初学者的李群

Frank Dellaert

February 7, 2021

1 动机：在平面中的刚性运动

我们将从在平面中移动的机器人的一个小例子开始，它由一个 2D 位姿 (*pose*) (x, y, θ) 参数化。当我们给它一个小的前进速度 v_x 时，我们知道，位置的变化为

$$\dot{x} = v_x$$

这个平凡的微分方程的解是，其中 x_0 是机器人 x 位置的初始位置，

$$x_t = x_0 + v_x t$$

类似的情况适用于 y 方向的平移，实际上也适用于一般的平移：

$$(x_t, y_t, \theta_t) = (x_0 + v_x t, y_0 + v_y t, \theta_0)$$

类似地，对于旋转，我们有

$$(x_t, y_t, \theta_t) = (x_0, y_0, \theta_0 + \omega t)$$

其中 ω 为角速度，在逆时针方向上以 rad/s 为单位进行测量。

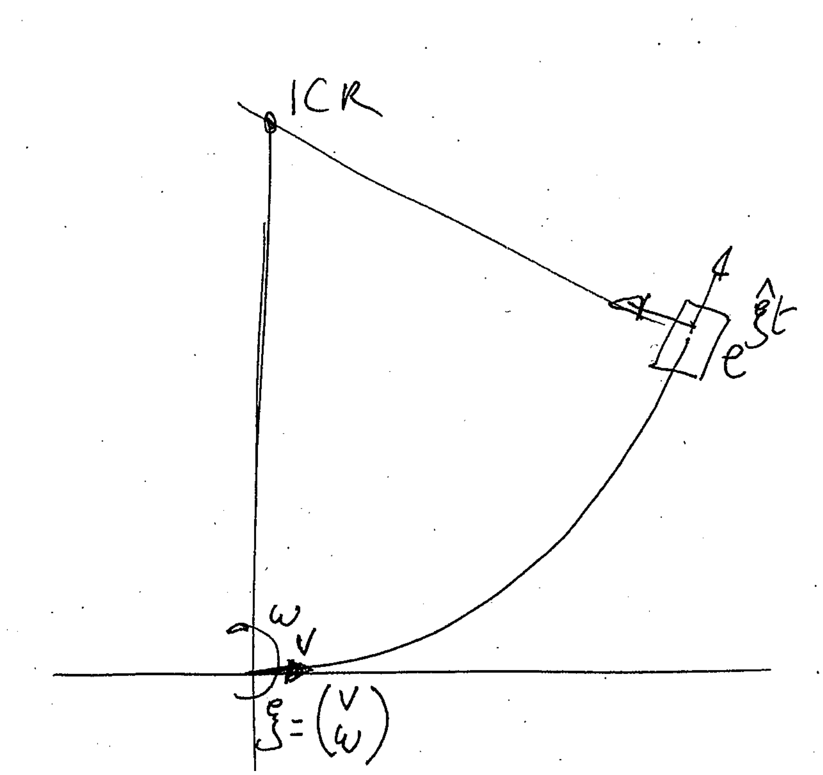

图 1: 沿着圆形轨迹移动的机器人。

但是，如果我们将平移和旋转组合起来，故事就会崩溃！我们不能写为

$$(x_t, y_t, \theta_t) = (x_0 + v_x t, y_0 + v_y t, \theta_0 + \omega t)$$

原因是，如果我们根据速度向量 (v_x, v_y, ω) 一点点地移动机器人，我们有 (到一阶)

$$(x_\delta, y_\delta, \theta_\delta) = (x_0 + v_x \delta, y_0 + v_y \delta, \theta_0 + \omega \delta)$$

但是现在机器人已经旋转了，并且对于下一个增量变化，速度向量必须先旋转才能应用。事实上，机器人将沿着圆形 (*circular*) 轨道移动。

原因是平移和旋转不可相互交换 (*commute*)：如果我们先旋转，然后再移动，我们最终将到达与我们先移动，然后旋转不同的位置。事实上，有人曾经说过 (我忘了是谁，谁能找到确切的引文，就给他点赞)：

