

李群的导数与 Jacobian 矩阵

Shuyong Chen

2022 年 5 月 31 日

—姜太公直钩钓鱼有云：宁可直中取，不向曲中求。

1 简介

在向量微积分中，多个变量的向量值函数的雅可比矩阵 (Jacobian matrix) 是其所有一阶偏导数的矩阵。

假设 $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 是一个函数，使得它的每个一阶偏导数都存在于 \mathbf{R}^n 上。该函数将点 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 作为输入，并生成向量 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^m$ 作为输出。那么 \mathbf{f} 的 Jacobian 矩阵被定义为一个 $m \times n$ 矩阵，记为 \mathbf{J} ，其第 (i, j) 项为 $\mathbf{J}_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ，或明确地

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla^T f_1 \\ \vdots \\ \nabla^T f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

其中 $\nabla^T f_i$ 是梯度的转置 (行向量) 的第 i 个分量。

Jacobian 矩阵表示 \mathbf{f} 在 \mathbf{f} 的可微分的每个点上的微分。具体来说，如果 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x} 处可微，如果 \mathbf{h} 是一个列矩阵表示的位移向量，那么矩阵乘积 $\mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$ 是另一个位移向量，即 \mathbf{f} 在 \mathbf{x} 的邻域内的变化的最佳线性近似。这意味着将 \mathbf{y} 映射到 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})$ 的函数是 $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ 对于所有靠近 \mathbf{x} 的点的最佳线性逼近。该线性函数称为 \mathbf{f} 在 \mathbf{x} 处的导数 (derivative) 或微分 (differential)。

形象地说，Jacobian 矩阵在流形的当前线性化点的各个自然基方向上求导，因此在线性化点处形成一个超平面，所以我们主要采用 Jacobian 矩阵映射向量切空间的形式在李群中定义导数。因为在这些空间中，不确定性和增量可以被恰当而容易地定义。利用这些 Jacobian 矩阵，李群中的不确定性管理公式与向量空间中的不确定性管理公式基本相似。

2 伴随与伴随矩阵

在应用 Jacobian 矩阵的公式中，经常遇到伴随矩阵，因此这里对此做简单摘要。

首先是指数映射的重要性质

$$\exp((t+s)\boldsymbol{\tau}^\wedge) = \exp(t\boldsymbol{\tau}^\wedge) \exp(s\boldsymbol{\tau}^\wedge) \quad (1)$$

$$\exp(t\boldsymbol{\tau}^\wedge) = \exp(\boldsymbol{\tau}^\wedge)^t \quad (2)$$

$$\exp(-\boldsymbol{\tau}^\wedge) = \exp(\boldsymbol{\tau}^\wedge)^{-1} \quad (3)$$

$$\exp(\mathcal{X}\boldsymbol{\tau}^\wedge\mathcal{X}^{-1}) = \mathcal{X} \exp(\boldsymbol{\tau}^\wedge) \mathcal{X}^{-1} \quad (4)$$

其中方程 (4) 很有用, 在推导伴随矩阵和 Jacobian 矩阵时经常用到。

流形 \mathcal{M} 有么元 \mathcal{E} , 在 \mathcal{X} 处的切空间中有向量 τ 。我们用伴随矩阵进行局部切元素和全局切元素的变换

$$\begin{aligned}\text{Exp}(\mathcal{E}\tau)\mathcal{X} &= \mathcal{X}\text{Exp}(\mathcal{X}\tau) \\ \exp(\mathcal{E}\tau^\wedge) &= \mathcal{X}\exp(\mathcal{X}\tau^\wedge)\mathcal{X}^{-1} = \exp(\mathcal{X}\mathcal{X}\tau^\wedge\mathcal{X}^{-1}) \\ \mathcal{E}\tau^\wedge &= \mathcal{X}\mathcal{X}\tau^\wedge\mathcal{X}^{-1}\end{aligned}$$

因此, 我们将 \mathcal{M} 在 \mathcal{X} 处的伴随记为 $\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}$, 定义为

$$\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}} : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}; \tau^\wedge \mapsto \mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}(\tau^\wedge) \triangleq \mathcal{X}\mathcal{X}\tau^\wedge\mathcal{X}^{-1}, \quad (5)$$

因此

$$\mathcal{E}\tau^\wedge = \mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}(\mathcal{E}\tau^\wedge). \quad (6)$$

这定义了群在它自己的李代数上的伴随作用。伴随矩阵有一些常用的性质

$$\mathcal{X} \oplus \tau = (\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}\tau) \oplus \mathcal{X} \quad (7)$$

$$\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}^{-1}} = \mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}^{-1} \quad (8)$$

$$\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} = \mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}\mathbf{Ad}_{\mathcal{Y}}. \quad (9)$$

请注意在方程 (8, 9) 中的左半部分通常比右半部分计算起来更方便快捷。我们将经常使用伴随矩阵将 \mathcal{X} 处的切空间的向量线性变换为原点的切空间的向量, 应用方程为 $\mathcal{E}\tau = \mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}\mathcal{X}\tau$ 。

3 向量空间上的 Jacobian 矩阵

对于多元函数 $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, Jacobian 矩阵定义为所有偏导数的 $n \times m$ 矩阵,

$$\mathbf{J} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}. \quad (10)$$

让我们用列向量形式分割 $\mathbf{J} = [\mathbf{j}_1 \dots \mathbf{j}_m]$, 并让 $\mathbf{j}_i = \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \right]^\top$ 作为它的第 i 个列向量。此列向量响应于

$$\mathbf{j}_i = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h} \in \mathbb{R}^n, \quad (11)$$

其中 \mathbf{e}_i 是 \mathbb{R}^m 的自然基的第 i 个向量。对于分子, 注意这个向量

$$\mathbf{v}_i(h) \triangleq f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n \quad (12)$$

是当 \mathbf{x} 在 \mathbf{e}_i 方向上受到扰动时, $f(\mathbf{x})$ 的变化量, 并且相应的 Jacobian 矩阵的列仅为

$$\mathbf{j}_i = \left. \frac{\partial \mathbf{v}_i(h)}{\partial h} \right|_{h=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}_i(h)}{h}.$$

我们引入紧凑形式,

$$\mathbf{J} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \triangleq \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})}{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad (13)$$

其中 $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$, 其用方程 (11) 计算所有列以形成方程 (10) 的定义。我们注意到方程 (13) 只是一个方便的符号 (就像方程 (10) 一样), 因为向量 \mathbf{h} 的除法未定义, 正确的计算需要方程 (11)。然而, 通过将分子扩展 \mathbf{h} 中的线性形式, 并将左手侧标识为 Jacobian 矩阵, 该形式可用于计算 Jacobian 矩阵, 即,

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})}{\mathbf{h}} = \dots = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{J}\mathbf{h}}{\mathbf{h}} \triangleq \frac{\partial \mathbf{J}\mathbf{h}}{\partial \mathbf{h}} = \mathbf{J}. \quad (14)$$

对于 \mathbf{h} 的小值, 我们有线性近似值,

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \xrightarrow{\mathbf{h} \rightarrow 0} f(\mathbf{x}) + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{h}. \quad (15)$$

4 李群上的 Jacobian 矩阵

4.1 李群上的右 Jacobian 矩阵

受上面标准导数定义方程 (13) 的启发, 我们现在可以使用我们的 \oplus 和 \ominus 算子来定义作用于流形的函数 $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ 的 Jacobian 矩阵。使用右结合 (right-) 的 $\{\oplus, \ominus\}$ 代替 $\{+, -\}$, 我们获得一个类似于标准导数的形式,

$$\frac{{}^{\mathcal{X}}Df(\mathcal{X})}{D\mathcal{X}} \triangleq \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(\mathcal{X} \oplus \tau) \ominus f(\mathcal{X})}{\tau} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (16a)$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\text{Log}\left(f(\mathcal{X})^{-1} \circ f(\mathcal{X} \circ \text{Exp}(\tau))\right)}{\tau} \quad (16b)$$

$$= \left. \frac{\partial \text{Log}\left(f(\mathcal{X})^{-1} \circ f(\mathcal{X} \circ \text{Exp}(\tau))\right)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}. \quad (16c)$$

我们把这种 Jacobian 矩阵称为 f 函数的右 Jacobian 矩阵。请注意方程 (16c) 只是在标准导数方程 (13) 中使用相当复杂的函数 $g(\tau) = \text{Log}\left(f(\mathcal{X})^{-1} \circ f(\mathcal{X} \circ \text{Exp}(\tau))\right)$ 。将其写入方程 (16a) 中传达了更多的直觉: 它是 $f(\mathcal{X})$ 相对于 \mathcal{X} 的导数, 只是我们表达为在切空间中的无穷小变化! 实际上, 由于使用右结合 (right-) 的 \oplus 和 \ominus 的操作, \mathcal{X} 和 $f(\mathcal{X})$ 中的变量现在被表示为局部切空间中的向量, 即分别在 $\mathcal{X} \in \mathcal{M}$ 和 $f(\mathcal{X}) \in \mathcal{N}$ 处的正切。这个导数是一个适当的 Jacobian 矩阵 $\mathbb{R}^{n \times m}$ 线性地映射到局部 (local) 切空间 $T_{\mathcal{X}}\mathcal{M} \rightarrow T_{f(\mathcal{X})}\mathcal{N}$ (并且我们用一个局部 ‘ \mathcal{X} ’ 上标来标记导数)。就像在向量空间中一样, 这个矩阵的列对应于方向导数。也就是对于向量

$$\sigma_i(h) = f(\mathcal{X} \oplus h\mathbf{e}_i) \ominus f(\mathcal{X}) \in \mathbb{R}^n \quad (17)$$

