

Concetti di base di complessità degli algoritmi

Problemi, algoritmi, programmi

- Problema: il compito da svolgere
 - quali *output* vogliamo ottenere a fronte di certi *input*
 - cioè quale *funzione* vogliamo realizzare
- Algoritmo: i passi (il processo) da seguire per risolvere un problema
 - un algoritmo prende gli *input* in ingresso ad un problema e li trasforma in opportuni *output*
- Come al solito, un problema può essere risolto da tanti algoritmi
- Un algoritmo è una sequenza di **operazioni concrete**
 - deve essere *eseguibile* da una “macchina”
- Un algoritmo deve essere **corretto**
 - deve calcolare la funzione giusta
 - sappiamo che determinare la correttezza di un algoritmo è un problema indecidibile...
 - ... questo però non vuole dire che non si possa fare niente per cercare di capire se un algoritmo è corretto o no

Linguaggi di programmazione

- Un algoritmo può essere descritto in diversi linguaggi
 - se usiamo un linguaggio di programmazione (C, C++, Java, C#, ecc.) abbiamo un *programma*
- Come linguaggio noi usiamo... lo **pseudocodice**
 - non è un vero linguaggio di programmazione, ma ci assomiglia molto
 - facile da tradurre in codice di un linguaggio di programmazione quale C o Java (o Python)
 - il particolare linguaggio di programmazione con cui un algoritmo è implementato è, dal punto di vista della complessità, un po' come l'hardware: ci cambia solo le costanti moltiplicative

Primo esempio di algoritmo

- Problema: **ordinamento**
 - *Input*: una sequenza A di n numeri $[a_1, a_2, \dots, a_n]$
 - *Output*: una permutazione $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ della sequenza di input tale che
$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$$
- Algoritmo: *insertion sort*

```
INSERTION-SORT(A)
1  for  $j := 2$  to  $A.length$ 
2     $key := A[j]$ 
3    //Inserisce  $A[j]$  nella sequenza ordinata  $A[1..j-1]$ 
4     $i := j - 1$ 
5    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$ 
6       $A[i + 1] := A[i]$ 
7       $i := i - 1$ 
8   $A[i + 1] := key$ 
```

Pseudocodice

- assegnamento: $i := j$
 - assegnamento multiplo: $i := j := e$
 - applicato da destra a sinistra
 - cioè è la stessa cosa che scrivere $j := e; i := j$
- come in C: **while**, **for**, **if-then-else**
- `//` inizia un commento, che termina alla fine della riga
- la struttura a blocchi è data dall'indentazione

```
while  $i > 0$  and  $A[i] > key$   
     $A[i + 1] := A[i]$   
     $i := i - 1$   
 $A[i + 1] := key$ 
```

=

```
while ( $i > 0$  and  $A[i] > key$ )  
{  
     $A[i + 1] := A[i]$   
     $i := i - 1$   
}  
 $A[i + 1] := key$ 
```

Variabili e array

- Le variabili sono locali alla procedura
- Agli elementi degli array si accede come in C
 - $A[j]$ è l'elemento di indice j dell'array A
 - il primo elemento può avere un indice diverso da 0
- C'è una nozione di sotto-array (*slice*)
 - $A[i..j]$ è il sotto-array che inizia dall'elemento i -esimo e termina all'elemento j -esimo
 - e.g. $A[1..5]$ è il sotto-array con i primi 5 elementi dell'array A

Oggetti e puntatori

- Dati composti sono organizzati in *oggetti*
- Gli oggetti hanno degli *attributi* (detti anche *campi*)
 - per indicare il valore di un attributo *attr* di un oggetto *x*, scriviamo *x.attr*
 - gli array rappresentano dati composti, quindi sono oggetti
 - ogni array ha un attributo *length*, che contiene la lunghezza dell'array
 - *A.length* è la lunghezza dell'array *A*
- Una variabile che corrisponde ad un oggetto (es. un array) è un *puntatore* all'oggetto
 - molto simile ai puntatori in C e, soprattutto, al concetto di *reference* in Java
 - per esempio, se abbiamo due variabili *x* e *y*, e *x* punta ad un oggetto con un attributo *f*, dopo le seguenti istruzioni
$$y := x$$
$$x.f := 3$$
si ha che $x.f = y.f = 3$, in quanto, grazie all'assegnamento $y := x$, *x* e *y* puntano allo stesso oggetto
- Un puntatore che non fa riferimento ad alcun oggetto ha valore *NIL*

Passaggio parametri

- I parametri sono passati *per valore*
 - la procedura invocata riceve una copia dei parametri passati
 - se una procedura PROC ha un parametro x e dentro PROC il parametro x riceve il valore di y ($x := y$), la modifica non è visibile al di fuori della procedura (per esempio al chiamante)
- Quando un oggetto è passato come parametro, ciò che viene passato è il *puntatore* all'oggetto
 - degli attributi non viene fatta una copia, e modifiche a questi sono visibili al chiamante
 - se x è un parametro che è un oggetto con attributo f , gli effetti dell'assegnamento $x.f := 3$ (il fatto che l'attributo f valga 3) sono visibili al di fuori della procedura
 - questo è il funzionamento di Java...

Modello di computazione

- Quale è la “macchina” sulla quale vengono eseguiti gli algoritmi scritti in pseudocodice?
- La macchina RAM!
- Assunzione di base: ogni istruzione semplice di pseudocodice è tradotta in un numero finito di istruzioni RAM
 - per esempio $x := y$ diventa, se a_x e a_y sono gli indirizzi in memoria delle variabili x e y (a_x e a_y sono delle costanti):
LOAD a_y
STORE a_x

Criteri di costo

- Da ora in poi adottiamo il *criterio di costo costante*
 - adatto per gli algoritmi che scriveremo, che non manipoleranno mai numeri né richiederanno quantità di memoria molto più grandi della dimensione dei dati in ingresso
- In conseguenza di ciò abbiamo che ogni istruzione i di pseudocodice viene eseguita in un tempo costante c_i
- Grazie a questa assunzione, da adesso in poi possiamo “dimenticarci” che il modello computazionale dello pseudocodice è la macchina RAM
- Inoltre, da ora in poi ci concentriamo sulla *complessità temporale*, più che su quella spaziale

Costo di esecuzione per INSERTION-SORT

INSERTION-SORT (A)	<i>costo</i>	<i>numero di volte</i>
1 for $j := 2$ to $A.length$	c_1	n
2 $key := A[j]$	c_2	$n - 1$
3 // Pone $A[j]$ in $A[1..j-1]$	0	$n - 1$
4 $i := j - 1$	c_4	$n - 1$
5 while $i > 0$ and $A[i] > key$	c_5	$\sum_{j=2}^n t_j$
6 $A[i + 1] := A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^n (t_j - 1)$
7 $i := i - 1$	c_7	$\sum_{j=2}^n (t_j - 1)$
8 $A[i + 1] := key$	c_8	$n - 1$

Caso ottimo e caso pessimo

- Note:
 - $n = A.length$ = dimensione dei dati in ingresso
 - $t_2, t_3 \dots t_n$ = numero di volte che la condizione del ciclo **while** viene eseguita quando $j = 2, 3, \dots n$

- Tempo di esecuzione di INSERTION-SORT:

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^n t_j \\ + c_6 \sum_{j=2}^n (t_j - 1) + c_7 \sum_{j=2}^n (t_j - 1) + c_8(n-1)$$

- Se l'array A è già ordinato, $t_2 = \dots = t_n = 1$
 - $T(n) = an+b$, cioè $T(n) = \Theta(n)$
 - questo è il caso ottimo
- Se A è ordinato, ma in ordine decrescente, $t_2=2, t_3=3, \dots t_n=n$
 - $T(n) = an^2+bn+c$, cioè $T(n) = \Theta(n^2)$
 - questo è il caso pessimo

Un classico problema: l'ordinamento

- L'ordinamento degli elementi di una sequenza è un esempio classico di problema risolto mediante algoritmi
- C'è un gran numero di algoritmi di ordinamento disponibili: insertion sort, bubblesort, quicksort, merge sort, counting sort, ...
- Ne abbiamo appena visto uno di essi: insertion sort
- Abbiamo visto che *nel caso pessimo* $T_{\text{INSERTION-SORT}}(n)$ è $\Theta(n^2)$
 - possiamo anche scrivere che $T_{\text{INSERTION-SORT}}(n) = O(n^2)$ (usando la notazione O , senza specificare “nel caso pessimo”), in quanto il limite superiore (che è raggiunto nel caso pessimo) è una funzione in $\Theta(n^2)$
 - è anche $T_{\text{INSERTION-SORT}}(n) = \Omega(n)$, in quanto il limite inferiore (raggiunto nel caso ottimo) è $\Theta(n)$
- Possiamo fare di meglio?
 - possiamo cioè scrivere un algoritmo con un limite superiore migliore?
- Sì!

