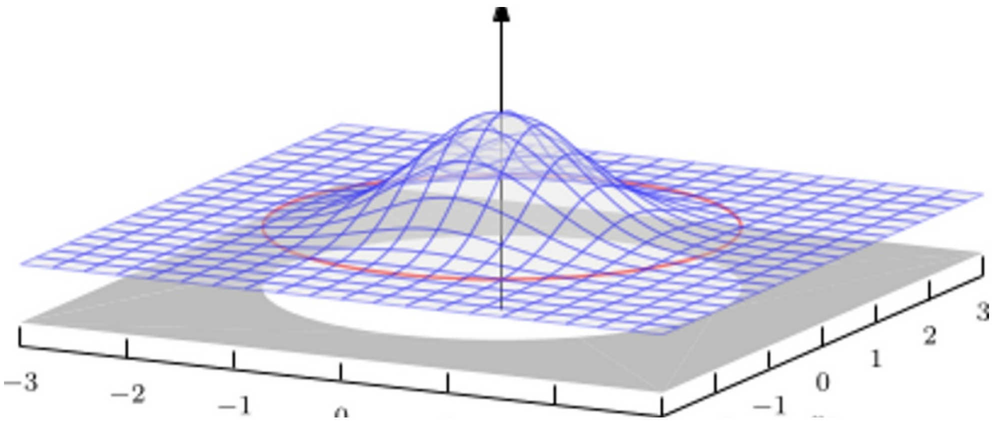


多元高斯分布完全解析

Linghan Zhang
中国科学院大学 计算机技术硕士

摘要

高斯分布被誉为"上帝的分布", 其强悍的建模能力和优美的数学性质使得高斯分布在现实中得到广泛的应用. 由中心极限定理 [1] 我们知道, 大量独立同分布的随机变量的均值在做适当标准化之后会依分布收敛于高斯分布, 这使得高斯分布具有普适性的建模能力. 数学上, 当使用高斯分布对贝叶斯推断的似然和先验进行建模时, 得到的后验同样为高斯分布, 即其具有共轭先验性质. 在随机过程理论中, 多元高斯分布则是高斯过程的理论基础. 这种种场景使得高斯分布颇受重视, 并发展出一套成熟完整的理论体系. 本文主要介绍多元高斯分布的由来与其背后的几何原理, 分为如下章节:

1. 阐述多元标准高斯分布;
2. 由多元标准高斯分布导出多元高斯分布;
3. 阐述多元高斯分布的几何意义;
4. 总结.

关键词: 多元高斯分布, 高斯过程, 概率论与数理统计, 机器学习

校对: @叶定南, @Towser, @Syous

编者按: 评论区中, @Towser 和 @Syous 两位大神对多元高斯分布有非常深刻的见解和讨论.

多元标准高斯分布

熟悉一元高斯分布的同学都知道, 若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则有如下的概率密度函数

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \qquad (1)$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx \qquad (2)$$

而如果我们对随机变量 X 进行标准化, 用 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ 对(1)进行换元, 继而有

$$
\begin{aligned}
\because x(z) &= z \cdot \sigma + \mu \\
\therefore p(x(z)) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(z)^2} \\
1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x(z))dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(z)^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(z)^2} dz \qquad (3)
\end{aligned}
$$

此时我们说随机变量 $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ 服从一元标准高斯分布, 其均值 $\mu = 0$, 方差 $\sigma^2 = 1$, 其概率密度函数为

$$
p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(z)^2} \qquad (4)
$$

需要注意的是, 为了保证概率密度函数在 R 上的积分为1, 换元时需要求 $dx = \sigma \cdot dz$, 从而得到(3).

随机变量 X 标准化的过程, 实际上的消除量纲影响和分布差异的过程. 通过将随机变量的值减去其均值再除以标准差, 使得随机变量与其均值的差距可以用若干个标准差来衡量, 从而实现了不同随机变量与其对应均值的差距, 可以以一种相对的距离来进行比较.