用方程 (12) 中的 \mathbf{v}_i 来比较方程 (17) 的 σ_i , 其是当 \mathcal{X} 沿着 \mathbf{e}_i 方向变化时, $f(\mathcal{X})$ 的变化。其相应的 Jacobian 矩阵的列是

$$\mathbf{j}_i = \left. \frac{\partial \sigma_i(h)}{\partial h} \right|_{h=0}.$$

注意, 每当函数 f 从一个流形传递到另一个流形时, 方程 (16a) 中的加号和减号算子必须被正确选择: \oplus 对应定义域 (domain) \mathcal{M} , 并且 \ominus 对应目标域 (codomain) 或图 (image) \mathcal{N} 。

对于 τ 的小值, 以下近似值适用,

$$f(\mathcal{X} \oplus {}^{\mathcal{X}}\tau) \xrightarrow{{}^{\mathcal{X}}\tau \rightarrow 0} f(\mathcal{X}) \oplus \frac{{}^{\mathcal{X}}Df(\mathcal{X})}{D\mathcal{X}} {}^{\mathcal{X}}\tau \in \mathcal{N}. \quad (18)$$

4.2 李群上的左 Jacobian 矩阵

导数也可以由左结合 (left-) 加号和减号算子定义, 因此,

$$\begin{aligned} \frac{{}^{\varepsilon}Df(\mathcal{X})}{D\mathcal{X}} &\triangleq \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(\tau \oplus \mathcal{X}) \ominus f(\mathcal{X})}{\tau} \in \mathbb{R}^{n \times m} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\log \left(f(\text{Exp}(\tau) \circ \mathcal{X}) \circ f(\mathcal{X})^{-1} \right)}{\tau} \\ &= \left. \frac{\partial \log \left(f(\text{Exp}(\tau) \circ \mathcal{X}) \circ f(\mathcal{X})^{-1} \right)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}, \end{aligned} \quad (19)$$

我们称之为 f 函数的左 Jacobian 矩阵。请注意, 现在 $\tau \in T_{\varepsilon}\mathcal{M}$, 并且分子属于 $T_{\varepsilon}\mathcal{N}$, 因此左 Jacobian 矩阵是一个 $n \times m$ 的矩阵, 映射了全局 (global) 切空间, $T_{\varepsilon}\mathcal{M} \rightarrow T_{\varepsilon}\mathcal{N}$, 这是 \mathcal{M} 和 \mathcal{N} 的李代数 (并且我们用全局或原点 ‘ ε ’ 上标来标记导数)。对于 τ 的小值, 以下方程成立,

$$f({}^{\varepsilon}\tau \oplus \mathcal{X}) \xrightarrow{{}^{\varepsilon}\tau \rightarrow 0} \frac{{}^{\varepsilon}Df(\mathcal{X})}{D\mathcal{X}} {}^{\varepsilon}\tau \oplus f(\mathcal{X}) \in \mathcal{N}. \quad (20)$$

我们可以从方程 (18, 20) 中展示左和右 Jacobian 矩阵由 \mathcal{M} 和 \mathcal{N} 的伴随相关联的关系,

$$\frac{{}^{\varepsilon}Df(\mathcal{X})}{D\mathcal{X}} \mathbf{Ad}_{\mathcal{X}} = \mathbf{Ad}_{f(\mathcal{X})} \frac{{}^{\varepsilon}Df(\mathcal{X})}{D\mathcal{X}}. \quad (21)$$

4.3 交叉使用右-左 Jacobian 矩阵

也可以同时使用右侧加号和左侧减号来定义 Jacobian 矩阵, 反之亦然。虽然不太可能, 但它们有时很有用, 因为它们将局部的正切映射到全局的正切, 反之亦然。简而言之, 我们将通过伴随把它们与其它 Jacobian 矩阵联系起来,

$$\frac{{}^{\varepsilon}D\mathcal{Y}}{{}^{\varepsilon}D\mathcal{X}} = \frac{{}^{\varepsilon}D\mathcal{Y}}{\varepsilon D\mathcal{X}} \mathbf{Ad}_{\mathcal{X}} = \mathbf{Ad}_{\mathcal{Y}} \frac{{}^{\varepsilon}D\mathcal{Y}}{\varepsilon D\mathcal{X}} \quad (22)$$

$$\frac{{}^{\varepsilon}D\mathcal{Y}}{\varepsilon D\mathcal{X}} = \frac{{}^{\varepsilon}D\mathcal{Y}}{\varepsilon D\mathcal{X}} \mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}^{-1} = \mathbf{Ad}_{\mathcal{Y}}^{-1} \frac{{}^{\varepsilon}D\mathcal{Y}}{\varepsilon D\mathcal{X}}, \quad (23)$$

其中 $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$ 。现在, 上一行和下一行的上标表明表示差异的参考坐标系。相应的小 τ 的近似值取为,

$$f(\mathcal{X} \oplus {}^{\varepsilon}\tau) \xrightarrow{{}^{\varepsilon}\tau \rightarrow 0} \frac{{}^{\varepsilon}Df(\mathcal{X})}{\varepsilon D\mathcal{X}} {}^{\varepsilon}\tau \oplus f(\mathcal{X}) \quad (24)$$

$$f({}^{\varepsilon}\tau \oplus \mathcal{X}) \xrightarrow{{}^{\varepsilon}\tau \rightarrow 0} f(\mathcal{X}) \oplus \frac{{}^{\varepsilon}Df(\mathcal{X})}{\varepsilon D\mathcal{X}} {}^{\varepsilon}\tau. \quad (25)$$

5 流形上的微分法则

对于我们所使用的所有经典流形 \mathcal{M} , 对于求逆 (inversion)、组合 (composition)、求幂 (exponentiation) 和作用 (action) 的初等 Jacobian 矩阵, 我们可以确定封闭形式。此外, 其中一些形式可能与伴随 $\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}$ 有关, 后者成为微分过程的矩阵中心块。Log、 \oplus 和 \ominus 等其它形式可以很容易地从它们当中推导出来。一旦找到这些形式或“矩阵块”, 所有其它 Jacobian 矩阵都遵循链式法则。这

里扩展的所有 Jacobian 矩阵都是右 Jacobian 矩阵, 即由方程 (16a) 所定义。对于扩展左 Jacobian 矩阵, 可采用方程 (21) 进行变换, 因为

$$\frac{{}^{\varepsilon}Df(\mathcal{X})}{D\mathcal{X}} = \mathbf{Ad}_{f(\mathcal{X})} \frac{{}^{\varepsilon}Df(\mathcal{X})}{D\mathcal{X}} \mathbf{Ad}_{\mathcal{X}^{-1}}. \quad (26)$$

我们使用便捷符号 $\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{f(\mathcal{X})} \triangleq \frac{Df(\mathcal{X})}{D\mathcal{X}}$ 和 $\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}} \triangleq \frac{D\mathcal{Y}}{D\mathcal{X}}$ 。此外, $\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}^{-1}}$ 应该由 $\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}^{-1}}$ 实现, 参见方程 (8, 9), 因为后者运算快一些。

5.1 求逆 (Inverse)

我们用方程 (16a) 定义

$$\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}^{-1}} \triangleq \frac{{}^{\mathcal{X}}D\mathcal{X}^{-1}}{D\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (27)$$

这可以通过方程 (6) 的伴随来确定,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}^{-1}} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\text{Log}\left((\mathcal{X}^{-1})^{-1}(\mathcal{X}\text{Exp}(\tau))^{-1}\right)}{\tau} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(\mathcal{X}\text{Exp}(-\tau)\mathcal{X}^{-1})}{\tau} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{X}(-\tau)^{\wedge}\mathcal{X}^{-1})^{\vee}}{\tau} = -\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}} \end{aligned} \quad (28)$$

5.2 组合 (Composition)

我们用方程 (16a) 定义

$$\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X} \circ \mathcal{Y}} \triangleq \frac{{}^{\mathcal{X}}D\mathcal{X} \circ \mathcal{Y}}{D\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (29)$$

$$\mathbf{J}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X} \circ \mathcal{Y}} \triangleq \frac{{}^{\mathcal{Y}}D\mathcal{X} \circ \mathcal{Y}}{D\mathcal{Y}} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (30)$$

并如上面一样使用方程 (4, 6), 并使用方程 (8) 来确定,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X} \circ \mathcal{Y}} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\text{Log}\left((\mathcal{X}\mathcal{Y})^{-1}(\mathcal{X}\text{Exp}(\tau)\mathcal{Y})\right)}{\tau} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(\mathcal{Y}^{-1}\text{Exp}(\tau)\mathcal{Y})}{\tau} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{Y}^{-1}\tau^{\wedge}\mathcal{Y})^{\vee}}{\tau} = \mathbf{Ad}_{\mathcal{Y}}^{-1} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\mathbf{J}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X} \circ \mathcal{Y}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\text{Log}\left((\mathcal{X}\mathcal{Y})^{-1}(\mathcal{X}\mathcal{Y}\text{Exp}(\tau))\right)}{\tau} = \mathbf{I} \quad (32)$$

