福州大学 2009～2010 学年第一学期考试 A 卷

课程名称 数值分析 考试日期 2010.01.15

考生姓名 周登龙 学号 ______ 专业或类别 ______

题号	一	二	三	四	总分	累分人
题分	15	20	40	25	100	签名
得分						

考生注意事项：1、本试卷共 6 页，请查看试卷中是否有缺页。

2、考试结束后，考生不得将试卷、答题纸和草稿纸带出考场。

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

得分	评卷人

$\sqrt{11}=3.\cdots$

误差 $=\frac{1}{2a}\times 10^{-(n-1)}$

1、要使 $\sqrt{11}$ 的近似值的相对误差限小于 0.1%，要取几位有效数字？ C

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

2、设 $x_i(i=0,1,2,3,4)$ 为互异结点，$l_i(x)$ 为拉格朗日插值基函数，则 $\sum_{i=0}^{4}(x_i-x_j)^2 l_i(x)$ 等于 A

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4

3、给定方程组 $\begin{cases} x_1-ax_2=b_1 \\ -ax_1+x_2=b_2 \end{cases}$，其中 a 为实数，当 a 满足以下条件，且 $0<\omega<2$ 时，SOR 迭代法收敛. C

① A为对称正定矩阵. A=D-L-U

② 0<w<2

(a) $|a|<2$ (b) $|a|>\frac{1}{2}$ (c) $|a|<1$ (d) $|a|>1$

4、用二分法求方程 $f(x)=x^3+x-1=0$ 在区间[0, 1]内的根，二分两次后根所在区间为： C

$x_0=\frac{1}{2}$

a f(0) < 0

b f(1) > 0

$\frac{a+b}{2}$ $f(\frac{1}{2})$ < 0

a_1 $f(\frac{1}{2})<0$

b_1 $f(1)>0$

$[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

$f(a_1)f(x_1)<0$

(a) $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ (c) $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ (d) $\left(\frac{3}{4},1\right)$

5、若 x 的相对误差为 δ，则 x^n 的相对误差为

(a) δ (b) $n\delta$ (c) $\frac{\delta}{n}$ (d) δ^n

$C_p = \left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right| = \frac{x \cdot n x^{n-1}}{x^n} = n$ (b)

$e_r(f(x)) = C_p \cdot e_r(x) = n\delta$

二、填空题（每空格 2 分，共 20 分）

得分	评卷人

1、已知 $f(1)=0, f(-1)=-3, f(2)=4$，写出 $f(x)$ 的牛顿插值多项式 $P_2(x)$ = $\frac{5}{6}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{7}{3}$，其余项表达式 $R(x)$= $f[x,1,-1,2](x-1)(x+1)(x-2)$

2、 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$，则 A 的谱半径 $\rho(A)$= $\sqrt{6}+1$，A 的 $\mathrm{cond}(A)_1$ = $\frac{16}{5}$

$\|A^{-1}\|_1 \quad \|A\|_1$

$\frac{4}{5} \times 4$

3、 确定求积公式 $\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_0 f(-h) + A_1 f(0) + A_2 f(h)$ 中的待定参数，使其代数精度尽量高，则 A_0= $\frac{h}{3}$，A_1= $\frac{4}{3}h$，A_2= $\frac{h}{3}$，代数精度= 3

$1, x, x^2$ $f(x)=1$ $f(x)=x^2$ $f(x)=x$

4、若向量 $x=(-1,-2,-3)^T$，则 $\|x\|_\infty$ = 3

5、设 $a>0$，用牛顿迭代法于方程 $f(x)=1-\frac{a}{x^2}=0$，求 $\sqrt{a}$ 近似值的迭代公式为：

$x_{n+1} = x_n - \frac{f}{f'} = x_n - \frac{1-\frac{a}{x_n^2}}{2\frac{a}{x_n^3}} = \frac{x_n^3 - a x_n}{2a} = \frac{1}{2}\left(3x_n - \frac{x_n^3}{a}\right)$

三、计算题（共 40 分）

得分	评卷人

1、（8 分）用辛普生公式计算积分 $\int_0^1 \sin(\frac{\pi}{2}x)dx$，并估计误差。

$f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}x) \Rightarrow f'(x)=\cos\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}$ $f''(x)=-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}x$

