由 Rodrigues 旋转公式想开去的随风飘

Shuyong Chen

2023 年 3 月 11 日

1 前言

走哪算哪，将所学的知识串一串，放在火上烤一烤，看看能不能滋滋冒油。考糊了拉倒。

2 符号说明

在三维世界里，表示刚体运动的位姿向量 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^6$ 由姿态向量 $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^3$ 和平移向量 $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^3$ 组合而成

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix}$$

姿态变化由角速度驱动，位置变化由速度驱动。附着在机体上的 IMU 测量得到的是局部坐标系的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和加速度 $\mathbf{a}$，假定是匀速运动，通过时间的积分可以得到增量角度 $\theta = \|\boldsymbol{\omega}\| \cdot \Delta t$ 和增量速度 $\mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot \Delta t$。在角度空间里，用单位向量 $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} / \|\boldsymbol{\omega}\|$ 描述旋转轴，为方便起见，用一个旋转向量 $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{u}\theta$ 描述围绕旋转轴 $\mathbf{u}$，旋转角度为 θ 的旋转。

3 公式分析

如果 $\mathbf{v}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 向量，并且 $\mathbf{u}$ 是描述旋转轴的单位向量，根据右手法则，$\mathbf{v}$ 围绕旋转轴旋转角度 θ，旋转向量 $\mathbf{v}_{\mathrm{rot}}$ 的罗德里格斯公式为

$$\mathbf{v}_{\mathrm{rot}} = \mathbf{v}\cos\theta + (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\sin\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta)$$

将向量 $\mathbf{v}$ 相对于旋转轴 $\mathbf{u}$ 投影，分解为平行 (投影 $\|$) 于 $\mathbf{u}$ 以及正交 (垂直 $\perp$) 于 $\mathbf{u}$ 的两个分量，$\mathbf{v}_{\|}$ 和 $\mathbf{v}_{\perp}$。旋转由垂直分量由 $\mathbf{v}_{\perp}$ 做贡献。上述公式的直觉是，第一项将向量 $\mathbf{v}$ 投影到旋转平面上，而根据叉乘定义，$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 在旋转平面上生成一个与两者都正交的向量，第二项对该向量再投影，通过前两项的向量相加，将向量向新的旋转位置倾斜。第三项重新添加第一项丢失的高度 (相对于 $\mathbf{u}$)。相应的推导和几何演示，可以查看四元数与三维旋转这个文档。

旋转轴 $\mathbf{u}$ 与旋转角度 θ 可以组合成旋转向量 $\boldsymbol{\phi} \equiv \theta\mathbf{u}$。我们希望研究旋转向量 $\boldsymbol{\phi}$ 关于旋转的一般规律。显然，上式里，向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的运算纠缠在一起，不容易分离出旋转向量 $\boldsymbol{\phi}$ 的特性。因此我们需要做变换。

将 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 表示为列矩阵，叉积可以表示为矩阵积

$$\begin{bmatrix}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_x\\(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_y\\(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_yv_z-u_zv_y\\u_zv_x-u_xv_z\\u_xv_y-u_yv_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-u_z&u_y\\u_z&0&-u_x\\-u_y&u_x&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}.$$

让 $[\mathbf{u}\times]$ 表示单位向量 $\mathbf{u}$ 的“叉积矩阵”,

$$[\mathbf{u}\times]=\begin{bmatrix}0&-u_z&u_y\\u_z&0&-u_x\\-u_y&u_x&0\end{bmatrix},$$

就是说，对于任何向量 $\mathbf{v}$ 有

$$[\mathbf{u}\times]\,\mathbf{v}=\mathbf{u}\times\mathbf{v},$$

实际上，$[\mathbf{u}\times]$ 是具有此性质的唯一矩阵。它具有 3 个特征值：0 和 $\pm i$。

所以根据WIKI上面的推导，我们有

$$\mathbf{v}_{\mathrm{rot}}=\mathbf{v}+(\sin\theta)\,[\mathbf{u}\times]\,\mathbf{v}+(1-\cos\theta)\,[\mathbf{u}\times]^2\,\mathbf{v}$$

分解 $\mathbf{v}$ 可以得到紧凑的表达式

$$\mathbf{v}_{\mathrm{rot}}=\mathbf{R}\mathbf{v}$$

其中

$$\boxed{\mathbf{R}=\mathbf{I}+(\sin\theta)\,[\mathbf{u}\times]+(1-\cos\theta)\,[\mathbf{u}\times]^2} \tag{1}$$

是绕 $\mathbf{u}$ 轴逆时针旋转 θ 的旋转矩阵，$\mathbf{I}$ 是 3×3 单位矩阵。该矩阵 $\mathbf{R}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的旋转群 SO(3) 的一个元素，$[\mathbf{u}\times]$ 是生成该李群的李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 的一个元素。注意，$[\mathbf{u}\times]$ 是斜对称的，由其刻画 $\mathfrak{so}(3)$，三维向量 $\mathbf{u}$ 用 3 个生成元进入该空间

$$G_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},G_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},G_3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3$$

$$u_xG_1+u_yG_2+u_zG_3\in\mathfrak{so}(3)$$

在矩阵指数方面，

$$\mathbf{R}=\exp\left(\theta\,[\mathbf{u}\times]\right).$$

为了使得下式后面的幺元成立，注意到

$$\mathbf{R}\,(\theta)\,\mathbf{R}\,(\phi)=\mathbf{R}\,(\theta+\phi)\,,\;\mathbf{R}\,(0)=\mathbf{I},$$

是单参数子群的特征，即指数，公式匹配无穷小 θ。

从 $\mathfrak{so}(3)$ 到 SO(3) 是指数映射 $\exp\,(\,)$。从 SO(3) 到 $\mathfrak{so}(3)$ 的反向映射为 $\log\,(\,)$ 映射。

因为 $[\mathbf{u}\times]^2=\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}-\mathbf{I}$，所以旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 又有另外一种形式

$$\boxed{\mathbf{R}=\cos\theta\mathbf{I}+(\sin\theta)\,[\mathbf{u}\times]+(1-\cos\theta)\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}} \tag{2}$$