5.3 流形 \mathcal{M} 的 Jacobian 矩阵

我们定义流形 \mathcal{M} 的右 Jacobian 矩阵为 $\mathcal{X} = \text{Exp}(\tau)$ 的右 Jacobian 矩阵, 即对于 $\tau \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathbf{J}_r(\tau) \triangleq \frac{{}^{\tau}D\text{Exp}(\tau)}{D\tau} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad (33)$$

这由方程 (16a) 定义。右 Jacobian 矩阵将参数 τ 的变化映射到 $\text{Exp}(\tau)$ 处的局部 (local) 切空间中的变化。从方程 (16a) 这很容易证明, 对于小的 $\delta\tau$ 值, 以下近似值成立,

$$\text{Exp}(\tau + \delta\tau) \approx \text{Exp}(\tau) \text{Exp}(\mathbf{J}_r(\tau) \delta\tau) \quad (34)$$

$$\text{Exp}(\tau) \text{Exp}(\delta\tau) \approx \text{Exp}(\tau + \mathbf{J}_r^{-1}(\tau) \delta\tau) \quad (35)$$

$$\text{Log}(\text{Exp}(\tau) \text{Exp}(\delta\tau)) \approx \tau + \mathbf{J}_r^{-1}(\tau) \delta\tau. \quad (36)$$

另一方面, 流形 \mathcal{M} 的左 Jacobian 矩阵被定义为,

$$\mathbf{J}_l(\tau) \triangleq \frac{\varepsilon D\text{Exp}(\tau)}{D\tau} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad (37)$$

使用左 Jacobian 矩阵方程 (19), 得出近似值

$$\text{Exp}(\tau + \delta\tau) \approx \text{Exp}(\mathbf{J}_l(\tau) \delta\tau) \text{Exp}(\tau) \quad (38)$$

$$\text{Exp}(\delta\tau) \text{Exp}(\tau) \approx \text{Exp}(\tau + \mathbf{J}_l^{-1}(\tau) \delta\tau) \quad (39)$$

$$\text{Log}(\text{Exp}(\delta\tau) \text{Exp}(\tau)) \approx \tau + \mathbf{J}_l^{-1}(\tau) \delta\tau. \quad (40)$$

左 Jacobian 矩阵将参数 τ 的变化映射到全局 (global) 切空间或李代数中的变化。从方程 (34, 38) 我们可以把左 Jacobian 矩阵和右 Jacobian 矩阵用伴随联系起来,

$$\mathbf{Ad}_{\text{Exp}(\tau)} = \mathbf{J}_l(\tau) \mathbf{J}_r^{-1}(\tau). \quad (41)$$

此外, 链式法则允许我们关联 \mathbf{J}_r 和 \mathbf{J}_l ,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_r(-\tau) &\triangleq \mathbf{J}_{-\tau}^{\text{Exp}(-\tau)} = \mathbf{J}_{\tau}^{\text{Exp}(-\tau)} \mathbf{J}_{-\tau}^{\tau} = \mathbf{J}_{\tau}^{\text{Exp}(\tau)^{-1}}(-\mathbf{I}) \\ &= -\mathbf{J}_{\text{Exp}(\tau)}^{\text{Exp}(\tau)^{-1}} \mathbf{J}_{\tau}^{\text{Exp}(\tau)} = \mathbf{Ad}_{\text{Exp}(\tau)} \mathbf{J}_r(\tau) \\ &= \mathbf{J}_l(\tau). \end{aligned} \quad (42)$$

对于使用中的经典流形, \mathbf{J}_r 、 \mathbf{J}_r^{-1} 、 \mathbf{J}_l 和 \mathbf{J}_l^{-1} , 存在封闭形式。见后面章节的推导。

5.4 群作用

对于 $\mathcal{X} \in \mathcal{M}$ 和 $v \in \mathcal{V}$, 我们用方程 (16a) 定义

$$\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X} \cdot v} \triangleq \frac{\mathcal{X} D\mathcal{X} \cdot v}{D\mathcal{X}} \quad (43)$$

$$\mathbf{J}_v^{\mathcal{X} \cdot v} \triangleq \frac{v D\mathcal{X} \cdot v}{Dv}. \quad (44)$$

由于群作用依赖于集合 \mathcal{V} , 因此这些表达式不能通用化。

5.5 常见 Jacobian 矩阵块

Log 映射: 对于 $\tau = \text{Log}(\mathcal{X})$, 并从方程 (36),

$$\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\text{Log}(\mathcal{X})} = \mathbf{J}_r^{-1}(\tau). \quad (45)$$

加号和减号：我们有

$$\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X} \oplus \tau} = \mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X} \circ (\text{Exp}(\tau))} = \mathbf{Ad}_{\text{Exp}(\tau)}^{-1} \quad (46)$$

$$\mathbf{J}_{\tau}^{\mathcal{X} \oplus \tau} = \mathbf{J}_{\text{Exp}(\tau)}^{\mathcal{X} \circ (\text{Exp}(\tau))} \mathbf{J}_{\tau}^{\text{Exp}(\tau)} = \mathbf{J}_r(\tau) \quad (47)$$

并得到 $\mathcal{Z} = \mathcal{X}^{-1} \circ \mathcal{Y}$ 和 $\tau = \mathcal{Y} \ominus \mathcal{X} = \text{Log}(\mathcal{Z})$,

$$\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y} \ominus \mathcal{X}} = \mathbf{J}_{\mathcal{Z}}^{\text{Log}(\mathcal{Z})} \mathbf{J}_{\mathcal{X}^{-1}}^{\mathcal{Z}} \mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}^{-1}} = -\mathbf{J}_l^{-1}(\tau) \quad (48)$$

$$\mathbf{J}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Y} \ominus \mathcal{X}} = \mathbf{J}_{\mathcal{Z}}^{\text{Log}(\mathcal{Z})} \mathbf{J}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}} = \mathbf{J}_r^{-1}(\tau) \quad (49)$$

6 三维变换群与 Jacobian 矩阵

对于我们常用的经典流形，我们使用方程 (16a) 以便使用相同的机制方程 (14) 来真正地寻找 Jacobian 矩阵。

6.1 旋转群 S^3 和 $\text{SO}(3)$ 的 Jacobian 矩阵

单位四元数群 S^3 和特殊正交矩阵群 $\text{SO}(3)$ ，两者都可旋转 3 元向量。它们有同构的切空间，其元素可用 \mathbb{R}^3 中的旋转向量标识，所以我们把它们放在一起研究。正是在这个空间 \mathbb{R}^3 中，我们定义旋转率 $\omega \triangleq \mathbf{u}\omega$ 、轴-角 $\theta \triangleq \mathbf{u}\theta$ ，以及所有扰动和不确定性的向量。

四元数流形 S^3 是 $\text{SO}(3)$ 的双倍覆盖，即 \mathbf{q} 和 $-\mathbf{q}$ 表示相同的旋转 \mathbf{R} 。第一个覆盖对应于正实部 $w > 0$ 的四元数。这两个群可以被认为是同构的第一覆盖。

6.1.1 Exp 与 Log 映射

Exp 与 Log 映射可以定义为 S^3 的四元数和 $\text{SO}(3)$ 的旋转矩阵。对于四元数 $\mathbf{q} = (w, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}$ 我们有

$$\mathbf{q} = \text{Exp}(\theta \mathbf{u}) \triangleq \cos(\theta/2) + \mathbf{u} \sin(\theta/2) \in \mathbb{H} \quad (50)$$

$$\theta \mathbf{u} = \log(\mathbf{q}) \triangleq 2\mathbf{v} \frac{\arctan(\|\mathbf{v}\|, w)}{\|\mathbf{v}\|} \in \mathbb{R}^3 \quad (51)$$

对于旋转矩阵我们有，

$$\mathbf{R} = \text{Exp}(\theta \mathbf{u}) \triangleq \mathbf{I} + \sin \theta [\mathbf{u}]_{\times} + (1 - \cos \theta) [\mathbf{u}]_{\times}^2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (52)$$

$$\theta \mathbf{u} = \log(\mathbf{R}) \triangleq \frac{\theta (\mathbf{R} - \mathbf{R}^{\top})^{\vee}}{2 \sin \theta} \in \mathbb{R}^3, \quad (53)$$

其中 $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\text{trace}(\mathbf{R}) - 1}{2} \right)$ 。

6.1.2 旋转作用

给定上述四元数和旋转矩阵的表达式，四元数在 3 元向量上的旋转作用是由双四元数积来完成的，

$$\mathbf{x}' = \mathbf{q} \mathbf{x} \mathbf{q}^* \quad (54)$$

当旋转矩阵使用单个矩阵积时,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}. \quad (55)$$

