根据传感器数据计算方向矩阵

NXP

21 June 2016

摘要

本应用说明介绍了旋转或方向矩阵，并记录了文件 `orientation.c` 中的函数，NXP 传感器融合库使用这些函数从传感器测量的不同组合中计算方向矩阵。

1 介绍

1.1 概要

本应用说明介绍了旋转或方向矩阵，并记录了文件 `orientation.c` 中的函数，NXP 传感器融合库使用这些函数从传感器测量的不同组合中计算方向矩阵。

1.2 术语

符号	定义
B	地磁场强度
${}^{S}\boldsymbol{B}_c$	传感器坐标系中的校准磁强计测量
${}^{S}B_{cx}, {}^{S}B_{cy}, {}^{S}B_{cz}$	传感器坐标系中的校准磁强计读数的 x、y 和 z 分量
ENU	$x = \text{East}, y = \text{North}, z = \text{Up}$ 坐标系 (Android 和 Windows 8)
${}^{S}\boldsymbol{G}_c$	传感器坐标系中的校准加速计测量
${}^{S}G_{cx}, {}^{S}G_{cy}, {}^{S}G_{cz}$	传感器坐标系中的加速度计读数的 x、y 和 z 分量
$\hat{\boldsymbol{n}}$	归一化旋转轴
$\hat{n}_x, \hat{n}_y, \hat{n}_z$	归一化旋转轴 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 分量
NED	$x = \text{North}, y = \text{East}, z = \text{Down}$ 坐标系 (航空航天)
$\boldsymbol{R}$	一般方向矩阵
$\boldsymbol{R}_{Android}$	Android 坐标系中的方向矩阵
$\boldsymbol{R}_{NED}$	NED/航空航天坐标系中的方向矩阵
$\boldsymbol{R}_{Win8}$	Windows 8 坐标系下的方向矩阵
R_{xy}	方向矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的 x 行和 y 列中的元素
$\text{tr}(\boldsymbol{R})$	方向矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的迹
δ	地磁倾角
η	旋转角度

符号	定义
θ	俯仰角
ϕ	横滚角
ψ	偏航角

1.3 软件功能

功能	描述	章节
void f3DOFTiltNED (**float** fR[][3], **float** fGc[]); **void** f3DOFTiltAndroid (**float** fR[][3], **float** fGc[]); **void** f3DOFTiltWin8 (**float** fR[][3], **float** fGc[]);	在航空航天/NED、Android 和 Windows 8 坐标系下，根据加速度计测量值计算倾斜方向矩阵。	4
void f3DOFMagnetometerMatrixNED (**float** fR[][3], **float** fBc[]); **void** f3DOFMagnetometerMatrixAndroid (**float** fR[][3], **float** fBc[]); **void** f3DOFMagnetometerMatrixWin8 (**float** fR[][3], **float** fBc[]);	在航空航天/NED、Android 和 Windows 8 坐标系下，根据校准的磁强计测量值计算 2D 电子罗盘偏航方向矩阵。	5
void feCompassNED (**float** fR[][3], **float** *pfDelta, **float** *pfsinDelta, **float** *pfcosDelta, **float** *pfmodBc, **float** *pfmodGc) **void** feCompassAndroid (**float** fR[][3], **float** *pfDelta, **float** *pfsinDelta, **float** *pfcosDelta, **float** fBc[], **float** fGc[], **float** *pfmodBc, **float** *pfmodGc) **void** feCompassWin8 (**float** fR[][3], **float** *pfDelta, **float** *pfsinDelta, **float** *pfcosDelta, **float** fBc[], **float** fGc[], **float** *pfmodBc, **float** *pfmodGc)	在航空航天/NED、Android 和 Windows 8 坐标系下，从加速度计和校准磁强计测量值计算完整的 3D 方向矩阵。 并且返回地磁倾角和加速度计和磁强计测量的模数。	6

2 一般旋转矩阵

2.1 介绍

一般的旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 将坐标系围绕归一化轴 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 旋转角度 η 而产生的向量变换为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \hat{n}_x^2+(1-\hat{n}_x^2)\cos\eta & \hat{n}_x\hat{n}_y(1-\cos\eta)+\hat{n}_z\sin\eta & \hat{n}_x\hat{n}_z(1-\cos\eta)-\hat{n}_y\sin\eta \\ \hat{n}_x\hat{n}_y(1-\cos\eta)-\hat{n}_z\sin\eta & \hat{n}_y^2+\left(1-\hat{n}_y^2\right)\cos\eta & \hat{n}_y\hat{n}_z(1-\cos\eta)+\hat{n}_x\sin\eta \\ \hat{n}_x\hat{n}_z(1-\cos\eta)+\hat{n}_y\sin\eta & \hat{n}_y\hat{n}_z(1-\cos\eta)-\hat{n}_x\sin\eta & \hat{n}_z^2+(1-\hat{n}_z^2)\cos\eta \end{pmatrix} \tag{1}$$

方程 (1) 称为罗德里格斯旋转矩阵。旋转轴 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 和旋转角 η 的乘积称为旋转向量 $\hat{\boldsymbol{n}}\eta$。

如果坐标系围绕 z 轴旋转角度 η，则向量相对于新旋转的坐标系围绕 z 轴旋转角度 $-\eta$。当 NXP 文档引用定义旋转矩阵的旋转向量时，它总是引用坐标系旋转。

此外，当旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 对传感器相对于地球 (全局) 参考坐标系的方向进行建模时，NXP 传感器融合库标准是乘积 $\boldsymbol{Rv}$ 将向量 $\boldsymbol{v}$ 从全局坐标系变换到传感器坐标系。反向旋转 $\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$ 将向量 $\boldsymbol{v}$ 从传感器坐标系转换为全局坐标系。方向矩阵总是相对于全局坐标系中的初始方向定义的，其乘积平面，指向磁北，给出零横滚角、俯仰角和偏航角。