注意这点

$$[\mathbf{u}\times]\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

因此有

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\mathbf{u} &= \left(\cos\theta\mathbf{I} + (\sin\theta)\,[\mathbf{u}\times] + (1-\cos\theta)\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u},\end{aligned}$$

因此旋转轴 $\mathbf{u}$ 是旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 的特征值 $\lambda = 1$ 所对应的特征向量。因此，将罗德里格斯公式给出的旋转矩阵应用于旋转轴上的任何点，都会返回相同的点。

根据旋转向量 $\boldsymbol{\phi} \equiv \theta\mathbf{u}$ 的定义，将其代入上面旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 的公式，我们有类似的形式

$$\boxed{\mathbf{R} = \begin{cases}\mathbf{I} + \left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)[\boldsymbol{\phi}\times] + \left(\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\phi}\times]^2 \\ \cos\theta\mathbf{I} + \left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)[\boldsymbol{\phi}\times] + \left(\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\end{cases}.} \tag{3}$$

$\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$ 与其很相似

$$\boxed{\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \begin{cases}\mathbf{I} - \left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)[\boldsymbol{\phi}\times] + \left(\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\phi}\times]^2 \\ \cos\theta\mathbf{I} - \left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)[\boldsymbol{\phi}\times] + \left(\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\end{cases}.}$$

这是在软件中更常用的公式，因为从 IMU 中读取出来的角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$，其中 $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}/\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|$ 为旋转轴，$\theta = \left\|\boldsymbol{\omega}\right\|\Delta t$ 为旋转角度。并由此计算出来的增量角度 $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\omega}\cdot\Delta t$ 就是旋转向量，将其代入上式就得到软件中常见的计算公式

$$\boxed{\mathbf{R} = \begin{cases}\mathbf{I} + \sin\left(\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|\Delta t\right)\left[\dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|}\times\right] + \left(1-\cos\left(\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|\Delta t\right)\right)\left[\dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|}\times\right]^2 \\ \cos\left(\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|\Delta t\right)\mathbf{I} + \sin\left(\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|\Delta t\right)\left[\dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|}\times\right] + \left(1-\cos\left(\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|\Delta t\right)\right)\dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|}\dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|}^{\mathrm{T}}\end{cases}.} \tag{4}$$

因为 IMU 的采样率很高，通常 $\theta \to 0$，上式会出现数值不稳定的情况，所以 Indirect Kalman filter for 3D attitude estimation 这个文档给出了其极限形式。在工程中，$\boldsymbol{\omega}$ 向量的数值可以通过传感器测量得到，因此在程序中 $\mathbf{R}$ 矩阵的计算过程如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi} &= \boldsymbol{\omega}\Delta t \in \mathbb{R}^6 \\ \theta &= \sqrt{\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}} \\ A &= \frac{\sin\theta}{\theta} \\ B &= \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{I} + A\,[\boldsymbol{\phi}\times] + B\,[\boldsymbol{\phi}\times]^2 \\ \mathrm{Exp}\,(\boldsymbol{\phi}) &= \mathbf{R}.\end{aligned}$$

出于实现的目的，当 θ^2 为小值时应使用 A、B 的泰勒展开

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sin\theta}{\theta} \\
&= 1 - \frac{\theta^2}{6} + \frac{\theta^4}{120} + O\left(\theta^6\right) \\
\lim_{\theta\to 0} A &= \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \\
&= 1 \\
B &= \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\theta^2}{24} + \frac{\theta^4}{720} + O\left(\theta^6\right) \\
\lim_{\theta\to 0} B &= \lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

4 四元数形式

方程 (3) 和旋转向量的运动学方程是超越方程并且具有病态行为，尽管对零旋转角来说作用是有限的。在旋转向量空间中，所有旋转都可以映射到半径为 π 的球体的内部和表面上的点，其中直径两端的点表示相同的旋转；虽然姿态在流形上是平滑变化，但旋转向量可以从直径的一端跳到另一端。这些跳跃可以通过将表示扩展到半径为 2π 的球体来延迟问题的出现，但不能完全避免，因为旋转向量的运动学方程对于 $\theta = 2\pi$ 是奇异的。这些特性限制了旋转向量作为全局姿态表示的实用性。

因此在大多数软件中都采用四元数表示全局姿态。将旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 转换为姿态四元数的方程是

$$\mathbf{R}(\theta) \to \begin{bmatrix} \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \dfrac{\boldsymbol{\phi}}{\|\boldsymbol{\phi}\|} \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

该方程可以从指数映射 $\exp(\,)$ 推导出来。当 $\theta \to 0$ 时，姿态四元数有一个二阶近似方程

$$\delta q(\theta) = \begin{bmatrix} 1 - \|\boldsymbol{\phi}\|^2/8 \\ \dfrac{\boldsymbol{\phi}}{2} \end{bmatrix}.$$

该二阶近似方程可以避免三角函数运算。将其中的向量部分 $\dfrac{\boldsymbol{\phi}}{2}$ 及 $\theta \to 0$ 代入得到小角度时的旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 的近似方程

$$\mathbf{R}(\theta) \approx \mathbf{I} - [\boldsymbol{\phi}\times] + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} - \|\boldsymbol{\phi}\|^2 \mathbf{I}\right). \tag{5}$$

该近似方程也可以避免三角函数运算。如果 θ 更小，则上式第三项还可以消掉，有

$$\mathbf{R}(\theta) \approx \mathbf{I} - [\boldsymbol{\phi}\times]. \tag{6}$$

另外，斜对称矩阵 $[\boldsymbol{\phi}\times]$ 在和旋转相关的方程中随处可见，例如四元数的乘积方程。有两个四

元数 p 和 q，两者矩阵形式的乘积可以表示为

$$
\begin{aligned}
p * q &= \begin{bmatrix} p_0 & -\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{p} & p_0\boldsymbol{I} + [\boldsymbol{p}\times] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} q_0 & -\boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{q} & q_0\boldsymbol{I} - [\boldsymbol{q}\times] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

