卡尔曼滤波基本理论

NXP

21 June 2016

摘要

本文推导了标准卡尔曼滤波方程。

1 简介

本文推导了标准卡尔曼滤波方程。它的目的是作为一个初级读物，应在处理应用说明 AN5023 "传感器融合卡尔曼滤波器"之前阅读，该说明描述了用于NXP 传感器融合库软件中加速计、磁强计和陀螺仪数据融合的更专业的间接互补卡尔曼滤波器。

第2节计算了推导过程中用到的一些数学结论。推导本身在第3节。

1.1 术语

符号	定义
$\boldsymbol{A}_k$	样本 k 时的线性预测或状态矩阵。 $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{w}_k$ $\hat{\boldsymbol{x}}_k^- = \boldsymbol{A}_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^+$
$\boldsymbol{C}_k$	样本 k 时 $\boldsymbol{z}_k$ 到 $\boldsymbol{x}_k$ 的测量矩阵。 $\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k$
$E[\,]$	期望运算符
$\boldsymbol{K}_k$	样本 k 时的卡尔曼滤波增益矩阵。
$\boldsymbol{P}_k^-$	样本 k 时线性预测 (**先验**) 误差 $\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^-$ 的**先验**协方差矩阵。 $\boldsymbol{P}_k^- = E\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^-\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^{-\mathrm{T}}\right]$
$\boldsymbol{P}_k^+$	样本 k 时卡尔曼 (**后验**) 误差 $\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^+$ 的**后验**协方差矩阵。 $\boldsymbol{P}_k^+ = E\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^+\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^{+\mathrm{T}}\right]$
$\boldsymbol{Q}_{w,k}$	过程 $\boldsymbol{x}_k$ 中加性噪声 $\boldsymbol{w}_k$ 的协方差矩阵。 $\boldsymbol{Q}_{w,k} = E\left[\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}}\right]$
$\boldsymbol{Q}_{v,k}$	测量过程 $\boldsymbol{z}_k$ 中加性噪声 $\boldsymbol{v}_k$ 的协方差矩阵。 $\boldsymbol{Q}_{v,k} = E\left[\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}}\right]$
$V[\,]$	方差运算符
$\boldsymbol{v}_k$	样本 k 时测量过程 $\boldsymbol{z}_k$ 中的加性噪声。
$\boldsymbol{w}_k$	样本 k 时过程中感兴趣的 $\boldsymbol{x}_k$ 的加性噪声。

符号	定义
$\boldsymbol{x}_k$	时间样本 k 时的过程 $\boldsymbol{x}_k$ 的状态向量。 $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{w}_k$
$\hat{\boldsymbol{x}}_k^-$	样本 k 时过程 $\boldsymbol{x}_k$ 的线性预测 (**先验**) 估计。 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^- = \boldsymbol{A}_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^+$
$\hat{\boldsymbol{x}}_k^+$	样本 k 时过程 $\boldsymbol{x}_k$ 的卡尔曼滤波 (**后验**) 估计。 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^+ = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{C}_k)\, \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{z}_k = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{C}_k)\, \boldsymbol{A}_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^+ + \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{z}_k$
$\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^-$	过程 $\boldsymbol{x}_k$ 的线性预测 (**先验**) 估计中的误差。 $\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^- = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- - \boldsymbol{x}_k$
$\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^+$	过程 $\boldsymbol{x}_k$ 的**后验**卡尔曼滤波估计误差。 $\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^+ = \hat{\boldsymbol{x}}_k^+ - \boldsymbol{x}_k$
$\boldsymbol{z}_k$	样本 k 时的测量过程。 $\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{C}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k$
δ_{kj}	Kronecker δ 函数。对于 $k = j$ 则 $\delta_{k,j} = 1$，否则为 0。

2 数学引理

2.1 引理 1

两个方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之和的迹等于各个迹的和。证明是简单的。

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \sum_{i=0}^{N-1} A_{ii} + B_{ii} = \sum_{i=0}^{N-1} A_{ii} + \sum_{i=0}^{N-1} B_{ii} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}) \tag{1}$$

