空间 (6D) 向量简介

Dr. Roy Featherstone

16/05/22

空间 (6D) 向量及其在机器人动力学中的应用。

1 什么是空间向量?

空间向量是一个 6D 向量，它提供了刚体运动状态或作用在其上的动力的完整描述，就像欧几里德向量提供了粒子运动状态或作用在其上的动力的完整描述一样。

$$\begin{array}{lcl} \text{Euclidean vector} & \rightarrow & \text{particle dynamics} \\ \text{spatial vector} & \rightarrow & \text{rigid-body dynamics} \end{array}$$

特别是，空间向量将刚体运动或动力的线性和角度方面组合为单个量。
例如

粒子运动的方程	刚体运动的方程
$\boldsymbol{f} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{f} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{h}$
这里的 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{h}$ 是欧氏向量	这里的 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{h}$ 是空间向量

在这两种情况下，动力是动量的变化率；但这两个方程使用不同类型的向量。
本课程的目的是解释空间向量是如何工作的，以及如何使用它们。

2 为什么空间向量有用?

它们为描述、分析和计算单个刚体和刚体系统的运动学和动力学提供了简明的符号。

- 更少的数量
- 更少的方程
- 更少的工作
- 更少的错误

3 本课程涵盖的内容

- 向量和向量场
- 运动和动力

- Plücker 坐标和坐标变换
- 微分和加速度
- 动量、惯量和运动方程
- 运动约束：达朗贝尔/乔丹原理
- 机器人动力学示例

第一部分　向量与向量场

4　向量与向量空间

- 根据定义，**向量** (*vector*) 是**向量空间** (*vector space*) 的元素。
- 根据定义，**向量空间** (*vector space*) 是由一个阿贝尔群 G、一个域 K 和一个映射 $G \times K \to G$ 的二元算子组成的数学结构。
- G 的元素称为**向量** (*vectors*)，K 的元素称为**标量** (*scalars*)。
- 虽然定义允许 K 是任意域，但我们将只使用实数域 R。所以“标量”总是指“实数”。
- 该群算子实现**向量加法** (*vector addition*)。
- 所以该群幺元是零向量，$\mathbf{0}$，向量 $\boldsymbol{a}$ 的逆是 $-\boldsymbol{a}$。
- 二元算子实现**标量乘法** (*scalar multiplication*)，并且需要在群算子上可分配。所以

$$\left.\begin{aligned} (\alpha+\beta)\,\boldsymbol{a} &= \alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a} \\ \alpha\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b} \end{aligned}\right\} \forall\alpha,\beta\in\mathsf{R},\ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in G$$

- 加法和标量乘法必须是在所有向量上定义的仅有的两种运算。

5　向量类型

大多数向量都有额外的属性，这些属性会产生特定类型的向量。例如：

类型	特殊属性
坐标向量	坐标
欧氏向量	幅值和方向
空间向量	两个幅值和一条有向线

注释：一些教科书将向量定义为 R^n 的元素，但这里是坐标向量的定义，而不是一般意义的向量。

6 欧几里德向量 (修订)

- 欧几里德向量可以用箭头图形表示。箭头的长度和方向表示向量的幅值和方向。
- 向量加法遵循平行四边形规则。
- **标量积** (*scalar product*, 称为“点积”) 在欧几里德向量上定义如下：

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos(\theta)$$

  其中 $|\boldsymbol{a}|$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 的幅值。

- 所以 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$，如果 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 或者 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ 或者 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 呈直角 (即，它们相互正交 (*orthogonal*))，并且
- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$ (所以 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$)。
- 标量积是对称的 ($\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$) 和**双线性** (*bilinear*) 的，这意味着它在每个参数中都是线性的。所以

$$(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \beta\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathsf{R},\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in G$$

  对于 $\boldsymbol{a} \cdot (\beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c})$ 也是如此。

- 像 $\alpha\beta\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 这样的表达式中不需要括号，因为

$$(\alpha\beta)(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (\alpha\beta\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \alpha(\beta\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = (\alpha\boldsymbol{a}) \cdot (\beta\boldsymbol{b})$$

  如此等等。

- 如果 $\boldsymbol{b}$ 是**单位向量** (*unit vector*, 即 $|\boldsymbol{b}| = 1$), 则 $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的**分量** (*component*), 并且 $\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交的分量。
- 这两个分量的幅值分别为 $|\boldsymbol{a}| \cos(\theta)$ 和 $|\boldsymbol{a}| \sin(\theta)$。
- **向量积** (*vector product*, 称为“叉积”) 在三维欧几里德向量上定义如下：

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$
$$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin(\theta)$$

- $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都成直角，并且它指向这样的方向，即 $\boldsymbol{a}$ 围绕 $\boldsymbol{c}$ 的正旋转 (在右手规则的意义上) 使其更靠近 $\boldsymbol{b}$。
- 向量积是双线性的，所以

$$(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \beta\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$$

  如此等等。

- 但是，它不是对称的 ($\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$)，也不是可结合的：

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

- 按照惯例，像 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ 这样的表达式被解释为 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ (即括号在右边成组，这与减法的惯例相反：$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{c}$)。
- 一些更有用的公式：

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| &\geq |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| && \text{(triangle inequality)} \\
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} && \text{(so-called 'triple product')} \\
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} &= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c} \\
|\boldsymbol{R}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{b}| &= |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| && \text{(rotation preserves distance)}
\end{aligned}
$$

- 当使用坐标向量 (在笛卡尔坐标中) 时，我们也有 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$，并且 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 是 3×3 矩阵 $\boldsymbol{a}\times$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的乘积。

$$
\text{If} \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{then} \quad \boldsymbol{a}\times = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}
$$

- $\boldsymbol{a}\times$ 的一些属性：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times &= -\boldsymbol{a}\times^{\mathrm{T}} && \text{(skew symetry)} \\
(\lambda \boldsymbol{a}) \times &= \lambda\, (\boldsymbol{a}\times) \\
(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times &= \boldsymbol{a} \times\, + \boldsymbol{b}\times \\
(\boldsymbol{E}\boldsymbol{a}) \times &= \boldsymbol{E}\, \boldsymbol{a} \times\, \boldsymbol{E}^{-1} && \text{(where } \boldsymbol{E} \text{ is } 3 \times 3 \text{ orthogonal)} \\
\boldsymbol{R}\, (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{R}\boldsymbol{b}) && \text{(rotation preserves orientation)} \\
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\times &= \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{1}_{3\times 3} \\
(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times &= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \times - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}\times \\
&= \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

- 注释：
  - $\boldsymbol{a}\times$ 存在替代符号，例如 $\tilde{\boldsymbol{a}}$。
  - $\boldsymbol{a}\times$ 中的 $\times$ 与 “$\boldsymbol{a}$” 紧密结合，因此像 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ 这样的表达式意味着 $(\boldsymbol{a}\times)\, (\boldsymbol{b}\times)\, \boldsymbol{c}$，这与前面的 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ 是一样的。
- 一个工作实例：

  证明.

$$
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}
$$

  解：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} &= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{c} \\
&= (-\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{c} \\
&= -\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b} \times^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{c} \\
&= \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b} \times\, \boldsymbol{c} \\
&= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}
\end{aligned}
$$

$\square$

提示：无论你认为 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的叉积，还是 $\boldsymbol{a}\times$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的乘积，都没有区别。两者是等价的。

7 基向量与坐标 (修订)

设 U 是 n 维向量空间，$B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m\} \subset U$ 是 U 中 m 个向量的集合，$m \leq n$。

- 如果方程 $\sum_{i=1}^{m} \beta_i \boldsymbol{b}_i = \mathbf{0}$ 的唯一解是 $\beta_i = 0$，则称一组向量 $\boldsymbol{b}_i$ 为**线性无关** (*linearly independent*) 的。
- 如果 B 中的向量是线性独立的，那么 B 就张成 (span) U 的一个 m 维子空间 (表示为 $\operatorname{span}(B)$)，并在其上形成一个**基** (*basis*)。
- 在这种情况下，任意向量 $\boldsymbol{a} \in \operatorname{span}(B)$ 都可以唯一地表示为 B 元素的线性组合：

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{b}_i$$

并且标量 a_i 是 $\boldsymbol{a}$ 在基 B 中的**坐标** (*coordinates*)。

所以基 B 定义了 $\operatorname{span}(B)$ 上的**坐标系统** (*coordinate system*)，我们称之为 B 坐标。任意向量 $\boldsymbol{a} \in \operatorname{span}(B)$ 都可以用坐标向量在 B 坐标中表示

$$\underline{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathsf{R}^m$$

- 观察**坐标向量** (*coordinate vector*) $\underline{\boldsymbol{a}} \in \mathsf{R}^m$ (实数列表) 和它所代表的向量 $\boldsymbol{a} \in U$ (几乎) 可以是任意东西：动力、速度...

$$\underline{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad \text{but} \quad \boldsymbol{a} = \textstyle\sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{b}_i \in \operatorname{span}(B) \subseteq U$$

注释：如果 $m = n$ 则 $\operatorname{span}(B) = U$。

- 所有 3 个示例中的欧几里德向量 $\boldsymbol{a}$ 相同，但坐标向量 $\underline{\boldsymbol{a}}$ 随基向量的选择而变化。
- 如果 U 是欧几里德向量，则可以定义具有以下特性的基 (basis)：

$$\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

具有此属性的基称为**正交基** (*orthonormal basis*)，并且它生成**笛卡尔坐标系统** (*Cartesian coordinate system*)。

- 如果 B 是正交的，则在 B 中的 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为

$$a_i = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{a}$$

- 如果坐标向量 $\underline{\boldsymbol{a}}$ 和 $\underline{\boldsymbol{c}}$ 表示同一笛卡尔坐标系统中的欧几里德向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$，则

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = \underline{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}} \underline{\boldsymbol{c}}$$

在三维空间中，我们使用**笛卡尔帧** (*Cartesian frame*) 定义笛卡尔坐标系统。
该帧定义原点 O 和三个方向 x、y 和 z。
它还定义了分别位于 x、y 和 z 轴上的三条有向线 Ox、Oy 和 Oz。我们稍后将使用它们。
笛卡尔坐标可用于定义

- 点的**位置** (*position*)，或者
- 欧几里德向量的**幅值** (*magnitude*) 和**方向** (*direction*)

为了实现后者，我们引入一个正交基 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$，与该帧的 x，y 和 z 轴方向对齐。

$$\underline{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \in \mathsf{R}^3 \qquad \boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k} \in \mathsf{E}^3$$

8 向量与向量场习题 A

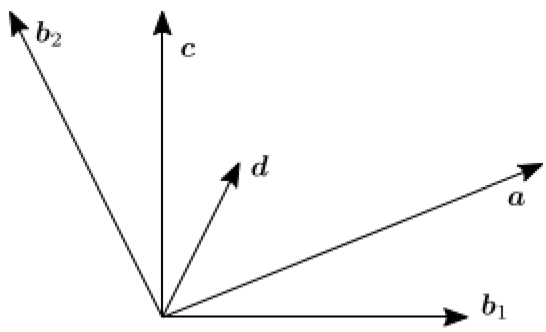


Figure 1

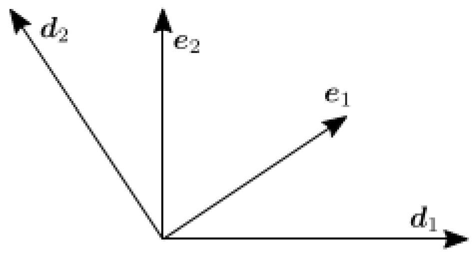


Figure 2

8.1 习题 A1

试证明，如果 B 是正交的，则在 B 中的 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为

$$a_i = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{a}$$

证明. 因为 $\boldsymbol{a} = \sum_{j=1}^{n} a_j \boldsymbol{b}_j$，所以 $\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{a} = \sum_{j=1}^{n} a_j (\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j)$；但是当 $i \neq j$ 时，$\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 0$，并且 $\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_i = 1$，所以 $\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{a} = a_i$。

□

8.2 习题 A2

根据前面叉积的定义以及三个基向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 的定义，计算出这三个向量的完整乘法表。

$$\begin{array}{cc|ccc} & & & \text{2nd} & \\ & & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \hline & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k} & -\boldsymbol{j} \\ \text{1st} & \boldsymbol{j} & -\boldsymbol{k} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{i} \\ & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{j} & -\boldsymbol{i} & \boldsymbol{0} \end{array}$$

8.3 习题 A3

试证明，前面所提出的 $\boldsymbol{a}\times$ 算子的一个属性：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times=\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\mathbf{1}_{3\times3}$。

证明. 从前面的公式 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$ 开始，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}\\&=\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\mathbf{1}_{3\times3}\boldsymbol{c}\\&=\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\mathbf{1}_{3\times3}\boldsymbol{c}\\&=\left(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\mathbf{1}_{3\times3}\right)\boldsymbol{c};\end{aligned}$$

但这对所有的 $\boldsymbol{c}$ 必须为真，这意味着 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times=\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\mathbf{1}_{3\times3}$。

□

8.4 习题 A4

参考图 1，在由基 $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\}$ 定义的坐标系统中，欧几里德向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 的坐标是什么？

答：$\underline{\boldsymbol{a}}=[1.5,0.5]^{\mathrm{T}}$，$\underline{\boldsymbol{c}}=[0.5,1.0]^{\mathrm{T}}$，以及 $\underline{\boldsymbol{d}}=[0.5,0.5]^{\mathrm{T}}$。

8.5 习题 A5

图 2 显示了对偶坐标系统的基向量，它是笛卡尔坐标系统的一种替代方法。对偶坐标系统使用两个基：在这种情况下，$\{\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2\}$ 和 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$，我们将分别称之为 D 和 E。基向量必须满足

$$\boldsymbol{d}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\begin{cases}1 & \text{if } i=j\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

如果 $\boldsymbol{d}_1$ 和 $\boldsymbol{d}_2$ 具有坐标分别为 $[1.25,0]^{\mathrm{T}}$ 和 $[-0.6,1]^{\mathrm{T}}$，则计算出 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 的坐标。

答：$\boldsymbol{e}_1=[0.8,0.48]^{\mathrm{T}}$ 并且 $\boldsymbol{e}_2=[0,1]^{\mathrm{T}}$。

我们很快就会遇到对偶坐标，因为它们是空间 (和平面) 向量所使用的坐标。每当标量不变量 (如能量或功率) 是两种 (物理上) 不同类型的向量 (如速度和动力) 之间的标量积的结果时，就会出现对偶坐标。对偶坐标的使用保持了标量积的不变性。

9 向量场

向量场是将欧几里德 (点) 空间中的每个点映射到该点的欧几里德向量的函数。实际上，它将幅值和方向与该空间中的每个点相关联。向量场可以描述各种物理现象，例如：

- 力场 (重力场、磁场等等)
- 流体流动
- 刚体的速度

注释：**欧几里德空间** (*Euclidean space*) 是一组具有欧几里德距离度量的点。**欧几里德向量空间** (*Euclidean vector space*) 是欧几里德向量的空间。物理空间是欧几里德空间。

向量场可以图形化地显示为从代表性点样本发出的箭头集合。

箭头的长度和方向显示向量的幅值和方向。

向量场本身就是向量，因为它满足形式定义。向量场上的两个基本操作是：

- 加法：
$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2 \quad \text{iff} \quad \boldsymbol{V}(P) = \boldsymbol{V}_1(P) + \boldsymbol{V}_2(P) \quad \text{for all} \quad P$$
- 标量乘法：
$$\boldsymbol{V} = \alpha \boldsymbol{V}_1 \quad \text{iff} \quad \boldsymbol{V}(P) = \alpha \boldsymbol{V}_1(P) \quad \text{for all} \quad P$$

10 机体固连点

机体固连点 (*body-fixed point*) 是相对于刚体的固定位置上的一个点。

当机体移动时，该点也随之移动。

如果我们把整个空间想象成充满了机体固连点，那么机体的运动就定义了一个**向量场** (*vector field*)。

11 速度向量场

特别的是，机体速度定义了一个**速度向量场** (*velocity vector field*)，对于空间中的每一个点，规定了通过它的机体固连点的线速度。

该场提供了对机体的速度的完整描述，其方式与机体是否在平移、旋转或两者都有都无关。

它描述**任意**刚体的速度。速度向量场就是空间速度 (Spatial Velocity)。

描述刚性体在三维空间中运动的每一种可能的速度的向量场的集合形成了一个 **6D 向量空间** (*6D vector space*)。这个空间的元素是**空间速度向量** (*spatial velocity vectors*)。

(如果机体的运动被限制在一个二维平面，那么我们得到一个三维向量空间，其元素是**平面速度向量** (*planar velocity vectors*))。

12 平面速度示例

如果刚体被约束在平面中移动，则它只能具有两种类型的速度：

- 纯平移，或
- 围绕点旋转。

它们一起构成了平面速度向量场的三维空间。

现在让我们在此空间上定义一个基 (basis) . . .

如果我们在平面的任意位置放置笛卡尔帧，则我们可以使用它来定义以下三个基向量：

- $\boldsymbol{d}_O$ 围绕原点的单位旋转
- $\boldsymbol{d}_x$ 在 x 方向上的单位平移
- $\boldsymbol{d}_y$ 在 y 方向上的单位平移

假设一个刚体以角速度 ω 围绕一个点 P 旋转，该点在我们选择的坐标系统中具有坐标 P_x 和 P_y。

我们如何在 $\{\boldsymbol{d}_O, \boldsymbol{d}_x, \boldsymbol{d}_y\}$ 的基上找到这个速度的坐标?