方程 (1) 的两种特殊情况出现在绕任意轴的旋转角为 i) 0° 和 ii) 180°。代入方程 (1) 得到 0° 旋转矩阵 $\boldsymbol{R}(0)$ 和 180° 旋转矩阵 $\boldsymbol{R}(\pi)$ 如下：

$$\boldsymbol{R}(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{R}(\pi)=\begin{pmatrix} 2\hat{n}_x^2-1 & 2\hat{n}_x\hat{n}_y & 2\hat{n}_x\hat{n}_z \\ 2\hat{n}_x\hat{n}_y & 2\hat{n}_y^2-1 & 2\hat{n}_y\hat{n}_z \\ 2\hat{n}_x\hat{n}_z & 2\hat{n}_y\hat{n}_z & 2\hat{n}_z^2-1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

在这两种情况下，旋转矩阵是对称的。

2.2 特征向量与特征值

归一化旋转轴 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是对应于特征值 1 的旋转矩阵乘积 $\boldsymbol{R}$ 的特征向量。从几何学上讲，这意味着任何平行于旋转轴的向量都不会因旋转而改变。

$$\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{n}}=\begin{pmatrix} \hat{n}_x^2+(1-\hat{n}_x^2)\cos\eta & \hat{n}_x\hat{n}_y(1-\cos\eta)+\hat{n}_z\sin\eta & \hat{n}_x\hat{n}_z(1-\cos\eta)-\hat{n}_y\sin\eta \\ \hat{n}_x\hat{n}_y(1-\cos\eta)-\hat{n}_z\sin\eta & \hat{n}_y^2+\left(1-\hat{n}_y^2\right)\cos\eta & \hat{n}_y\hat{n}_z(1-\cos\eta)+\hat{n}_x\sin\eta \\ \hat{n}_x\hat{n}_z(1-\cos\eta)+\hat{n}_y\sin\eta & \hat{n}_y\hat{n}_z(1-\cos\eta)-\hat{n}_x\sin\eta & \hat{n}_z^2+(1-\hat{n}_z^2)\cos\eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{n}_x \\ \hat{n}_y \\ \hat{n}_z \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$=\begin{pmatrix} \hat{n}_x\left(\hat{n}_x^2+\hat{n}_y^2+\hat{n}_z^2\right)-\hat{n}_x\cos\eta\left(\hat{n}_x^2+\hat{n}_y^2+\hat{n}_z^2-1\right) \\ \hat{n}_y\left(\hat{n}_x^2+\hat{n}_y^2+\hat{n}_z^2\right)-\hat{n}_y\cos\eta\left(\hat{n}_x^2+\hat{n}_y^2+\hat{n}_z^2-1\right) \\ \hat{n}_z\left(\hat{n}_x^2+\hat{n}_y^2+\hat{n}_z^2\right)-\hat{n}_z\cos\eta\left(\hat{n}_x^2+\hat{n}_y^2+\hat{n}_z^2-1\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \hat{n}_x \\ \hat{n}_y \\ \hat{n}_z \end{pmatrix} \tag{5}$$

3 旋转矩阵与旋转向量的转换

3.1 旋转矩阵到旋转向量

方程 (1) 允许根据旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的迹确定旋转角 η：

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}) = R_{xx} + R_{yy} + R_{zz} = \hat{n}_x^2 + \left(1 - \hat{n}_x^2\right)\cos\eta + \hat{n}_y^2 + \left(1 - \hat{n}_y^2\right)\cos\eta + \hat{n}_z^2 + \left(1 - 2\hat{n}_z^2\right)\cos\eta \tag{6}$$

$$= \left(\hat{n}_x^2 + \hat{n}_y^2 + \hat{n}_z^2\right) + 3\cos\eta - \left(\hat{n}_x^2 + \hat{n}_y^2 + \hat{n}_z^2\right)\cos\eta \tag{7}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}(\boldsymbol{R}) = 1 + 2\cos\eta \tag{8}$$

$$\Rightarrow \eta = \cos^{-1}\left(\frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}) - 1}{2}\right) \tag{9}$$

矩阵的迹在 -1 和 $+3$ 之间变化。迹为 -1 对应于绕任意轴旋转 $180°$，迹为 $+3$ 对应于旋转 $0°$。

方程 (9) 中没有角度歧义，因为反余弦返回的角度在 $0°$ 和 $180°$ 之间，这意味着旋转角度 η 也在 $0°$ 和 $180°$ 之间变化。在 $-180°$ 和 $0°$ 之间的旋转角相当于绕负旋转轴 $-\hat{\boldsymbol{n}}$ 的负角度 $-\eta$ 的旋转，旋转向量 $\eta\hat{\boldsymbol{n}}$ 不受双符号变化的影响。

穿过 $\boldsymbol{R}$ 的前导对角线的差分元素给出：

$$2\hat{\boldsymbol{n}}\sin\eta = \begin{pmatrix} R_{yz} - R_{zy} \\ R_{zx} - R_{xz} \\ R_{xy} - R_{yx} \end{pmatrix} \tag{10}$$

在 $\sin\eta \neq 0$ 且旋转矩阵不对称的一般情况下，旋转轴 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 等于：

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\sqrt{\left(R_{yz} - R_{zy}\right)^2 + \left(R_{zx} - R_{xz}\right)^2 + \left(R_{xy} - R_{yx}\right)^2}} \begin{pmatrix} R_{yz} - R_{zy} \\ R_{zx} - R_{xz} \\ R_{xy} - R_{yx} \end{pmatrix} \tag{11}$$

当旋转角 η 接近零时，方程 (11) 在数学上变得不确定，对应于所有旋转轴在零旋转时相等的物理情况。然而，旋转向量 $\hat{\boldsymbol{n}}\eta$ 仍然定义为：

$$\hat{\boldsymbol{n}}\eta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} R_{yz} - R_{zy} \\ R_{zx} - R_{xz} \\ R_{xy} - R_{yx} \end{pmatrix} \tag{12}$$

对于旋转角 η 在 $180°$ 附近的情况，旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 近似于方程 (3) 的形式，迹为 -1。前导对角线上的元素允许旋转轴 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 由以下方程给出：