一元标准高斯分布与我们讨论多元标准高斯分布有什么关系呢? 事实上, 多元标准高斯分布的概率密度函数正是从(4)导出的. 假设我们有随机向量 $\vec{Z} = [Z_1, \cdots, Z_n]^\top$, 其中 $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)(i = 1, \cdots, n)$ 且 $Z_i, Z_j (i, j = 1, \cdots, n \wedge i \neq j)$ 彼此独立, 即随机向量中的每个随机变量 Z_i 都服从标准高斯分布且两两彼此独立. 则由(4)与独立随机变量概率密度函数之间的关系, 我们可得随机向量 $\vec{Z} = [Z_1, \cdots, Z_n]^\top$ 的联合概率密度函数为

$$
\begin{aligned}
p(z_1, \cdots, z_n) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(z_i)^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(Z^\top Z)} \\
1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} p(z_1, \cdots, z_n)\, dz_1 \cdots dz_n \qquad (5)
\end{aligned}
$$

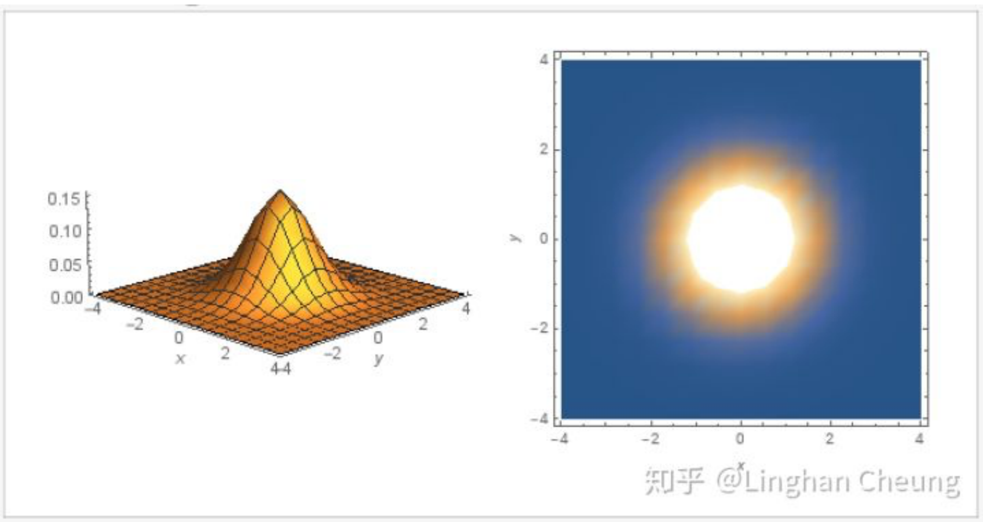
我们称随机向量 $\vec{Z} \sim \mathcal{N}(\vec{0}, \mathbf{I})$, 即随机向量服从均值为零向量, 协方差矩阵为单位矩阵的高斯分布. 在这里, 随机向量 $\vec{Z}$ 的协方差矩阵是 $Conv(Z_i, Z_j), i, j = 1, \cdots, n$ 组成的矩阵, 即

$$
\begin{aligned}
[Conv(Z_i, Z_j)]_{n \times n} &= \mathbf{E}[(Z - \vec{\mu})(Z - \vec{\mu})^\top] \\
&= \mathbf{I} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

由于随机向量 $\vec{Z} \sim \mathcal{N}(\vec{0}, \mathbf{I})$, 所以其协方差矩阵的对角线元素为1, 其余元素为0. 如果我们取常数 $c = p(z_1, \cdots, z_n)$, 则可得函数 $p(z_1, \cdots, z_n)$ 的等高线为 $c' = Z^\top Z$, 当随机向量 $\vec{Z}$ 为二维向量时, 我们有

$$
c' = Z^\top \cdot Z = (z_1 - 0)^2 + (z_2 - 0)^2 \qquad (7)
$$

由(7)我们可知, 其等高线为以(0, 0)为圆心的同心圆.