Merge sort

- Idea dell'algoritmo:
 - se l'array da ordinare ha *meno di 2* elementi, è ordinato per definizione
 - altrimenti:
 - si divide l'array in 2 sotto-array, ognuno con la metà degli elementi di quello originario
 - si ordinano i 2 sotto-array ri-applicando l'algoritmo
 - si fondono (merge) i 2 sotto-array (che ora sono ordinati)
- MERGE-SORT è un algoritmo *ricorsivo*
- Un esempio di funzionamento:

42 16 28 36 26 78 84 8

16	42	28	36	26	78	8	84
----	----	----	----	----	----	---	----

16	28	36	42	8	26	78	84
----	----	----	----	---	----	----	----

8	16	26	28	36	42	78	84
---	----	----	----	----	----	----	----

Pseudocodice di MERGE-SORT

```
MERGE-SORT( $A, p, r$ )  
1  if  $p < r$   
2     $q := \lfloor (p + r) / 2 \rfloor$   
3    MERGE-SORT( $A, p, q$ )  
4    MERGE-SORT( $A, q+1, r$ )  
5    MERGE( $A, p, q, r$ )
```

- Per ordinare un array $A = [A[1], A[2], \dots, A[n]]$ invochiamo
MERGE-SORT($A, 1, A.length$)

Divide et impera

- MERGE-SORT adotta una tecnica algoritmica classica: **divide et impera**
- Se il problema da risolvere è grosso:
 - *dividilo* in problemi più piccoli della stessa natura
 - *risolvi* (domina) i problemi più piccoli
 - *combina* le soluzioni
- Dopo un po' che dividiamo il problema in altri più piccoli, ad un certo punto arriviamo ad ottenere problemi “piccoli a sufficienza” per poterli risolvere senza dividerli ulteriormente
 - è una tecnica naturalmente ricorsiva in quanto, per risolvere i “problemi più piccoli”, applichiamo lo stesso algoritmo del problema più grosso
- Per completare l'algoritmo dobbiamo definire un sotto-algoritmo MERGE che "combina" le soluzioni dei problemi più piccoli

Fusione (merge) di sotto-array *ordinati*

- Definizione del problema (input/output)
 - *Input*: 2 array *ordinati* $A[p..q]$ e $A[q+1..r]$ di un array A
 - *Output*: l'array ordinato $A[p..r]$ ottenuto dalla fusione degli elementi dei 2 array iniziali
- Idea dell'algoritmo:
 1. si va all'inizio dei 2 sotto-array
 2. si prende il minimo dei 2 elementi correnti
 3. si inserisce tale minimo alla fine dell'array da restituire
 4. si avanza di uno nell'array da cui si è preso il minimo
 5. si ripete dal passo 2

Pseudocodice di MERGE

```
MERGE (A, p, q, r)
1   $n_1 := q - p + 1$ 
2   $n_2 := r - q$ 
3  crea (alloca) 2 nuovi array  $L[1..n_1+1]$  e  $R[1..n_2+1]$ 
4  for  $i := 1$  to  $n_1$ 
5       $L[i] := A[p + i - 1]$ 
6  for  $j := 1$  to  $n_2$ 
7       $R[j] := A[q + j]$ 
8   $L[n_1 + 1] := \infty$ 
9   $R[n_2 + 1] := \infty$ 
10  $i := 1$ 
11  $j := 1$ 
12 for  $k := p$  to  $r$ 
13     if  $L[i] \leq R[j]$ 
14          $A[k] := L[i]$ 
15          $i := i + 1$ 
16     else  $A[k] := R[j]$ 
17          $j := j + 1$ 
```

Analisi dell'algoritmo MERGE

- Nell'algoritmo MERGE prima si copiano gli elementi dei 2 sottoarray $A[p..q]$ e $A[q+1..r]$ in 2 array temporanei L e R , quindi si fondono L e R in $A[p..r]$
- Escamotage: per non dover controllare se L e R sono vuoti si usa una “sentinella”, un valore particolare (∞), più grande di ogni possibile valore, messo in fondo agli array (linee 8-9)
- Dimensione dei dati in input: $n = r - p + 1$
- L'algoritmo è fatto di 3 cicli **for**:
 - 2 cicli di inizializzazione (l. 4-7), per assegnare i valori a L e R
 - il primo è eseguito n_1 volte, il secondo n_2 volte, con
$$\Theta(n_1) = \Theta(q-p+1) = \Theta(n/2) = \Theta(n)$$
$$\Theta(n_2) = \Theta(r-q) = \Theta(n/2) = \Theta(n)$$
 - si poteva giungere allo stesso risultato notando che $n_1 + n_2 = n$, quindi $\Theta(n_1 + n_2) = \Theta(n)$
- Il ciclo principale (l. 12-17) è eseguito n volte, e ogni linea ha costo costante
- In totale $T_{\text{MERGE}}(n) = \Theta(n)$

MERGE (A, p, q, r)	<i>costo</i>
1 $n_1 := q - p + 1$	c
2 $n_2 := r - q$	c
3 crea 2 nuovi array $L[1..n_1+1]$ e $R[1..n_2+1]$	$\Theta(n)$
4 for $i := 1$ to n_1	$\Theta(n_1)$ per tutto il ciclo
5 $L[i] := A[p + i - 1]$	
6 for $j := 1$ to n_2	$\Theta(n_2) = \Theta(n/2) = \Theta(n)$
7 $R[j] := A[q + j]$	
8 $L[n_1 + 1] := \infty$	c
9 $R[n_2 + 1] := \infty$	c
10 $i := 1$	c
11 $j := 1$	c
12 for $k := p$ to r	$\Theta(n)$ per il ciclo
13 if $L[i] \leq R[j]$	c
14 $A[k] := L[i]$	c
15 $i := i + 1$	c
16 else $A[k] := R[j]$	c
17 $j := j + 1$	c

Complessità di un algoritmo *divide et impera*

- In generale, un algoritmo *divide et impera* ha le caratteristiche seguenti:
 - si divide il problema in a sottoproblemi, ognuno di dimensione $1/b$ di quello originale
 - se il sottoproblema ha dimensione n piccola a sufficienza ($n < c$, con c una costante caratteristica del problema), esso può essere risolto in tempo costante (cioè $\Theta(1)$)
 - indichiamo con $D(n)$ il costo di dividere il problema, e $C(n)$ il costo di ricombinare i sottoproblemi
 - $T(n)$ è il costo per risolvere il problema totale
- Possiamo esprimere il costo $T(n)$ tramite la seguente *equazione di ricorrenza* (o *ricorrenza*):

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n < c \\ D(n) + aT(n/b) + C(n) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ricorrenza per l'algoritmo MERGE-SORT

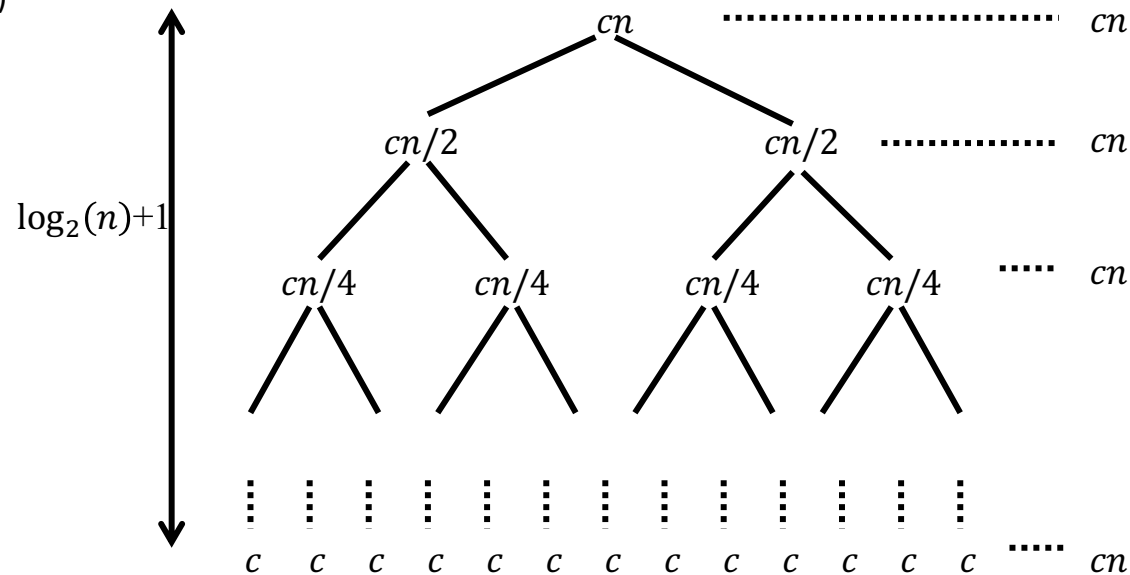
- $a = b = c = 2$, $D(n) = \Theta(1)$, $C(n) = \Theta(n)$

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n < 2 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- in realtà dovrebbe essere $T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil)$ invece di $2T(n/2)$, ma l'approssimazione non influisce sul comportamento asintotico della funzione $T(n)$
- Come risolviamo le ricorrenze? Vedremo tra poco!

