemos un sistema de ecuaciones, que podemos resolver fácilmente:

$$\begin{cases} q^+ + q^- = x \\ q^+ - q^- = q \end{cases} \implies \begin{aligned} q^+ &= \frac{x+q}{2} \\ q^- &= \frac{x-q}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

Si hubiéramos escogido $q < 0$, entonces, $q^- \geq -q$. Para que la posición final sea q, el resto de caminos deben cancelarse entre sí; por lo tanto, $q^- + q = q^+$. el sistema de ecuaciones hubiera sido:

$$\begin{cases} q^+ + q^- = x \\ q^- - q^+ = -q \end{cases} \implies \begin{aligned} q^+ &= \frac{x+q}{2} \\ q^- &= \frac{x-q}{2} \end{aligned} \tag{4}$$

Que es exactamente igual que la ecuación (3).

Para conocer $n(x,q)$, solo debemos calcular el número de las distintas formas que tenemos de escoger x elementos de q^+ en q^+. Podemos comprobar que es equivalente a calcular el número de las distintas formas que tenemos de escoger x elementos de q^- en q^-. Esto es,

$$n(x,q) = \binom{x}{\frac{x+q}{2}} = \binom{x}{\frac{x-q}{2}} \tag{5}$$

Agrupando todas las expresiones,

$$p_1(x,q) = \frac{1}{2^x}\binom{x}{\frac{x+q}{2}} = \frac{x!}{2^x\,\left(\frac{x+q}{2}\right)!\,\left(\frac{x-q}{2}\right)!} \tag{6}$$

Por lo tanto, la expresión final para el random walk en una dimensión es,

$$P_1(x,q) = \begin{cases} 0, & \dfrac{x-|q|}{2} \notin \mathbb{N}_0 \\ \dfrac{1}{2^x}\dbinom{x}{\frac{x+q}{2}}, & \dfrac{x-|q|}{2} \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \tag{7}$$

3. Solución en 2 dimensiones

El problema en dos dimensiones es similar al problema anterior, con unos ligeros cambios. Ahora, nuestra partícula se encontrará en un plano y podrá moverse en 4 direcciones diferentes de manera aleatoria en cada turno, estas direcciones son $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$. Por lo tanto, su posición viene descrita por un vector de dos dimensiones, $q \equiv (q_1, q_2)$. Al igual que en una dimensión, para simplificar el problema, elegimos $q_s = (0, 0)$.

Veamos que condiciones tienen que cumplir x, q para que la probabilidad de encontrar la partícula en la posición q tras x turnos sea distinta de 0.

- Si $|q_1| + |q_2| > x$, similar a la condición en una dimensión, no podremos llegar a $q = (q_1, q_2)$, por lo tanto, la probabilidad, $P_2(x, q)$, debe ser 0.
- Para un número de turnos, x, par, solo podemos alcanzar posiciones, que cumplan que $q_1 + q_2$ sea par, y viceversa, si x es impar, solo podemos alcanzar posiciones en las que, $q_1 + q_2$ sea impar. En el resto de las posiciones la probabilidad debe ser 0.

Podemos volver a resumir estas condiciones en la siguiente expresión:

$$P_2(x,q) = \begin{cases} 0, & \phi \notin \mathbb{N}_0 \\ p_2(x,q), & \phi \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \tag{8}$$

Donde $\phi \equiv \dfrac{x - |q_1| - |q_2|}{2}$.

Al igual que en el caso previo, el número total de caminos tras x turnos será, 4^x, por lo tanto,

$$p_2(x, q) = \frac{n(x, q)}{4^x} \tag{9}$$

Donde $n \equiv n(x, q)$ es el número de caminos que llegan al punto q.

Dividimos el movimiento en cada una de las dimensiones en 2 (derecha, izquierda, arriba, abajo), elegimos q_j^+ y q_j^-, como el número de movimientos en la dimensión j, tal que, $q_j^+ \geq q_j^-$, de forma que:

$$q_1^+ - q_1^- = |q_1|$$
$$q_2^+ - q_2^- = |q_2|$$

Añadiendo la ligadura adicional, que nos obliga a que el número de pasos totales sea x,

$$q_1^+ + q_1^- + q_2^+ + q_2^- = x$$

Obtenemos un sistema de ecuaciones del que podemos despejar 3 de las 4 variables y dejarlas en función de la ultima.

$$\begin{cases} q_1^+ + q_1^- + q_2^+ + q_2^- = x \\ \qquad\qquad q_2^+ - q_2^- = |q_2| \\ \qquad\qquad q_1^+ - q_1^- = |q_1| \end{cases} \tag{10}$$

Nuestras ecuaciones quedan entonces de la siguiente forma (en función de q_2^-),

$$\begin{aligned} q_1^+ &= \frac{x + |q_1| - |q_2|}{2} - q_2^- = |q_1| + \phi - q_2^- \\ q_1^- &= \frac{x - |q_1| - |q_2|}{2} - q_2^- = \phi - q_2^- \\ q_2^+ &= |q_2| + q_2^- \end{aligned}$$

Para un q_2^- dado, el número de caminos será, el número de posibles formas de ordenar los q_1^+, q_1^-, q_2^+, q_2^- pasos en x turnos. Esto es,

$$n(q_2^-) = \binom{x}{q_1^+}\binom{x - q_1^+}{q_1^-}\binom{x - q_1^+ - q_1^-}{q_2^+} = \frac{x!}{q_1^+!\, q_1^-!\, q_2^+!\, q_2^-!} \tag{11}$$

Para encontrar el número total de caminos que llegan a q deberemos sumar sobre todos los posibles valores de q_2^-. Estos van desde 0 hasta ϕ.