二元标准高斯分布概率密度函数图

多元高斯分布

由上一节我们知道, 当随机向量 $\vec{Z} \sim \mathcal{N}(\vec{0}, \mathbf{I})$ 时, 其每个随机变量 $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)(i=1,\cdots,n)$ 彼此独立, 我们可通过(4)与独立随机变量概率密度函数之间的关系得出其联合概率密度函数(5). 那对于普通的随机向量 $\vec{X} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$, 即其每个随机变量 $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)(i=1,\cdots,n)$ 且 $X_i, X_j(i,j=1,\cdots,n)$ 彼此不独立的情况下, 我们该如何求随机向量 $\vec{X}$ 的联合概率密度函数呢? 一个很自然的想法是, **如果我们能通过线性变换, 使得随机向量 $\vec{X} = [X_1, \cdots, X_n]^\top$ 中的每个随机变量彼此独立, 则我们也可以通过独立随机变量概率密度函数之间的关系求出其联合概率密度函数**. 事实上, 我们有如下定理可完成这个工作 [2]

> 定理1: 若存在随机向量 $\vec{X} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$, 其中 $\vec{\mu} \in R^n$ 为均值向量, $\Sigma \in S_{++}^{n\times n}$ 半正定实对称矩阵为 $\vec{X}$ 的协方差矩阵, 则存在满秩矩阵 $B \in R^{n\times n}$, 使得 $\vec{Z} = B^{-1}(\vec{X} - \vec{\mu})$, 而 $\vec{Z} \sim \mathcal{N}(\vec{0}, \mathbf{I})$.

有了定理1, 我们就可以对随机向量 $\vec{X}$ 做相应的线性变换, 使其随机变量在线性变换后彼此独立, 从而求出其联合概率密度函数, 具体地

$$
\begin{aligned}
\because \quad & \vec{Z} = B^{-1}(\vec{X} - \vec{\mu}), \vec{Z} \sim \mathcal{N}(\vec{0}, I) & (8) \\
\therefore \quad & p(z_1, \cdots, z_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(Z^\top Z)} \\
& p(z_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot[(B^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu}))^\top (B^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu}))]} \\
& \qquad = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot[(\vec{X}-\vec{\mu})^\top (BB^\top)^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu})]} \\
\therefore \quad & 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} p(z_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots)\, dz_1 \cdots dz_n \\
& \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot[(\vec{X}-\vec{\mu})^\top (BB^\top)^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu})]}\, dz_1 \cdots dz_n & (9)
\end{aligned}
$$

由多元函数换元变换公式, 我们还需要求出雅可比行列式 $J(\vec{Z} \to \vec{X})$, 由(8)可得

$$
J(\vec{Z} \to \vec{X}) = \left|B^{-1}\right| = |B|^{-1} = |B|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left|B^\top\right|^{-\frac{1}{2}} = \left|BB^\top\right|^{-\frac{1}{2}} \qquad (10)
$$

由(9)(10), 我们可进一步得

$$
1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \left|BB^\top\right|^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot[(\vec{X}-\vec{\mu})^\top (BB^\top)^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu})]}\, dx_1 \cdots dx_n \quad (11)
$$

我们得到随机向量 $\vec{X} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$ 的联合概率密度函数为

$$p(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|BB^\top|^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot[(\vec{X}-\vec{\mu})^\top(BB^\top)^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu})]} \tag{12}$$

在(12)中, 随机向量 $\vec{X}$ 的协方差矩阵还未得到体现, 我们可通过线性变换(8)做进一步处理

$$\begin{aligned}\Sigma &= \mathbf{E}[(\vec{X}-\vec{\mu})(\vec{X}-\vec{\mu})^\top]\\ &= \mathbf{E}[(B\vec{Z}-\vec{0})(B\vec{Z}-\vec{0})^\top]\\ &= \mathbf{Conv}(B\vec{Z},B\vec{Z})\\ &= B\mathbf{Conv}(\vec{Z},\vec{Z})B^\top\\ &= BB^\top\end{aligned} \tag{13}$$