Complessità di MERGE-SORT

- Riscriviamo la ricorrenza di MERGE-SORT:
$$T(n) = \begin{cases} c & \text{se } n < 2 \\ 2T(n/2) + cn & \text{altrimenti} \end{cases}$$
- (La stessa costante c è usata in ambo i casi per semplicità, ma in generale sono due costanti diverse)
- Possiamo disegnare l'*albero di ricorsione* (consideriamo per semplicità il caso in cui la lunghezza n dell'array è una potenza di 2)



- Sommando i costi dei vari livelli otteniamo
 $T(n) = cn \log(n) + cn$, cioè $T_{\text{MERGE-SORT}}(n) = \Theta(n \log(n))$

Totale: $cn \log(n) + cn$

Risoluzione di ricorrenze

- Tre tecniche principali:
 - sostituzione
 - albero di ricorsione
 - teorema dell'esperto (*master theorem*)
- Metodo della sostituzione:
 - formulare un'ipotesi di soluzione
 - sostituire la soluzione nella ricorrenza, e dimostrare (per induzione) che è in effetti una soluzione

Esempio di sostituzione

- Cerchiamo un limite superiore per la seguente $T(n)$: $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$
 - supponiamo $T(n) = O(n \log_2(n))$
 - dobbiamo mostrare che $T(n) \leq cn \log_2(n)$ per una opportuna costante $c > 0$
 - supponiamo che ciò valga per $T(\lfloor n/2 \rfloor)$, cioè $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c \lfloor n/2 \rfloor \log_2(\lfloor n/2 \rfloor)$
 - sostituendo in $T(n)$ abbiamo: $T(n) \leq 2c \lfloor n/2 \rfloor \log_2(\lfloor n/2 \rfloor) + n \leq cn \log_2(n/2) + n = cn \log_2(n) - cn \log_2(2) + n = cn \log_2(n) - cn + n \leq cn \log_2(n)$
 - L'ultimo passaggio vale se $c \geq 1$
 - dobbiamo però mostrare che la disuguaglianza vale per $n = 1$ (condizione al contorno); supponiamo che sia $T(1) = 1$, allora $T(1) = 1 \leq c1 \log_2(1) = 0$? No!
 - però $T(n) \leq cn \log_2(n)$ deve valere solo da un certo n_0 in poi, che possiamo scegliere arbitrariamente; prendiamo $n_0 = 2$, e notiamo che, se $T(1) = 1$, allora, dalla ricorrenza, $T(2) = 4$ e $T(3) = 5$
 - inoltre, per $n > 3$ la ricorrenza non dipende più dal problematico $T(1)$
 - ci basta determinare una costante c tale che $T(2) = 4 \leq c2 \log_2(2)$ e $T(3) = 5 \leq c3 \log_2(3)$
 - per ciò basta prendere $c \geq 2$

Osservazioni sul metodo di sostituzione

- Consideriamo il seguente caso: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$
- Proviamo a vedere se $T(n) = O(n)$, ovvero se $T(n) \leq cn$
 - Per ipotesi induttiva abbiamo $T(n/2) \leq cn/2$, quindi
 - $T(n) \leq c\lfloor n/2 \rfloor + c\lceil n/2 \rceil + 1 = cn + 1$
 - basta prendere $c=1$ e siamo a posto?
 - No! perché non abbiamo dimostrato la forma esatta della disuguaglianza!
 - dobbiamo derivare che il tutto è $\leq cn$, ma $cn+1$ non è $\leq cn$
- Potremmo prendere un limite più alto, e dimostrare che $T(n)$ è $O(n^2)$ (cosa che è vera), ma in effetti si può anche dimostrare che $T(n) = O(n)$, dobbiamo solo fare un piccolo aggiustamento.
- Mostriamo allora che $T(n) \leq cn - b$, dove b è un'opportuna costante
 - se fosse così, allora $T(n) = O(n)$
 - $T(n) \leq c\lfloor n/2 \rfloor - b + c\lceil n/2 \rceil - b + 1 = cn - 2b + 1 \leq cn - b$
 - basta prendere $b \geq 1$

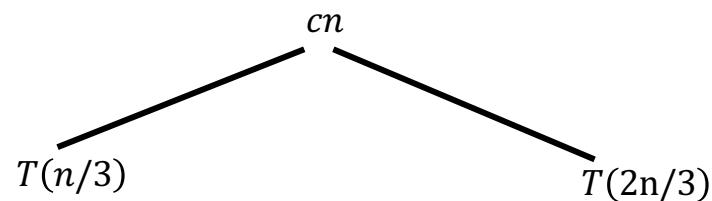
Altri esempi di sostituzione

- Attenzione però:
 - $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$ è $O(n)$? Ossia $T(n) \leq cn$?
 - Per ipotesi induttiva, $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c \lfloor n/2 \rfloor \leq cn/2$, quindi
 - $T(n) \leq 2cn/2 + n = cn + n = (c+1)n = O(n)$, quindi C.V.D.?
 - No!
 - Dobbiamo mostrare la forma esatta della disuguaglianza, e non è vero che $(c+1)n \leq cn$
 - E peraltro qui non è vero che $T(n)$ sia $O(n)$, perché abbiamo visto che è $O(n \log n)$
- Altro esempio: $T(n) = 2T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \log_2(n)$
 - poniamo $m = \log_2(n)$, quindi $n = 2^m$, otteniamo
 - $T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + m$
 - Ponendo $S(m) = T(2^m)$ abbiamo $S(m) = 2S(m/2) + m$ quindi $S(m) = O(m \log_2(m))$
 - Quindi, sostituendo all'indietro: $T(n) = O(\log_2(n) \log_2 \log_2(n))$

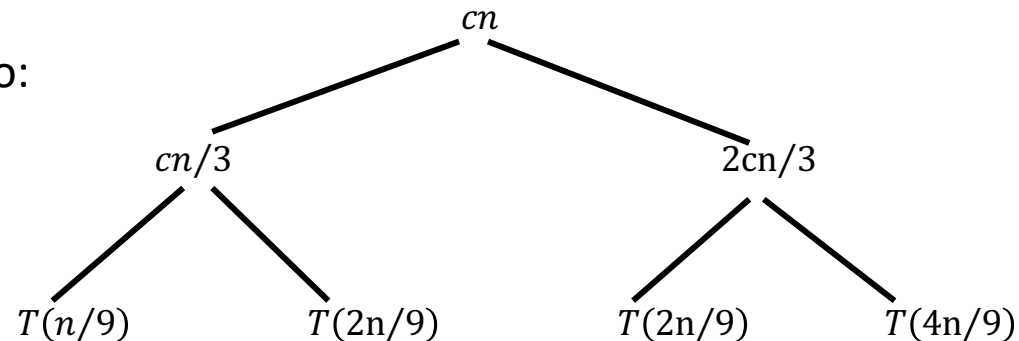
Metodo dell'albero di ricorsione

- Un metodo non molto preciso, ma utile per fare una congettura da verificare poi con il metodo di sostituzione
- Idea: a partire dalla ricorrenza, sviluppiamo l'albero delle chiamate, indicando per ogni chiamata la sua complessità
- Esempio: $T(n) = T(\lfloor n/3 \rfloor) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + O(n)$

