福州大学 2010～2011 学年第一学期考试 A 卷

课程名称 数值分析 考试日期 2011.1.17

考生姓名 101120026 学号 李燕 专业或类别 电路与系统

题号	一	二	三	四	总分	累分人
题分	18	22	40	20	100	签名
得分						

考生注意事项：1、本试卷共 6 页，请查看试卷中是否有缺页。

2、考试结束后，考生不得将试卷、答题纸和草稿纸带出考场。

一、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

得分	评卷人

1、若 $x^* = 12.30$ 是经过四舍五入得到的近似数，则它有几位有效数字？（ C ）

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

2、设 $x_i (i = 0,1,2,3,4)$ 为互异结点，$l_i(x)$ 为拉格朗日插值基函数，则 $\sum_{i=0}^{4}(x - x_i)l_i(x)$ 等于（ ）

$n=4$ $f(x)=x^1<4$ $\sum_{0}^{4}(x-x_i)l_i(x)$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4

3、设 $f(x) = 3x^5 + 4x^4 + x^3 + 1$ 和节点 $x_k = k/2, k = 0,1\cdots$ 则差商 $f[x_0, x_1 \cdots x_5] =$ $\frac{f^{5}(\xi)}{5!} = \frac{5!}{5!}$ 3 （ C ）

(a) 4 (b) 2 (c) 3 (d) 1

4、用Gauss-Seidel迭代法解方程组 $\begin{cases} x_1 + 3ax_2 = 4 \\ 2ax_1 + x_2 = -3 \end{cases}$，其中$a$为实数，方法收敛的充要条件是$a$满足以下条件：（ ）

$3a<1$ $a<\frac{1}{3}$ $2a<1$

(a) $|a|<\frac{1}{6}$ (b) $|a|>\frac{2}{3}$ (c) $|a|<\frac{\sqrt{6}}{6}$ (d) $|a|>\frac{\sqrt{6}}{6}$

5、为了使计算球体体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ 时的相对误差不超过 1%，测量半径 R 时的允许相对误差限是多少 （ ）

(A) 0.001% (B) 0.333% (C) 1% (D) $\sqrt[3]{\frac{0.03}{4\pi}}$

6、用高斯消元法解线性方程组，能进行到底的充分必要条件是 （ ）

(A) 系数矩阵各阶顺序主子式不为零 (B) 系数矩阵上对角线元素不为零

(C) 系数矩阵各阶主子式不为零 (D) 系数矩阵各列元素不为零

二、填空题（每空格 2 分，共 22 分）

得分	评卷人

1、若向量 $x=(4,-2,3)^T$，则 $\|x\|_2=$ $\sqrt{29}$

2、$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}$，则 A 的谱半径 $\rho(A)=$ $\sqrt{6}$，A 的 $cond(A)_1=$ 6

$1+5=6$

$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 1\end{pmatrix}$

$\|A^{-1}\|_1=1$

3、确定求积公式 $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx A_0f(-1)+A_1f(0)+A_2f(1)$ 中的待定参数，使其代数精度尽量高，则 $A_0=$ $\frac{1}{3}$，$A_1=$ $\frac{4}{3}$，$A_2=$ $\frac{1}{3}$，代数精度= 5

$\begin{cases}2=A_0+A_1+A_2\\ 0=-A_0+A_2\\ \frac{2}{3}=A_0+A_2\end{cases}$

4、为减少误差的影响应将表达式 $\sqrt{201}-\sqrt{199}$ 改写为 $\frac{2}{\sqrt{201}+\sqrt{199}}$。

5、写出牛顿法求解 $x^3-a=0$，迭代公式是 $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-a}{3x_k^2}=\frac{2x_k^3+a}{3x_k^2}$

6、已知由数据（0，0），（0.5，y），（1，3），（2，2）构造出的三次插值多项式 $P_3(x)$ 的 x^3 的系数是6，则 $y=$ 4.25，其余项表达式 $R(x)=$ $\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\omega_4(x)$

$\frac{f'''(x)}{3!}=6$

R(x) 含 ω 形不？

$\omega_4(x)=x(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-2)$

$=\frac{5!}{5!}\cdot 3$

三、计算题（共 40 分）

得分	评卷人

1、（8 分）用复合梯形公式计算积分 $\int_1^2\sqrt{x}dx$，（n=4），并估计误差。

$a=1,\ b=2,\quad h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}$ $f(x)=\sqrt{x}$

$x_k=a+kh$

$x_1=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

$x_2=1+\frac{2}{4}=\frac{6}{4}$

$x_3=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$

$T_4=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{3}f(x_k)+f(b)]$

$=\frac{1}{8}[1+\sqrt{2}+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)]$

$=\frac{1}{8}[1+\sqrt{2}+2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{7}}{2})$

$=\frac{1}{8}(1+\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f''(x)=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}}$

$=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$|R_T[f]|=|-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta)|\le\frac{1}{12}\cdot(\frac{1}{4})^2M_2$

$\le\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{768}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{vmatrix}$$