两者相当于一个围绕轴 \mathbf{u} 旋转角度 θ 弧度 (rad) 的右手旋转。从四元数 \mathbf{q} 变换到旋转矩阵 \mathbf{R} 的公式为

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} w^2 + x^2 - y^2 - z^2 & 2(xy - wz) & 2(xz + wy) \\ 2(xy + wz) & w^2 - x^2 + y^2 - z^2 & 2(yz - wx) \\ 2(xz - wy) & 2(yz + wx) & w^2 - x^2 - y^2 + z^2 \end{bmatrix}. \quad (56)$$

6.1.3 初等 Jacobian 矩阵块

由于我们定义的导数映射切向量空间, 并且这些空间重叠于 S^3 和 $\text{SO}(3)$ 的三维旋转流形, 即, $\boldsymbol{\theta} = \text{Log}(\mathbf{q}) = \text{Log}(\mathbf{R})$, 因此 Jacobian 矩阵独立于所使用的表示 (\mathbf{q} 或 \mathbf{R})。因此, 我们考虑通用的 3D 旋转元素, 并用无衬线字体 \mathbf{R} 来标记它们。

伴随: 从方程 (6) 我们有

$$\text{Ad}_{\mathbf{R}}\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{R}[\boldsymbol{\theta}]_{\times} \mathbf{R}^{\top})^{\vee} = ([(\mathbf{R}\boldsymbol{\theta})]_{\times})^{\vee} = \mathbf{R}\boldsymbol{\theta}$$

因此

$$\text{Ad}_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}, \quad (57)$$

具体的, 对于 \mathbf{q} 有 $\text{Ad}_{\mathbf{q}} = \mathbf{R}(\mathbf{q})$, 参见方程 (56), 对于 \mathbf{R} 有 $\text{Ad}_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$ 。

求逆与组合: 从 5.1 节, 我们有,

$$\mathbf{J}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{R}^{-1}} = -\text{Ad}_{\mathbf{R}} = -\mathbf{R} \quad (58)$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{Q}^{\mathbf{R}}} = \text{Ad}_{\mathbf{R}}^{-1} = \mathbf{R}^{\top} \quad (59)$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{Q}^{\mathbf{R}}} = \mathbf{I} \quad (60)$$

右 Jacobian 矩阵与左 Jacobian 矩阵: 它们有封闭形式

$$\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} - \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \quad (61)$$

$$\mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \quad (62)$$

$$\mathbf{J}_l(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \quad (63)$$

$$\mathbf{J}_l^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \quad (64)$$

其中我们可以观察到

$$\mathbf{J}_l = \mathbf{J}_r^{\top}, \quad \mathbf{J}_l^{-1} = \mathbf{J}_r^{-\top} \quad (65)$$

右结合的加号和减号: 对于 $\theta = \mathbf{Q} \ominus \mathbf{R}$, 我们有

$$\mathbf{J}_R^{\mathbf{R} \oplus \theta} = \mathbf{R}(\theta)^\top \quad \mathbf{J}_\theta^{\mathbf{R} \oplus \theta} = \mathbf{J}_r(\theta) \quad (66)$$

$$\mathbf{J}_Q^{\mathbf{Q} \ominus \mathbf{R}} = \mathbf{J}_r^{-1}(\theta) \quad \mathbf{J}_R^{\mathbf{Q} \ominus \mathbf{R}} = -\mathbf{J}_l^{-1}(\theta) \quad (67)$$

旋转作用: 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_R^{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}} &\triangleq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{R} \oplus \theta) \mathbf{v} - \mathbf{R} \mathbf{v}}{\theta} = \\ &\frac{\mathbf{R} \text{Exp}(\theta) \mathbf{v} - \mathbf{R} \mathbf{v}}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(\mathbf{I} + [\theta]_\times) \mathbf{v} - \mathbf{R} \mathbf{v}}{\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}[\theta]_\times \mathbf{v}}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-\mathbf{R}[\mathbf{v}]_\times \theta}{\theta} = -\mathbf{R}[\mathbf{v}]_\times \end{aligned} \quad (68)$$

其中我们使用属性 $\text{Exp}(\theta) \approx \mathbf{I} + [\theta]_\times$ 和 $[\mathbf{a}]_\times \mathbf{b} = -[\mathbf{b}]_\times \mathbf{a}$ 。另一个 Jacobian 矩阵为

$$\mathbf{J}_v^{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}} \triangleq \lim_{\partial \mathbf{v} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(\mathbf{v} + \partial \mathbf{v}) - \mathbf{R} \mathbf{v}}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{R}. \quad (69)$$

6.2 运动群 SE(3) 的 Jacobian 矩阵

我们将三维刚体运动群 SE(3) 的元素写为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \in \text{SE}(3) \subset \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (70)$$

其中 $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$ 是一个旋转, 并且 $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ 是一个平移向量。李代数和向量的正切是由这些类型的元素形成

$$\boldsymbol{\tau}^\wedge = \begin{bmatrix} [\theta]_\times & \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{se}(3), \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 又被称为速度旋量。

6.2.1 求逆与组合

求逆和组合分别用矩阵的求逆和乘积执行,

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^\top & -\mathbf{R}^\top \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\mathbf{M}_a \mathbf{M}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a \mathbf{R}_b & \mathbf{t}_a + \mathbf{R}_a \mathbf{t}_b \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}. \quad (72)$$

6.2.2 Exp 与 Log 映射

Exp 与 Log 通过指数映射直接从向量的切空间 $\mathbb{R}^6 \cong \mathfrak{se}(3) = T\text{SE}(3)$ 实现,

$$\mathbf{M} = \text{Exp}(\boldsymbol{\tau}) \triangleq \begin{bmatrix} \text{Exp}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \text{Log}(\mathbf{M}) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{t} \\ \text{Log}(\mathbf{R}) \end{bmatrix}. \quad (74)$$

其中 (回想对于 $\text{Log}(\mathbf{M})$ 有 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}\mathbf{u} = \text{Log}(\mathbf{R})$)

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \quad (75)$$

其中, 注意, 这与方程 (63) 完全匹配。

6.2.3 初等 Jacobian 矩阵块

伴随: 我们有

$$\text{Ad}_{\mathbf{M}}\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{M}\boldsymbol{\tau}\mathbf{M}^{-1})^{\vee} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\boldsymbol{\rho} + [\mathbf{t}]_{\times}\mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} = \text{Ad}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}$$

因此,

$$\text{Ad}_{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & [\mathbf{t}]_{\times}\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}. \quad (76)$$

求逆与组合: 从 5.1 节, 我们有,

$$\mathbf{J}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{M}^{-1}} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R} & [\mathbf{t}]_{\times}\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{M}_a}^{\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_b^{\top} & -\mathbf{R}_b^{\top}[\mathbf{t}_b]_{\times} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_b^{\top} \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{M}_b}^{\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b} = \mathbf{I}_6. \quad (79)$$

右 Jacobian 矩阵和左 Jacobian 矩阵: 左 Jacobian 矩阵的封闭形式及其逆式给出为,

$$\mathbf{J}_l(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_l(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_l(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$\mathbf{J}_l^{-1}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_l^{-1}(\boldsymbol{\theta}) & -\mathbf{J}_l^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{J}_l^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_l^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \quad (81)$$

其中 $\mathbf{J}_l(\boldsymbol{\theta})$ 是 $\text{SO}(3)$ 的左 Jacobian 矩阵, 参见方程 (63), 并且

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_{\times} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} (\boldsymbol{\theta}_{\times}\boldsymbol{\rho}_{\times} + \boldsymbol{\rho}_{\times}\boldsymbol{\theta}_{\times} + \boldsymbol{\theta}_{\times}\boldsymbol{\rho}_{\times}\boldsymbol{\theta}_{\times}) \\ &\quad - \frac{1 - \frac{\theta^2}{2} - \cos \theta}{\theta^4} (\boldsymbol{\theta}_{\times}^2\boldsymbol{\rho}_{\times} + \boldsymbol{\rho}_{\times}\boldsymbol{\theta}_{\times}^2 - 3\boldsymbol{\theta}_{\times}\boldsymbol{\rho}_{\times}\boldsymbol{\theta}_{\times}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \frac{\theta^2}{2} - \cos \theta}{\theta^4} - 3 \frac{\theta - \sin \theta - \frac{\theta^3}{6}}{\theta^5} \right) \\ &\quad \times (\boldsymbol{\theta}_{\times}\boldsymbol{\rho}_{\times}\boldsymbol{\theta}_{\times}^2 + \boldsymbol{\theta}_{\times}^2\boldsymbol{\rho}_{\times}\boldsymbol{\theta}_{\times}). \end{aligned} \quad (82)$$

右 Jacobian 矩阵及其逆矩阵使用方程 (42) 获得, 即, $\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{J}_l(-\boldsymbol{\rho}, -\boldsymbol{\theta})$ 并且 $\mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{J}_l^{-1}(-\boldsymbol{\rho}, -\boldsymbol{\theta})$ 。

刚体运动作用: 在点 \mathbf{p} 上我们有作用,

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{p} \triangleq \mathbf{t} + \mathbf{R}\mathbf{p}, \quad (83)$$

