指数映射的导数

Ethan Eade

November 12, 2018

1 简介

本文档计算

$$\left[\frac{\partial}{\partial\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\right]\log\left(\exp(x+\epsilon)\cdot\exp(x)^{-1}\right) \tag{1}$$

其中 exp 和 log 是李群中的指数映射及其逆映射，并且 x 和 ϵ 是相关李代数的元素。

2 定义

设 $\mathcal{G}$ 是一个李群，具有相关的李代数 $\mathfrak{g}$。则指数映射将代数元素转化为群元素：

$$\exp : \mathfrak{g} \to \mathcal{G} \tag{2}$$

$$\exp(x) = \mathbf{I} + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \tag{3}$$

群的伴随表示 Adj 通过与群元素左乘，线性地变换一个代数元素的指数映射：

$$x \in \mathfrak{g} \tag{4}$$

$$Y \in \mathcal{G} \tag{5}$$

$$Y \cdot \exp(x) = \exp\left(\mathrm{Adj}_Y \cdot x\right) \cdot Y \tag{6}$$

在代数中的伴随算子是表示李括号的线性算子：

$$x, y \in \mathfrak{g} \tag{7}$$

$$\mathrm{ad}_x \cdot y = x \cdot y - y \cdot x \tag{8}$$

伴随算子与指数映射进行交换：

$$\mathrm{Adj}_{\exp(y)} = \exp\left(\mathrm{ad}_y\right) \tag{9}$$

我们定义一个函数 f 从代数到群的微分如下：

$$f : \mathfrak{g} \to \mathcal{G} \tag{10}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \tag{11}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\right]\log\left(f(x+\epsilon)\cdot f(x)^{-1}\right) \tag{12}$$

在本文档中，我们对 exp 的导数 $D_{\exp}$ 感兴趣：

$$D_{\exp} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \tag{13}$$

$$D_{\exp}(x) = \frac{\partial \exp(x)}{\partial x} \tag{14}$$

3 $D_{\exp}(x)$ 公式的推导

这里不是一个严格的推导 (省略了两个近似步骤所需的 epsilon-delta 证明)，但我觉得它直观地令人满意。更严格的方法是使用关于连续向量场上积分流的定理。

定义 F 为 x 的 exp ，由一个代数元素 ϵ 修改：

$$\epsilon \in \mathfrak{g} \tag{15}$$

$$F(x,\epsilon) = \exp(x+\epsilon) \tag{16}$$

我们也可以取同一测地线上多个较小群元素的乘积：

$$F(x,\epsilon) = \prod_{i=1}^{N} \exp\left(\frac{1}{N}\cdot(x+\epsilon)\right) \tag{17}$$

让步数 N 任意大，我们可以发送 $\frac{1}{N^2} \to 0$。则对于任意精确度，我们有

$$F(x,\epsilon) \approx \prod_{i=1}^{N} \exp\left(\frac{x}{N}\right)\cdot\exp\left(\frac{\epsilon}{N}\right) \tag{18}$$

$\exp\left(\frac{\epsilon}{N}\right)$ 的每一个因子都可以通过乘以伴随值适当的次数转移到乘积的左侧：

$$A_N \equiv \mathrm{Adj}_{\exp\left(\frac{x}{N}\right)} \tag{19}$$

$$F(x,\epsilon) \approx \left[\exp\left(\frac{1}{N}\cdot A_N\cdot\epsilon\right)\cdot\exp\left(\frac{1}{N}\cdot A_N^2\cdot\epsilon\right)\cdot\ldots\cdot\exp\left(\frac{1}{N}\cdot A_N^N\cdot\epsilon\right)\right]\cdot\left[\prod_{i=1}^{N}\exp\left(\frac{x}{N}\right)\right] \tag{20}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{N}\exp\left(\frac{1}{N}\cdot A_N^i\cdot\epsilon\right)\right]\cdot\left[\prod_{i=1}^{N}\exp\left(\frac{x}{N}\right)\right] \tag{21}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{N}\exp\left(\frac{1}{N}\cdot A_N^i\cdot\epsilon\right)\right]\cdot\exp(x) \tag{22}$$

