福州大学 2018～2019 学年第一学期考试 A 卷

课程名称__数值计算方法___考试日期____________________

考生姓名____________学号_____________专业或类别______________

题号	一	二	三	四	总分	累分人签名
题分	20	20	30	30	100	
得分						

考生注意事项：1、本试卷共_4_页，请查看试卷中是否有缺页。
2、考试结束后，考生不得将试卷、答题纸和草稿纸带出考场。

一、 (每空填空 2 分，共 20 分)

得分	评卷人

1. 已知 $x^*=0.3012*10^5$ 是经过四舍五入得到的近似数，其绝对误差限是____5___.

2. 用牛顿迭代法用于求重根具有__一阶___收敛速度。

3.用于数值求积的科茨公式的代数精度为___5___。

4.设 $f(x)=x^5-3x^3+x-1$ 求差商 $f[3^0,3^1]=$___83______, $f[3^0,3^1,\ldots 3^5]=$____1____

5. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}$, $\|\mathbf{A}\|_\infty=$__6_， $x=(0,-3,-4)^T$,则 $\|x\|_2=$__5____ $\|x\|_\infty=$ ___4_____

6. 用欧拉方法求解常微分初值问题 $\dfrac{dy}{dx}=y(2-y),\quad y(0)=1$ 时，若选择步长为 h=0.1，则 y(0.1) 的近似值为___1.1__，y(0.2)的近似值为___1.199__。

二、 计算题(共 20 分，每题 4 分)

得分	评卷人

1. 用区间二分法求方程 $x^5-x-1=0$ 在[1,2]的近似根，误差小于 10^{-3} 至少要二分多少次？

答：$\because \frac{1}{2^{k+1}} \le 10^{-3} \Rightarrow k \ge 8.9658$，所以需要分 9 次。

2. 设 $f(x)=x^4$ 用拉格朗日余项定理写出-1，0，1，3 为节点的三次插值多项式。

答：$f(x)-P_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x+1)x(x-1)(x-3)=x^4-3x^3-x^2+3x$

$P_3(x)=x^4-(x^4-3x^3-x^2+3x)=3x^3+x^2-3x$

3.已知方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近有一个根判断其迭代格式 $x_{k+1}=\sqrt{\frac{1}{x_k-1}}$ 是否收敛。

答：令 $\varphi(x)=\sqrt{\frac{1}{x-1}}$，则 $|\varphi'(1.5)|=1.414>1$，因此，该迭代格式在 1.5 附近不收敛.

4.已知函数 $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ 的数据表，用三点公式计算 $f'(x)$ 在 x=1.0, 1.1, 1.2 的值。

x	1.0	1.1	1.2
f(x)	0.2500	0.2268	0.2066

答：$f'(1)\approx\frac{1}{2*0.1}[-3\times0.25+4\times0.2268-0.2066]=-0.2470$

$f'(1.1)=\frac{1}{2\times0.1}[0.2066-0.25]=-0.2170$

$f'(1.2)=\frac{1}{2\times0.1}[0.25-4\times0.2268+3\times0.2066]=-0.1870$

5. 对 $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ 构造一个至少有 3 次代数精度的求积公式。

答:

$\int_0^3 f(x)dx\approx\frac{3}{6}(f(0)+4f(1.5)+f(3))$ 或 $\int_0^3 f(x)dx\approx\frac{3}{8}(f(0)+3f(1)+3f(2)+f(3))$

三、计算题(30 分，每题 10 分)

得分	评卷人

1.用列主元高斯消去法求解方程组(用三位有效数字计算)

$$\begin{cases}3x_1+5x_2+4x_3=-1\\5x_1+7x_2+3x_3=2\\4x_1+4x_2+2x_3=2\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}3&5&4&-1\\5&7&3&2\\4&4&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}5&7&3&2\\0&4/5&11/5&-11/5\\0&-8/5&-2/5&2/5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}5&7&3&2\\0&-8/5&-2/5&2/5\\0&0&2&-2\end{bmatrix}$$

解得 $x_1=1,x_2=0,x_3=-1$

2. 用杜利特尔分解法解线性方程组并计算系数矩阵的行列式。$\begin{bmatrix}2&1&2\\4&3&1\\6&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\11\\13\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}2&1&2\\4&3&1\\6&1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&2\\0&1&-3\\0&0&-7\end{bmatrix}$$

解 Ly=b 得 $y_1=6,y_2=-1,y_3=7$,解 Ux=y 得 $x_1=1,x_2=2,x_3=1$.

系数行列式为|A|= -14.

3.证明给定线性方程组雅克比迭代发散，而高斯-赛德尔迭代收敛。$\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

$$B_j=\begin{bmatrix}0&-0.5&-0.5\\-0.5&0&-0.5\\-0.5&-0.5&0\end{bmatrix},\quad |\lambda I-B_j|=0\ \Rightarrow\ \lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=0.5$$

$\rho(B_j)=1$,所以雅可比迭代发散

$$B_g=\begin{bmatrix}0 & -0.5 & -0.5\\ 0 & 0.25 & -0.25\\ 0 & 0.125 & 0.375\end{bmatrix},\quad |\lambda I-B_g|=\lambda(\lambda^2-\frac{5}{8}\lambda+\frac{1}{8})$$

$\rho(B_g)=\sqrt{1/8}=0.3536<1$，所以高斯迭代法收敛。

四、计算题(30 分，每题 10 分)

得分	评卷人

1. 给定函数 y=lnx 在两点 10、11 的值如下表，试用线性插值求 ln10.5 的近似值并估计截断误差。

x	10	11
y	2.303	2.398

$$\ln 10.5\approx 2.303\times\frac{10.5-11}{10-11}+2.398\times\frac{10.5-10}{11-10}=2.3505$$

$$|R_1(10.5)|\le\frac{\max\limits_{10\le\xi\le 11}|f''(\xi)|}{2}|(10.5-10)(10.5-11)|=\frac{0.25}{200}=1.25\times 10^{-3}$$

2. 用最小二乘法确定经验曲线 $y=ae^{bx}$ 中的参数 a，b，使得该曲线与下列数据相拟合

xi	1	2	3	4
yi	60	30	20	15

解：

xi	1	2	3	4
ln(yi)	4.0943	3.4012	2.9957	2.7081

$$\ln y=\ln a+bx,\text{令}\varphi_1(x)=1,\varphi_2(x)=x,f=\ln(y)$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=4,(\varphi_1,\varphi_2)=10,(\varphi_2,\varphi_2)=30,(\varphi_1,f)=13.1993,(\varphi_2,f)=30.7161$$

$$\begin{bmatrix}4 & 10\\ 10 & 30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ln a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13.1993\\ 30.7161\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\ln a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4.4409\\ -0.4564\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=84.8513\\ b=-0.4564\end{cases}$$

3.用梯形公式和辛普森公式求积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$。与精确值比较，两个方法得到近似值各有几个有效数字。

梯形公式：$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1}{2}(e^0 + e^1) = 1.8591$

辛普森公式：$\int_0^1 \mathrm{e}^x dx = \frac{1}{6}(e^0 + 4e^{0.5} + e^1) = 1.7189$

准确值为 $e - 1 = 1.7183$

因为 0.05<1.8591-1.7183<0.5,梯形公式有 1 位有效数字；因为 0.0005<1.7189-1.7183<0.005,辛普森公式有 3 位有效数字。