

第四次课程作业

导弹追踪问题

假设位于坐标原点的甲舰向位于 x 轴上点 $A(1, 0)$ 处的乙舰发射导弹，导弹始终对准乙舰。如果乙舰以最大的速度 v (v 为常数) 沿平行于 y 轴的直线行驶，导弹的速度是 $5v$ ，求：

- (1) 建立微分方程模型描述导弹运行的曲线，并画出导弹运行的轨迹图。
- (2) 乙舰行驶多远时，导弹将它击中？

评分标准：

问题分析：1 分（了解背景，分析原因，形成比较清晰的问题）

模型假设：1 分（针对问题特点，作出合理简化假设，符号说明）

模型构成：3 分（采用数学工具描述问题，尽量简洁，可行，创新）

模型求解：3 分（求解方法，数学与计算机结合，尽量编程实现，给出结果）

模型分析：2 分（结果分析：误差分析，统计分析，稳定性分析；模型检验）

一、 问题分析

- 问题一：由于敌艇的运动轨迹处于同一平面内，可以建立平面直角坐标系。又因为导弹始终对准乙舰，故满足微分方程模型， 由 matlab 等数学工具进行数值求解，并绘制出图像。
- 问题二：根据问题一的图像，可以得到结果。

二、 模型假设

- 导弹与敌艇的速率恒定。
- 导弹飞行的轨迹切线方向始终指向敌艇。
- 导弹飞行的轨迹和敌艇行驶的高度始终在同一平面内。
- 导弹和敌艇均可视为质点。
- 外界环境对导弹和敌艇的运动无影响，比如风阻。

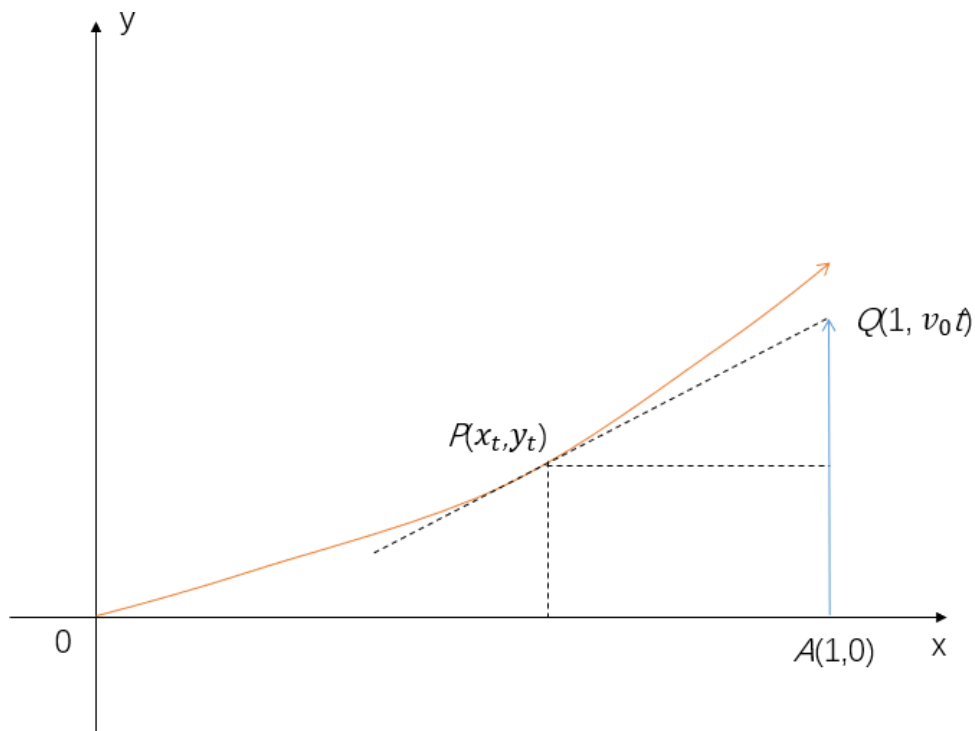
三、 模型构成

- 一些符号说明：

符号	含义
(x_t, y_t)	t 时刻坐标位置
t	经历的时间
v_0	乙舰速度
$5v_0$	导弹速度
H	敌艇最初与导弹的距离

四、模型求解

✚ 我用 PowerPoint 画了一个简单的示意图便于理解



✚ 红色曲线弧 OP 表示导弹轨迹。

✚ 蓝色直线 AP 表示乙舰轨迹。

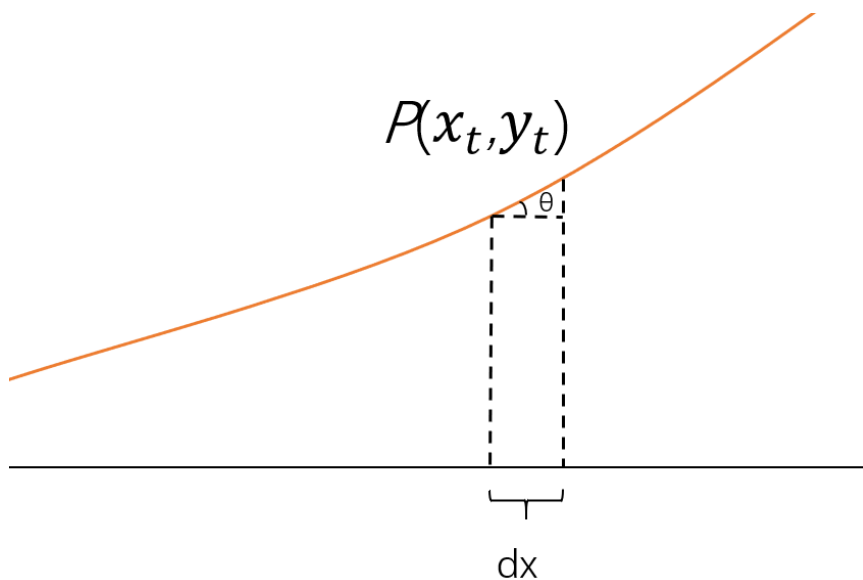
✚ 设此时导弹在 P 点, 且过 P 点的黑色虚线 PQ 表示过 P 点切线。

✚ 因为导弹飞行的轨迹切线方向始终指向敌艇, 切线 PQ 指向乙舰, 有:

$$v_0 t = (1 - x) * y' + y \quad (1)$$

✚ 因为导弹速度等于五倍的乙舰速度, 所以 OP 弧长等于五倍的 AP 线段长, 有:

- OP 弧长计算可以使用定积分，取 x 和微小段 dx 它所对应的弧长正等于 $\frac{dx}{\cos \theta}$ (θ 是 x 处 OP 所对应的切线与 x 轴夹角)



- 所以 OP 弧长可以表示为：

$$\int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

- 所以：

$$\int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = 5v_0 t$$

- 所建立的数学模型为：

$$\begin{cases} v_0 t = (1 - x) * y' + y \\ \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = 5v_0 t \end{cases}$$

- 消去 t ，整理得模型：

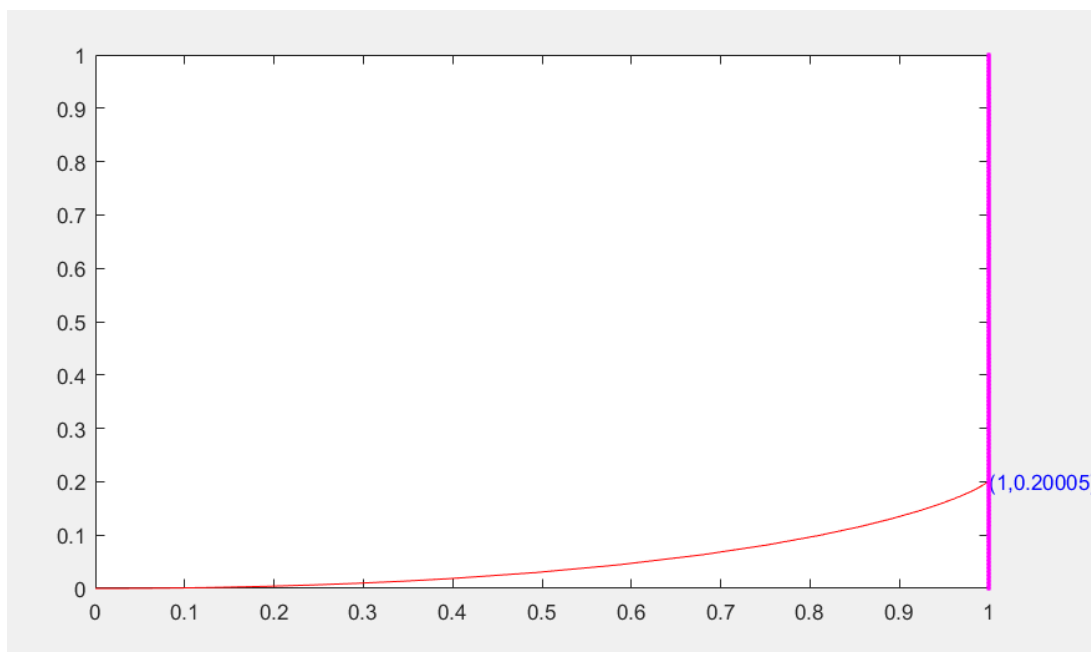
$$\sqrt{1 + y'^2} = 5y''(1 - x)$$

✚ 初值条件为：

$$y(0) = 0;$$

$$y'(0) = 0;$$

✚ 使用matlab求解：



✚ 可知导弹在乙舰行驶 0.20005 时被击中。

✚ 导弹飞行轨迹如图所示

五、模型分析

✚ 优点：

- (1) 使用经典的对微积分方式对其求解的思想，得到方程的解，利用数学实验工具Matlab软件实现求解的工程，比较简单，与得到的方程的解进行对比，验证了模型的正确性。
- (2) 使用所建立模型可以在忽略从发现到发射时间误差的前提下(即如上述模型假设情况下) 比较准确的估计导弹击中乙舰时刻和以及击中的位置。

✚ 缺点：

- (1) 未考虑导弹的射程。
- (2) 实际情况下，导弹要受空气阻力，速度是变化的，而且敌机的速度也并不一定是恒定的，导弹和飞机也不可能一直在同一平面上。

六、代码实现 (matlab)

Main文件:

```
[x,y]=ode15s(@work,[0,0.999],[0 0]);  
plot(x,y(:,1),'r-');  
y(length(y))  
t=1;  
p=y(length(y));  
text(t,p,['(',num2str(t),',',num2str(p),')'],'  
color','b');  
hold on;  
u=0:0.001:1;  
plot(1,u,'m.')
```

Work文件:

```
function dy = work(x,y)  
dy=zeros(2,1);  
dy(1)=y(2);  
dy(2)=1/5*sqrt(1+y(1)^2)/(1-x);  
end
```