我们发现, (12)中 $BB^\top$ 就是线性变换前的随机向量 $\vec{X}\sim\mathcal{N}(\vec{\mu},\Sigma)$ 的协方差矩阵 Σ , 所以由(12)(13), 我们可以得到联合概率密度函数的最终形式

$$p(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot[(\vec{X}-\vec{\mu})^\top\Sigma^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu})]} \tag{14}$$

原本由定理1, 我们还需要求线性变换矩阵 B , 才能确定随机向量 $\vec{X}$ 的联合概率密度函数的表达式, 现在由(13)我们即可得最终形式(14), 随机向量 $\vec{X}$ 的联合概率密度函数由其均值向量 $\vec{\mu}$ 和其协方差矩阵 Σ 唯一确定, 但我们需要明白的是, 这是通过定理1的线性变换 $\vec{Z}=B^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu})$ 得到的, 即此线性变换隐含其中.

如果我们取常数 $c=p(x_1,\cdots,x_n)$, 则可得函数 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 的等高线为 $c'=(\vec{X}-\vec{\mu})^\top\Sigma^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu})$, 当随机向量 $\vec{X}$ 为二维向量时, 我们对协方差矩阵 Σ 进行分解, 因为其为实对称矩阵, 可正交对角化

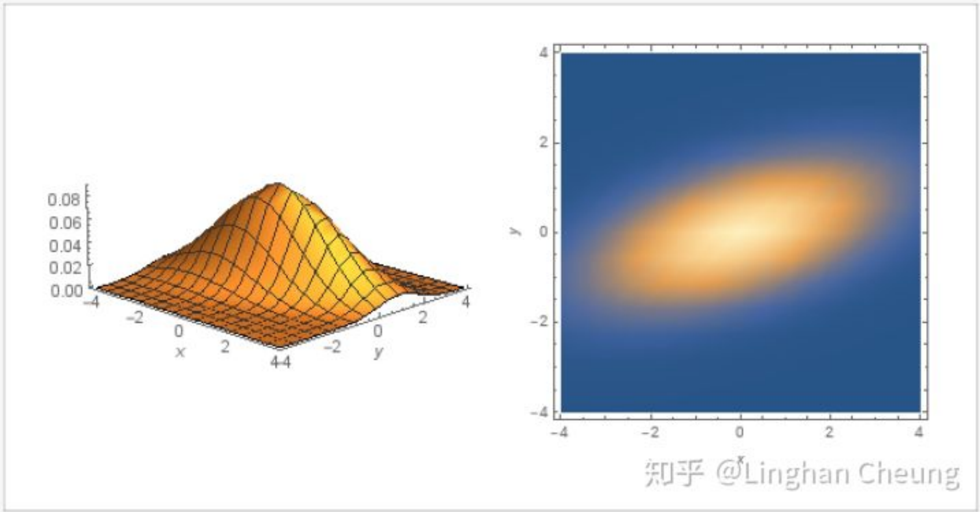
$$\begin{aligned}\Sigma &= Q\Lambda Q^\top\\ c' &= (\vec{X}-\vec{\mu})^\top(Q\Lambda Q^\top)^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu})\\ &= (\vec{X}-\vec{\mu})^\top Q\Lambda^{-1}Q^\top(\vec{X}-\vec{\mu})\\ &= [Q^\top(\vec{X}-\vec{\mu})]^\top\Lambda^{-1}[Q^\top(\vec{X}-\vec{\mu})]\end{aligned} \tag{15}$$