$Ly = b$

$y = Ux$

2、(6 分) 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&2\\0&2&0\end{bmatrix}$，求矩阵 A 的 LU 分解，其中 L 为单位下三角矩阵，U 为上三角矩阵

$$A = \begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&2\\0&2&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&0\\0&-3&2\\0&2&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&0\\0&-3&2\\0&0&\frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

$m_{21}=2,\ m_{31}=0 \qquad m_{32}=-\frac{2}{3}$

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&-\frac{2}{3}&1\end{bmatrix} \qquad U=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-3&2\\0&0&\frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

3、(10 分) 用最小二乘法求拟合函数 $y=a+bx+cx^2$ 使其与下列数据相拟合

x_i	-1	0	1	2
y_i	1	2	2	1

$\varphi_0(x)=1 \qquad \varphi_1(x)=x \qquad \varphi_2(x)=x^2$

$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{3}1=4 \qquad (\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{3}x_i^2=6$

$(\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{3}x_i=2 \qquad (\varphi_0,y)=\sum_{i=0}^{3}y_i=6$

$(\varphi_1,y)=\sum_{i=0}^{3}x_iy_i=3 \qquad (\varphi_0,\varphi_2)=\sum_{i=0}^{3}x_i^2=6$

$(\varphi_1,\varphi_2)=\sum_{i=0}^{3}x_i^3=8 \qquad (\varphi_2,\varphi_2)=\sum_{i=0}^{3}x_i^4=18$

$(\varphi_2,f)=\sum_{i=0}^{3}x_i^2y_i=7$

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0)&(\varphi_0,\varphi_1)&(\varphi_0,\varphi_2)\\(\varphi_1,\varphi_0)&(\varphi_1,\varphi_1)&(\varphi_1,\varphi_2)\\(\varphi_2,\varphi_0)&(\varphi_2,\varphi_1)&(\varphi_2,\varphi_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\varphi_0,y)\\(\varphi_1,y)\\(\varphi_2,y)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4&2&6\\2&6&8\\6&8&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\7\end{pmatrix}$$

$x_1=2$

$x_2=\frac{1}{2}$

$x_3=-\frac{1}{2}$

0	1
0.2	0.84
0.4	0.7448

4、(8 分)用改进的欧拉方法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = x - y, & 0 \le x \le 0.4 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$x_{n+1} = x_n + h = x_n + 0.2$

取步长 h=0.2（小数点后保留 4 位有效数字）

$$\begin{cases} y_p = y_n + h\cdot f(x_n, y_n) = y_n + 0.2\times(x_n - y_n) = 0.2x_n + 0.8y_n \\ y_c = y_n + h\cdot f(x_{n+1}, y_p) = y_n + 0.2\times(\cancel{x_{n+1}}^{x_n+0.2} - 0.2x_n - 0.8y_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$

$= y_n + 0.2\times(0.8x_n - 0.8y_n + 0.2)$

$= 0.16x_n + 0.84y_n + 0.04$

$= \frac{1}{2}(0.2x_n + 0.8y_n + 0.16x_n + 0.84y_n + 0.04)$

$= 0.18x_n + 0.82y_n + 0.02$

$y_1 = 0.18\times 0 + 0.82\times 1 + 0.02 = 0.84$

$y_2 = 0.18\times 0.2 + 0.82\times 0.84 + 0.02 = 0.74$

5、(8 分) 设 $\cancel{B}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，试用豪斯霍尔德变换对矩阵 A 进行 QR 分解，其中 Q 为正交矩阵，R 为上三角阵（8 分）

$a_1 = (0, 2, 0)^T$

$H_1\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \sigma_1 = sgn(0)\cdot\|a_1\|_2 = -2 \\ \beta = \sigma_1(\sigma_1 + a_{11}) = 4 \\ u_1 = a_1 + \sigma_1 e_1 = (-2, 2, 0)^T \end{cases}$$

$H_1 = I - \beta_1^{-1} u_1 u_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad H_1A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\cancel{\bar{H}_2(2,0)^T = (*, 0)^T}$

$\cancel{\sigma_2 = sgn(2)\cdot\|a_2\|_2 = 2}$

$\cancel{\beta_2 = \sigma_2(\sigma_2 + a_{22}) = 8}$

$\cancel{u_2 = a_2 + \sigma_2 e_1 = (4, 0)^T}$

$\cancel{H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{H}_2 \end{pmatrix}}$

$\cancel{\bar{H}_2 = I - \beta_2^{-1} u_2 u_2^T}$

$\cancel{H_2H_1A =}$

$H_1A = R$

$Q = (H_1)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

固定（2條件）

对称 $A^T=A$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

12-3-

四、分析证明题（共 20 分）

得分	评卷人

SW

1、（6 分）写出求解方程组 $\begin{cases} 3x_1+x_2=1 \\ x_1+2x_2-x_3=1 \\ -x_2+2x_3=1 \end{cases}$

的 SOR 迭代公式（其中松弛因子 $\omega=1.5$），并判断该迭代是否收敛。

证明：$x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}-1.5\cdot\dfrac{1-3x_1^{(k)}-x_2^{(k)}}{3}=\frac{3}{2}x_1^{(k)}+\frac{1}{2}x_2^{(k)}-\frac{1}{2}$

