第一章　绪论

1．设 $x>0$，x 的相对误差为 δ，求 $\ln x$ 的误差。

解：近似值 x^* 的相对误差为 $\delta = e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^*-x}{x^*}$

而 $\ln x$ 的误差为 $e(\ln x^*) = \ln x^* - \ln x \approx \frac{1}{x^*} e^*$

进而有 $\varepsilon(\ln x^*) \approx \delta$

2．设 x 的相对误差为 2%，求 x^n 的相对误差。

解：设 $f(x)=x^n$，则函数的条件数为 $C_p = |\frac{xf'(x)}{f(x)}|$

又 $\because f'(x) = nx^{n-1}$，$\therefore C_p = |\frac{x \cdot nx^{n-1}}{n}| = n$

又 $\because \varepsilon_r((x^*)n) \approx C_p \cdot \varepsilon_r(x^*)$

且 $e_r(x^*)$ 为 2

$\therefore \varepsilon_r((x^*)^n) \approx 0.02n$

3．下列各数都是经过四舍五入得到的近似数，即误差限不超过最后一位的半个单位，试指出它们是几位有效数字：$x_1^* = 1.1021$，$x_2^* = 0.031$，$x_3^* = 385.6$，$x_4^* = 56.430$，$x_5^* = 7\times 1.0$.

解：$x_1^* = 1.1021$ 是五位有效数字；

$x_2^* = 0.031$ 是二位有效数字；

$x_3^* = 385.6$ 是四位有效数字；

$x_4^* = 56.430$ 是五位有效数字；

$x_5^* = 7\times 1.0.$ 是二位有效数字。

4．利用公式(2.3)求下列各近似值的误差限：(1) $x_1^* + x_2^* + x_4^*$,(2) $x_1^* x_2^* x_3^*$,(3) x_2^* / x_4^*.

其中 $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ 均为第 3 题所给的数。

解：

$\varepsilon(x_1^*)=\frac{1}{2}\times10^{-4}$

$\varepsilon(x_2^*)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$

$\varepsilon(x_3^*)=\frac{1}{2}\times10^{-1}$

$\varepsilon(x_4^*)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$

$\varepsilon(x_5^*)=\frac{1}{2}\times10^{-1}$

$$
\begin{aligned}
&(1)\varepsilon(x_1^*+x_2^*+x_4^*)\\
&=\varepsilon(x_1^*)+\varepsilon(x_2^*)+\varepsilon(x_4^*)\\
&=\frac{1}{2}\times10^{-4}+\frac{1}{2}\times10^{-3}+\frac{1}{2}\times10^{-3}\\
&=1.05\times10^{-3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(2)\varepsilon(x_1^*x_2^*x_3^*)\\
&=\left|x_1^*x_2^*\right|\varepsilon(x_3^*)+\left|x_2^*x_3^*\right|\varepsilon(x_1^*)+\left|x_1^*x_3^*\right|\varepsilon(x_2^*)\\
&=\left|1.1021\times0.031\right|\times\frac{1}{2}\times10^{-1}+\left|0.031\times385.6\right|\times\frac{1}{2}\times10^{-4}+\left|1.1021\times385.6\right|\times\frac{1}{2}\times10^{-3}\\
&\approx0.215
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(3)\varepsilon(x_2^*/x_4^*)\\
&\approx\frac{\left|x_2^*\right|\varepsilon(x_4^*)+\left|x_4^*\right|\varepsilon(x_2^*)}{\left|x_4^*\right|^2}\\
&=\frac{0.031\times\frac{1}{2}\times10^{-3}+56.430\times\frac{1}{2}\times10^{-3}}{56.430\times56.430}\\
&=10^{-5}
\end{aligned}
$$

5 计算球体积要使相对误差限为 1，问度量半径 R 时允许的相对误差限是多少？

解：球体体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

则何种函数的条件数为

$$C_p=\left|\frac{R\bullet V'}{V}\right|=\left|\frac{R\bullet4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right|=3$$

$\therefore\ \varepsilon_r(V^*)\approx C_p\bullet\varepsilon_r(R^*)=3\varepsilon_r(R^*)$

又$\because\ \varepsilon_r(V^*)=1$

故度量半径 R 时允许的相对误差限为$\varepsilon_r(R^*)=\frac{1}{3}\times 1\approx 0.33$

6．设$Y_0=28$，按递推公式$Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$ （n=1,2,…）

计算到Y_{100}。若取$\sqrt{783}\approx 27.982$（5 位有效数字），试问计算Y_{100}将有多大误差？

解：$\because Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

$\therefore Y_{100}=Y_{99}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

$Y_{99}=Y_{98}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

$Y_{98}=Y_{97}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

……

$Y_1=Y_0-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

依次代入后，有$Y_{100}=Y_0-100\times\frac{1}{100}\sqrt{783}$

即$Y_{100}=Y_0-\sqrt{783}$，

若取$\sqrt{783}\approx 27.982$，$\therefore Y_{100}=Y_0-27.982$

$\therefore \varepsilon(Y_{100}^*)=\varepsilon(Y_0)+\varepsilon(27.982)=\frac{1}{2}\times 10^{-3}$

$\therefore Y_{100}$的误差限为$\frac{1}{2}\times 10^{-3}$。

7．求方程$x^2-56x+1=0$的两个根，使它至少具有 4 位有效数字（$\sqrt{783}=27.982$）。

解：$x^2-56x+1=0$，

故方程的根应为$x_{1,2}=28\pm\sqrt{783}$

故 $x_1=28+\sqrt{783}\approx 28+27.982=55.982$

$\therefore x_1$具有 5 位有效数字

$$x_2=28-\sqrt{783}=\frac{1}{28+\sqrt{783}}\approx\frac{1}{28+27.982}=\frac{1}{55.982}\approx 0.017863$$

x_2具有 5 位有效数字

8．当 N 充分大时，怎样求$\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}dx$？

解 $\int_{N}^{N+1}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan(N+1)-\arctan N$

设 $\alpha=\arctan(N+1),\beta=\arctan N$ 。

则 $\tan\alpha=N+1,\tan\beta=N.$

$$\begin{aligned}&\int_{N}^{N+1}\frac{1}{1+x^2}dx\\&=\alpha-\beta\\&=\arctan(\tan(\alpha-\beta))\\&=\arctan\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\bullet\tan\beta}\\&=\arctan\frac{N+1-N}{1+(N+1)N}\\&=\arctan\frac{1}{N^2+N+1}\end{aligned}$$

9．正方形的边长大约为了 100cm，应怎样测量才能使其面积误差不超过 $1cm^2$ ？

解：正方形的面积函数为 $A(x)=x^2$

$\therefore\varepsilon(A^*)=2A^*\bullet\varepsilon(x^*)$.

当 $x^*=100$ 时，若 $\varepsilon(A^*)\le 1$,

则 $\varepsilon(x^*)\le\frac{1}{2}\times 10^{-2}$

故测量中边长误差限不超过 0.005cm 时，才能使其面积误差不超过 $1cm^2$

10．设 $S=\frac{1}{2}gt^2$ ，假定 g 是准确的，而对 t 的测量有 ± 0.1 秒的误差，证明当 t 增加时 S 的绝对误差增加，而相对误差却减少。

解：$\because S=\frac{1}{2}gt^2,t>0$

$\therefore\varepsilon(S^*)=gt^2\bullet\varepsilon(t^*)$

当 t^* 增加时，S^* 的绝对误差增加

$$\begin{aligned}&\varepsilon_r(S^*)=\frac{\varepsilon(S^*)}{|S^*|}\\&=\frac{gt^2\bullet\varepsilon(t^*)}{\frac{1}{2}g(t^*)^2}\\&=2\frac{\varepsilon(t^*)}{t^*}\end{aligned}$$

当t^*增加时，$\varepsilon(t^*)$保持不变，则S^*的相对误差减少。

11．序列$\left\{y_n\right\}$满足递推关系$y_n = 10y_{n-1} - 1$ (n=1,2,…),

若$y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$（三位有效数字），计算到$y_{10}$时误差有多大？这个计算过程稳定吗？

解：$\because y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$

$$\therefore \varepsilon(y_0^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

又$\because y_n = 10y_{n-1} - 1$

$$\therefore y_1 = 10y_0 - 1$$

$$\therefore \varepsilon(y_1^*) = 10\varepsilon(y_0^*)$$

又$\because y_2 = 10y_1 - 1$

$$\therefore \varepsilon(y_2^*) = 10\varepsilon(y_1^*)$$

$$\therefore \varepsilon(y_2^*) = 10^2\varepsilon(y_0^*)$$

……

$$\therefore \varepsilon(y_{10}^*) = 10^{10}\varepsilon(y_0^*)$$

$$= 10^{10} \times \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^8$$

计算到y_{10}时误差为$\frac{1}{2} \times 10^8$，这个计算过程不稳定。

12．计算$f = (\sqrt{2} - 1)^6$，取$\sqrt{2} \approx 1.4$，利用下列等式计算，哪一个得到的结果最好？

$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$，　$(3-2\sqrt{2})^3$，　$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$，　$99 - 70\sqrt{2}$。

解：设$y = (x-1)^6$，

若$x = \sqrt{2}$，$x^* = 1.4$，则$\varepsilon(x^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-1}$。

若通过$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$计算 y 值，则

$$\varepsilon(y^*)=-\left|-6\times\frac{1}{(x^*+1)^7}\right|\bullet\varepsilon(x^*)$$
$$=\frac{6}{(x^*+1)^7}y^*\varepsilon(x^*)$$
$$=2.53y^*\varepsilon(x^*)$$