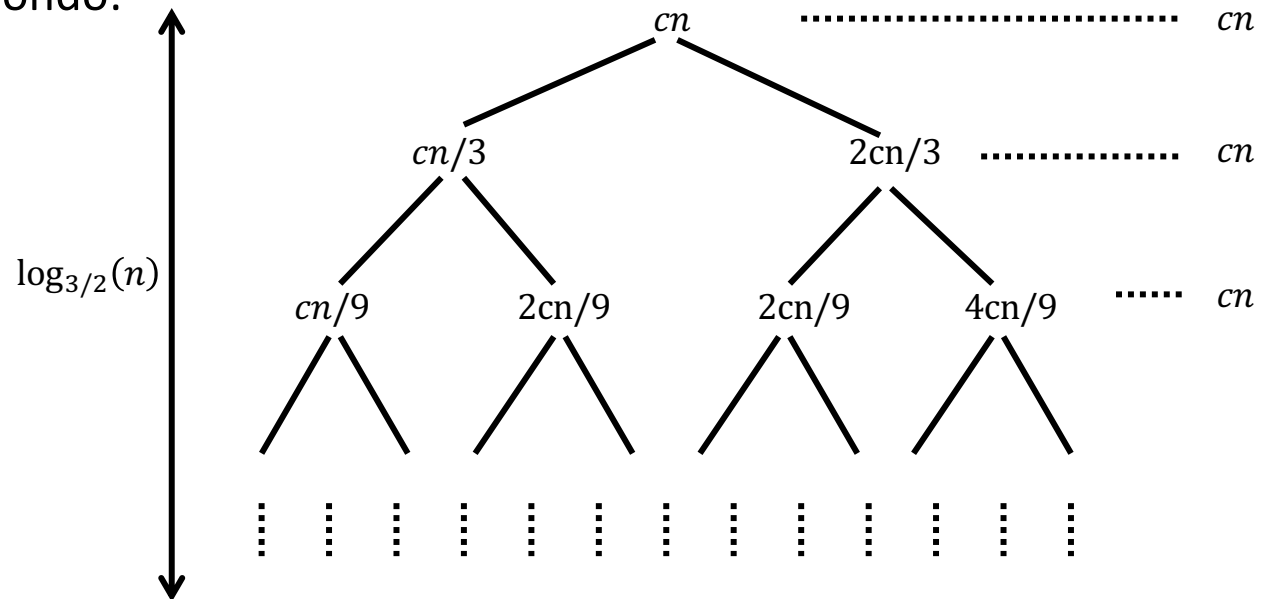
- Prima chiamata:



- Espandiamo:



- fino in fondo:



- Se l'albero fosse completo, sommando i costi livello per livello, a ogni livello avremmo un costo cn
- Il ramo più a destra si esaurisce a un livello k tale per cui $n(2/3)^k=1$, cioè $k = \log_{3/2}n$
- Quello più a sinistra però si esaurisce prima, dopo solo \log_3n livelli!

Verifica del limite superiore

- Questo ci consente di congetturare che $T(n) = \Theta(n \log_2 n)$ (anche se l'albero non è completo)
- Cominciamo con il limite superiore, ovvero $T(n) = O(n \log_2 n)$
 - Verifichiamo la congettura, mostrando che $T(n) \leq dn \log_2 n$:
 - $T(n) \leq T(n/3) + T(2n/3) + cn$, quindi, sfruttando l'ipotesi induttiva:
$$\begin{aligned} T(n) &\leq d(n/3) \log_2(n/3) + d(2n/3) \log_2(2n/3) + cn \\ &= d(n/3) \log_2(n) - d(n/3) \log_2(3) + d(2n/3) \log_2(n) - d(2n/3) \log_2(3) + cn \\ &= dn \log_2 n - dn \log_2 3 + d(2n/3) + cn \\ &= dn \log_2 n - dn(\log_2 3 - 2/3) + cn \\ &\leq dn \log_2 n \end{aligned}$$

se $d \geq c/(\log_2 3 - 2/3)$

Verifica del limite inferiore

- Il ramo più a sinistra si esaurisce dopo k' livelli, dove k' è tale che $n(1/3)^{k'}=1$, cioè $k' = \log_3 n$
- Verifichiamo che $T(n)=\Omega(n \log_2 n)$
 - Si mostra che $T(n) \geq dn \log_2 n$ procedendo come prima
 - $T(n) \geq T(n/3) + T(2n/3) + cn$, quindi, sfruttando l'ipotesi induttiva:
$$\begin{aligned} T(n) &\geq d(n/3) \log_2(n/3) + d(2n/3) \log_2(2n/3) + cn \\ &= dn \log_2 n - dn(\log_2 3 - 2/3) + cn \\ &\geq dn \log_2 n \\ &\text{se } 0 < d \leq c/(\log_2 3 - 2/3) \end{aligned}$$
- In definitiva $T(n) = \Theta(n \log_2 n)$
- Nota: in entrambe le sostituzioni andrebbe verificato anche il caso base

Ricorrenze lineari con partizione bilanciata

Teorema dell'esperto (*master theorem*)

- Data la ricorrenza:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

(in cui $a \geq 1$, $b > 1$, e n/b è $o \lfloor n/b \rfloor$ o $\lceil n/b \rceil$)

1. se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ per qualche $\epsilon > 0$, allora $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, allora $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log(n))$
3. se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ per qualche $\epsilon > 0$, e $af(n/b) \leq cf(n)$ per qualche $c < 1$ e per tutti gli n grandi a sufficienza, allora $T(n) = \Theta(f(n))$
 - La condizione $af(n/b) \leq cf(n)$ è detta di *regolarità*

Alcune osservazioni

- La soluzione è data dal più grande tra $n^{\log_b a}$ e $f(n)$
 - se $n^{\log_b a}$ è il più grande, $T(n)$ è $\Theta(n^{\log_b a})$
 - se $f(n)$ è il più grande, $T(n)$ è $\Theta(f(n))$
 - se sono nella stessa classe secondo la relazione Θ , $T(n)$ è $\Theta(f(n)\log(n))$
- “Più grande” o “più piccolo” in effetti significa "*polinomialmente* più grande" e "*polinomialmente* più piccolo"
 - n è polinomialmente più piccolo di n^2
 - $n \log(n)$ è polinomialmente più grande di $n^{1/2}$
- Il teorema dell'esperto non copre tutti i casi!
 - se una delle due funzioni è più grande, ma non polinomialmente più grande...
 - $n \log(n)$ è più grande di n , ma non *polinomialmente* più grande

Teorema dell'esperto e MERGE-SORT

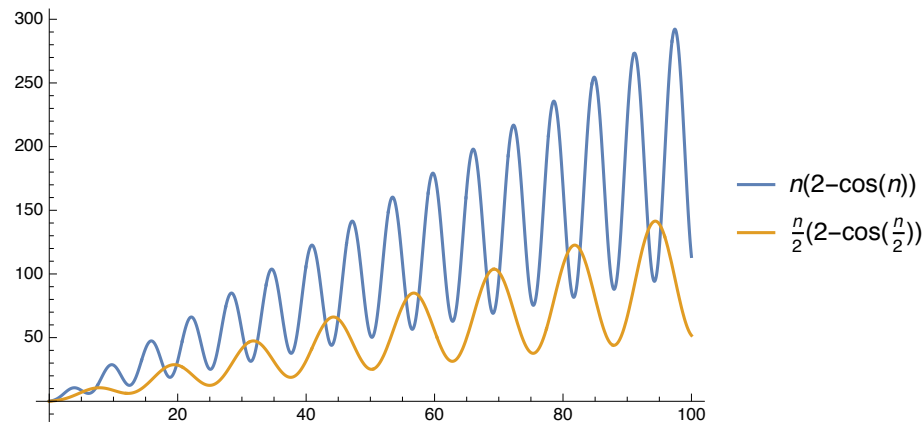
- $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$
 - $a = b = 2$
 - $f(n) = n$
 - $n^{\log_b a} = n^1 = n$
- Siamo nel caso 2:
 - $T_{\text{MERGE-SORT}}(n) = \Theta(n \log(n))$

Un caso particolare

- Notiamo che l'enunciato del teorema dell'esperto si semplifica un po' se $f(n)$ è una funzione $\Theta(n^k)$, per una qualche costante k :
 1. se $k < \log_b a$, allora $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
 2. se $k = \log_b a$, allora $T(n) = \Theta(n^k \log(n))$
 3. se $k > \log_b a$, allora $T(n) = \Theta(n^k)$
 - nel caso 3 la condizione aggiuntiva di regolarità è automaticamente verificata

Condizione di regolarità

- Sia $T(n) = T(n/2) + n (2 - \cos n)$, quindi $a=1$, $b=2$
- $f(n) = n(2 - \cos n) = \Omega(n) > n^{\log_b a} = \Theta(1)$
- Siamo nel caso 3? No! La regolarità richiede che:
 - $n/2 (2 - \cos(n/2)) \leq c n (2 - \cos n)$, per n grande e $c < 1$
 - Ma le curve $f(n/2)$ e $f(n)$ oscillano e si intersecano sempre, quindi a maggior ragione la relazione non vale moltiplicando $f(n)$ per $c < 1$



Ricorrenze lineari di ordine costante

- Data la ricorrenza (in cui i coefficienti a_i sono interi ≥ 0)

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n \leq m \leq h \\ \sum_{1 \leq i \leq h} a_i T(n-i) + cn^k & \text{se } n > m \end{cases}$$

- in cui poniamo $a = \sum_{1 \leq i \leq h} a_i$
- allora abbiamo che:
 - se $a = 1$, allora $T(n) = O(n^{k+1})$
 - se $a \geq 2$, allora $T(n) = O(a^n n^k)$
- Per esempio, data la ricorrenza $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$, otteniamo che $T(n) = O(n^2)$
 - questa è la ricorrenza che otterremmo con una versione ricorsiva di INSERTION-SORT

Esercizio

Trovare un limite superiore per la seguente ricorrenza:

$$T(n) = n^2 + T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lfloor n/4 \rfloor) + T(\lfloor n/8 \rfloor) + \dots + T(\lfloor n/2^k \rfloor),$$

dove k è una costante intera maggiore di 1.

