课程名称 数值计算 考试日期 2018.11.08

考生姓名________ 学号________ 专业或类别 软件工程

题号	一	二	三	总分	累分人签名
题分	21	24	55	100	
得分					

考生注意事项：1、本试卷共 5 页，请查看试卷中是否有缺页。
2、考试结束后，考生不得将试卷、答题纸和草稿纸带出考场。

得分	评卷人

一、 选择题 (每小题 3 分，共 21 分)

1. 为了避免在计算中产生较大的舍入误差，应采取一些原则，不正确的是（ C ）

A. 避免两个相近的数据相减　　B. 尽量减少乘法运算

C. 避免选择绝对值很小的数作为被除数　　D. 避免大数和很小的数直接相减

2. 用顺序消元法解线性方程组，消元过程中要求（ A ）

A. $a_{kk}^{(k)} \neq 0$　　B. $a_{ij} \neq 0$　　C. $a_{11}^{(0)} \neq 0$　　D. $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$

3. 用分段线性插值求出的函数 $y=\frac{1}{1+x}$ 在区间[0，1]的表达式是（ B ）

A. $\frac{3}{2}x-1$　　B. $1-\frac{1}{2}x$　　C. $1-x$　　D. $\frac{1}{2}x$

4. 已知 n 对观测数据 $\{(x_k,y_k)\}_{k=1}^{n}$。用这 n 数据均方拟合直线为 $y=a_0x+a_1$，则 a_0,a_1 是使（ D ）最小的解。

A. $\sum_{k=1}^{n}|y_k-a_0-a_1x_k|$　　B. $\sum_{k=1}^{n}(y_k-a_0-a_1x_k)$

C. $\sum_{k=1}^{n}(y_k-a_0-a_1x_k^2)$　　D. $\sum_{k=1}^{n}(y_k-a_0x_k-a_1)^2$

5. 若复合辛普生公式计算定积分 $\int_0^1 e^{-x}dx$,要求截断误差的绝对值不超过 0.5×10^{-4}，试问 $n\geq$（ A ）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 1

A. $O(h^2)$　　B. $O(h^4)$　　C. $O(h^5)$　　D. $O(h^3)$

7. 求解常微分方程 $y'(x) = x - y$，取步长 $h = 0.1$ 的欧拉法计算公式为（ B ）

A. $y_{n+1} = 0.05x_n - 0.95y_n$　　B. $y_{n+1} = 0.1x_n + 0.9y_n$

C. $y_{n+1} = 0.05x_n + 0.95y_n + 0.05[x_{n+1} - y_{n+1}]$　　D. $y_{n+1} = 0.1x_n - 0.9y_n$

得分	评卷人

二、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 下列数据

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	2	0	3	5

确定的唯一插值多项式的次数为 4 。

2. 为使计算结果较精确，可改变函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$ 的形式成为 $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$

3. 在数值法求解数学模型时，用有限过程代替无限过程所引起的，正确解和模型准确解之间的误差称为 截断 误差。

4. 已知求积公式 $\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{8}[f(0) + 6f(\alpha) + f(1)]$ 至少具 1 次代数精度，则 $\alpha =$ 0.5 。

5. 用追赶法解 n 阶三对角方程组所用乘、除法次数总共是 5n-4 。

6. 已知插值基函数 $l_k(x), k = 0,1,\cdots,n$，则 $\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1$ 。

7. 二分法求方程 $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在区间 $[1,2]$ 内的实根，要求误差限为 $\varepsilon = \frac{1}{2}\times 10^{-3}$，则对分次数至少为 10 。

8. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$，则 $\|A\|_\infty =$ 6 ，$\|A\|_1 =$ 4 ，$\|A\|_2 = \sqrt{18}$

题号					签名
题分	21	24	55	100	

C. $y_{n+1} = 0.05x_n + 0.95y_n + 0.05[x_{n+1} - y$

得分	评卷人

三、计算题（1至5题……

1. 已知 f(x)的函数表如下

x	0	2	3
y	−3	5	12

求 f(x)在[0，3]内的零点近似值。

解 因为 y_i 关于 x 严格单调减少，先作反函数表（2 分）

x	−3	5	12
y	0	2	3

将节点 $x_0=-3, x_1=5$，$x_2=12$ 及对应函数值 $y_0=0, y_1=2, y_2=3$ 代入二次拉格朗日插值多项式（2.2），再令 x=0,得（4 分）

$$L_2(0)=\frac{(0-5)(0-12)}{(-3-5)(-3-12)}\times 0+\frac{(0+3)(0-12)}{(5+3)(5-12)}\times 2+\frac{(0+3)(0-5)}{(12+3)(12-5)}\times 3$$（8 分）

$$\approx 0.857143$$

于是得 f(x)在[0，3]内零点 $x^*=f^{-1}(0)\approx L_2(0)\approx 0.857143$（10 分）

2. 求矛盾方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=-4\\x_1+2x_2=7\\x_1-x_2=2\end{cases}$ 的最小二乘解。