5 SO(3) 指数映射运算

旋转群 SO(3) 的定义是

$$\mathrm{SO}(3) = \left\{\mathbf{R} \mid \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3\times3}, \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}, \det(\mathbf{R}) = 1\right\} \tag{7}$$

相应的李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 的定义是

$$\mathfrak{so}(3) = \left\{\boldsymbol{\Phi} | \boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}\times] \in \mathbb{R}^{3\times3}, \boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^3\right\} \tag{8}$$

旋转姿态位于嵌入四维空间 $\mathbb{R}^4$ 的三维 S^3 球面上。当前姿态在流形上受到角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 的驱动，就移动到新的姿态点上。但是，向量不能直接作用到 S^3 的元素上，因此，在当前姿态点上就同时存在 3 个三维空间，第一个是角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 所在的局部笛卡尔空间；第二个是以当前姿态点为原点构建的局部切空间，三维向量 $\boldsymbol{\omega}$ 用 3 个生成元进入该空间，该空间是一个三维线性空间；第三个是三维流形空间，对局部切空间中的元素使用收回 (retraction)，也就是指数映射函数 $\exp(\,)$，使其进入该空间。最后，进入流形空间的元素通过乘法作用到当前姿态点上，当前姿态点就移动到新的姿态点上，这种球面运动就是旋转，所经过的轨迹就是测地线 (geodesic)。

因此了解指数映射函数 $\exp(\,)$ 的推导十分重要。指数映射函数 $\exp(\,)$ 的泰勒级数展开是

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

推导三维旋转的指数映射函数 $\exp(\,)$ 有两个路径，一种是用 $\exp([\boldsymbol{\omega}\times])$ 矩阵形式推导，关键点是用如下的降幂次方法

$$
\begin{aligned}
&[\boldsymbol{\omega}\times]^2 = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} - \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \boldsymbol{I} \\
&[\boldsymbol{\omega}\times]^3 = -\|\boldsymbol{\omega}\|^2 [\boldsymbol{\omega}\times] \quad [\boldsymbol{\omega}\times]^4 = -\|\boldsymbol{\omega}\|^2 [\boldsymbol{\omega}\times]^2 \quad [\boldsymbol{\omega}\times]^5 = \|\boldsymbol{\omega}\|^4 [\boldsymbol{\omega}\times] \quad [\boldsymbol{\omega}\times]^6 = \|\boldsymbol{\omega}\|^4 [\boldsymbol{\omega}\times]^2 \\
&[\boldsymbol{\omega}\times]^7 = -\|\boldsymbol{\omega}\|^6 [\boldsymbol{\omega}\times] \quad [\boldsymbol{\omega}\times]^8 = -\|\boldsymbol{\omega}\|^6 [\boldsymbol{\omega}\times]^2 \quad [\boldsymbol{\omega}\times]^9 = \|\boldsymbol{\omega}\|^8 [\boldsymbol{\omega}\times] \quad [\boldsymbol{\omega}\times]^{10} = \|\boldsymbol{\omega}\|^8 [\boldsymbol{\omega}\times]^2
\end{aligned}
$$

最后推导出旋转矩阵 $\mathbf{R}$

$$\exp([\boldsymbol{\omega}\times]) = \mathbf{R}$$

另外一种方式是用纯虚四元数形式推导，$\exp(\omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k})$，关键点是用四元数乘法和换元法进行降幂次，最后同样得到

$$\exp(\omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\|\boldsymbol{\omega}\|}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

在这里要注意在旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 中用全角 θ，在四元数中用半角 $\theta/2$。

不过在工作中常用的还是矩阵形式推导，因为矩阵形式可以简单而一致性地扩展到 SE(3) 和 Sim(3) 等流形上面，而四元数很难做到。另外，符号 $[\boldsymbol{\omega}\times]$ 虽然形象地表示斜对称矩阵来自于向量叉乘，但是不容易找到一个类似的表示反函数的符号，并且也不利于应用于流形的扩展概念，因此有必要引入新的符号，$\wedge$ 和 $\vee$，前者表示“从向量到矩阵”的变换，其实也就是从笛卡尔空间进入切空间，$\boldsymbol{\omega}^{\wedge}=[\boldsymbol{\omega}\times]$，后者表示“从矩阵到向量”的变换，也就是从切空间进入笛卡尔空间，$\boldsymbol{\omega}=[\boldsymbol{\omega}\times]^{\vee}$。

此外，在软件中一般会提供一个快捷函数，一步从笛卡尔空间到流形空间的相互变换，即所谓的大写指数映射函数 $\mathrm{Exp}\left(\boldsymbol{\omega}\right)$，就是将生成元操作和 exp 操作一次性运算完成，方便调用者。同样也会有一个大写对数函数 $\mathrm{Log}\left(\mathbf{R}\right)$ 做为反函数。这时候又可以引入方便使用的加号 $\oplus$ 和减号 $\ominus$ 算子：

$$
\begin{aligned}
\text{Plus operator:}\quad & \mathcal{X}\oplus\boldsymbol{\theta} && \triangleq \mathcal{X}\cdot\mathrm{Exp}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\\
\text{Minus operator:}\quad & \mathcal{Y}\ominus\mathcal{X} && \triangleq \mathrm{Log}\left(\mathcal{X}^{-1}\cdot\mathcal{Y}\right)
\end{aligned}
$$

接下来理解 Baker-Campbell-Hausdorff 公式，简称 BCH 公式。我们期望

$$
\exp\left(\boldsymbol{\phi}_1^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}_2^{\wedge}\right)=\exp\left(\left(\boldsymbol{\phi}_1+\boldsymbol{\phi}_2\right)^{\wedge}\right),
$$

