福州大学 2017～2018 学年第一学期考试 A 卷

课程名称 数值计算方法 考试日期 2017 年 11 月 19 日

考生姓名________ 学号________ 专业或类别________

题号	一	二	三	四	总分	累分人签名
题分	20	20	30	30	100	
得分						

考生注意事项：1、本试卷共 4 页，请查看试卷中是否有缺页。
2、考试结束后，考生不得将试卷、答题纸和草稿纸带出考场。

一、 填空题(每空 2 分，共 20 分)

得分	评卷人

1.3.141 作为圆周率π的近似值有 4 位有效数字。

2.已知函数 $f(x)=56x^3+24x^2+5$ 在点 $2^0,2^1,2^5,2^7$ 的函数值，其三次插值多项式为 $56x^3+24x^2+5$

n=3.

3. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ 5 4 $\|\mathbf{A}\|_\infty=$ 5 $x=(0,-3,-4)^T$，则 $\|x\|_2=$ 5 $\|x\|_\infty=$ 4

4.用于数值求积的辛普森公式的代数精确度为 3。

5.牛顿迭代法用于求单根时至少是 2 阶收敛。

6.写出计算 $\sqrt{191}-\sqrt{190}$ 的合理计算途径： $\dfrac{1}{\sqrt{191}+\sqrt{190}}$

7.用于求常微分方程数值解的欧拉公式具有 3 阶的局部截断误差。 $O(h^3)$. 2阶方法.

8.设 $f(x)=3x^2+5, f[2^0,2^1,2^2]=$ 3 。

二、 计算题(每小题 5 分，共 20 分)

得分	评卷人

1.证明非线性方程 $f(x)=1-x-\sin x=0$ 在 $[0,1]$ 内有一个根，使用二分法求误差不大于 $\frac{1}{2}\times10^{-4}$ 的根要二分多少次？

解: $f'(x)=-\cos x-1<0$.
则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递减
$f(0)=1$, $f(1)=-\sin 1$

$\frac{b-a}{2^{k+1}}\le\varepsilon$

$\frac{1}{\ldots}\le\frac{1}{2}\times10^{-4}$

$f(0)\cdot f(1)<0$
$\therefore$ 在 $[0,1]$ 有且仅有一实根

$\frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2}\times 10^{-4}$
$2^k \geq 10^4$
$k \geq \frac{4}{\lg 2} = 13.29$
$\therefore k = 14$.

2. 已知方程 $x^3 - x^2 - 0.8 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近有一个根判断其迭代格式 $x_{k+1} = \sqrt{x_k^3 - 0.8}$ 是否收敛。

解: $g(x) = \sqrt{x^3 - 0.8}$
$g'(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 0.8)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2$

$|g'(1.5)| = |\frac{1}{2}\times(1.5^3 - 0.8)^{-\frac{1}{2}}\times 3\times 1.5^2$
$= 2.1032 > 1$
$\therefore$ 发散

3. 写出求 $\sqrt[3]{a}$ 的牛顿迭代法公式

$x = \sqrt[3]{a}$
$a = x^3$

$x^3 + a = 0$
$f(x) = x^3 + a$

$f'(x) = 3x^2$
$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x)}{f'(x)} = x_k - \frac{x^3+a}{3x^2}$

4. 用辛普森公式求 $\int_1^2 (\frac{1}{x} - 1)dx$ 的近似值，并用余项公式估计误差。

$\int_1^2 (\frac{1}{x} - 1)dx = \frac{1}{6}(f(1) + 4f(1.5) + f(2))$
$= \frac{1}{6}\times[4\times(-\frac{1}{3}) - \frac{1}{2}]$
$= -3.0556$.

三、 计算题(每小题 10 分，共 30 分)

得分	评卷人

1. 已知数据点如下，用最小二乘拟合求形如 $y = \frac{x}{ax+b}$ 的经验公式。

x	0.1	0.2	0.4	0.5
y	0.4	0.5	0.8	0.25

解: $\frac{1}{y} = \frac{ax+b}{x}$
$= a + \frac{1}{x}b$
$\varphi_1 = 1 \quad \varphi_2 = \frac{1}{x}$

$\varphi_1 = (1,1,1,1)$
$\varphi_2 = (10, 5, 2.5, 2)$
$f = (2.5, 2, 1.25, 4)$
$\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle = 4$

$\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle = 19.5$
$\langle\varphi_2,\varphi_2\rangle = 135.25$
$\langle\varphi_1,f\rangle = 9.75$
$\langle\varphi_2,f\rangle = 46.125$

$\begin{bmatrix} 4 & 19.5 \\ 19.5 & 135.25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.75 \\ 46.125 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 4a + 19.5b = 9.75 \\ 19.5a + 135.25b = 46.125 \end{cases}$

$\{ a = 2.6081$

$b = -0.0350$

$y = \dfrac{x}{2.6081x - 0.0350}$

2. 已知函数表如下，写出差商（均差）表，并利用差商表写出牛顿插值多项式，并求出 x=2.5 的函数近似值。

x	2	3	4	5
y	4	6	12	18

解：

x	y	一	二	三
2	4			
		2		
3	6		2	
		6		$-\frac{1}{2}$
4	12		$\frac{1}{2}$	
		6		
5	18			

$N_3(2.5) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$= 4 + 2\times(2.5-2) + 2\times(2.5-2)(2.5-3) - \frac{1}{2}\times(2.5-2)(2.5-3)(2.5-4) = 4.3125$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 50 \end{pmatrix}$，利用直接三角分解法求解方程组 $Ax = b$

解：

四、 分析题(每小题 10 分，共 30 分)

得分	评卷人

1. 确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明其代数精度。$\int_{-2h}^{2h} f(x)\,dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$

解：当 $f(x)=1$ 时 $4h = A_{-1} + A_0 + A_1$

当 $f(x)=x$ 时 $0 = -hA_{-1} + hA_1$

当 $f(x)=x^2$ 时 $\frac{16}{3}h^3 = h^2A_{-1} + h^2A_1$

$A_1 = \frac{8}{3}h$

$\therefore \begin{cases} A_{-1} = \frac{8}{3}h \\ A_0 = -\frac{4}{3}h \\ A_1 = \frac{8}{3}h \end{cases}$

∴ 代数精度为 2.

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)\,dx \approx \frac{8}{3}hf(-h) - \frac{4}{3}hf(0) + \frac{8}{3}hf(h)$$

2. 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 1.5x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 0.8 \end{cases}$，写出其雅可比迭代矩阵、高斯—塞德尔迭代矩阵，并分析其收敛性。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_G = (D-L)^{-1} \cdot U$$

3. 用欧拉公式求解初值问题 $\begin{cases} y' = x - y + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $x \in [0, 0.6]$（其中 h=0.2）

解：

欧拉公式 $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$.

$y_1(0.2) = 1 + 0.2 \times (0 - 1 + 1) = 1$

$y_2(0.4) = 1 + 0.2 \times (0.2 - 1 + 1) = 1.04$

$y_3(0.6) = 1.04 + 0.2 \times (0.4 - 1.04 + 1)$

$= 1.112$.