$S=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{b+a}{2}\right)+f(b)\right]$

$=\frac{1}{6}\left(0+4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)$

$=\frac{1}{6}(1+2\sqrt{2})$

$x_n + \frac{x_n^3 - a x_n}{2a}$

$\frac{1}{2}x_n + \frac{x_n^3}{2a}$

$f'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x$ $f''(x)=\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}x$

$f'''(x)=\frac{\pi^3}{8}\cos\frac{\pi}{2}x$ $f^{(4)}(x)=\frac{\pi^4}{16}\sin\frac{\pi}{2}x$

$\therefore |R| = \left|-\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi)\right| \le \frac{1}{180}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{\pi^4}{16} = 2.11\times10^{-3}$

2、 (10 分)用梯形法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = x + y, & 0 \le x \le 0.3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

取步长 h=0.1（小数点后保留 2 位有效数字）

$\cancel{x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(x_n + y_n + x_{n+1} + y_{n+1})}$

$x_0 = 0$

$x_1 = 0.1$

$x_2 = 0.2$

$x_3 = 0.3$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(x_n + y_n + x_{n+1} + y_{n+1})$$

解得 $y_{n+1} = \dfrac{(1+\frac{h}{2})y_n + \frac{h}{2}x_n + \frac{h}{2}x_{n+1}}{1-\frac{h}{2}}$

二分法

$|x^* - x_k| \le \frac{b-a}{2^{k+1}} =$

ε 为精度

$$y(0.1) = \frac{(1+0.05)\times 1 + 0.05\times 0 + 0.05\times 0.1}{1-0.05} = 1.11$$

$$y(0.2) = \frac{(1+0.05)\times 1.11 + 0.05\times 0.1 + 0.05\times 0.2}{1-0.05} = 1.24$$

$$y(0.3) = \frac{(1+0.05)\times 1.24 + 0.05\times 0.2 + 0.05\times 0.3}{1-0.05} = 1.40$$

3、 (10 分)用最小二乘法求拟合函数 $y = a + bx + cx^2$ 使其与下列数据相拟合

x_i^2	4	1	0	1	4
x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1	2	3	2	1

$\varphi = \{1, x, x^2\}$

$(\varphi_0, \varphi_0) = 5$, $(\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_1, \varphi_0) = \sum x_i = 0$. $(\varphi_0, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_0) = \sum x_i^2 = 10$

$(\varphi_1, \varphi_1) = \sum x_i^2 = 10$, $(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_1) = \sum x_i^3 = 0$ $(\varphi_2, \varphi_2) = \sum x_i^4 = 34$

$(\varphi_0, f) = \sum f_i = 9$ $(\varphi_1, f) = \sum x_i f_i = 0$, $(\varphi_2, f) = \sum x_i^2 f = 12$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{93}{35} \\ b = 0 \\ c = -\frac{3}{7} \end{cases}$$

$\therefore y = \frac{93}{35} - \frac{3}{7}x^2$

4、（12 分）设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 2 & -4 & 5\end{bmatrix}$

(1) 求矩阵 A 的 LU 分解，其中 L 为单位下三角矩阵，U 为上三角矩阵

(2) 试用反射变换对矩阵 A 进行 QR 分解，其中 Q 为正交矩阵，R 为上三角阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 2 & -4 & 5\end{bmatrix} \qquad A=LU$$

$$=\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ & -3 & -3\\ & & 9\end{bmatrix}$$

①

$$A=LU=\begin{pmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ & -3 & -3\\ & & 9\end{pmatrix}$$

② $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 2 & -4 & 5\end{pmatrix}$

$H=I-\beta^{-1}uu^T$

$\sigma=\operatorname{sgn}|x_1|\,\|x\|_2$

$u=x+\sigma e$

$\beta=\sigma(\sigma+x_1)$

取 $x_1=(1\ 2\ 2)^T$

$\sigma=\sqrt{1+4+4}=3$

$u=(1,2,2)^T+(3,0,0)^T$

$=(4,2,2)^T$

$uu^T=\begin{pmatrix}16 & 8 & 8\\ 8 & 4 & 4\\ 8 & 4 & 4\end{pmatrix}$

$\beta=3(3+1)=12$

$\therefore H_1=I-\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

$H_1A=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -3\\ 0 & 0 & -3\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$