1. 步骤 1：计算机体固连点在原点的线速度：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_O &= \omega P_y \boldsymbol{i} - \omega P_x \boldsymbol{j} \\ &= \boldsymbol{V}(O) \end{aligned}$$

   并且对应的坐标向量为

$$\underline{\boldsymbol{v}}_O = \begin{bmatrix} \omega P_y \\ -\omega P_x \end{bmatrix}$$

2. 步骤 2：机体的速度现在可以表示为围绕原点旋转幅值 ω 以及平移 $\boldsymbol{v}_O$ 的总和。这两个数量分别为 $\omega \boldsymbol{d}_O$ 和 $\omega P_y \boldsymbol{d}_x - \omega P_x \boldsymbol{d}_y$，因此刚体的平面速度为

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{v}} &= \omega \boldsymbol{d}_O + \omega P_y \boldsymbol{d}_x - \omega P_x \boldsymbol{d}_y && \text{(actual velocity)} \\ \underline{\hat{\boldsymbol{v}}} &= \begin{bmatrix} \omega \\ \omega P_y \\ -\omega P_x \end{bmatrix} && \text{(coordinate vector)} \end{aligned}$$

13 速度向量场的加法

在一个旋转中加入一个平移，使旋转中心向与平移成直角的方向移动。

rotation + translation = rotation about a different point

14 螺旋运动

刚体的最一般的运动是由沿空间的一条特定直线的平移和围绕该线的旋转组成的**螺旋运动** (*screwing motion*)。

(对这种运动的研究是**旋量理论** (*screw theory*) 的主题，它与空间向量代数密切相关)。

因此，刚体的最一般的**速度** (*velocity*) 也是围绕空间中特定直线的螺旋运动。

在这种情况下，这条线被称为**瞬时旋量轴** (*instantaneous screw axis*, ISA)，速度向量场是**螺旋形的** (*helicoidal*)。

(在旋量理论中，这种运动被称为**运动旋量速度** (*twist velocity*)，或简称为**运动旋量** (*twist*)。)

机体的速度现在可以用两个数字和一条线来描述：

- **线速度** (*linear velocity*) 幅值
- **角速度** (*angular velocity*) 幅值
- 瞬时旋量轴

(在旋量理论中，这两个幅值的比率称为**旋距** (*pitch*)。)

观察**粒子** (*particle*) 速度和**刚体** (*rigid body*) 速度之间的差异。

- **粒子** (*particle*)：幅值和方向 (3D 欧几里德向量)
- **刚体** (*rigid body*)：两个幅值和一条线 (6D 空间向量)

15 坐标

我们现在有两种方法来描述刚体速度：

- 1、向量场，或
- 2、两个数字和一条线。

然而，所有速度都是向量空间的元素，因此我们还有第三种方法：

- 3、六个基向量的线性组合。

在这种情况下，速度由基向量定义的坐标系统中的 6D 坐标向量描述。

基最有用的内容包括：

- 围绕笛卡尔帧的 x、y 和 z 轴旋转三个单位，加上
- 同一帧的 x、y 和 z 方向上的三个单位平移。

这被称为 **Plücker 基** (*Plücker basis*)，它产生了 **Plücker 坐标系统** (*Plücker coordinate system*)，我们将在后面详细讨论。

16 总结

我们现在介绍了以下内容：

- 向量、基准和坐标的修订；
- 向量场；
- 将刚体速度视为向量场，以平面内速度为例；
- 在 3D 中的一般螺旋运动；
- Plücker 坐标预览。

17 向量与向量场习题 B

17.1 习题 B1

用文字描述以下的平面速度场

1. $\boldsymbol{d}_O + \boldsymbol{d}_x$，围绕点 $(0, 1)$ 的单位幅值旋转。

2. $2\boldsymbol{d}_O + \boldsymbol{d}_y$，围绕点 $(-0.5, 0)$ 的 2 幅值旋转。以及

3. $\boldsymbol{d}_x + 2\boldsymbol{d}_y$，以 $\theta = \tan^{-1}(2)$ 的角度沿 x 轴进行 $\sqrt{5}$ 幅值的平移。

17.2 习题 B2

假设 $\boldsymbol{V}$ 是向量场 $\omega\boldsymbol{d}_O + r\omega\boldsymbol{d}_x$。找到欧几里德向量 $\boldsymbol{V}(P)$ 的表达式。

回答这个问题的一种方法是求出由 $\omega\boldsymbol{d}_O$ 引起的在 P 处的速度和由 $r\omega\boldsymbol{d}_x$ 引起的速度，并将它们相加。围绕原点的 ω 幅值旋转在 $P = (P_x, P_y)$ 处产生的速度为 $\omega(-P_y\boldsymbol{i} + P_x\boldsymbol{j})$。(这是一个需要记住的有用事实。) 而由 $r\omega\boldsymbol{d}_x$ 产生的速度是 $r\omega\boldsymbol{i}$，所以这个问题的答案是

$$\boldsymbol{V}(P) = \omega\left((r - P_y)\,\boldsymbol{i} + P_x\boldsymbol{j}\right).$$

(注意：你可以从这个答案中看出，速度场是围绕点 $(0, r)$ 的旋转，因为这一点的速度是零。)

17.3 习题 B3

假设 $\boldsymbol{V}_1$ 是围绕原点 (在二维平面中) 的单位旋转，$\boldsymbol{V}_2$ 是围绕点 $(1, 0)$ 的单位旋转。对以下向量场你能说些什么？

1. 向量场 $\boldsymbol{V} = \alpha\boldsymbol{V}_1 + (1 - \alpha)\,\boldsymbol{V}_2$

2. 向量场 $\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2$

答：我们可以从它们的描述中推断 $\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{d}_O$ 和 $\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{d}_O - \boldsymbol{d}_y$。所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V} &= \alpha\boldsymbol{d}_O + (1 - \alpha)\,(\boldsymbol{d}_O - \boldsymbol{d}_y) \\ &= \boldsymbol{d}_O - (1 - \alpha)\,\boldsymbol{d}_y.\end{aligned}$$

并且 $\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2$ 就是 $\boldsymbol{d}_y$。我们可以这样说：

1. 它是一个围绕点 $(1 - \alpha, 0)$ 的单位旋转。

2. 它是一个在 y 方向的纯平移。

在 (1) 项的情况下，观察到旋转中心位于通过两个给定旋转中心的直线上。在 (2) 项的情况下，我们是将两个相等且相反的旋转求和 $(\boldsymbol{V}_1 + (-\boldsymbol{V}_2))$，所以总和的旋转分量为零，只剩下一个垂直于连接两个旋转中心的直线的平移。

这个结果可推广到平面上的两个任意旋转：给定任意两个旋转量，$\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$，围绕任意两个旋转中心，向量场 $\boldsymbol{V} = \alpha\boldsymbol{V}_1 + \beta\boldsymbol{V}_2$ 要么是围绕通过两个给定旋转中心的直线上的一个点旋转，或者是垂直于该直线的平移。如果 $\boldsymbol{V}$ 的旋转分量的幅值为零，则后者适用。

事实上，这个结果也可推广到 3D：给定 3D 空间中围绕平行轴的任意两个旋转，这两个旋转的任意线性组合要么是围绕平行于给定轴且位于同一平面上的轴的旋转，或者是垂直于包含给定轴的平面的平移。

第二部分　运动与动力

18　旋转

- 3D 中的旋转是围绕空间中的直线 (即旋转轴) 的旋转运动。
- 所以旋转速度有一个幅值和一条线。
- 角速度向量可以描述转动的速度和直线的方向，但不能描述其在空间中的位置。
- 后者可以通过识别直线上的任意一个点来指定。

设 $\boldsymbol{V}_Q$ 是由 $\boldsymbol{\omega}$ 和 Q 定义的速度向量场，其中点 Q 位于旋转轴上。机体固连点在任意位置 P 的线速度为

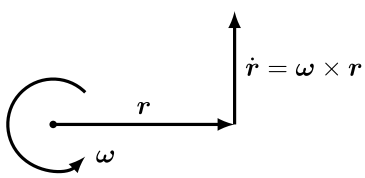
$$\boldsymbol{V}_Q\left(P\right) = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{QP} = \boldsymbol{v}_P$$

观察叉积在从旋转速度中计算线速度中的角色

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为固连在旋转机体中的向量。

3D vector cross product



现在引入一个原点为 O 的坐标帧和第二个速度场 $\boldsymbol{V}_O$，其幅值和方向与 $\boldsymbol{V}_Q$ 相同，但其旋转轴通过 O。

我们现在有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_O\left(P\right) &= \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP} \\
&= \boldsymbol{\omega} \times \left(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}\right) \\
&= \boldsymbol{V}_Q\left(P\right) + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OQ} \\
&= \boldsymbol{V}_Q\left(P\right) - \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{QO} \\
&= \boldsymbol{V}_Q\left(P\right) - \boldsymbol{V}_Q\left(O\right)
\end{aligned}$$

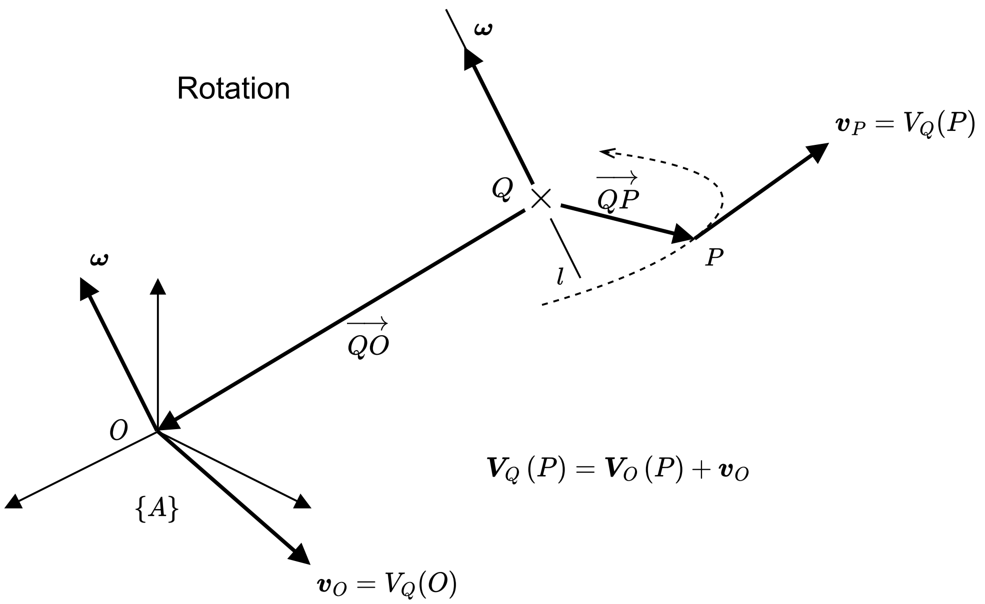
所以

$$\boldsymbol{V}_Q\left(P\right) = \boldsymbol{V}_O\left(P\right) + \boldsymbol{V}_Q\left(O\right)$$

一般规则：

$$\boldsymbol{V}_Q(P) = \boldsymbol{V}_O(P) + \boldsymbol{v}_O$$

空间中任意位置绕直线的旋转速度等于绕通过原点的直线的平行旋转速度与平移速度之和，平移速度等于原点处机体固连点的速度。



19 速度

刚体的速度可以用以下公式描述

1. 在机体中选择一个点 P
2. 指定该点的线速度 $\boldsymbol{v}_P$，以及
3. 指定机体整体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$

然后将机体视为以线速度 $\boldsymbol{v}_P$ 平移，同时以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 围绕通过 P 的轴旋转。

现在引入一个原点位于任意固连点 O 的坐标帧。

将 $\boldsymbol{v}_O$ 定义为当前时刻与 O 重合的机体固连点的速度

$$\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{v}_P + \overrightarrow{OP} \times \boldsymbol{\omega}$$

现在可以将机体视为以 $\boldsymbol{v}_O$ 的速度平移，同时以 $\boldsymbol{\omega}$ 的角速度围绕通过 O 的轴旋转。

现在引入指向 x、y 和 z 方向的单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$。

$\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{v}_O$ 现在可以用笛卡尔坐标表示：

$$\underbrace{\underline{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad \underline{\boldsymbol{v}}_O = \begin{bmatrix} v_{Ox} \\ v_{Oy} \\ v_{Oz} \end{bmatrix}}_{\text{coordinate vectors}} \quad \underbrace{\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j} + \omega_z \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{v}_O &= v_{Ox} \boldsymbol{i} + v_{Oy} \boldsymbol{j} + v_{Oz} \boldsymbol{k} \end{aligned}}_{\text{what they represent}}$$

机体的运动现在可以表示为六个基本运动的总和：

1. 在 x 方向上 v_{Ox} 的线速度
2. 在 y 方向上 v_{Oy} 的线速度
3. 在 z 方向上 v_{Oz} 的线速度
4. 围绕直线 Ox 的角速度为 ω_x
5. 围绕直线 Oy 的角速度为 ω_y
6. 围绕直线 Oz 的角速度为 ω_z

在 M^6 上定义以下 **Plücker 基** (*Plücker basis*)：

Plücker basis on M^6	
$\boldsymbol{d}_{Ox}$	围绕直线 Ox 的单位角运动
$\boldsymbol{d}_{Oy}$	围绕直线 Oy 的单位角运动
$\boldsymbol{d}_{Oz}$	围绕直线 Oz 的单位角运动
$\boldsymbol{d}_x$	在 x 方向的单位线性运动
$\boldsymbol{d}_y$	在 y 方向的单位线性运动
$\boldsymbol{d}_z$	在 z 方向的单位线性运动

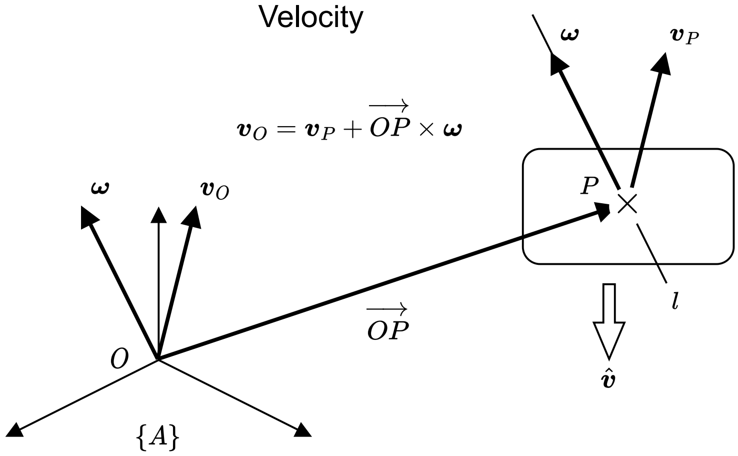
机体的空间速度现在可以表示为

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \omega_x \boldsymbol{d}_{Ox} + \omega_y \boldsymbol{d}_{Oy} + \omega_z \boldsymbol{d}_{Oz} + v_{Ox}\boldsymbol{d}_x + v_{Oy}\boldsymbol{d}_y + v_{Oz}\boldsymbol{d}_z$$

这个单一的量提供了刚体速度的**完整描述** (*complete description*)，并且相对于坐标帧的位置是**不变量** (*invariant*)。

六个标量 $\omega_x, \omega_y, \ldots, v_{Oz}$ 是 $\hat{\boldsymbol{v}}$ 在帧 O_{xyz} 定义的坐标帧中的 **Plücker 坐标** (*Plücker coordinates*)

$$\underbrace{\underline{\hat{\boldsymbol{v}}}_O = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{\omega}} \\ \underline{\boldsymbol{v}}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ v_{Ox} \\ v_{Oy} \\ v_{Oz} \end{bmatrix}}_{\text{coordinate vector}} \qquad \underbrace{\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{v}} = \; & \omega_x \boldsymbol{d}_{Ox} + \omega_y \boldsymbol{d}_{Oy} + \omega_z \boldsymbol{d}_{Oz} + \\ & v_{Ox}\boldsymbol{d}_x + v_{Oy}\boldsymbol{d}_y + v_{Oz}\boldsymbol{d}_z \end{aligned}}_{\text{what it represents}}$$



$$\underline{\hat{\boldsymbol{v}}}_O = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{\omega}} \\ \underline{\boldsymbol{v}}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ v_{Ox} \\ v_{Oy} \\ v_{Oz} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \hat{\boldsymbol{v}} = \quad & \omega_x \boldsymbol{d}_{Ox} + \omega_y \boldsymbol{d}_{Oy} + \omega_z \boldsymbol{d}_{Oz} + \\ & v_{Ox} \boldsymbol{d}_x + v_{Oy} \boldsymbol{d}_y + v_{Oz} \boldsymbol{d}_z \end{aligned}$$