因为函数 exp( ) 运算慢,我们期望在向量空间中将所有的向量一次加减完成而只算一次函数 exp( )。但是，这个等式成立的条件是 $\boldsymbol{\phi}_1^{\wedge}\boldsymbol{\phi}_2^{\wedge}=\boldsymbol{\phi}_2^{\wedge}\boldsymbol{\phi}_1^{\wedge}$，Matrix exponential properties 这个视频有简短的证明。显然，对于矩阵乘法，$\boldsymbol{\phi}_1^{\wedge}\boldsymbol{\phi}_2^{\wedge}\neq\boldsymbol{\phi}_2^{\wedge}\boldsymbol{\phi}_1^{\wedge}$，所以

$$
\exp\left(\boldsymbol{\phi}_1^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}_2^{\wedge}\right)\neq\exp\left(\left(\boldsymbol{\phi}_1+\boldsymbol{\phi}_2\right)^{\wedge}\right).
$$

BCH 公式告诉我们，当处理两个矩阵之积时，它们会产生一些由李括号组成的余项。直观上的理解，我们在上式的两端同时乘上单位矩阵 $\mathbf{I}$，方程左边，旋转向量 $\boldsymbol{\phi}_1$ 收回并作用到幺元上，于是姿态点从幺元出发，沿测地线到达新的姿态点，我们称之为 q_1，接着旋转向量 $\boldsymbol{\phi}_2$ 收回并作用到 q_1 上，于是姿态点从 q_1 出发，沿测地线到达新的姿态点，我们称之为 q_2，前后两条测地线的方向并不相同。如果我们直接从幺元出发，沿测地线到达 q_2 姿态点，那么在流形上我们将看到一个三角形。注意，我们不能用 log( ) 函数将前两条测地线展开 (unwrap) 到向量空间并相加，$\boldsymbol{\phi}_1+\boldsymbol{\phi}_2$，这个运算不可行，这是因为局部切空间发生了切换，第二次旋转是在 q_1 姿态点上建立局部切空间进行计算，而第一次和第三次旋转是在幺元处的切空间进行计算，两处局部切空间产生的差异就是那些余项。

但是通过分析 BCH 公式，当 $\boldsymbol{\phi}_1$ 或 $\boldsymbol{\phi}_2$ 为小量时，公式可以做一些近似化简，从上面的直观理解也可以看出，当有一个向量为小量时，剩下两个向量就很相近。因为在工程中，增量向量通常是小量，而原有的状态通常是大的量，因此近似方程很常用。对于旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 的化简，还会涉及到全局或局部坐标系选择的问题。因此通常约定是，小量在右边叫右乘，表示从机体坐标系变换到惯性坐标系的旋转，用 $\mathbf{R}_B^I$ 表示，所以有

$$
\mathbf{R}_B^I\left(\boldsymbol{\phi}_1\right)\mathbf{R}_B^I\left(\boldsymbol{\phi}_2\right)\approx\mathbf{R}_B^I\left(\boldsymbol{\phi}_1\right)\left(\mathbf{I}+\left[\boldsymbol{\phi}_2\times\right]\right),
$$

小量在左边叫左乘，表示从惯性坐标系变换到机体坐标系的旋转，用 $\mathbf{R}_I^B$ 表示，所以有

$$
\mathbf{R}_I^B\left(\boldsymbol{\phi}_1\right)\mathbf{R}_I^B\left(\boldsymbol{\phi}_2\right)\approx\left(\mathbf{I}-\left[\boldsymbol{\phi}_1\times\right]\right)\mathbf{R}_I^B\left(\boldsymbol{\phi}_2\right),
$$

这些都是应用旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 当 $\boldsymbol{\phi}\to 0$ 时的简化方程 (6)。

6 SE(3) 指数映射运算

刚体位姿包括姿态和平移，刚体运动群 SE(3) 由旋转群 SO(3) 和平移向量这两种数学对象组合而成。

$$\mathrm{SE}(3)=\left\{\mathbf{T}\mid\mathbf{T}=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{R}&\mathbf{t}\\\hline\mathbf{0}^{\mathrm{T}}&1\end{array}\right]\in\mathbb{R}^{4\times4},\mathbf{R}\in\mathrm{SO}(3),\mathbf{t}\in\mathbb{R}^{3}\right\} \tag{9}$$

相应的李代数 $\mathfrak{se}(3)$ 的定义是

$$\mathfrak{se}(3)=\left\{\boldsymbol{\xi}^{\wedge}|\boldsymbol{\xi}=\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{\phi}\\\boldsymbol{\rho}\end{array}\right]\in\mathbb{R}^{6},\boldsymbol{\phi}\in\mathbb{R}^{3},\boldsymbol{\rho}\in\mathbb{R}^{3},\boldsymbol{\xi}^{\wedge}=\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{\phi}^{\wedge}&\boldsymbol{\rho}\\\hline\mathbf{0}^{\mathrm{T}}&0\end{array}\right]\in\mathbb{R}^{4\times4}\right\} \tag{10}$$

因此和 $\mathfrak{so}(3)$ 相仿，6 参数向量 $\boldsymbol{\xi}$ 用 6 个生成元进入 $\mathfrak{se}(3)$ 空间

$$G_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad G_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad G_3=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$G_4=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad G_5=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad G_6=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\xi}=\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{\phi}\\\boldsymbol{\rho}\end{array}\right]\in\mathbb{R}^{6}$$

$$\phi_xG_1+\phi_yG_2+\phi_zG_3+\rho_xG_4+\rho_yG_5+\rho_zG_6\in\mathfrak{se}(3)$$

将 $\boldsymbol{\xi}^{\wedge}$ 代入指数映射函数 $\exp(\,)$ 就得到位姿矩阵 $\mathbf{T}$，切空间中的元素就进入 SE(3) 流形中

$$\begin{aligned}\exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right)&=\exp\left(\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{\phi}^{\wedge}&\boldsymbol{\rho}\\\hline\mathbf{0}^{\mathrm{T}}&0\end{array}\right]\right)\\&=\left[\begin{array}{c|c}\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)&\mathbf{V}\boldsymbol{\rho}\\\hline\mathbf{0}^{\mathrm{T}}&1\end{array}\right]\\&=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{R}&\mathbf{t}\\\hline\mathbf{0}^{\mathrm{T}}&1\end{array}\right]\\&=\mathbf{T}\end{aligned}$$