> 如果旋转和平移可以交换，我们可以在离开初始位置前做所有的旋转。

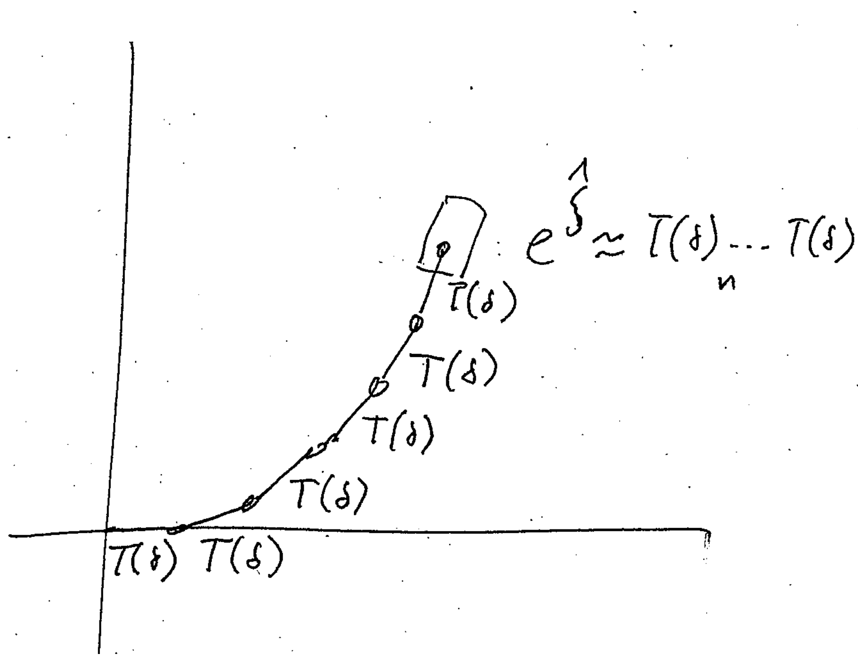

图 2: 用 n 个步长近似圆形轨迹。

为了取得进展，我们必须更精确地了解机器人的行为。具体地说，让我们将两个位姿 T_1 和 T_2 的组合定义为

$$T_1T_2 = (x_1, y_1, \theta_1)(x_2, y_2, \theta_2) = (x_1 + \cos\theta_1 x_2 - \sin\theta y_2, y_1 + \sin\theta_1 x_2 + \cos\theta_1 y_2, \theta_1 + \theta_2)$$

这有点笨拙，所以我们采用了一个技巧：将 2D 位姿嵌入 3×3 矩阵的空间中，这样我们就可以将组合定义为矩阵乘法：

$$T_1T_2 = \begin{bmatrix} R_1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 & t_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1R_2 & R_1t_2 + t_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中矩阵 R 是 2D 旋转矩阵，定义为

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

现在机器人的一个“微小”运动可被写为

$$T(\delta) = \begin{bmatrix} \cos\omega\delta & -\sin\omega\delta & v_x\delta \\ \sin\omega\delta & \cos\omega\delta & v_y\delta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -\omega\delta & v_x\delta \\ \omega\delta & 1 & v_y\delta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + \delta \begin{bmatrix} 0 & -\omega & v_x \\ \omega & 0 & v_y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

让我们定义 2D 运动旋量 (*2D twist*) 向量 $\xi = (v, \omega)$，以及上面的矩阵为

$$\hat{\xi} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\omega & v_x \\ \omega & 0 & v_y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

如果我们想让 t 变大，我们可以将 t 分解成更小的时间步，例如 n 个时间步，然后按下式组合它们：

$$T(t) \approx \left(I + \frac{t}{n}\hat{\xi}\right) \ldots \text{n times} \ldots \left(I + \frac{t}{n}\hat{\xi}\right) = \left(I + \frac{t}{n}\hat{\xi}\right)^n$$

其结果如图 2 所示。

当然，如果取 n 到无穷小，则获得完美解：

$$T(t) = \lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{t}{n}\hat{\xi}\right)^n$$

对于实数，这个级数很常见，实际上是计算指数函数的一种方法：

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

类似地，该级数可以定义为平方矩阵，并且最终结果是我们可以写出机器人沿圆形轨迹的运动，由 2D 运动旋量 $\xi = (v, \omega)$ 作为 $\hat{\xi}$ 的矩阵指数 (*matrix exponential*) 给出：

$$T(t) = e^{t\hat{\xi}} \triangleq \lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{t}{n}\hat{\xi}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\hat{\xi}^k$$

我们称这种从 2D 运动旋量矩阵 $\hat{\xi}$ 到 2D 刚性变换的映射为指数映射 (*exponential map*)。

以上是李群理论的全部内容。我们将 2D 刚性变换空间和组合运算称为特殊的欧几里得群 (*special Euclidean group*) $SE(2)$。它被称为李群，因为它同时是拓扑群和流形，这意味着乘法和求逆运算是平滑的。2D 运动旋量空间，连同下面要定义的一个特殊二元运算，称为与 $SE(2)$ 相关联的李代数 $\mathfrak{se}(2)$。

