测试点到椭球体中心的距离

提问与回答

Mar 16, 2018

1 提问

我正在努力学习马哈拉诺比斯距离，我已经很接近于了解这个概念了。我已经了解到，这个距离与椭球体的特性有很大关系。到目前为止，我了解到：

马哈拉诺比斯距离是测试点 $\mathbf{x}$ 到质心 $\mathbf{y}$ 的距离除以测试点方向上椭球体的宽度，并通过以下公式给出：

$$D(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^T C^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}$$

现在我的问题是："为什么这个公式给我们一个点 $\mathbf{x}$ 到质心 $\mathbf{y}$ 的距离除以测试点方向上椭体球的宽度?"

我不明白或看不出这个公式是如何描述这个距离的有人能帮我解释一下这个距离吗? 在测试点方向上，一个点 $\mathbf{x}$ 与椭球体质心 $\mathbf{y}$ 的平面距离是如何确定的? 为什么?

我希望我的问题足够清楚。我的问题可以类似于"为什么 $c^2 = a^2 + b^2$"，然后你可以用几何证明或其他东西向我证明这一点。

又及，C 是向量 $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ 的协方差矩阵。

2 回答

我想介绍一个几何示例来确定符号，然后转到马哈洛诺比斯距离 (相当非正式) 分析。

- 在 $\mathbb{R}^3$ 中的椭球体：一个简单的例子。让我们介绍以 $y \in \mathbb{R}^3$ 为中心的椭球体的几何定义，即满足以下条件的点 $x \in \mathbb{R}^3$ 的轨迹

  $$\langle (x-y), A^{-1}(x-y)\rangle = 1.$$

  这里 A 是任意正定矩阵。例如，如果 $A = diag\{a^2, b^2, c^2\}$，$x = (x_1, x_2, x_3)$，并且 $y = (y_1, y_2, y_3)$，那么我们要寻找的椭球体是

  $$\frac{(x_1-y_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2-y_2)^2}{b^2} + \frac{(x_3-y_3)^2}{c^2} = 1.$$

  参数 a 控制沿第一轴的中心 y 和点 x 之间的距离；类似的考虑也适用于 b 和 c。比率 a/b、b/c 和 a/c 决定给定椭球体的"形状"（"扁形"、"长形"）。

- 椭球体与 $\mathbb{R}^n$ 中的马哈洛诺比斯距离。马哈洛诺比斯距离

  $$D(x,y) = \sqrt{\langle (x-y), C^{-1}(x-y)\rangle}$$

给出了，根据定义，所给定多元随机过程 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 的实现，在向量 x 和 y 之间的距离。C 是协方差矩阵的 (估计值)。查看几何椭圆体的公式，你可以确定在 $D(x, y)$ 中的随机向量 y，对于某些 $d > 0$ 的情况，椭球体的中心由 $D(x, y) = d$ 定义。准确地说，你应该通过将协方差矩阵的逆 C^{-1} 除以 d^2 得到 $D(x, y) = 1$。

- 对于第二个问题。“马哈洛诺比斯距离就是测试点到质心的距离除以测试点方向上椭球体的宽度。”这句话可以通过简单的解释来理解。让我们保持上述设定：x 是多元随机过程 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 的实现的随机向量。让我们引入标准化变量的向量 $s = (s_1, \ldots, s_n)$

  $$s_i := \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i},$$

  标识为用 μ_i 表示第 i 个随机过程 X_i 的实现的均值，用 σ_i 表示其方差。让我们考虑考虑一个向量 x 与中心 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ 的马哈拉诺比斯距离，即

  $$D(x, \mu) = \sqrt{\langle (x - \mu), C^{-1}(x - \mu) \rangle},$$

  其中协方差矩阵是对角矩阵 $C = \{\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2\}$。则通过

  $$D(x, \mu) = \sqrt{\langle s, s \rangle},$$

  构造。在上述几何示例中，$C = \{\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2\}$ 中的方差 σ_i 控制沿第 i 轴的马哈洛诺比斯距离定义的椭球体的“形状”(或宽度)。