若通过$(3-2\sqrt{2})^3$计算 y 值，则

$$\varepsilon(y^*)=\left|-3\times2\times(3-2x^*)^2\right|\bullet\varepsilon(x^*)$$
$$=\frac{6}{3-2x^*}y^*\bullet\varepsilon(x^*)$$
$$=30y^*\varepsilon(x^*)$$

若通过$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$计算 y 值，则

$$\varepsilon(y^*)=-\left|-3\times\frac{1}{(3+2x^*)^4}\right|\bullet\varepsilon(x^*)$$
$$=6\times\frac{1}{(3+2x^*)^7}y^*\varepsilon(x^*)$$
$$=1.0345y^*\varepsilon(x^*)$$

通过$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$计算后得到的结果最好。

13． $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$,求$f(30)$的值。若开平方用 6 位函数表，问求对数时误差有多大？若改用另一等价公式。$\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

计算，求对数时误差有多大？

解

$\because f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$，$\therefore f(30)=\ln(30-\sqrt{899})$

设$u=\sqrt{899}, y=f(30)$

则$u^*=29.9833$

$\therefore \varepsilon(u^*)=\frac{1}{2}\times10^{-4}$

故

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(y^*) &\approx -\frac{1}{|30-u^*|}\varepsilon(u^*) \\
&= \frac{1}{0.0167}\bullet\varepsilon(u^*) \\
&\approx 3\times10^{-3}
\end{aligned}
$$

若改用等价公式

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1}) = -\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

则 $f(30) = -\ln(30+\sqrt{899})$

此时，

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(y^*) &= \left|-\frac{1}{30+u^*}\right|\varepsilon(u^*) \\
&= \frac{1}{59.9833}\cdot\varepsilon(u^*) \\
&\approx 8\times10^{-7}
\end{aligned}
$$

第二章 插值法

1．当 $x=1,-1,2$ 时，$f(x)=0,-3,4$,求 $f(x)$ 的二次插值多项式。

解：

$$
\begin{aligned}
&x_0=1, x_1=-1, x_2=2, \\
&f(x_0)=0, f(x_1)=-3, f(x_2)=4; \\
&l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=-\frac{1}{2}(x+1)(x-2) \\
&l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{1}{6}(x-1)(x-2) \\
&l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{1}{3}(x-1)(x+1)
\end{aligned}
$$

则二次拉格朗日插值多项式为

$$
\begin{aligned}
L_2(x) &= \sum_{k=0}^{2} y_k l_k(x) \\
&= -3l_0(x)+4l_2(x) \\
&= -\frac{1}{2}(x-1)(x-2)+\frac{4}{3}(x-1)(x+1) \\
&= \frac{5}{6}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

2．给出 $f(x)=\ln x$ 的数值表

X	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
lnx	-0.916291	-0.693147	-0.510826	-0.356675	-0.223144

用线性插值及二次插值计算 $\ln 0.54$ 的近似值。

解：由表格知，

$$x_0 = 0.4, x_1 = 0.5, x_2 = 0.6, x_3 = 0.7, x_4 = 0.8;$$
$$f(x_0) = -0.916291, f(x_1) = -0.693147$$
$$f(x_2) = -0.510826, f(x_3) = -0.356675$$
$$f(x_4) = -0.223144$$

若采用线性插值法计算 $\ln 0.54$ 即 $f(0.54)$，

则 $0.5 < 0.54 < 0.6$

$$l_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = -10(x - 0.6)$$
$$l_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = -10(x - 0.5)$$
$$L_1(x) = f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x)$$
$$= 6.93147(x - 0.6) - 5.10826(x - 0.5)$$

$$\therefore L_1(0.54) = -0.6202186 \approx -0.620219$$

若采用二次插值法计算 $\ln 0.54$ 时，

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = 50(x - 0.5)(x - 0.6)$$
$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = -100(x - 0.4)(x - 0.6)$$
$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = 50(x - 0.4)(x - 0.5)$$
$$L_2(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x)$$

$$= -50 \times 0.916291(x - 0.5)(x - 0.6) + 69.3147(x - 0.4)(x - 0.6) - 0.510826 \times 50(x - 0.4)(x - 0.5)$$

$$\therefore L_2(0.54) = -0.61531984 \approx -0.615320$$

3．给全 $\cos x, 0^\circ \le x \le 90^\circ$ 的函数表，步长 $h = 1' = (1/60)^\circ$，若函数表具有 5 位有效数字，研究用线性插值求 $\cos x$ 近似值时的总误差界。

解：求解 $\cos x$ 近似值时，误差可以分为两个部分，一方面，x 是近似值，具有 5 位有效数字，在此后的计算过程中产生一定的误差传播；另一方面，利用插值法求函数 $\cos x$ 的近似值时，采用的线性插值法插值余项不为 0，也会有一定的误差。因此，总误差界的计算应综合以上两方面的因素。

当$0^\circ \le x \le 90^\circ$时，

令$f(x)=\cos x$

取$x_0=0, h=(\frac{1}{60})^\circ=\frac{1}{60}\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{10800}$

令$x_i=x_0+ih, i=0,1,...,5400$

则$x_{5400}=\frac{\pi}{2}=90^\circ$

当$x\in\left[x_k, x_{k-1}\right]$时，线性插值多项式为

$$L_1(x)=f(x_k)\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+f(x_{k+1})\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

插值余项为

$$R(x)=\left|\cos x-L_1(x)\right|=\left|\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_k)(x-x_{k+1})\right|$$

又$\because$在建立函数表时，表中数据具有 5 位有效数字，且$\cos x\in\left[0,1\right]$，故计算中有误差传播过程。

$\therefore \varepsilon(f^*(x_k))=\frac{1}{2}\times 10^{-5}$

$$R_2(x)=\left|\varepsilon(f^*(x_k))\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right|+\left|\varepsilon(f^*(x_{k+1}))\frac{x-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k}\right|$$

$$\le\varepsilon(f^*(x_k))(\left|\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right|+\left|\frac{x-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k}\right|)$$

$$=\varepsilon(f^*(x_k))\frac{1}{h}(x_{k+1}-x+x-x_k)$$

$$=\varepsilon(f^*(x_k))$$

$\therefore$总误差界为

$$R = R_1(x) + R_2(x)$$
$$= \left|\frac{1}{2}(-\cos\xi)(x-x_k)(x-x_{k+1})\right| + \varepsilon(f^*(x_k))$$
$$\le \frac{1}{2}\times(x-x_k)(x_{k+1}-x) + \varepsilon(f^*(x_k))$$
$$\le \frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}h)^2 + \varepsilon(f^*(x_k))$$
$$= 1.06\times 10^{-8} + \frac{1}{2}\times 10^{-5}$$
$$= 0.50106\times 10^{-5}$$

4．设为互异节点，求证：

（1）$\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) \equiv x^k \qquad (k = 0,1,\cdots,n);$

（2）$\sum_{j=0}^{n} (x_j - x)^k l_j(x) \equiv 0 \qquad (k = 0,1,\cdots,n);$

证明

（1）　令 $f(x) = x^k$

若插值节点为 $x_j, j = 0,1,\cdots,n$，则函数 $f(x)$ 的 n 次插值多项式为 $L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x)$ 。

插值余项为 $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

又 $\because k \le n,$

$$\therefore f^{(n+1)}(\xi) = 0$$
$$\therefore R_n(x) = 0$$

$$\therefore \sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) = x^k \qquad (k = 0,1,\cdots,n);$$

$$(2)\sum_{j=0}^{n}(x_j - x)^k l_j(x)$$
$$= \sum_{j=0}^{n}(\sum_{i=0}^{n} C_k^j x_j^i (-x)^{k-i}) l_j(x)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} C_k^i (-x)^{k-i}(\sum_{j=0}^{n} x_j^i l_j(x))$$

又 $\because 0 \le i \le n$　由上题结论可知

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) = x^i$$

$$\therefore \text{原式} = \sum_{i=0}^{n} C_k^i (-x)^{k-i} x^i$$

$= (x-x)^k$

$= 0$

$\therefore$ 得证。

5 设 $f(x) \in C^2[a,b]$ 且 $f(a) = f(b) = 0$,求证:

$$\max_{a \le x \le b} |f(x)| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \le x \le b} |f''(x)|.$$

解:令 $x_0 = a, x_1 = b$,以此为插值节点,则线性插值多项式为

$$L_1(x) = f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x-x_0}$$

$$= = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{x-a}$$

又 $\because f(a) = f(b) = 0$

$\therefore L_1(x) = 0$

插值余项为 $R(x) = f(x) - L_1(x) = \dfrac{1}{2} f''(x)(x-x_0)(x-x_1)$

$\therefore f(x) = \dfrac{1}{2} f''(x)(x-x_0)(x-x_1)$

又 $\because |(x-x_0)(x-x_1)|$

$\le \left\{ \dfrac{1}{2}\left[(x-x_0)+(x_1-x)\right] \right\}^2$

$= \dfrac{1}{4}(x_1-x_0)^2$

$= \dfrac{1}{4}(b-a)^2$

$\therefore \max\limits_{a \le x \le b} |f(x)| \le \dfrac{1}{8}(b-a)^2 \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|.$

6. 在 $-4 \le x \le 4$ 上给出 $f(x) = e^x$ 的等距节点函数表,若用二次插值求 e^x 的近似值,要使截断误差不超过 10^{-6},问使用函数表的步长 h 应取多少?