2 基本李群概念

现在，我们定义上面说明的概念，引入一些符号，然后看看我们一般可以说些什么。然后我们将介绍最常用的李群及其李代数。

2.1 流形与群

李群 (**Lie group**) G 既是群又是具有平滑群运算的流形。与之相关联的是一个李代数 (**Lie Algebra**) $\mathfrak{g}$，大致来说，它可以用在幺元处的切空间识别，并完全定义群在幺元周围的行为。这有一个从 $\mathfrak{g}$ 返回到 G 的映射，称为指数映射 (**exponential map**)

$$\exp : \mathfrak{g} \to G$$

这通常是多对一映射。相应的逆可以在原点附近局部定义，并因此是一个“对数”映射：

$$\log : G \to \mathfrak{g}$$

它将在 G 中 id 的邻域中的元素映射到在 $\mathfrak{g}$ 中的元素。

一种重要的李群是矩阵李群，其元素是 $n \times n$ 可逆矩阵。所有这些矩阵的集合，连同矩阵乘法，被称为维数为 n 的一般线性群 $GL(n)$，并且它的任意封闭子群都是矩阵李群 (**matrix Lie group**)。我们感兴趣的大多数李群 (如果不是全部的话) 都是矩阵李群。

2.2 李代数

李代数 $\mathfrak{g}$ 被称为代数，因为它被赋予了一个二元运算，即李括号 (**Lie bracket**) $[X, Y]$，其性质与 G 的群运算密切相关。例如，对于与矩阵李群相关联的代数，李括号给出为 $[A, B] \triangleq AB - BA$。

李括号与群运算的关系如下：对于交换李群，在 $\mathfrak{g}$ 中的向量加法 $X + Y$ 模拟群运算。例如，如果在 $\mathfrak{g}$ 中有 $Z = X + Y$，当通过指数映射将其映射回 G 时，我们获得

$$e^Z = e^{X+Y} = e^X e^Y$$

但是，这**不**适用于非交换李群：

$$Z = \log(e^X e^Y) \neq X + Y$$

相反，Z 可以使用 Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) 公式 [**?**] 计算：

$$Z = X + Y + [X, Y]/2 + [X - Y, [X, Y]]/12 - [Y, [X, [X, Y]]]/24 + \ldots$$

对于交换群，括号为零，我们恢复 $Z = X + Y$。对于非交换群，我们可以用 BCH 公式来近似。

2.3 指数坐标

对于 n 维矩阵李群，作为一个向量空间，李代数 $\mathfrak{g}$ 同构于 $\mathbb{R}^n$，并且我们可以定义帽子 $\hat{}$ 算子 [1, page 41]，

$$\hat{} : x \in \mathbb{R}^n \to \hat{x} \in \mathfrak{g}$$

它将 n 元向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 映射到 $\mathfrak{g}$ 的元素。在矩阵李群的情况下，$\mathfrak{g}$ 的元素 $\hat{x}$ 也是 $n \times n$ 矩阵，并且映射给出为

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i G^i \tag{1}$$

其中 G^i 是 $n \times n$ 矩阵，称为李群生成元。映射 $x \to \hat{x}$ 的意义取决于群 G，并且通常有一个直观的解释。

2.4 作用

一个重要的概念是作用于流形 M 的元素上的群元素。例如，2D 旋转作用于 2D 点，3D 旋转作用于 3D 点，如此等等。特别地，G 在 M 上的左作用 (**left action**) 被定义为一个平滑映射 $\Phi : G \times M \to M$，以使得 [1, Appendix A]：

1. 幺元 e 没有影响，即 $\Phi(e, p) = p$
2. 组合两个作用可以组合成一个作用：$\Phi(g, \Phi(h, p)) = \Phi(gh, p)$

一个 n 维矩阵群 G 的 (通常) 作用是在 $\mathbb{R}^n$ 上的矩阵-向量乘法，

$$q = Ap$$

其中 $p, q \in \mathbb{R}^n$ 以及 $A \in G \subseteq GL(n)$。

2.5 伴随映射与伴随表示

假设一个点 p 被指定为在帧 T 中的 p'，即 $p' = Tp$，其中 T 从全局坐标 p 变换为局部帧 p'。要应用一个作用 A，首先需要撤消 T，然后应用 A，然后将结果变换回 T：

$$q' = TAT^{-1}p'$$

矩阵 TAT^{-1} 被称为与 A 共轭，并且这是群论的中心元素。

通常，伴随映射 (**adjoint map**) $\mathbf{Ad}_g$ 将一个群元素 $a \in G$ 通过 g 映射到它的共轭 (**conjugate**) gag^{-1}。该映射捕获在群 G 中的共轭性，但在李代数 $\mathfrak{g}$ 中有一个等价的概念，

$$\mathbf{Ad}_g e^{\hat{x}} = g \exp(\hat{x})\, g^{-1} = \exp(Ad_g \hat{x})$$

其中 $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是由群元素 g 参数化的一个映射，并称为伴随表示 (*adjoint representation*)。直观的解释是，有一个变化 $\exp(\hat{x})$ 被定义在原点周围，但被应用于群元素 g，可以通过取 $\hat{x}$ 的伴随 $Ad_g \hat{x}$ 一步写出。