20 运动与动力习题 A

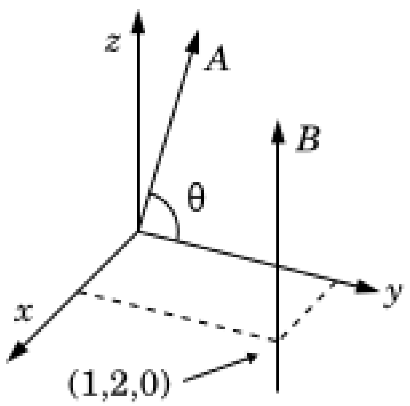


Figure 1

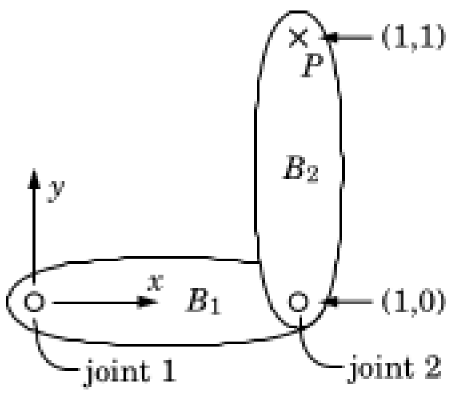


Figure 2

20.1 习题 A1

参考图 1，计算出以下空间速度向量的 Plücker 坐标：

- (a) 围绕直线 A (位于 $y-z$ 平面内) 的单位旋转速度。
- (b) 沿直线 A 方向的单位平移速度。

- (c) 围绕直线 B 的单位旋转速度。
- (d) 沿直线 B 方向的平移速度为 2 m/s，以及
- (e) 运动旋量速度 (即螺旋或旋量速度)，包括 2 rad/s 的旋转和 1 m/s 的围绕和沿线直线 B 的平移。

$$
\text{(a)} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{(e)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

20.2 习题 A2

假设刚体的空间速度具有 Plücker 坐标 $[\omega_x, \omega_y, \omega_z, v_{Ox}, v_{Oy}, v_{Oz}]^{\mathrm{T}}$。找到向量场 $\boldsymbol{V}(P)$ 的表达式，该向量场将点 P 映射到 P 处机体固连点的欧几里德速度 $\boldsymbol{v}_P$。用两种方式表达你的答案：

- (a) 关于向量 $\boldsymbol{\omega}$、$\boldsymbol{v}_O$ 和 $\overrightarrow{OP}$，以及
- (b) 根据 Plücker 坐标，P 相对于 O 的坐标 P_x、P_y 和 P_z，以及基向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$。

答案：

- (a) 根据 $\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{v}_P + \overrightarrow{OP} \times \boldsymbol{\omega}$，其中 $\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{V}(P)$，所以 $\boldsymbol{V}(P) = \boldsymbol{v}_O - \overrightarrow{OP} \times \boldsymbol{\omega}$。
- (b) 根据 3D 欧几里德向量积的公式

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V}(P) = &(v_{Ox} - P_y\omega_z + P_z\omega_y)\,\boldsymbol{i} + \\
&(v_{Oy} - P_z\omega_x + P_x\omega_z)\,\boldsymbol{j} + \\
&(v_{Oz} - P_x\omega_y + P_y\omega_x)\,\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

20.3 习题 A3

在任意给定的瞬间，刚体的速度通常是螺旋运动，称为运动旋量 (twist)，其以角度幅值、线性幅值和空间中的一条直线 (即瞬时旋量轴) 为表征。如果物体的速度由两个欧几里德向量 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{v}_O$ 描述，则角度幅值为 $|\boldsymbol{\omega}|$，这与 $\sqrt{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}}$ 是一样的。但是，线性幅值不是 $|\boldsymbol{v}_O|$。假设 $|\boldsymbol{\omega}| \neq 0$，

- (a) 找出运动旋量的线性幅值公式；以及
- (b) 求出螺旋运动的旋距 (pitch) 公式，即线性幅值与角度幅值的比率。

答案：

回答这个问题的关键是要认识到 $\boldsymbol{v}_O$ 既包含 $\boldsymbol{\omega}$ 方向的分量，也包含与 $\boldsymbol{\omega}$ 垂直的分量。前者提供沿螺旋轴的线性运动，而后者确定这条线在空间中的位置。($\boldsymbol{\omega}$ 仅确定其方向。) 所以螺旋运动的线性幅值就是 $\boldsymbol{\omega}$ 方向上 $\boldsymbol{v}_O$ 分量的幅值。

- (a) $\boldsymbol{v}_O \cdot \boldsymbol{\omega} / |\boldsymbol{\omega}|$
- (b) $\boldsymbol{v}_O \cdot \boldsymbol{\omega} / \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$

20.4 习题 A4

从问题 A3 继续，瞬时旋量轴的方向与 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向相同；因此，如果 P 是这条线上的任意一点，则一般点的表达式是

$$OQ(s) = \overrightarrow{OP} + s\boldsymbol{\omega}$$

其中 s 是任意标量。求出瞬时旋量轴上任意一点 P 的表达式。(提示：如果 P 位于轴上，则 $\boldsymbol{v}_P$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 平行。答案至少包括一个向量积。)

答案：

我们寻求一个点 P，使得 $\boldsymbol{v}_P$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 平行，这意味着 $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_P = \mathbf{0}$。由于 $\boldsymbol{v}_P$ 的形式为 $\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}$，我们有

$$\boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}\right) = \mathbf{0},$$

这意味着

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_O.$$

应用公式 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$ 给出为

$$\left(\boldsymbol{\omega} \cdot \overrightarrow{OP}\right) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})\,\overrightarrow{OP} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_O.$$

现在，有无穷多个点 P 位于瞬时旋量轴上，其中正好有一个点具有 $\overrightarrow{OP}$ 垂直于轴的性质 (即垂直于 $\boldsymbol{\omega}$)。如果我们的目标是找到这一点，那么需要上述方程的解，其中 $\boldsymbol{\omega} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$。这为我们提供了 P 的以下表达式：

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_O}{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}}.$$

21 线动力

当一个动力作用在一个真实的物理实体上时，物体的哪个部位感受到该动力很重要。

但当动力作用在刚体上时，只有幅值和作用线才起作用。

描述：欧几里德向量 $\boldsymbol{f}$ 加上直线上的任意点 P

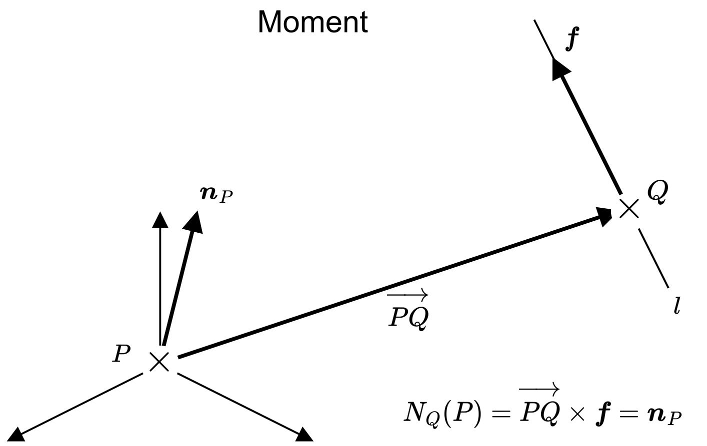
22 角动力—力矩 (Moment)、力偶 (Couple)、扭矩 (Torque)

- 力矩 (Moment) 是线动力围绕一点的转动能力 (turning power)。
- 沿通过 Q 的线作用的动力 $\boldsymbol{f}$ 在点 P 处产生力矩 $\boldsymbol{n}_P$，如下所示：

$$\boldsymbol{n}_P = \overrightarrow{PQ} \times \boldsymbol{f}$$

- 给定动力产生的所有力矩的集合形成**力矩向量场** (*moment vector field*)

$$\underbrace{N_Q}_{\text{moment field of } \boldsymbol{f} \text{ through } Q}(P) = \overrightarrow{PQ} \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{n}_P$$

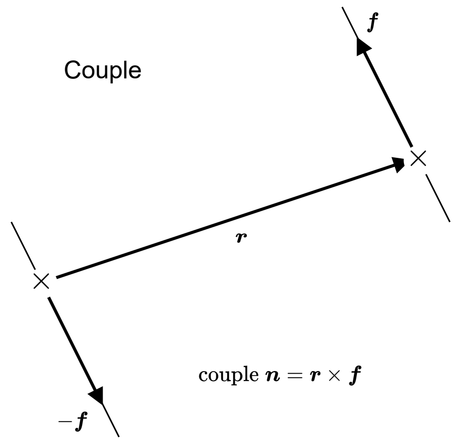


- 沿通过 Q 的线作用的动力 $\boldsymbol{f}$ 等于沿通过 P 的线作用的动力 $\boldsymbol{f}$ 加上围绕 P 的原始动力的力矩 $\boldsymbol{n}_P$。
- 在经典力学中 (使用欧几里德向量)，该结果用于将通过点 Q_i 作用的“力系”$\boldsymbol{f}_i$ 替换为通过 P 作用的单个动力 $\boldsymbol{f}$ 和力矩 $\boldsymbol{n}_P$，其中

$$\boldsymbol{f} = \Sigma_i \boldsymbol{f}_i \quad \text{and} \quad \boldsymbol{n}_P = \Sigma_i \overrightarrow{PQ_i} \times \boldsymbol{f}_i$$

- 力偶 (Couple) 是沿平行线作用的两个幅值相等、方向相反的动力的总和。
- 力偶是一个有幅值和方向但没有作用线的向量。

$$\text{couple } \boldsymbol{n} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}$$



- 扭矩 (Torque) 是支撑轴上的转动动力。
- 扭矩是一个标量。
- 转速为 ω 的轴上的扭矩 τ 提供机械功率 $\tau\omega$。
- 扭矩 τ 可以在半径 r 处传递动力 $f = \tau/r$。

23 空间动力

作用在刚体上的一般动力可以表示为

- 沿通过任意选定点 P 的线作用的线动力 $\boldsymbol{f}$，以及
- 力偶，$\boldsymbol{n}_P$

如果我们选择一个不同的点 O，那么动力可以表示为

- 沿通过新点 O 的线作用的线动力 $\boldsymbol{f}$，以及
- 力偶 $\boldsymbol{n}_O$，其中 $\boldsymbol{n}_O = \boldsymbol{n}_P + \overrightarrow{OP} \times \boldsymbol{f}$

现在在 O 处放置一个坐标帧，并像前面一样引入单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$，以便

$$\underline{\boldsymbol{n}}_O = \begin{bmatrix} n_{Ox} \\ n_{Oy} \\ n_{Oz} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{n}_O = n_{Ox}\boldsymbol{i} + n_{Oy}\boldsymbol{j} + n_{Oz}\boldsymbol{k}$$

$$\underline{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f} = f_x\boldsymbol{i} + f_y\boldsymbol{j} + f_z\boldsymbol{k}$$

作用在机体上的总动力现在可以表示为 6 个基本力的总和：

1. 在 x 方向的 n_{Ox} 力矩
2. 在 y 方向的 n_{Oy} 力矩
3. 在 z 方向的 n_{Oz} 力矩
4. 沿直线 Ox 作用的 f_x 线动力
5. 沿直线 Oy 作用的 f_y 线动力
6. 沿直线 Oz 作用的 f_z 线动力

在 F^6 上定义以下 **Plücker 基** (*Plücker basis*)：

Plücker basis on F^6	
$\boldsymbol{e}_x$	在 x 方向的单位力偶
$\boldsymbol{e}_y$	在 y 方向的单位力偶
$\boldsymbol{e}_z$	在 z 方向的单位力偶
$\boldsymbol{e}_{Ox}$	沿直线 Ox 的单位线动力
$\boldsymbol{e}_{Oy}$	沿直线 Oy 的单位线动力
$\boldsymbol{e}_{Oz}$	沿直线 Oz 的单位线动力

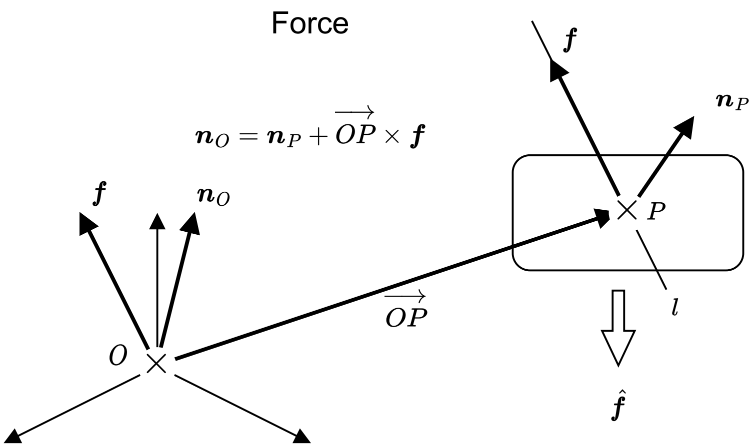
作用在机体上的空间动力现在可以表示为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{f}} =& n_{Ox}\boldsymbol{e}_x + n_{Oy}\boldsymbol{e}_y + n_{Oz}\boldsymbol{e}_z + \\ & f_x\boldsymbol{e}_{Ox} + f_y\boldsymbol{e}_{Oy} + f_z\boldsymbol{e}_{Oz}\end{aligned}$$

这个单一的量提供了作用在机体上的动力的**完整描述** (*complete description*)，并且相对于坐标帧的位置是**不变量** (*invariant*)。

六个标量 $n_{Ox}, \ldots, f_z$ 是在由帧 $Oxyz$ 定义的坐标系统中 $\hat{\boldsymbol{f}}$ 的 **Plücker 坐标** (*Plücker coordinates*)

$$\text{coordinate vector: } \underline{\hat{\boldsymbol{f}}}_O = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{n}}_O \\ \underline{\boldsymbol{f}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{Ox} \\ n_{Oy} \\ n_{Oz} \\ f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$



$$\underline{\boldsymbol{n}}_O = \begin{bmatrix} n_{Ox} \\ n_{Oy} \\ n_{Oz} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{n}_O = n_{Ox}\boldsymbol{i} + n_{Oy}\boldsymbol{j} + n_{Oz}\boldsymbol{k}$$

$$\underline{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f} = f_x\boldsymbol{i} + f_y\boldsymbol{j} + f_z\boldsymbol{k}$$

$$\underline{\hat{\boldsymbol{f}}}_O = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{n}}_O \\ \underline{\boldsymbol{f}} \end{bmatrix}$$

24 对偶向量空间

由于技术原因，我们无法将所有空间向量放置在单个向量空间中；因此，我们必须使用两个向量空间：

- M^6 表示空间运动向量 (速度、加速度等)
- F^6 表示空间动力向量 (动力、动量、冲量等)

这就是为什么我们需要两组基向量：用 $\boldsymbol{d}_{Ox}, \ldots, \boldsymbol{d}_z$ 张成 M^6，并且用 $\boldsymbol{e}_x, \ldots, \boldsymbol{e}_{Oz}$ 张成 F^6。

Plücker 坐标系统使用 12 个基向量，它们张成 2 个向量空间，但所有 12 个基向量都是使用**相同的笛卡尔帧** (*same Cartesian frame*) 定义的。

25 Plücker 坐标是对偶的

因为基向量满足“互易 (reciprocity)”条件，因此 Plücker 坐标是一个覆盖两个向量空间的对偶坐标的系统。

scalar products of basis vectors

$\cdot$	$\boldsymbol{e}_x$	$\boldsymbol{e}_y$	$\boldsymbol{e}_z$	$\boldsymbol{e}_{Ox}$	$\boldsymbol{e}_{Oy}$	$\boldsymbol{e}_{Oz}$
$\boldsymbol{d}_{Ox}$	1	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{d}_{Oy}$	0	1	0	0	0	0
$\boldsymbol{d}_{Oz}$	0	0	1	0	0	0
$\boldsymbol{d}_x$	0	0	0	1	0	0
$\boldsymbol{d}_y$	0	0	0	0	1	0
$\boldsymbol{d}_z$	0	0	0	0	0	1

给定在同一 Plücker 坐标系统中表示 $\boldsymbol{m} \in \mathsf{M}^6$ 和 $\boldsymbol{f} \in \mathsf{F}^6$ 的坐标向量 $\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{f}} \in \mathsf{R}^6$，其标量积为

$$\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{f} = \underline{\boldsymbol{m}}^{\mathrm{T}} \underline{\boldsymbol{f}}$$

26 空间向量的基本运算

- 刚性连接
  如果两个机体刚性连接，或以刚性组成移动，则它们的速度相同。

- 相对速度
  如果机体 A 和 B 的速度为 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$，则 B 相对于 A 的相对速度为

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A$$

- 动力的总和
  如果动力 $\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2$ 都作用在同一机体上，则它们等效于由以下公式得出的单个动力 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{tot}}$

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{tot}} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2$$

- 作用和反作用
  如果机体 A 对机体 B 施加力 $\boldsymbol{f}$，那么机体 B 对机体 A 施加力 $-\boldsymbol{f}$。(空间形式的牛顿第三定律)

- 标量积
  如果动力 $\boldsymbol{f}$ 作用在速度为 $\boldsymbol{v}$ 的机体上，则该动力所传递的功率为

$$power = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}$$

  如果坐标向量 $\underline{\boldsymbol{f}}$ 和 $\underline{\boldsymbol{v}}$ 在同一对偶坐标系统中表示 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{v}$，则

$$power = \underline{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}} \underline{\boldsymbol{v}}$$

- 对标量积的限制
  标量积仅在运动向量和动力向量之间定义。像 $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{f}_2$ 这样的表达式没有物理意义，也没有定义。