其中，$\mathbf{V}$ 矩阵，有些文档又称为 $\mathbf{J}$ 系数矩阵，经过泰勒级数展开并推导得到

$$\boxed{\mathbf{V}=\begin{cases}\mathbf{I}+\left(\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\phi}\times]+\left(\dfrac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\phi}\times]^2\\\dfrac{\sin\theta}{\theta}\mathbf{I}+\left(\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\phi}\times]+\left(\dfrac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\end{cases}.} \tag{11}$$

可以看到 $\mathbf{V}$ 矩阵和 $\mathbf{R}$ 矩阵十分相像。我们可以对 $\mathbf{V}$ 矩阵的方程进行一些变换，以便查看其与 $\mathbf{R}$ 矩阵的关系

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} &= \frac{\sin\theta}{\theta}\mathbf{I} + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\phi}\times] + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} \\
&= \frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} + \frac{\sin\theta}{\theta^3}\left(-\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} + \theta^2\mathbf{I}\right) + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\phi}\times] \\
&\because\ [\boldsymbol{\phi}\times]^2 = \boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} - \theta^2\boldsymbol{I},\quad [\boldsymbol{\phi}\times]^3 = -\theta^2[\boldsymbol{\phi}\times] \\
&= \frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} + \frac{\sin\theta}{\theta^3}\left(-[\boldsymbol{\phi}\times]^2\right) - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^4}\right)[\boldsymbol{\phi}\times]^3 \\
&= \frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\theta^2}[\boldsymbol{\phi}\times]\left(\frac{\sin\theta}{\theta}[\boldsymbol{\phi}\times] + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\phi}\times]^2\right) \\
&= \frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\theta^2}[\boldsymbol{\phi}\times](\mathbf{R}-\mathbf{I})
\end{aligned}$$

$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$ 矩阵与 $\mathbf{V}$ 矩阵很相似

$$\boxed{\mathbf{V}^{\mathrm{T}} = \begin{cases} \mathbf{I} - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\phi}\times] + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\phi}\times]^2 \\ \frac{\sin\theta}{\theta}\mathbf{I} - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\phi}\times] + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} \end{cases}.}$$

我们同样可以对 $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$ 矩阵的方程进行一些变换，以便查看其与 $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$ 矩阵的关系

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^{\mathrm{T}} &= \frac{\sin\theta}{\theta}\mathbf{I} - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\phi}\times] + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} \\
&= \frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} + \frac{\sin\theta}{\theta^3}\left(-\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} + \theta^2\mathbf{I}\right) - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\phi}\times] \\
&\because\ [\boldsymbol{\phi}\times]^2 = \boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} - \theta^2\boldsymbol{I},\quad [\boldsymbol{\phi}\times]^3 = -\theta^2[\boldsymbol{\phi}\times] \\
&= \frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} + \frac{\sin\theta}{\theta^3}\left(-[\boldsymbol{\phi}\times]^2\right) + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^4}\right)[\boldsymbol{\phi}\times]^3 \\
&= \frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\theta^2}[\boldsymbol{\phi}\times]\left(-\frac{\sin\theta}{\theta}[\boldsymbol{\phi}\times] + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\phi}\times]^2\right) \\
&= \frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\theta^2}[\boldsymbol{\phi}\times]\left(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}-\mathbf{I}\right)
\end{aligned}$$

在一些资料里，又把 $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$ 矩阵称为 $\boldsymbol{\Gamma}$ 矩阵，$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}}$，将其做为伴随矩阵用于 SO(3) 的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的坐标系的变换

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathcal{Y}} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathcal{X}}\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}$$

在工程中，$\boldsymbol{\xi}$ 向量的数值可以通过传感器测量得到，因此在程序中 $\mathbf{T}$ 矩阵的计算过程如下：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \\
\theta &= \sqrt{\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\phi}} \\
A &= \frac{\sin\theta}{\theta} \\
B &= \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} \\
C &= \frac{1-A}{\theta^2} \\
\mathbf{R} &= \mathbf{I} + A\left[\boldsymbol{\phi}\times\right] + B\left[\boldsymbol{\phi}\times\right]^2 \\
\mathbf{V} &= \mathbf{I} + B\left[\boldsymbol{\phi}\times\right] + C\left[\boldsymbol{\phi}\times\right]^2 \\
\operatorname{Exp}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix}\right) &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{Vu} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

出于实现的目的，当 θ^2 为小值时应使用 A、B 和 C 的泰勒展开

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\sin\theta}{\theta} \\
&= 1 - \frac{\theta^2}{6} + \frac{\theta^4}{120} + O\left(\theta^6\right) \\
\lim_{\theta\to 0} A &= \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \\
&= 1 \\
B &= \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\theta^2}{24} + \frac{\theta^4}{720} + O\left(\theta^6\right) \\
\lim_{\theta\to 0} B &= \lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} \\
&= \frac{1}{2} \\
C &= \frac{1-A}{\theta^2} \\
&= \frac{1}{6} - \frac{\theta^2}{120} + \frac{\theta^4}{720} + O\left(\theta^6\right) \\
\lim_{\theta\to 0} C &= \lim_{\theta\to 0} \frac{1-A}{\theta^2} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

矩阵 $\mathbf{V}$ 有一个封闭形式的逆矩阵。

$$
\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\phi}\times\right] + \frac{1}{\theta^2}\left(1 - \frac{A}{2B}\right)\left[\boldsymbol{\phi}\times\right]^2 \tag{12}
$$

位姿矩阵 $\mathbf{T}$ 的幺元同样为单位矩阵 $\mathbf{I}$，由此计算逆矩阵为

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right]$$

这在机体坐标系中的位姿和惯性坐标系中的位姿相互变换时用到。

位姿矩阵 $\mathbf{T}$ 通过乘法组合

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_1 & \mathbf{t}_1 \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_2 & \mathbf{t}_2 \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_1\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1 \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right] \end{aligned}$$

