

# 第二次课程作业

## 报社最优订阅问题

一家有 80000 订户的地方日报计划提高其订阅价格。现在的价格为每周 1.5 美元。据估计如果每周提高订价 10 美分，就会损失 5000 订户。

- (1) 建立数学模型，求使利润最大的订阅价格？
- (2) 讨论损失 5000 订户这一参数的灵敏性。分别假设这个参数值为：3000、4000、5000、6000 及 7000，计算最优订阅价格。
- (3) 这家报纸是否应该改变其订阅价格？用通俗易懂的语言说明你的结论。

## 一、 问题分析

### 1) 问题 (1) :

本题和上课讲的生猪出售时机问题类似, 报纸订阅价格是一个有限制的变量: 太高订户则变少, 太低则利润低, 这两种情况都会使总利润变少。我们可以看出: 总利润先增加, 再减少, 其中必有极大值。于是此题可以用简单优化模型来求解。

### 2) 问题 (2)

问题 (2) 是对 (1) 中假设: 损失 5000 订户参数的灵敏性分析, 求出 3000、5000、6000 及 7000 的最有订阅价格。我们用微分法进行灵敏性分析, 用数学软件画出相应的图像, 可以直观的求出结果。

### 3) 问题 (3)

用自己的语言来分析这家地方日报是否应该改变其价格, 我们在讨论后会给出分析。

## 二、 模型假设

- 1) 日报订阅价格一次性提高。
- 2) 订户订报后没有退订情况。
- 3) 日报定价一周保持不变。
- 4) 日报价格提高, 日报订阅人数立即减少 5000。

### 三、 一些符号说明

符号	含义	单位
r	日报的起始价格	美元/份
p	日报的实际价格	美元/份
m	提高定价	美元/份
n	每次提高价格损失订户数	户
W	起始订户数	户
L	提高价格后订户数	户
S	总利润	美元

### 四、 模型建立和求解

1) 问题一模型建立

根据题意我们可以得到以下的关系式，提高 p 美分后的订户 L 为：

$$L(p) = W - \frac{p - r}{m} \times n \qquad \text{公式 1}$$

原问题数学模型为：

$$S(p) = \left( W - \frac{p-r}{m} \times n \right) \times p \quad \text{公式 2}$$

## 2) 问题一模型求解

当  $W = 80000$ ,  $r = 1.5$ ,  $m = 0.1$ ,  $n = 5000$  时, 代入公式 2:

$$S(p) = \left( 80000 - \frac{p-1.5}{0.1} \times 5000 \right) \times p$$

$S$  是一个关于  $p$  的连续可导函数, 该模型可以用微分法求解:

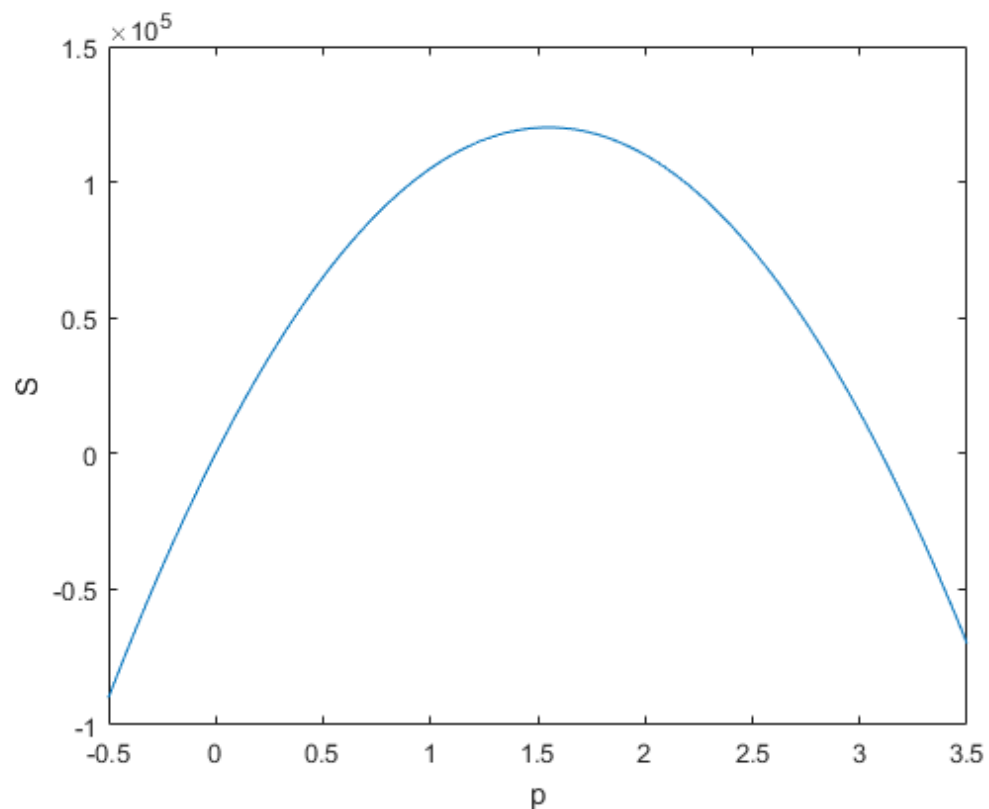
### (1) 求导

$$\frac{dS}{dp} = 15500 - 100000p$$

### (2) 驻点为

$$P = 1.55$$

可画出函数  $S$  关于  $p$  的图像如图所示:



可得日报价格提高了 0.05 美元，不符合 0.1 美元的要求。

假设价格不提高  $S = 80000 \times 1.5 = 120000$

假设提高 0.1 美元  $S = (80000 - 5000) \times 1.6 = 120000$

根据实际情况，在利润相同的情况下，订户越少，报社工作量小，故取提高 0.1 美元。

### 3) 问题二模型建立及求解

数据是由观察，甚至猜测得到，因此需要考虑数据的不准确性。日报当前的价格  $p$ 、日报的当前的订户数  $W$  都是准确的数据，每次提高 0.1 美元的订户的影响数  $n$  (在前面我们假设 5000) 是十分不准确的。

于是我们把  $W = 80000$ ,  $r = 1.5$ ,  $m = 0.1$ , 代入公式 2:

$$S(p) = (80000 - \frac{p - 1.5}{0.1} \times n) \times p$$

整理有:

$$S(p) = (80000 + 15n) \times p - 10np^2$$

对  $p$  求偏微分:

$$\frac{\partial S}{\partial p} = 80000 + 15n - 20np$$

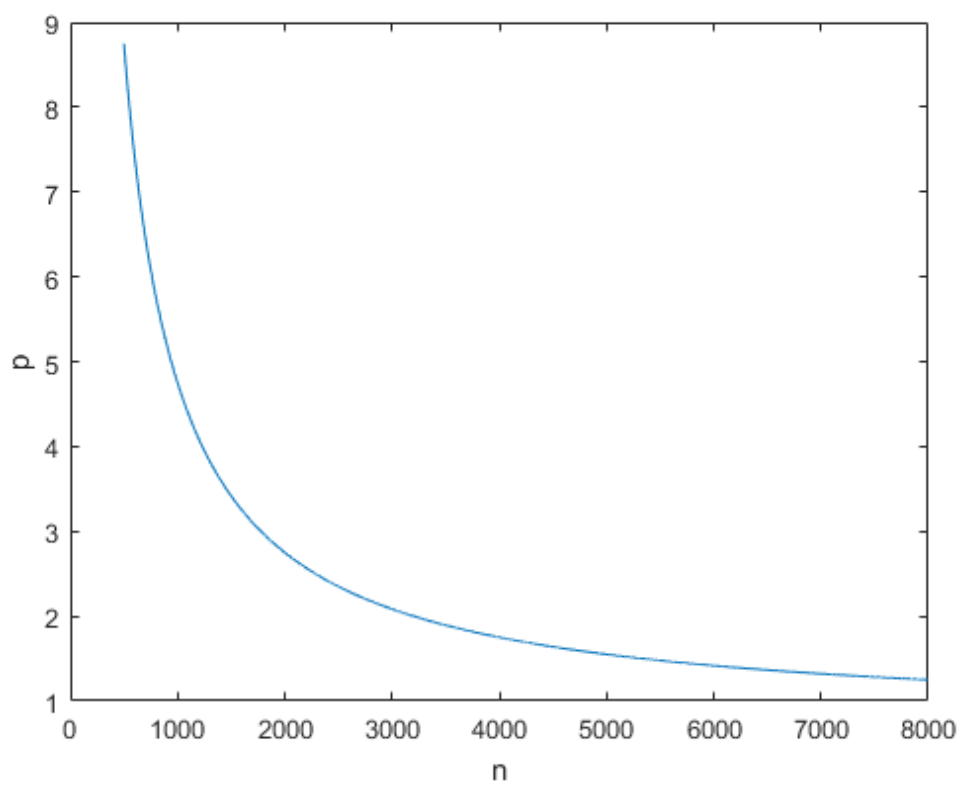
当  $\frac{\partial S}{\partial p} = 0$  时有:

$$\max(p) = \frac{4000}{n} + \frac{3}{4}$$

由上面的模型可知， $n$  变化时，最优日报变化如表格所示：

$n$	3000	4000	5000	6000	7000
$p$	2.08	1.75	1.55	1.42	1.32

可画出函数  $\max(p)$  关于  $n$  的图像如图所示：

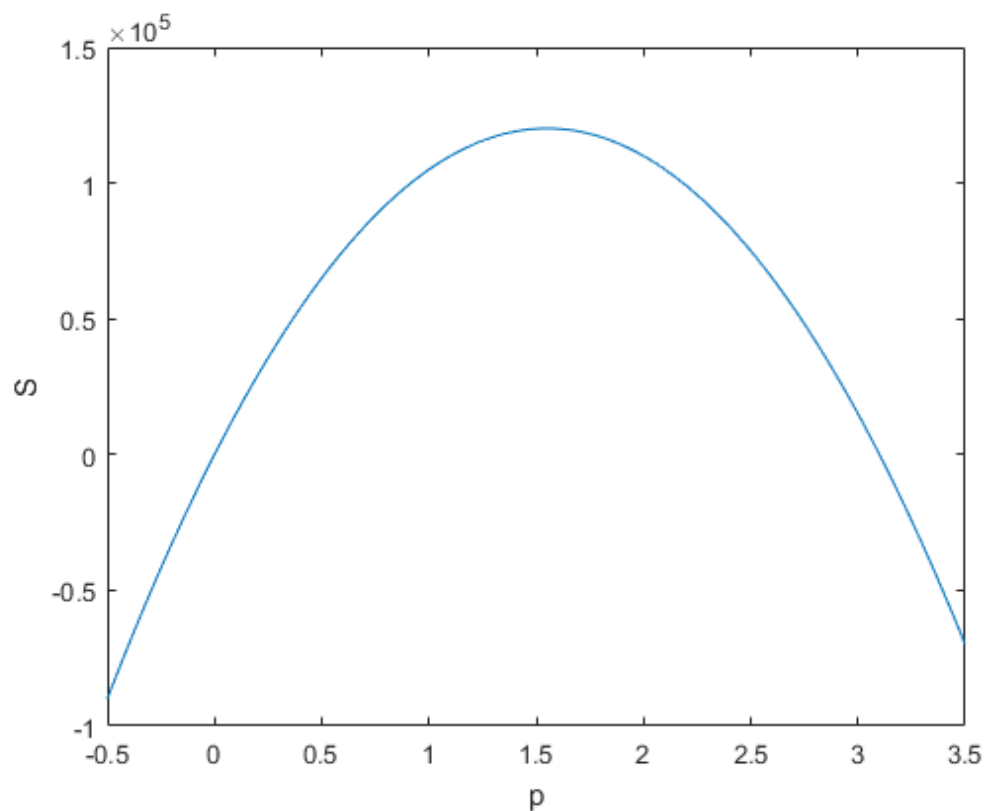


4) 问题三

根据公式

$$S(p) = \left(80000 - \frac{p - 1.5}{0.1} \times 5000\right) \times p$$

及其图像：



p	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
S	120000	120000	119000	117000	114000	110000