- 标量乘法
  将空间向量乘以标量 α 将以相同的量缩放其线性和角度幅值，但不影响有向线。例如，如果 $\boldsymbol{v}$ 是一般的螺旋运动，则 $\alpha\boldsymbol{v}$ 的旋距 (pitch) 和螺旋轴与 α 相同，但 α 乘以速度。同样，$\beta\boldsymbol{f}$ 的作用线与 $\boldsymbol{f}$ 相同，但 β 乘以强度。

稍后，我们将遇到几个更基本的操作，例如

- 坐标变换的规则
- 惯量总和
- 动量 = 惯量 × 速度
- 动能公式
- 运动方程

27 运动与动力习题 B

27.1 习题 B1

参考回图 1，计算出以下空间向量的 Plücker 坐标：

- (a) 沿直线 A 作用的单位纯动力，
- (b) 围绕直线 B 作用的单位纯力偶，以及
- (c) 通用动力旋量 (动力和力偶的组合)，它是两个单位纯力的总和，一个沿直线 A 作用，另一个沿直线 B 作用。

$$\text{(a)}\quad\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\\cos(\theta)\\\sin(\theta)\end{bmatrix}\quad\text{(b)}\quad\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\quad\text{(c)}\quad\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\0\\\cos(\theta)\\1+\sin(\theta)\end{bmatrix}$$

27.2 习题 B2

图 2 显示了一个具有两个旋转关节的平面双连杆机器人。每个关节允许远端连杆相对于近端连杆 (或固定底座) 围绕关节的旋转轴进行纯旋转。关节 1 的轴与 z 轴重合；关节 2 的轴平行于 z 轴，但通过 x-y 平面中的点 $(1,0)$。两个关节轴由运动向量 $\boldsymbol{s}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_2$ 表示，每个运动向量都是围绕适当关节轴的单位旋转。关节 i 的远端机体相对于近端机体 (或固定底座) 的速度为 $\boldsymbol{s}_i\dot{q}_i$，其中 $\dot{q}_i$ 是关节的速度变量。这两个物体 B_1 和 B_2 的空间速度分别为 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$。根据此机制，计算以下内容：

- (a) $\boldsymbol{s}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_2$ 的 Plücker 坐标；
- (b) $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 的 Plücker 坐标，表示为关节速度变量 $\dot{q}_1$ 和 $\dot{q}_2$ 的函数；

- (c) 6×2 雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的元素，其给出了 $\boldsymbol{v}_2$ 作为关节速度向量 $\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 的函数 (即 $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}$)；以及
- (d) 从你的答案的 (b) 部分，求出点 P 的三维线速度。

回答：

- (a) $\boldsymbol{s}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{s}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- (b) $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{s}_1\dot{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{s}_2\dot{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\ 0 \\ -\dot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$
- (c) $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_1 & \boldsymbol{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- (d) $\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_O - \overrightarrow{OP} \times \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$
  其中 O 是原点，并且 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{v}_O$ 指向 $\hat{\boldsymbol{v}}_2$。

27.3 习题 B3

假设一个纯动力 $\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 沿通过 P 的直线作用于图 2 中的 B_2。

- (a) 为了使系统处于静态平衡状态，必须通过关节传递的动力 (即从底座传递到 B_1 的力和从 B_1 传递到 B_2 的力) 的 Plücker 坐标是多少?
- (b) 系统处于静态平衡时，每个关节处的扭矩是多少? (提示：关节 i 处的扭矩为 $\tau_i = \boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_i$，其中 $\boldsymbol{f}_i$ 是跨越关节 i 的空间动力。)

回答：

- (a) 设 $\hat{\boldsymbol{f}}$ 为空间动力，相当于作用在通过 P 的直线上的 3D 动力 $\boldsymbol{f}$。因此，$\hat{\boldsymbol{f}}$ 的 Plücker 坐标为

$$\hat{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{OP} \times \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

  设 $\hat{\boldsymbol{f}}_1$ 和 $\hat{\boldsymbol{f}}_2$ 分别为通过关节 1 从底座传递到 B_1 的动力，以及通过关节 2 从 B_1 传递到 B_2 的动力。对于静态平衡，每个物体上的净力必须为零。B_1 上的净作用力为 $\hat{\boldsymbol{f}}_1 - \hat{\boldsymbol{f}}_2$，$B_2$ 上的净力为 $\hat{\boldsymbol{f}}_2 + \hat{\boldsymbol{f}}$；所以静态平衡的条件是

$$\hat{\boldsymbol{f}}_1 = \hat{\boldsymbol{f}}_2 = -\hat{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (b) $\tau_1 = \boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_1 = -1$ 并且 $\tau_2 = \boldsymbol{s}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_2 = -1$。

第三部分　Plücker 坐标、微分与加速度

28　坐标变换 — 一般规则

设 $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \subset U$ 为张成一般向量空间 U 的基，$B' = \{\boldsymbol{b}'_1, \boldsymbol{b}'_2, \ldots, \boldsymbol{b}'_n\} \subset U$ 为同样张成 U 的第二基。

设 $\underline{\boldsymbol{u}}$ 和 $\underline{\boldsymbol{u}}'$ 为坐标向量，表示在由 B 和 B' 分别定义的坐标系统中的向量 $\boldsymbol{u} \in U$。

设 $\boldsymbol{X}$ 为从 B 坐标到 B' 坐标的坐标变换 ($n \times n$ 矩阵)，表示 $\underline{\boldsymbol{u}}' = \boldsymbol{X}\underline{\boldsymbol{u}}$。其逆变换为 $\underline{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{X}^{-1}\underline{\boldsymbol{u}}'$。

一般规则：$\boldsymbol{X}$ 的列是**原始基向量** (*original basis vectors*) 在新坐标系统中的坐标。

证明. 如果 $\underline{\boldsymbol{u}}$ 和 $\underline{\boldsymbol{u}}'$ 都表示 $\boldsymbol{u}$，则

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \boldsymbol{b}_i = \sum_{i=1}^{n} u'_i \boldsymbol{b}'_i = \boldsymbol{u}$$

并且如果 $\boldsymbol{X}$ 的列是 B' 中 $\boldsymbol{b}_i$ 的坐标，则

$$\boldsymbol{b}_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ji} \boldsymbol{b}'_j$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i X_{ji} \boldsymbol{b}'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_{ji} u_i\right)\boldsymbol{b}'_j\end{aligned}$$

这意味着 $u'_j = \sum_{i=1}^{n} X_{ji} u_i$，因此 $\underline{\boldsymbol{u}}' = \boldsymbol{X}\underline{\boldsymbol{u}}$。 □

记忆要点：Columns Old In New, COIN

29 对偶性 (Duality)

有时会发生代表不同物理量的向量结合起来形成一个不变的标量。例如，**动力** (*force*) 与**速度** (*velocity*) 结合，形成**功率** (*power*)。

当物理学具有这种形式时，有时使数学模型具有相同的形式是有用的；即：

two vector spaces
plus
a scalar product defined *between* them

设 U 和 V 是两个维数相同的向量空间；并引入一个标量积，从每个空间中获取一个参数。

- 标量积使每个空间彼此**对偶** (*dual*)。
- 向量空间 U 的对偶可以写成 U^*，所以我们有 $V = U^*$ 和 $U = V^*$。
- 为了便于标记，如果 $\boldsymbol{u} \in U$ 和 $\boldsymbol{v} \in V$，那么我们可以将标量积写为 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ 或 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$，两者的含义相同。

30 对偶坐标系统 (Dual Coordinate Systems)

对偶坐标系统 (*dual coordinate system*) 覆盖两个空间，因此使用**两个基** (*two bases*)：每个空间上一个基。

设 $D = \{\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_n\}$ 和 $E = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ 分别基于 U 和 V。要生成有效的对偶坐标系统，基向量必须满足以下**互易条件** (*reciprocity condition*)：

$$\boldsymbol{d}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

如果 $\underline{\boldsymbol{u}}, \underline{\boldsymbol{v}} \in \mathsf{R}^n$ 在对偶坐标系统中表示 $\boldsymbol{u} \in U$ 和 $\boldsymbol{v} \in V$，则

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \underline{\boldsymbol{v}}$$

31 对偶坐标变换 (Dual Coordinate Transforms)

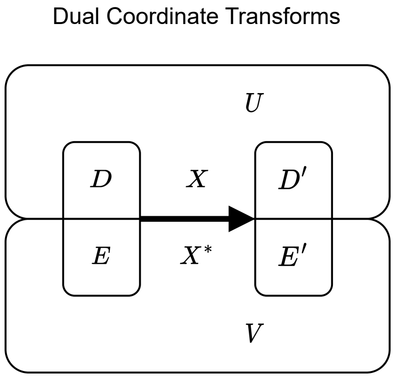
设 U 为一般 n 维向量空间；设 D 和 D' 是 U 上的任意两个基；并设 $\boldsymbol{X}$ 是从 D 坐标到 D' 坐标的变换。

设 $V = U^*$ 为 U 的对偶；设 E 和 E' 是 V 上 (唯一的) 基，它们分别与 D 和 D' 互易 (reciprocal)，因此 D 和 E 一起在 U 和 V 上形成一个对偶坐标系统，并且 D' 和 E' 在这之上形成另一个对偶坐标系统。

从 E 坐标到 E' 坐标的转换称为 $\boldsymbol{X}^*$，则为

$$\boldsymbol{X}^* = \left(\boldsymbol{X}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$$

其可写为 $\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}$。



证明. 设 $\underline{\boldsymbol{u}}, \underline{\boldsymbol{v}} \in \mathsf{R}^n$ 为坐标向量，表示 (D, E) 坐标中的 $\boldsymbol{u} \in U$ 和 $\boldsymbol{v} \in V$，并设 $\underline{\boldsymbol{u}}', \underline{\boldsymbol{v}}' \in \mathsf{R}^n$ 表示 (D', E') 坐标中的 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$。

对于 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的每个可能的选择，我们需要 $\underline{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{u}}'^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{v}}'$，但 $\underline{\boldsymbol{u}}'^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{v}}' = (\boldsymbol{X}\underline{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}^*\underline{\boldsymbol{v}})$，因此我们需要

$$\underline{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^*\underline{\boldsymbol{v}}$$

对于所有 $\underline{\boldsymbol{u}}$ 和 $\underline{\boldsymbol{v}}$，唯一的解是

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^* = \mathbf{1}$$

这意味着

$$\boldsymbol{X}^* = \left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{X}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$$

□

注释：

- 如果 U 是欧几里德空间，则可以将 $U = U^*$ 等同起来。换句话说，欧几里德向量空间可以是自对偶的 (self-dual)。
- 如果 $U = U^*$，则 $D, E \subset U$。
- 如果 $D, E \subset U$ 并且我们选择 $D = E$，则对偶坐标系统简化为笛卡尔坐标系统。
- 这就是为什么如果我们只研究欧几里德向量，就不需要对偶 (duality) 的概念。

32 数学结构

空间向量位于两个向量空间中：

$$\begin{aligned}\mathsf{M}^6 &\quad \text{— 运动向量}\\ \mathsf{F}^6 &\quad \text{— 动力向量}\end{aligned}$$

其中在它们之间定义了一个标量积

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{f}=work$$

其中 "·"：$\mathsf{M}^6\times\mathsf{F}^6\mapsto\mathsf{R}$。

33 向量基

坐标向量 $\underline{\boldsymbol{m}}=[m_1,\ldots,m_6]^{\mathrm{T}}$ 表示 M^6 上的基 $\{\boldsymbol{d}_1,\ldots,\boldsymbol{d}_6\}$ 中的运动向量 $\boldsymbol{m}$，如果

$$\boldsymbol{m}=\sum_{i=1}^{6}m_i\boldsymbol{d}_i$$

同样，坐标向量 $\underline{\boldsymbol{f}}=[f_1,\ldots,f_6]^{\mathrm{T}}$ 表示 F^6 上以 $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_6\}$ 为基的动力向量 $\boldsymbol{f}$，如果

$$\boldsymbol{f}=\sum_{i=1}^{6}f_i\boldsymbol{e}_i$$

如果 $\{\boldsymbol{d}_1,\ldots,\boldsymbol{d}_6\}$ 是 M^6 上的任意基，那么 F^6 上存在一个唯一的**互易基** (*reciprocal basis*) $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_6\}$，则在满足

$$\boldsymbol{d}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\begin{cases}0 & : i\neq j\\ 1 & : i=j\end{cases}$$

有了这些基，两个坐标向量的标量积为

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{f}=\underline{\boldsymbol{m}}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{f}}$$

34 Plücker 坐标

- Plücker 坐标是空间向量的标准坐标系统
- Plücker 坐标系统由**单一笛卡尔帧** (*single Cartesian frame*) 的**位置** (*position*) 和**方向** (*orientation*) 定义
- Plücker 坐标系统共有 12 个基向量，覆盖两个向量空间 (M^6 和 F^6)

在 M^6 上定义以下 **Plücker 基** (*Plücker basis*)：

Plücker basis on M^6	
$\boldsymbol{d}_{Ox}$	围绕直线 Ox 的单位角运动
$\boldsymbol{d}_{Oy}$	围绕直线 Oy 的单位角运动
$\boldsymbol{d}_{Oz}$	围绕直线 Oz 的单位角运动
$\boldsymbol{d}_{x}$	在 x 方向的单位线性运动
$\boldsymbol{d}_{y}$	在 y 方向的单位线性运动
$\boldsymbol{d}_{z}$	在 z 方向的单位线性运动

在 F^6 上定义以下 **Plücker 基** (*Plücker basis*)：

Plücker basis on F^6	
$\boldsymbol{e}_{x}$	在 x 方向的单位力偶
$\boldsymbol{e}_{y}$	在 y 方向的单位力偶
$\boldsymbol{e}_{z}$	在 z 方向的单位力偶
$\boldsymbol{e}_{Ox}$	沿直线 Ox 的单位线动力
$\boldsymbol{e}_{Oy}$	沿直线 Oy 的单位线动力
$\boldsymbol{e}_{Oz}$	沿直线 Oz 的单位线动力

对于 Plücker 坐标

- F^6 上的 Plücker 基 $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \ldots, \boldsymbol{e}_{Oz}\}$ 与 M^6 上的 $\{\boldsymbol{d}_{Ox}, \boldsymbol{d}_{Oy}, \ldots, \boldsymbol{d}_z\}$ 是互易的 (reciprocal)，
- 因此运动向量和动力向量之间的标量积可以用 Plücker 坐标表示为

$$\hat{\boldsymbol{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{f}} = \underline{\hat{\boldsymbol{v}}}_O^{\mathrm{T}} \underline{\hat{\boldsymbol{f}}}_O$$

其相对于坐标帧的位置为不变量 (invariant)。

35 坐标变换

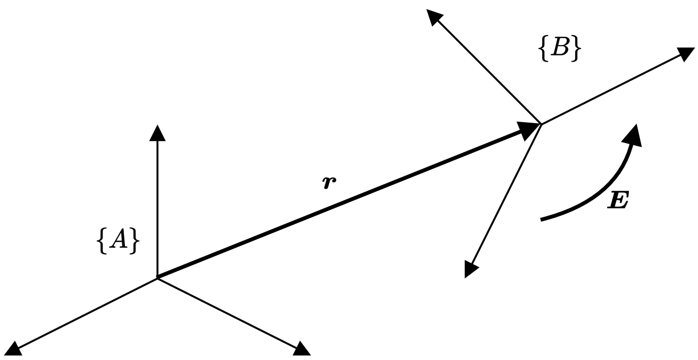
将运动向量从 A 转换到 B 为：

$$^{B}\boldsymbol{X}_A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \tilde{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix}$$

Coordinate Transforms



$$
{}^{B}\boldsymbol{X}_{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \tilde{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \text{where} \quad \tilde{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix}
$$

对于动力向量的相应变换为：

$$
{}^{B}\boldsymbol{X}_{A}^{*} = \left({}^{B}\boldsymbol{X}_{A}\right)^{-\mathrm{T}}
$$

36 Plücker 坐标、微分与加速度习题 A

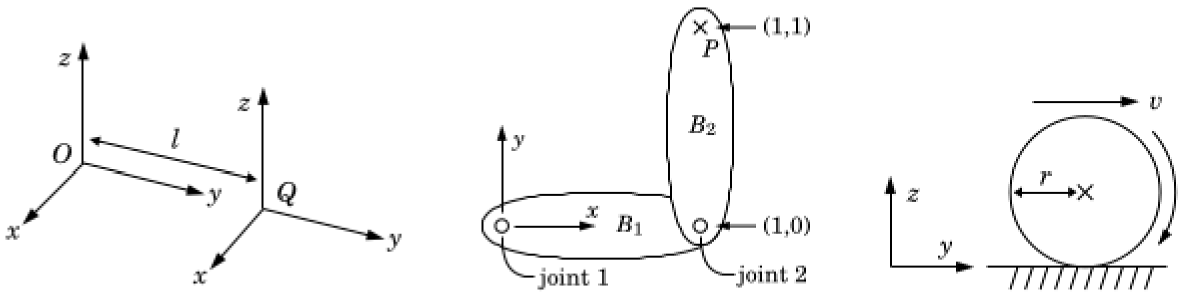


Figure 1 Figure 2 Figure 3

36.1 习题 A1

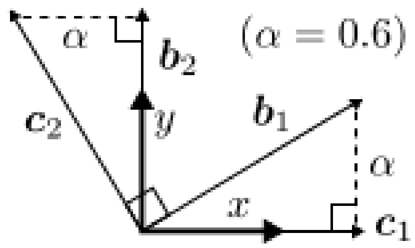
设 $\boldsymbol{b}_1$ 和 $\boldsymbol{b}_2$ 为 E^2 (二维欧几里德向量空间) 的元素，分别具有笛卡尔坐标 $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，其中 α 是标量参数。这两个向量是线性无关的，因此张成 E^2。所以它们可以用来在 E^2 上形成一个基 $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$。

- (a) 设 $C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2\}$ 是 E^2 的另一个基。如果 C 是 B 的倒数，那么 $\boldsymbol{c}_1$ 和 $\boldsymbol{c}_2$ 的坐标是多少？
- (b) 绘制一张图，显示 $\boldsymbol{b}_1$、$\boldsymbol{b}_2$、$\boldsymbol{c}_1$ 和 $\boldsymbol{c}_2$ 之间的几何关系。

回答：

- (a) $\boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 1 \end{bmatrix}$
  虽然这个问题很容易以临时方式解决，但也有一种系统的方法可以推广到 n 维。设 $\boldsymbol{B}$ 为 2×2 矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}$，设 $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 \end{bmatrix}$。则互易条件为 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = \mathbf{1}$，这意味着 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{-1}$。所以 $\boldsymbol{c}_i$ 就是 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 的第 i 行.