解:若插值节点为 x_{i-1}, x_i 和 x_{i+1},则分段二次插值多项式的插值余项为

$$R_2(x)=\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})$$

$$\therefore \left|R_2(x)\right| \le \frac{1}{6}(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})\max_{-4\le x\le 4}\left|f'''(x)\right|$$

设步长为 h，即 $x_{i-1}=x_i-h, x_{i+1}=x_i+h$

$$\therefore \left|R_2(x)\right| \le \frac{1}{6}e^4\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}h^3=\frac{\sqrt{3}}{27}e^4h^3.$$

若截断误差不超过10^{-6}，则

$$\left|R_2(x)\right| \le 10^{-6}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{27}e^4h^3 \le 10^{-6}$$

$$\therefore h \le 0.0065.$$

7．若 $y_n=2^n$,求$\Delta^4 y_n$及$\delta^4 y_n$.，

解：根据向前差分算子和中心差分算子的定义进行求解。

$$y_n=2^n$$

$$\begin{aligned}\Delta^4 y_n &= (E-1)^4 y_n\\ &= \sum_{j=0}^{4}(-1)^j\binom{4}{j}E^{4-j}y_n\\ &= \sum_{j=0}^{4}(-1)^j\binom{4}{j}y_{4+n-j}\\ &= \sum_{j=0}^{4}(-1)^j\binom{4}{j}2^{4-j}\cdot y_n\\ &= (2-1)^4 y_n\\ &= y_n\\ &= 2^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta^4 y_n &= (E^{\frac{1}{2}}-E^{-\frac{1}{2}})^4 y_n\\ &= (E^{-\frac{1}{2}})^4(E-1)^4 y_n\\ &= E^{-2}\Delta^4 y_n\\ &= y_{n-2}\\ &= 2^{n-2}\end{aligned}$$

8．如果 $f(x)$ 是 m 次多项式，记 $\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$，证明 $f(x)$ 的 k 阶差分

$\Delta^k f(x)(0 \le k \le m)$ 是 $m-k$ 次多项式，并且 $\Delta^{m+1} f(x)=0$ （l 为正整数）。

解：函数 $f(x)$ 的 $Taylor$ 展式为

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\cdots+\frac{1}{m!}f^{(m)}(x)h^m+\frac{1}{(m+1)!}f^{(m+1)}(\xi)h^{m+1}$$

其中 $\xi \in (x,x+h)$

又 $\because f(x)$ 是次数为 m 的多项式

$\therefore f^{(m+1)}(\xi)=0$

$$\begin{aligned}\therefore \Delta f(x)&=f(x+h)-f(x)\\&=f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\cdots+\frac{1}{m!}f^{(m)}(x)h^m\end{aligned}$$

$\therefore \Delta f(x)$ 为 $m-1$ 阶多项式

$\Delta^2 f(x)=\Delta(\Delta f(x))$

$\therefore \Delta^2 f(x)$ 为 $m-2$ 阶多项式

依此过程递推，得 $\Delta^k f(x)$ 是 $m-k$ 次多项式

$\therefore \Delta^m f(x)$ 是常数

$\therefore$ 当 l 为正整数时，

$\Delta^{m+1} f(x)=0$

9．证明 $\Delta(f_k g_k)=f_k\Delta g_k+g_{k+1}\Delta f_k$

证明

$$\begin{aligned}\Delta(f_k g_k)&=f_{k+1}g_{k+1}-f_k g_k\\&=f_{k+1}g_{k+1}-f_k g_{k+1}+f_k g_{k+1}-f_k g_k\\&=g_{k+1}(f_{k+1}-f_k)+f_k(g_{k+1}-g_k)\\&=g_{k+1}\Delta f_k+f_k\Delta g_k\\&=f_k\Delta g_k+g_{k+1}\Delta f_k\end{aligned}$$

$\therefore$ 得证

10．证明 $\sum_{k=0}^{n-1} f_k\Delta g_k=f_n g_n-f_0 g_0-\sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1}\Delta f_k$

证明：由上题结论可知

$$f_k\Delta g_k=\Delta(f_k g_k)-g_{k+1}\Delta f_k$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n-1} f_k\Delta g_k$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta(f_k g_k)-g_{k+1}\Delta f_k)$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta(f_k g_k)-\sum_{k=0}^{n-1}g_{k+1}\Delta f_k$$
$$\because \Delta(f_k g_k)=f_{k+1}g_{k+1}-f_k g_k$$
$$\therefore \sum_{k=0}^{n-1}\Delta(f_k g_k)$$
$$=(f_1g_1-f_0g_0)+(f_2g_2-f_1g_1)+\cdots+(f_ng_n-f_{n-1}g_{n-1})$$
$$=f_ng_n-f_0g_0$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n-1} f_k\Delta g_k=f_ng_n-f_0g_0-\sum_{k=0}^{n-1}g_{k+1}\Delta f_k$$

得证。

11．证明 $\sum_{j=0}^{n-1}\Delta^2 y_j=\Delta y_n-\Delta y_0$

证明 $\sum_{j=0}^{n-1}\Delta^2 y_j=\sum_{j=0}^{n-1}(\Delta y_{j+1}-\Delta y_j)$

$$=(\Delta y_1-\Delta y_0)+(\Delta y_2-\Delta y_1)+\cdots+(\Delta y_n-\Delta y_{n-1})$$
$$=\Delta y_n-\Delta y_0$$

得证。

12．若 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ 有 n 个不同实根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，

证明：$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0,0\le k\le n-2;\\ n_0^{-1},k=n-1\end{cases}$

证明：$\because$ $f(x)$ 有个不同实根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$

且 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$

$\therefore f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

令 $\omega_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

则 $\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{a_n\omega_n'(x_j)}$

而 $\omega_n'(x)=(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$

$$+\cdots+(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$$

$\therefore \omega_n'(x_j)=(x_j-x_1)(x_j-x_2)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)$

令 $g(x)=x^k$,

$$g[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{\omega_n'(x_j)}$$

则 $g[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{\omega_n'(x_j)}$

又 $\therefore \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\frac{1}{a_n}g[x_1,x_2,\cdots,x_n]$

$$\therefore \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0,0\le k\le n-2;\\ n_0^{-1},k=n-1\end{cases}$$

$\therefore$ 得证。

13．证明 n 阶均差有下列性质：

（1）若 $F(x)=cf(x)$，则 $F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=cf[x_0,x_1,\cdots,x_n]$;

（2）若 $F(x)=f(x)+g(x)$，则 $F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+g[x_0,x_1,\cdots,x_n]$.

证明：

（1）$\because f[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$

$$F[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\sum_{j=0}^{n}\frac{F(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{cf(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=c(\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)})$$

$$=cf[x_0,x_1,\cdots,x_n]$$

$\therefore$ 得证。

(2) $\because F(x)=f(x)+g(x)$

$$\therefore F\left[x_0,\cdots,x_n\right]=\sum_{j=0}^{n}\frac{F(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x^j)+g(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)})$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\frac{g(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)})$$

$$=f\left[x_0,\cdots,x_n\right]+g\left[x_0,\cdots,x_n\right]$$

$\therefore$ 得证。

14． $f(x)=x^7+x^4+3x+1$, 求 $F\left[2^0,2^1,\cdots,2^7\right]$ 及 $F\left[2^0,2^1,\cdots,2^8\right]$。

解：$\because\ f(x)=x^7+x^4+3x+1$

若 $x_i=2^i, i=0,1,\cdots,8$

则 $f\left[x_0,x_1,\cdots,x_n\right]=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

$\therefore f\left[x_0,x_1,\cdots,x_7\right]=\dfrac{f^{(7)}(\xi)}{7!}=\dfrac{7!}{7!}=1$

$f\left[x_0,x_1,\cdots,x_8\right]=\dfrac{f^{(8)}(\xi)}{8!}=0$

15．证明两点三次埃尔米特插值余项是

$$R_3(x)=f^{(4)}(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2/4!, \xi\in(x_k,x_{k+1})$$

解：

若 $x\in[x_k,x_{k+1}]$，且插值多项式满足条件

$H_3(x_k)=f(x_k), H_3'(x_k)=f'(x_k)$

$H_3(x_{k+1})=f(x_{k+1}), H_3'(x_{k+1})=f'(x_{k+1})$

插值余项为 $R(x)=f(x)-H_3(x)$

由插值条件可知 $R(x_k)=R(x_{k+1})=0$

且 $R'(x_k)=R'(x_{k+1})=0$

$\therefore R(x)$ 可写成 $R(x)=g(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$

其中 $g(x)$ 是关于 x 的待定函数，

现把 x 看成 $[x_k,x_{k+1}]$ 上的一个固定点，作函数

$\varphi(t)=f(t)-H_3(t)-g(x)(t-x_k)^2(t-x_{k+1})^2$

根据余项性质，有

$\varphi(x_k)=0,\varphi(x_{k+1})=0$

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=f(x)-H_3(x)-g(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2\\&=f(x)-H_3(x)-R(x)\\&=0\end{aligned}$$

$\varphi'(t)=f'(t)-H_3'(t)-g(x)[2(t-x_k)(t-x_{k+1})^2+2(t-x_{k+1})(t-x_k)^2]$

$\therefore \varphi'(x_k)=0$

$\varphi'(x_{k+1})=0$

由罗尔定理可知，存在 $\xi\in(x_k,x)$ 和 $\xi\in(x,x_{k+1})$ ，使

$\varphi'(\xi_1)=0,\varphi'(\xi_2)=0$

即 $\varphi'(x)$ 在 $[x_k,x_{k+1}]$ 上有四个互异零点。

根据罗尔定理，$\varphi''(t)$ 在 $\varphi'(t)$ 的两个零点间至少有一个零点，

故 $\varphi''(t)$ 在 (x_k,x_{k+1}) 内至少有三个互异零点，

依此类推，$\varphi^{(4)}(t)$ 在 (x_k,x_{k+1}) 内至少有一个零点。

记为 $\xi\in(x_k,x_{k+1})$ 使

$\varphi^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-H_3{}^{(4)}(\xi)-4!\,g(x)=0$

