矩阵指数映射的导数

G. M. Tuynman

Nov., 1995

指数映射，把李代数和它的李群联系起来，当然是一个解析映射，并因此它有一个导数。虽然该导数的显式表达式并不复杂，但其求解方法却显得冗长而困难。例如，在文献 [H] 中使用仿射连接和微分方程，在文献 [P] 中使用 Taylor 展开，忽略了 2 阶项 ($\mathscr{O}(t^2)$)，在文献 [V] 中使用包络代数对 Taylor 级数进行复杂分析；在文献 [MT] 中，使用了一种相当简单的使用微分方程的参数，但该参数仅对矩阵有效。

我们在这里提出一种相当简单的方法来获得这一导数。为了便于说明，我们将对矩阵进行此操作，但只需要进行表面上的更改，就可以使其成为任意李群的有效计算。

1　求解方法

定理. 设 $\exp \equiv e : M(n,\mathbf{R}) \to M(n,\mathbf{R})$ 标志在带有实数项的 $n \times n$ 矩阵上的指数映射。则：

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{X+tY} = e^X \cdot \left(\frac{1-e^{-\mathrm{ad}(X)}}{\mathrm{ad}\,(X)}\right)(Y),$$

其中 $\mathrm{ad}\,(X)$ 标志伴随表示 $Y \mapsto \mathrm{ad}\,(X)\,(Y) \equiv X \cdot Y - Y \cdot X$，并且其中的商应解释为形式幂级数。

证明. 我们引入矩阵 $\Delta\,(X,Y)$，定义为：

$$\Delta\,(X,Y) = e^{-X} \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{X+tY}.$$

该映射 Δ 在 X 和 Y 中显然是连续的，而且，根据导数的定义，它在 Y 中是线性的。将 Leibnitz 规则应用于等式 $e^{X+tY} = \exp\left(\left(1/n\right)X + t\left(1/n\right)Y\right)^n$，对于任意 $n \in \mathbf{Z}$ 有效，我们得到：

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{X+tY} = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{1}{n}X\right)^{n-1-k} \cdot \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp\left(\frac{1}{n}X + t\frac{1}{n}Y\right)\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{n}X\right)^k.$$

然后使用 Δ 的定义则我们计算：

$$\begin{aligned}
e^{-X} \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{X+tY} &= \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{1}{n}X\right)^{-k} \cdot \Delta\left(\frac{1}{n}X, \frac{1}{n}Y\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{n}X\right)^k \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Ad}\left(e^{-X/n}\right)^k \left(\Delta\left(\frac{1}{n}X, Y\right)\right) \\
&= \left(\frac{1-\mathrm{Ad}\left(e^{-X}\right)}{n\left(1-\mathrm{Ad}\left(e^{-X/n}\right)\right)}\right)\left(\Delta\left(\frac{1}{n}X, Y\right)\right) \\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{1-e^{-\mathrm{ad}(X)}}{\mathrm{ad}\,(X)}\right)\left(\Delta\,(0,Y)\right).
\end{aligned}$$

为了获得第二个等式，我们使用 Δ 在 Y 中的线性和伴随表示的定义：$\mathrm{Ad}\,(B)\,(A) = B \cdot A \cdot B^{-1}$。对于第三个等式，我们使用因子 $\mathrm{Ad}\left(e^{-X/n}\right)$ 的几何级数和的公式。对于极限，我们使用 Δ 在 X 中的连续性，事实上 ad 是 Ad 的导数 (对于在分母中的极限 $n \to \infty$)，并且指数映射将 ad 和 $\mathrm{Ad} : \mathrm{Ad}\left(e^{X}\right) = e^{\mathrm{ad}(X)}$ 交织在一起。由于初等计算表明 $\Delta\,(0, Y) = Y$，当我们乘以 e^X 时，定理成立。 □

注. 对取极限 $n \to \infty$ 感到不安的读者只需检查单个复变量 z 的幂级数的下列收敛性即可：

$$\frac{e^z - 1}{n\left(e^{z/n} - 1\right)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left(e^{z/n}\right)^k = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^i}{i! n^{i+1}}\right) \cdot z^i \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{(i+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}.$$

2 REFERENCES

- [H] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, Orlando, 1978.
- [MT] R. Mneimné & F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, Hermann, Paris, 1986.
- [P] M. Postnikov, Leçons de géométrie: Groupes et algèbres de Lie, Editions MIR, Moscou, 1982, 1985.
- [V] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974; Reprinted as GTM volume 102, Springer Verlag, Berlin.