Per semplicità, considerare il caso in cui n è una potenza di 2.

Esercizio

Si fornisca un limite asintotico superiore per l'espressione

$T(n)$ definita dalla seguente equazione di ricorrenza:

$$T(n) = T(n/2) + n(2 + \sin(n\pi/2)).$$

Esercizio

Si calcoli la complessità temporale asintotica del seguente programma in funzione del valore n in input:

```
myfun (n)
1  if n ≤ 1
2    return n
3  res := 0
4  for i := 1 to 3
5    res := res + myfun (n/4)
6  j := 1
7  while j ≤ n*n
8    res := res / 2
9    j := j*2
10 return res
```


Grafi (richiamo)

- Un *grafo* è una coppia (V, E) in cui V è un insieme finito di *nodi* (detti anche *vertici*), e $E \subseteq V \times V$ è una relazione binaria su V che rappresenta gli *archi* del grafo
 - se u e v sono nodi del grafo, la coppia (u, v) è un arco, ed è rappresentata graficamente come:



- in questo caso l'arco è *orientato*, in quanto c'è un ordine tra i vertici (prima u , poi v)
- se non c'è un ordine tra i nodi (che quindi sono solo un insieme, $\{u, v\}$) allora diciamo che l'arco è *non orientato*:

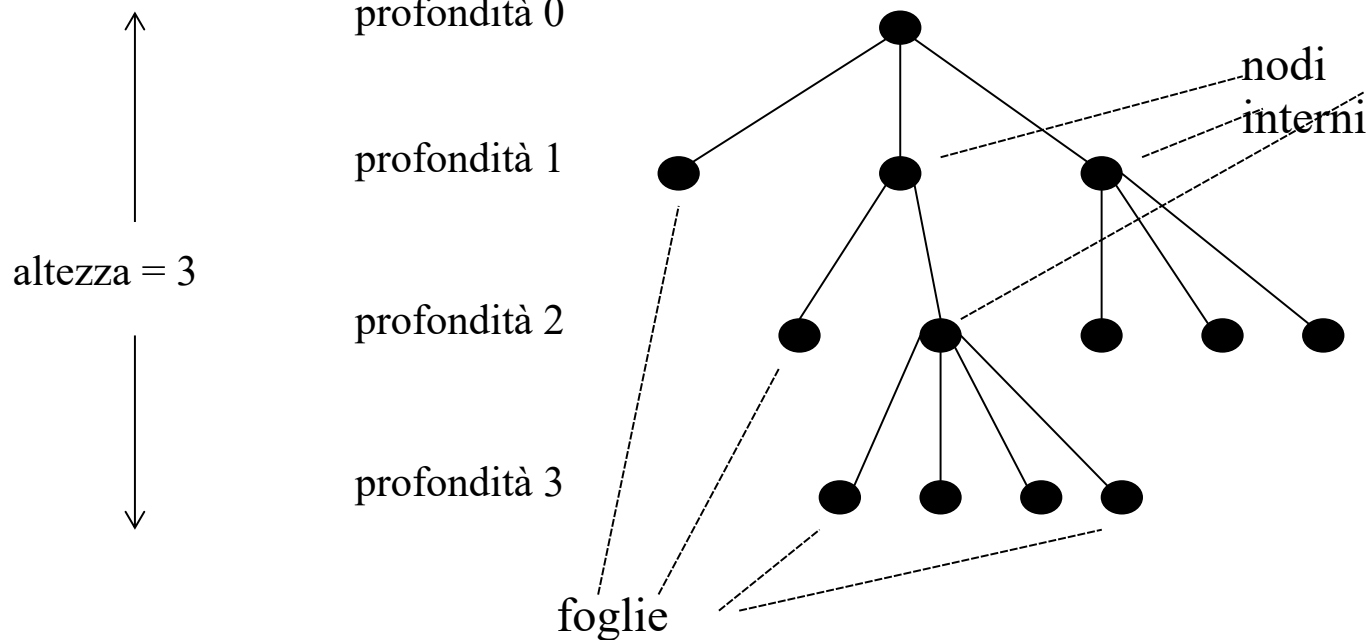


Tipi di grafo

- Un grafo è *orientato* se i suoi archi lo sono, *non orientato* altrimenti
- Un *cammino* è una sequenza di nodi $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ tali che tra ogni coppia di nodi della sequenza (v_i, v_{i+1}) c'è un arco
 - i nodi v_0, \dots, v_n appartengono al cammino
 - la lunghezza del cammino è data da n (numero di vertici -1)
- In un grafo non orientato, il cammino forma un ciclo se $v_0 = v_n$
 - Un grafo che non ha cicli è *aciclico*
- Un grafo non orientato è *connesso* se tra ogni coppia di vertici esiste un cammino

Alberi (richiamo)

- Un *albero* è un grafo connesso, aciclico, non orientato
 - un albero è *radicato* se un nodo viene indicato come la *radice*



- Ogni nodo dell'albero è raggiungibile dalla radice tramite un cammino (che è unico, in quanto il grafo è aciclico).
- Chiamiamo *foglie* gli ultimi nodi dei cammini dalla radice.

Nodi

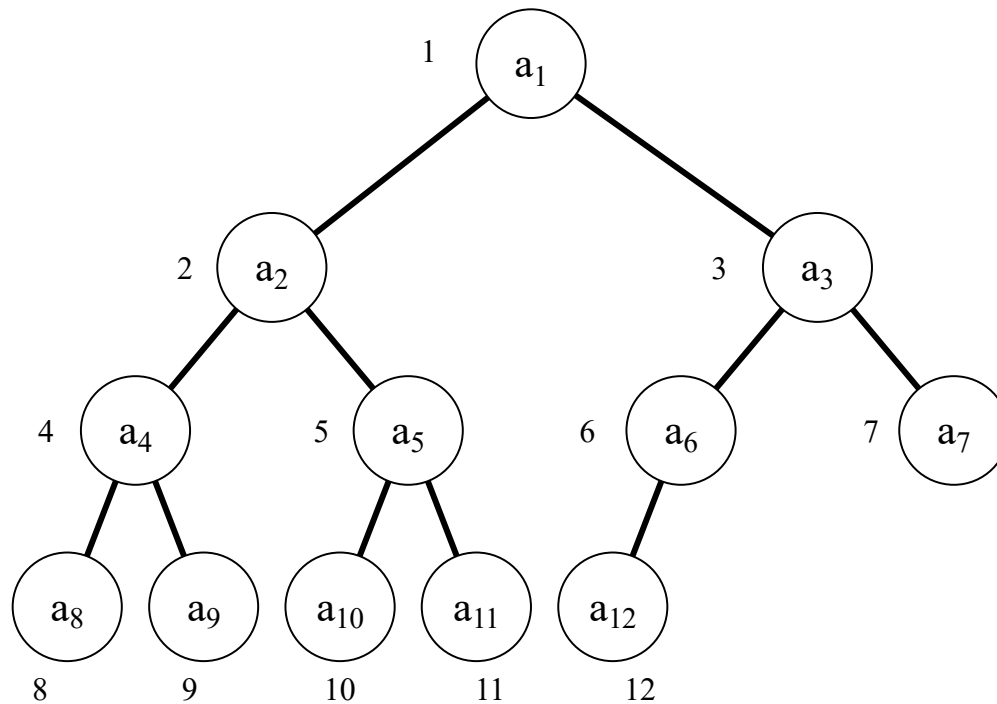
- Ogni nodo ha un *padre* (a parte la radice) e uno o più *figli* (a parte le foglie).
- Chiamiamo:
 - *nodi interni*: tutti i nodi dei cammini tra la radice e le foglie
 - *profondità* (di un nodo N): la distanza di N dalla radice
 - *altezza* (dell'albero): la distanza massima tra la radice e una foglia
 - *antenato* (di un nodo N): ogni nodo che precede N sul cammino dalla radice a N
 - *padre* (di un nodo N): il nodo che immediatamente precede N lungo il cammino dalla radice a N
 - *figlio* (di un nodo N): ogni nodo di cui N è padre
 - *fratelli* (di un nodo N): i nodi che hanno lo stesso padre di N
- Un albero è *binario* se ogni nodo ha *al più* 2 figli