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} \hat{n}_x \\ \hat{n}_y \\ \hat{n}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\dfrac{R_{xx} + 1}{2}} \\ \pm\sqrt{\dfrac{R_{yy} + 1}{2}} \\ \pm\sqrt{\dfrac{R_{zz} + 1}{2}} \end{pmatrix} \tag{13}$$

正负符号歧义可以通过在前导对角线上求差并利用 $\sin\eta$ 为非负的结果来解决。

$$R_{yz} - R_{zy} = 2\hat{n}_x \sin\eta \Rightarrow \mathrm{sign}\left(\hat{n}_x\right) = \mathrm{sign}\left(R_{yz} - R_{zy}\right) \tag{14}$$

$$R_{zx} - R_{xz} = 2\hat{n}_y \sin\eta \Rightarrow \mathrm{sign}\left(\hat{n}_y\right) = \mathrm{sign}\left(R_{zx} - R_{xz}\right) \tag{15}$$

$$R_{xy} - R_{yx} = 2\hat{n}_z \sin\eta \Rightarrow \mathrm{sign}\left(\hat{n}_z\right) = \mathrm{sign}\left(R_{xy} - R_{yx}\right) \tag{16}$$

任何旋转都可以用归一化的旋转轴 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 和围绕该轴的旋转角 η 来表示，总共有 3 个自由度。旋转向量 $\eta\hat{\boldsymbol{n}}$ 是旋转的最有效编码，但没有有用的数学性质。因此，优先使用旋转四元数 (4 个分量) 和旋转矩阵 (9 个分量)。

陀螺仪传感器的输出 (以 $\deg/s$ 为单位) 乘以采样时间间隔是一个旋转向量，因此在软件中会立即转换为旋转四元数或矩阵进行方向积分。

3.2 旋转向量到旋转矩阵

方程 (1) 直接根据旋转轴 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 和旋转角 η 定义了罗德里格斯旋转矩阵。对于非零旋转向量 $\eta\hat{\boldsymbol{n}}$ 的情况，可以很容易地使用以下方程确定：

$$\eta = |\eta\hat{\boldsymbol{n}}| \tag{17}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\eta\hat{\boldsymbol{n}}}{|\eta\hat{\boldsymbol{n}}|} \tag{18}$$

如果旋转向量为零，则旋转矩阵为单位矩阵。

4 加速度计倾斜方向矩阵

4.1 介绍

加速计传感器对线加速度和重力都很敏感，并且对垂直重力轴的旋转不敏感。因此，在没有其他传感器的情况下运行的加速计可以检测水平方向的横滚、俯仰和倾斜角度，前提是没有线性加速度，但无法检测罗盘航向。

下面的数学假设偏航角或罗盘角始终为零度。这种假设的一个结果是，方向在 $\pm 90°$ 俯仰角 (航空航天/NED 坐标系) 和 $\pm 90°$ 横滚角 (Android 和 Windows 8 坐标系) 下发生 180° 的扭曲，以确保方向仍然指向北方。

在航空航天/NED 坐标系中，描述相同现象的另一种方法是应用 180° 横滚角 (导致电路板指向北方，但反向)，然后 180° 偏航角旋转 (这没有影响，因为加速计对绕垂直重力轴的旋转不敏感)。同样的方向也可以通过 180° 俯仰角旋转来实现。如果没有 90° 俯仰角下的 180° 方向扭曲，相同的加速计读数将导致两个不同的方向，具体取决于所采用的路径。

4.2 航空航天/NED

本节介绍文件 `orientation.c` 中的函数 `f3DOFTiltNED` 的数学基础。

从水平方向旋转俯仰角 θ，然后横滚角 ϕ 后，零偏航角 ψ 的航空航天/NED 方向矩阵 $\boldsymbol{R}_{NED}$ 为：

$$\boldsymbol{R}_{NED}(\psi=0)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ \sin\theta\sin\phi & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi\\ \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi\end{pmatrix} \tag{19}$$

通过将初始平面方向上的加速计测量值乘以 $\boldsymbol{R}_{NED}(\psi=0)$，可以计算出该方向上传感器坐标系中读取的航空航天/NED 加速计的 ${}^S\boldsymbol{G}_c$：

$$\begin{pmatrix}{}^SG_{cx}\\ {}^SG_{cy}\\ {}^SG_{cz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ \sin\theta\sin\phi & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi\\ \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi\end{pmatrix}\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \sin\phi\cos\theta\\ \cos\phi\cos\theta\end{pmatrix} \tag{20}$$

$$=\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \sin\phi\sqrt{1-\left(\frac{{}^SG_{cx}}{\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|}\right)^2}\\ \cos\phi\sqrt{1-\left(\frac{{}^SG_{cx}}{\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|}\right)^2}\end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\sin\theta = \frac{-{}^{S}G_{cx}}{\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|} \tag{22}$$

$$\cos\theta = \sqrt{1-\left(\frac{{}^{S}G_{cx}}{\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|}\right)^2} \tag{23}$$

$$\sin\phi = \frac{{}^{S}G_{cy}}{\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|\sqrt{1-\left(\frac{{}^{S}G_{cx}}{\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|}\right)^2}} \tag{24}$$

$$\cos\phi = \frac{{}^{S}G_{cz}}{\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|\sqrt{1-\left(\frac{{}^{S}G_{cx}}{\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|}\right)^2}} \tag{25}$$

$\cos\theta$ 的正平方根始终可以在方程 (23) 中取得，因为航空航天/NED 坐标系中的俯仰角 θ 在 $-90°$ 和 $+90°$ 之间变化，因此 $\cos\theta$ 的值为非负值。