因此, 并且因为对于 $\tau \rightarrow 0$ 我们有 $\text{Exp}(\tau) \rightarrow \mathbf{I} + \tau^\wedge$,

$$\mathbf{J}_M^{\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbf{M} \text{Exp}(\tau) \cdot \mathbf{p} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{p}}{\tau} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{R}[\mathbf{p}]_\times \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$\mathbf{J}_p^{\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}} = \mathbf{R}. \quad (85)$$

7 组合流形的 Jacobian 矩阵

在我们常用的状态估计中, 我们可以将大的和非均匀的状态视为流形组合。在位姿估计中常见两种组合流形:

1. 姿态误差及其偏差的组合流形
2. 位姿误差及其偏差的组合流形

假设机体是匀速运动, 采样时间间隔为 Δt , 在 k 时刻, 从 IMU 读出角速度 $\boldsymbol{\omega}$, 线性加速度 \mathbf{a} , 这是机体坐标系中的数值, 已知上一时刻的机体坐标系中的线性速度为 \mathbf{v}_B , 则增量角度 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ 和增量位移 $\Delta\boldsymbol{\rho}$ 为

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\theta} &= \boldsymbol{\omega} \cdot \Delta t \\ \Delta\boldsymbol{\rho} &= \mathbf{v}_B \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \Delta t^2 \end{aligned}$$

其构成的增量速度旋量向量 $\Delta\boldsymbol{\tau}$ 和增量位姿 $\Delta\mathbf{M}$ 为

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\tau} &= \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\rho} \\ \Delta\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \\ \Delta\boldsymbol{\tau}^\wedge &= \begin{bmatrix} [\Delta\boldsymbol{\theta}]_\times & \Delta\boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \\ \Delta\mathbf{M}(\Delta\boldsymbol{\tau}) &= \exp(\Delta\boldsymbol{\tau}^\wedge) \\ &= \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{R} & \Delta\mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

已知上一时刻的位姿 \mathbf{M}_{k-1} , 则当前时刻的位姿 \mathbf{M}_k 为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_k &= \mathbf{M}_{k-1} \cdot \Delta\mathbf{M}(\Delta\boldsymbol{\tau}) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{R} & \Delta\mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R} \cdot \Delta\mathbf{R} & \mathbf{t} + \mathbf{R}\Delta\mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这是一个典型的 SE(3) 元素的计算过程。我们是在局部笛卡尔坐标系中获取向量，是在局部切空间中计算增量，然后用指数函数 \exp 收回并作用在当前位姿上，则位姿沿测地线移动到新的当前位姿上。不过在工程中为计算速度常常做各种简化，例如当 $\|\Delta\theta\| \rightarrow 0$ ，则 $\Delta t \approx \Delta\rho$ 。

但是因为种种原因，当前位姿 \mathbf{M}_k 存在误差，标记为 $\bar{\mathbf{M}}_k$ ，需要对其进行最优估计。但是现有成熟的最优估计算法都有一个被估计元素是向量的假设，因此无法直接对当前位姿进行估计。但是因为其误差 $\delta\mathbf{M}$ 较小，可以用向量形式 $\delta\mathbf{x}$ 表示，所以我们可以对其误差进行估计，最后将误差作用到当前位姿上，则当前位姿为最优估计位姿 $\hat{\mathbf{M}}_k$ ，于是有

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{M}}_k &= \hat{\mathbf{M}}_{k-1} \cdot \Delta\mathbf{M}(\Delta\tau) \cdot \delta\mathbf{M}(\delta\mathbf{x}) \\ &= \hat{\mathbf{M}}_{k-1} \oplus \Delta\tau \oplus \delta\mathbf{x} \\ &= \bar{\mathbf{M}}_k \oplus \delta\mathbf{x}\end{aligned}$$

我们认为误差 $\delta\mathbf{M}$ 受两个因素的影响，一是 IMU 的噪声，二是其偏差，两者都可以通过实验测量出来，其中角速度和加速度的噪声和偏差表示为 \mathbf{w}_ω 、 \mathbf{w}_a 、 ω_b 和 \mathbf{a}_b 。误差向量 $\delta\mathbf{x}$ 的准线性系统的演变方程为，

$$\delta\mathbf{x}_k = f(\bar{\mathbf{M}}_k, \Delta\tau) \delta\mathbf{x}_{k-1}$$

其中由控制向量 $\Delta\tau$ 的噪声引入了误差。还有，在最优估计中一同估计其偏差是一种传感器偏差的自校正算法。因此我们估计的误差向量 $\delta\mathbf{x}$ 除了角速度和加速度的误差之外，还包含其偏差的误差，因此误差向量 $\delta\mathbf{x}$ 是一种类似于速度旋量的组合流形。我们是在当前位姿点，也就是在当前线性化点处计算误差的状态转换矩阵 \mathbf{F} ，控制模型矩阵 \mathbf{G} ，以及观测模型矩阵 \mathbf{H} 等这些 Jacobian 矩阵。

根据右结合的 \oplus 方程 (46, 66)，误差状态转换矩阵 \mathbf{F} 为

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{\partial \bar{\mathbf{M}}_k}{\partial \hat{\mathbf{M}}_{k-1}} \\ &= \frac{\partial (\hat{\mathbf{M}}_{k-1} \oplus \Delta\tau)}{\partial \hat{\mathbf{M}}_{k-1}} \\ &= \mathbf{Ad}_{\exp(\Delta\tau)}^{-1}\end{aligned}\tag{86}$$

根据右结合的 \oplus 方程 (47, 66)，误差控制模型矩阵 \mathbf{G} 为

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= \frac{\partial \bar{\mathbf{M}}_k}{\partial \Delta\tau} \\ &= \frac{\partial (\hat{\mathbf{M}}_{k-1} \oplus \Delta\tau)}{\partial \Delta\tau} \\ &= \mathbf{J}_r(\Delta\tau)\end{aligned}\tag{87}$$

在测量更新时，预设的观测向量 \mathbf{p}_I 为全局坐标系中的向量，需要将其变换到局部坐标系中， $\mathbf{p}_B = \bar{\mathbf{M}}_k^{-1} \cdot \mathbf{p}_I$ ，并与在局部坐标系中的测量值相减得到残差。根据链式法则，根据群作用方程 (43, 68, 84)，以及求逆方程 (28, 58, 77)，观测模型矩阵 \mathbf{H} 为

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{\partial (\bar{\mathbf{M}}_k^{-1} \cdot \mathbf{p}_I)}{\partial \bar{\mathbf{M}}_k} \\ &= \frac{\partial (\bar{\mathbf{M}}_k^{-1} \cdot \mathbf{p}_I)}{\partial \bar{\mathbf{M}}_k^{-1}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{M}}_k^{-1}}{\partial \bar{\mathbf{M}}_k}\end{aligned}\tag{88}$$

下面我们用两种组合流形的 Jacobian 矩阵进行验证。具体的误差的动力学方程的推导可见参考文献 [2,4]，后面只推导与 Jacobian 矩阵和伴随矩阵相关的方程。

7.1 姿态误差及其偏差的组合流形

当我们只需要估计姿态时，误差向量 $\delta \mathbf{x}$ 由增量角度误差 $\delta \boldsymbol{\theta}$ 和角速度偏差的误差 $\delta \boldsymbol{\omega}_b$ 构成

$$\delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\theta} \\ \delta \boldsymbol{\omega}_b \end{bmatrix}$$

其一阶微分方程为

$$\dot{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{w}$$

其中 \mathbf{A} 为误差的动力学矩阵，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -[\boldsymbol{\omega}]_{\times} & -\mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 为校正偏差后的角速度， \mathbf{B} 为干扰矩阵，

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

它将白噪声序列转化为干扰 (disturbance) 向量。 \mathbf{w} 为系统过程噪声。

误差状态转换矩阵 \mathbf{F} 为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \exp(\mathbf{A} \cdot \Delta t) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^T & -\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^T \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})$ 参见方程 (52)， $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})$ 参见方程 (63, 75)， $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^T$ 参见方程 (61, 65)。

我们对验证方程 (86) 感兴趣。因为偏差的误差是各向同性，与旋转无关，所以可设置为全 1 向量，于是我们有向量 $\Delta \boldsymbol{\tau}$ ，它构成的切空间和流形如下：

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\tau} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 1_{3 \times 1} \end{bmatrix} \cdot \Delta t \\ \Delta \boldsymbol{\tau}^{\wedge} &= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_{\times} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \Delta t \\ \exp(\Delta \boldsymbol{\tau}^{\wedge}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

并且与旋转 \mathbf{R} 相似，它的伴随是它自身

$$\mathbf{Ad}_{\exp(\Delta \boldsymbol{\tau}^{\wedge})} = \exp(\Delta \boldsymbol{\tau}^{\wedge})$$

此外， \mathbf{R} 和 \mathbf{V} 矩阵还有这样的性质

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^T &= \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^T \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \exp(\Delta \tau^\wedge) \cdot \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^T & -\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^T \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^T + \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

由此验证了方程 (86)。这也说明姿态误差是一个很复杂的组合流形，它的方向和增量角度 $\boldsymbol{\theta}$ ，也即和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向相反。