又 $\because H_3{}^{(4)}(t)=0$

$\therefore g(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!},\xi\in(x_k,x_{k+1})$

其中ξ依赖于x

$$\therefore R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$

分段三次埃尔米特插值时，若节点为$x_k(k=0,1,\cdots,n)$，设步长为h，即

$x_k=x_0+kh,k=0,1,\cdots,n$在小区间$[x_k,x_{k+1}]$上

$$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$

$$\therefore |R(x)|=\frac{1}{4!}\left|f^{(4)}(\xi)\right|(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$

$$\begin{aligned}&\le\frac{1}{4!}(x-x_k)^2(x_{k+1}-x)^2\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|\\&\le\frac{1}{4!}[(\frac{x-x_k+x_{k+1}-x}{2})^2]^2\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|\\&=\frac{1}{4!}\times\frac{1}{2^4}h^4\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|\\&=\frac{h^4}{384}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|\end{aligned}$$

16．求一个次数不高于4次的多项式P（x），使它满足$P(0)=P'(0)=0,P(1)=P'(1)=0,P(2)=0$

解：利用埃米尔特插值可得到次数不高于4的多项式

$x_0=0,x_1=1$

$y_0=0,y_1=1$

$m_0=0,m_1=1$

$$H_3(x)=\sum_{j=0}^{1}y_j\alpha_j(x)+\sum_{j=0}^{1}m_j\beta_j(x)$$

$$\alpha_0(x)=(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2$$

$$=(1+2x)(x-1)^2$$

$$\alpha_1(x)=(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_0})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2$$

$$=(3-2x)x^2$$

$$\beta_0(x)=x(x-1)^2$$

$$\beta_1(x)=(x-1)x^2$$

$\therefore H_3(x)=(3-2x)x^2+(x-1)x^2=-x^3+2x^2$

设 $P(x)=H_3(x)+A(x-x_0)^2(x-x_1)^2$

其中，A 为待定常数

$\because P(2)=1$

$\therefore P(x)=-x^3+2x^2+Ax^2(x-1)^2$

$\therefore A=\dfrac{1}{4}$

从而 $P(x)=\dfrac{1}{4}x^2(x-3)^2$

17. 设 $f(x)=1/(1+x^2)$，在 $-5\le x\le 5$ 上取 $n=10$，按等距节点求分段线性插值函数 $I_h(x)$，计算各节点间中点处的 $I_h(x)$ 与 $f(x)$ 值，并估计误差。

解：

若 $x_0=-5, x_{10}=5$

则步长 $h=1,$

$x_i=x_0+ih, i=0,1,\cdots,10$

$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

在小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上，分段线性插值函数为

$$I_h(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}f(x_i)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}f(x_{i+1})$$

$$=(x_{i+1}-x)\frac{1}{1+x_i^2}+(x-x_i)\frac{1}{1+x_{i+1}{}^2}$$

各节点间中点处的 $I_h(x)$ 与 $f(x)$ 的值为

当 $x=\pm4.5$ 时，$f(x)=0.0471, I_h(x)=0.0486$

当 $x=\pm3.5$ 时，$f(x)=0.0755, I_h(x)=0.0794$

当 $x=\pm2.5$ 时，$f(x)=0.1379, I_h(x)=0.1500$

当 $x=\pm1.5$ 时，$f(x)=0.3077, I_h(x)=0.3500$

当 $x=\pm0.5$ 时，$f(x)=0.8000, I_h(x)=0.7500$

误差

$$\max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f(x) - I_h(x)| \le \frac{h^2}{8} \max_{-5 \le x \le 5} |f''(\xi)|$$

又$\because f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\therefore f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$,

$f''(x) = \dfrac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$

$f'''(x) = \dfrac{24x - 24x^3}{(1+x^2)^4}$

令 $f'''(x) = 0$

得 $f''(x)$ 的驻点为 $x_{1,2} = \pm 1$ 和 $x_3 = 0$

$f''(x_{1,2}) = \dfrac{1}{2}, f''(x_3) = -2$

$\therefore \max\limits_{-5 \le x \le 5} |f(x) - I_h(x)| \le \dfrac{1}{4}$

18．求 $f(x) = x^2$ 在 $[a,b]$ 上分段线性插值函数 $I_h(x)$，并估计误差。

解：

在区间 $[a,b]$ 上， $x_0 = a, x_n = b, h_i = x_{i+1} - x_i, i = 0,1,\cdots,n-1,$

$h = \max\limits_{0 \le i \le n-1} h_i$

$\because f(x) = x^2$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上分段线性插值函数为

$$I_h(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1})$$

$$= \frac{1}{h_i}[{x_i}^2 (x_{i+1} - x) + {x_{i+1}}^2 (x - x_i)]$$

误差为

$$\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|f(x)-I_h(x)|\le\frac{1}{8}\max_{a\le\xi\le b}|f''(\xi)|\bullet h_i^2$$

$\because f(x)=x^2$

$\therefore f'(x)=2x, f''(x)=2$

$$\therefore \max_{a\le x\le b}|f(x)-I_h(x)|\le\frac{h^2}{4}$$

19．求 $f(x)=x^4$ 在 $[a,b]$ 上分段埃尔米特插值，并估计误差。

解：

在 $[a,b]$ 区间上， $x_0=a,x_n=b,h_i=x_{i+1}-x_i,i=0,1,\cdots,n-1,$

令 $h=\max\limits_{0\le i\le n-1}h_i$

$\because f(x)=x^4, f'(x)=4x^3$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的分段埃尔米特插值函数为

$$I_h(x)=(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}})^2(1+2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i})f(x_i)$$

$$+(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i})^2(1+2\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}})f(x_{i+1})$$

$$+(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}})^2(x-x_i)f'(x_i)$$

$$+(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i})^2(x-x_{i+1})f'(x_{i+1})$$

$$=\frac{x_i^4}{h_i^3}(x-x_{i+1})^2(h_i+2x-2x_i)$$

$$+\frac{x_{i+1}^4}{h_i^3}(x-x_i)^2(h_i-2x+2x_{i+1})$$

$$+\frac{4x_i^3}{h_i^2}(x-x_{i+1})^2(x-x_i)$$

$$+\frac{4x_{i+1}^3}{h_i^2}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})$$

误差为

$$|f(x)-I_h(x)|$$

$$=\frac{1}{4!}|f^{(4)}(\xi)|(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2$$

$$\le\frac{1}{24}\max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(\xi)|(\frac{h_i}{2})^4$$

又$\because f(x)=x^4$

$\therefore f^{(4)}(x)=4!=24$

$\therefore \max\limits_{a\le x\le b}\left|f(x)-I_h(x)\right| \le \max\limits_{0\le i\le n-1}\frac{h_i^4}{16}\le\frac{h^4}{16}$

20．给定数据表如下：

X_j	0.25	0.30	0.39	0.45	0.53
Y_j	0.5000	0.5477	0.6245	0.6708	0.7280

试求三次样条插值，并满足条件：

$$(1)S'(0.25)=1.0000,S'(0.53)=0.6868;$$
$$(2)S''(0.25)=S''(0.53)=0.$$

解：

$$h_0=x_1-x_0=0.05$$
$$h_1=x_2-x_1=0.09$$
$$h_2=x_3-x_2=0.06$$
$$h_3=x_4-x_3=0.08$$

$$\because \mu_j=\frac{h_{j-1}}{h_{j-1}-h_j},\lambda_j=\frac{h_j}{h_{j-1}-h_j}$$

$$\therefore \mu_1=\frac{5}{14},\mu_2=\frac{3}{5},\mu_3=\frac{3}{7},\mu_4=1$$

$$\lambda_1=\frac{9}{14},\lambda_2=\frac{2}{5},\lambda_3=\frac{4}{7},\lambda_0=1$$

$$f\left[x_0,x_1\right]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=0.9540$$
$$f\left[x_1,x_2\right]=0.8533$$
$$f\left[x_2,x_3\right]=0.7717$$
$$f\left[x_3,x_4\right]=0.7150$$

$(1)S'(x_0)=1.0000, S'(x_4)=0.6868$

$$d_0=\frac{6}{h_0}(f[x_1,x_2]-f_0')=-5.5200$$

$$d_1=6\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{h_0+h_1}=-4.3157$$

$$d_2=6\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{h_1+h_2}=-3.2640$$

$$d_3=6\frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{h_2+h_3}=-2.4300$$

$$d_4=\frac{6}{h_3}(f_4'-f[x_3,x_4])=-2.1150$$

由此得矩阵形式的方程组为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ \frac{5}{14} & 2 & \frac{9}{14} & & \\ & \frac{3}{5} & 2 & \frac{2}{5} & \\ & & \frac{3}{7} & 2 & \frac{4}{7} \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.5200 \\ -4.3157 \\ -3.2640 \\ -2.4300 \\ -2.1150 \end{pmatrix}$$

求解此方程组得

$$M_0=-2.0278, M_1=-1.4643$$
$$M_2=-1.0313, M_3=-0.8070, M_4=-0.6539$$

$\because$ 三次样条表达式为

$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}$$
$$+(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j}\;(j=0,1,\cdots,n-1)$$

$\therefore$ 将 M_0,M_1,M_2,M_3,M_4 代入得

$$S(x)=\begin{cases}-6.7593(0.30-x)^3-4.8810(x-0.25)^3+10.0169(0.30-x)+10.9662(x-0.25)\\ x\in[0.25,0.30]\\ -2.7117(0.39-x)^3-1.9098(x-0.30)^3+6.1075(0.39-x)+6.9544(x-0.30)\\ x\in[0.30,0.39]\\ -2.8647(0.45-x)^3-2.2422(x-0.39)^3+10.4186(0.45-x)+10.9662(x-0.39)\\ x\in[0.39,0.45]\\ -1.6817(0.53-x)^3-1.3623(x-0.45)^3+8.3958(0.53-x)+9.1087(x-0.45)\\ x\in[0.45,0.53]\end{cases}$$