代回方程 (19)，直接根据传感器坐标系加速计读数 ${}^{S}\boldsymbol{G}_c$ 得出航空航天/NED 的 3DOF 方向矩阵，如下所示：

$$\boldsymbol{R}_{NED}(\psi=0) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{{}^{S}G_{cy}^2+{}^{S}G_{cz}^2}}{\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|} & 0 & \frac{{}^{S}G_{cx}}{\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|} \\ \frac{-{}^{S}G_{cx}{}^{S}G_{cy}}{\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|\sqrt{{}^{S}G_{cy}^2+{}^{S}G_{cz}^2}} & \frac{{}^{S}G_{cz}}{\sqrt{{}^{S}G_{cy}^2+{}^{S}G_{cz}^2}} & \frac{{}^{S}G_{cy}}{\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|} \\ \frac{-{}^{S}G_{cx}{}^{S}G_{cz}}{\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|\sqrt{{}^{S}G_{cy}^2+{}^{S}G_{cz}^2}} & \frac{-{}^{S}G_{cy}}{\sqrt{{}^{S}G_{cy}^2+{}^{S}G_{cz}^2}} & \frac{{}^{S}G_{cz}}{\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|} \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{{}^{S}G_{cy}^2+{}^{S}G_{cz}^2}}{\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|} & 0 & \frac{{}^{S}G_{cx}}{\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|} \\ \frac{-R_{xz}R_{yz}\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|}{\sqrt{{}^{S}G_{cy}^2+{}^{S}G_{cz}^2}} & \frac{R_{zz}\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|}{\sqrt{{}^{S}G_{cy}^2+{}^{S}G_{cz}^2}} & \frac{{}^{S}G_{cy}}{\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|} \\ \frac{-R_{xz}R_{zz}\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|}{\sqrt{{}^{S}G_{cy}^2+{}^{S}G_{cz}^2}} & \frac{-R_{yz}\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|}{\sqrt{{}^{S}G_{cy}^2+{}^{S}G_{cz}^2}} & \frac{{}^{S}G_{cz}}{\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|} \end{pmatrix} \tag{27}$$

在具有 $\pm 90°$ 俯仰角 θ 旋转的万向节锁方向上，其中 ${}^{S}G_{cy} = {}^{S}G_{cz} = 0$ 且 ${}^{S}G_{cx} = \left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|$，方程 (24) 至 (27) 表明横滚角 ϕ 和旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_{NED}$ 未定义。由于横滚角 ϕ 与偏航角 ψ(假设为零) 在同一旋转轴上，最简单的解决方案是也将横滚角设置为零，给出：

$$\boldsymbol{R}_{NED}(\phi=\psi=0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \operatorname{sign}\left({}^{S}G_{cx}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sign}\left({}^{S}G_{cx}\right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

4.3 Android

本节介绍文件 `orientation.c` 中的函数 `f3DOFTiltAndroid` 的数学基础。

由横滚角 ϕ 和俯仰角 θ 从水平方向旋转后，零偏航角 ψ 的 Android 旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_{Android}$ 为：

$$\boldsymbol{R}_{Android}(\psi=0)=\begin{pmatrix}\cos\phi & 0 & \sin\phi\\ \sin\phi\sin\theta & \cos\theta & -\cos\phi\sin\theta\\ -\cos\theta\sin\phi & \sin\theta & \cos\phi\cos\theta\end{pmatrix} \tag{29}$$

通过将初始平面方向上的加速计测量值乘以 $\boldsymbol{R}_{Android}(\psi=0)$，可以计算出该方向上传感器坐标系中读取的 Android 加速计的 ${}^{S}\boldsymbol{G}_c$：

$$\begin{pmatrix}{}^{S}G_{cx}\\ {}^{S}G_{cy}\\ {}^{S}G_{cz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\phi & 0 & \sin\phi\\ \sin\phi\sin\theta & \cos\theta & -\cos\phi\sin\theta\\ -\cos\theta\sin\phi & \sin\theta & \cos\phi\cos\theta\end{pmatrix}\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|\begin{pmatrix}\sin\phi\\ -\cos\phi\sin\theta\\ \cos\phi\cos\theta\end{pmatrix} \tag{30}$$

$$=\left|{}^{S}\boldsymbol{G}_c\right|\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ -\sin\theta\sqrt{1-\left(\frac{{}^{S}G_{cx}}{|{}^{S}\boldsymbol{G}_c|}\right)^2}\\ \cos\theta\sqrt{1-\left(\frac{{}^{S}G_{cx}}{|{}^{S}\boldsymbol{G}_c|}\right)^2}\end{pmatrix} \tag{31}$$

$$\sin\phi=\frac{{}^{S}G_{cx}}{|{}^{S}\boldsymbol{G}_c|} \tag{32}$$

$$\cos\phi=\sqrt{1-\left(\frac{{}^{S}G_{cx}}{|{}^{S}\boldsymbol{G}_c|}\right)^2} \tag{33}$$

$$\sin\theta=\frac{-{}^{S}G_{cy}}{|{}^{S}\boldsymbol{G}_c|\sqrt{1-\left(\frac{{}^{S}G_{cx}}{|{}^{S}\boldsymbol{G}_c|}\right)^2}} \tag{34}$$

$$\cos\theta=\frac{{}^{S}G_{cz}}{|{}^{S}\boldsymbol{G}_c|\sqrt{1-\left(\frac{{}^{S}G_{cx}}{|{}^{S}\boldsymbol{G}_c|}\right)^2}} \tag{35}$$

$\cos\phi$ 的正平方根总是可以在方程 (33) 中取得，因为 Android 坐标系中的横滚角 ϕ 在 $-90°$ 和 $+90°$ 之间变化，给出了 $\cos\phi$ 的非负值。