误差控制模型矩阵 \mathbf{G} 的封闭式太过复杂，并且因为实际的传感器噪声都很小，所以在工程中 \mathbf{G} 矩阵都会做大大的简化，所以这里就不再验证方程 (87)。

基于观测向量 \mathbf{v} 的观测模型矩阵 \mathbf{H} 很简单，根据方程 (68, 58) 我们有

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} &= \mathbf{J}_R^{\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{v}} \\
 &= \mathbf{J}_{R^{-1}}^{\mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{J}_R^{\mathbf{R}^{-1}} \\
 &= (-\mathbf{R}^{-1} [\mathbf{v}]_\times) (-\mathbf{R}) \\
 &= [\mathbf{R}^{-1} \mathbf{v}]_\times
 \end{aligned}$$

再加上与旋转无关的偏差误差的项，实际矩阵为 $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}^{-1} \mathbf{v}]_\times & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$ ，由此验证了方程 (88)。

7.2 位姿误差及其偏差的组合流形

当我们需要估计位姿时，为便于分析，我们把误差向量 $\delta \mathbf{x}$ 简化为由增量角度误差 $\delta \boldsymbol{\theta}$ 、增量速度误差 $\delta \mathbf{v}$ ，以及角速度偏差的误差 $\delta \boldsymbol{\omega}_b$ 和加速度偏差的误差 $\delta \mathbf{a}_b$ 构成

$$\delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\theta} \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \boldsymbol{\omega}_b \\ \delta \mathbf{a}_b \end{bmatrix}$$

经过推导，其误差的动力学矩阵 \mathbf{A} 为，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -[\boldsymbol{\omega}]_\times & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_\times & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

其中，符号 \mathbf{R} 为机体当前姿态， \mathbf{a} 为校正偏差后的机体加速度。

误差状态转换矩阵 \mathbf{F} 为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \exp(\mathbf{A} \cdot \Delta t) \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_\times \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_\times \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})^T & -\mathbf{R} \cdot \Delta t \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

其中 $\Sigma(\theta)$ 矩阵为

$$\Sigma(\theta) = \frac{1}{2}\mathbf{I} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\theta]_{\times} + \frac{\cos \theta - 1 + \frac{\theta^2}{2}}{\theta^4} [\theta]_{\times}^2$$

$$\Sigma(\theta)^T = \frac{1}{2}\mathbf{I} - \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\theta]_{\times} + \frac{\cos \theta - 1 + \frac{\theta^2}{2}}{\theta^4} [\theta]_{\times}^2$$

这个 $\Sigma(\theta)$ 矩阵很复杂，将在后面讨论其几何意义。

我们再次构造向量 $\Delta\tau$ 。因为偏差的误差是各向同性，与旋转无关，所以可设置为全 1 向量，再加上一个内部状态值为当前姿态 R ，于是向量 $\Delta\tau$ 构成的切空间和流形如下：

$$\Delta\tau = \begin{bmatrix} \omega \\ \mathbf{a} \\ 1_{3 \times 1} \\ 1_{3 \times 1} \end{bmatrix} \cdot \Delta t$$

$$\Delta\tau^\wedge = \begin{bmatrix} [\omega]_{\times} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ R[\mathbf{a}]_{\times} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & R \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \Delta t$$

$$\exp(\Delta\tau^\wedge) = \begin{bmatrix} R(\theta) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & V(\theta) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ R[\mathbf{a}]_{\times} V(\theta) & \mathbf{I}_{3 \times 3} & R[\mathbf{a}]_{\times} \Sigma(\theta) & R \cdot \Delta t \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

并且与旋转 R 相似，它的伴随是它自身

$$\text{Ad}_{\exp(\Delta\tau^\wedge)} = \exp(\Delta\tau^\wedge)$$

此外， Σ 和 V 矩阵还有这样的性质

$$V(\theta) V(\theta)^T = \Sigma(\theta) - \Sigma(\theta)^T$$

$$V(\theta)^T V(\theta) = \Sigma(\theta)^T - \Sigma(\theta)$$

所以

$$\begin{aligned} \exp(\Delta\tau^\wedge) \cdot \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} R(\theta) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & V(\theta) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ R[\mathbf{a}]_{\times} V(\theta) & \mathbf{I}_{3 \times 3} & R[\mathbf{a}]_{\times} \Sigma(\theta) & R \cdot \Delta t \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(\theta)^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -V(\theta)^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -R[\mathbf{a}]_{\times} V(\theta)^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & -R[\mathbf{a}]_{\times} \Sigma(\theta)^T & -R \cdot \Delta t \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ R[\mathbf{a}]_{\times} V(\theta) R(\theta)^T - R[\mathbf{a}]_{\times} V(\theta)^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & -R(\theta) V(\theta)^T + V(\theta) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由此验证了方程 (86)。

对于 $\Sigma(\theta)$ 矩阵, 大概是刚体运动群 $SE(3)$ 对角度向量 θ 的右结合的加号的 Jacobian 矩阵 (FIXME: 瞎猜的, 还未进行验证), $\mathbf{J}_\theta^{\mathbf{M} \oplus \theta} = \Sigma(\theta)$ 。于是我们完全用 Jacobian 矩阵解释误差状态转换矩阵 \mathbf{F} 为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\theta)^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{V}(\theta)^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_\times \mathbf{V}(\theta)^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_\times \Sigma(\theta)^T & -\mathbf{R} \cdot \Delta t \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_R^{\mathbf{R} \oplus \theta} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{J}_\theta^{\mathbf{R} \oplus \theta} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{J}_R^{\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{J}_\theta^{\mathbf{R} \oplus \theta} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_R^{\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{J}_\theta^{\mathbf{M} \oplus \theta} & -\mathbf{R} \cdot \Delta t \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中组合流形的几何意义明显可见。

8 旋转向量的动力学矩阵

对于 $SO(3)$ 的导数方程 (47, 66), $\mathbf{J}_\theta^{\mathbf{R} \oplus \theta} = \mathbf{J}_r(\theta)$, 有着十分重要的几何意义。假如机体以角速度 ω 匀速旋转, 这是机体坐标系中的角速度, 由 IMU 测量得到, 经过时间 Δt 之后, 则增量角度为 $\theta = \omega \cdot \Delta t$, 并且增量旋转为 $\mathbf{R}(\theta)$ 。但实际上我们的测量存在误差, 误差角度向量用 $\delta\theta$ 表示, 则我们的测量值为 $\mathbf{Q} = \mathbf{R}(\theta) \oplus \delta\theta$ 。根据文献 [1, p55] 的推导, 旋转向量 $\delta\theta$ 的动力学方程为

$$\dot{\delta\theta} = \left(\mathbf{I} - \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\delta\theta]_\times + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\delta\theta]_\times^2 \right) \omega$$

其中 $\theta = \|\delta\theta\|$ 。因此旋转向量的动力学矩阵, 习惯上用符号 $\mathbf{\Gamma}$ 表示, 为

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}(\delta\theta) &= \mathbf{J}_{\delta\theta}^{\mathbf{R} \oplus \delta\theta} \\ &= \mathbf{J}_r(\delta\theta) \end{aligned}$$

因此整理表示误差的旋转向量的动力学方程为

$$\dot{\delta\theta} = \mathbf{\Gamma}(\delta\theta) \omega$$

这表明误差向量 $\delta\theta$ 和角速度 ω 相关。更进一步的, 对于 $SO(3)$ 的导数方程 (47, 66), $\mathbf{J}_{\delta\theta}^{\mathbf{R} \oplus \delta\theta} = \mathbf{J}_r(\delta\theta)$, 我们是用局部笛卡尔空间中的误差向量 $\delta\theta$ 的微小扰动, 表达了旋转流形 $SO(3)$ 上的元素 \mathbf{R} 的变化率; 对于 $SO(3)$ 的导数方程 (46, 66), $\mathbf{J}_R^{\mathbf{R} \oplus \delta\theta} = \mathbf{R}(\delta\theta)^T$, 对于误差向量 $\delta\theta$, 它的方向与增量旋转 $\mathbf{R}(\omega \cdot \Delta t)$ 中的角速度 ω 的方向相反, 其直觉就是增量角度误差好像是某种“惯性”, 滞后于旋转方向。

类似于方程 (66), 我们进一步扩展 $SO(3)$ 的左结合的加号的 Jacobian 矩阵

$$\mathbf{J}_R^{\theta \oplus R} = \mathbf{R}(\theta) \quad \mathbf{J}_\theta^{\theta \oplus R} = \mathbf{J}_l(\theta)$$

因此全局坐标系与局部坐标系的切空间的性质正好相反。

类似地，我们可以用切空间的李代数直接表达旋转流形 $\text{SO}(3)$ 上的动力学方程，即

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}[\boldsymbol{\omega}]_{\times}$$

并且对于 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和 \mathbf{R} 这两个动力学矩阵，它们有这样的关系

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{\theta}\|^2} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^{\top} + \frac{1}{\|\boldsymbol{\theta}\|^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} \left(\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^{\top} - \mathbf{I}_{3 \times 3} \right)$$

另外，我们已知 \mathbf{R} 和 \mathbf{V} 矩阵有这样的性质

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{\top} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^{\top} \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})$$