取 $x_2=\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}$

$\sigma=3 \quad u=(3,3)^T$

$\beta=9. \quad uu^T=\begin{pmatrix}9 & 9\\ 9 & 9\end{pmatrix}$

$H_2'=I-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$H_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$

$H_2H_1A=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -3\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

$\therefore R=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -3\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

$Q=H_1H_2$

$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}-\frac{8}{3}=-3$

四、分析证明题（共 25 分）

得分	评卷人

1、（8 分）设方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ $(a_{11}, a_{22} \neq 0)$ 证明解此方程的 Jacobi 迭代法与 Gauss-Seidel 迭代法同时收敛或发散。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = D - L - U = \begin{pmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobi 迭代式中 $J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & \\ & \frac{1}{a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & -a_{12} \\ -a_{21} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{pmatrix}$

$|I\lambda - J| = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} = 0$ $\rho(J) = \sqrt{\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}}$

Gauss-Seidel 迭代式中 $G = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}a_{22}} & \frac{1}{a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & -\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \end{pmatrix}$

$|I\lambda - G| = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \lambda + \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}a_{22}} \end{vmatrix}$

$\rho(G) = |\lambda_{max}| = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$

若 $\rho(G) > 1$ 则 $\rho(J) > 1$ 若 $\rho(G) < 1$ 则 $\rho(J) < 1$ ∴ ~

2、（8 分）考虑求解方程 $2\cos x - 3x + 12 = 0$ 的迭代公式

$x_{k+1} = 4 + \frac{2}{3}\cos x_k \quad k = 0, 1, 2, \cdots$

试证：对任意的初始近似 $x_0 \in R$，该方法收敛，并判断该方法的收敛阶。

解：$\varphi(x) = 4 + \frac{2}{3}\cos x$

$|\varphi'(x)| = |\frac{2}{3}\sin x| < 1$

∴对 $\forall x$ 收敛

又∵ $\varphi'(x) \neq 0$

∴是一阶收敛

3、（9 分） 设有常微分方程的初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 试用 Taylor 展开原理构造形如 $y_{n+1} = \alpha(y_n + y_{n-1}) + h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1})$ 的方法，使其具有二阶精度，并推导其局部截断误差主项。

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - \alpha(y(x_n) + y(x_{n-1})) - h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1})$$

$$y_{n+1} = y_n + hy_n' + \frac{h^2}{2}y_n'' + \frac{h^3}{3!}y_n''' + O(h^4) \quad f_n = y_n'$$

$$y_{n-1} = y_n - hy_n' + \frac{h^2}{2}y_n'' - \frac{h^3}{3!}y_n''' + O(h^3) \quad f_{n-1} = y_{n-1}' = y_n' - hy_n'' + \frac{h^2}{2}y_n''' + O(h^3)$$

$$T_{n+1} = (1-2\alpha)y_n + (1+\alpha-\beta_0-\beta_1)hy_n' + (\beta_1 - \frac{\alpha}{2})h^2 y_n'' + (\frac{1}{3!} + \frac{\alpha}{3!} - \frac{\beta_1}{2})h^3 y_n''' + O(h^4)$$

令 $\begin{cases} 1-2\alpha = 0 \\ 1+\alpha-\beta_0-\beta_1 = 0 \\ \frac{1}{2} + \beta_1 - \frac{\alpha}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta_0 = \frac{7}{4} \\ \beta_1 = -\frac{1}{4} \end{cases}$

$\therefore y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}) + h(\frac{7}{4}f_n - \frac{1}{4}f_{n-1})$

$T_{n+1} = \frac{3h^3}{8}y_n''' + O(h^4)$

有2阶精度，主项为 $\frac{3h^3}{8}y_n'''$

$$\cancel{\frac{1}{3!} + \frac{\alpha}{3!} - \frac{\beta_1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{4+2+3}{24} = \frac{9}{24}}$$