$(2)S''(x_0)=0,S''(x_4)=0$

$d_0=2f_0''=0,d_1=-4.3157,d_2=-3.2640$

$d_3=-2.4300,d_4=2f_4''=0$

$\lambda_0=\mu_4=0$

由此得矩阵开工的方程组为

$M_0=M_4=0$

$$\begin{pmatrix}2 & \frac{9}{14} & 0\\ \frac{3}{5} & 2 & \frac{2}{5}\\ 0 & \frac{3}{7} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\\ M_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4.3157\\ -3.2640\\ -2.4300\end{pmatrix}$$

求解此方程组，得

$M_0=0,M_1=-1.8809$

$M_2=-0.8616,M_3=-1.0304,M_4=0$

又$\because$三次样条表达式为

$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}$$

$$+(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j}$$

将M_0,M_1,M_2,M_3,M_4代入得

$$\therefore S(x)=\begin{cases}-6.2697(x-0.25)^3+10(0.3-x)+10.9697(x-0.25)\\ x\in[0.25,0.30]\\ -3.4831(0.39-x)^3-1.5956(x-0.3)^3+6.1138(0.39-x)+6.9518(x-0.30)\\ x\in[0.30,0.39]\\ -2.3933(0.45-x)^3-2.8622(x-0.39)^3+10.4186(0.45-x)+11.1903(x-0.39)\\ x\in[0.39,0.45]\\ -2.1467(0.53-x)^3+8.3987(0.53-x)+9.1(x-0.45)\\ x\in[0.45,0.53]\end{cases}$$

21．若 $f(x)\in C^2[a,b], S(x)$ 是三次样条函数，证明：

$$(1)\int_a^b[f''(x)]^2dx-\int_a^b[S''(x)]^2dx$$
$$=\int_a^b[f''(x)-S''(x)]^2dx+2\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]^2dx$$

(2) 若 $f(x_i)=S(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$，式中 x_i 为插值节点，且 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，则

$$\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]dx$$
$$=S''(b)[f'(b)-S'(b)]-S''(a)[f'(a)-S'(a)]$$

证明：

$$(1)\int_a^b[f''(x)-S''(x)]^2dx$$
$$=\int_a^b[f''(x)]^2dx+\int_a^b[S''(x)]^2dx-2\int_a^b f''(x)S''(x)dx$$
$$=\int_a^b[f''(x)]^2dx-\int_a^b[S''(x)]^2dx-2\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]dx$$

从而有

$$\int_a^b[f''(x)]^2dx-\int_a^b[S''(x)]^2dx$$
$$=\int_a^b[f''(x)-S''(x)]^2dx+2\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]dx$$

第三章 函数逼近与曲线拟合

1． $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$，给出 $[0,1]$ 上的伯恩斯坦多项式 $B_1(f,x)$ 及 $B_3(f,x)$。

解：

$$\because f(x)=\sin\frac{\pi}{2}, x\in[0,1]$$

伯恩斯坦多项式为

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})P_k(x)$$

其中 $P_k(x)=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k}$

当 $n=1$ 时，

$$P_0(x)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1-x)$$

$$P_1(x)=x$$

$$\therefore B_1(f,x)=f(0)P_0(x)+f(1)P_1(x)$$

$$=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1-x)\sin(\frac{\pi}{2}\times 0)+x\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=x$$

当 $n=3$ 时，

$$P_0(x)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1-x)^3$$

$$P_1(x)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}x(1-x)^2=3x(1-x)^2$$

$$P_2(x)=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}x^2(1-x)=3x^2(1-x)$$

$$P_3(x)=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}x^3=x^3$$

$$\therefore B_3(f,x)=\sum_{k=0}^{3} f(\frac{k}{n})P_k(x)$$

$$=0+3x(1-x)^2\bullet\sin\frac{\pi}{6}+3x^2(1-x)\bullet\sin\frac{\pi}{3}+x^3\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{3}{2}x(1-x)^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2(1-x)+x^3$$

$$=\frac{5-3\sqrt{3}}{2}x^3+\frac{3\sqrt{3}-6}{2}x^2+\frac{3}{2}x$$

$$\approx 1.5x-0.402x^2-0.098x^3$$

2. 当 $f(x)=x$ 时，求证 $B_n(f,x)=x$

证明：

若 $f(x)=x$，则

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})P_k(x)$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)\cdots[(n-1)-(k-1)+1]}{(k-1)!}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=x\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\
&=x[x+(1-x)]^{n-1}\\
&=x
\end{aligned}
$$

3．证明函数$1,x,\cdots,x^n$线性无关

证明：

若$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0,\forall x\in R$

分别取$x^k(k=0,1,2,\cdots,n)$，对上式两端在$[0,1]$上作带权$\rho(x)\equiv 1$的内积，得

$$
\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$\because$ 此方程组的系数矩阵为希尔伯特矩阵，对称正定非奇异，

$\therefore$ 只有零解 a=0。

$\therefore$ 函数$1,x,\cdots,x^n$线性无关。

4。计算下列函数$f(x)$关于$C[0,1]$的$\|f\|_\infty,\|f\|_1$与$\|f\|_2$：

(1) $f(x)=(x-1)^3,x\in[0,1]$

(2) $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|,$

(3) $f(x)=x^m(1-x)^n,$ m 与 n 为正整数，

(4) $f(x)=(x+1)^{10}e^{-x}$

解：

(1) 若$f(x)=(x-1)^3,x\in[0,1]$，则

$f'(x)=3(x-1)^2\geq 0$

$\therefore\ f(x)=(x-1)^3$ 在 $(0,1)$ 内单调递增

$$\|f\|_\infty=\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$$
$$=\max\{|f(0)|,|f(1)|\}$$
$$=\max\{0,1\}=1$$

$$\|f\|_\infty=\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$$
$$=\max\{|f(0)|,|f(1)|\}$$
$$=\max\{0,1\}=1$$

$$\|f\|_2=(\int_0^1(1-x)^6dx)^{\frac{1}{2}}$$
$$=[\frac{1}{7}(1-x)^7\Big|_0^1]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

(2) 若 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|,x\in[0,1]$，则

$$\|f\|_\infty=\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|=\frac{1}{2}$$
$$\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|dx$$
$$=2\int_{\frac{1}{2}}^1(x-\frac{1}{2})dx$$
$$=\frac{1}{4}$$
$$\|f\|_2=(\int_0^1 f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$$
$$=[\int_0^1(x-\frac{1}{2})^2dx]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

(3) 若 $f(x)=x^m(1-x)^n$, m 与 n 为正整数

当 $x\in[0,1]$ 时, $f(x)\geq 0$

$f'(x)=mx^{m-1}(1-x)^n+x^m n(1-x)^{n-1}(-1)$

$=x^{m-1}(1-x)^{n-1}m(1-\frac{n+m}{m}x)$

当 $x\in(0,\frac{m}{n+m})$ 时, $f'(x)>0$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(0,\frac{m}{n+m})$ 内单调递减

当 $x\in(\frac{m}{n+m},1)$ 时, $f'(x)<0$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(\frac{m}{n+m},1)$ 内单调递减。

$x\in(\frac{m}{n+m},1)f'(x)<0$

$\|f\|_\infty=\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|=$

$=\max\left\{|f(0)|,\left|f(\frac{m}{n+m})\right|\right\}$

$=\frac{m^m\bullet n^n}{(m+n)^{m+n}}$

$\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|dx$

$=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t)^m(1-\sin^2 t)^n d\sin^2 t$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}t\cos^{2n}t\cos t\bullet 2\bullet\sin t dt$

$=\frac{n!m!}{(n+m+1)!}$

$\|f\|_2=[\int_0^1 x^{2m}(1-x)^{2n}dx]^{\frac{1}{2}}$

$=[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{4m}t\cos^{4n}td(\sin^2 t)]^{\frac{1}{2}}$

$=[\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^{4m+1}t\cos^{4n+1}tdt]^{\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{\frac{(2n)!(2m)!}{[2(n+m)+1]!}}$

(4) 若 $f(x)=(x+1)^{10}e^{-x}$

当 $x\in[0,1]$ 时， $f(x)>0$

$f'(x)=10(x+1)^9e^{-x}+(x+1)^{10}(-e^{-x})$
$=(x+1)^9e^{-x}(9-x)$
>0

$\therefore$ $f(x)$ 在$[0,1]$内单调递减。

$\|f\|_\infty=\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|=$
$=\max\{|f(0)|,|f(1)|\}$
$=\frac{2^{10}}{e}$
$\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|dx$
$=\int_0^1(x+1)^{10}e^{-x}dx$
$=-(x+1)^{10}e^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 10(x+1)^9e^{-x}dx$
$=5-\frac{10}{e}$
$\|f\|_2=[\int_0^1(x+1)^{20}e^{-2x}dx]^{\frac{1}{2}}$
$=7(\frac{3}{4}-\frac{4}{e^2})$

5。证明$\|f-g\|\ge\|f\|-\|g\|$

证明：

$\|f\|$
$=\|(f-g)+g\|$
$\le\|f-g\|+\|g\|$
$\therefore\|f-g\|\ge\|f\|-\|g\|$

6。对$f(x),g(x)\in C^1[a,b]$，定义

$(1)(f,g)=\int_a^b f'(x)g'(x)dx$
$(2)(f,g)=\int_a^b f'(x)g'(x)dx+f(a)g(a)$
问它们是否构成内积。
解：

