福州大学研究生考试试卷 A 卷

60

2012--2013 学年第 二 学期 考生类别： 专业型 考试方式： 闭卷

课程名称 科学和工程计算基础 考试日期 2013.7.2

学院 福建数字空间信息工程研究中心 专业 测绘工程 考生姓名 聂延玺 学号 [illegible]

题号	一	二	三	总分	累分人签名
题分	20	50	30	100	
得分	10	34	8	50	

考生注意事项：1、本试卷共 5 页，请查看试卷中是否有缺页。

2、考试结束后，考生不得将试卷、答题纸和草稿纸带出考场。

3、开卷考试考生只可携带以下参考资料：教材（含复印的教材）、手写笔记

一、 填空题(每空 2 分，共 20 分)

得分	评卷人
10	

$e(x^{n*}) = n(x^*)^{n-1}e(x^*)$

1、若 x 的相对误差为δ，则x^n 的相对误差为 ~~δ~~ $n\delta$。

2、3.142 作为 π 的近似值有 4 位有效数字。

$\|X\|_1 = |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$

$\|X\|_2 = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

$\|X\|_\infty = \max |x_i|$

3、向量 $X=(-1,0,3,1)^T$，则$\|X\|_1 =$ 5

$1+3+1=5$

4、设 $x_i(i=0,1,2)$ 为互异结点，$l_i(x)$ 为拉格朗日插值基函数，则 $\sum_{i=0}^{2}(x-x_i)l_i(x) =$ 0

$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

5、若权函数 $\rho(x)=1$，则定义在区间[-1, 1]上的最高次项系数为 1 的正交多项式

$P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$，$P_2(x)=$ ~~x^3~~ $x^2-\frac{1}{3}$

谱半径 $=\max(\lambda_i)$

6、$A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，则 A 的谱半径$\rho(A)=$ 5，$\|A\|_\infty =$ 7，$cond(A)_1 =$ 7

$\mathrm{cond}(A)_1 = \|A\|_1\|A^{-1}\|_1$

$(\lambda-3)(\lambda-1)-8$

$\lambda^2-4\lambda-5$

$(\lambda+1)(\lambda-5)=0$

$\lambda_2=5$

$\rho=|\lambda_2|=5$

7、用二分法求方程 $f(x)=x^3+x-1=0$ 在区间[0，1]内的根，二分两次后根所在区间为：

$[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

第n次的区间取中点作为最后结果.

8、设 $f(x)=3x^5+4x^4+x^2+1$ 和节点 $x_k=k/2, k=0,1\cdots$，则差商 $f[x_0,x_1,\cdots x_5]=$ ~~4~~ 3

运用差商与导数的关系 $\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} = \frac{3\times5!}{5!}$

$f(x_0\cdots x_n) = \frac{f^n(\xi)}{n!}$

$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\ l_{21}&1&0\\ l_{31}&l_{32}&1\end{pmatrix}$ $U=\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\ 0&u_{22}&u_{23}\\ 0&0&u_{33}\end{pmatrix}$

$a_{11}=u_{11} \Rightarrow u_{11}=1$

$a_{21}=l_{21}\cdot u_{11} \Rightarrow l_{21}=\frac{2}{1}=2$

$a_{31}=l_{31}\cdot u_{11} \Rightarrow l_{31}=\frac{2}{1}=2$

$a_{12}=u_{12} \Rightarrow u_{12}=1$

$a_{22}=l_{21}u_{12}+u_{22} \Rightarrow u_{22}=-1-2\cdot1=-3$

$a_{32}=l_{31}\cdot u_{12}+l_{32}\cdot u_{22} \Rightarrow l_{32}=\frac{-4-2\cdot1}{-3}=2$

二、 计算题(共 50 分)

得分	评卷人
34	

1、(10 分) 用矩阵的直接三角分解法（LU 分解，L 为单位下三角阵、U 为上三角阵）解方程组设 $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\2&-4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$

$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}$ $U=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&-3\\0&0&9\end{pmatrix}$

$a_{13}=u_{13} \Rightarrow u_{13}=1$

$a_{23}=l_{21}\cdot u_{13}+u_{23} \Rightarrow u_{23}=-1-2\cdot1=-3$

$a_{33}=l_{31}\cdot u_{13}+l_{32}\cdot u_{23}+u_{33}$

$u_{33}=5-2\times1-2\times(-3)=5-2+6=9$

解：令 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\2&-4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&0&0\\&&0\\&&\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&-3\\0&0&\frac{21}{9}\end{pmatrix}=LU$

由 $Ly=(4,-1,1)^T$ 解得 $y^T=(4,-9,11)^T$

$Ux=y$ 解得 $x^T=(1,\frac{16}{9},\frac{11}{9})^T$

+10

$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-1\\1\end{bmatrix}$

$y_1=4$，$y_2=-9$，$y_3=11$

$Ly=(4,-1,1)^T \Rightarrow y=(4,-9,11)^T$

$Ux=(4,-9,11)^T \Rightarrow x=(1,\frac{16}{9},\frac{11}{9})^T$

$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-3&-3\\0&0&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-9\\11\end{bmatrix}$

$x_3=\frac{11}{9}$，$x_2=\frac{16}{9}$，$x_1=1$.