矩阵表示法还使得对于三维上的点和向量的群作用清晰可见：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}\boldsymbol{\rho} + w\mathbf{t} \\ w \end{bmatrix} \end{aligned}$$

通常，$w = 1$，因此 $\mathbf{x}$ 是笛卡尔空间中的点。矩阵向量相乘的作用相当于先旋转 $\mathbf{x}$，然后平移它。对于方向向量，用 $w = 0$ 编码，将忽略平移变换。如果 $\mathbf{R} = \mathbf{I}$，则矩阵 $\mathbf{T}$ 为平移矩阵，只有平移变换。

7 Sim(3) 指数映射运算

Sim(3) 为三维空间中的相似性变换，是刚性变换和缩放的组合。三维空间中的相似变换群 Sim(3) 与 SE(3) 具有几乎相同的表示，且有增加的缩放因子：

$$\mathbf{R} \in \mathrm{SO}(3), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3, s \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{T} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & s^{-1} \end{array}\right) \in \mathrm{Sim}(3)$$

其李代数 $\mathfrak{sim}(3)$ 的生成元与 $\mathfrak{se}(3)$ 的生成元相似，只增加了一个对应于缩放变化的生成元：

$$G_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

在 $\mathfrak{sim}(3)$ 中的一个元素由生成元的倍数表示：

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\rho} \\ \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^7$$

$$\phi_x G_1 + \phi_y G_2 + \phi_z G_3 + \rho_x G_4 + \rho_y G_5 + \rho_z G_6 + \lambda G_7 \in \mathfrak{sim}(3)$$

将 $\boldsymbol{\delta}^\wedge$ 代入指数映射函数 $\exp(\,)$ 就得到相似性变换矩阵 $\mathbf{T}$，切空间中的元素就进入 Sim(3) 流形中

$$\begin{aligned}
\exp\left(\boldsymbol{\delta}^\wedge\right) &= \exp\left(\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\phi}^\wedge & \boldsymbol{\rho} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & -\lambda \end{array}\right]\right) \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \exp\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right) & \mathbf{V}\boldsymbol{\rho} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \exp(-\lambda) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & s^{-1} \end{array}\right] \\
&= \mathbf{T}
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{V}$ 矩阵和 Sim(3) 的版本有些相似，但现在旋转、平移和缩放被无限交错。指数的旋转分量和缩放分量很明显，但平移分量包含了这三者的混合。这个 $\mathbf{V}$ 矩阵太复杂，这里就不抄书了。可以查看参考文献 [2] 了解推导过程及结果。

相似性变换矩阵 $\mathbf{T}$ 的幺元同样为单位矩阵 $\mathbf{I}$，由此计算逆矩阵为

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & s^{-1} \end{array}\right] \\
\mathbf{T}^{-1} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}^{\mathrm{T}} & -s\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & s \end{array}\right]
\end{aligned}$$

相似性变换矩阵 $\mathbf{T}$ 通过乘法组合

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_1 & \mathbf{t}_1 \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & s_1^{-1} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_2 & \mathbf{t}_2 \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & s_2^{-1} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_1\mathbf{t}_2 + s_2^{-1}\mathbf{t}_1 \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \left(s_1 \cdot s_2\right)^{-1} \end{array}\right]
\end{aligned}$$

在三维上的点的群操作也通过 s 编码缩放：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ w \end{bmatrix}, \quad (\lambda\mathbf{x} \simeq \mathbf{x} \forall \lambda \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & s^{-1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}\boldsymbol{\rho} + w\mathbf{t} \\ s^{-1} w \end{bmatrix} \\ &\simeq \begin{bmatrix} s\left(\mathbf{R}\boldsymbol{\rho} + w\mathbf{t}\right) \\ w \end{bmatrix} \end{aligned}$$

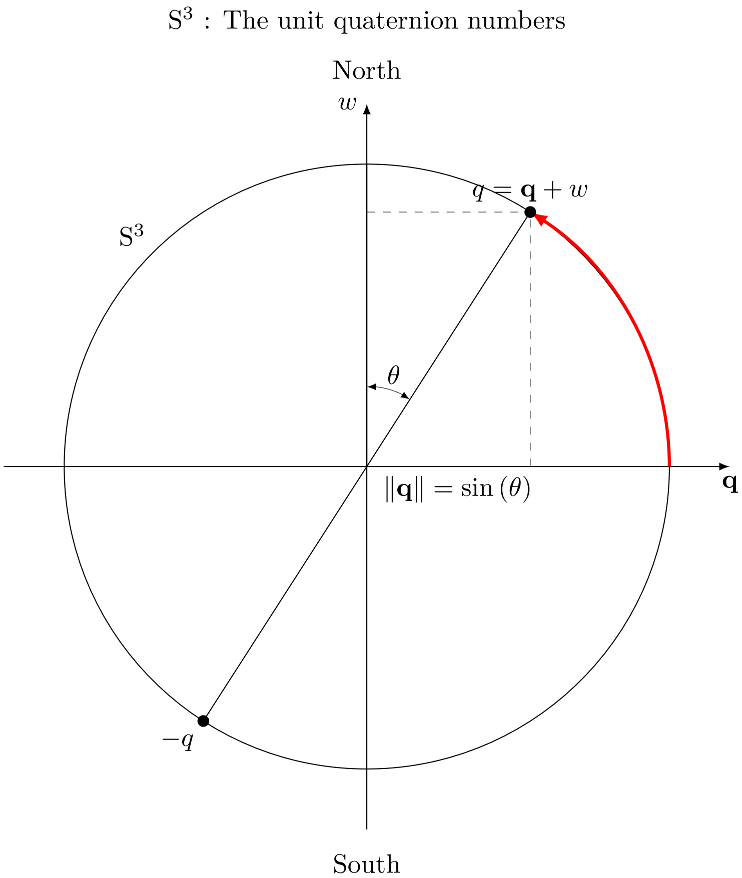
在 $w = 1$ 的典型情况下，这对应于刚性变换，跟随有缩放。

8 小结

单位四元数 q

$$\begin{aligned} q &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + w \\ &= \mathbf{q} + w \end{aligned}$$