通过选择足够小的 ϵ，指数的乘积可以任意地很好地近似于一个总和的指数：

$$F(x,\epsilon) = \exp\left(\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} A_N^i\cdot\epsilon + O\left(\|\epsilon\|^2\right)\right)\cdot\exp(x) \tag{23}$$

对于一个李群，我们可以使用伴随的性质方程 (9) 重写 A_N ：

$$A_N \equiv \mathrm{Adj}_{\exp\left(\frac{x}{N}\right)} \tag{24}$$

$$= \exp\left(\mathrm{ad}_{\frac{x}{N}}\right) \tag{25}$$

$$= \exp\left(\frac{1}{N}\cdot\mathrm{ad}_x\right) \tag{26}$$

取第 i 次方为：

$$A_N^i = \exp\left(\frac{i}{N} \cdot \mathrm{ad}_x\right) \tag{27}$$

因此当 $N \to \infty$，总和变为积分：

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} A_N^i = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \exp\left(\frac{i}{N} \cdot \mathrm{ad}_x\right) \tag{28}$$

$$\to \int_0^1 \exp\left(t \cdot \mathrm{ad}_x\right) \cdot \mathrm{d}t \tag{29}$$

积分可以在矩阵指数的幂级数上进行。

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} A_N^i = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i \cdot \mathrm{ad}_x^i}{i!}\right) \cdot \mathrm{d}t \tag{30}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{i+1}\mathrm{ad}_x^i}{(i+1)!}\right)\Bigg|_0^1 \tag{31}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}_x^i}{(i+1)!} \tag{32}$$

代入等式 (23)：

$$F(x,\epsilon) = \exp\left(\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}_x^i}{(i+1)!}\right) \cdot \epsilon + O\left(\|\epsilon\|^2\right)\right) \cdot \exp(x)$$

使用来自等式 (14) 的定义，

$$D_{\exp}(x) = \left[\frac{\partial}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\right] \log\left(F(x,\epsilon) \cdot \exp(x)^{-1}\right) \tag{33}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\right] \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}_x^i}{(i+1)!}\right) \cdot \epsilon + O\left(\|\epsilon\|^2\right) \tag{34}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}_x^i}{(i+1)!} \tag{35}$$

4 log 的导数

当 $x = \log(\exp(x))$ 时，在等式 (14) 中，我们可以倒置已微分的函数：

$$\delta \equiv f(\epsilon) = \log\left(\exp(x+\epsilon) \cdot \exp(x)^{-1}\right) \tag{36}$$

$$\epsilon = \log(\exp(\delta) \cdot \exp(x)) - x \tag{37}$$

当按 δ 微分时，第二项消失：

$$D_{\log}(x) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial \delta}\bigg|_{\delta=0}\right] \log(\exp(\delta) \cdot \exp(x)) \tag{38}$$

在函数的双射区域中，逆映射的导数是导数的逆映射：

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \delta} = \left[\frac{\partial \delta}{\partial \epsilon}\right]^{-1} \tag{39}$$

$$D_{\log}(x) = D_{\exp}^{-1}(x) \tag{40}$$

5 特殊情况

等式 (35) 的无穷级数可以在某些李群中可用封闭形式表达。

5.1 SO(3)

5.1.1 exp 的导数

代数 $\mathfrak{so}(3)$ 的元素为 3×3 斜对称矩阵，且伴随表示相同：

$$\omega \in \Re^3 \tag{41}$$

$$\omega_\times = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3) \tag{42}$$

$$\mathrm{ad}_\omega = \omega_\times \tag{43}$$

$$\mathrm{ad}_\omega^3 = -\|\omega\|^2 \cdot \mathrm{ad}_\omega \tag{44}$$

由于 ad 的高阶次幂折回到低阶次幂，因此我们可以收集系列中的项：

$$D_{\exp}(\omega) = \mathbf{I} + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot \|\omega\|^{2i}}{(2i+2)!} \right) \cdot \mathrm{ad}_\omega + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot \|\omega\|^{2i}}{(2i+3)!} \right) \cdot \mathrm{ad}_\omega^2 \tag{45}$$

$$= \mathbf{I} + \left(\frac{1 - \cos\|\omega\|}{\|\omega\|^2} \right) \cdot \omega_\times + \left(\frac{1 - \frac{\sin\|\omega\|}{\|\omega\|}}{\|\omega\|^2} \right) \cdot \omega_\times^2 \tag{46}$$