解 令 $\begin{cases}u_1=x_1+x_2+4\\u_2=x_1+2x_2-7\\u_3=x_1-x_2-2\end{cases}$（2 分）

$\varphi(x_1x_2)=u_1^2+u_2^2+u_3^2=(x_1+x_2-4)^2+(x_1+2x_2-7)^2+(x_1-x_2-2)^2$（3 分）

由 $\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}=2(3x_1+2x_2-13)=0\\\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}=2(2x_1+6x_2-16)=0\end{cases}$（7 分）

得法方程组 $\begin{cases}3x_1+2x_2=1\\2x_1+6x_2=12\end{cases}$（8 分） 解得 $x_1=-\dfrac{9}{7}$ $x_2=\dfrac{17}{7}$（10 分）

3. 用梯形公式和 $n=4$ 的复化梯形公式求积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x}$ ……

解　（1）　梯形公式

因为 $a=0,\ b=1,\ f(x)=\frac{1}{x+1}$，代入梯形公式得

则 $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx \approx \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] = \frac{1}{2}[\frac{1}{0+1}+\frac{1}{1+1}] = 0.75$　　（4 分）

（2）　复化梯形公式

因为 $h=\frac{b-a}{4}=\frac{1}{4}$ 和复化梯形公式得

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx \approx \frac{1}{8}[f(0)+2(f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{2})+f(\frac{3}{4}))+f(1)]$$

$$=\frac{1}{8}[1+2\times(\frac{4}{5}+\frac{4}{6}+\frac{4}{7})+\frac{1}{2}] \approx 0.697$$　　（8 分）

因为　$f(x)=\frac{1}{x+1}$，　$f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$，　$M_2=\max\limits_{0\le x\le 1}|f''(x)|=2$

所以　$|R(f)| = \left|\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(3)\right| \le \frac{2}{12\times 16}=\frac{1}{96}$　　（10 分）

4. 用 Newton 法求方根 $\sqrt{\alpha+1}\ (\alpha>0)$ 的迭代格式，并计算 $\sqrt{128.6}$（迭代 3 步）。

$f(x)=x^2-\alpha\text{-}1,$　（1 分）　$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-\alpha\text{-}1}{2x_k}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{\alpha+1}{x_k})$（5 分）

（10 分）

迭代 3 步 计算正确

5. 取步长 $h=0.1$，对初值问题 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=-y+1\\ y(0)=1\end{cases}$，用四阶龙格—库塔法求 y(0.2)的值。

解：四阶龙格—库塔法：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}[k_1+2k_2+2k_3+k_4] \\ k_1=f(x_n,y_n) \\ k_2=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}k_1) \\ k_3=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}k_2) \\ k_4=f(x_n+h,y_n+hk_3) \end{cases}$$ （4 分）

$k_1=k_2=k_3=k_4=0$，（6 分）

$y(0.1)=y_1=1$。（8 分）

y(0.2)= **1** （10 分）

6．用高斯—塞德尔迭代法解方程组

$$\begin{pmatrix}5&1&0\\1&5&1\\0&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\\4\end{pmatrix}$$

（1）写出高斯—塞德尔法迭代公式并计算迭代矩阵的 1-范数

（2）取 $X^{(0)}=(0\quad 0\quad 0)^T$，求出 $X^{(3)}$

解：（1）对 $i=1,2,3$，从第 i 个方程解出 x_i，得高斯——塞德尔法迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)}=\frac{1}{5}(-4-x_2^{(m)}) \\ x_2^{(m+1)}=\frac{1}{5}(3-x_1^{(m+1)}-x_3^{(m)}), \quad m=0,1,\cdots \\ x_3^{(m+1)}=\frac{1}{5}(-4-x_2^{(m+1)}) \end{cases}$$ （2 分）

$\|B_{GS}\|_1$ **=31/125** （3 分）

（2） $x_1^{(1)}=-\frac{4}{5}$， $x_2^{(1)}=\frac{19}{25}$， $x_3^{(1)}=-\frac{119}{125}$ （4 分）

$x_1^{(3)}=$ **-0.99616** $x_2^{(3)}=$ **0.998464** $x_3^{(3)}=$ **-0.999693** （5 分）