2.2 引理 2

矩阵积 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 的迹对 $\boldsymbol{A}$ 的导数等于 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$。

$$\frac{\partial\{\operatorname{tr}(\boldsymbol{C})\}}{\partial \boldsymbol{A}} = \frac{\partial\{\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\}}{\partial \boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})}{\partial A_{0,0}}\right) & \left(\frac{\partial \operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})}{\partial A_{0,1}}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})}{\partial A_{0,N-1}}\right) \\ \left(\frac{\partial \operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})}{\partial A_{1,0}}\right) & \left(\frac{\partial \operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})}{\partial A_{1,1}}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})}{\partial A_{1,N-1}}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{\partial \operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})}{\partial A_{M-1,0}}\right) & \left(\frac{\partial \operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})}{\partial A_{M-1,1}}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial \operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})}{\partial A_{M-1,N-1}}\right) \end{pmatrix} \tag{2}$$

证明: 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的维数为 $M \times N$, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的维数为 $N \times M$, 则 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 的维数为 $M \times M$。矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的元素 C_{ij} 的值为:

$$C_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} A_{ik} B_{kj} \Rightarrow \operatorname{tr}(\boldsymbol{C}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \sum_{i=0}^{M-1} C_{ii} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} A_{ik} B_{ki} \tag{3}$$

将方程 (3) 代入方程 (2) 得到:

$$\frac{\partial\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})\}}{\partial \boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}B_{ki}}{\partial A_{0,0}}\right) & \left(\frac{\partial \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}B_{ki}}{\partial A_{0,1}}\right) & \dots & \left(\frac{\partial \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}B_{ki}}{\partial A_{0,N-1}}\right) \\ \left(\frac{\partial \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}B_{ki}}{\partial A_{1,0}}\right) & \left(\frac{\partial \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}B_{ki}}{\partial A_{1,1}}\right) & \dots & \left(\frac{\partial \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}B_{ki}}{\partial A_{1,N-1}}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}B_{ki}}{\partial A_{M-1,0}}\right) & \left(\frac{\partial \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}B_{ki}}{\partial A_{M-1,1}}\right) & \dots & \left(\frac{\partial \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}B_{ki}}{\partial A_{M-1,N-1}}\right) \end{pmatrix} \tag{4}$$

通过检查：

$$\left(\frac{\partial \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}B_{ki}}{\partial A_{lm}}\right) = B_{ml} \tag{5}$$

将方程 (5) 代入方程 (4) 完成证明：

$$\frac{\partial\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})\}}{\partial \boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} B_{0,0} & B_{1,0} & \dots & B_{N-1,0} \\ B_{0,1} & B_{1,1} & \dots & B_{N-1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{0,M-1} & B_{1,M-1} & \dots & B_{N-1,M-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

2.3 引理 3

矩阵积 $\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}}$ 的迹对 $\boldsymbol{A}$ 的导数等于 $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)$。

$$\frac{\partial\left\{\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}}\right)\right\}}{\partial A} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}}\right)}{\partial A_{0,0}}\right) & \left(\frac{\partial \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}}\right)}{\partial A_{0,1}}\right) & \dots & \left(\frac{\partial \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}}\right)}{\partial A_{0,N-1}}\right) \\ \left(\frac{\partial \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}}\right)}{\partial A_{1,0}}\right) & \left(\frac{\partial \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}}\right)}{\partial A_{1,1}}\right) & \dots & \left(\frac{\partial \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}}\right)}{\partial A_{1,N-1}}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}}\right)}{\partial A_{M-1,0}}\right) & \left(\frac{\partial \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}}\right)}{\partial A_{M-1,1}}\right) & \dots & \left(\frac{\partial \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}}\right)}{\partial A_{M-1,N-1}}\right) \end{pmatrix} \tag{7}$$

证明：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的维数为 $M \times N$，那么矩阵 $\boldsymbol{B}$ 必须是维数为 $N \times N$ 的方阵，矩阵积 $\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}}$ 才能存在。矩阵积 $\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}}$ 总是方阵，维数为 $M \times M$。