代入方程 (29) 中，直接根据加速计读数给出 3DOF 的 Android 方向矩阵，如下所示：

$$\boldsymbol{R}_{Android}(\psi=0)=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{{}^SG_{cy}^2+{}^SG_{cz}^2}}{\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|} & 0 & {}^SG_{cx} \\ \frac{-{}^SG_{cx}{}^SG_{cy}}{\sqrt{{}^SG_{cy}^2+{}^SG_{cz}^2}} & \frac{{}^SG_{cz}\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|}{\sqrt{{}^SG_{cy}^2+{}^SG_{cz}^2}} & {}^SG_{cy} \\ \frac{-{}^SG_{cx}{}^SG_{cz}}{\sqrt{{}^SG_{cy}^2+{}^SG_{cz}^2}} & \frac{-{}^SG_{cy}\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|}{\sqrt{{}^SG_{cy}^2+{}^SG_{cz}^2}} & {}^SG_{cz} \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{{}^SG_{cy}^2+{}^SG_{cz}^2}}{\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|} & 0 & \frac{{}^SG_{cx}}{\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|} \\ \frac{-R_{xz}R_{yz}\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|}{\sqrt{{}^SG_{cy}^2+{}^SG_{cz}^2}} & \frac{R_{zz}\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|}{\sqrt{{}^SG_{cy}^2+{}^SG_{cz}^2}} & \frac{{}^SG_{cy}}{\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|} \\ \frac{-R_{xz}R_{zz}\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|}{\sqrt{{}^SG_{cy}^2+{}^SG_{cz}^2}} & \frac{-R_{yz}\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|}{\sqrt{{}^SG_{cy}^2+{}^SG_{cz}^2}} & \frac{{}^SG_{cz}}{\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|} \end{pmatrix} \tag{37}$$

在 $\pm 90^\circ$ 横滚角 ϕ 旋转后万向节锁的情况下，当 ${}^SG_{cy}={}^SG_{cz}=0$ 时，俯仰角 θ 未定义，可以设置为零：

$$\boldsymbol{R}_{Android}(\theta=\psi=0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \operatorname{sign}\left({}^SG_{cx}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sign}\left({}^SG_{cx}\right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

4.4 Windows 8

本节介绍文件 `orientation.c` 中的函数 `f3DOFTiltWin8` 的数学基础。

零偏航角 ψ 为零的 Windows 8 旋转矩阵 $\boldsymbol{R}_{Win8}$，在从水平方向旋转俯仰角 θ，然后是横滚角 ϕ 后，为：

$$\boldsymbol{R}_{Win8}(\psi=0)=\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi\sin\theta & -\sin\phi\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\phi & -\cos\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix} \tag{39}$$

通过将初始平面方向上的加速计测量值乘以 $\boldsymbol{R}_{Win8}(\psi=0)$，可以计算出该方向上传感器坐标系中读取的 Windows 8 加速计的 ${}^S\boldsymbol{G}_c$：

$$\begin{pmatrix} {}^SG_{cx} \\ {}^SG_{cy} \\ {}^SG_{cz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi\sin\theta & -\sin\phi\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\phi & -\cos\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix}\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|\begin{pmatrix} \sin\phi\cos\theta \\ -\sin\theta \\ -\cos\phi\cos\theta \end{pmatrix} \tag{40}$$

$$\tan\phi = \frac{-^{S}G_{cx}}{^{S}G_{cz}} \Rightarrow \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{^{S}G_{cx}}{^{S}G_{cz}}\right)^2}} \tag{41}$$

$$\Rightarrow \sin\phi = \tan\phi\cos\phi = \frac{-^{S}G_{cx}}{^{S}G_{cz}\sqrt{1+\left(\frac{^{S}G_{cx}}{^{S}G_{cz}}\right)^2}} \tag{42}$$

$$\sin\theta = \frac{-^{S}G_{cy}}{|^{S}\boldsymbol{G}_c|} \tag{43}$$

$$\cos\theta = \frac{-^{S}G_{cz}}{|^{S}\boldsymbol{G}_c|\cos\phi} = \frac{-^{S}G_{cz}}{|^{S}\boldsymbol{G}_c|}\sqrt{1+\left(\frac{^{S}G_{cx}}{^{S}G_{cz}}\right)^2} \tag{44}$$

$\cos\phi$ 的正平方根总是可以在方程 (41) 中取得，因为 Windows 8 坐标系中的横滚角 ϕ 在 $-90°$ 和 $+90°$ 之间变化，给出了 $\cos\phi$ 的非负值。

代入方程 (39) 中，直接根据加速计读数给出 Windows 8 的 3DOF 方向矩阵，如下所示：

$$\boldsymbol{R}_{Win8}(\psi=0) = \frac{1}{|^{S}\boldsymbol{G}_c|}\begin{pmatrix} \frac{\left|^{S}\boldsymbol{G}_c\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{^{S}G_{cx}}{^{S}G_{cz}}\right)^2}} & \frac{^{S}G_{cx}{}^{S}G_{cy}}{^{S}G_{cz}\sqrt{1+\left(\frac{^{S}G_{cx}}{^{S}G_{cz}}\right)^2}} & -^{S}G_{cx} \\ 0 & -^{S}G_{cz}\sqrt{1+\left(\frac{^{S}G_{cx}}{^{S}G_{cz}}\right)^2} & -^{S}G_{cy} \\ \frac{-^{S}G_{cx}\left|^{S}\boldsymbol{G}_c\right|}{^{S}G_{cz}\sqrt{1+\left(\frac{^{S}G_{cx}}{^{S}G_{cz}}\right)^2}} & \frac{^{S}G_{cy}}{\sqrt{1+\left(\frac{^{S}G_{cx}}{^{S}G_{cz}}\right)^2}} & -^{S}G_{cz} \end{pmatrix} \tag{45}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{^{S}G_{cz}}{\mathrm{sign}\left(^{S}G_{cz}\right)\sqrt{^{S}G_{cx}^2+{}^{S}G_{cz}^2}} & \frac{-^{S}G_{cx}R_{yz}}{\mathrm{sign}\left(^{S}G_{cz}\right)\sqrt{^{S}G_{cx}^2+{}^{S}G_{cz}^2}} & \frac{-^{S}G_{cx}}{|^{S}\boldsymbol{G}_c|} \\ 0 & \frac{-\mathrm{sign}\left(^{S}G_{cz}\right)\sqrt{^{S}G_{cx}^2+{}^{S}G_{cz}^2}}{\left|^{S}\boldsymbol{G}_c\right|} & \frac{-^{S}G_{cy}}{|^{S}\boldsymbol{G}_c|} \\ \frac{-^{S}G_{cx}}{\mathrm{sign}\left(^{S}G_{cz}\right)\sqrt{^{S}G_{cx}^2+{}^{S}G_{cz}^2}} & \frac{-^{S}G_{cy}R_{zz}}{\mathrm{sign}\left(^{S}G_{cz}\right)\sqrt{^{S}G_{cx}^2+{}^{S}G_{cz}^2}} & \frac{-^{S}G_{cz}}{|^{S}\boldsymbol{G}_c|} \end{pmatrix} \tag{46}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{^{S}G_{cz}}{\mathrm{sign}\left(^{S}G_{cz}\right)\sqrt{^{S}G_{cx}^2+{}^{S}G_{cz}^2}} & \frac{R_{xz}R_{yz}\left|^{S}\boldsymbol{G}_c\right|}{\mathrm{sign}\left(^{S}G_{cz}\right)\sqrt{^{S}G_{cx}^2+{}^{S}G_{cz}^2}} & \frac{-^{S}G_{cx}}{|^{S}\boldsymbol{G}_c|} \\ 0 & \frac{-1}{\left\{\frac{\left|^{S}\boldsymbol{G}_c\right|}{\mathrm{sign}\left(^{S}G_{cz}\right)\sqrt{^{S}G_{cx}^2+{}^{S}G_{cz}^2}}\right\}} & \frac{-^{S}G_{cy}}{|^{S}\boldsymbol{G}_c|} \\ \frac{R_{xz}\left|^{S}\boldsymbol{G}_c\right|}{\mathrm{sign}\left(^{S}G_{cz}\right)\sqrt{^{S}G_{cx}^2+{}^{S}G_{cz}^2}} & \frac{R_{yz}R_{zz}\left|^{S}\boldsymbol{G}_c\right|}{\mathrm{sign}\left(^{S}G_{cz}\right)\sqrt{^{S}G_{cx}^2+{}^{S}G_{cz}^2}} & \frac{-^{S}G_{cz}}{|^{S}\boldsymbol{G}_c|} \end{pmatrix} \tag{47}$$