在矩阵李群的特殊情况下，伴随可被写为

$$Ad_T \hat{x} \triangleq T \hat{x} T^{-1}$$

并因此我们有

$$T e^{\hat{x}} T^{-1} = e^{T \hat{x} T^{-1}} \tag{2}$$

其中 $T \in G$ 和 $\hat{x} \in \mathfrak{g}$ 对于 n 维李群都是 $n \times n$ 矩阵。

3 2D 旋转

我们先看一个非常简单的群，2D 旋转。

3.1 基础知识

李群 $SO(2)$ 是一般线性群 $GL(2)$ 的子群，由 2×2 可逆矩阵组成。它的李代数 $\mathfrak{so}(2)$ 是 2×2 斜对称矩阵的向量空间。由于 $SO(2)$ 是一维流形，$\mathfrak{so}(2)$ 同构于 $\mathbb{R}$，并且我们定义

$$\hat{}: \mathbb{R} \to \mathfrak{so}(2)$$

$$\hat{}: \omega \to \hat{\omega} = [\omega]_+$$

其将角度 ω 映射到 2×2 斜对称矩阵 $[\omega]_+$：

$$[\omega]_+ = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$$

指数映射可以以封闭形式计算为

$$e^{[\omega]_+} = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

3.2 对角化形式

矩阵 $[1]_+$ 可以用特征值 $-i$ 和 i 以及特征向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ 对角化 (参见 [?])。熟悉投影几何的读者在将这些点提升到齐次坐标时会将其识别为圆形点。特别是：

$$[\omega]_+ = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i\omega & 0 \\ 0 & i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

并因此

$$e^{[\omega]_+} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\omega} & 0 \\ 0 & e^{i\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

其中后者可用 $e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega$ 表示。

3.3 伴随

$\mathfrak{so}(2)$ 的伴随显然等同于特征式，就像**所有**交换群的情况一样：

$$\begin{aligned} Ad_R\hat{\omega} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T \\ &= \omega \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即，

$$Ad_R\hat{\omega} = \hat{\omega}$$

3.4 作用

在 $SO(2)$ 的情况下，向量空间是 $\mathbb{R}^2$，并且群作用对应于旋转一个点

$$q = Rp$$

现在我们想知道通过 ω 参数化的一个增量旋转会做什么：

$$q(\omega) = Re^{[\omega]_+}p$$

对于小角度 ω，我们有

$$e^{[\omega]_+} \approx I + [\omega]_+ = I + \omega\,[1]_+$$

其中 [1]+ 类似于在平面上作用于点的受限制“叉积”：

$$[1]_+ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R_{\pi/2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \tag{3}$$

因此，作用的导数给出为

$$\frac{\partial q(\omega)}{\partial \omega} = R\frac{\partial}{\partial \omega}\left(e^{[\omega]_+}p\right) = R\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\omega\,[1]_+\,p\right) = RH_p$$

其中 H_p 是依赖于 p 的一个 2×1 矩阵：

$$H_p \triangleq [1]_+\,p = \begin{bmatrix} -p_y \\ p_x \end{bmatrix}$$

4 2D 刚性变换

4.1 基础知识

李群 $SE(2)$ 是一般线性群 $GL(3)$ 的一个子群，它由 3×3 可逆矩阵组成

$$T \triangleq \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $R \in SO(2)$ 是一个旋转矩阵，并且 $t \in \mathbb{R}^2$ 是一个平移向量。$SE(2)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 与 $SO(2)$ 的半直积 (*semi-direct product*)，写为 $SE(2) = \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$。特别地，$SE(2)$ 的任意元素 T 可被写为

$$T = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

并且它们组合为

$$T_1 T_2 = \begin{bmatrix} R_1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 & t_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 R_2 & R_1 t_2 + t_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，写下 $SE(2)$ 元素的替代方法是作为有序对 (R, t)，其组合定义为一个

$$(R_1, t_1)(R_2, t_2) = (R_1 R_2, R_1 t_2 + t_1)$$

相应的李代数 $\mathfrak{se}(2)$ 是由运动旋量坐标 (*twist coordinates*) $\xi \in \mathbb{R}^3$ 参数化的 3×3 运动旋量 $\hat{\xi}$ 的向量空间，其映射为

$$\xi \triangleq \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \rightarrow \hat{\xi} \triangleq \begin{bmatrix} [\omega]_+ & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