根据方程 (61, 63)、方程 (57)、方程 (66) 和方程 (42) 我们有

$$\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}^{\mathbf{R} \oplus \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{\top}$$

$$\mathbf{Ad}_{\mathbf{R}^{\top}} = \mathbf{R}^{\top}$$

$$\mathbf{J}_l(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{J}_r(-\boldsymbol{\theta})$$

于是上式可以解释为

$$\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}^{\mathbf{R} \oplus \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Ad}_{\mathbf{R}^{\top}} \mathbf{J}_{(-\boldsymbol{\theta})}^{\mathbf{R} \oplus (-\boldsymbol{\theta})}$$

还是在描述 $\boldsymbol{\theta}$ 和 \mathbf{R} 的方向，以及局部坐标系变换的关系。

9 总结

用切空间中的无穷小变化表达流形中的导数，这是应用李群理论最本质的思想。

10 参考文献

1. A survey of attitude representations - 1993
2. Indirect Kalman filter for 3D attitude estimation - 2007
3. Lie Groups for 2D and 3D Transformations - 2017
4. Quaternion kinematics for the error-state KF - 2017
5. A micro Lie theory for state estimation in robotics - 2020

11 草稿纸

$$\mathbf{V} = \mathbf{I} + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) \boldsymbol{\omega}_{\times} + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) \boldsymbol{\omega}_{\times}^2$$