在 $\pm90°$ 俯仰角 θ 旋转后万向锁的情况下，当 $^{S}G_{cx} = {}^{S}G_{cz} = 0$ 时，横滚角 ϕ 未定义，可以设置为零：

$$\boldsymbol{R}_{Win8}(\phi=\psi=0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{sign}\left(^{S}G_{cy}\right) \\ 0 & \mathrm{sign}\left(^{S}G_{cy}\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

5 磁强计 2D 罗盘方向矩阵

5.1 介绍

本节记录了 2D(仅限磁强计) 电子罗盘函数，该函数根据校准的磁强计测量值计算方向矩阵，假设磁强计始终是平面的，并且相对水平面的倾斜为零。这种配置的市场应用是一种汽车罗盘，由于车辆加速度、制动力和转弯力的原因，无法使用普通加速计和磁强计倾斜补偿电子罗盘功能。

小心使用这些功能。在汽车应用中，由于磁强计传感器不受加速度的影响，2D 电子罗盘将对加速度、制动力和转向力的影响具有鲁棒性。然而，当车辆倾斜角 (无论是横滚角 ϕ 还是俯仰角 θ) 偏离水平方向时，罗盘航向会发生变化，因为这违反了磁强计传感器始终是平面的假设。

5.2 航空航天/NED

本节介绍文件 `orientation.c` 中的函数 `f3DOFMagnetometerMatrixNED` 的数学基础。

仅当保持水平时，偏航角 ψ 旋转的航空航天/NED 旋转矩阵为：

$$\boldsymbol{R}_{NED}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{49}$$

航空航天/NED 校准磁强计在该方向的读数为：

$$\begin{pmatrix} {}^{S}B_{cx} \\ {}^{S}B_{cy} \\ {}^{S}B_{cz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} \cos\delta \\ 0 \\ \sin\delta \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\delta \\ -\sin\psi\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix} \tag{50}$$

地磁场的水平分量的值为：

$$B\cos\delta = \sqrt{{}^{S}B_{cx}^{2} + {}^{S}B_{cy}^{2}} \tag{51}$$

偏航角 ψ(和罗盘航向角) 由下式给出：

$$\tan\psi = \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{-{}^{S}B_{cy}}{{}^{S}B_{cx}} \tag{52}$$

$$\sin\psi = \frac{-{}^{S}B_{cy}}{\sqrt{{}^{S}B_{cx}^{2} + {}^{S}B_{cy}^{2}}} \tag{53}$$

$$\cos\psi = \frac{{}^{S}B_{cx}}{\sqrt{{}^{S}B_{cx}^{2} + {}^{S}B_{cy}^{2}}} \tag{54}$$

方向矩阵与未知的地磁倾角 δ 无关，其值为：

$$\boldsymbol{R}_{NED}(\psi) = \frac{1}{\sqrt{{}^{S}B_{cx}^{2} + {}^{S}B_{cy}^{2}}} \begin{pmatrix} {}^{S}B_{cx} & -{}^{S}B_{cy} & 0 \\ {}^{S}B_{cy} & {}^{S}B_{cx} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{55}$$

5.3 Android

本节介绍文件 `orientation.c` 中的函数 `f3DOFMagnetometerMatrixAndroid` 的数学基础。仅当保持水平时，偏航角 ψ 旋转的 Android 旋转矩阵为：

$$\boldsymbol{R}_{Android}(\psi)=\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{56}$$

Android 校准磁强计在该方向的读数为：

$$\begin{pmatrix}{}^{S}B_{cx}\\ {}^{S}B_{cy}\\ {}^{S}B_{cz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}0\\ \cos\delta\\ -\sin\delta\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}-\sin\psi\cos\delta\\ \cos\psi\cos\delta\\ -\sin\delta\end{pmatrix} \tag{57}$$