矩阵 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ 的元素 C_{ij} 的值为：

$$C_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}B_{kj} \tag{8}$$

矩阵 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{CA}^{\mathrm{T}}$ 的元素 D_{il} 有值：

$$D_{il} = \sum_{j=0}^{N-1} C_{ij}A_{lj} = \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}B_{kj}A_{lj} \tag{9}$$

矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的迹等于：

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{D}) = \sum_{i=0}^{N-1} D_{ii} = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} A_{ik}B_{kj}A_{ij} \tag{10}$$

$\mathrm{tr}(\boldsymbol{D})$ 对 A_{lm} 的导数是：

$$\left(\frac{\partial \mathrm{tr}(\boldsymbol{D})}{\partial A_{lm}}\right)=\left(\frac{\partial \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} A_{ik} B_{kj} A_{ij}}{\partial A_{lm}}\right)=\left(\frac{\partial \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} A_{lk} B_{kj} A_{lj}}{\partial A_{lm}}\right) \tag{11}$$

$$=\sum_{j=0}^{N-1} A_{lj} B_{mj}+\sum_{j=0}^{N-1} A_{lj} B_{jm}=\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)_{lm}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})_{lm} \tag{12}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\left\{\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\right\}}{\partial \boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right) \tag{13}$$

如果 $\boldsymbol{B}$ 也是对称的，则：

$$\frac{\partial\left\{\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\right\}}{\partial \boldsymbol{A}}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \text{ if } \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

3 卡尔曼滤波推导

3.1 过程模型

卡尔曼滤波器用线性和递归模型对感兴趣的 $\boldsymbol{x}_k$ 向量过程进行建模：

$$\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}_{k-1}+\boldsymbol{w}_k \tag{15}$$

如果 $\boldsymbol{x}_k$ 有 N 个自由度，则 $\boldsymbol{A}_k$ 是 $N\times N$ 的线性预测矩阵 (可能是时变的，但假定已知)，$\boldsymbol{w}_k$ 是 $N\times 1$ 的零均值白噪声向量。

假设过程 $\boldsymbol{x}_k$ 是不可直接测量的，并且必须从过程 $\boldsymbol{z}_k$ 估计，过程 $\boldsymbol{z}_k$ 是可以测量的。$\boldsymbol{z}_k$ 被建模为与 $\boldsymbol{x}_k$ 线性相关，并有加性零均值白噪声 $\boldsymbol{v}_k$。

$$\boldsymbol{z}_k=\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{v}_k \tag{16}$$

$\boldsymbol{z}_k$ 是 $M\times 1$ 向量，$\boldsymbol{C}_k$ 是 $M\times N$ 矩阵 (可能是时变的，但假定已知)，$\boldsymbol{v}_k$ 是 $M\times 1$ 噪声向量。由于噪声向量 $\boldsymbol{w}_k$ 和 $\boldsymbol{v}_k$ 是零均值白噪声过程，它们的期望向量为零，并且它们的协方差矩阵在不同时间 j 和 k 是不相关的。

$$E\left[\boldsymbol{w}_k\right]=\mathbf{0} \tag{17}$$

$$E\left[\boldsymbol{v}_k\right]=\mathbf{0} \tag{18}$$

$$\mathrm{cov}\left\{\boldsymbol{w}_k,\boldsymbol{w}_j\right\}=E\left[\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_j^{\mathrm{T}}\right]=\boldsymbol{Q}_{w,k}\delta_{kj} \tag{19}$$

$$\mathrm{cov}\left\{\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{v}_j\right\}=E\left[\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\right]=\boldsymbol{Q}_{v,k}\delta_{kj} \tag{20}$$

根据定义，协方差矩阵是对称的，但不一定是对角的：

$$\boldsymbol{Q}_{w,k}^{\mathrm{T}}=\left\{E\left[\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_k{}^{\mathrm{T}}\right]\right\}^{\mathrm{T}}=E\left[\left(\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right]=E\left[\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_j^{\mathrm{T}}\right]=\boldsymbol{Q}_{w,k} \tag{21}$$

协方差矩阵 $\boldsymbol{Q}_{w,k}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{v,k}$ 不必是固定的，可以而且通常会随时间而变化。