(1) 令 $f(x)\equiv C$（C 为常数，且$C\ne 0$）

则 $f'(x)=0$

而$(f,f)=\int_a^b f'(x)f'(x)dx$

这与当且仅当 $f\equiv 0$ 时，$(f,f)=0$ 矛盾

$\therefore$ 不能构成$C^1[a,b]$上的内积。

(2) 若$(f,g)=\int_a^b f'(x)g'(x)dx+f(a)g(a)$，则

$$(g,f)=\int_a^b g'(x)f'(x)dx+g(a)f(a)=(f,g),\forall\alpha\in K$$

$$\begin{aligned}(\alpha f,g)&=\int_a^b[\alpha f(x)]'g'(x)dx+af(a)g(a)\\&=\alpha[\int_a^b f'(x)g'(x)dx+f(a)g(a)]\\&=\alpha(f,g)\end{aligned}$$

$\forall h\in C^1[a,b]$,则

$$\begin{aligned}(f+g,h)&=\int_a^b[f(x)+g(x)]'h'(x)dx+[f(a)g(a)]h(a)\\&=\int_a^b f'(x)h'(x)dx+f(a)h(a)+\int_a^b f'(x)h'(x)dx+g(a)h(a)\\&=(f,h)+(h,g)\end{aligned}$$

$$(f,f)=\int_a^b[f'(x)]^2dx+f^2(a)\geq 0$$

若$(f,f)=0$，则

$\int_a^b[f'(x)]^2dx=0$,且$f^2(a)=0$

$\therefore f'(x)\equiv 0,f(a)=0$

$\therefore f(x)\equiv 0$

即当且仅当 $f=0$ 时，$(f,f)=0$.

故可以构成$C^1[a,b]$上的内积。

7。令$T_n^*(x)=T_n(2x-1),x\in[0,1]$，试证$\left\{T_n^*(x)\right\}$是在$[0,1]$上带权$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$的正交多项式，并求$T_0^*(x),T_1^*(x),T_2^*(x),T_3^*(x)$。

解：

若$T_n^*(x)=T_n(2x-1),x\in[0,1]$，则

$$\int_0^1 T_n^*(x)T_m^*(x)P(x)dx$$
$$=\int_0^1 T_n(2x-1)T_m(2x-1)\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx$$
令 $t=(2x-1)$，则 $t\in[-1,1]$，且 $x=\frac{t+1}{2}$，故

$$\int_0^1 T_n^*(x)T_m^*(x)\rho(x)dx$$
$$=\int_{-1}^1 T_n(t)T_m(t)\frac{1}{\sqrt{\frac{t+1}{2}-(\frac{t+1}{2})^2}}d(\frac{t+1}{2})$$
$$=\int_{-1}^1 T_n(t)T_m(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

又 $\because$ 切比雪夫多项式 $\left\{T_k^*(x)\right\}$ 在区间 $[0,1]$ 上带权 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 正交，且

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)d\frac{x}{\sqrt{1-t^2}}=\begin{cases}0,n\neq m\\ \frac{\pi}{2},n=m\neq 0\\ \pi,n=m=0\end{cases}$$

$\therefore\left\{T_n^*(x)\right\}$ 是在 $[0,1]$ 上带权 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的正交多项式。

又 $\because T_0(x)=1,x\in[-1,1]$

$\therefore T_0^*(x)=T_0(2x-1)=1,x\in[0,1]$
$\because T_1(x)=x,x\in[-1,1]$
$\therefore T_1^*(x)=T_1(2x-1)=2x-1,x\in[0,1]$

$\because T_2(x)=2x^2-1,x\in[-1,1]$
$\therefore T_2^*(x)=T_2(2x-1)$
$=2(2x-1)^2-1$
$=8x^2-8x-1,x\in[0,1]$

$\because T_3(x)=4x^3-3x,x\in[-1,1]$
$\therefore T_3^*(x)=T_3(2x-1)$

$=4(2x-1)^3-3(2x-1)$
$=32x^3-48x^2+18x-1,x\in[0,1]$

8。对权函数 $\rho(x)=1-x^2$，区间 $[-1,1]$，试求首项系数为 1 的正交多项式 $\varphi_n(x),n=0,1,2,3.$

解：

若 $\rho(x)=1-x^2$，则区间 $[-1,1]$ 上内积为

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\rho(x)dx$$

定义 $\varphi_0(x)=1$，则

$$\varphi_{n+1}(x)=(x-\alpha_n)\varphi_n(x)-\beta_n\varphi_{n-1}(x)$$

其中

$$\alpha_n=(x\varphi_n(x),\varphi_n(x))/(\varphi_n(x),\varphi_n(x))$$
$$\beta_n=(\varphi_n(x),\varphi_n(x))/(\varphi_{n-1}(x),\varphi_{n-1}(x))$$
$$\therefore \alpha_0=(x,1)/(1,1)$$
$$=\frac{\int_{-1}^{1}x(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}(1+x^2)dx}$$
$$=0$$
$$\therefore \varphi_1(x)=x$$
$$\alpha_1=(x^2,x)/(x,x)$$
$$=\frac{\int_{-1}^{1}x^3(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}x^2(1+x^2)dx}$$
$$=0$$
$$\beta_1=(x,x)/(1,1)$$
$$=\frac{\int_{-1}^{1}x^2(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}(1+x^2)dx}$$
$$=\frac{\frac{16}{15}}{\frac{8}{3}}=\frac{2}{5}$$
$$\therefore \varphi_2(x)=x^2-\frac{2}{5}$$

$$\alpha_2 = (x^3 - \frac{2}{5}x, x^2 - \frac{2}{5})/(x^2 - \frac{2}{5}, x^2 - \frac{2}{5})$$
$$= \frac{\int_{-1}^{1}(x^3 - \frac{2}{5}x)(x^2 - \frac{2}{5})(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}(x^2 - \frac{2}{5})(x^2 - \frac{2}{5})(1+x^2)dx}$$
$$= 0$$
$$\beta_2 = (x^2 - \frac{2}{5}, x^2 - \frac{2}{5})/(x, x)$$
$$= \frac{\int_{-1}^{1}(x^2 - \frac{2}{5})(x^2 - \frac{2}{5})(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}x^2(1+x^2)dx}$$
$$= \frac{\frac{136}{525}}{\frac{16}{15}} = \frac{17}{70}$$
$$\therefore \varphi_3(x) = x^3 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{17}{70}x = x^3 - \frac{9}{14}x$$

9。试证明由教材式(2.14)给出的第二类切比雪夫多项式族$\{u_n(x)\}$是$[0,1]$上带权

$\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ 的正交多项式。

证明：

若$U_n(x) = \dfrac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$

令$x = \cos\theta$，可得

$$\int_{-1}^{1}U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx$$
$$= \int_{-1}^{1}\frac{\sin[(m+1)\arccos x]\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$= \int_{\pi}^{0}\frac{\sin[(m+1)\theta\sin[(n+1)\theta]}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}d\theta$$
$$= \int_{0}^{\pi}\sin[(m+1)\theta\sin[(n+1)\theta]d\theta$$

当$m = n$时，

$$\int_{0}^{\pi}\sin^2[(m+1)\theta d\theta$$
$$= \int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos[2(m+1)\theta]}{2}d\theta$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

当$m \neq n$时，

$$\int_0^{\pi} \sin[(m+1)\theta \sin[(n+1)\theta] d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} \sin[(m+1)\theta d\{\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta\}$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta d\{\sin[(m+1)\theta]\}$$
$$= \int_0^{\pi} -\frac{m+1}{n+1}\cos(n+1)\theta\cos(m+1)\theta d\theta$$
$$= -\int_0^{\pi} \frac{m+1}{n+1}\cos[(m+1)\theta] d\{\frac{1}{n+1}\sin[(n+1)\theta]\}$$
$$= -\int_0^{\pi} \frac{m+1}{(n+1)^2}\sin[(n+1)]\theta d\{\cos[(m+1)\theta]\}$$
$$= \int_0^{\pi} (\frac{m+1}{n+1})^2 \sin[(n+1)\theta]\sin[(m+1)\theta] d\theta$$
$$= 0$$
$$\therefore [1-(\frac{m+1}{n+1})^2]\int_0^{\pi} \sin[(n+1)\theta]\sin[(m+1)\theta] d\theta = 0$$
又$\because m \neq n$，故$(\frac{m+1}{n+1})^2 \neq 1$
$$\therefore \int_0^{\pi} \sin[(n+1)\theta]\sin[(m+1)\theta] d\theta = 0$$
得证。

10。证明切比雪夫多项式$T_n(x)$满足微分方程

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$$

证明：
切比雪夫多项式为

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x), |x| \leq 1$$

从而有

$$T_n'(x) = -\sin(n\arccos x) \bullet n \bullet (\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}})$$

$$= \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x)$$

$$T_n''(x) = \frac{n}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(n\arccos x) - \frac{n^2}{1-x^2}\cos(n\arccos x)$$

$$\therefore (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x)$$

$$= \frac{nx}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x) - n^2\cos(n\arccos x)$$

$$-\frac{nx}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x) + n^2\cos(n\arccos x)$$

$$= 0$$

得证。

11。假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，求 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式？