地磁场的水平分量的值为：

$$B\cos\delta=\sqrt{{}^{S}B_{cx}^{2}+{}^{S}B_{cy}^{2}} \tag{58}$$

偏航角 ψ(和罗盘航向角) 由下式给出：

$$\tan\psi=\frac{\sin\psi}{\cos\psi}=\frac{-{}^{S}B_{cx}}{{}^{S}B_{cy}} \tag{59}$$

$$\sin\psi=\frac{-{}^{S}B_{cx}}{\sqrt{{}^{S}B_{cx}^{2}+{}^{S}B_{cy}^{2}}} \tag{60}$$

$$\cos\psi=\frac{{}^{S}B_{cy}}{\sqrt{{}^{S}B_{cx}^{2}+{}^{S}B_{cy}^{2}}} \tag{61}$$

方向矩阵与未知的地磁倾角 δ 无关，其值为：

$$\boldsymbol{R}_{Android}(\psi)=\frac{1}{\sqrt{{}^{S}B_{cx}^{2}+{}^{S}B_{cy}^{2}}}\begin{pmatrix}{}^{S}B_{cy} & {}^{S}B_{cx} & 0\\ -{}^{S}B_{cx} & {}^{S}B_{cy} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{62}$$

5.4 Windows 8

本节介绍文件 `orientation.c` 中的函数 `f3DOFMagnetometerMatrixWin8` 的数学基础。仅当保持水平时，偏航角 ψ 旋转的 Windows 8 旋转矩阵为：

$$\boldsymbol{R}_{Win8}(\psi)=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{63}$$

Windows 8 校准磁强计在该方向的读数为：

$$\begin{pmatrix}{}^{S}B_{cx}\\ {}^{S}B_{cy}\\ {}^{S}B_{cz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}0\\ \cos\delta\\ -\sin\delta\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}\sin\psi\cos\delta\\ \cos\psi\cos\delta\\ -\sin\delta\end{pmatrix} \tag{64}$$

地磁场的水平分量的值为：

$$B\cos\delta = \sqrt{{}^{S}B_{cx}^{2} + {}^{S}B_{cy}^{2}} \tag{65}$$

偏航角 ψ 等于 Windows 8 坐标系中罗盘航向的负值，由下式给出：

$$\tan\psi = \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{{}^{S}B_{cx}}{{}^{S}B_{cy}} \tag{66}$$

$$\sin\psi = \frac{{}^{S}B_{cx}}{\sqrt{{}^{S}B_{cx}^{2} + {}^{S}B_{cy}^{2}}} \tag{67}$$

$$\cos\psi = \frac{{}^{S}B_{cy}}{\sqrt{{}^{S}B_{cx}^{2} + {}^{S}B_{cy}^{2}}} \tag{68}$$

方向矩阵与未知的地磁倾角 δ 无关，其值为：

$$\boldsymbol{R}_{Win8}(\psi) = \frac{1}{\sqrt{{}^{S}B_{cx}^{2} + {}^{S}B_{cy}^{2}}} \begin{pmatrix} {}^{S}B_{cy} & {}^{S}B_{cx} & 0 \\ -{}^{S}B_{cx} & {}^{S}B_{cy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{69}$$

6 加速度计和磁强计 3D 电子罗盘方向矩阵

6.1 介绍

本节记录了从加速度计和磁强计测量值计算方向矩阵的过程。这是一个典型的倾斜补偿电子罗盘，它提供了一个完整的方向确定。假设没有线性加速度，因此加速度计读数只是地球引力场方向的函数。

方向矩阵可以用一种算法来计算，这种算法最容易从下面的简单数学恒等式中理解：

$$\begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{70}$$

右侧的单位矩阵的三列是 x、y 和 z 方向上的 3 个单位向量，与全局参考坐标系中的初始方向对齐。在航空航天/NED 坐标系中，x 轴指向北方，y 轴指向东方，z 轴指向下方。在 Android 和 windows 8 坐标系中，x 轴指向东，y 轴指向北，z 轴指向上。

将方程 (70) 分解成列向量清楚地表明，方向矩阵的 x、y 和 z 分量是从全局参考坐标系旋转到传感器坐标系的原始 x、y 和 z 单位向量：

$$\begin{pmatrix} R_{xx} \\ R_{yx} \\ R_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{71}$$

$$\begin{pmatrix} R_{xy} \\ R_{yy} \\ R_{zy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{72}$$

$$\begin{pmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \\ R_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{73}$$

在没有加速度的情况下，加速计测量传感器坐标系中可测量的重力向量，因此提供方向矩阵的右侧列。全局坐标系中的地磁向量在北 (南) 半球指向北方和向下 (向上)。根据定义，旋转重力向量和旋转地磁向量之间的向量积与两者成直角，因此是来自全局坐标系的旋转东向指向向量，该坐标系在方向矩阵中形成 y(航空航天/NED 坐标系) 或 x(Android 和 Windows 8 坐标系) 列向量。因为方向矩阵是正交的，所以这两个列向量之间的最终向量积给出方向矩阵的剩余列向量。

6.2 航空航天/NED

本节介绍文件 `orientation.c` 中的函数 `feCompassNED` 的数学基础。

初始 NED 方向的 z 轴向下对齐并与重力平行。方向矩阵的 z 轴列向量是旋转的 z 轴向量，在零加速度的假设下，是归一化的加速度计测量 ${}^{S}\boldsymbol{G}_c$：

$$\begin{pmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \\ R_{zz} \end{pmatrix} = \frac{{}^{S}\boldsymbol{G}_c}{|{}^{S}\boldsymbol{G}_c|} \tag{74}$$

根据校准的磁强计测量估计的地磁向量在初始方向上指向北方 (NED 坐标系的 x 方向)，在北 (南) 半球向下 (向上)。加速计和磁强计测量的归一化向量积给出了与两者正交的归一化向量，因此，该归一化向量沿指向东的 y 轴对齐，并等于旋转矩阵的 y 列：

$$\begin{pmatrix} R_{xy} \\ R_{yy} \\ R_{zy} \end{pmatrix} = \frac{{}^S\boldsymbol{G}_c \times {}^S\boldsymbol{B}_c}{\left|{}^S\boldsymbol{G}_c \times {}^S\boldsymbol{B}_c\right|} \tag{75}$$