2、(10 分) 用最小二乘法求拟合函数 $y=a+bx+cx^2$ 使其与下列数据相拟合

x_i	-1	0	1	2
y_i	-1	2	2	-1

$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{3}1=4$ $(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{3}x_i=2$.

$(\varphi_0,\varphi_2)=(\varphi_2,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{3}x_i^2=6$.

$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{3}x_i^2=\sum_{i=0}^{3}x_i^2=6$.

$(\varphi_1,\varphi_2)=(\varphi_2,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{3}x_i^3=8$.

$(\varphi_2,\varphi_2)=\sum_{i=0}^{3}x_i^4=18$.

解：由拟合函数 $y=a+bx+cx^2$ 得 $\varphi_0(x)=1$ $\varphi_1(x)=x$ $\varphi_2(x)=x^2$

$n=3$ $(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{3}1=4$ $(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{3}x_i=2$

$(\varphi_0,\varphi_2)=(\varphi_2,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{3}x_i^2=6$ $(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{3}x_i^2=6$

$(\varphi_1,\varphi_2)=(\varphi_2,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{3}x_i^3=8$ $(\varphi_2,\varphi_2)=\sum_{i=0}^{3}x_i^4=18$

$(\varphi_0,y)=\sum_{i=0}^{3}y_i=2$ $(\varphi_1,y)=\sum_{i=0}^{3}x_iy_i=1$ $(\varphi_2,y)=\sum_{i=0}^{3}x_i^2y_i=-3$

+10

$\begin{pmatrix}4&2&6\\2&6&8\\6&8&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$

$(\varphi_0,y)=\sum_{i=0}^{n}y_i=2$.

$(\varphi_1,y)=\sum_{i=0}^{n}y_ix_i=1$

$(\varphi_2,y)=\sum_{i=0}^{n}x_i^2y_i=-3$.

$\begin{pmatrix}4&2&6\\2&6&8\\6&8&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ 解得 $(a,b,c)^T=(2,\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$

$\therefore y=2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}x^2$

$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)+f(b)]$ $h=0.1$, $x_k=a+hk=$

3、(10 分) 用辛普生公式计算积分 $\int_0^1 \sin(\frac{\pi}{2}x)dx$，并估计误差。

解：$T_n=\frac{b-a}{6}[f(a)+4\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=0}^{n} f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(b)]$

$=\frac{1}{6}[0+4 \quad +1]$

$\int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}x\,dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$

$=\frac{1}{6}(0+2\sqrt{2}+1)=\frac{1+2\sqrt{2}}{6}$ +8

$R[f]=-\frac{(b-a)}{12}f''(\xi)=-\frac{1}{12}$ $-\frac{(b-a)}{180}(\frac{b-a}{2})^4 f^{(4)}(\xi)$

4、(10 分) 数值积分公式

$$\int_0^1 f(x)dx \approx Af(0)+Bf(1)+Cf'(0)$$

已知其余项表达式为 $R(f)\approx af'''(\xi)$，$\xi\in(0,1)$

(1)试确定常数 A，B，C，使得有尽可能高的代数精度。(6 分)

(2)试问所得的数值积分公式代数精度是多少？(2 分)

(3)给出求积公式余项 (2 分)

解：1) 令 $f(x)=1, x, x^2$ 代入

$$\begin{cases}1=A+B\\ \frac{1}{2}=B+C\\ \frac{1}{3}=B\end{cases}$$ $A=\frac{2}{3}$ $B=\frac{1}{3}$ $C=\frac{1}{6}$

2) 令 $f(x)=x^3$ 代入 $\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}$ 而 $\frac{2}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)+\frac{1}{6}f'(0)=\frac{1}{3}$

∴ 所得数值积分公式代数精度为2 +8 9

3) $R(f)=\int_0^1 f(x)dx-\frac{2}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)+\frac{1}{6}f'(0)=-\frac{1}{12}=a$

令 $f(x)=x^3$ $f'''(x)=6$

∴ 求积公式余项为 $-\frac{1}{12}f'''(\xi)$ $\xi\in(0,1)$

令 $f(x)=x^3$. $R(f)=\int_0^1 f(x)dx-\frac{2}{3}f(0)-\frac{1}{3}f(1)-\frac{1}{6}f'(0)=a$

$=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1-\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}$

$=-\frac{1}{12}$ $\Rightarrow a=-\frac{1}{72}$ ∴ $R(f)\approx-\frac{1}{72}f'''(\xi)$

5、(10 分) 用梯形法求解初值问题

$$\begin{cases}y'=x+y, & 0\le x\le 0.3\\ y(0)=1\end{cases}$$

取步长 h=0.1 (小数点后保留 2 位有效数字)