HEAPSORT

- MERGE-SORT è efficiente dal punto di vista del tempo di esecuzione, ma non è ottimale dal punto di vista dell'uso della memoria
 - ogni MERGE richiede di allocare 2 array, di lunghezza $\Theta(n)$
 - usa una quantità di memoria aggiuntiva rispetto all'array da ordinare che non è costante, cioè non ordina *sul posto*
- HEAPSORT, invece, non solo è efficiente (ordina in tempo $\Theta(n \log(n))$), ma ordina sul posto
- L'idea alla base di HEAPSORT è che un array può essere visto come un albero binario:
 - $A[1]$ è la radice
 - per ogni elemento $A[i]$, $A[2i]$ e $A[2i+1]$ sono i suoi figli, e $A[\lfloor i/2 \rfloor]$ è il padre

Esempio

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}

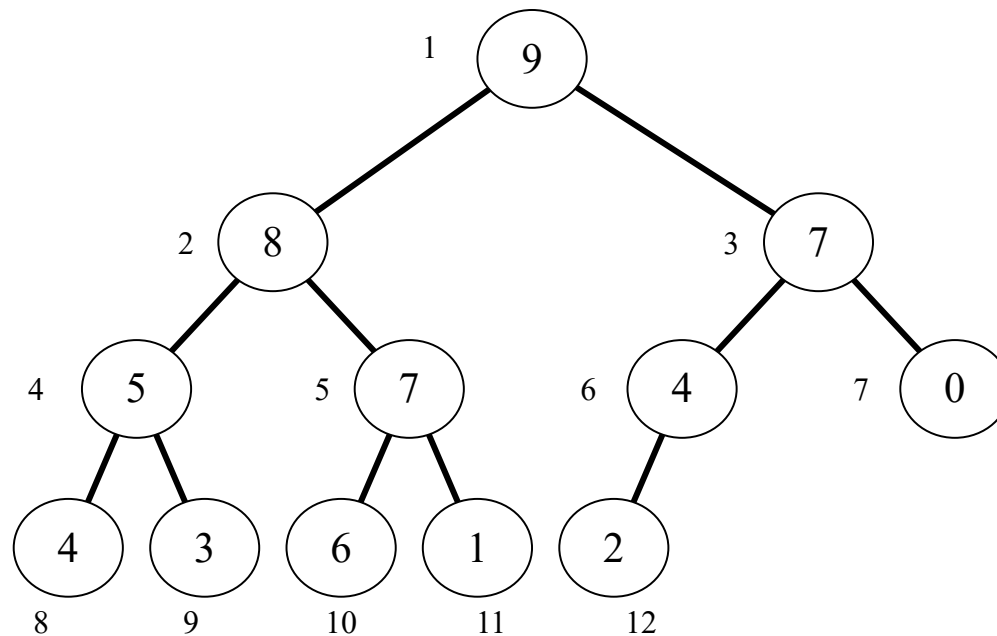


Gli heap (mucchi)

- Uno **heap binario** è un albero binario *quasi completo*
 - quasi completo = tutti i livelli sono completi, tranne al più l'ultimo, che potrebbe essere completo solo fino a un certo punto da sinistra
 - l'albero binario che deriva dall'interpretazione di un array come albero è quasi completo
- Un max-heap è uno heap tale che, per ogni nodo x dell'albero, il valore contenuto nel padre di x è \geq del contenuto di x
 - usando la corrispondenza albero-heap, questo vuole dire che $A[\lfloor i/2 \rfloor] \geq A[i]$

Esempio di max-heap

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
9	8	7	5	7	4	0	4	3	6	1	2



- Si noti che in un max-heap l'elemento massimo è nella radice
 - dove è il minimo?

Alcune operazioni sugli heap

- Operazioni di base:

PARENT (i)

1 **return** $\lfloor i/2 \rfloor$

LEFT (i)

1 **return** $2 * i$

RIGHT (i)

1 **return** $2 * i + 1$

- Quindi, in un max-heap abbiamo che $A[\text{PARENT}(i)] \geq A[i]$
 - esistono anche i min-heap, per i quali $A[\text{PARENT}(i)] \leq A[i]$
- Per realizzare l'ordinamento usiamo i max-heap
- Ogni array A che rappresenta uno heap ha 2 attributi:
 - $A.length$, che rappresenta il numero totale di elementi dell'array
 - $A.heap-size$, che rappresenta il numero di elementi dello heap
 - $A.heap-size \leq A.length$, e solo gli elementi fino a $A.heap-size$ hanno la proprietà dello heap
 - però l'array potrebbe contenere elementi dopo l'indice $A.heap-size$, se $A.heap-size < A.length$

Algoritmi di supporto

- Un algoritmo che, dato un elemento di un array tale che i suoi figli sinistro e destro sono dei max-heap, ma in cui $A[i]$ (la radice del sottoalbero) potrebbe essere $<$ dei suoi figli, modifica l'array in modo che tutto l'albero di radice $A[i]$ sia un max-heap

```
MAX-HEAPIFY( $A, i$ )
1   $l := \text{LEFT}(i)$ 
2   $r := \text{RIGHT}(i)$ 
3  if  $l \leq A.\text{heap-size}$  and  $A[l] > A[i]$ 
4     $max := l$ 
5  else  $max := i$ 
6  if  $r \leq A.\text{heap-size}$  and  $A[r] > A[max]$ 
7     $max := r$ 
8  if  $max \neq i$  then
9    swap  $A[i] \leftrightarrow A[max]$ 
10  MAX-HEAPIFY( $A, max$ )
```

Complessità di MAX-HEAPIFY

- $T_{\text{MAX-HEAPIFY}} = O(h)$, dove h è l'altezza dell'albero, che è $O(\log(n))$, poiché l'albero è quasi completo
 - quindi, $T_{\text{MAX-HEAPIFY}} = O(\log(n))$
- Questo si sarebbe anche potuto mostrare usando il teorema dell'esperto per la seguente ricorrenza, che rappresenta il tempo di esecuzione di MAX-HEAPIFY nel caso pessimo:
 $T(n) = T(2n/3) + \Theta(1)$
 - nel caso pessimo l'ultimo livello dell'albero è esattamente pieno a metà, e l'algoritmo viene applicato ricorsivamente sul sottoalbero sinistro, che contiene $\leq 2n/3$ nodi, detto n il numero di nodi totali

Da array a max-heap

- Costruiamo il max-heap bottom-up, dalle foglie, fino alla radice
 - osservazione fondamentale: tutti gli elementi oltre l'indice $A.length/2$ sono delle foglie, gli altri sono dei nodi interni
 - i sottoalberi fatti di solo foglie sono, presi singolarmente, già degli heap, in quanto sono fatti ciascuno di un unico elemento

```
BUILD-MAX-HEAP(A)
1  A.heap-size := A.length
2  for i := A.length/2 downto 1
3      MAX-HEAPIFY(A, i)
```

- Costo di BUILD-MAX-HEAP?
 - ad occhio, ogni chiamata a MAX-HEAPIFY costa $O(\log(n))$, e vengono fatte $O(n)$ chiamate (con n che è $A.length$), quindi il costo è $O(n \log(n))$
 - ma in realtà questo limite non è stretto...

Complessità di BUILD-MAX-HEAP

- Osserviamo che:
 - l'altezza di un albero quasi completo di n nodi è $\lfloor \log_2(n) \rfloor$
 - se definiamo come “altezza di un nodo di uno heap” la lunghezza del cammino più lungo che porta ad una foglia, il costo di MAX-HEAPIFY invocato su un nodo di altezza h è $O(h)$
 - il numero massimo di nodi di altezza h di uno heap è $\lceil n/2^{h+1} \rceil$
- Quindi MAX-HEAPIFY viene invocato $\lceil n/2^{h+1} \rceil$ volte ad ogni altezza h , quindi il costo di BUILD-MAX-HEAP è

$$\sum_{h=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil O(h) = O \left(n \sum_{h=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \frac{h}{2^h} \right)$$

- cioè $O(n)$, in quanto è noto che
$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h} = \frac{1/2}{(1 - 1/2)^2} = 2$$

HEAPSORT

- Possiamo a questo punto scrivere l'algoritmo di HEAPSORT:

```
HEAPSORT (A)
1  BUILD-MAX-HEAP (A)
2  for  $i := A.length$  downto 2
3    swap  $A[1] \leftrightarrow A[i]$ 
4     $A.heap-size := A.heap-size - 1$ 
5    MAX-HEAPIFY ( $A, 1$ )
```

- A ogni ciclo piazziamo l'elemento più grande (che è il primo dell'array, in quanto questo è un max-heap) in fondo alla parte di array ancora da ordinare (che è quella corrispondente allo heap)
 - fatto ciò, lo heap si decrementa di 1, e si ricostruisce il max-heap mettendo come radice l'ultima foglia a destra dell'ultimo livello, e invocando MAX-HEAPIFY
- La complessità di HEAPSORT è $O(n \log(n))$, in quanto
 - BUILD-MAX-HEAP ha costo $O(n)$
 - MAX-HEAPIFY è invocato $n-1$ volte, e ogni sua chiamata ha costo $O(\log(n))$