$$n(x,q) = \sum_{q_2^-=0}^{\phi} \frac{x!}{(|q_1| + \phi - q_2^-)!\,(\phi - q_2^-)!\,(|q_2| + q_2^-)!\,q_2^-!} \tag{12}$$

De forma que la probabilidad final será, donde ya hemos sustituido los valores explícitos de q_1^+, q_1^-, q_2^+:

$$P_2(x,q) = \begin{cases} 0, & \phi \notin \mathbb{N}_0 \\ \dfrac{x!}{4^x} \displaystyle\sum_{q_2^-=0}^{\phi} \frac{1}{(|q_1| + \phi - q_2^-)!\,(\phi - q_2^-)!\,(|q_2| + q_2^-)!\,q_2^-!}, & \phi \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \tag{13}$$

4. Solución en N dimensiones

Una vez hemos resuelto el problema para una y dos dimensiones podemos inducir una solución para el caso mas general, N dimensiones. La posición de la partícula será $q \equiv (q_1, q_2, ..., q_N)$ y al igual que en los casos anteriores elegimos $q_s = (0, 0, ..., 0)$.

- Si $\sum_{j=1}^{N} |q_j| > x$, no podremos llegar a q, por lo tanto, la probabilidad, $P_N(x,q)$, debe ser 0.
- Para un número de turnos, x, par, solo podemos alcanzar posiciones, que cumplan que $\sum_{j=1}^{N} q_j$ sea par, y viceversa, si x es impar, solo podemos alcanzar posiciones en las que, $\sum_{j=1}^{N} q_j$ sea impar. En el resto de las posiciones la probabilidad debe ser 0.

Podemos volver a resumir estas condiciones en:

$$P_N(x,q) = \begin{cases} 0, & \phi \notin \mathbb{N}_0 \\ p_N(x,q), & \phi \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \tag{14}$$

Donde $\phi \equiv \frac{1}{2}\Big(x - \sum_{j=1}^{N} |q_j|\Big)$.

El número de direcciones totales es $2N$ por lo tanto, tras haber realizado x turnos, el número de caminos totales posibles es $(2N)^x$. De forma que la probabilidad, p_N, de encontrar la partícula en el punto q tras x turnos es:

$$p_N(x,q) = \frac{n(x,q)}{(2N)^x} \tag{15}$$

Donde $n \equiv n(x,q)$ es el número total de caminos que llegan al punto q tras x turnos.

Procederemos igual que en los casos anteriores, dividiremos el movimiento en cada una de las dimensiones j en sus dos posibles direcciones, q_j^+ y q_j^- de forma que $q_j^+ \geq q_j^-$. De forma que obtenemos N ecuaciones de la forma:

$$q_j^+ - q_j^- = |q_j|$$

Añadiendo nuevamente la ligadura que nos obliga a realizar x pasos en total. Obtenemos un sistema de $N+1$ ecuaciones con $2N$ incógnitas.

$$\begin{cases} q_1^+ - q_1^- = |q_1| \\ \vdots \\ q_N^+ - q_N^- = |q_N| \\ \sum_{j=1}^{N} \left(q_j^+ - q_j^- \right) = x \end{cases} \tag{16}$$

Procederemos a escribir todas las variables que podemos determinar (q_j^+, q_N^-) (en función de $q, x, q_1^-, q_2^-, \ldots, q_{N-2}, q_{N-1}$). Gracias a la última ecuación podemos determinar cuanto debe valer q_N^- y q_N^+,

$$q_N^- = \phi - \sum_{j=1}^{N-1} q_j^-$$

$$q_N^+ = |q_N| + \phi - \sum_{j=1}^{N-1} q_j^-$$

Y el resto son:

$$q_j^+ = |q_j| + q_j^-, \quad j = 1, \ldots, N-1$$

Para unos valores de $(q_1^-, q_2^-, \ldots, q_{N-2}, q_{N-1})$ dados tenemos un número de caminos dado por las posibles formas de ordenar los (q_j^+, q_j^-) para $j = 1, \ldots, N$. Esto es,

$$n(q_1^-, \ldots, q_{N-1}^-) = x! \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{q_j^+ q_j^-} \right) \tag{17}$$

Para determinar el valor total de n deberemos sumar sobre todos los posibles valores de $(q_1^-, \ldots, q_{N-1}^-)$

Podemos escribir esto así,

$$n(x,q) = \sum_{q_1^-=0}^{\phi} \sum_{q_2^-=0}^{\phi - q_1^-} \cdots \sum_{q_{N-2}^-=0}^{\phi - \sum_{j=1}^{N-3} q_j^-} \sum_{q_{N-1}^-=0}^{\phi - \sum_{j=1}^{N-2} q_j^-} \left[x! \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{q_j^+!\, q_j^-!} \right) \right] \tag{18}$$

Sin embargo podemos escribir el resultado de forma mucho mas simple definiendo el conjunto S.

$$S = \left\{ (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{N}_0^N \;\middle|\; \sum_{j=1}^{N} a_j = \phi \right\}$$

De forma que el resultado final es:

$$P_N(x,q) = \begin{cases} 0, & \phi \notin \mathbb{N}_0 \\ \dfrac{x!}{(2N)^x} \displaystyle\sum_{\sigma \,\in\, S} \left[\prod_{j=1}^{N} \Big((|q_j| + \sigma_j)!\, (\sigma_j)! \Big) \right]^{-1}, & \phi \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \tag{19}$$

Donde $\phi \equiv \dfrac{1}{2}\Big(x - \displaystyle\sum_{j=1}^{N} |q_j| \Big)$.