注意，我们认为机器人有一个位姿 (x, y, θ)，并因此我保留前两个分量用于平移，以及最后一个分量用于旋转。相应的李群生成元是

$$G^x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G^y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G^\theta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将指数映射应用于一个运动旋量 (twist) ξ 产生旋量运动 (screw motion)，产生一个在 $SE(2)$ 中的元素:

$$T = e^{\hat{\xi}} = \left(e^{[\omega]_+}, (I - e^{[\omega]_+}) \frac{v^\perp}{\omega} \right)$$

4.2 伴随映射

伴随是

$$
\begin{aligned}
Ad_T\hat{\xi} &= T\hat{\xi}T^{-1} \\
&= = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\omega]_+ & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [\omega]_+ & -[\omega]_+ t + Rv \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [\omega]_+ & Rv - t^{\perp}\omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4}
$$

由此，我们可以依据平面运动旋量坐标表达伴随映射：

$$
\begin{bmatrix} v' \\ \omega' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -t^{\perp} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}
$$

4.3 作用

$SE(2)$ 对 2D 点的作用是通过使用齐次坐标将点嵌入 $\mathbb{R}^3$ 来完成的

$$
\hat{q} = \begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = T\hat{p}
$$

类似于 $SE(3)$ (参见下文)，我们可以计算在局部 T 帧中的一个速度 $\hat{\xi}\hat{p}$：

$$
\hat{\xi}\hat{p} = \begin{bmatrix} [\omega]_+ & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\omega]_+ p + v \\ 0 \end{bmatrix}
$$

通过只取最上面的两行，我们可以把它写成在 $\mathbb{R}^2$ 中的一个速度，作为一个 2×3 矩阵 H_p，直接作用于指数坐标 ξ：

$$
[\omega]_+ p + v = v + R_{\pi/2} p\omega = \begin{bmatrix} I_2 & R_{\pi/2} p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = H_p \xi
$$

5 3D 旋转

5.1 基础知识

李群 $SO(3)$ 是一般线性群 $GL(3)$ 的一个子群，由 3×3 可逆矩阵组成。它的李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 是 3×3 斜对称矩阵 $\hat{\omega}$ 的向量空间。由于 $SO(3)$ 是一个三维流形，因此 $\mathfrak{so}(3)$ 同构于 $\mathbb{R}^3$，并且我们定义映射

$$\hat{}:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$$

$$\hat{}:\omega \rightarrow \hat{\omega} = [\omega]_\times$$

它将 3 元向量 ω 映射为斜对称矩阵 $[\omega]_\times$：

$$[\omega]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \omega_x G^x + \omega_y G^y + \omega_z G^z$$

这里矩阵 G^i 对于 $SO(3)$ 是生成元，

$$G^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} G^y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} G^z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

分别对应于围绕 X、Y 和 Z 的旋转。在 $\mathfrak{so}(3)$ 中的李括号 $[x,y]$ 对应于在 $\mathbb{R}^3$ 中的叉积 $x\times y$。

因此，对于每一个 3 元向量 ω，有一个对应的旋转矩阵

$$R = e^{[\omega]_\times}$$

其定义 $SO(3)$ 的正则参数化，其中 ω 称为正则坐标或指数坐标。它对于旋转等价于轴-角表示，其中单位向量 ω/θ 表示旋转轴，并且其幅值表示旋转量 θ。

指数映射可以使用罗德里格斯公式 (**Rodrigues' formula**) [1, page 28] 以封闭形式计算：

$$e^{\hat{\omega}} = I + \frac{\sin\theta}{\theta}\hat{\omega} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\hat{\omega}^2 \tag{5}$$

式中 $\hat{\omega}^2 = \omega\omega^T - I$，其中 $\omega\omega^T$ 为 ω 的外积。因此，一个稍微更有效的变体是

$$e^{\hat{\omega}} = (\cos\theta)\, I + \frac{\sin\theta}{\theta}\hat{\omega} + \frac{1-cos\theta}{\theta^2}\omega\omega^T \tag{6}$$

5.2 对角化形式

因为 3D 旋转 R 保持轴 ω 不变，所以 R 可以对角化为

$$R = C\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C^{-1}$$

式中 $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \omega/\theta \end{pmatrix}$，其中 c_1 和 c_2 是对应于围绕 ω 的 2D 旋转的复特征向量。这也意味着，通过方程 (2)，

$$\hat{\omega} = C \begin{pmatrix} -i\theta & 0 & 0 \\ 0 & i\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1}$$