- (b)



36.2 习题 A2

图 1 显示了两个平行坐标帧：$Oxyz$ 和 $Qxyz$，后者在 y 方向上相对于前者平移距离 l。与 $Oxyz$ 相关的 Plücker 基为 $D_O = \{\boldsymbol{d}_{Ox}, \boldsymbol{d}_{Oy}, \boldsymbol{d}_{Oz}, \boldsymbol{d}_x, \boldsymbol{d}_y, \boldsymbol{d}_z\}$；与 $Qxyz$ 相关的 Plücker 基为 $D_Q = \{\boldsymbol{d}_{Qx}, \boldsymbol{d}_{Qy}, \boldsymbol{d}_{Qz}, \boldsymbol{d}_x, \boldsymbol{d}_y, \boldsymbol{d}_z\}$；由这两个基定义的坐标系统分别称为 O 和 Q。给定空间速度向量 $\hat{\boldsymbol{v}}$ 的 Plücker 坐标在 O 坐标中为 $\hat{\boldsymbol{v}}_O = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z & v_{Ox} & v_{Oy} & v_{Oz} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，在 Q 坐标中为 $\hat{\boldsymbol{v}}_Q = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z & v_{Qx} & v_{Qy} & v_{Qz} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

- (a) 用 D_O 表示 D_Q。(由于 $\boldsymbol{d}_x$、$\boldsymbol{d}_y$ 和 $\boldsymbol{d}_z$ 在两个基中都是相同的，因此你只需要找到 $\boldsymbol{d}_{Qx}$、$\boldsymbol{d}_{Qy}$ 和 $\boldsymbol{d}_{Qz}$ 的表达式。)
- (b) 用 $\hat{\boldsymbol{v}}_O$ 表示 $\hat{\boldsymbol{v}}_Q$。
- (c) 证明 $\omega_x\boldsymbol{d}_{Qx} + \omega_y\boldsymbol{d}_{Qy} + \cdots + v_{Qz}\boldsymbol{d}_z$ 的表达式与 $\omega_x\boldsymbol{d}_{Ox} + \omega_y\boldsymbol{d}_{Oy} + \cdots + v_{Oz}\boldsymbol{d}_z$ 的表达式是真正地相同。

回答：

- (a) $\boldsymbol{d}_x$、$\boldsymbol{d}_y$ 和 $\boldsymbol{d}_z$ 在两个基中都是相同的，因为这些向量只取决于 x、y 和 z 方向，这对于两个坐标帧都是相同的。我们还有 $\boldsymbol{d}_{Qy} = \boldsymbol{d}_{Oy}$，因为 $Qy = Oy$。因此，D_Q 中唯一不同的两个向量是

$$\boldsymbol{d}_{Qx} = \boldsymbol{d}_{Ox} - l\boldsymbol{d}_z \quad \text{and} \quad \boldsymbol{d}_{Qz} = \boldsymbol{d}_{Oz} + l\boldsymbol{d}_x.$$

  提示：解决问题的一个快速方法是，想象一个刚体执行你想要表示的旋转，并询问在 O 处的机体固连点发生了什么。例如，如果机体以单位角速度围绕 Qx 旋转，那么在 O 处的机体固连点将直线向下移动，线速度幅值为 l，因此 $\boldsymbol{d}_{Qx} = \boldsymbol{d}_{Ox} - l\boldsymbol{d}_z$。

- (b) 两个向量中的坐标 ω_x、ω_y 和 ω_z 是相同的。为了获得线性坐标的表达式，我们使用公式 $\boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{v}_O - \overrightarrow{OQ} \times \boldsymbol{\omega}$，$\overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} 0 & l & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。其给出为

$$\begin{aligned} v_{Qx} &= v_{Ox} - l\omega_z \\ v_{Qy} &= v_{Oy} \\ v_{Qz} &= v_{Oz} + l\omega_x \end{aligned}$$

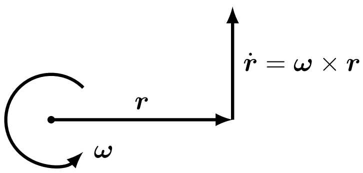
- (c) $$\begin{aligned} &\omega_x \boldsymbol{d}_{Qx} + \omega_y \boldsymbol{d}_{Qy} + \omega_z \boldsymbol{d}_{Qz} + v_{Qx} \boldsymbol{d}_x + v_{Qy} \boldsymbol{d}_y + v_{Qz} \boldsymbol{d}_z \\ &= \omega_x \left(\boldsymbol{d}_{Ox} - l \boldsymbol{d}_z \right) + \omega_y \boldsymbol{d}_{Oy} + \omega_z \left(\boldsymbol{d}_{Oz} + l \boldsymbol{d}_x \right) + \left(v_{Ox} - l\omega_z \right) \boldsymbol{d}_x + v_{O_y} \boldsymbol{d}_y + \left(v_{Oz} + l\omega_x \right) \boldsymbol{d}_z \\ &= \omega_x \boldsymbol{d}_{Ox} + \omega_y \boldsymbol{d}_{Oy} + \omega_z \boldsymbol{d}_{Oz} + v_{Ox} \boldsymbol{d}_x + v_{Oy} \boldsymbol{d}_y + v_{Oz} \boldsymbol{d}_z \end{aligned}$$

37 空间向量叉积

如果欧几里德向量 $\boldsymbol{r}$ 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转，但没有其它变化，则其导数由以下公式给出

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

3D vector cross product



我们寻求这个公式的空间等价物. . .

特别的是，我们寻求以下问题的解：

假设两个空间向量 $\hat{\boldsymbol{m}} \in \mathsf{M}^6$ 和 $\hat{\boldsymbol{f}} \in \mathsf{F}^6$ 以空间速度 $\hat{\boldsymbol{v}}$ 移动，但在其它方面没有变化。对于两个 6×6 矩阵，$\hat{\boldsymbol{v}}\times$ 和 $\hat{\boldsymbol{v}}\times^*$，找到满足以下条件的公式

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{m}}} &= \hat{\boldsymbol{v}} \times \hat{\boldsymbol{m}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{f}}} &= \hat{\boldsymbol{v}} \times^* \hat{\boldsymbol{f}} \end{aligned}$$

跳过详细信息，其解为

$$\hat{\boldsymbol{v}}\times = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}\times & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{v}_O\times & \boldsymbol{\omega}\times \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}\times^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}\times & \boldsymbol{v}_O\times \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\omega}\times \end{bmatrix}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v}_O \end{bmatrix}$。

一些特性：

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{v}}\times^{*} &= -\left(\hat{\boldsymbol{v}}\times\right)^{\mathrm{T}} \\
\hat{\boldsymbol{v}}_1\times\hat{\boldsymbol{v}}_2 &= -\hat{\boldsymbol{v}}_2\times\hat{\boldsymbol{v}}_1 \qquad (\text{so } \hat{\boldsymbol{v}}\times\hat{\boldsymbol{v}}=\mathbf{0}) \\
(\alpha\hat{\boldsymbol{v}})\times &= \alpha\left(\hat{\boldsymbol{v}}\times\right) \\
(\hat{\boldsymbol{v}}_1+\hat{\boldsymbol{v}}_2)\times &= (\hat{\boldsymbol{v}}_1\times)+(\hat{\boldsymbol{v}}_2\times) \\
(\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{v}})\times &= \boldsymbol{X}\left(\hat{\boldsymbol{v}}\times\right)\boldsymbol{X}^{-1} \quad (\text{Plücker transform})
\end{aligned}
$$

38 微分

- 空间向量的导数本身就是空间向量
- 一般来说，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{s}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{s}(t+\delta t)-\boldsymbol{s}(t)}{\delta t}$
- 固连在以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的机体中的空间向量的导数为

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{s}=\begin{cases}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{s} & \text{if } \boldsymbol{s}\in\mathsf{M}^6\\ \boldsymbol{v}\times^{*}\boldsymbol{s} & \text{if } \boldsymbol{s}\in\mathsf{F}^6\end{cases}
$$

39 移动坐标中的微分

$$
\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{s}\right]_O=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{s}_O+\begin{cases}\boldsymbol{v}_O\times\boldsymbol{s}_O & \text{if } \boldsymbol{s}\in\mathsf{M}^6\\ \boldsymbol{v}_O\times^{*}\boldsymbol{s}_O & \text{if } \boldsymbol{s}\in\mathsf{F}^6\end{cases}
$$

其中，$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{s}\right]_O$ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}/\mathrm{d}t$ 的坐标向量表示，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{s}_O$ 为坐标向量 $\boldsymbol{s}_O$ 的分量导数 (componentwise derivative)，$\boldsymbol{v}_O$ 为坐标帧速度。

40 空间加速度

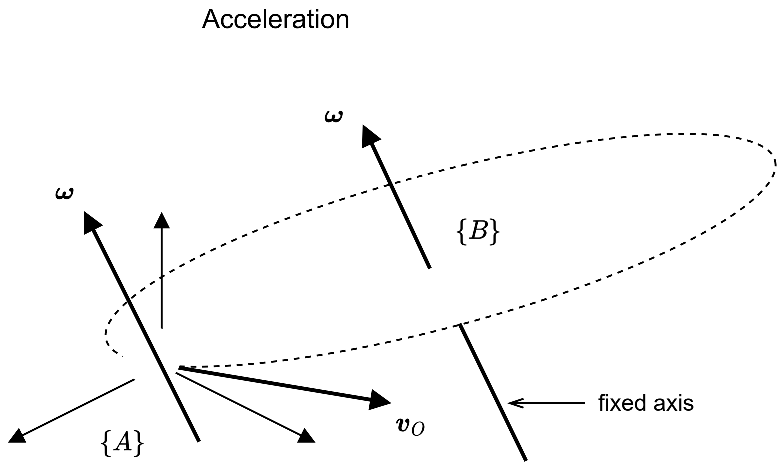
空间加速度是空间速度的变化率：

$$
\hat{\boldsymbol{a}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{v}}=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\omega}}\\ \dot{\boldsymbol{v}}_O\end{bmatrix}
$$

注意，$\dot{\boldsymbol{v}}_O$ 只是在点 O 处线性加速度，但这不是机体中任意一点的线性加速度！

- O 是空间中的一个固连点，
- 并且 $\boldsymbol{v}_O(t)$ 是在时间 t 时与 O 瞬间重合的机体固连点的速度，
- 所以 $\boldsymbol{v}_O$ 是机体固连点流经 O 的速度。
- 因此，$\dot{\boldsymbol{v}}_O$ 是流速的变化率。

空间加速度示例：如果机体绕固定轴以恒定角速度旋转，则其空间速度恒定，并且其空间加速度为零；但每个机体固连点都在沿着一个圆形的路径运动，并因此是加速的。



41 空间加速度公式

设 $\boldsymbol{r}$ 为 3D 向量，给定当前瞬间与 O 重合的机体固连点的位置，它是相对于空间中任意固连点的测量向量，因此我们有

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\boldsymbol{r}} \end{bmatrix}$$

但是

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\boldsymbol{v}}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \ddot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ 为科里奥利项 (Coriolis term) 或离心力项，空间加速度减去了该项。

42 空间加速度的基本特性

- 空间加速度就是空间速度的时间导数
- 空间加速度是真向量，与空间速度具有相同的一般代数性质
- 空间加速度公式是空间速度公式的导数

$$\text{if} \quad \boldsymbol{v}_{\text{tot}} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \quad \text{then} \quad \boldsymbol{a}_{\text{tot}} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$$

注意，空间加速度没有科里奥利项 $\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}$!

43 Plücker 坐标、微分与加速度习题 B

43.1 习题 B1

在本部分习题 A 中的图 2 显示了一个具有两个旋转关节的平面双连杆机器人。这也是你在第 2 部分习题 B2 中遇到的同一个机器人。每个关节允许远端连杆相对于近端连杆 (或固定底座) 围绕关节的旋转轴进行纯旋转。关节 1 的轴与 z 轴重合；关节 2 的轴平行于 z 轴，但通过 x-y 平面中

的点 $(1,0)$。两个关节轴由运动向量 $\boldsymbol{s}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_2$ 表示，每个运动向量都是围绕适当关节轴的单位旋转。关节 i 的远端机体相对于近端机体 (或固定底座) 的速度为 $\boldsymbol{s}_i\dot{q}_i$，其中 $\dot{q}_i$ 是关节的速度变量。两个物体 B_1 和 B_2 的空间速度分别为 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$，空间加速度为 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$，后者是关节加速度变量 $\ddot{q}_1$ 和 $\ddot{q}_2$ 的函数。在前面的问题中，你被要求计算 $\boldsymbol{s}_1$、$\boldsymbol{s}_2$、$\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 的 Plücker 坐标。现在计算 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 的 Plücker 坐标。提示：请记住，$\boldsymbol{s}_1$ 在空间中是固定的，但 $\boldsymbol{s}_2$ 是移动的。

回答：

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{s}_1\ddot{q}_1 + \dot{\boldsymbol{s}}_1\dot{q}_1 = \boldsymbol{s}_1\ddot{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_2 &= \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{s}_2\ddot{q}_2 + \dot{\boldsymbol{s}}_2\dot{q}_2 \\
&= \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{s}_2\ddot{q}_2 + \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{s}_2\dot{q}_2 \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_2 \\ 0 \\ -\ddot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \\ 0 \\ -\dot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1+\ddot{q}_2 \\ 0 \\ -\ddot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1\dot{q}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1+\ddot{q}_2 \\ \dot{q}_1\dot{q}_2 \\ -\ddot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

43.2 习题 B2

在本部分习题 A 中的图 3 显示了在 x-y 平面上沿 y 方向滚动而不滑动的圆柱体。圆柱体的半径为 r，恒定的前进速度为 v。求出其空间加速度。

回答：

设 C 表示圆柱体中心轴上的一点的位置。则 C 的坐标为 $(0, y_0+vt, r)$，其中 y_0 是 C 在 $t=0$ 时 y 的坐标。圆柱体的角速度为 $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} -v/r & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$C$ 处的线速度为 $\boldsymbol{v}_C = \begin{bmatrix} 0 & v & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。因此，$O$ 处的线速度为

$$\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{v}_C + \overrightarrow{OC} \times \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y_0+vt \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -v/r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (y_0+vt)\,v/r \end{bmatrix}.$$

设 $\hat{\boldsymbol{a}}_O$ 为坐标向量，表示圆柱在 O 处的空间加速度。由于 O 是空间中的一个固连点，因此 $\hat{\boldsymbol{a}}_O$ 只是空间速度 $\hat{\boldsymbol{v}}_O$ 的分量导数：

$$\hat{\boldsymbol{a}}_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{v}}_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} -v/r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (y_0 + vt)\,v/r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v^2/r \end{bmatrix}.$$

注意：如果我们希望在移动点 C 而不是固连点 O 处执行此计算，那么我们必须使用移动 Plücker 坐标系统中的微分公式计算 $\hat{\boldsymbol{a}}_O$。