注意这个

$$\omega_\times^2 = \omega\omega^T - \|\omega\|^2 \mathbf{I} \tag{47}$$

所以 $D_{\exp}(\omega)$ 可被重写为：

$$D_{\exp}(\omega) = \mathbf{I} + \left(\frac{1 - \cos\|\omega\|}{\|\omega\|^2} \right) \cdot \omega_\times + \left(\frac{1 - \frac{\sin\|\omega\|}{\|\omega\|}}{\|\omega\|^2} \right) \cdot \left(\omega\omega^T - \|\omega\|^2 \mathbf{I} \right) \tag{48}$$

$$= \frac{\sin\|\omega\|}{\|\omega\|} \cdot \mathbf{I} + \left(\frac{1 - \cos\|\omega\|}{\|\omega\|^2} \right) \cdot \omega_\times + \left(\frac{1 - \frac{\sin\|\omega\|}{\|\omega\|}}{\|\omega\|^2} \right) \cdot \omega\omega^T \tag{49}$$

为方便起见，我们标记系数：

$$a_\theta = \frac{\sin\theta}{\theta} \tag{50}$$

$$b_\theta = \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} \tag{51}$$

$$c_\theta = \frac{1 - a_\theta}{\theta^2} \tag{52}$$

$$D_{\exp}(\omega) = a_{\|\omega\|} \cdot \mathbf{I} + b_{\|\omega\|} \cdot \omega_\times + c_{\|\omega\|} \cdot \omega\omega^T \tag{53}$$

5.1.2 log 的导数

回想一下，在 exp 和 log 的双射区域中，

$$D_{\log}(\omega) = D_{\exp}^{-1}(\omega) \tag{54}$$

对于 $\|\omega\| < 2\pi$，$D_{\exp}(\omega)$ 存在一个封闭形式的逆映射：

$$D_{\exp}^{-1}(\omega) = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\omega_\times + e_{\|\omega\|}\omega_\times^2 \tag{55}$$

$$e_\theta = \frac{b_\theta - 2c_\theta}{2a_\theta} \tag{56}$$

$$= \frac{b_\theta - \frac{1}{2}a_\theta}{1 - \cos\theta} \tag{57}$$

根据 θ 的值，应在等式 (56) 或等式 (57) 中使用一个更方便的等式来计算 e_θ。

5.2 SE(3)

5.2.1 exp 的导数

同样的，ad 的高阶次幂可表达为低阶次幂：

$$u, \omega \in \Re^3 \tag{58}$$

$$\theta \equiv \|\omega\| \tag{59}$$

$$x = \begin{pmatrix} \omega_\times & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{se}(3) \tag{60}$$

$$\mathrm{ad}_x = \begin{pmatrix} \omega_\times & u_\times \\ 0 & \omega_\times \end{pmatrix} \tag{61}$$

$$\mathrm{ad}_x^2 = \begin{pmatrix} \omega_\times^2 & (\omega_\times u_\times + u_\times \omega_\times) \\ 0 & \omega_\times^2 \end{pmatrix} \tag{62}$$

$$\mathrm{ad}_x^3 = -\theta^2 \cdot \mathrm{ad}_x - 2\left(\omega^T u\right)\begin{pmatrix} 0 & \omega_\times \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{63}$$