3.2 推导

卡尔曼滤波器的目标是从 i) 上一次迭代的**后验**估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{+}$ 的外推和 ii) 当前测量 $\boldsymbol{z}_k$，计算一个无偏的基本过程 $\boldsymbol{x}_k$ 的一个**后验**估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^{+}$：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^{+} = \boldsymbol{K}_k^{\prime}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{+} + \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{z}_k \tag{22}$$

时变卡尔曼增益矩阵 $\boldsymbol{K}_k^{\prime}$ 和 $\boldsymbol{K}_k$ 定义了前一次迭代卡尔曼滤波估计 $\boldsymbol{K}_k$ 和当前测量 $\boldsymbol{z}_k$ 的相对权重。如果测量 $\boldsymbol{z}_k$ 具有更低噪声，则与外推分量 $\boldsymbol{K}_k^{\prime}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{+}$ 相比，测量项 $\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{z}_k$ 具有更高的权重，反之亦然。因此，卡尔曼滤波器是一种时变的递归滤波器。

3.2.1 无偏估计约束 (确定 $\boldsymbol{K}_k^{\prime}$)

对于 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^{+}$ 是 $\boldsymbol{x}_k$ 的无偏估计，**后验**卡尔曼滤波误差 $\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^{+}$ 的期望值必须为零：

$$E\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^{+}\right] = E\left[\hat{\boldsymbol{x}}_k^{+} - \boldsymbol{x}_k\right] = \boldsymbol{0} \tag{23}$$

从方程 (22) 中代入 $\boldsymbol{x}_k$ 得出：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^{+} = \hat{\boldsymbol{x}}_k^{+} - \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{K}_k^{\prime}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{+} + \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{x}_k \tag{24}$$

从方程 (16) 代入测量 $\boldsymbol{z}_k$ 得出：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^{+} = \boldsymbol{K}_k^{\prime}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{+} + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k\right) - \boldsymbol{x}_k \tag{25}$$

从方程 (15) 中代入 $\boldsymbol{x}_k$ 并重新排列得到：

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^{+} &= \boldsymbol{K}_k^{\prime}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k-1}^{+} + \boldsymbol{x}_{k-1}\right) + \boldsymbol{K}_k\left\{\boldsymbol{C}_k\left(\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{w}_k\right) + \boldsymbol{v}_k\right\} - \left(\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{w}_k\right) && (26)\\
&= \boldsymbol{K}_k^{\prime}\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k-1}^{+} + \left(\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{A}_k - \boldsymbol{A}_k + \boldsymbol{K}_k^{\prime}\right)\boldsymbol{x}_{k-1} + \left(\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k - \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{w}_k + \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{v}_k && (27)
\end{aligned}$$

取方程 (27) 的期望值并应用无偏估计约束得出：

$$E\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^{+}\right] = E\left[\boldsymbol{K}_k^{\prime}\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k-1}^{+}\right] + E\left[\left(\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{A}_k - \boldsymbol{A}_k + \boldsymbol{K}_k^{\prime}\right)\boldsymbol{x}_{k-1}\right] + E\left[\left(\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k - \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{w}_k\right] + E\left[\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{v}_k\right] = 0 \tag{28}$$

由于噪声矢量 $\boldsymbol{w}_k$ 和 $\boldsymbol{v}_k$ 是零均值，并且与同时迭代的卡尔曼矩阵不相关，因此如下所示：

$$E\left[\left(\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k - \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{w}_k\right] = E\left[\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{v}_k\right] = \boldsymbol{0} \tag{29}$$

另外假设过程 $\boldsymbol{x}_{k-1}$ 独立于迭代 k 时缓慢变化的矩阵 $\boldsymbol{A}_k$、$\boldsymbol{C}_k$、$\boldsymbol{K}_k$ 和 $\boldsymbol{K}_k^{\prime}$：

$$E\left[\left(\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{A}_k - \boldsymbol{A}_k + \boldsymbol{K}_k^{\prime}\right)\boldsymbol{x}_{k-1}\right] = \left(\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{A}_k - \boldsymbol{A}_k + \boldsymbol{K}_k^{\prime}\right)E\left[\boldsymbol{x}_{k-1}\right] = \boldsymbol{0} \tag{30}$$