第四部分　动力学

44　动量

刚体的**线动量** (*linear momentum*) $\vec{\boldsymbol{h}}$ 是其质量 m 与其质心 C 处线速度 $\vec{\boldsymbol{v}}_C$ 的乘积。

$$\vec{\boldsymbol{h}} = m\vec{\boldsymbol{v}}_C$$

线动量是线向量。

刚体的**固有角动量** (*intrinsic angular momentum*) $\vec{\boldsymbol{h}}_C$ 是其角速度 $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ 和围绕质心 C 的转动惯量 $\bar{\boldsymbol{I}}_C$ 的乘积。

$$\vec{\boldsymbol{h}}_C = \bar{\boldsymbol{I}}_C\vec{\boldsymbol{\omega}}$$

角动量是一个自由向量。

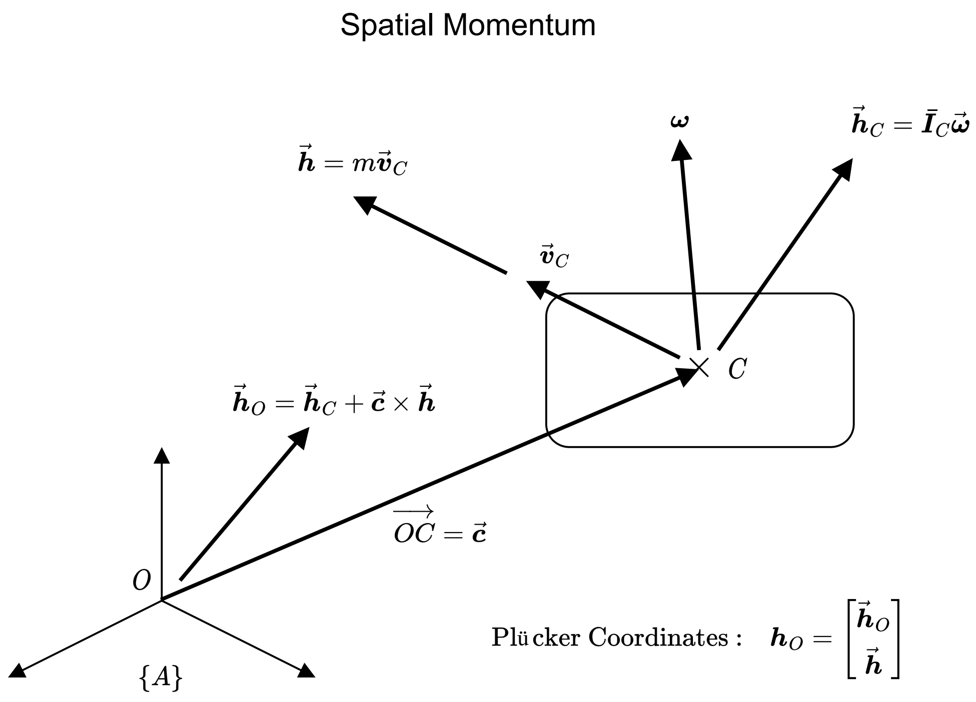
刚体关于一个给定点 O 的**动量矩** (*moment of momentum*) $\vec{\boldsymbol{h}}_O$ 是关于其固有角动量和该点的线动量矩之和。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \vec{\boldsymbol{c}} \\ \vec{\boldsymbol{h}}_O &= \vec{\boldsymbol{h}}_C + \vec{\boldsymbol{c}} \times \vec{\boldsymbol{h}} \end{aligned}$$

刚体的**空间动量** (*spatial momentum*) 是同时描述其线性动量和角动量的空间动力向量 (动力旋量)。

Plücker 坐标：

$$\boldsymbol{h}_O = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{h}}_O \\ \vec{\boldsymbol{h}} \end{bmatrix}$$



45　惯量

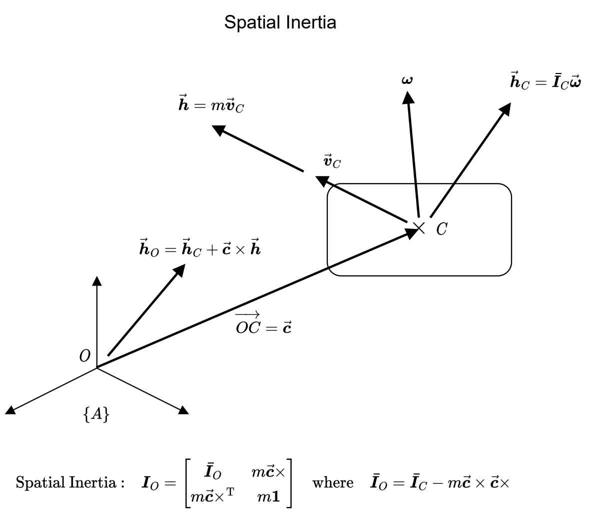
刚体的**空间惯量** (*spatial inertia*) 是其质量 m、质心 (CoM) C 和围绕质心的转动惯量 $\bar{\boldsymbol{I}}_C$ 的函数。

空间惯量提供了刚体惯量特性的完整描述。

在 Plücker 坐标中，空间刚体惯量为一个 6×6 矩阵：

$$\boldsymbol{I}_O = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{I}}_O & m\vec{\boldsymbol{c}}\times \\ m\vec{\boldsymbol{c}}\times^{\mathrm{T}} & m\boldsymbol{1} \end{bmatrix}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{I}}_O = \bar{\boldsymbol{I}}_C - m\vec{\boldsymbol{c}} \times \vec{\boldsymbol{c}}\times$。



46 惯量特性

- 张量 (Tensor)：空间惯量是将空间速度映射为动量的并矢张量 (dyadic tensor)。
- 对称性 (Symmetry)：$(\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}_1)\cdot\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1\cdot(\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}_2)$
- 正定性 (Positive Definiteness)： $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}>0 \quad \text{for all} \quad \boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$
- 动量 (Momentum)：$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}$
- 动能 (Kinetic Energy)：$T=\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}$
- 时间导数 (Time Derivative)：如果刚体具有惯量 $\boldsymbol{I}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{v}\times^*\boldsymbol{I}-\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}\times$$

- 坐标变换规则 (Coordinate Transformation)：

$$\boldsymbol{I}_B={}^B\boldsymbol{X}_A^*\,\boldsymbol{I}_A\,{}^A\boldsymbol{X}_B=\left({}^A\boldsymbol{X}_B\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_A\,{}^A\boldsymbol{X}_B$$

  这是全等变换 (congruence transform)。它保留对称性和正定性，但不保留特征值或特征向量。

- 组合 (Composition)：如果两个具有 $\boldsymbol{I}_A$ 和 $\boldsymbol{I}_B$ 惯量的机体连接在一起，则组合机体的惯量为总和为：

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{tot}}=\boldsymbol{I}_A+\boldsymbol{I}_B$$

- 参数数量 (Number of Parameters)：刚体惯量是 10 个参数的函数。一般空间惯量 (例如铰接体) 是 21 个参数的函数。

47 运动方程

$$\boldsymbol{f}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{I}\boldsymbol{v})=\boldsymbol{I}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}\times^*\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}$$

动力是动量的变化率	
$\boldsymbol{f}$	是作用在刚体上的净力
$\boldsymbol{I}$	是该机体的惯量
$\boldsymbol{v}$	是该机体的速度
$\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}$	是该机体的动量
$\boldsymbol{a}$	是该机体的空间加速度

48 动力学习题 A

48.1 习题 A1

验证如前面“惯量”一节所示，空间惯量 $\boldsymbol{I}_O$ 与速度向量 $\boldsymbol{v}_O = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{T}} & \vec{\boldsymbol{v}}_O^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 的乘积与前面“动量”一节中给出的动量 $\boldsymbol{h}_O$ 的表达式相同。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{I}}_O & m\vec{\boldsymbol{c}}\times \\ m\vec{\boldsymbol{c}}\times^{\mathrm{T}} & m\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{\omega}} \\ \vec{\boldsymbol{v}}_O \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{I}}_C\vec{\boldsymbol{\omega}} - m\vec{\boldsymbol{c}}\times\vec{\boldsymbol{c}}\times\vec{\boldsymbol{\omega}} + m\vec{\boldsymbol{c}}\times\vec{\boldsymbol{v}}_O \\ -m\vec{\boldsymbol{c}}\times\vec{\boldsymbol{\omega}} + m\vec{\boldsymbol{v}}_O \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{h}}_C + \vec{\boldsymbol{c}}\times(m\vec{\boldsymbol{v}}_O - m\vec{\boldsymbol{c}}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}) \\ m(\vec{\boldsymbol{v}}_O - \vec{\boldsymbol{c}}\times\vec{\boldsymbol{\omega}}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{h}}_C + \vec{\boldsymbol{c}}\times m\vec{\boldsymbol{v}}_C \\ m\vec{\boldsymbol{v}}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{h}}_C + \vec{\boldsymbol{c}}\times\vec{\boldsymbol{h}} \\ \vec{\boldsymbol{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{h}}_O \\ \vec{\boldsymbol{h}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

48.2 习题 A2

逆惯量的坐标变换规则是什么？

回答：

从前面“惯量特性”一节中的坐标变换规则公式 $\boldsymbol{I}_B = {}^B\boldsymbol{X}_A^*\,\boldsymbol{I}_A\,{}^A\boldsymbol{X}_B$ 开始，只需两侧求逆：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I}_B^{-1} &= \left({}^B\boldsymbol{X}_A^*\boldsymbol{I}_A\,{}^A\boldsymbol{X}_B\right)^{-1} \\
&= \left({}^A\boldsymbol{X}_B\right)^{-1}\boldsymbol{I}_A^{-1}\left({}^B\boldsymbol{X}_A^*\right)^{-1} \\
&= {}^B\boldsymbol{X}_A\,\boldsymbol{I}_A^{-1}\,{}^A\boldsymbol{X}_B^*
\end{aligned}$$

48.3 习题 A3

假设两个物体 A 和 B 分别具有 $\boldsymbol{I}_A$ 和 $\boldsymbol{I}_B$ 的惯量，它们最初处于静止状态。物体 A 对物体 B 施加动力 $\boldsymbol{f}$；所以物体 B 对物体 A 施加回的动力是 $-\boldsymbol{f}$ (牛顿第三定律)。找到相对惯量 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{rel}}$ 的表达式，该表达式将相互作用力 $\boldsymbol{f}$ 与两个物体的相对加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{a}_B - \boldsymbol{a}_A$ 联系起来，根据 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{I}_{\mathrm{rel}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{rel}}$。将你的结果与“惯量特性”一节中的惯量组合公式 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{tot}}$ 进行比较。你注意到了什么？

回答：

因为 $\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{I}_B^{-1}\boldsymbol{f}$ 并且 $\boldsymbol{a}_A = -\boldsymbol{I}_A^{-1}\boldsymbol{f}$；所以 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{a}_B - \boldsymbol{a}_A = \left(\boldsymbol{I}_A^{-1} + \boldsymbol{I}_B^{-1}\right)\boldsymbol{f}$。因此

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{rel}}^{-1} = \boldsymbol{I}_A^{-1} + \boldsymbol{I}_B^{-1}.$$

相对惯量是参与物体惯量的调和总和 (harmonic sum) (既逆矩阵总和的逆)，而复合物体的惯量是其各部分惯量的普通总和。

48.4 习题 A4

在“运动方程”一节中，空间运动方程结合了刚体质心的牛顿运动方程[1]，$\boldsymbol{f} = m\ddot{\vec{\boldsymbol{c}}}$，以及物体围绕质心旋转运动的欧拉运动方程，$\vec{\boldsymbol{n}}_C = \bar{\boldsymbol{I}}_C\dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} + \vec{\boldsymbol{\omega}}\times\bar{\boldsymbol{I}}_C\vec{\boldsymbol{\omega}}$。请证明空间运动方程确实包含了这两个方程。

提示：设置 $O = C$，以便在当前时刻 $\vec{\boldsymbol{c}} = \mathbf{0}$。

[1] 严格地说，牛顿运动方程适用于粒子。正是欧拉证明了同样的方程也适用于刚体的质心。

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{n}}_C \\ \vec{\boldsymbol{f}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{I}}_C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} \\ \ddot{\vec{\boldsymbol{c}}} - \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{\omega}}\times & \vec{\boldsymbol{v}}_C\times \\ \mathbf{0} & \vec{\boldsymbol{\omega}}\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{I}}_C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{\omega}} \\ \vec{\boldsymbol{v}}_C \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{I}}_C \dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} \\ m\ddot{\vec{\boldsymbol{c}}} - m\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{I}}_C \vec{\boldsymbol{\omega}} + m\vec{\boldsymbol{v}}_C \times \vec{\boldsymbol{v}}_C \\ m\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}_C \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{I}}_C \dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{I}}_C \vec{\boldsymbol{\omega}} \\ m\ddot{\vec{\boldsymbol{c}}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

49 运动约束

如果刚体的运动受到约束，则其速度是子空间 $S \subset \mathsf{M}^6$ 的一个元素，称为**运动自由子空间** (*motion freedom subspace*)。

$$
\begin{aligned}
&\text{degree of (motion) freedom:} && \dim(S) \\
&\text{degree of constraint:} && 6 - \dim(S)
\end{aligned}
$$

其中 S 可以随时间变化。

运动约束由具有以下特性的**约束力** (*constraint forces*) 引起：约束力不会对运动约束允许的任意运动做功 (达朗贝尔的虚功原理以及若丹的虚功率原理)。

因此，约束力是约束力子空间的元素，$T \subset \mathsf{F}^6$，其是 S (在对偶意义上) 的**正交补** (*orthogonal complement*)。T 的定义如下：

$$
T = \{\boldsymbol{f} | \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \ \ \forall \boldsymbol{v} \in S\} = S^{\perp}
$$

该子空间具有以下特性

$$
\dim(T) = 6 - \dim(S)
$$

S 和 T 提供了同样好的约束描述。

50 矩阵表示法

- 子空间 S 可以由满足 $\mathrm{range}(\boldsymbol{S}) = S$ 的任意 $6 \times \dim(S)$ 矩阵 $\boldsymbol{S}$ 表示。
- 同样，子空间 T 可以由满足 $\mathrm{range}(\boldsymbol{T}) = T$ 的任意 $6 \times \dim(T)$ 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 表示。
- 这些矩阵满足 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T} = \mathbf{0}$
- 注释：子空间 S 和 T 由约束唯一定义，但表示它们的矩阵不是唯一的。

51 约束方程

如果$\boldsymbol{v}$是运动约束允许的任意速度，则	如果$\boldsymbol{f}$是一个约束力，则
$\boldsymbol{v} \in S$	$\boldsymbol{f} \in T$
$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\lambda}$
$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T} = \mathbf{0}$
其中$\boldsymbol{\alpha}$是$\dim(S) \times 1$坐标向量	其中$\boldsymbol{\lambda}$是$\dim(T) \times 1$坐标向量

52 受约束运动分析

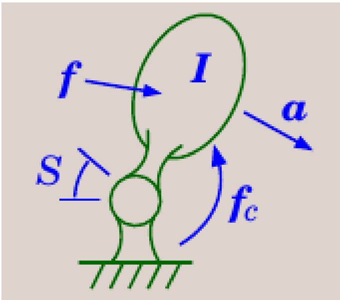
将力 $\boldsymbol{f}$ 应用于约束在子空间 $S \subset \mathsf{M}^6$ 中移动的机体。机体的惯量为 $\boldsymbol{I}$，最初处于静止状态。它的加速度 $\boldsymbol{a}$ 是多少，表示为 $\boldsymbol{f}$ 的函数?

作用在机体上的总力为 $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}_c$，其中 $\boldsymbol{f}_c$ 是由 $\boldsymbol{f}$ 引起的约束力。因此，机体的运动方程是

$$\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}_c = \boldsymbol{I}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \times^* \boldsymbol{I}\boldsymbol{v}$$

其中，因为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$，所以简化为 $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}_c=\boldsymbol{I}\boldsymbol{a}$。

此问题涉及到的未知项：$\boldsymbol{f}_c$ 和 $\boldsymbol{a}$。



为求解这个问题，我们必须首先消除 $\boldsymbol{f}_c$，然后用 $\boldsymbol{f}$ 表示 $\boldsymbol{a}$。

有两种方法可以处理：

- 使用 $\boldsymbol{S}$，或
- 使用 $\boldsymbol{T}$

使用$\boldsymbol{S}$的相关方程式	使用$\boldsymbol{T}$的相关方程式
$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} + \dot{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_c = \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{f}_c = \boldsymbol{T}\lambda$
$\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_c = \boldsymbol{I}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \times^* \boldsymbol{I}\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_c = \boldsymbol{I}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \times^* \boldsymbol{I}\boldsymbol{v}$
$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$意味着	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$意味着
$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{\alpha}}$	
$\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_c = \boldsymbol{I}\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_c = \boldsymbol{I}\boldsymbol{a}$
简化方程式	简化方程式
$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{\alpha}}$	$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_c = \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{f}_c = \boldsymbol{T}\lambda$
$\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_c = \boldsymbol{I}\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_c = \boldsymbol{I}\boldsymbol{a}$
求解：	求解：
$\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_c = \boldsymbol{I}\boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{\alpha}}$	$\boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_c) = \boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{\alpha}}$	$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_c) = \boldsymbol{0}$
$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \left(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{S}\right)^{-1}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{T}\lambda) = \boldsymbol{0}$
	$\lambda = -\boldsymbol{D}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}^{-1}$
	其中$\boldsymbol{D} = \left(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{T}\right)^{-1}$
$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{S}\right)^{-1}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{I}^{-1}\left(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{f}\right) = \left(\boldsymbol{I}^{-1} - \boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}^{-1}\right)\boldsymbol{f}$

53 动力学习题 B

53.1 习题 B1

在没有假设 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ 的情况下，(使用 $\boldsymbol{S}$) 重做“受约束运动分析”一节的示例。

回答：

将 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\alpha}$ 代入运动方程

$$\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_c = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{v} \times^* \boldsymbol{I}\boldsymbol{v}.$$

找到 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I}\boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_c - \boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{v} \times^* \boldsymbol{I}\boldsymbol{v} \\
\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{v} \times^* \boldsymbol{I}\boldsymbol{v}\right) \\
\dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \left(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{S}\right)^{-1}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{v} \times^* \boldsymbol{I}\boldsymbol{v}\right).
\end{aligned}$$