解：

$\because f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续

$\therefore$ 存在 $x_1, x_2 \in [a,b]$，使

$$f(x_1) = \min_{a \le x \le b} f(x),$$

$$f(x_2) = \max_{a \le x \le b} f(x),$$

取 $P = \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$

则 x_1 和 x_2 是 $[a,b]$ 上的 2 个轮流为“正”、“负”的偏差点。

由切比雪夫定理知

P 为 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式。

12。选取常数 a，使 $\max\limits_{0 \le x \le 1}\left|x^3 - ax\right|$ 达到极小，又问这个解是否唯一？

解：

令 $f(x) = x^3 - ax$

则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为奇函数

$$\therefore \max_{0 \le x \le 1}\left|x^3 - ax\right|$$

$$= \max_{-1 \le x \le 1}\left|x^3 - ax\right|$$

$$= \|f\|_\infty$$

又$\because f(x)$的最高次项系数为 1，且为 3 次多项式。

$\therefore \omega_3(x)=\frac{1}{2^3}T_3(x)$ 与 0 的偏差最小。

$$\omega_3(x)=\frac{1}{4}T_3(x)=x^3-\frac{3}{4}x$$

从而有 $a=\frac{3}{4}$

13。求 $f(x)=\sin x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最佳一次逼近多项式，并估计误差。

解：

$$\because f(x)=\sin x, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

$$f'(x)=\cos x, f''(x)=-\sin x\le 0$$

$$a_1=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{2}{\pi},$$

$$\cos x_2=\frac{2}{\pi},$$

$$\therefore x_2=\arccos\frac{2}{\pi}\approx 0.88069$$

$$f(x_2)=0.77118$$

$$a_0=\frac{f(a)+f(x_2)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\bullet\frac{a+x_2}{2}$$

$$=0.10526$$

于是得 $f(x)$ 的最佳一次逼近多项式为

$$P_1(x)=0.10526+\frac{2}{\pi}x$$

即

$$\sin x\approx 0.10526+\frac{2}{\pi}x, 0\le x\le\frac{\pi}{2}$$

误差限为

$$\|\sin x-P_1(x)\|_\infty$$

$$=|\sin 0-P_1(0)|$$

$$=0.10526$$

14。求 $f(x)=e^x\left[0,1\right]$ 在 $\left[0,1\right]$ 上的最佳一次逼近多项式。

解：

$$\because f(x)=e^x, x\in\left[0,1\right]$$

$$\therefore f'(x)=e^x,$$

$$f''(x)=e^x>0$$

$$a_1 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = e-1$$

$$e^{x_2} = e-1$$

$$x_2 = \ln(e-1)$$

$$f(x_2) = e^{x_2} = e-1$$

$$a_0 = \frac{f(a)+f(x_2)}{2} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \bullet \frac{a+x_2}{2}$$

$$= \frac{1+(e-1)}{2} - (e-1)\frac{\ln(e-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(e-1)$$

于是得 $f(x)$ 的最佳一次逼近多项式为

$$P_1(x) = \frac{e}{2} + (e-1)[x - \frac{1}{2}\ln(e-1)]$$

$$= (e-1)x + \frac{1}{2}[e-(e-1)\ln(e-1)]$$

15。求 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 1$ 在区间 $[0,1]$ 上的三次最佳一致逼近多项式。

解：

$$\because f(x) = x^4 + 3x^3 - 1, x \in [0,1]$$

令 $t = 2(x - \frac{1}{2})$，则 $t \in [-1,1]$

且 $x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$

$$\therefore f(t) = (\frac{1}{2}t + \frac{1}{2})^4 + 3(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2})^3 - 1$$

$$= \frac{1}{16}(t^4 + 10t^3 + 24t^2 22t - 9)$$

令 $g(t) = 16f(t)$，则 $g(t) = t^4 + 10t^3 + 24t^2 + 22t - 9$

若 $g(t)$ 为区间 $[-1,1]$ 上的最佳三次逼近多项式 $P_3^*(t)$ 应满足

$$\max_{-1 \le t \le 1} \left| g(t) - P_3^*(t) \right| = \min$$

当 $g(t) - P_3^*(t) = \frac{1}{2^3}T_4(t) = \frac{1}{8}(8t^4 - 8t^2 + 1)$

时，多项式 $g(t) - P_3^*(t)$ 与零偏差最小，故

$$_3^*(t)=g(t)-\frac{1}{2^3}T_4(t)$$
$$=10t^3+25t^2+22t-\frac{73}{8}$$

进而，$f(x)$ 的三次最佳一致逼近多项式为 $\frac{1}{16}P_3^*(t)$，则 $f(x)$ 的三次最佳一致逼近多项式为

$$P_3^*(t)=\frac{1}{16}[10(2x-1)^3+25(2x-1)^2+22(2x-1)-\frac{73}{8}]$$
$$=5x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{129}{128}$$

16。$f(x)=|x|$，在 $[-1,1]$ 上求关于 $\Phi=span\{1,x^2,x^4\}$ 的最佳平方逼近多项式。

解：

$\because f(x)=|x|,x\in[-1,1]$

若 $(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$

且 $\varphi_0=1,\varphi_1=x^2,\varphi_2=x^4$，则

$$\|\varphi_0\|_2^2=2,\|\varphi_1\|_2^2=\frac{2}{5},\|\varphi_2\|_2^2=\frac{2}{9},$$
$$(f,\varphi_0)=1,(f,\varphi_1)=\frac{1}{2},(f,\varphi_2)=\frac{1}{3},$$
$$(\varphi_0,\varphi_1)=1,(\varphi_0,\varphi_2)=\frac{2}{5},(\varphi_1,\varphi_2)=\frac{2}{7},$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

解得

$$\begin{cases} a_0=0.1171875 \\ a_1=1.640625 \\ a_2=-0.8203125 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi=span\{1,x^2,x^4\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x) = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4$$
$$= 0.1171875 + 1.640625x^2 - 0.8203125x^4$$

17。求函数 $f(x)$ 在指定区间上对于 $\Phi = span\{1, x\}$ 的最佳逼近多项式：

$$(1) f(x) = \frac{1}{x}, [1,3]; (2) f(x) = e^x, [0,1];$$
$$(3) f(x) = \cos \pi x, [0,1]; (4) f(x) = \ln x, [1,2];$$

解：

$(1) \because f(x) = \dfrac{1}{x}, [1,3];$

若 $(f, g) = \int_1^3 f(x)g(x)dx$

且 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x,$，则有

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 2, \|\varphi_1\|_2^2 = \frac{26}{3},$$
$$(\varphi_0, \varphi_1) = 4,$$
$$(f, \varphi_0) = \ln 3, (f, \varphi_1) = 2,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & \frac{26}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a_0 = 1.1410 \\ a_1 = -0.2958 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi = span\{1, x\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x) = a_0 + a_1x$$
$$= 1.1410 - 0.2958x$$

$(2) \because f(x) = e^x, [0,1]$

若 $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

且 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x,$，则有

$\|\varphi_0\|_2^2=1, \|\varphi_1\|_2^2=\frac{1}{3},$

$(\varphi_0,\varphi_1)=\frac{1}{2},$

$(f,\varphi_0)=e-1, (f,\varphi_1)=1,$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a_0=0.1878 \\ a_1=1.6244 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi=span\{1,x\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x)=a_0+a_1x$$
$$=0.1878+1.6244x$$

$(3)\because f(x)=\cos\pi x, x\in[0,1]$

若 $(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$

且 $\varphi_0=1,\varphi_1=x,$，则有

$\|\varphi_0\|_2^2=1, \|\varphi_1\|_2^2=\frac{1}{3},$

$(\varphi_0,\varphi_1)=\frac{1}{2},$

$(f,\varphi_0)=0, (f,\varphi_1)=-\frac{2}{\pi^2},$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{\pi^2} \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a_0=1.2159 \\ a_1=-0.24317 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi = span\{1,x\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x) = a_0 + a_1 x$$
$$= 1.2159 - 0.24317x$$

(4) $\because f(x) = \ln x, x \in [1,2]$

若 $(f,g) = \int_1^2 f(x)g(x)dx$

且 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x$, 则有

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 1, \|\varphi_1\|_2^2 = \frac{7}{3},$$
$$(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{3}{2},$$
$$(f, \varphi_0) = 2\ln 2 - 1, (f, \varphi_1) = 2\ln 2 - \frac{3}{4},$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ln 2 - 1 \\ 2\ln 2 - \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a_0 = -0.6371 \\ a_1 = 0.6822 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi = span\{1,x\}$ 最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x) = a_0 + a_1 x$$
$$= -0.6371 + 0.6822x$$

18。 $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$，在 $[-1,1]$ 上按勒让德多项式展开求三次最佳平方逼近多项式。

解：

$\because f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x, x \in [-1,1]$

按勒让德多项式 $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ 展开

$$(f(x),P_0(x))=\int_{-1}^{1}\sin\frac{\pi}{2}xdx=\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\Big|_{1}^{-1}=0$$

$$(f(x),P_1(x))=\int_{-1}^{1}x\sin\frac{\pi}{2}xdx=\frac{8}{\pi^2}$$

$$(f(x),P_2(x))=\int_{-1}^{1}(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2})\sin\frac{\pi}{2}xdx=0$$

$$(f(x),P_3(x))=\int_{-1}^{1}(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x)\sin\frac{\pi}{2}xdx=\frac{48(\pi^2-10)}{\pi^4}$$

则

$$a_0^*=(f(x),P_0(x))/2=0$$

$$a_1^*=3(f(x),P_1(x))/2=\frac{12}{\pi^2}$$

$$a_2^*=5(f(x),P_2(x))/2=0$$

$$a_3^*=7(f(x),P_3(x))/2=\frac{168(\pi^2-10)}{\pi^4}$$

从而 $f(x)$ 的三次最佳平方逼近多项式为

$$S_3^*(x)=a_0^*P_0(x)+a_1^*P_1(x)+a_2^*P_2(x)+a_3^*P_3(x)$$

$$=\frac{12}{\pi^2}x+\frac{168(\pi^2-10)}{\pi^4}(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x)$$

$$=\frac{420(\pi^2-10)}{\pi^4}x^3+\frac{120(21-2\pi^2)}{\pi^4}$$

$$\approx 1.5531913x-0.5622285x^3$$

19。观测物体的直线运动，得出以下数据：

时间 t(s)	0	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
距离 s(m)	0	10	30	50	80	110