收集各项，我们有：

$$Q(\omega) \equiv \left(\frac{a_\theta - 2b_\theta}{\theta^2}\right) \cdot \omega_x + \left(\frac{b_\theta - 3c_\theta}{\theta^2}\right) \cdot \omega_\times^2 \tag{64}$$

$$D_{\exp}(x) = \mathbf{I} + a_\theta \cdot \mathrm{ad}_x + c_\theta \cdot \mathrm{ad}_x^2 + \left(\omega^T u\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & Q(\omega) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{65}$$

$$= \begin{pmatrix} D_{\exp}(\omega) & \left(b_\theta \cdot u_\times + c_\theta \cdot (\omega_\times u_\times + u_\times \omega_\times) + \left(\omega^T u\right) \cdot Q(\omega)\right) \\ 0 & D_{\exp}(\omega) \end{pmatrix} \tag{66}$$

使用特征式

$$\omega_\times u_\times + u_\times \omega_\times = \omega u^T + u\omega^T - 2\left(\omega^T u\right)\mathbf{I} \tag{67}$$

我们可以重写 $D_{\exp}(x)$:

$$W(\omega) \equiv -2c_\theta \cdot \mathbf{I} + Q(\omega) \tag{68}$$

$$= -2c_\theta \cdot \mathbf{I} + \left(\frac{a_\theta - 2b_\theta}{\theta^2}\right) \cdot \omega_\times + \left(\frac{b_\theta - 3c_\theta}{\theta^2}\right) \cdot \left(\omega\omega^T - \theta^2 \mathbf{I}\right) \tag{69}$$

$$= (c_\theta - b_\theta) \cdot \mathbf{I} + \left(\frac{a_\theta - 2b_\theta}{\theta^2}\right) \cdot \omega_\times + \left(\frac{b_\theta - 3c_\theta}{\theta^2}\right) \cdot \omega\omega^T \tag{70}$$

$$D_{\exp}(x) = \begin{pmatrix} D_{\exp}(\omega) & \left(b_\theta \cdot u_\times + c_\theta \cdot \left(\omega u^T + u\omega^T\right) + \left(\omega^T u\right) \cdot W(\omega)\right) \\ 0 & D_{\exp}(\omega) \end{pmatrix} \tag{71}$$

5.2.2 log 的导数

一个平方分块矩阵 M 具有形式 -

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \tag{72}$$

并有逆矩阵

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \tag{73}$$

因此，当 $\|\omega\| < 2\pi$ 时，使用等式 (55) 给定的 $D_{\exp}^{-1}(\omega)$，对于 $D_{\exp}^{-1}(x)$ 存在封闭形式：

$$B \equiv b_\theta \cdot u_\times + c_\theta \cdot \left(\omega u^T + u\omega^T\right) + \left(\omega^T u\right) \cdot W(\omega) \tag{74}$$

$$D_{\exp}^{-1}(x) = \begin{pmatrix} D_{\exp}^{-1}(\omega) & -D_{\exp}^{-1}(\omega) \cdot B \cdot D_{\exp}^{-1}(\omega) \\ 0 & D_{\exp}^{-1}(\omega) \end{pmatrix} \tag{75}$$

5.3 SE(2)

5.3.1 exp 的导数

在 $\mathfrak{se}(2)$ 中，ad 的高阶次幂折回到低阶次幂：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} \in \Re^3 \tag{76}$$

$$m = \begin{pmatrix} 0 & -\theta & x \\ \theta & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{se}(2) \tag{77}$$

$$\mathrm{ad}_m = \begin{pmatrix} 0 & -\theta & y \\ \theta & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{78}$$

$$\mathrm{ad}_m^2 = \begin{pmatrix} -\theta^2 & 0 & \theta x \\ 0 & -\theta^2 & \theta y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{79}$$

$$\mathrm{ad}_m^3 = -\theta^3 \mathrm{ad}_m \tag{80}$$

收集各项：

$$D_{\exp}(m) = \mathbf{I} + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot \theta^{2i}}{(2i+2)!}\right) \mathrm{ad}_m + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot \theta^{2i}}{(2i+3)!}\right) \mathrm{ad}_m^2 \tag{81}$$

$$= \mathbf{I} + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right) \cdot \mathrm{ad}_m + \left(\frac{1-\frac{\sin\theta}{\theta}}{\theta^2}\right) \cdot \mathrm{ad}_m^2 \tag{82}$$

$$= \begin{pmatrix} a_\theta & -\theta b_\theta & (c_\theta x + b_\theta y) \\ \theta b_\theta & a_\theta & (c_\theta y - b_\theta x) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{83}$$