对于 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ 将此表达式代入回 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\alpha}$：

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{S}\right)^{-1}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{v} \times^* \boldsymbol{I}\boldsymbol{v}\right) + \dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\alpha}.$$

该方程可表示为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{b}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分别是受约束物体的表观逆惯量和导向加速度，并给出为

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{S}\right)^{-1}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$$

并且

$$\boldsymbol{b} = \dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{v}\times^{*}\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}\right).$$

53.2 习题 B2

假设我们被告知 $\dot{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{S}$。使用方程 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}$ 和 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$ 计算出 $\boldsymbol{a}$ 和 $\dot{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$。

回答：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{\alpha}) \\
&= \boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\alpha} \\
&= \boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{S}\boldsymbol{\alpha} \\
&= \boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{\alpha}}
\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$ 意味着 $\dot{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{0}$，这反过来意味着 $\dot{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$。但我们已经知道 $\dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$，所以

$$\dot{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}.$$

53.3 习题 B3

一般刚体系统的运动方程可以用 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{H}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}$ 的形式表示，其中 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{q}}$ 是广义动力和加速度的向量，$\boldsymbol{H}$ 是广义惯量矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是广义导向力向量。假设 $\ddot{\boldsymbol{q}} = \dot{\boldsymbol{\alpha}}$ 并且 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}$，以这种形式表示受约束刚体的运动方程 (你在问题 B1 中的答案)。

回答：

在问题 B1 的答案中得到的 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ 方程为

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \left(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{S}\right)^{-1}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{v}\times^{*}\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}\right).$$

代入 $\ddot{\boldsymbol{q}}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 给出为

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \left(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{S}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{v}\times^{*}\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}\right)\right).$$

将该方程重新排列为 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{H}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}$ 的形式给出为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{S} \\
\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{v}\times^{*}\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}\right).
\end{aligned}$$

53.4 习题 B4

受约束刚体的动能是多少？首先将其表示为 $\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的函数，然后将其表示为 $\boldsymbol{H}$ 和 $\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\alpha}$ 的函数。

回答：

“惯量特性”一节的动能定义为 $T=\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}$。代入 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{q}}$ 给出为

$$T=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{q}}=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{q}}.$$

(这实际上是 $\boldsymbol{H}$ 的定义特性。)

54 机器人动力学计算

空间向量简化了计算机器人动力学的任务。为了说明其用途，我们将研究一种最简单但最重要的动力学算法：用于计算机器人机构逆动力学的**递归牛顿-欧拉算法** (*recursive Newton-Euler algorithm*, RNEA)。**逆动力学** (*inverse dynamics*) 问题：

$$\boldsymbol{\tau}=\mathrm{ID}\left(model,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}\right)$$

为给定每个关节的位置和速度变量以及所需的关节加速度，计算产生这些加速度所需的关节动力。

55 递归牛顿-欧拉算法

55.1 算法方程

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_0&=\mathbf{0}\\
\boldsymbol{a}_0&=-\boldsymbol{a}_g\\
\boldsymbol{v}_i&=\boldsymbol{v}_{\lambda(i)}+\boldsymbol{s}_i\dot{q}_i\\
\boldsymbol{a}_i&=\boldsymbol{a}_{\lambda(i)}+\boldsymbol{s}_i\ddot{q}_i+\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{s}_i\dot{q}_i\\
\boldsymbol{f}_{\mathrm{B}i}&=\boldsymbol{I}_i\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{v}_i\times^*\boldsymbol{I}_i\boldsymbol{v}_i\\
\boldsymbol{f}_{\mathrm{J}i}&=\boldsymbol{f}_{\mathrm{B}i}+\sum_{j\in\mu(i)}\boldsymbol{f}_{\mathrm{J}j}\\
\boldsymbol{\tau}_i&=\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{J}i}
\end{aligned}$$

55.2 初始化

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{v}_0&=\mathbf{0}\\ \boldsymbol{a}_0&=\boxed{-\boldsymbol{a}_g}\end{aligned}}$$
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_i&=\boldsymbol{v}_{\lambda(i)}+\boldsymbol{s}_i\dot{q}_i\\
\boldsymbol{a}_i&=\boldsymbol{a}_{\lambda(i)}+\boldsymbol{s}_i\ddot{q}_i+\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{s}_i\dot{q}_i\\
\boldsymbol{f}_{\mathrm{B}i}&=\boldsymbol{I}_i\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{v}_i\times^*\boldsymbol{I}_i\boldsymbol{v}_i\\
\boldsymbol{f}_{\mathrm{J}i}&=\boldsymbol{f}_{\mathrm{B}i}+\textstyle\sum_{j\in\mu(i)}\boldsymbol{f}_{\mathrm{J}j}\\
\boldsymbol{\tau}_i&=\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{J}i}
\end{aligned}$$

初始化。其中 $-\boldsymbol{a}_g$代表重力由虚拟的基底加速度模拟

55.3 速度与加速度总和

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_0 &= \mathbf{0} \\
\boldsymbol{a}_0 &= -\boldsymbol{a}_g \\
&\boxed{\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{\lambda(i)} + \boldsymbol{s}_i \dot{q}_i} \\
&\boxed{\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_{\lambda(i)} + \boldsymbol{s}_i \ddot{q}_i + \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{s}_i \dot{q}_i} \\
\boldsymbol{f}_{\mathrm{B}i} &= \boldsymbol{I}_i \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{v}_i \times^* \boldsymbol{I}_i \boldsymbol{v}_i \\
\boldsymbol{f}_{\mathrm{J}i} &= \boldsymbol{f}_{\mathrm{B}i} + \textstyle\sum_{j \in \mu(i)} \boldsymbol{f}_{\mathrm{J}j} \\
\boldsymbol{\tau}_i &= \boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{J}i}
\end{aligned}$$

每个物体的速度是其父物体的速度以及
将其连接到其父物体的关节的速度之和
加速度的定义类似；
这个方程只是前一个方程的导数

55.4 关节速度

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_0 &= \mathbf{0} \\
\boldsymbol{a}_0 &= -\boldsymbol{a}_g \\
\boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{v}_{\lambda(i)} + \boxed{\boldsymbol{s}_i \dot{q}_i} \\
\boldsymbol{a}_i &= \boldsymbol{a}_{\lambda(i)} + \boldsymbol{s}_i \ddot{q}_i + \boxed{\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{s}_i} \dot{q}_i \\
\boldsymbol{f}_{\mathrm{B}i} &= \boldsymbol{I}_i \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{v}_i \times^* \boldsymbol{I}_i \boldsymbol{v}_i \\
\boldsymbol{f}_{\mathrm{J}i} &= \boldsymbol{f}_{\mathrm{B}i} + \textstyle\sum_{j \in \mu(i)} \boldsymbol{f}_{\mathrm{J}j} \\
\boldsymbol{\tau}_i &= \boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{J}i}
\end{aligned}$$

关节速度是定义运动方向的关节轴向量
与定义量值的关节速度变量的乘积
$\dot{\boldsymbol{s}}_i = \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{s}_i$，因为$\boldsymbol{s}_i$固连在物体$i$中，
且物体i以速度$\boldsymbol{v}_i$移动

55.5 机体加速度所需的动力

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_0 &= \mathbf{0} \\
\boldsymbol{a}_0 &= -\boldsymbol{a}_g \\
\boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{v}_{\lambda(i)} + \boldsymbol{s}_i \dot{q}_i \\
\boldsymbol{a}_i &= \boldsymbol{a}_{\lambda(i)} + \boldsymbol{s}_i \ddot{q}_i + \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{s}_i \dot{q}_i \\
&\boxed{\boldsymbol{f}_{\mathrm{B}i} = \boldsymbol{I}_i \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{v}_i \times^* \boldsymbol{I}_i \boldsymbol{v}_i} \\
\boldsymbol{f}_{\mathrm{J}i} &= \boldsymbol{f}_{\mathrm{B}i} + \textstyle\sum_{j \in \mu(i)} \boldsymbol{f}_{\mathrm{J}j} \\
\boldsymbol{\tau}_i &= \boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{J}i}
\end{aligned}$$

运动方程计算产生所需物体加速度所需的力

55.6 关节空间动力

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_0 &= \mathbf{0} \\
\boldsymbol{a}_0 &= -\boldsymbol{a}_g \\
\boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{v}_{\lambda(i)} + \boldsymbol{s}_i \dot{q}_i \\
\boldsymbol{a}_i &= \boldsymbol{a}_{\lambda(i)} + \boldsymbol{s}_i \ddot{q}_i + \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{s}_i \dot{q}_i \\
\boldsymbol{f}_{\mathrm{B}i} &= \boldsymbol{I}_i \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{v}_i \times^* \boldsymbol{I}_i \boldsymbol{v}_i
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\boldsymbol{f}_{\mathrm{J}i} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{B}i} + \textstyle\sum_{j \in \mu(i)} \boldsymbol{f}_{\mathrm{J}j}}
$$

该方程计算通过每个关节传递的空间力
$\boldsymbol{f}_{\mathrm{J}i}$是通过关节$i$从物体$\lambda(i)$传递到物体$i$的力，
并且$\boldsymbol{f}_{\mathrm{B}i}$是作用在物体$i$上的所有力的总和，所以
$\boldsymbol{f}_{\mathrm{B}i} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{J}i} - \sum_{j \in \mu(i)} \boldsymbol{f}_{\mathrm{J}j}$
其中$\mu(i)$是物体i的子体集合

$$
\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{J}i}
$$

55.7 关节动力变量

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_0 &= \mathbf{0} \\
\boldsymbol{a}_0 &= -\boldsymbol{a}_g \\
\boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{v}_{\lambda(i)} + \boldsymbol{s}_i \dot{q}_i \\
\boldsymbol{a}_i &= \boldsymbol{a}_{\lambda(i)} + \boldsymbol{s}_i \ddot{q}_i + \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{s}_i \dot{q}_i \\
\boldsymbol{f}_{\mathrm{B}i} &= \boldsymbol{I}_i \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{v}_i \times^* \boldsymbol{I}_i \boldsymbol{v}_i \\
\boldsymbol{f}_{\mathrm{J}i} &= \boldsymbol{f}_{\mathrm{B}i} + \textstyle\sum_{j \in \mu(i)} \boldsymbol{f}_{\mathrm{J}j}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{J}i}}
$$

关节力变量是通过关节传递的空间力的做功分量

55.8 算法过程

$\boldsymbol{v}_0 = \mathbf{0}$
$\boldsymbol{a}_0 = -\boldsymbol{a}_g$
for $i = 1$ **to** N **do**
  $[\boldsymbol{X}_{\mathrm{J}}, \boldsymbol{s}_i] = \mathrm{jcalc}(\mathrm{jtype}(i), q_i)$
  ${}^{i}\boldsymbol{X}_{\lambda(i)} = \boldsymbol{X}_{\mathrm{J}} \boldsymbol{X}_{\mathrm{T}}(i)$
  $\boldsymbol{v}_i = {}^{i}\boldsymbol{X}_{\lambda(i)} \boldsymbol{v}_{\lambda(i)} + \boldsymbol{s}_i \dot{q}_i$
  $\boldsymbol{a}_i = {}^{i}\boldsymbol{X}_{\lambda(i)} \boldsymbol{a}_{\lambda(i)} + \boldsymbol{s}_i \ddot{q}_i + \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{s}_i \dot{q}_i$
  $\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{I}_i \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{v}_i \times^* \boldsymbol{I}_i \boldsymbol{v}_i$
end for
for $i = N$ **to** 1 **do**
  $\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_i$
  if $\lambda(i) \neq 0$ **then**
    $\boldsymbol{f}_{\lambda(i)} = \boldsymbol{f}_{\lambda(i)} + {}^{\lambda(i)}\boldsymbol{X}_i^* \boldsymbol{f}_i$
  end if

end for

56 动力学习题 C

56.1 习题 C1

开发递归动力学算法来计算

- (a) 机器人机构的总动能，以及
- (b) 机器人机构的总动量。

提示：尝试采用递归牛顿-欧拉算法。

动能：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_0 &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{v}_{\lambda(i)} + \boldsymbol{s}_i \dot{q}_i \\ T_i &= \frac{1}{2} \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I}_i \boldsymbol{v}_i + \sum_{j \in \mu(i)} T_j \end{aligned}$$

$$T_{\text{tot}} = T_1$$

或者你可用 $T_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \sum_i \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I}_i \boldsymbol{v}_i$ 替换最后两行。

动量：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_0 &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{v}_{\lambda(i)} + \boldsymbol{s}_i \dot{q}_i \\ \boldsymbol{h}_i &= \boldsymbol{I}_i \boldsymbol{v}_i + \sum_{j \in \mu(i)} \boldsymbol{h}_j \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{h}_{\text{tot}} = \boldsymbol{h}_1$$

其中 $\boldsymbol{h}_i$ 是由连杆 i 及其所有后代组成的子树的总动量。

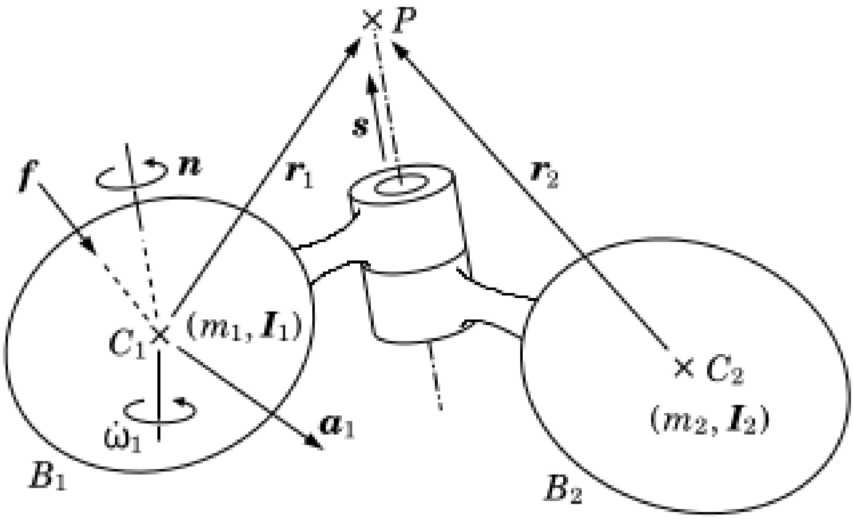


图 1: 使用 3-D 向量的问题图。

第五部分　求解一个两体动力学问题

57　使用 3-D 向量求解一个两体动力学问题

我们给定一个由两个物体组成的刚体系统，B_1 和 B_2，由一个旋转关节连接 [S1]。两个物体的质量为 m_1 和 m_2，质心位于 C_1 和 C_2 点，并且围绕各自的质心的转动惯量为 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$。两个物体最初都处于静止状态。关节的旋转轴通过点 P，其方向由 $\boldsymbol{s}$ 给出。一个动力系统作用在 B_1 上，导致两个物体加速。该系统相当于作用在通过 C_1 的直线上的单个动力 $\boldsymbol{f}$ 和力偶 $\boldsymbol{n}$。这些动力给 B_1 带来的角加速度为 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$，给其质心带来的线加速度为 $\boldsymbol{a}_1$。问题是用 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的项表达 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$ (图 1)。

求解

求解此类问题的关键在于认识到关节在两个物体之间引入了一个运动自由度，但也对可通过关节传递的力施加了一个约束。后者可用于消除前者，此时可以将系统中的每个动力和加速度表达为 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_1$ 的函数。然后，通过将 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 表达为 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_1$ 的函数来求解该问题，然后倒置方程，以动力的形式表达加速度。

让我们引入如下的量。设 $\boldsymbol{f}_1$、$\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{f}_2$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 分别为作用于 B_1 和 B_2 的净力和力偶，其中 $\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2$ 的作用线分别通过 C_1 和 C_2；设 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 为 B_2 的角加速度及其质心的线加速度；设 ${}^P\boldsymbol{a}_1$、${}^P\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$、${}^P\boldsymbol{a}_2$ 和 ${}^P\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$ 为 B_1 和 B_2 在 P 处的线加速度和角加速度；并设 ${}^P\boldsymbol{f}_2$、${}^P\boldsymbol{n}_2$、${}^1\boldsymbol{f}_2$ 和 ${}^1\boldsymbol{n}_2$ 分别为在 P 和 C_1 处作用于 B_2 的净力和力偶。由于作用力系统仅作用于 B_1，作用于 B_2 的净力和力偶也是通过关节传递的净力和力偶。让我们也定义 $\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{C_1P}$ 和 $\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{C_2P}$，并设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为关节加速度变量。

两个物体的运动方程，在它们的质心处表达，为

$$\boldsymbol{f}_1 = m_1\boldsymbol{a}_1, \tag{A1}$$

$$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{I}_1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1, \tag{A2}$$

$$\boldsymbol{f}_2 = m_2\boldsymbol{a}_2, \tag{A3}$$

并且

$$\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{I}_2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2. \tag{A4}$$

这里没有速度项，因为物体处于静止状态。将 (静止物体的) 动力和加速度从一点转移到另一点的规则为我们提供了 C_1、C_2 和 P 所指的量之间的以下关系：

$$^P\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{r}_1 \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_1, \tag{A5}$$

$$^P\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{r}_2 \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_2, \tag{A6}$$

$$^P\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1, \tag{A7}$$

$$^P\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_2, \tag{A8}$$

$$^1\boldsymbol{f}_2 = {}^P\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{f}_2, \tag{A9}$$

$$^P\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{n}_2 - \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{f}_2, \tag{A10}$$