$$A = \frac{\sin \theta}{\theta}$$

$$B = \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}$$

$$C = \frac{1 - A}{\theta^2}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{I} + B\boldsymbol{\omega}_{\times} + C\boldsymbol{\omega}_{\times}^2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{-1} &= \mathbf{I} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{\times} + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{A}{2B} \right) \boldsymbol{\omega}_{\times}^2 \\ &= \mathbf{I} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{\times} + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\frac{\sin \theta}{\theta}}{2 \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right)} \right) \boldsymbol{\omega}_{\times}^2 \\ &= \mathbf{I} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{\times} + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\frac{\sin \theta}{\theta} (1 + \cos \theta)}{2 \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) (1 + \cos \theta)} \right) \boldsymbol{\omega}_{\times}^2 \\ &= \mathbf{I} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{\times} + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\frac{\sin \theta}{\theta} (1 + \cos \theta)}{2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \right)} \right) \boldsymbol{\omega}_{\times}^2 \\ &= \mathbf{I} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{\times} + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{(1 + \cos \theta)}{2 \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)} \right) \boldsymbol{\omega}_{\times}^2 \\ &= \mathbf{I} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{\times} + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{(1 + \cos \theta)}{2\theta \sin \theta} \right) \boldsymbol{\omega}_{\times}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} &= \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \\
\mathbf{V}^{-1} &= \mathbf{I} - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \\
\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^{-1} &= \left(\mathbf{I} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \right) \\
&\quad \cdot \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \right) \\
&= \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \right) \\
&\quad + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \right) \\
&\quad + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \right) \\
&= \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \right) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + (1 - \cos \theta) \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\theta - \sin \theta}{\theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \right) \\
&= \mathbf{I}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \right) = \\
&\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} - \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} \cdot \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} \cdot \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \\
&\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \cdot \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^3 = \\
&\quad \because [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^3 = -\theta^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times} \\
&\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - (1 - \cos \theta) \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times} = \\
&\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + (1 - \cos \theta) \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} = \\
&\quad -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + (1 - \cos \theta) \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \right) = \\
& \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \cdot \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \cdot \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \\
& \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^3 + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \cdot \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^4 = \\
& \quad \because [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^3 = -\theta^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times}, [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^4 = -\theta^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \\
& \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \theta^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times} - \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \cdot \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} \right) \theta^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \\
& \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta - \sin \theta}{\theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} - \frac{\theta - \sin \theta}{\theta} \cdot \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \\
& \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta - \sin \theta}{\theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} - \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \\
& \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta - \sin \theta}{\theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \\
& -\frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + (1 - \cos \theta) \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta - \sin \theta}{\theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} = \\
& -\frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} = \mathbf{0} \\
& \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \\
& \frac{1}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right) \cdot \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \\
& \frac{1}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{2\theta \sin \theta} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \\
& \frac{1}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \\
& \frac{1}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos \theta + 1 + \cos \theta}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \\
& \frac{1}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \frac{1}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^{-1} &= \mathbf{I} - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{\theta \cos(\theta/2)}{2 \sin(\theta/2)} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \\
1 - \frac{\theta \cos(\theta/2)}{2 \sin(\theta/2)} &= 1 - \frac{\theta}{2} \cot(\theta/2) \\
&\because \cot(\theta/2) = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \\
&= 1 - \frac{\theta}{2} \cdot \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \\
&= 1 - \frac{\frac{\sin \theta}{\theta}}{2 \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}} \\
&= 1 - \frac{A}{2B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_{\times} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}^2 &= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_{\times} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_{\times} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2 & [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}^3 &= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2 & [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_{\times} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^3 & [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}^4 &= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^3 & [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_{\times} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^4 & [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^3 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$[\boldsymbol{\omega} \times]^2 = \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}^T - \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\omega} \times]^3 &= -\|\boldsymbol{\omega}\|^2 [\boldsymbol{\omega} \times] & [\boldsymbol{\omega} \times]^4 &= -\|\boldsymbol{\omega}\|^2 [\boldsymbol{\omega} \times]^2 & [\boldsymbol{\omega} \times]^5 &= \|\boldsymbol{\omega}\|^4 [\boldsymbol{\omega} \times] & [\boldsymbol{\omega} \times]^6 &= \|\boldsymbol{\omega}\|^4 [\boldsymbol{\omega} \times]^2 \\
[\boldsymbol{\omega} \times]^7 &= -\|\boldsymbol{\omega}\|^6 [\boldsymbol{\omega} \times] & [\boldsymbol{\omega} \times]^8 &= -\|\boldsymbol{\omega}\|^6 [\boldsymbol{\omega} \times]^2 & [\boldsymbol{\omega} \times]^9 &= \|\boldsymbol{\omega}\|^8 [\boldsymbol{\omega} \times] & [\boldsymbol{\omega} \times]^{10} &= \|\boldsymbol{\omega}\|^8 [\boldsymbol{\omega} \times]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Theta} &= \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \Delta t + \frac{1}{2!} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2 \Delta t^2 + \frac{1}{3!} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^3 \Delta t^3 + \frac{1}{4!} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^4 \Delta t^4 + \frac{1}{5!} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^5 \Delta t^5 + \frac{1}{6!} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^6 \Delta t^6 + \dots \\
&= \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \Delta t + \frac{1}{2!} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2 \Delta t^2 - \frac{1}{3!} \|\boldsymbol{\omega}\|^2 [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \Delta t^3 - \frac{1}{4!} \|\boldsymbol{\omega}\|^2 [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2 \Delta t^4 + \frac{1}{5!} \|\boldsymbol{\omega}\|^4 [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \Delta t^5 + \frac{1}{6!} \|\boldsymbol{\omega}\|^4 [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2 \Delta t^6 + \dots \\
&= \mathbf{I}_{3 \times 3} + \left(\Delta t - \frac{1}{3!} \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \Delta t^3 + \frac{1}{5!} \|\boldsymbol{\omega}\|^4 \Delta t^5 - \dots \right) [\boldsymbol{\omega}]_{\times} + \left(\frac{1}{2!} \Delta t^2 - \frac{1}{4!} \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \Delta t^4 + \frac{1}{6!} \|\boldsymbol{\omega}\|^4 \Delta t^6 - \dots \right) [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2 \\
&= \mathbf{I}_{3 \times 3} + \frac{[\boldsymbol{\omega}]_{\times}}{\|\boldsymbol{\omega}\|} \left(\|\boldsymbol{\omega}\| \Delta t - \frac{1}{3!} \|\boldsymbol{\omega}\|^3 \Delta t^3 + \frac{1}{5!} \|\boldsymbol{\omega}\|^5 \Delta t^5 - \dots \right) + \frac{[\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2!} \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \Delta t^2 + \frac{1}{4!} \|\boldsymbol{\omega}\|^4 \Delta t^4 - \frac{1}{6!} \|\boldsymbol{\omega}\|^6 \Delta t^6 + \dots \right) \right) \\
&= \mathbf{I}_{3 \times 3} + \frac{[\boldsymbol{\omega}]_{\times}}{\|\boldsymbol{\omega}\|} \sin(\|\boldsymbol{\omega}\| \Delta t) + \frac{[\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} (1 - \cos(\|\boldsymbol{\omega}\| \Delta t)) \\
&= \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi &= \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{1}{2!} [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \Delta t^2 + \frac{1}{3!} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2 \Delta t^3 + \frac{1}{4!} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^3 \Delta t^4 + \frac{1}{5!} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^4 \Delta t^5 + \frac{1}{6!} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^5 \Delta t^6 + \dots \\
&= \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{1}{2!} [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \Delta t^2 + \frac{1}{3!} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2 \Delta t^3 - \frac{1}{4!} \|\boldsymbol{\omega}\|^2 [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \Delta t^4 - \frac{1}{5!} \|\boldsymbol{\omega}\|^2 [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2 \Delta t^5 + \frac{1}{6!} \|\boldsymbol{\omega}\|^4 [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \Delta t^6 + \dots \\
&= \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \left(\frac{1}{2!} \Delta t^2 - \frac{1}{4!} \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \Delta t^4 + \frac{1}{6!} \|\boldsymbol{\omega}\|^4 \Delta t^6 - \dots \right) [\boldsymbol{\omega}]_{\times} + \left(\frac{1}{3!} \Delta t^3 - \frac{1}{5!} \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \Delta t^5 + \frac{1}{7!} \|\boldsymbol{\omega}\|^4 \Delta t^7 - \dots \right) [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2 \\
&= \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{[\boldsymbol{\omega}]_{\times}}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2!} \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \Delta t^2 + \frac{1}{4!} \|\boldsymbol{\omega}\|^4 \Delta t^4 - \frac{1}{6!} \|\boldsymbol{\omega}\|^6 \Delta t^6 - \dots \right) \right) - \frac{[\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2}{\|\boldsymbol{\omega}\|^3} \left(-\|\boldsymbol{\omega}\| \Delta t + \|\boldsymbol{\omega}\| \Delta t - \dots \right) \\
&= \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{[\boldsymbol{\omega}]_{\times}}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} (1 - \cos(\|\boldsymbol{\omega}\| \Delta t)) - \frac{[\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2}{\|\boldsymbol{\omega}\|^3} (-\|\boldsymbol{\omega}\| \Delta t + \sin(\|\boldsymbol{\omega}\| \Delta t)) \\
&= \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{[\boldsymbol{\omega}]_{\times}}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} (1 - \cos(\|\boldsymbol{\omega}\| \Delta t)) + \frac{[\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2}{\|\boldsymbol{\omega}\|^3} (\|\boldsymbol{\omega}\| \Delta t - \sin(\|\boldsymbol{\omega}\| \Delta t)) \\
&= \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^T & -\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^T \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^T + \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^T & -\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^T \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^T \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right) [\theta]_{\times} - \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right) [\theta]_{\times} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\theta]_{\times} + \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right) [\theta]_{\times} \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\theta]_{\times}^2 = \\
& \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right) [\theta]_{\times} - \left(\frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{\theta^3} \right) [\theta]_{\times}^2 + \left(\frac{\sin \theta (\theta - \sin \theta)}{\theta^4} \right) [\theta]_{\times}^3 = \\
& \quad \because [\theta]_{\times}^3 = -\theta^2 [\theta]_{\times} \\
& \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right) [\theta]_{\times} - \left(\frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{\theta^3} \right) [\theta]_{\times}^2 - \left(\frac{\sin \theta (\theta - \sin \theta)}{\theta^2} \right) [\theta]_{\times} = \\
& \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right) [\theta]_{\times} - \left(\frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{\theta^3} \right) [\theta]_{\times}^2 - \left(\frac{\sin \theta}{\theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \right) [\theta]_{\times} = \\
& \quad \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} [\theta]_{\times} - \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{\theta^3} [\theta]_{\times}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\theta]_{\times}^2 - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\theta]_{\times}^2 \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\theta]_{\times} + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\theta]_{\times}^2 \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\theta]_{\times}^2 = \\
& \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\theta]_{\times}^2 - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right)^2 [\theta]_{\times}^3 + \left(\frac{(1 - \cos \theta) (\theta - \sin \theta)}{\theta^5} \right) [\theta]_{\times}^4 = \\
& \quad \because [\theta]_{\times}^3 = -\theta^2 [\theta]_{\times}, [\theta]_{\times}^4 = -\theta^2 [\theta]_{\times}^2 \\
& \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\theta]_{\times}^2 + \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\theta^2} [\theta]_{\times} - \frac{(1 - \cos \theta) (\theta - \sin \theta)}{\theta^3} [\theta]_{\times}^2 = \\
& \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\theta]_{\times}^2 + \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\theta^2} [\theta]_{\times} - \frac{(1 - \cos \theta) \theta - (1 - \cos \theta) \sin \theta}{\theta^3} [\theta]_{\times}^2 = \\
& \quad \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\theta^2} [\theta]_{\times} + \frac{(1 - \cos \theta) \sin \theta}{\theta^3} [\theta]_{\times}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t^2 - \frac{1}{|\hat{\omega}|^2} \left(\mathbf{R}_I^B (\hat{\omega} \Delta t) - \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\hat{\omega} \times] \Delta t - \frac{1}{2} [\hat{\omega} \times]^2 \Delta t^2 \right) = \\
& \frac{1}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t^2 - \frac{1}{|\hat{\omega}|^2} \left(\mathbf{R}_I^B (\hat{\omega} \Delta t) - \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\hat{\omega} \times] \Delta t \right) - \frac{1}{|\hat{\omega}|^2} \left(\frac{1}{2} [\hat{\omega} \times]^2 \Delta t^2 \right) = \\
& \frac{\Delta t^2}{2} \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{[\hat{\omega} \times]^2}{|\hat{\omega}|^2} \right) - \frac{1}{[\hat{\omega} \times] |\hat{\omega}|^2} \left(\mathbf{R}_I^B (\hat{\omega} \Delta t) - \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\hat{\omega} \times] \Delta t \right) = \\
& \frac{\Delta t^2}{2} \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{[\hat{\omega} \times]^2}{|\hat{\omega}|^2} \right) - \frac{1}{[\hat{\omega} \times]} \left(-\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|^2} \left(\mathbf{R}_I^B (\hat{\omega} \Delta t) - \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\hat{\omega} \times] \Delta t \right) \right) = \\
& \frac{\Delta t^2}{2} \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{[\hat{\omega} \times]^2}{|\hat{\omega}|^2} \right) + \frac{\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t}{[\hat{\omega} \times]} - \frac{1}{[\hat{\omega} \times]} \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|^2} \left(\mathbf{R}_I^B (\hat{\omega} \Delta t) - \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\hat{\omega} \times] \Delta t \right) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{I} + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \\
\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^T &= \mathbf{I} - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \\
\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^T &= \left(\mathbf{I} + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \right) \left(\mathbf{I} - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \right) \\
&= \mathbf{I} - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \\
&\quad + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times} - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right)^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^3 \\
&\quad + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^3 + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right)^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^4 \\
&= \mathbf{I} - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \\
&\quad - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right)^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + \frac{(1 - \cos \theta) \sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} \\
&\quad + \frac{(\theta - \sin \theta)(1 - \cos \theta)}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{(\theta - \sin \theta) \sin \theta}{\theta^4} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \\
&= \mathbf{I} + \frac{\theta^2 + 2 \cos \theta - 2}{\theta^4} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times} - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right)^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^3 = \\
&\quad \because [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^3 = -\theta^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times} \\
&\left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times} - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right)^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) (-\theta^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times}) = \\
&\quad \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times} - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right)^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \frac{(1 - \cos \theta)(\theta - \sin \theta)}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} = \\
&\left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times} - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right)^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \frac{(1 - \cos \theta)\theta - (1 - \cos \theta)\sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} = \\
&\quad - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right)^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + \frac{(1 - \cos \theta) \sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^3 + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right)^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^4 = \\
& \quad \because [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^3 = -\theta^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times}, [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^4 = -\theta^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \\
& \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) (-\theta^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times}) + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right)^2 (-\theta^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2) = \\
& \quad \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + \frac{(\theta - \sin \theta)(1 - \cos \theta)}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} - \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{\theta^4} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \\
& \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + \frac{(\theta - \sin \theta)(1 - \cos \theta)}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} - \frac{(\theta - \sin \theta)\theta - (\theta - \sin \theta)\sin \theta}{\theta^4} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \\
& \quad \frac{(\theta - \sin \theta)(1 - \cos \theta)}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{(\theta - \sin \theta)\sin \theta}{\theta^4} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \\
& - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{(1 - \cos \theta)\sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{(\theta - \sin \theta)(1 - \cos \theta)}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} = \\
& - \frac{(1 - \cos \theta)}{\theta^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{(1 - \cos \theta)\sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{\theta(1 - \cos \theta) - \sin \theta(1 - \cos \theta)}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} = \\
& \quad \frac{(1 - \cos \theta)\sin \theta}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} - \frac{\sin \theta(1 - \cos \theta)}{\theta^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right)^2 [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + \frac{(\theta - \sin \theta)\sin \theta}{\theta^4} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \\
& \frac{\theta(\theta - \sin \theta)}{\theta^4} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 - \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\theta^4} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 + \frac{(\theta - \sin \theta)\sin \theta}{\theta^4} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \\
& \frac{\theta^2 - \theta \sin \theta - (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) + \theta \sin \theta - \sin^2 \theta}{\theta^4} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \\
& \frac{\theta^2 - \theta \sin \theta - 1 + 2 \cos \theta - \cos^2 \theta + \theta \sin \theta - \sin^2 \theta}{\theta^4} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \\
& \frac{\theta^2 - 1 + 2 \cos \theta - (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{\theta^4} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 = \\
& \frac{\theta^2 + 2 \cos \theta - 2}{\theta^4} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{I} + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \\
\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^T &= \mathbf{I} - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2
\end{aligned}$$