《数学建模》

非线性规划问题

题目描述：

某工厂向用户提供发动机，按合同规定，其交货数量和日期是：第一季度末交 40 台，第二季度末交 60 台，第三季度末交 80 台。工厂的最大生产能力为每季度 100 台，每季度的生产费用为 $f(x)=50x+0.2x2$ （元），此处 x 为该季度生产发动机的台数。若工厂生产的得多，多余的发动机可移到下季度向用户交货，这样，工厂就需支付存储费，每台发动机每季度的存储费为 4 元。问该厂每季度应生产多少台发动机，才能既满足交货合同，又使工厂所花费的费用最少（假定第一季度开始时发动机无存货）？

一、 问题分析

该问题要我们求解工厂生产产品的总费用的最小值，总费用包括生产费用以及货物的贮存费，而这些变量和第一季度、第二季度的生产量有着密切的关系。当然，这个实际问题还隐含着一些限制条件。如：生产合同，每日生产力限制等等

二、 模型假设

1. 交付为一次性交付。
2. 发动机储存时不会发生损毁等问题。
3. 生产费用和贮存费用相对稳定，不会发生大的波动。
4. 贮存费用一周保持不变。
5. 需求量不会改变。

三、 模型构成

1. 一些符号说明

符号	含义	单位
x_1	第一季度产量	台
x_2	第二季度产量	台
x_3	第三季度产量	台
k_1	第一季度贮存费	元
k_2	第二季度贮存费	元
k_3	第三季度贮存费	元
t_1	第一季度生产费	元
t_2	第二季度生产费	元
t_3	第三季度生产费	元
z_1	第一季度总费用	元
z_2	第二季度总费用	元
z_3	第三季度总费用	元
Z	总费用	元

2. 模型构成

1） 第一季度：

生产费用 $t1$ ：

$$t1 = 50\boldsymbol{x_1} + \mathbf{0.2}\boldsymbol{x_1}^{\mathbf{2}}$$

贮存费用 $k1$ ：

第一季度产量为 $\boldsymbol{x_1}$台，交付 40 台，所以剩余$(\boldsymbol{x_1} - \mathbf{40})$台。所以：

$$k1 = 4(\boldsymbol{x_1} - \mathbf{40})$$

总费用 $z1$ ：

$$z1 = t1 + k1 = 50\boldsymbol{x_1} + \mathbf{0.2}\boldsymbol{x_1}^{\mathbf{2}} + 4(\boldsymbol{x_1} - \mathbf{40})$$

2） 第二季度：

生产费用 $t2$ ：

$$t2 = 50\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{0.2x_2}^{\boldsymbol{2}}$$

贮存费用 $k2$ ：

第一季度剩余$(\boldsymbol{x_1 - 40})$台。第二季度生产$\boldsymbol{x_2}$台，交付 60 台所以：

$$k2 = 4(\boldsymbol{x_1 + x_2 - 100})$$

总费用 z2 ：

$$z2 = t2 + k2 = 50\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{0.2x_2}^{\boldsymbol{2}} + 4(\boldsymbol{x_1 + x_2 - 100})$$

3） 第三季度：

生产费用 $t3$ ：

$$t3 = 50\boldsymbol{x_3} + \boldsymbol{0.2 x_3}^2$$

贮存费用 $k3$ ：

产品全部交付，所以 k3 = 0。

总费用 $z3$ ：

$$z3 = t3 + k3 = 50\boldsymbol{x_3} + \boldsymbol{0.2 x_3}^2$$

4） 目标函数 $Z = z1 + z2 + z3$

$$Z = 50\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{0.2 x_1}^2 + 4(\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{40}) + 50\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{0.2 x_2}^2 + 4(\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{100}) + 50\boldsymbol{x_3} + \boldsymbol{0.2 x_3}^2$$

四、 模型求解

1. 约束条件：

1）每季度最大生产力为 100；$x_i \le 100\ (i = 1,2,3)$

2）每季度交货量限制：

第一季度：$x_1 \ge 40$

第二季度：$(x_1 - 40) + x_2 \ge 60$

第三季度：$(x_1 - 40) + x_2 - 60 + x_3 = 90$

2. 完整模型：

$$\min Z = 50x_1 + 0.2{x_1}^2 + 4(x_1 - 40) + 50x_2 + 0.2{x_2}^2 + 4(x_1 + x_2 - 100) + 50x_3 + 0.2{x_3}^2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 \ge 40 \\ (x_1 - 40) + x_2 \ge 60 \\ (x_1 - 40) + x_2 - 60 + x_3 = 90 \\ 0 \le x_i \le 100(i = 1,2,3) \end{cases}$$

3． Lingo 求解：

最优解为 $X=(50,60,70)$，最小费用为 $\min Z=11280$

Solution Report - LINGO1

```
Local optimal solution found.
Objective value:                              11280.00
Infeasibilities:                              0.1421085E-13
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                            14


                   Variable           Value        Reduced Cost
                         X1        50.00000            0.000000
                         X2        60.00000            0.000000
                         X3        70.00000            0.000000

                        Row    Slack or Surplus      Dual Price
                          1        11280.00           -1.000000
                          2        10.00000            0.000000
                          3        50.00000            0.000000
                          4        50.00000            0.000000
                          5        10.00000            0.000000
                          6        60.00000            0.000000
                          7        0.000000           -78.00000
                          8        70.00000            0.000000
                          9        40.00000            0.000000
                         10        30.00000            0.000000
```

五、 模型分析

由于实际情况等原因，生产费不会像给出的函数一样稳定，因此我们来分析：函数参数变化对结果的影响。

设每季度生产量为 x，则该季度生产费为：

$$f(x) = 50x + 0.2x^2$$

把这个模型抽象成：

$$f(x) = ax + bx^2$$

设贮存费为 c。

对 a, b, c 三个参数进行分析：

1. 当 a 变化时，根据 lingo 可以看出：a 的增大或减小对方案没有任何影响，无论 a 为多少方案都是(50,60,70)。

a	30	40	50	60	70	80
最优解向量	(50,60,70)	(50,60,70)	(50,60,70)	(50,60,70)	(50,60,70)	(50,60,70)

2. 当 b 变化时，根据 lingo 可以看出：随着 b 的增加三个季度的生产量趋近于交付总量的平均值 60，且$\boldsymbol{x_2}$保持不变$\boldsymbol{x_1}$，$\boldsymbol{x_3}$和为一个定值 120。

b	0.2	0.8	1.4	2.0	2.6	3.2
最优解向量	(40,60,80)	(57.5,60,62.5)	(58,60,62)	(59,60,61)	(59.2,60,60.8)	(59.4,60,60.6)

3. 当 c 变化时，根据 lingo 可以看出：随着 c 逐渐增大三季度生产量分别趋近于每季度交付量即(40,60,80)。

c	4	5	6	7	8	9
最优解向量	(50,60,70)	(47.5,60,62.5)	(45,60,65)	(42.5,60,67.5)	(40,60,80)	(40,60,80)

六、 代码实现（Lingo）

```
model:
min=50*x1+0.2*x1^2+4*(x1-
40)+50*x2+0.2*x2^2+4*(x1+x2-
100)+50*x3+0.2*x3^2;
x1>=40;
x1<=100;
x1>=0;
x1-40+x2>=60;
x2>=0;
x1-40+x2-60+x3=80;
x3>=0;
x2<=100;
x3<=100;
        end
```