并且

$$^1\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{n}_2 + (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{f}_2. \tag{A11}$$

如果 B_1 对 B_2 施加 $^1\boldsymbol{f}_2$ 和 $^1\boldsymbol{n}_2$，则 B_2 对 B_1 施加 $-{}^1\boldsymbol{f}_2$ 和 $-{}^1\boldsymbol{n}_2$ (牛顿第三定律在 C_1 处的表达)；因此，作用在 B_1 上的净力和力偶为

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{f} - {}^1\boldsymbol{f}_2,$$

$$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n} - {}^1\boldsymbol{n}_2,$$

从中 [通过方程 (A9) 和 (A11)] 我们得到

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2, \tag{A12}$$

并且

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2 + (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{f}_2. \tag{A13}$$

该关节允许 B_2 相对于 B_1 有一个运动自由度，并对从 B_1 传递到 B_2 的力偶施加一个约束。在 P 处表达，约束方程为

$$^P\boldsymbol{a}_2 = {}^P\boldsymbol{a}_1, \tag{A14}$$

$$^P\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = {}^P\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \boldsymbol{s}\boldsymbol{\alpha}, \tag{A15}$$

并且

$$\boldsymbol{s}^\top {}^P\boldsymbol{n}_2 = 0, \tag{A16}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是未知的关节加速度变量。在 $^P\boldsymbol{f}_2$ 上没有约束：方程 (A16) 足以确保关节传递的力和力偶在关节允许的相对运动方向上不做功。

我们现在已准备好求解这个问题。让我们首先根据 $\boldsymbol{a}_1$、$\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 的项计算 $\boldsymbol{a}_2$ 和 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$。从方程 (A8)、(A15) 和 (A7) 中，我们有

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 &= {}^P\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \\ &= {}^P\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \boldsymbol{s}\boldsymbol{\alpha} \\ &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \boldsymbol{s}\boldsymbol{\alpha},\end{aligned} \tag{A17}$$

并且从方程 (A6)，(A14)，(A17)，以及方程 (A5)，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_2 &= {}^P\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{r}_2 \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \\ &= {}^P\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \boldsymbol{s}\boldsymbol{\alpha}) \\ &= \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{r}_1 \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \boldsymbol{s}\boldsymbol{\alpha}) \\ &= \boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{s}\boldsymbol{\alpha}.\end{aligned} \tag{A18}$$

现在让我们计算 $\boldsymbol{\alpha}$。从方程 (A16)，(A10)，(A3)，(A4)，(A17) 和 (A18)，我们得到

$$\begin{aligned}0 =& \boldsymbol{s}^\top {}^P\boldsymbol{n}_2 \\ =& \boldsymbol{s}^\top (\boldsymbol{n}_2 - \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{f}_2) \\ =& \boldsymbol{s}^\top (\boldsymbol{I}_2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 - m_2\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{a}_2) \\ =& \boldsymbol{s}^\top (\boldsymbol{I}_2 (\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \boldsymbol{s}\boldsymbol{\alpha}) - m_2\boldsymbol{r}_2 \times \\ & (\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{s}\boldsymbol{\alpha})).\end{aligned}$$

收集 $\boldsymbol{\alpha}$ 中的项给出

$$\begin{aligned}& \boldsymbol{s}^\top (\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{s} - m_2\boldsymbol{r}_2 \times (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{s}))\boldsymbol{\alpha} \\ & + \boldsymbol{s}^\top (\boldsymbol{I}_2\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 - m_2\boldsymbol{r}_2 \times (\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_1)) = 0,\end{aligned}$$

因此

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\boldsymbol{s}^\top (\boldsymbol{I}_2\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 - m_2\boldsymbol{r}_2 \times (\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_1))}{\boldsymbol{s}^\top (\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{s} - m_2\boldsymbol{r}_2 \times (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{s}))}. \tag{A19}$$

该方程只有分母不等于零时才有效，所以我们必须研究它非零的必要条件。这个问题可以使用以下技巧来求解。对于任意两个向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，叉积 $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ 可以用 $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}$ 的形式表达，其中 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 是斜对称矩阵：

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}.$$

使用这个技巧，我们可以将分母表达为 $\boldsymbol{s}^\top\boldsymbol{J}\boldsymbol{s}$ 的形式，其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J} &= \boldsymbol{I}_2 - m_2\tilde{\boldsymbol{r}}_2\tilde{\boldsymbol{r}}_2 \\ &= \boldsymbol{I}_2 + m_2\tilde{\boldsymbol{r}}_2^\top\tilde{\boldsymbol{r}}_2.\end{aligned} \tag{A20}$$

因此，矩阵 $\boldsymbol{J}$ 是对称正定 (symmetric positive definite, SPD) 矩阵和对称半正定 (symmetric positive semi-definite, SPSD) 矩阵的和，因此其本身也是 SPD，因此方程 (A19) 的分母保证严格大于零。将方程 (A20) 代入方程 (A19) 对 $\boldsymbol{\alpha}$ 获得以下简化表达式：

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\boldsymbol{s}^\top (\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 - m_2\boldsymbol{r}_2 \times (\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{r}_1 \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_1))}{\boldsymbol{s}^\top\boldsymbol{J}\boldsymbol{s}}. \tag{A21}$$

下一步是用 $\boldsymbol{a}_1$、$\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 的项表达 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{n}$，并且然后使用方程 (A21) 消除 $\boldsymbol{\alpha}$。让我们从 $\boldsymbol{f}$ 开始。从方程 (A12)，(A1)，(A3) 和 (A18)，我们得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f} &= \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 \\ &= m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 \\ &= m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\left(\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\times\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{s}\boldsymbol{\alpha}\right) \\ &= (m_1+m_2)\,\boldsymbol{a}_1 + m_2\,(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{s}\boldsymbol{\alpha}.\end{aligned}$$

使用方程 (A21) 消除 $\boldsymbol{\alpha}$，给出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f} =& (m_1+m_2)\,\boldsymbol{a}_1 + m_2\,(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \\ &- m_2\frac{\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^\top\left(\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 - m_2\boldsymbol{r}_2\times(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{r}_1\times\dot{\boldsymbol{\omega}}_1)\right)}{\boldsymbol{s}^\top\boldsymbol{J}\boldsymbol{s}};\end{aligned}$$

并收集 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$ 中的项，给出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f} =& \left(m_1 + m_2 + m_2^2\frac{\tilde{\boldsymbol{r}}_2\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^\top\tilde{\boldsymbol{r}}_2}{\boldsymbol{s}^\top\boldsymbol{J}\boldsymbol{s}}\right)\boldsymbol{a}_1 \\ &+ \left(m_2\,(\tilde{\boldsymbol{r}}_2-\tilde{\boldsymbol{r}}_1) - m_2\frac{\tilde{\boldsymbol{r}}_2\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^\top\left(\boldsymbol{J}+m_2\tilde{\boldsymbol{r}}_2\tilde{\boldsymbol{r}}_1\right)}{\boldsymbol{s}^\top\boldsymbol{J}\boldsymbol{s}}\right)\dot{\boldsymbol{\omega}}_1.\end{aligned} \tag{A22}$$

对于 $\boldsymbol{n}$，使用方程 (A13)、(A2)、(A3)、(A4)、(A17) 和 (A18) 重复上述过程，给出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n} =& \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2 + (\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{f}_2 \\ =& \boldsymbol{I}_1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \boldsymbol{I}_2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + m_2\,(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{a}_2 \\ =& \boldsymbol{I}_1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \boldsymbol{I}_2\,(\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \boldsymbol{s}\boldsymbol{\alpha}) + m_2\,(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\times \\ &(\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{s}\boldsymbol{\alpha}) \\ =& \left(\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 - m_2\,(\tilde{\boldsymbol{r}}_1-\tilde{\boldsymbol{r}}_2)^2\right)\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \\ &+ m_2\,(\tilde{\boldsymbol{r}}_1-\tilde{\boldsymbol{r}}_2)\,\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{K}\boldsymbol{s}\boldsymbol{\alpha},\end{aligned} \tag{A23}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K} &= \boldsymbol{I}_2 + m_2\,(\tilde{\boldsymbol{r}}_1-\tilde{\boldsymbol{r}}_2)\,\tilde{\boldsymbol{r}}_2 \\ &= \boldsymbol{J} + m_2\tilde{\boldsymbol{r}}_1\tilde{\boldsymbol{r}}_2.\end{aligned} \tag{A24}$$

注意，方程 (A21) 现在可以简化为

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\boldsymbol{s}^\top\left(\boldsymbol{K}^\top\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 - m_2\tilde{\boldsymbol{r}}_2\boldsymbol{a}_1\right)}{\boldsymbol{s}^\top\boldsymbol{J}\boldsymbol{s}}. \tag{A25}$$

使用方程 (A25) 从方程 (A23) 中消除 $\boldsymbol{\alpha}$，给出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n} =& \left(\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 - m_2\,(\tilde{\boldsymbol{r}}_1-\tilde{\boldsymbol{r}}_2)^2\right)\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \\ &+ m_2\,(\tilde{\boldsymbol{r}}_1-\tilde{\boldsymbol{r}}_2)\,\boldsymbol{a}_1 - \frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^\top\left(\boldsymbol{K}^\top\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 - m_2\tilde{\boldsymbol{r}}_2\boldsymbol{a}_1\right)}{\boldsymbol{s}^\top\boldsymbol{J}\boldsymbol{s}},\end{aligned}$$

并收集 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_1$ 中的项，给出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n} =& \left(\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 - m_2\,(\tilde{\boldsymbol{r}}_1-\tilde{\boldsymbol{r}}_2)^2 - \frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^\top\boldsymbol{K}^\top}{\boldsymbol{s}^\top\boldsymbol{J}\boldsymbol{s}}\right)\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \\ &+ \left(m_2\,(\tilde{\boldsymbol{r}}_1-\tilde{\boldsymbol{r}}_2) + m_2\frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^\top\tilde{\boldsymbol{r}}_2}{\boldsymbol{s}^\top\boldsymbol{J}\boldsymbol{s}}\right)\boldsymbol{a}_1.\end{aligned} \tag{A26}$$

最后一步是将方程 (A22) 和 (A26) 结合成一个单一方程：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \end{bmatrix}, \tag{A27}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = (m_1 + m_2)\,\mathbf{1}_{3\times 3} + m_2^2 \frac{\tilde{\boldsymbol{r}}_2 \boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^\top \tilde{\boldsymbol{r}}_2}{\boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{J}\boldsymbol{s}}, \tag{A28}$$

$$\boldsymbol{B} = m_2\,(\tilde{\boldsymbol{r}}_2 - \tilde{\boldsymbol{r}}_1) - m_2 \frac{\tilde{\boldsymbol{r}}_2 \boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{K}^\top}{\boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{J}\boldsymbol{s}}, \tag{A29}$$

$$\boldsymbol{C} = m_2\,(\tilde{\boldsymbol{r}}_1 - \tilde{\boldsymbol{r}}_2) + m_2 \frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^\top \tilde{\boldsymbol{r}}_2}{\boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{J}\boldsymbol{s}}, \tag{A30}$$

并且

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 - m_2\,(\tilde{\boldsymbol{r}}_1 - \tilde{\boldsymbol{r}}_2)^2 - \frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{K}^\top}{\boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{J}\boldsymbol{s}}. \tag{A31}$$

其中 $\mathbf{1}_{3\times 3}$ 是一个单位矩阵。注意，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 是对称矩阵，并且 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$。则原问题的求解方案为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{n} \end{bmatrix}. \tag{A32}$$

此时，我们应该证明 6×6 系数矩阵是非奇异的。它实际上是一个 SPD 矩阵，但证明它的最简单方法是证明它与使用 6-D 向量方法获得的解相同，这很容易被证明是一个 SPD 矩阵。

Reference

- [S1] R. Featherstone. (2010). Spatial vector algebra [Online].
  Available: http://users.cecs.anu.edu.au/roy/spatial/

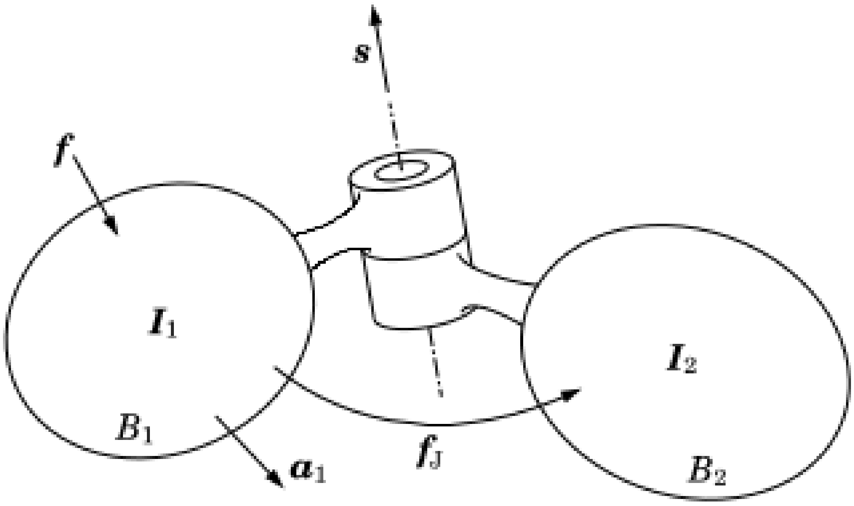


图 2: 使用空间向量的问题图。

58 使用空间向量求解一个两体动力学问题

我们给定一个由两个物体组成的刚体系统，B_1 和 B_2，由一个旋转关节连接 [S2]。这两个物体分别具有的惯量为 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$，并且它们最初处于静止状态。关节的旋转轴为 $\boldsymbol{s}$。一个动力 $\boldsymbol{f}$ 被施加到 B_1 上，导致两个物体加速。问题是计算 B_1 的加速度作为 $\boldsymbol{f}$ 的函数 (图 2)。

求解

设 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 为两个物体的加速度，并设 $\boldsymbol{f}_\mathrm{J}$ 为通过关节从 B_1 传递到 B_2 的动力。因此，作用在这两个物体上的净力分别为 $\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_\mathrm{J}$ 和 $\boldsymbol{f}_\mathrm{J}$，并且其运动方程为

$$\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_\mathrm{J}=\boldsymbol{I}_1\boldsymbol{a}_1 \tag{B1}$$

并且

$$\boldsymbol{f}_\mathrm{J}=\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{a}_2. \tag{B2}$$

这里没有速度项，因为物体处于静止状态。该关节允许 B_2 相对于 B_1 围绕 $\boldsymbol{s}$ 规定的轴加速；因此，$\boldsymbol{a}_2$ 可以用以下形式表达为

$$\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{s}\boldsymbol{\alpha}, \tag{B3}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是关节加速度变量。同样，这里没有速度项，因为物体处于静止状态。该运动约束由关节约束力 $\boldsymbol{f}_\mathrm{J}$ 实现，因此 $\boldsymbol{f}_\mathrm{J}$ 必须满足

$$\boldsymbol{s}^\top\boldsymbol{f}_\mathrm{J}=0, \tag{B4}$$

即，约束力在关节允许的运动方向上不做功。

已给定方程 (B1)-(B4)，问题求解如下。首先，将方程 (B3) 代入方程 (B2)，给出

$$\boldsymbol{f}_\mathrm{J}=\boldsymbol{I}_2\left(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{s}\boldsymbol{\alpha}\right). \tag{B5}$$

将方程 (B5) 代入方程 (B4) 给出

$$\boldsymbol{s}^\top\boldsymbol{I}_2\left(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{s}\boldsymbol{\alpha}\right)=0,$$

从中我们得到 $\boldsymbol{\alpha}$ 的以下表达式：

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\boldsymbol{s}^{\top}\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{s}^{\top}\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{s}}. \tag{B6}$$

将方程 (B6) 代回方程 (B5) 给出

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{J}} = \boldsymbol{I}_2\left(\boldsymbol{a}_1 - \frac{\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^{\top}\boldsymbol{I}_2}{\boldsymbol{s}^{\top}\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{s}}\boldsymbol{a}_1\right),$$

并且将该方程代回方程 (B1) 给出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f} &= \boldsymbol{I}_1\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{I}_2\boldsymbol{a}_1 - \frac{\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^{\top}\boldsymbol{I}_2}{\boldsymbol{s}^{\top}\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{s}}\boldsymbol{a}_1 \\ &= \left(\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 - \frac{\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^{\top}\boldsymbol{I}_2}{\boldsymbol{s}^{\top}\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{s}}\right)\boldsymbol{a}_1.\end{aligned}$$

括号中的表达式是非奇异的，并因此可以将其倒置，用 $\boldsymbol{f}$ 的项表达 $\boldsymbol{a}_1$：

$$\boldsymbol{a}_1 = \left(\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 - \frac{\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^{\top}\boldsymbol{I}_2}{\boldsymbol{s}^{\top}\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{s}}\right)^{-1}\boldsymbol{f}. \tag{B7}$$

Reference

- [S2] R. Featherstone. (2010). Spatial vector algebra [Online]. Available: http://users.cecs.anu.edu.au/roy/spatial/