5.3.2 log 的导数

将来自等式 (83) 的 $D_{\exp}$ 写为块矩阵形式，给出为：

$$D_{\exp} = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{84}$$

并具有逆矩阵

$$D_{\log} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1} \cdot v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{85}$$

5.4 Sim(2)

5.4.1 exp 的导数

在 $\mathfrak{sim}(2)$ 中，ad 的高阶次幂不会折回到低阶次幂：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \lambda \end{pmatrix} \in \Re^4 \tag{86}$$

$$m = \begin{pmatrix} 0 & -\theta & x \\ \theta & 0 & y \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \in \mathfrak{sim}(2) \tag{87}$$

$$\mathrm{ad}_m = \begin{pmatrix} \lambda & -\theta & y & -x \\ \theta & \lambda & -x & -y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{88}$$

$$= \begin{pmatrix} Q & P \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{89}$$

$$\mathrm{ad}_m^n = \begin{pmatrix} Q^n & Q^{n-1} \cdot P \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{90}$$

为了计算 $D_{\exp}$，我们可以通过特征分解 ($i \equiv \sqrt{-1}$) 将 Q 对角化：

$$Q = V \cdot D \cdot V^* \tag{91}$$

$$V \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \tag{92}$$

$$E \equiv \begin{pmatrix} \lambda - \theta i & \\ & \lambda + \theta i \end{pmatrix} \tag{93}$$

现在我们可以依据 E 及其指数来表达 $D_{\exp}$：

$$D_{\exp}(m) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}_m^j}{(j+1)!} \tag{94}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} \begin{pmatrix} Q^j & Q^{j-1} \cdot P \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{95}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{Q^j}{(j+1)!}\right] & \left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{Q^j}{(j+2)!}\right) \cdot P\right] \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \tag{96}$$

$$= \begin{pmatrix} \left[V \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{E^j}{(j+1)!}\right) \cdot V^*\right] & \left[V \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{E^j}{(j+2)!}\right) \cdot V^* \cdot P\right] \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{97}$$

$$= \begin{pmatrix} [V \cdot E^{-1} \cdot (\exp_0(E) - \mathbf{I}) \cdot V^*] & [V \cdot E^{-2} \cdot (\exp(E) - \mathbf{I} - E) \cdot V^* \cdot P] \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{98}$$

当 E 的逆矩阵存在时，E^{-1} 有一个简单形式：

$$E^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 + \theta^2} \begin{pmatrix} \lambda + \theta i & \\ & \lambda - \theta i \end{pmatrix} \tag{99}$$

乘回等式仅产生实数元素。

$$D_{\exp}(m) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} g & -h \\ h & g \end{pmatrix} \cdot P \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \tag{100}$$

$$p \equiv \frac{1}{\lambda^2 + \theta^2} \left[e^{\lambda} \cdot (\lambda \cos\theta + \theta \sin\theta) - \lambda\right] \tag{101}$$

$$q \equiv \frac{1}{\lambda^2 + \theta^2} \left[e^{\lambda} \cdot (\lambda \sin\theta - \theta \cos\theta) + \theta\right] \tag{102}$$

$$g \equiv \frac{1}{\lambda^2 + \theta^2} \left[\frac{1}{\lambda^2 + \theta^2} \cdot (\lambda p + \theta q) - \lambda\right] \tag{103}$$

$$h \equiv \frac{1}{\lambda^2 + \theta^2} \left[\frac{1}{\lambda^2 + \theta^2} \cdot (\lambda q - \theta p) + \theta\right] \tag{104}$$