求运动方程。

解：

被观测物体的运动距离与运动时间大体为线性函数关系，从而选择线性方程

$$s=a+bt$$

令 $\Phi=span\{1,t\}$

则

$$\|\varphi_0\|_2^2=6,\|\varphi_1\|_2^2=53.63,$$

$$(\varphi_0,\varphi_1)=14.7,$$

$$(\varphi_0,s)=280,(\varphi_1,s)=1078,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix}6 & 14.7\\14.7 & 53.63\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}280\\1078\end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a = -7.855048 \\ b = 22.25376 \end{cases}$$

故物体运动方程为

$S = 22.25376t - 7.855048$

20。已知实验数据如下：

x_i	19	25	31	38	44
y_j	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

用最小二乘法求形如 $s = a + bx^2$ 的经验公式，并计算均方误差。

解：

若 $s = a + bx^2$，则

$\Phi = span\{1, x^2\}$

则

$\|\varphi_0\|_2^2 = 5, \|\varphi_1\|_2^2 = 7277699,$

$(\varphi_0, \varphi_1) = 5327,$

$(f, \varphi_0) = 271.4, (f, \varphi_1) = 369321.5,$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a = 0.9726046 \\ b = 0.0500351 \end{cases}$$

故 $y = 0.9726046 + 0.0500351x^2$

均方误差为 $\delta = [\sum_{j=0}^{4}(y(x_j) - y_j)^2]^{\frac{1}{2}} = 0.1226$

21。在某佛堂反应中，由实验得分解物浓度与时间关系如下：

时间 t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
浓　度 $y(\times 10^{-4})$	0	1.27	2.16	2.86	3.44	3.87	4.15	4.37	4.51	4.58	4.62	4.64

用最小二乘法求 $y = f(t)$。

解：

观察所给数据的特点，采用方程

$$y = ae^{\frac{-b}{t}}, (a, b > 0)$$

两边同时取对数，则

$$\ln y = \ln a - \frac{b}{t}$$

取 $\Phi = span\left\{1, -\frac{1}{t}\right\}, S = \ln y, x = -\frac{1}{t}$

则 $S = a^* + b^* x$

$\|\varphi_0\|_2^2 = 11, \|\varphi_1\|_2^2 = 0.062321,$
$(\varphi_0, \varphi_1) = -0.603975,$
$(\varphi_0, f) = -87.674095, (\varphi_1, f) = 5.032489,$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 11 & -0.603975 \\ -0.603975 & 0.062321 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -87.674095 \\ 5.032489 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a^* = -7.5587812 \\ b^* = 7.4961692 \end{cases}$$

因此

$$a = e^{a^*} = 5.2151048$$
$$b = b^* = 7.4961692$$

$$\therefore\ y = 5.2151048 e^{-\frac{7.4961692}{t}}$$

22。给出一张记录 $\{f_k\} = (4,3,2,1,0,1,2,3)$, 用 FFT 算法求 $\{c_k\}$ 的离散谱。

解：

$\{f_k\} = (4,3,2,1,0,1,2,3),$

则 $k = 0,1,\cdots,7, N = 8$

$$\omega^0 = \omega^4 = 1,$$

$$\omega^1 = \omega^5 = e^{-\frac{\pi}{4}i},$$

$$\omega^2 = \omega^6 = e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i,$$

$$\omega^3 = \omega^7 = e^{-\frac{3\pi}{4}i},$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_k	4	3	2	1	0	1	2	3
A_1	4	4	4	2ω	4	0	4	$-2\omega^3$
A_2	8	4	0	4	8	$2\sqrt{2}$	0	$-2\sqrt{2}$
C_j	16	$4+2\sqrt{2}$	0	$4-2\sqrt{2}$	0	$4-2\sqrt{2}$	0	$4+2\sqrt{2}$

23，用辗转相除法将 $R_{22}(x)=\dfrac{3x^2+6x}{x^2+6x+6}$ 化为连分式。

解

$$R_{22}(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2+6x+6}$$
$$=3-\frac{12x+18}{x^2+6x+6}$$
$$=3-\cfrac{12}{x+\cfrac{9}{2}-\cfrac{\frac{3}{4}}{x+\frac{3}{2}}}$$
$$=3-\frac{12}{x+4.5}-\frac{0.75}{x+1.5}$$

24。求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的 $(3,3)$ 阶帕德逼近 $R_{33}(x)$。

解:

由 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开为

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

得 $C_0=0,$

$C_1=1,$

$C_2=0,$

$C_3=-\dfrac{1}{3!}=-\dfrac{1}{6},$

$C_4=0,$

$C_5=\dfrac{1}{5!}=\dfrac{1}{120},$

$C_6 = 0,$

从而

$$-C_1 b_3 - C_2 b_2 - C_3 b_1 = C_4$$
$$-C_2 b_3 - C_3 b_2 - C_4 b_1 = C_5$$
$$-C_3 b_3 - C_4 b_2 - C_5 b_1 = C_6$$

即

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{120} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{120} \\ 0 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} b_3 = 0 \\ b_2 = \frac{1}{20} \\ b_1 = 0 \end{cases}$$

又$\because a_k = \sum_{j=0}^{k-1} C_j b_{k-j} + C_k (k = 0,1,2,3)$

则

$$a_0 = C_0 = 0$$
$$a_1 = C_0 b_1 + C_1 = 0$$
$$a_2 = C_0 b_2 + C_1 b_1 = 0$$
$$a_3 = C_0 b_3 + C_1 b_2 + C_2 b_1 + C_3 = -\frac{7}{60}$$

故

$$R_{33}(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3}{1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3}$$

$$=\frac{x-\dfrac{7}{60}x^3}{1+\dfrac{1}{20}x^2}$$

$$=\frac{60x-7x^3}{60+3x^3}$$

25。求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的 $(2,1)$ 阶帕德逼近 $R_{21}(x)$ 。

解:

由 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开为

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

得

$$C_0=1,$$
$$C_1=1,$$
$$C_2=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2},$$
$$C_3=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6},$$

从而

$$-C_2b_1=C_3$$

即

$$-\frac{1}{2}b_1=\frac{1}{6}$$

解得

$$b_1=-\frac{1}{3}$$

又 $\because a_k=\sum_{j=0}^{k-1}C_jb_{k-j}+C_k(k=0,1,2)$

则

$$a_0=C_0=1$$

$$a_1=C_0b_1+C_1=\frac{2}{3}$$

$$a_2=C_1b_1+C_2=\frac{1}{6}$$

故

$$R_{21}(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{1+b_1x}$$

$$=\frac{1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}{1-\frac{1}{3}x}$$

$$=\frac{6+4x+x^2}{6-2x}$$

$$(2)\int_a^b S''(x)\left[f''(x)-S''(x)\right]dx$$

$$=\int_a^b S''(x)d\left[f'(x)-S'(x)\right]$$

$$=S''(x)\left[f'(x)-S'(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b\left[f'(x)-S'(x)\right]d[S''(x)]$$

$$=S''(b)\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\left[f'(a)-S'(a)\right]-\int_a^b S'''(x)\left[f'(x)-S'(x)\right]dx$$

$$=S''(b)\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\left[f'(a)-S'(a)\right]-\sum_{k=0}^{n-1}S'''(\frac{x_k+x_{k+1}}{2})\bullet\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[f'(x)-S'(x)\right]dx$$

$$=S''(b)\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\left[f'(a)-S'(a)\right]-\sum_{k=0}^{n-1}S'''(\frac{x_k+x_{k+1}}{2})\bullet\left[f'(x)-S'(x)\right]\Big|_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$=S''(b)\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\left[f'(a)-S'(a)\right]$$

第四章　　数值积分与数值微分

1.确定下列求积公式中的特定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度：

$(1)\int_{-h}^{h}f(x)dx\approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h);$

$(2)\int_{-2h}^{2h}f(x)dx\approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h);$

$(3)\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]/3;$

$(4)\int_0^h f(x)dx\approx h[f(0)+f(h)]/2+ah^2[f'(0)-f'(h)];$

解：

求解求积公式的代数精度时，应根据代数精度的定义，即求积公式对于次数不超过 m 的多项式均能准确地成立，但对于 m+1 次多项式就不准确成立，进行验证性求解。

（1）若 $(1)\int_{-h}^{h}f(x)dx\approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$

令 $f(x)=1$，则

$2h = A_{-1} + A_0 + A_1$

令 $f(x) = x$，则

$0 = -A_{-1}h + A_1 h$

令 $f(x) = x^2$，则

$\frac{2}{3}h^3 = h^2 A_{-1} + h^2 A_1$

从而解得

$$\begin{cases} A_0 = \frac{4}{3}h \\ A_1 = \frac{1}{3}h \\ A_{-1} = \frac{1}{3}h \end{cases}$$

令 $f(x) = x^3$，则

$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \int_{-h}^{h} x^3 dx = 0$

$A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h) = 0$

故 $\int_{-h}^{h} f(x)dx = A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$ 成立。

令 $f(x) = x^4$，则

$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \int_{-h}^{h} x^4 dx = \frac{2}{5}h^5$

$A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h) = \frac{2}{3}h^5$

故此时，

$\int_{-h}^{h} f(x)dx \neq A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$

故 $\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$

具有 3 次代数精度。

（2）若 $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$

令 $f(x) = 1$，则

$4h = A_{-1} + A_0 + A_1$