由于矩阵 Q 是酉矩阵, 所以 $Q^\top(\vec{X}-\vec{\mu})=Q^\top\vec{X}-Q^\top\vec{u}$ 可以理解为将随机向量 $\vec{X}$, 均值向量 $\vec{\mu}$ 在矩阵 Q 的列向量所组成的单位正交基上进行投影并在该单位正交基上进行相减. 我们不妨记投影后的向量分别为 $\vec{X}_Q=Q^\top\vec{X},\vec{u}_Q=Q^\top\vec{\mu}$, 同时记矩阵 $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix},\lambda_1\geq\lambda_2$, 则(15)的二次型可表示为

$$c'=(\frac{X_{Q_1}-\mu_{Q_1}}{\sqrt{\lambda_1}})^2+(\frac{X_{Q_2}-\mu_{Q_2}}{\sqrt{\lambda_2}})^2 \tag{16}$$

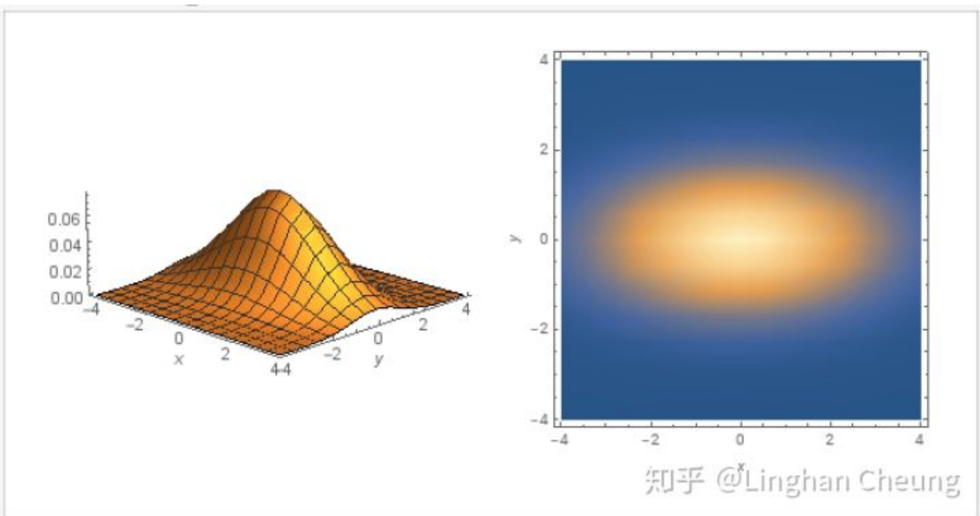
由(16)我们可知, 此时函数 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 的等高线是在矩阵 Q 的列向量所组成的单位正交基上的一个椭圆, 椭圆的中心是 $\vec{u}_Q=[\mu_{Q_1},\mu_{Q_2}]^\top$, 长半轴为 $\sqrt{\lambda_1}$, 短半轴为 $\sqrt{\lambda_2}$.

如果协方差矩阵 Σ 不是对角矩阵, 则正交对角化得到的酉矩阵 Q 不是标准正交基, 其代表一个旋转, 此时的椭圆应该是一个倾斜的椭圆, 随机向量 $\vec{X}$ 中的随机变量不是彼此独立的;



倾斜椭圆-二元高斯分布概率密度函数图

如果协方差矩阵 Σ 是对角矩阵, 则正交对角化得到的酉矩阵 Q 就是标准正交基, 则前述的投影是在标准正交基上完成的, 此时的椭圆应该是一个水平的椭圆, 随机向量 $\vec{X}$ 中的随机变量就是彼此独立的.



水平椭圆-二元高斯分布概率密度函数图

多元高斯分布的几何意义

现在我们知道, 随机向量 $\vec{X} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$ 的联合概率密度函数是通过线性变换 $\vec{Z} = B^{-1}(\vec{X} - \vec{\mu})$ 的帮助, 将随机向量 $\vec{X}$ 的各个随机变量去相关性, 然后利用独立随机变量概率密度函数之间的关系得出的, 亦既是定理1所表述的内容. 那具体地, 线性变化 $\vec{Z} = B^{-1}(\vec{X} - \vec{\mu})$ 是怎么去相关性使随机向量 $\vec{X}$ 的各个随机变量彼此独立的呢? 我们不妨在二维平面上, 再次由定理1和(15)出发来看看这个去相关性的过程.