HEAPSORT: esempio

$A = [4, 1, 3, 2, 16, 9, 10, 14, 8, 7]$

heap A ad ogni passo dopo MAX-HEAPIFY:

A: [16, 14, 10, 8, 7, 9, 3, 2, 4, 1] (max-heap)

A: [14, 8, 10, 4, 7, 9, 3, 2, 1, 16]

A: [10, 8, 9, 4, 7, 1, 3, 2, 14, 16]

A: [9, 8, 3, 4, 7, 1, 2, 10, 14, 16]

A: [8, 7, 3, 4, 2, 1, 9, 10, 14, 16]

A: [7, 4, 3, 1, 2, 8, 9, 10, 14, 16]

A: [4, 2, 3, 1, 7, 8, 9, 10, 14, 16]

A: [3, 2, 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 16]

A: [2, 1, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 16]

A: [1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 16]

```
BUILD-MAX-HEAP(A)
```

```
1 A.heap-size := A.length  
2 for i := A.length/2 downto 1  
3   MAX-HEAPIFY(A, i)
```

```
HEAPSORT(A)
```

```
1 BUILD-MAX-HEAP(A)  
2 for i := A.length downto 2  
3   swap A[1] ↔ A[i]  
4   A.heap-size := A.heap-size - 1  
5   MAX-HEAPIFY(A, 1)
```

```
MAX-HEAPIFY(A, i)
```

```
1 l := LEFT(i)  
2 r := RIGHT(i)  
3 if l ≤ A.heap-size and A[l] > A[i]  
4   max := l  
5 else max := i  
6 if r ≤ A.heap-size and A[r] > A[max]  
7   max := r  
8 if max ≠ i then  
9   swap A[i] ↔ A[max]  
10  MAX-HEAPIFY(A, max)
```

[4,1,3,2,16,9,10,14,8,7]

HEAPSORT(A)

BUILD-MAX-HEAP(A)

MAX-HEAPIFY(A,5)

QUICKSORT

- QUICKSORT è un algoritmo in stile *divide et impera*
 - ordina *sul posto*
- Nel caso pessimo (vedremo) ha complessità $\Theta(n^2)$
- Però in media funziona molto bene (in media ha complessità $\Theta(n \log(n))$)
 - inoltre ha ottime costanti
- Idea di base del QUICKSORT: dato un sottoarray $A[p..r]$ da ordinare:
 - (dividi) riorganizza in $A[p..r]$ 2 sottoarray $A[p..q-1]$ e $A[q+1..r]$ tali che tutti gli elementi di $A[p..q-1]$ siano $\leq A[q]$ e tutti gli elementi di $A[q+1..r]$ siano $\geq A[q]$
 - (domina) ordina i sottoarray $A[p..q-1]$ e $A[q+1..r]$ riutilizzando QUICKSORT
 - (combina) nulla! L'array $A[p..r]$ è già ordinato

Codice di QUICKSORT

```
QUICKSORT(A, p, r)
1  if p < r
2    q := PARTITION(A, p, r)
3    QUICKSORT(A, p, q-1)
4    QUICKSORT(A, q+1, r)
```

- Per ordinare un array A:
QUICKSORT(A, 1, A.length)

PARTITION

- La cosa difficile di QUICKSORT è partizionare l'array in 2 parti:

```
PARTITION(A, p, r)
1  x := A[r]
2  i := p - 1
3  for j := p to r - 1
4      if A[j] ≤ x
5          i := i + 1
6          swap A[i] ↔ A[j]
7  swap A[i+1] ↔ A[r]
8  return i + 1
```

- l'elemento x (cioè $A[r]$ in questa implementazione) è il *pivot*
- $A[p..i]$: partizione con elementi $\leq x$
- $A[i+1..j-1]$: partizione con elementi $> x$
- $A[j..r-1]$: partizione con elementi da esaminare
- Complessità di PARTITION: $\Theta(n)$, con $n = r - p + 1$

```
QUICKSORT (A, p, r)
1  if p < r
2    q := PARTITION (A, p, r)
3    QUICKSORT (A, p, q-1)
4    QUICKSORT (A, q+1, r)
```

```
PARTITION (A, p, r)
1  x := A[r]
2  i := p - 1
3  for j := p to r - 1
4    if A[j] ≤ x
5      i := i + 1
6      swap A[i] ↔ A[j]
7  swap A[i+1] ↔ A[r]
8  return i + 1
```

Quicksort su 99, 4, 88, 7, 5, -3, 1, 34, 11

Esempio di funzionamento

- Quicksort su 99, 4, 88, 7, 5, -3, 1, 34, 11

```
partition: [99, 4, 88, 7, 5, -3, 1, 34, 11] p: 1, q: 6, r: 9
partition: [4, 7, 5, -3, 1, 11, 88, 34, 99] p: 1, q: 2, r: 5
partition: [-3, 1, 5, 4, 7, 11, 88, 34, 99] p: 3, q: 5, r: 5
partition: [-3, 1, 5, 4, 7, 11, 88, 34, 99] p: 3, q: 3, r: 4
partition: [-3, 1, 4, 5, 7, 11, 88, 34, 99] p: 7, q: 9, r: 9
partition: [-3, 1, 4, 5, 7, 11, 88, 34, 99] p: 7, q: 7, r: 8
result:    [-3, 1, 4, 5, 7, 11, 34, 88, 99]
```

Complessità di QUICKSORT

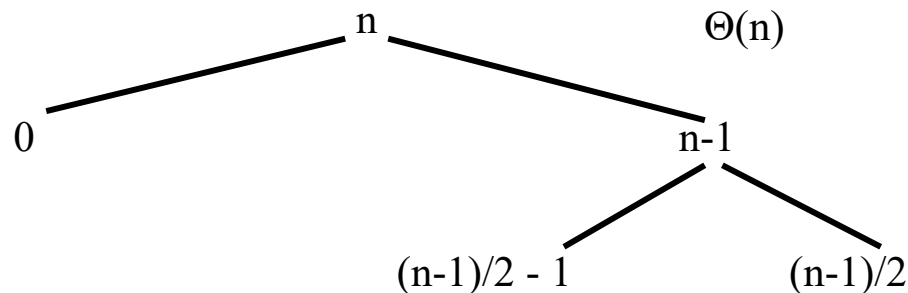
- Il tempo di esecuzione di QUICKSORT dipende da come viene partizionato l'array
- Se ogni volta uno dei 2 sottoarray è vuoto e l'altro contiene $n-1$ elementi si ha il caso pessimo
 - la ricorrenza in questo caso è:
 $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$
 - abbiamo visto che la soluzione di questa ricorrenza è $O(n^2)$
 - si può anche dimostrare (per esempio per sostituzione) che è anche $\Theta(n^2)$
 - un caso in cui si ha sempre questa situazione completamente sbilanciata è quando l'array è già ordinato
- Nel caso ottimo, invece, i 2 array in cui il problema viene suddiviso hanno esattamente la stessa dimensione $n/2$
 - la ricorrenza in questo caso è:
 $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$
 - è la stessa ricorrenza di MERGE-SORT, ed ha quindi la stessa soluzione $\Theta(n \log(n))$
- Notiamo che se la proporzione di divisione, invece che essere $n/2$ ed $n/2$, fosse $n/10$ e $9n/10$, comunque la complessità sarebbe $\Theta(n \log(n))$
 - solo, la costante “nascosta” dalla notazione Θ sarebbe più grande
 - abbiamo già visto qualcosa di molto simile per la suddivisione $n/3$ e $2n/3$

QUICKSORT nel caso medio (intuizione)

- In media ci va un po' bene ed un po' male
 - bene = partizione ben bilanciata
 - male = partizione molto sbilanciata
- Qualche semplificazione:
 - ci va una volta bene ed una volta male
 - quando va bene => ottimo
 - $n/2$ e $n/2$
 - quando va male => pessimo
 - $n-1$ e 0

Albero di ricorsione per il caso medio

- Albero di ricorsione in questo caso (ogni divisione costa n):



