

目录

一、问题分析	2
二、模型假设	2
三、模型构成	2
四、模型求解	3
五、模型分析	3
六、结果解释	3
附件	5

一、问题分析

订户是报社固定的客户数量。若不考虑对散户卖出获利，可以认为报社每周正好印刷订户需要数量的报纸并且卖出。

单位换算方面，1 美元等于 100 美分，那么 10 美分就等于 0.1 美元。

报社生产报纸的总成本实际大于订阅所得，报社真正盈利的部分是通过接广告，对于订户实际只是象征收费。而本题希望考虑靠卖报纸获得的最大利润，所以本题不考虑生产成本，将生产成本和广告收益抵消掉。

对于本题只需要知道每周订户的数量，每周每个订户需要缴纳的订阅费就可以用每周每户的订阅费乘订户的数量得到周盈利，然后再除以一星期的天数就可以得到每天盈利的金额。

二、模型假设

1. 假设报社当前的订户数量为 n 户
2. 假设当前每周每户订阅价格为 b 美元
3. 假设报纸的生产运输的成本为 0 美元
4. 假设每周提高的订阅金额和损失客户的数量成正比
5. 假设每提高 0.1 美元订户减少 d 户
6. 假设每周定价提高 x 倍 0.1 美元
7. 假设每周报纸定价提高 $0.1x$ 美元，那么每周报纸订户损失 $d \cdot x$ 户
8. 假设提价后每周订户的数量为 y 户
9. 假设提价后每周报纸定价为 s 美元
10. 假设报社的盈利为 w 美元

三、模型构成

模型假设提高的订阅金额和损失客户量成正比，所以如果提高 0.1 x 美元就会减少 $d \cdot x$ 户订户，当前的订户的数量为 n ，则减去损失的订户后订户的数量为 $y=n-d \cdot x$ 。

当前价格为 b 美元，那么提高 0.1 x 美元后定价变为 $s=b+0.1x$ 。

不考虑利润，报社每周的盈利为 $w=s \cdot y$ 。也就是用订户的数量乘每个订户每周所需要的缴纳的订阅金。

$$\begin{cases} y = n - d \cdot x & (\text{公式 1}) \\ s = b + 0.1x & (\text{公式 2}) \\ w = s \cdot y & (\text{公式 3}) \end{cases}$$

联立公式 1，公式 2，公式 3 得，

$$w = (b + 0.1x)(n - d \cdot x) \quad (\text{公式 4})$$

将括号拆开后得到

$$w = -0.1d \cdot x^2 + (0.1n - b \cdot d)x + b \cdot n \quad (\text{公式 5})$$

一周 7 天，那么每天的利润为

$$\frac{w}{7} = \frac{-0.1d \cdot x^2 + (0.1n - b \cdot d)x + b \cdot n}{7} \quad (\text{公式 6})$$

令 $W(x)=\frac{w}{7}$ ，则 $W(x)$ 为这个优化模型的目标函数。

四、模型求解

$W(x)$ 是一个上凸的抛物线，开口向下，则使利润最大的增量系数 x 的取值为

$$x_{\max} = \frac{0.1n - b * d}{0.2d} \quad (\text{公式 7})$$

当 $n=80000$, $b=1.5$, $d=5000$ 时, $x_{\max} = 0.5$, 此时订阅金额为 $s=b+0.1x=1.55$ 美元时, 可获得最大利润。

五、模型分析

5.1 敏感性分析

实际情况下, 可能每提高 0.1 美元, 损失顾客的数量是波动的, 因此需要讨论当 d (每增加 0.1 美元损失客户数量) 变化时, 每周最佳定价的变化。

将 公式 7 代入 公式 2 得,

$$s = \frac{b}{2} + \frac{n}{20d} \quad (\text{公式 8})$$

用相对该变量衡量结果对参数的敏感程度, s 对 d 的敏感度记作 $S(s,d)$, 定义为

$$s(s,d) = \frac{\Delta s / s}{\Delta d / d} = \frac{\Delta s}{\Delta d} * \frac{d}{s} \approx - \frac{n}{10bd+n} \quad (\text{公式 9}),$$

n, b, d 均取正值, 那么最佳定价与客户量损失成负相关。增加定价导致的客户量损失越多, 定价金额应该越低。

相对灵敏度会随客户对提价的敏感情况变化。客户对提价越敏感, 则相对敏感度越低, 也就是周定价每提高 0.1 美元, 损失的客户量越大, 定价的变化幅度越小。

取 d 分别为 3000, 4000, 5000, 6000, 7000 时验证定价变化规律,

当 $d=3000$ 时, $s = b + 0.1 * x_{\max} = 2.083333$,

当 $d=4000$ 时, $s = b + 0.1 * x_{\max} = 1.750000$,

当 $d=5000$ 时, $s = b + 0.1 * x_{\max} = 1.550000$,

当 $d=6000$ 时, $s = b + 0.1 * x_{\max} = 1.416667$,

当 $d=7000$ 时, $s = b + 0.1 * x_{\max} = 1.321429$,

经过计算可知, 随着报纸周定价每增加 0.1 美元损失客户量的增加每周的最佳定价降低, 甚至需要低于当前定价才会获得最大利润。然而定价金额下降的幅度越来越低。

六、结果解释

订阅价格越便宜, 愿意为此付费的人就越多。如果订阅价格太便宜, 则需要非常大的订阅量才可以满足盈利需求。订阅价格越贵, 愿意为此付费的人就比较少, 此时即使单价很高, 但是由于客户量太少, 也无法实现足够多的盈利。

根据市场情况, 如果每增加 10 美分损失客户量越多, 那么说明客户对订阅价格越敏感,

此时不应将价格上浮太多，否则会丢失大量客户。反之，客户对价格的上涨的敏感性较低则可以适当的提高订阅金来获取更多的积累。只有达到单周单户订阅金与订阅人数之间的平衡才能获取最大的利润。

附件

代码(C 语言)

```
#include<stdio.h>
int main(){
    double x,n=80000.0,b=1.5,d;
    while(1){
        scanf("%lf",&d);
        x=(0.1*n-b*d)/(0.2*d);//公式 7
        printf("%lf\n",b+0.1*x);//公式 2
    }
    return 0;
}
```