由定理1我们有

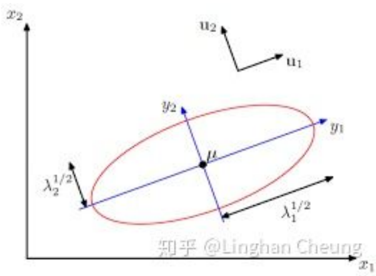
$$
\begin{aligned}
\because \quad & \vec{Z} = B^{-1}(\vec{X} - \vec{\mu}), \vec{Z} \sim \mathcal{N}(\vec{0}, I) \\
\therefore \quad & \vec{Z}^{\top}\vec{Z} = (B^{-1}(\vec{X} - \vec{\mu}))^{\top}(B^{-1}(\vec{X} - \vec{\mu})) \\
& = (\vec{X} - \vec{\mu})^{\top}(BB^{\top})^{-1}(\vec{X} - \vec{\mu}) \\
& = (\vec{X} - \vec{\mu})^{\top}\Sigma^{-1}(\vec{X} - \vec{\mu}) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

再由(15)(17)可得

$$\begin{aligned}\vec{Z}^\top\vec{Z} &= [Q^\top(\vec{X}-\vec{\mu})]^\top\Lambda^{-1}[Q^\top(\vec{X}-\vec{\mu})]\\ &= [Q^\top(\vec{X}-\vec{\mu})]^\top(\Lambda^{-\frac{1}{2}})^\top\Lambda^{-\frac{1}{2}}[Q^\top(\vec{X}-\vec{\mu})]\\ &= [\Lambda^{-\frac{1}{2}}Q^\top(\vec{X}-\vec{\mu})]^\top[\Lambda^{-\frac{1}{2}}Q^\top(\vec{X}-\vec{\mu})]\\ &= [(Q\Lambda^{-\frac{1}{2}})^\top(\vec{X}-\vec{\mu})]^\top[(Q\Lambda^{-\frac{1}{2}})^\top(\vec{X}-\vec{\mu})]\\ &= [(Q\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\end{bmatrix})^\top(\vec{X}-\vec{\mu})]^\top\\ &\cdot\ [(Q\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\end{bmatrix})^\top(\vec{X}-\vec{\mu})]\end{aligned}\tag{18}$$

$$\underbrace{(\underbrace{Q\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\end{bmatrix}}_{\text{对 交基拉伸}}}_{\text{对拉伸后的正交基旋转}})^\top(\vec{X}-\vec{\mu})}_{\text{将随机向量}\vec{X}\text{去均值后在新正交基上投影}}\tag{19}$$

我们先对标准正交基进行拉伸, 横轴和纵轴分别拉伸 $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}},\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$ 倍, 再使用酉矩阵 Q 对拉伸后的正交基进行旋转, 最后将去均值的随机向量 $\vec{X}-\vec{\mu}$ 在新的正交基上进行投影, 从而使完成线性变换 $\vec{Z}=B^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu})$ 后的随机变量在新的正交基上彼此独立. 值得注意的是, 如果随机向量 $\vec{X}$ 本来就是独立随机变量组成的, 此时其协方差矩阵是一个对角矩阵, 则酉矩阵 Q 是一个单位矩阵 $\mathbf{I}$, 此线性变换中只有拉伸而没有旋转.



多元高斯分布随机变量去相关性图

而如果我们只保留 $(Q\Lambda^{-\frac{1}{2}})^\top(\vec{X}-\vec{\mu})$ 这个投影后坐标轴长度较长的对应的坐标, 我们就可以达到将随机向量 $\vec{X}$ 进行降维的效果, 而这, 就是所谓的PCA(principal component analysis, 主成分分析).

总结

本文从多元标准高斯分布出发, 阐述了如何通过线性变换, 将任意的服从多元高斯分布的随机向量去相关性, 并求出其联合概率密度函数的过程, 最后给出了线性变换的具体过程阐述. 多元高斯分布是许多其他理论工具的基础, 掌握它是进行其他相关理论研究的关键.