因为 $\boldsymbol{x}_k$ 通常不是一个零均值过程：

$$\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{A}_k - \boldsymbol{A}_k + \boldsymbol{K}_k^{\prime} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{K}_k^{\prime} = \boldsymbol{A}_k - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{A}_k = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\right)\boldsymbol{A}_k \tag{31}$$

代入方程 (22) 中的 $\boldsymbol{K}'_k$，得到：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^+ = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{C}_k)\,\boldsymbol{A}_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^+ + \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{z}_k \tag{32}$$

3.2.2 先验估计

先验卡尔曼滤波估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^-$ 是将线性预测矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ 应用于上一次迭代的**后验**估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^+$ 的结果：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^- = \boldsymbol{A}_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^+ \quad \text{Kalman equation (A)} \tag{33}$$

3.2.3 后验估计的定义

将方程 (33) 中的**先验**估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^-$ 代入方程 (32)，得出：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^+ = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{C}_k)\,\hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{z}_k \quad \text{Kalman equation (D)} \tag{34}$$

等效形式为：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^+ = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{K}_k \left(\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{C}_k \hat{\boldsymbol{x}}_k^-\right) \tag{35}$$

从方程 (16) 中，项 $\boldsymbol{C}_k \hat{\boldsymbol{x}}_k^-$ 可解释为测量 $\boldsymbol{z}_k$ 的**先验**估计值 $\hat{\boldsymbol{z}}_k^-$，给出方程 (34) 的另一形式：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^+ = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{K}_k \left(\boldsymbol{z}_k - \hat{\boldsymbol{z}}_k^-\right) \tag{36}$$

3.2.4 $\boldsymbol{P}_k^-$ 做为 $\boldsymbol{P}_{k-1}^+$ 的函数

先验和**后验**误差协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_k^-$ 和 $\boldsymbol{P}_k^+$ 定义为：

$$\boldsymbol{P}_k^- = \operatorname{cov}\left\{\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^-, \hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^-\right\} = E\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^- \hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^{-\mathrm{T}}\right] = E\left[\left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^- - \boldsymbol{x}_k\right)\left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^- - \boldsymbol{x}_k\right)^{\mathrm{T}}\right] \tag{37}$$

$$\boldsymbol{P}_k^+ = \operatorname{cov}\left\{\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^+, \hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^+\right\} = E\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^+ \hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^{+\mathrm{T}}\right] = E\left[\left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^+ - \boldsymbol{x}_k\right)\left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^+ - \boldsymbol{x}_k\right)^{\mathrm{T}}\right] \tag{38}$$

将 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^-$ 的定义方程 (33) 和 $\boldsymbol{x}_k$ 的定义方程 (15) 代入方程 (37) 中给出了将当前**先验**误差协方差 $\boldsymbol{P}_k^-$ 与上一次迭代的**后验**误差协方差估计 $\boldsymbol{P}_{k-1}^+$ 相关的表达式：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_k^- &= E\left[\left(\boldsymbol{A}_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^+ - \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{w}_k\right)\left(\boldsymbol{A}_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^+ - \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{w}_k\right)^{\mathrm{T}}\right] && (39)\\
&= E\left[\left\{\boldsymbol{A}_k \left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^+ - \boldsymbol{x}_{k-1}\right) - \boldsymbol{w}_k\right\}\left\{\boldsymbol{A}_k \left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^+ - \boldsymbol{x}_{k-1}\right) - \boldsymbol{w}_k\right\}^{\mathrm{T}}\right] && (40)\\
&= \boldsymbol{A}_k E\left[\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^+ - \boldsymbol{x}_{k-1}\right)\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^+ - \boldsymbol{x}_{k-1}\right)^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}_{w,k} && (41)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P}_k^- = \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{P}_{k-1}^+ \boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}_{w,k} \quad \text{Kalman equation (B1)} \tag{42}$$

3.2.5 最小误差协方差约束 (确定 $\boldsymbol{K}_k$)

