福州大学 2010～2011 学年第一学期考试 A 卷

课程名称__数值分析____________ 考试日期____________

考生姓名____________ 学号____________ 专业或类别________

题号	一	二	三	四	总分	累分人签名
题分	**15**	**20**	**40**	**25**	**100**	
得分						

考生注意事项：1、本试卷共_6_页，请查看试卷中是否有缺页。

2、考试结束后，考生不得将试卷、答题纸和草稿纸带出考场。

一、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

得分	评卷人

1、若 $x^*=12.30$ 是经过四舍五入得到的近似数，则它有几位有效数字？ （ c ）

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

2、设 $x_i(i=0,1,2,3,4)$ 为互异结点，$l_i(x)$ 为拉格朗日插值基函数，则 $\sum_{i=0}^{4}(x-x_i)l_i(x)$ 等于 （ a ）

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4

3、设 $f(x)=3x^5+4x^4+x^2+1$ 和节点 $x_k=k/2, k=0,1\cdots$ 则差商 $f[x_0,x_1\cdots x_5]=$____

(a) 4 (b) 2 (c) 3 (d) 1 （ c ）

4、用Gauss-Seidel迭代法解方程组 $\begin{cases} x_1+3ax_2=4 \\ 2ax_1+x_2=-3 \end{cases}$，其中$a$为实数，方法收敛的充要条件是$a$满足以下条件： （ c ）

(a) $|a|<\frac{1}{6}$ (b) $|a|>\frac{2}{3}$ (c) $|a|<\frac{\sqrt{6}}{6}$ (d) $|a|>\frac{\sqrt{6}}{6}$

5、为了使计算球体体积$V=\frac{4}{3}\pi R^3$时的相对误差不超过 1%，测量半径 R 时的允许相对误差限是多少 (　　)

(A) 0.001%　　(B) 0.333%　　(C) 1%　　(D) $\sqrt[3]{\frac{0.03}{4\pi}}$

6、用高斯消元法解线性方程组，能进行到底的充分必要条件是 (　　)

(A) 系数矩阵各阶顺序主子式不为零　　(B) 系数矩阵主对角线元素不为零

(C) 系数矩阵各阶主子式不为零　　(D) 系数矩阵各列元素不为零

二、填空题（每空格 2 分，共 22 分）

得分	评卷人

1、若向量$x=(4,-2,3)^T$，则$\|x\|_2=$___$\sqrt{29}$_________

2、$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}$，则 A 的谱半径$\rho(A)=$____$\sqrt{6}$____，A 的 $\mathrm{cond}(A)_1=$____6____

3、确定求积公式$\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx A_0f(-1)+A_1f(0)+A_2f'(1)$中的待定参数，使其代数精度尽量高,则$A_0$=_$\frac{2}{9}$_________,$A_1$=__$\frac{16}{9}$_______,$A_2$=_$\frac{2}{9}$______,代数精度=__2________。

4、为减少误差的影响应将表达式$\sqrt{201}-\sqrt{199}$改写为 _____。$\frac{2}{\sqrt{201}+\sqrt{199}}$

5、用两点的高斯-勒让德求积公式计算积分$\int_1^2\frac{1}{y}dy=$__________$\frac{9}{13}$

5、应用牛顿法求解$x^3-a=0$，迭代公式是_____$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-a}{3x_k^2}$___________

6、已知由数据（0，0），（0.5，y），（1，3），（2，2）构造出的三次插值多项式$P_3(x)$的x^3 的系数是6，则 y=___4.25_______，其余项表达式 R(x)=________________________________

$$\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x(x-0.5)(x-1)(x-2)\qquad(\xi\in[0,2])$$

三、计算题（共 40 分）

得分	评卷人

2、　设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$，求矩阵 **A** 的 **LU** 分解，其中 **L** 为单位下三角矩阵，**U** 为上三角矩阵（6 分）

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{2}{3} & 1\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 2\\ 0 & 0 & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$$ +6

2、（8 分）用复合梯形公式计算积分 $\int_1^2 \sqrt{x}dx$，（n=2），并估计误差。

解：

$h=\frac{2-1}{4}$

$I=\frac{h}{2}(\sqrt{1}+2(\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{7}{4}})+\sqrt{2})$ +2

$=\frac{1}{8}(1+\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})\quad \approx 1.21819$ +2

误差 $|R(f)|=|-\frac{1}{12}(h)^2 f''(\xi)|$ +2

$=|\frac{1}{12}\times\frac{1}{16}\times\frac{1}{4}\xi^{-\frac{3}{2}}|\le\frac{1}{768}$ +2