解：由梯形公式

$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}f(x_{n+1},y_{n+1})+$

即 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(x_{n+1}+y_{n+1})$ $y_{n+1}=y_n+0.05(x_{n+1}+y_{n+1})$

$0.95y_{n+1}=y_n+0.05x_{n+1}$

$y_1=y_0+\frac{0.1}{2}(x_1+y_1)$

由 $y(0)=1$

$y_1\approx 1.05$ $y_1\approx y(0.1)=1.58$

$y_2\approx y(0.1)=1.11$ $y_2\approx y(0.2)=1.67$

$y_3\approx y$ $y_3\approx y(0.3)=1.77$

三、分析题(共 30 分)

得分	评卷人
6	

1、(8 分) 试分析简单迭代法 $x_{k+1}=\frac{x_k}{2}+\frac{1}{x_k}$，$(k=0,1,2,...)$ 的收敛阶。

解. $x_{k+1}=\frac{x_k}{2}+\frac{1}{x_k}$ $x_1=\frac{x_0}{2}+\frac{1}{x_0}=$ $x=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$

~~$x_{k+1}=\frac{x_k}{2}+\frac{1}{x_k}$~~ $x_2=\frac{x_1}{2}+\frac{1}{x_1}$ $\frac{x}{2}=\frac{1}{x}$

$\frac{x^2}{2}=1$

$x^2=2$

$x=\pm\sqrt{2}$

$\vdots$

$x_k=\frac{x_{k-1}}{2}+\frac{1}{x_{k-1}}$ ∴ $\pm\sqrt{2}$ 是不动点.

$x_{k+1}-x_k$

$\varphi(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$

$\varphi'(x)=\frac{1}{2}-x^{-2}$.   ∴ 在 $\sqrt{2}$ 附近二阶收敛.

$\varphi'(\sqrt{2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{(\sqrt{2})^2}=0$. $-\sqrt{2}$ 附近二阶收敛.

$\varphi'(-\sqrt{2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{(-\sqrt{2})^2}=0$.

$\varphi''(x)=2x^{-3}=\frac{2}{x^3}$

$\varphi''(\sqrt{2})=\frac{2}{(\sqrt{2})^3}\ne 0$.

2、(10 分)设有常微分方程的初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 试用 Taylor 展开原理构造形如 $y_{n+1} = a(y_n + y_{n-1}) + h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1})$ 的方法，确定常数 α, β_0, β_1 使其具有二阶精度，并推导其局部截断误差主项。

解：$T_n = y(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2!}x - \quad + o(h^2)$ +2

×0

3、(12 分)已知方程组 $Ax = b$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(1) 试讨论用 Jacobi 迭代法求解此方程组的收敛性。

(2) 若有迭代公式 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + a(Ax^{(k)} + b)$，试确定一个 a 的取值范围，在这个范围内任取一个 a 值均能使该迭代公式收敛。

$Ix^{(k)} + aAx^{(k)}$

$x^{(k+1)} = (I + aA)x^k + ab.$

解：1) $\cancel{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -0.3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -0.3 & 0 \end{pmatrix}$

$J = D^{-1}(L+U) =$

$\cancel{P(\lambda) = Det(J) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 0.3 & \lambda \end{vmatrix} \quad \lambda^2 = 0.6 \quad |\lambda| = \sqrt{0.6} \approx 0.77}$

$P(J) < 1 \quad \therefore$ 此方程组收敛.

+6

2) $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(Ax^{(k)} + b)$

$B = I + aA = \begin{pmatrix} 1+a & 2a \\ 0.3a & 1+a \end{pmatrix} \quad \lambda I - B = \begin{pmatrix} \lambda-1-a & -2a \\ -0.3a & \lambda-1-a \end{pmatrix}$

$|\lambda I - B_J| \neq 0$

$= |\lambda I - D^{-1}(L+U)|$

$\Rightarrow |D^{-1}||\lambda D - L - U| = 0$

$\therefore \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 0.3 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$

$\lambda^2 - 0.6 = 0.$

$\lambda^2 = 0.6.$

$\lambda_1 = -\sqrt{0.6} \quad \lambda_2 = \sqrt{0.6}.$

$\rho(B_J) = \sqrt{0.6} < 1.$

$\therefore$ 收敛.

$(\lambda - (1+a))^2 - 0.6a^2 = 0.$

$\lambda^2 - 2\lambda(1+a) + (1+a)^2 - 0.6a^2 = 0$

$(1+a)^2 - 4(0.4a^2 + 2a + 1)$

$\sqrt{(1+a)^2 - (0.4a^2 + 2a + 1)}$

$2\sqrt{0.6a^2}$

$2a\sqrt{0.6}$

$\frac{2(1+a) \pm 2a\sqrt{0.6}}{2}$

$|< (1+\sqrt{0.6})a + 1 < 1$

$\begin{vmatrix} 1+a & 2a \\ 0.3a & 1+a \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} \lambda-1-a & -2a \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$