引用

[1] Wikipedia contributors. "中心极限定理."*维基百科, 自由的百科全书*. 维基百科, 自由的百科全

书, 9 May 2018. Web. 9 May 2018.‹zh.wikipedia.org/w/inde...›.

[2] Do, C. (2008).*The Multivariate Gaussian Distribution*. [online] Cs229.stanford.edu. Available at: cs229.stanford.edu/sect... [Accessed 13 Mar. 2019].

[3] 张, 伟. (2019). *多元正态分布*. [online] Staff.ustc.edu.cn. Available at: staff.ustc.edu.cn/~zwp/... [Accessed 13 Mar. 2019].

[4] Wikipedia contributors. "多元正态分布."*维基百科, 自由的百科全书*. 维基百科, 自由的百科全书, 16 Sep. 2018. Web. 16 Sep. 2018.‹zh.wikipedia.org/w/inde...›.

[5] Wikipedia contributors. "雅可比矩阵."*维基百科, 自由的百科全书*. 维基百科, 自由的百科全书, 7 Dec. 2018. Web. 7 Dec. 2018.‹zh.wikipedia.org/w/inde...›.

编辑于 2019-05-07

机器学习　线性代数　统计学

文章被以下专栏收录

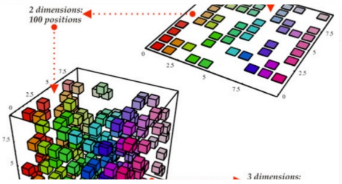
高斯世界下的Machine Learning
站在科普的角度看Gaussian Process for Machine Learning，用通俗语言描述高斯...
进入专栏

推荐阅读

奇异值分解的揭秘（一）：矩阵的奇异值分解过程

矩阵的奇异值分解（singular value decomposition，简称SVD）是线性代数中很重要的内容，并且奇异值分解过程也是线性代数中相似对角化分解（也被称为特征值分解，eigenvalue decomposition...

Xinyu Chen



降维打击-观察高维世界

SIY.Z

线性代数与张量？这本开放籍帮你扫清通往ML的数学

机器之心　发表于机器

50 条评论　切换为时间排序

写下你的评论...

精选评论（4）

小德　2 个月前
解释可以说是非常明了了。作者应该是学通透了的。
1　查看回复

Linghan Zhang (作者) 回复 **小德**　2 个月前
思想其实很简单，就是一个拉伸+一个旋转，再投影到新正交基上就彼此独立了，就是一堆公

式看起来费劲点, hhhhhh.

2 查看回复

Syous 2 个月前

非常好的总结，简洁而明了。我补充一个关于多元高斯分布一个有意思的点吧：在其尾部（比如5%）的时候，尽管其各个分量间的“相关性”依然存在，表现为ρ不为0；但是，用条件概率度量的“相关性”却是为0，表现为P(X1 < 5% | X2 < 5%) = 0，或者说，其非线性相关性却是0。

2 查看回复

知乎用户 20 天前

写的很好，只是对角化协方差不需要二维，任意 N 维都可以。另外 B = \Sigma^{1/2} = Q \Lambda^{1/2} Q^T。

1 查看回复

评论（50）

游学者周卓 2 个月前

虽然没能完全看懂，但是辛苦了!

1

Linghan Zhang (作者) 回复 游学者周卓 2 个月前

哪里还不清楚啊, 我再修改, 力求严谨但可读易懂的~

赞

小德 2 个月前

解释可以说是非常明了了。作者应该是学通透了的。

1

Linghan Zhang (作者) 回复 小德 2 个月前

思想其实很简单, 就是一个拉伸+一个旋转, 再投影到新正交基上就彼此独立了, 就是一堆公式看起来费劲点, hhhhhh.