由以上可知，要使报社利润  $S$  最大，报纸价格  $p$  的取值只能是 1.5 或 1.6，根据实际情况在利润相同的情况下，订户越少，报社工作量小，故取 1.6 美元每份。



## 五、 灵敏性分析

p 对 n 的敏感性记为  $S(p, n)$

$$S(p, n) = \frac{\Delta p/p}{\Delta n/n} = \frac{\Delta p}{\Delta n} \times \frac{n}{p} = \frac{dp}{dn} \times \frac{n}{p} = \frac{16000}{3n + 16000}$$

当  $n = 5000$  时,  $S(p, n) = -0.516$

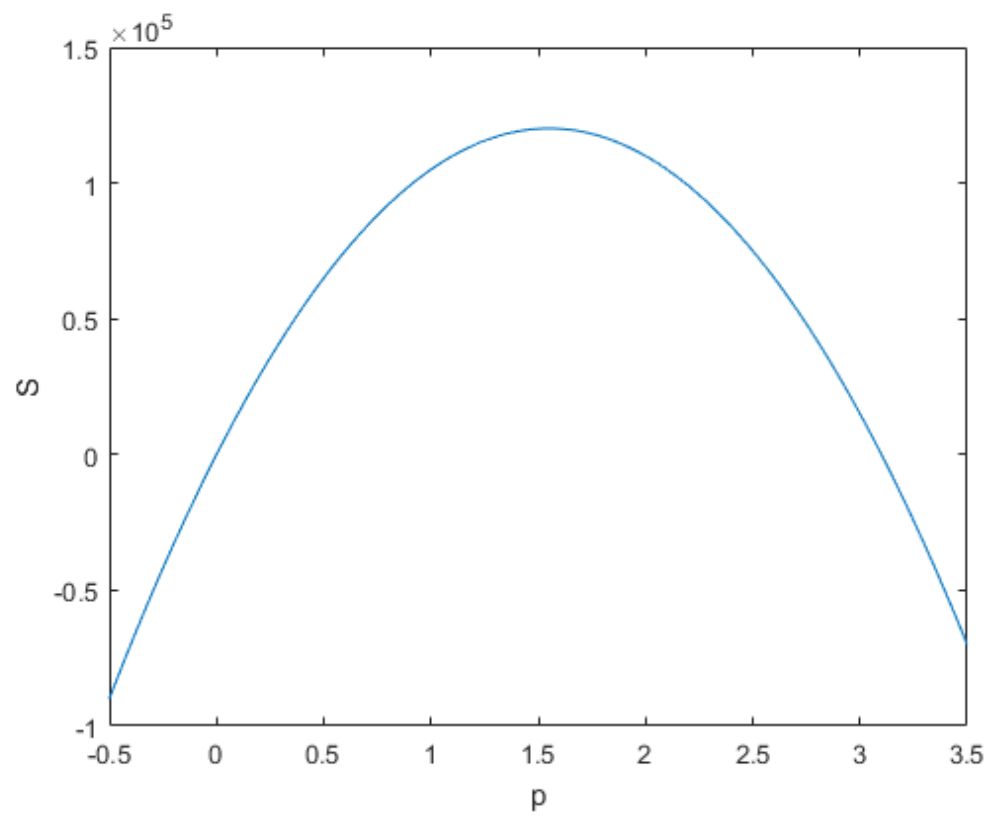
说明报纸价格每增加 1%, 出售日报就减少 0.516%份。

## 六、 模型评价

本模型直观易懂, 对实际问题的描述是合理的。相比于其他模型, 此模型变量较少, 求解过程比较简单, 所以它能求得最优解。在计算中, 采用了合理的算法及相关软件, 并做出了图表和图象, 使得求解难度大大降低。

## 七、 代码实现（Matlab 描述）

```
p = -0.5 : 0.01 : 3.5;  
S = (80000 - (p-1.5)./0.1*5000 ) .* p;  
plot(p,S);  
xlabel('p');  
ylabel('S');
```



```
n = 500 : 1 : 8000;  
p = 4000./n + 0.75;  
plot(n,p);  
xlabel('n');  
ylabel('p');
```