3、(10 分) 用最小二乘法求拟合函数 $y=a+bx+cx^2$ 使其与下列数据相拟合

x_i	**-1**	**0**	**1**	**2**
y_i	**1**	**2**	**2**	**1**

记法方程组系数矩阵

G= $\begin{bmatrix}(1,1) & (1,x) & (1,x^2)\\ (x,1) & (x,x) & (x,x^2)\\ (x^2,1) & (x^2,x) & (x^2,x^2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2 & 6\\ 2 & 6 & 8\\ 6 & 8 & 18\end{bmatrix}$ +2

法方程组右端项 $F^{\mathrm{T}}=[(y,1)\quad (y,x)\quad (y,x^2)]=[6\ \ 3\ \ 7]$ +2

解法方程组 $GC=F$ 得 +2

C= $(a\quad b\quad c)=(2\quad \frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2})$ +2

求得拟合多项式为 $y=2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2$ +2

4、(8 分)用改进的欧拉方法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = x - y, \quad 0 \le x \le 0.4 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$ 取步长 h=0.2（小数点后保留 4 位有效数字）

$$\overline{y}_{n+1} = y_n + h\times f(x_n, y_n) = y_n + h\times(x_n - y_n) = (1-h)y_n + h\times x_n \qquad +2$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \overline{y}_{n+1})] = y_n + \frac{1}{2}h[x_n - y_n + x_{n+1} - \overline{y}_{n+1}] \qquad +2$$

$$= y_n + \frac{1}{2}h[x_n - y_n + x_{n+1} - ((1-h)y_n + h\times x_n)] \quad =(1+\frac{1}{2}h^2)y_n + \frac{1}{2}h(1-h)x_n + \frac{1}{2}hx_{n+1}$$

+2

将$h = 0.2, y_0 = 1$代入上式得

$x_1 = 0.2 \quad y_1 = 1.04$ +1

$x_2 = 0.4 \quad y_2 = 1.1168$ +1

5、设 $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,试用平面旋转矩阵对矩阵 **A** 进行 **QR** 分解，其中 **Q** 为正交矩阵，**R** 为上三角阵（**8** 分）

记$A_1=A$,先将A的第一列变得与e_1平行

$$\cos\theta=\frac{0}{\sqrt{0+4}}=0,\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{0+4}}=1$$

$$P_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad \mathrm{A}_2=P_{12}A_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&0\\2&1&2\\0&2&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&1&2\\0&-2&0\\0&2&1\end{bmatrix}$$

$$\cos\theta=\frac{-2}{\sqrt{4+4}}=\frac{-1}{\sqrt{2}},\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{4+4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P_{23}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\quad \mathrm{R}=P_{23}A_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&2\\0&-2&0\\0&2&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&1&2\\0&2\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$Q=P_{12}{}^{T}P_{23}{}^{T}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

四、分析证明题（共 20 分）

得分	评卷人

1、

2、

3、（**9** 分） 设有常微分方程的初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 试用 Taylor 展开原理构造形如 $y_{n+1} = \alpha(y_n + y_{n-1}) + h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1})$ 的方法，使其具有二阶精度，并推导其局部截断误差主项。

3、

用二步法 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[\alpha f(x_n, y_n) + \beta f(x_{n-1}, y_{n-1})]$ 求解一阶常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 问：如何选择参数 α, β 的值，才使该方法的阶数尽可能地高？写出此时的局部截断误差主项，并说明该方法是几阶的。

证明:局部截断误差为：

$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-\frac{h}{2}[\alpha f(x_n,y(x_n))+\beta f(x_{n-1},y(x_{n-1}))]$ -----------（ 分）

$=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+O(h^4)-y(x_n)-\frac{h}{2}[\alpha y'(x_n)+\beta y'(x_{n-1})]$

--（ 分 ）

$=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)+O(h^4)-y(x_n)-\frac{h}{2}\alpha y'(x_n)$ -----（ 分）

$-\frac{h}{2}\beta[y'(x_n)-hy''(x_n)+\frac{h^2}{2!}y'''(x_n)+O(h^3)]$

$=h(1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2})y'(x_n)+\frac{h^2}{2!}(1+\beta)y''(x_n)+(\frac{h^3}{3!}-\frac{h^3}{4}\beta)y'''(x_n)+O(h^4)$ ------（ 分）

因此有$\begin{cases}1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=0\\1+\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=3\\\beta=-1\end{cases}$ -------------------（ 分）

局部截断误差主项为$\frac{5h^3}{12}y'''(x_n)$，该方法是 2 阶的。 ------------------------（ 分）