2

呆文小学渣 2 个月前

作者请问样本分位数大样本下近似高斯分布的证明有更加详细一些的吗，我本科阶段在学高等数理统计，看的书是茆诗松那个第二版，发现自己理解没问题但是落在书面上却又写不出来东西了[拜托]，突然发现你这个比我的高端了好几个档次，膜拜大佬

赞

Linghan Zhang (作者) 回复 呆文小学渣 2 个月前

这个内容感觉可以再开一篇了[捂脸]

1

呆文小学渣 回复 Linghan Zhang (作者) 2 个月前

最近又看了看，有点收获，新手起步，越来越觉得神奇与奥妙了

赞

展开其他 3 条回复

爱提问的马里奥 2 个月前

请问如何得到一元高斯分布的概率密度函数？不用讲细节，讲讲大概是如何得到的就可以了，非常感谢。

赞

Linghan Zhang (作者) 回复 **爱提问的马里奥** 2 个月前

可以参考这个: 蓦风星吟：从高斯分布的导出讲起——为什么概率密度函数长成这个样子？ 核心思想是, 使用已有的观测数据构造一个关于参数 (x - \mu) 的极大似然估计的方程, 在导数为0时得到柯西函数方程, 在求解柯西函数方程就可以得到高斯分布的表达式了.

1

爱提问的马里奥 回复 Linghan Zhang (作者) 2 个月前

非常感谢。

赞

Syous 2 个月前

非常好的总结，简洁而明了。我补充一个关于多元高斯分布一个有意思的点吧：在其尾部（比如5%）的时候，尽管其各个分量间的“相关性”依然存在，表现为ρ不为0；但是，用条件概率度量的“相关性”却是为0，表现为P(X1 < 5% | X2 < 5%) = 0，或者说，其非线性相关性却是0。

2

Linghan Zhang (作者) 回复 Syous 2 个月前

膜拜大神~

赞

知乎用户 回复 Syous 20 天前

为什么？？？ 考虑一个极端情况，rho = 1，此时 X2 < 5% 必然蕴含着 X1 < 5%，也即 P(X1 < 5% | X2 < 5%) = 1

赞

查看全部 18 条回复

于子涵 2 个月前

真的nb 不过12 13两个等式 左边应该是pdf 而不是概率 应该是笔误吧

赞

Linghan Zhang (作者) 回复 **于子涵** 2 个月前

联合概率密度函数就是指pdf啊(´▽｀)

赞

于子涵 回复 Linghan Zhang (作者) 2 个月前

对啊 所以12式应该是f（x1,x2,.....xn)而不是p(x1....Xn）我应该没错吧（捂脸）

赞

展开其他 1 条回复

蓦风星吟 2 个月前

非常棒的数学系基础读物哦！赞！！！ ^V^

赞

Linghan Zhang (作者) 回复 **蓦风星吟** 2 个月前

主编过奖了~

赞

Rawzq 2 个月前

可以把条件高斯，边缘高斯，以及贝叶斯高斯再整理下[大笑]

赞

Linghan Zhang (作者) 回复 Rawzq 2 个月前

这么多估计能写到吐血[飙泪笑][飙泪笑][飙泪笑]

赞

那罗延 1 个月前

我想问一下，你那些数学式的标号是怎么弄的?

赞

Linghan Zhang (作者) 回复 那罗延 1 个月前

在行末加 \tag{#}

赞

叶定南 1 个月前

有一点

独立同分布的随机变量的算术平均是依分布收敛到正态分布，而不是依概率收敛

1

Linghan Zhang (作者) 回复 叶定南 1 个月前

修改了~

赞

知乎用户 20 天前

写的很好，只是对角化协方差不需要二维，任意 N 维都可以。另外 B = \Sigma^{1/2} = Q \Lambda^{1/2} Q^T。

1

Linghan Zhang (作者) 回复 知乎用户 20 天前

具体哪个式子啊?

赞

知乎用户 回复 知乎用户 20 天前

你文章里没有，我只是补充一下[害羞]

赞

展开其他 3 条回复