卡尔曼增益矩阵 $\boldsymbol{K}_k$ 通过**后验**误差协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_k^+$ 的迹最小化**后验**误差 $\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^+$ 方差：

$$E\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^{+\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^+\right]=\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{P}_k^+\right) \tag{43}$$

为 $\boldsymbol{z}_k$ 将方程 (16) 代入方程 (32)，得到了**后验**误差和**先验**误差之间的关系：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^+=\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^++\boldsymbol{x}_k=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\right)\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^-+\boldsymbol{x}_k\right)+\boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{v}_k\right) \tag{44}$$

$$\Rightarrow\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^++\boldsymbol{x}_k=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\right)\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^-+\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{v}_k\right) \tag{45}$$

$$\Rightarrow\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^+=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\right)\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^-+\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{v}_k \tag{46}$$

将该结果代入方程 (38) 中的**后验**协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_k^+$ 的定义中，得到：

$$\boldsymbol{P}_k^+=E\left[\left\{\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\right)\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^-+\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{v}_k\right\}\left\{\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\right)\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^-+\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{v}_k\right\}^{\mathrm{T}}\right] \tag{47}$$

$$=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\right)E\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^-\hat{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon,k}^{-\mathrm{T}}\right]\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\right)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}_kE\left[\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}} \tag{48}$$

$$=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\right)\boldsymbol{P}_k^-\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\right)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{Q}_{v,k}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}} \tag{49}$$

$$=\boldsymbol{P}_k^--\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{P}_k^-+\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{Q}_{v,k}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}} \tag{50}$$

卡尔曼滤波增益 $\boldsymbol{K}_k$ 是使**后验**误差协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_k^+$ 的迹最小化，如方程 (43) 所示：

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{K}_k}\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{P}_k^+\right)=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{K}_k}\left\{\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{P}_k^-\right)-\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}\right)-\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{P}_k^-\right)+\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}\right)+\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{Q}_{v,k}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}\right)\right\}=\boldsymbol{0} \tag{51}$$

第一项 $\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{P}_k^-\right)$ 不依赖于 $\boldsymbol{K}_k$，得到：

$$\frac{\partial\left\{\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{P}_k^-\right)\right\}}{\partial\boldsymbol{K}_k}=\frac{\partial\left\{\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{P}_{k-1}^+\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}_{w,k}\right)\right\}}{\partial\boldsymbol{K}_k}=\boldsymbol{0} \tag{52}$$

因为矩阵的迹显然不受转置的影响，所以可以使用方程 (6) 对方程 (51) 的第二项进行转置和简化，从而得到：

$$\frac{\partial\left\{\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}\right)\right\}}{\partial\boldsymbol{K}_k}=\frac{\partial\left\{\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{P}_k^-\right)\right\}}{\partial\boldsymbol{K}_k}=\left(\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{P}_k^-\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}} \tag{53}$$

利用协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_k^-$ 是对称的这一事实，可以使用方程 (13) 和 (14) 简化第四项：

$$\frac{\partial\left\{\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}\right)\right\}}{\partial\boldsymbol{K}_k}=\boldsymbol{K}_k\left\{\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}+\left(\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right\}=2\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}} \tag{54}$$

最后一项也可以使用方程 (13) 和 (14) 以及 $\boldsymbol{Q}_{v,k}$ 的对称性来简化：

$$\frac{\partial\left\{\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{Q}_{v,k}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}\right)\right\}}{\partial\boldsymbol{K}_k}=2\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{Q}_{v,k} \tag{55}$$

将方程 (52) 至 (55) 代入方程 (51)，得到最优卡尔曼滤波器增益矩阵 $\boldsymbol{K}_k$ 的表达式：

$$-2\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}+2\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}+2\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{Q}_{v,k}=\mathbf{0} \tag{56}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}_{v,k}\right)=\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}} \tag{57}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{K}_k=\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}_{v,k}\right)^{-1}\quad \text{Kalman equation (C)} \tag{58}$$

3.2.6 $\boldsymbol{P}_k^+$ 做为 $\boldsymbol{P}_k^-$ 的函数

重新排列方程 (57) 给出：

$$\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{Q}_{v,k}=\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}} \tag{59}$$