在这种情况下，C 有复数的列，但我们也有

$$\hat{\omega} = B \begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B^T \tag{7}$$

式中 $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \omega/\theta \end{pmatrix}$，其中 b_1 和 b_2 构成通过原点并垂直于 ω 的 2D 平面的基。显然，根据第 3.2 节，我们有

$$c_1 = B \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad c_2 = B \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

并且当我们指数化方程 (7) 时，我们得到围绕轴 ω/θ 的 2D 旋转，其幅值为 θ:

$$R = B \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B^T$$

对于 R 的后一种形式可以用来证明罗德里格斯公式。扩展上述内容，我们得到

$$R = (\cos\theta)\left(b_1 b_1^T + b_2 b_2^T\right) + (\sin\theta)\left(b_2 b_1^T - b_1 b_2^T\right) + \omega\omega^T/\theta^2$$

由于 B 是一个旋转矩阵，我们有 $BB^T = b_1 b_1^T + b_2 b_2^T + \omega\omega^T/\theta^2 = I$，并且使用方程 (7)，它很容易证明，$b_2 b_1^T - b_1 b_2^T = \hat{\omega}/\theta$，因此

$$R = (\cos\theta)\left(I - \omega\omega^T/\theta^2\right) + (\sin\theta)\left(\hat{\omega}/\theta\right) + \omega\omega^T/\theta^2$$

这等同于方程 (6)。

5.3 伴随映射

对于旋转矩阵 R，我们可以证明以下特征式 (参见方程 9 on page 19)：

$$R\,[\omega]_\times\,R^T = [R\omega]_\times \tag{8}$$

因此，给定性质方程 (8)，对于 $\mathfrak{so}(3)$ 伴随映射简化为

$$Ad_R[\omega]_\times = R\,[\omega]_\times\,R^T = [R\omega]_\times$$

并且这可以用指数坐标表达，只要把轴 ω 旋转到 $R\omega$。

作为一个例子，要将轴-角旋转 ω 应用于在帧 R 中的一个点 p，我们可以：

1. 首先将 p 变换回世界帧，应用 ω，然后再旋转回来：

$$q = Re^{[\omega]_\times} R^T p$$

2. 立即应用变换后的轴-角变换 $Ad_R[\omega]_\times = [R\omega]_\times$：

$$q = e^{[R\omega]_\times} p$$

5.4 作用

在 $SO(3)$ 的情况下，向量空间是 $\mathbb{R}^3$，并且群作用对应于旋转一个点

$$q = Rp$$

现在我们想知道通过 ω 参数化的一个增量旋转会做什么：

$$q(\omega) = Re^{[\omega]_\times} p$$

因此，导数为：

$$\frac{\partial q(\omega)}{\partial \omega} = R \frac{\partial}{\partial \omega} \left(e^{[\omega]_\times} p \right) = R \frac{\partial}{\partial \omega} \left([\omega]_\times p \right) = R \left[-p \right]_\times$$

要证明最后一个等式，请注意

$$[\omega]_\times p = \omega \times p = -p \times \omega = [-p]_\times \omega$$

6 3D 刚性变换

李群 $SE(3)$ 是一般线性群 $GL(4)$ 的一个子群，由 4×4 可逆矩阵组成

$$T \triangleq \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $R \in SO(3)$ 是一个旋转矩阵，并且 $t \in \mathbb{R}^3$ 是一个平移向量。另一种写下 $SE(3)$ 元素的方法是作为有序对 (R, t)，其分量定义为

$$(R_1, t_1)(R_2, t_2) = (R_1R_2, R_1t_2 + t_1)$$

它的李代数 $\mathfrak{se}(3)$ 是由运动旋量坐标 (*twist coordinates*) $\xi \in \mathbb{R}^6$ 参数化的 4×4 运动旋量 $\hat{\xi}$ 的向量空间，其映射为 [1]

$$\xi \triangleq \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} \to \hat{\xi} \triangleq \begin{bmatrix} [\omega]_\times & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

注意：我们遵循 Frank Park 的惯例，并保留前三个分量用于旋转，后三个分量用于平移。因此，通过此参数化，对于 $SE(3)$ 生成元为

$$G^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} G^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} G^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} G^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

应用指数映射到一个运动旋量 ξ 产生一个旋量运动，其产生一个在 $SE(3)$ 中的元素:

$$T = \exp \hat{\xi}$$

指数映射的闭式解在文献 [1, page 42] 中给出。

$$\exp\left(\widehat{\begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}} t\right) = \begin{bmatrix} e^{[\omega]_\times t} & (I - e^{[\omega]_\times t})(\omega \times v) + \omega\omega^T vt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.1 伴随映射