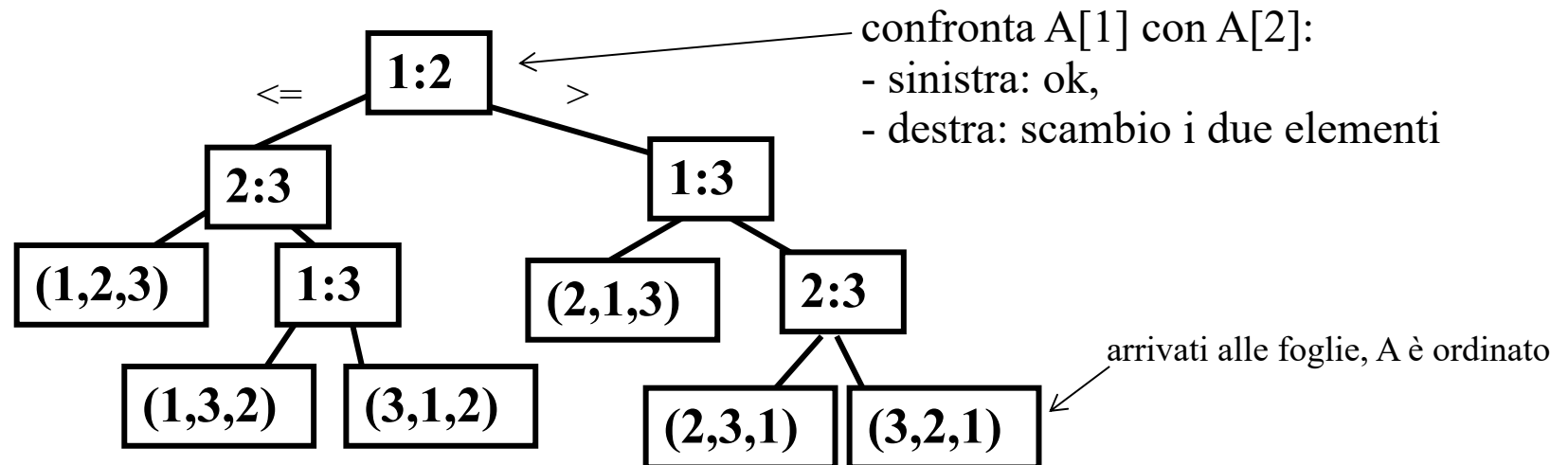
- costo di una divisione “cattiva” + una divisione “buona” = $\Theta(n)$
 - è lo stesso costo di una singola divisione “buona”
- dopo una coppia “divisione cattiva” – “divisione buona” il risultato è una divisione “buona”
- quindi alla fine il costo di una coppia “cattiva – buona” è lo stesso di una divisione “buona”, ed il costo di una catena di tali divisioni è la stessa...
- ... quindi $\Theta(n \log(n))$
 - le costanti moltiplicative peggiorano un po', ma l'ordine di grandezza non cambia!

Limite inferiore per l'ordinamento

- Quanto veloce può andare un algoritmo di ordinamento? Possiamo far meglio di $n \lg n$?
- Partiamo col concetto di *ordinamento per confronto*:
 - supponiamo di poter ordinare esclusivamente confrontando il valore di coppie di elementi (quello che abbiamo sempre fatto)
- Limiti inferiori: $\Omega(n)$ – per forza dobbiamo leggere gli elementi!
- Per ora tutti gli ordinamenti che abbiamo visto sono $\Omega(n \lg n)$

Conteggio dei confronti

- Otteniamo un albero di decisione:



- quante foglie ci sono? Tutte le permutazioni sono $n!$, però la stessa permutazione potrebbe apparire più volte... ergo: $\geq n!$

Altezza dell'albero di decisione

- Posso costruire, dato un n , un albero simile per qualsiasi ordinamento per confronto
 - si confrontano x e y
 - solo due possibilità: $x \leq y$ (siamo già a posto) oppure $x > y$
- Qual è la lunghezza massima dalla radice a una foglia?
- Dipende dall'algoritmo di ordinamento:
 - INSERTION-SORT: $\Theta(n^2)$
 - MERGE-SORT: $\Theta(n \lg n)$
 - ...
- Sfrutto il seguente Lemma:
L1: Ogni albero binario di altezza h ha un numero di foglie al più 2^h
- (dim banale - per induzione)

Limite inferiore dimostrato

Teorema:

Ogni albero di decisione di ordinamento di n elementi ha altezza $\Omega(n \lg n)$.

Dim:

Sia f il numero di foglie. Abbiamo visto prima che $f \geq n!$

Per L1: $n! \leq f \leq 2^h$, cioè $2^h \geq n!$

Quindi: $h \geq \lg(n!) \geq \lg((n/2)^{n/2}) = n/2 \lg(n/2) = \Omega(n \lg n)$ c.v.d.

Si anche può mostrare mediante l'approssimazione di Stirling:

$$n! \geq e (n/e)^n > (n/e)^n$$

Ne segue:

$$h \geq \lg((n/e)^n) = n \lg(n/e) = n \lg n - n \lg e = \Omega(n \lg n)$$

COUNTING-SORT

- Ipotesi fondamentale: i valori da ordinare sono tutti numeri naturali compresi tra 0 e una certa costante k
- Idea di base: se nell'array ci sono m_e valori più piccoli di un certo elemento e (il cui valore è v_e) nell'array ordinato l'elemento e sarà in posizione m_e+1
 - quindi, basta contare quante "copie" dello stesso valore v_e sono contenute nell'array
 - usiamo questa informazione per determinare, per ogni elemento e (con valore v_e tale che $0 \leq v_e \leq k$), quanti elementi ci sono più piccoli di e
 - dobbiamo anche tenere conto del fatto che nell'array ci possono essere elementi ripetuti
 - es. [2, 7, 2, 5, 1, 1, 9]

Pseudocodice di COUNTING-SORT

- parametri: A è l'array di input (disordinato), B conterrà gli elementi ordinati (cioè è l'output), e k è il massimo tra i valori di A
 - A e B devono essere della stessa lunghezza n

```
COUNTING-SORT ( $A, B, k$ )
1  for  $i := 0$  to  $k$ 
2     $C[i] := 0$ 
3  for  $j := 1$  to  $A.length$ 
4     $C[A[j]] := C[A[j]] + 1$ 
5  // $C[i]$  ora contiene il numero di elementi uguali a  $i$ 
6  for  $i := 1$  to  $k$ 
7     $C[i] := C[i] + C[i - 1]$ 
8  // $C[i]$  ora contiene il numero di elementi  $\leq i$ 
9  for  $j := A.length$  downto 1
10    $B[C[A[j]]] := A[j]$ 
11    $C[A[j]] := C[A[j]] - 1$ 
```

Esempio di COUNTING-SORT

- Se $A = [2, 5, 3, 0, 2, 3, 0, 3]$
 - $A.length = 8$
 - B deve avere lunghezza 8
- Se eseguiamo COUNTING-SORT($A, B, 5$)
 - prima di eseguire la linea 5 (cioè alla fine del loop 3-4)
 $C = [2, 0, 2, 3, 0, 1]$ Nota: il primo indice di C è 0, non 1
 - prima di eseguire la linea 8, $C = [2, 2, 4, 7, 7, 8]$
 - dopo le prime 3 iterazioni del ciclo 9-11 abbiamo
 1. $B = [_, _, _, _, _, 3, _]$, $C = [2, 2, 4, 6, 7, 8]$
 2. $B = [_, 0, _, _, _, 3, _]$, $C = [1, 2, 4, 6, 7, 8]$
 3. $B = [_, 0, _, _, 3, 3, _]$, $C = [1, 2, 4, 5, 7, 8]$
 - alla fine dell'algoritmo
 $B = [0, 0, 2, 2, 3, 3, 3, 5]$, $C = [0, 2, 2, 4, 7, 7]$

Complessità di COUNTING-SORT

- La complessità di COUNTING-SORT è data dai 4 cicli **for**:
 - il ciclo **for** delle linee 1-2 ha complessità $\Theta(k)$
 - il ciclo **for** delle linee 3-4 ha complessità $\Theta(n)$
 - il ciclo **for** delle linee 6-7 ha complessità $\Theta(k)$
 - il ciclo **for** delle linee 9-11 ha complessità $\Theta(n)$
- La complessità globale è $\Theta(n + k)$
- Se k è $O(n)$, allora il tempo di esecuzione è $O(n)$
 - lineare!
- COUNTING-SORT è "più veloce" (cioè ha complessità inferiore) di MERGE-SORT e HEAPSORT (se k è $O(n)$) perché fa delle *assunzioni* sulla distribuzione dei valori da ordinare (assume che siano tutti $\leq k$)
 - Sfrutta l'assunzione: è veloce se k è $O(n)$, altrimenti ha complessità maggiore (anche di molto) di MERGE-SORT e HEAPSORT

Osservazioni su COUNTING-SORT

- Si può ottenere una versione più semplice dell'algoritmo senza usare l'array B (come?)
- La versione che abbiamo appena visto è però *stabile*
- Questo vuol dire che, se nell'array da ordinare ci sono più elementi con lo stesso valore, questi appariranno nell'array ordinato mantenendo il loro ordine relativo iniziale
- Es: supponiamo che in A ci siano due 35, il primo lo chiamiamo 35_a e il secondo 35_b . Dopo l'ordinamento 35_a apparirà sicuramente prima di 35_b .
- Questa proprietà non è particolarmente interessante se ci limitiamo ad ordinare numeri. Lo diviene se stiamo ordinando dei *dati complessi* (oggetti), utilizzando un valore per es. dei loro attributi come *chiave*.