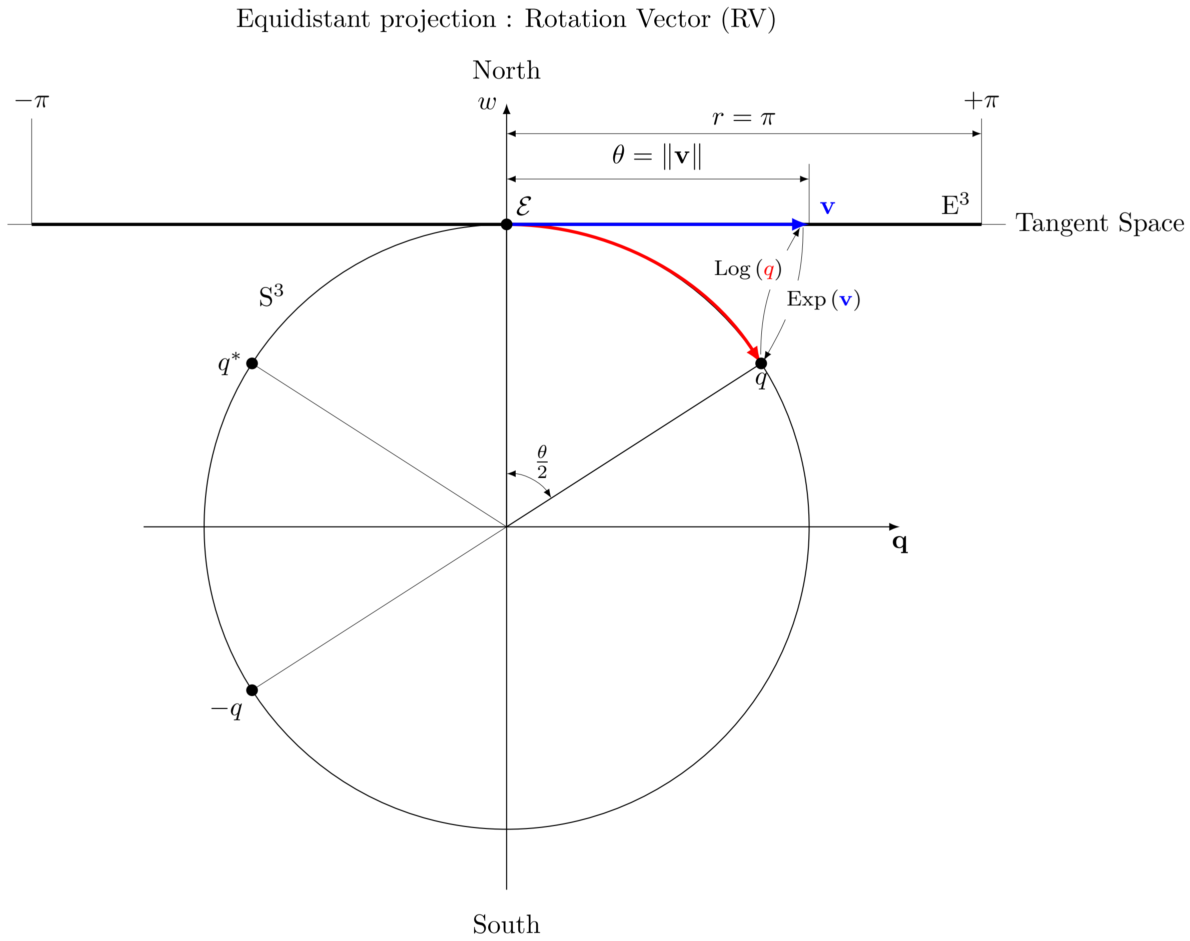
可以表示三维空间的姿态。但是单位四元数 q 要想用图形表示出来，也是一个困难的事情，因为单位四元数 q 所在的球面是嵌入 $\mathbb{R}^4$ 空间中的 S^3 球面。所以有一种方法是用类似复平面的方式表示(fig2d-30.pdf)：



其中，实数轴 w 做为南北轴。因为单位四元数 q 表示旋转是两倍覆盖，所以一般选择 $w \geq 0$ 的北半球表示一个三维旋转。另外，图中的角度 θ 代表的是

$$\tan(\theta) = \frac{\|\mathbf{q}\|}{w}$$

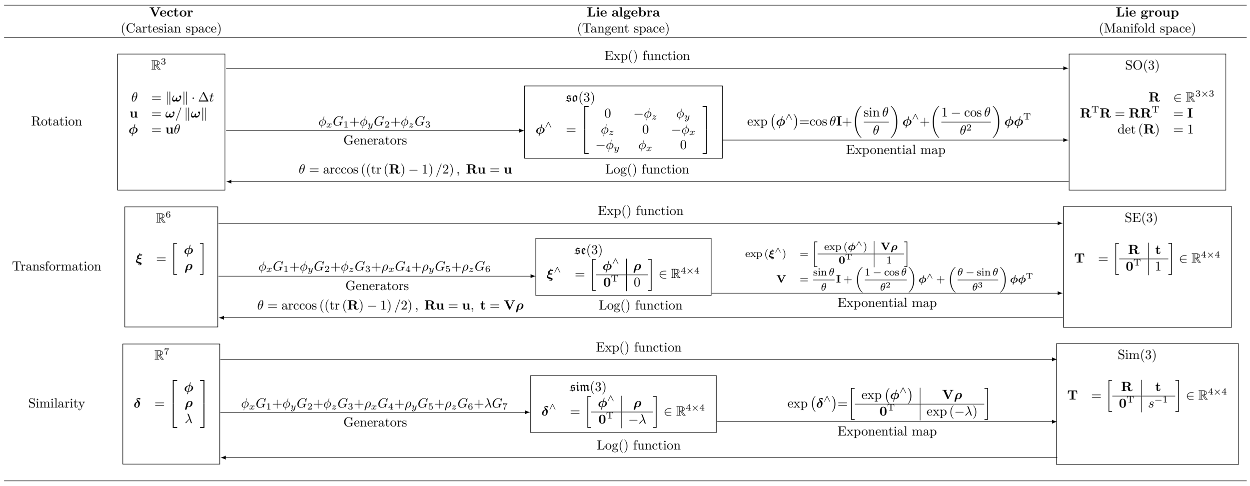
将旋转向量 (Rotation Vector, RV) 代入指数映射函数 $\mathrm{Exp}\,(\,)$ 就将其收回 (retraction) 到流形中。这种映射属于等距投影 (Equidistant)，E^3 空间位于幺元 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 处。注意，在四元数版本中使用的是半角 $\boldsymbol{\theta}/2$，但为了绘图方便，下图将 E^3 空间缩小了 1/2 的大小 (fig2d-31.pdf)