伴随是

$$\begin{aligned}
Ad_T\hat{\xi} &= T\hat{\xi}T^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\omega]_\times & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [R\omega]_\times & -[R\omega]_\times t + Rv \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [R\omega]_\times & t \times R\omega + Rv \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

由此，我们可以依据运动旋量坐标表达伴随映射 (参见文献 [1] 和 FP)：

$$\begin{bmatrix} \omega' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [t]_\times R & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}$$

6.2 作用

$SE(3)$ 对 3D 点的作用是通过使用齐次坐标将点嵌入 $\mathbb{R}^4$ 来完成的

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rp + t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = T\hat{p}$$

现在我们想知道通过 ξ 参数化的一个增量位姿会做什么：

$$\hat{q}(\xi) = Te^{\hat{\xi}}\hat{p}$$

因此，导数为

$$\frac{\partial \hat{q}(\xi)}{\partial \xi} = T \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\hat{\xi}\hat{p}\right)$$

其中 $\hat{\xi}\hat{p}$ 对应于在 $\mathbb{R}^4$ 中的速度 (在局部 T 帧中)：

$$\hat{\xi}\hat{p} = \begin{bmatrix} [\omega]_\times & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \times p + v \\ 0 \end{bmatrix}$$

注意速度是如何类似于射影几何中无穷远处的点的：它们对应于自由向量，指示变化的方向和幅值。

通过只取最上三行，我们可以把它写为在 $\mathbb{R}^3$ 中的速度，作为直接作用于指数坐标 ξ 的 3×6 矩阵 H_p 的乘积：

$$\omega \times p + v = -p \times \omega + v = \begin{bmatrix} -[p]_\times & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}$$

产生导数

$$\frac{\partial \hat{q}(\xi)}{\partial \xi} = T \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\hat{\xi}\hat{p}\right) = T \begin{bmatrix} -[p]_\times & I_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

逆作用 $T^{-1}p$ 为

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T(p - t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = T^{-1}\hat{p}$$

7 3D 相似变换

3D 相似变换群 $Sim(3)$ 是 4×4 可逆矩阵的集合，其形式为

$$T \triangleq \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix}$$

其中 s 是一个标量。对于李代数生成元有几种不同的约定，但是我们使用

$$G^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} G^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} G^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} G^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} G^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7.1 作用

$SE(3)$ 对 3D 点的作用是通过使用齐次坐标将点嵌入 $\mathbb{R}^4$ 来完成的

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} q \\ s^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rp + t \\ s^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = T\hat{p}$$

在对 T 的一个增量变化 ξ 中，导数 $D_1 f(\xi)$ 由 $TH(p)$ 给出，其中

$$H(p) = G^i_{jk} p^j = \begin{pmatrix} 0 & z & -y & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -z & 0 & x & 0 & 1 & 0 & 0 \\ y & -x & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

换句话说

$$D_1 f(\xi) = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -[p]_x & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R[p]_x & R & -t \\ 0 & 0 & -s^{-1} \end{bmatrix}$$

这是作用在齐次坐标上的导数。切换回非齐次坐标是通过下式完成

$$\begin{bmatrix} q \\ a \end{bmatrix} \to q/a$$

其中导数为

$$\begin{bmatrix} a^{-1} I_3 & -qa^{-2} \end{bmatrix}$$

对于 $a = s^{-1}$，我们获得

$$D_1 f(\xi) = \begin{bmatrix} sI_3 & -qs^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R[p]_x & R & -t \\ 0 & 0 & -s^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sR[p]_x & sR & -st + qs \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sR[p]_x & sR & sRp \end{bmatrix}$$

8 2D 仿射变换

李群 $Aff(2)$ 是一般线性群 $GL(3)$ 的一个子群，由 3×3 可逆矩阵组成，它将无穷远处的直线映射到自身，并因此保留平行性。仿射变换矩阵 A 可被写为 [?]

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & t_1 \\ m_{21} & m_{22} & t_2 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

其中 $M\in GL(2)$，$t\in\mathbb{R}^2$，并且 k 是一个可选择的标量，以使得 $det(A)=1$。注意，正如 $SE(2)$ 是一个半直积一样，所以 $Aff(2)=\mathbb{R}^2\rtimes GL(2)$ 也是一个半直积。特别地，任意仿射转换 A 都可以写为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

并且它们组合为

$$A_1A_2=\begin{bmatrix} M_1 & t_1 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_2 & t_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_1M_2 & M_2t_2+k_2t_1 \\ 0 & k_1k_2 \end{bmatrix}$$