当 $\lambda^2+\theta^2\to 0$ 时，则应使用泰勒展开式替代：

$$p \equiv 1+\frac{a}{2} \tag{105}$$

$$q \equiv \frac{b}{2} \tag{106}$$

$$g \equiv \frac{1}{2}+\frac{a}{6} \tag{107}$$

$$h \equiv \frac{b}{6} \tag{108}$$

5.4.2 log 的导数

将来自等式 (100) 的 $D_{\exp}$ 写为块矩阵形式，给出为：

$$D_{\exp} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \tag{109}$$

并具有逆矩阵

$$D_{\log} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}\cdot B \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \tag{110}$$

6 读书笔记

对于方程 (9)，

$$\mathrm{Adj}_{\exp(y)} = \exp\left(\mathrm{ad}_y\right)$$

其表明，对于给定的李代数元素 y，它的指数映射 $\exp(y)$ 的伴随矩阵等于对应的李代数的伴随矩阵的指数映射。这个公式的意义在于，通过指数映射和伴随矩阵的关系，我们可以在李群和李代数之间进行转换和对应。

为证明方程 (9)，我们首先需要明确伴随表示。对于李群 $\mathcal{G}$ 中的一个元素 g，我们可以定义其伴随表示 Adj_g 为一个从 $\mathcal{G}$ 到 $\mathcal{G}$ 的映射，具体为 $\mathrm{Adj}_g(h) = g \cdot h \cdot g^{-1}$，其中 "$\cdot$" 表示群的乘法操作。这个映射可以推广到李代数上，即对于李代数上的一个元素 x，我们可以定义其伴随表示 ad_x 为一个从李代数到李代数的映射，具体为 $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$，其中 "$[x, y]$" 表示李括号。

然后，我们需要明确指数映射。对于李代数上的一个元素 x，我们可以通过指数映射 $\exp(x)$ 来得到李群上的一个元素。这个映射的具体形式为 $\exp(x) = \sum_0^\infty (x^n/n!)$。并且我们有 $\exp(y)^{-1} = \exp(-y)$，所以有 $\exp(y) \cdot x \cdot \exp(y)^{-1} = \exp(y) \cdot x \cdot \exp(-y)$。

在推导这个公式之前，我们需要了解一些基本的概念和性质：

1. 对于李群 $\mathcal{G}$ 中的元素 g，其伴随表示 $\mathrm{Adj}_g : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ 定义为 $\mathrm{Adj}_g(h) = g \cdot h \cdot g^{-1}$，其中 $h \in \mathcal{G}$。
2. 对于李代数 $\mathfrak{g}$ 中的元素 x，其伴随表示 $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 定义为 $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$，其中 $y \in \mathfrak{g}$，$[x, y]$ 是 x 和 y 的李括号。
3. 指数映射 $\exp : \mathfrak{g} \to \mathcal{G}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 到李群 $\mathcal{G}$ 的一个光滑映射，且满足 $\exp(0) = e$ (这里 e 是李群的单位元)，以及 $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ (对于足够小的 $x, y \in \mathfrak{g}$)。

利用这些定义和性质，我们可以推导 $\mathrm{Adj}_{\exp(y)} = \exp\left(\mathrm{ad}_y\right)$ 这个公式。为了简化表示，我们设 $g = \exp(y)$ ，则 $\mathrm{Adj}_g(h) = g \cdot h \cdot g^{-1}$ 。我们需要计算 h 的微分 $\frac{d}{dt}\mathrm{Adj}_{\exp(ty)}(h)\Big|_{t=0}$ ，其中 t 是实数。

首先，我们需要计算 $\frac{d}{dt}\mathrm{Adj}_{\exp(ty)}(h)\Big|_{t=0}$ ，也就是 $\frac{d}{dt}(\exp(ty) \cdot h \cdot \exp(-ty))\big|_{t=0}$ 。