相应的，将流形中的元素代入对数映射函数 Log ( ) 就将其展开 (unwrap) 到 E^3 空间中。注意，这个在幺元 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ 处建立的局部切空间是一个三维空间，在旋转向量空间中，所有旋转都可以映射到半径为 π 的球体的内部和表面上的点，其中直径两端的点表示相同的旋转；虽然姿态在流形上是平滑变化，但旋转向量可以从直径的一端跳到另一端。

在实现指数映射函数 Exp ( ) 时，要注意，当旋转角度 $\theta = \|\boldsymbol{\phi}\| \to 0$ 时，在上图的幺元附近，会有数值不稳定的情况，当 $\theta = \|\boldsymbol{\phi}\| \to 2\pi$ 时，在上图的赤道附近，会有姿态跳跃的情况，表现为无人机在 yaw 的抖动中突然旋转 360°。

在流形上的当前位姿点上可以同时存在 3 个三维空间，第一个局部笛卡尔空间，第二个是局部切空间，第三个是三维流形空间。各空间中的元素之间的变换算法见下图 (Rodrigues-01.pdf)：



更多的信息，参见参考文献 [3] 中总结的表格 (Rodrigues-02.pdf)：

						Tangent space		Exponential map		
						Lie algebra	Cartesian			
Lie group $\mathcal{M},\circ$		size	dim	$\mathcal{X} \in \mathcal{M}$	Constraint	$\boldsymbol{\tau}^\wedge \in \mathfrak{m}$	$\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^m$	$\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau})$	Comp.	Action
n-D vector	$\mathbb{R}^n,+$	n	n	$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{v}-\mathbf{v}=\mathbf{0}$	$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{v}=\exp(\mathbf{v})$	$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}+\mathbf{x}$
circle	$S^1,\cdot$	2	1	$\mathbf{z} \in \mathbb{C}$	$\mathbf{z}*\mathbf{z}=1$	$i\theta \in i\mathbb{R}$	$\theta \in \mathbb{R}$	$\mathbf{z}=\exp(i\theta)$	$\mathbf{z}_1\,\mathbf{z}_2$	$\mathbf{z}\,\mathbf{x}$
Rotation	$SO(2),\cdot$	4	1	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}^\top\mathbf{R}=\mathbf{I}$	$[\theta]_\times \in \mathfrak{so}(2)$	$\theta \in \mathbb{R}$	$\mathbf{R}=\exp([\theta]_\times)$	$\mathbf{R}_1\,\mathbf{R}_2$	$\mathbf{R}\,\mathbf{x}$
Rigid motion	$SE(2),\cdot$	9	3	$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{t}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	$\mathbf{R}^\top\mathbf{R}=\mathbf{I}$	$\begin{bmatrix}[\theta]_\times & \boldsymbol{\rho}\\ 0 & 0\end{bmatrix} \in \mathfrak{se}(2)$	$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho}\\ \theta\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$	$\exp\left(\begin{bmatrix}[\theta]_\times & \boldsymbol{\rho}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)$	$\mathbf{M}_1\,\mathbf{M}_2$	$\mathbf{R}\,\mathbf{x}+\mathbf{t}$
3-sphere	$S^3,\cdot$	4	3	$\mathbf{q} \in \mathbb{H}$	$\mathbf{q}^*\mathbf{q}=1$	$\boldsymbol{\theta}/2 \in \mathbb{H}_p$	$\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$	$\mathbf{q}=\exp(\mathbf{u}\theta/2)$	$\mathbf{q}_1\,\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}\,\mathbf{x}\,\mathbf{q}^*$
Rotation	$SO(3),\cdot$	9	3	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}^\top\mathbf{R}=\mathbf{I}$	$[\boldsymbol{\theta}]_\times \in \mathfrak{so}(3)$	$\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$	$\mathbf{R}=\exp([\boldsymbol{\theta}]_\times)$	$\mathbf{R}_1\,\mathbf{R}_2$	$\mathbf{R}\,\mathbf{x}$
Rigid motion	$SE(3),\cdot$	16	6	$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{t}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	$\mathbf{R}^\top\mathbf{R}=\mathbf{I}$	$\begin{bmatrix}[\boldsymbol{\theta}]_\times & \boldsymbol{\rho}\\ 0 & 0\end{bmatrix} \in \mathfrak{se}(3)$	$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho}\\ \boldsymbol{\theta}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$	$\exp\left(\begin{bmatrix}[\boldsymbol{\theta}]_\times & \boldsymbol{\rho}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)$	$\mathbf{M}_1\,\mathbf{M}_2$	$\mathbf{R}\,\mathbf{x}+\mathbf{t}$

9 参考文献列表

1. Rodrigues' rotation formula

2. Lie Groups for 2D and 3D Transformations

3. A micro Lie theory for state estimation in robotics

4.《视觉 SLAM 十四讲》—第 3/4 讲