由此可以得出 $SO(2)$ 和 $SE(2)$ 都是子群，其中 $SO(2)\subset SE(2)\subset Aff(2)$。通过仔细选择生成元，我们在相关的李代数中维持这个层级。特别是 $\mathfrak{se}(2)$ 的生成元

$$G^1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ G^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ G^3=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

使用三个额外的生成元可推广到李代数 $\mathfrak{aff}(2)$

$$G^4=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ G^5=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ G^6=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，李代数 $\mathfrak{aff}(2)$ 是由 6 元参数 $a\in\mathbb{R}^6$ 参数化的 3×3 增量仿射变换 $\hat{a}$ 的向量空间，其映射为

$$a\rightarrow\hat{a}\triangleq\begin{bmatrix} a_5 & a_4-a_3 & a_1 \\ a_4+a_3 & -a_5-a_6 & a_2 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix}$$

注意 G_5 和 G_6 改变 x 和 y 的相对比例，但不改变行列式：

$$e^{xG_5}=\exp\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 1/e^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{xG_6}=\exp\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^x \end{bmatrix}$$

如果通过选择以下生成元，能与缩放的 x 和 y 更直接地对应起来，它可能会更好，

$$G^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad G^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

并因此

$$e^{xG_5} = \exp \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/e^x \end{bmatrix}$$

$$e^{xG_6} = \exp \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & 1/e^x \end{bmatrix}$$

9 2D 单应变换

当视为对图像的操作 (由 2D 射影空间 $\mathcal{P}^3$ 表示) 时，3D 旋转是 2D 单应变换的特例。现在我们将根据在文献 [?, ?] 中的论述来粗略地处理这些问题。

9.1 基础知识

李群 $SL(3)$ 是一般线性群 GL(3) 的一个子群，由行列式为 1 的 3×3 可逆矩阵组成。单应变换推广 2D 射影空间的变换，并且 $Aff(2) \subset SL(3)$。

通过增加两个生成元，我们可以将 $\mathfrak{aff}(2)$ 推广到李代数 $\mathfrak{sl}(3)$ 中

$$G^7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G^8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

以获得由 8 元参数 $h \in \mathbb{R}^8$ 参数化的 3×3 增量单应变换 $\hat{h}$ 的向量空间，其映射为

$$h \to \hat{h} \triangleq \begin{bmatrix} h_5 & h_4 - h_3 & h_1 \\ h_4 + h_3 & -h_5 - h_6 & h_2 \\ h_7 & h_8 & h_6 \end{bmatrix}$$

9.2 张量符号

- 2D 射影空间 A 和 B 之间的一个单应性可用张量符号 H_A^B 写出
- 应用一个单应性则是一个张量收回 $x^B = H_A^B x^A$，将在 A 中的点映射到在 B 中的点。

附录：证明性质方程 9

对于旋转矩阵 R，我们可以证明如下特征式，

$$
\begin{aligned}
R\,[\omega]_\times\, R^T &= R\,[\omega]_\times \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \\
&= R \begin{bmatrix} \omega \times a_1 & \omega \times a_2 & \omega \times a_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1(\omega \times a_1) & a_1(\omega \times a_2) & a_1(\omega \times a_3) \\ a_2(\omega \times a_1) & a_2(\omega \times a_2) & a_2(\omega \times a_3) \\ a_3(\omega \times a_1) & a_3(\omega \times a_2) & a_3(\omega \times a_3) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \omega(a_1 \times a_1) & \omega(a_2 \times a_1) & \omega(a_3 \times a_1) \\ \omega(a_1 \times a_2) & \omega(a_2 \times a_2) & \omega(a_3 \times a_2) \\ \omega(a_1 \times a_3) & \omega(a_2 \times a_3) & \omega(a_3 \times a_3) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\omega a_3 & \omega a_2 \\ \omega a_3 & 0 & -\omega a_1 \\ -\omega a_2 & \omega a_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= [R\omega]_\times
\end{aligned} \tag{9}
$$

其中 a_1、a_2 和 a_3 是 R 的**行**。我们利用旋转矩阵的正交性和三重积规则：

$$a(b \times c) = b(c \times a) = c(a \times b)$$

类似地，这里没有证明 [1, Lemma 2.3]：

$$R(a \times b) = Ra \times Rb$$

附录：对于 $\mathfrak{sl}(3)$ 的替代生成元

文献 [?] 对于 $\mathfrak{sl}(3)$ 使用以下生成元：

$$
G^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
G^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
G^7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G^8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

我们选择使用不同的线性组合作为基。

参考文献

[1] Richard M Murray, Zexiang Li, S Shankar Sastry, and S Shankara Sastry. *A mathematical introduction to robotic manipulation.* CRC press, 1994.