$x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}-1.5\cdot\dfrac{1-x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k)}+x_3^{(k)}}{2}$

$x_3^{(k+1)}=x_3^{(k)}-1.5\cdot\dfrac{1+x_2^{(k+1)}-2x_3^{(k)}}{2}$

A为对称正定矩阵，$0<\omega<2$时，收敛.

x^*为$x^m-a=0$的根

$\varphi(x^*)=x^*\ (x^*)^m=a$ $x^*=\sqrt[m]{a}$

$\varphi=\varphi\dfrac{(m-1)a+(m+1)a}{(m+1)a+(m-1)a}=x^*\ \sqrt[m]{a}$

$\varphi(x)=$

2、（6 分）证明：给定迭代公式

$(m-1)x^{m+1}+(m+1)ax$

$x_{k+1}=\varphi(x_k)$， $\varphi(x)=x\dfrac{(m-1)x^m+(m+1)a}{(m+1)x^m+(m-1)a}$， $m\ge 2$ $(m+1)(m-1)x^{m+}+(m+1)a$

并假定x_0充分接近$x^m-a=0$的某个根x^*，试证明迭代序列$\{x_k\}$至少三阶收敛于x^*。

$x^{*m}=a$

证明： $x=\sqrt[m]{a}$ $\varphi(\sqrt[m]{a})=\sqrt[m]{a}$

$[(m+1)x^m+(m-1)a]\varphi(x)=(m-1)x^{m+1}+(m+1)ax$

$[(m+1)x^m+(m-1)a]\varphi'(x)+(m+1)m\cdot x^{m-1}\cdot\varphi(x)=(m-1)(m+1)x^m+(m+1)a$

$\cancel{\varphi'(x)}=\varphi'(\sqrt[m]{a})=0$

$[(m+1)x^m+(m-1)a]\varphi''(x)+(m+1)m\cdot x^{m-1}\cdot\underset{0}{\varphi'(x)}+(m+1)\cdot m(m-1)x^{m-2}\cdot\varphi(x)+\underset{0}{(m+1)mx^{m-1}\cdot\varphi'(x)}=(m+1)m(m-1)x^{m}$

$\varphi''(\sqrt[m]{a})=0$

$[(m+1)x^m+(m-1)a]\varphi'''(x)+(m+1)m\cdot\underset{0}{x^{m-1}\cdot\varphi''(x)}+(m+1)\cdot m(m-1)\underset{0}{x^{m-2}\varphi'(x)}+(m+1)m\underset{0}{x^{m-1}\varphi''(x)}+(m+1)m(m-1)(m$

$\varphi'''(\sqrt[m]{a})=\dfrac{(m+1)(m-1)}{2}\cdot a^{-\frac{2}{m}}\neq 0$

$y'(x_n-h)=-y'(x_n)+h\cdot y''(x_n)+\frac{h^2}{2}y'''$
$+\frac{h^3}{3!}y^{(4)}x_n+$

3、（8 分）用二步法 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[\alpha f(x_n,y_n)+\beta f(x_{n-1},y_{n-1})]$ 求解一阶常微分方程初值问题 $\begin{cases}y'=f(x,y)\\y(x_0)=y_0\end{cases}$ 问：如何选择参数 α,β 的值，才使该方法的阶数尽可能地高？写出此时的局部截断误差主项，并说明该方法是几阶的。

$T_{n+1}=y(x_n+h)-y_{n+1}$

$=y(x_n)+h\cdot y(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+\frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_n)+O(h^5)$

$-y_n-\frac{h}{2}\alpha\cdot y'(x_n)-\frac{h}{2}\beta y(x_n)+\frac{h^2}{2}\beta\cdot y''(x_n)-\frac{h^3}{4}\beta y'''$

$+\frac{h^4}{12}\beta y^{(4)}(x_n)$

$=\cancel{(h-\frac{h}{2}\alpha)y'(x_n)+}$

$=(1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2})hy'(x_n)+(1+\beta)\cdot\frac{h^2}{2}y''(x_n)+(\frac{1}{6}-\frac{\beta}{4})h^3y'''(x_n)$

$+(\frac{1}{24}-\frac{\beta}{12})y^{(4)}(x_n)h^4$

$\begin{cases}1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=0\\1+\beta=0\end{cases}$

$\Rightarrow \beta=-1,\ \alpha=1$

$T_{n+1}=\frac{5}{12}h^3y'''(x_n)+O(h^4)$

∴该方法是二阶的.

$-\frac{1}{2}$

$(m+1)a$

$x)=(m+1)m(m-1)$
x^{m-1}

$(m+1)m(m-1)(m-2)x^{m-3}\varphi(x)+(m+1)m(m-1)x^{m-2}\varphi'(x)+(m+1)m(m-1)x^{m-2}\varphi'(x)+(m+1)m\cdot x^{m-1}\varphi''(x)$

0

$=(m+1)m(m-1)^2x^{m-2}$