将方程 (59) 中的 $\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{Q}_{v,k}$ 代入方程 (49)，得到：

$$\boldsymbol{P}_k^+=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\right)\boldsymbol{P}_k^-\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}\right)+\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\right)\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}} \tag{60}$$

$$=\boldsymbol{P}_k^--\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{P}_k^--\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}} \tag{61}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P}_k^+=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\right)\boldsymbol{P}_k^-\quad \text{Kalman equation (E)} \tag{62}$$

这就完成了标准卡尔曼滤波方程的推导。

3.3 标准卡尔曼方程

本节简单地重新列出了上一节中导出的关键卡尔曼滤波方程。

3.3.1 卡尔曼方程 (A)

线性预测 (**先验**) 估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^-$ 是通过将线性预测矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ 应用于前一样本的卡尔曼 (**后验**) 滤波器估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^+$ 来实现的。

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^-=\boldsymbol{A}_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^+ \tag{A}$$

3.3.2 卡尔曼方程 (B)

然后使用模型矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ 和噪声矩阵 $\boldsymbol{Q}_{w,k}$ 更新**先验** (线性外推) 误差协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_k^-$。

$$\boldsymbol{P}_k^-=\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{P}_{k-1}^+\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}_{w,k} \tag{B1}$$

可以将卡尔曼方程 (B1) 和 (E) 组合以给出 $\boldsymbol{P}_k^-$ 的递归更新，而无需显式计算卡尔曼方程 (E) 中的**后验**误差协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_k^+$：

$$\boldsymbol{P}_k^-=\boldsymbol{A}_k\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_{k-1}\boldsymbol{C}_{k-1}\right)\boldsymbol{P}_{k-1}^-\boldsymbol{A}_k{}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}_{w,k} \tag{B2}$$

$\boldsymbol{P}_k^-$ 的唯一目的是允许计算卡尔曼增益矩阵 $\boldsymbol{K}_k$，以确定**后验**估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^+$。

3.3.3 卡尔曼方程 (C)

卡尔曼滤波增益矩阵 $\boldsymbol{K}_k$ 更新为：

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{C}_k \boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}_{v,k} \right)^{-1} \tag{C}$$

3.3.4 卡尔曼方程 (D)

卡尔曼滤波 (**后验**) 估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^+$ 是根据当前**先验**估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^-$ 和当前测量 $\boldsymbol{z}_k$ 计算得到。

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^+ = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{K}_k \left(\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{C}_k \hat{\boldsymbol{x}}_k^- \right) = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{C}_k \right) \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{z}_k \tag{D}$$

3.3.5 卡尔曼方程 (E)

更新**后验**卡尔曼误差协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_k^+$，并为下一次迭代做好准备。如果以递归方式更新 $\boldsymbol{P}_k^-$，则可以跳过此方程。

$$\boldsymbol{P}_k^+ = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{C}_k \right) \boldsymbol{P}_k^- \tag{E}$$

3.4 极限情况

根据方程 (C)，当测量噪声协方差 $\boldsymbol{Q}_{v,k}$ 相对于过程噪声协方差 $\boldsymbol{Q}_{w,k}$ 减小时，卡尔曼增益矩阵 $\boldsymbol{K}_k$ 满足：

$$\boldsymbol{K}_k \boldsymbol{C}_k \boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}} \Rightarrow \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{C}_k = \boldsymbol{I} \tag{63}$$

利用方程 (D)，**后验**估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^+$ 仅依赖于测量 $\boldsymbol{z}_k$：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^+ = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{C}_k \right) \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{z}_k \tag{64}$$

当测量噪声协方差 $\boldsymbol{Q}_{v,k}$ 相对于过程噪声协方差 $\boldsymbol{Q}_{w,k}$ 增加时，卡尔曼增益矩阵 $\boldsymbol{K}_k$ 接近零：

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{Q}_{v,k} \right)^{-1} = \boldsymbol{0} \tag{65}$$

后验过程估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^+$ 然后近似于**先验**估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^-$：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^+ = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{K}_k \left(\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{C}_k \hat{\boldsymbol{x}}_k^- \right) = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- \tag{66}$$