我们可以将 $\exp(ty) \cdot h \cdot \exp(-ty)$ 看作两个函数的复合，即 $f(t) = \exp(ty) \cdot h$ 和 $g(t) = \exp(-ty)$，我们要计算的是 $(f(t)g(t))'$ 在 $t = 0$ 的值。

根据链式法则，$(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$ 。因此，我们有

$$\frac{d}{dt}(\exp(ty) \cdot h \cdot \exp(-ty))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\exp(ty) \cdot h) \cdot \exp(-ty) + \exp(ty) \cdot h \cdot \frac{d}{dt}\exp(-ty)\Big|_{t=0}$$

其次，我们需要计算 $\frac{d}{dt}\exp(ty)$ 和 $\frac{d}{dt}\exp(-ty)$ 。根据指数映射的微分性质，我们有 $\frac{d}{dt}\exp(ty) = y\exp(ty)$ 和 $\frac{d}{dt}\exp(-ty) = -y\exp(-ty)$ 。因此，我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\exp(ty) \cdot h) \cdot \exp(-ty) + \exp(ty) \cdot h \cdot \frac{d}{dt}\exp(-ty)\Big|_{t=0} \\ &= y\exp(ty) \cdot h \cdot \exp(-ty) - \exp(ty) \cdot h \cdot y\exp(-ty)\big|_{t=0} \end{aligned}$$

由于 $\exp(0) = e$ ，我们得到

$$yehe - ehye = yh - hy = [y, h] = \mathrm{ad}_y(h)$$

整理以上步骤，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{Adj}_{\exp(ty)}(h)\bigg|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(\exp(ty)\cdot h\cdot\exp(-ty))\bigg|_{t=0}\\ &= [y,h]\\ &= \mathrm{ad}_y(h)\end{aligned}$$

其中，第一步使用了链式法则，第二步使用了 $\exp(ty)$ 的微分性质和李括号的定义。

因此，我们有 $\frac{d}{dt}\mathrm{Adj}_{\exp(ty)}\Big|_{t=0} = \mathrm{ad}_y$ ，这意味着 $\mathrm{Adj}_{\exp(ty)}$ 和 $\exp(t\mathrm{ad}_y)$ 在 $t=0$ 处的切空间相同。由于它们都是光滑的，并且在 $t=0$ 处相等 (即 $\mathrm{Adj}_e = \exp(0) = e$)，我们可以得出 $\mathrm{Adj}_{\exp(ty)} = \exp(t\mathrm{ad}_y)$ 。

最后，将 t 替换为 1 ，我们得到 $\mathrm{Adj}_{\exp(y)} = \exp\left(\mathrm{ad}_y\right)$ ，这就完成了公式的推导。

在李群和李代数的理论中，Adj 和 ad 是两个核心的概念。Adj 是李群的伴随表示，而 ad 是李代数的伴随表示。Adj_g 表示在李群 $\mathcal{G}$ 中元素 g 作用下, 另一个元素 x 的伴随变换。而 ad_y 表示在李代数 $\mathfrak{g}$ 中元素 y 作用下, 另一个李代数元素 x 的伴随变换。李群和李代数之间存在指数映射的对应关系。也就是说, 对于任意李代数 $\mathfrak{g}$ 中的元素 y, 我们都可以找到对应的李群 $\mathcal{G}$ 中的元素 $\exp(y)$。其次，李代数和李群之间也存在着相似的伴随变换表达 (adjoint representation) 的概念。因此, 李代数元素 y 与李群元素 $\exp(y)$ 之间, 其伴随变换应该存在某种一一对应关系。这两者之间的联系可以通过这个公式 $\mathrm{Adj}_{\exp(y)} = \exp\left(\mathrm{ad}_y\right)$ 来表达。

综上所述，这个公式是李群和李代数之间的一个重要联系。我们知道，对于一个李群 $\mathcal{G}$ ，我们可以定义它的李代数为其单位元在切空间上的向量空间，这个向量空间上的向量可以通过李括号来定义一个李代数结构。同时，我们知道，李群上的操作可以通过指数映射来转化为李代数上的操作，这就是方程 (9) 想要表达的内容。