最后，由于旋转矩阵是列 (和行) 正交的，因此旋转矩阵列的 y 列和 z 列的向量积等于剩余的 x 列：

$$\begin{pmatrix} R_{xx} \\ R_{yx} \\ R_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xy} \\ R_{yy} \\ R_{zy} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \\ R_{zz} \end{pmatrix} \tag{76}$$

地磁倾斜角 δ 是地球磁场在全球范围内下降到水平面以下的角度。由于两个向量的标量积在旋转下是不变的，因此可以从归一化加速度计的标量积和传感器坐标系中的校准磁测量值计算倾角，给出：

$${}^S\boldsymbol{G}_c \cdot {}^S\boldsymbol{B}_c = \left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right| \left|{}^S\boldsymbol{B}_c\right| \sin\delta \Rightarrow \sin\delta = \frac{{}^SG_{cx}{}^SB_{cx} + {}^SG_{cy}{}^SB_{cy} + {}^SG_{cz}{}^SB_{cz}}{\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right| \left|{}^S\boldsymbol{B}_c\right|} \tag{77}$$

应用方程 (74) 至 (76) 得到的方向矩阵可显示为等于 AN5017 “航空航天、Android 和 Windows 坐标系” 方程 (5) 中导出的航空航天/NED 方向矩阵：

$$\boldsymbol{R}_{NED} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \cos\psi\sin\theta\sin\phi - \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\theta\sin\phi \\ \cos\phi\cos\psi\sin\theta + \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \cos\psi\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} \tag{78}$$

通过使用任意两个旋转向量的向量积等于其旋转向量积的标准结果简化了证明：

$$\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\right) = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{R}\boldsymbol{b} \tag{79}$$

方程 (74) 计算为：

$$\frac{{}^S\boldsymbol{G}_c}{\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right|} = \boldsymbol{R}_{NED} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \\ R_{zz} \end{pmatrix} \tag{80}$$

方程 (75) 计算为：

$$\frac{{}^S\boldsymbol{G}_c \times {}^S\boldsymbol{B}_c}{|{}^S\boldsymbol{G}_c \times {}^S\boldsymbol{B}_c|} = \frac{\boldsymbol{R}_{NED}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cos\delta\\0\\\sin\delta\end{pmatrix}\right\}}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cos\delta\\0\\\sin\delta\end{pmatrix}\right|} = \boldsymbol{R}_{NED}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\sin\psi\\\cos\phi\cos\psi+\sin\theta\sin\phi\sin\psi\\\cos\phi\sin\theta\sin\psi-\cos\psi\sin\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R_{xy}\\R_{yy}\\R_{zy}\end{pmatrix} \tag{81}$$

方程 (76) 计算为：

$$\begin{pmatrix}R_{xy}\\R_{yy}\\R_{zy}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}R_{xz}\\R_{yz}\\R_{zz}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\sin\psi\\\cos\phi\cos\psi+\sin\theta\sin\phi\sin\psi\\\cos\phi\sin\theta\sin\psi-\cos\psi\sin\phi\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\sin\phi\\\cos\theta\cos\phi\end{pmatrix} \tag{82}$$

$$= \begin{pmatrix}(\cos\phi\cos\psi+\sin\theta\sin\phi\sin\psi)\cos\theta\cos\phi-(\cos\phi\sin\theta\sin\psi-\cos\psi\sin\phi)\cos\theta\sin\phi\\-(\cos\phi\sin\theta\sin\psi-\cos\psi\sin\phi)\sin\theta-\cos^2\theta\sin\psi\cos\phi\\\sin\psi\cos^2\theta\sin\phi+(\cos\phi\cos\psi+\sin\theta\sin\phi\sin\psi)\sin\theta\end{pmatrix} \tag{83}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\psi\\\cos\psi\sin\theta\sin\phi-\cos\phi\sin\psi\\\cos\phi\cos\psi\sin\theta+\sin\phi\sin\psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R_{xx}\\R_{yx}\\R_{zx}\end{pmatrix} \tag{84}$$

6.3 Android

本节介绍文件 `orientation.c` 中的函数 `feCompassAndroid` 的数学基础。

初始 Android 方向的 z 轴向上对齐，并与重力反平行。Android 标准规定加速度计是正加速度而不是正重力。因此，方向矩阵的 z 轴列向量是旋转的 z 轴向量，假设加速度为零，则为归一化加速度计测量 ${}^S\boldsymbol{G}_c$：

$$\begin{pmatrix}R_{xz}\\R_{yz}\\R_{zz}\end{pmatrix} = \frac{{}^S\boldsymbol{G}_c}{|{}^S\boldsymbol{G}_c|} \tag{85}$$

根据校准的磁强计测量值估计的地磁向量在初始方向上指向北方 (Android 坐标系为 y 方向)，在北 (南) 半球向下 (向上)。磁强计和加速计测量的归一化向量积给出了一个与两者正交的归一化向量，因此，该向量沿指向东的 x 轴对齐：

$$\begin{pmatrix}R_{xx}\\R_{yx}\\R_{zx}\end{pmatrix} = \frac{{}^S\boldsymbol{B}_c \times {}^S\boldsymbol{G}_c}{|{}^S\boldsymbol{B}_c \times {}^S\boldsymbol{G}_c|} \tag{86}$$

最后，由于旋转矩阵是正交的，因此旋转矩阵 z 轴和 x 轴的向量积给出了方向矩阵的剩余 y 分量：

$$\begin{pmatrix} R_{xy} \\ R_{yy} \\ R_{zy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \\ R_{zz} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_{xx} \\ R_{yx} \\ R_{zx} \end{pmatrix} \tag{87}$$

根据加速计和校准磁测量的标量积计算倾角 δ，得出：

$$^S\boldsymbol{G}_c \cdot {^S\boldsymbol{B}_c} = -\left|^S\boldsymbol{G}_c\right|\left|^S\boldsymbol{B}_c\right| \sin\delta \Rightarrow \sin\delta = \frac{-\left(^SG_{cx}{^SB_{cx}} + {^SG_{cy}}{^SB_{cy}} + {^SG_{cz}}{^SB_{cz}}\right)}{\left|^S\boldsymbol{G}_c\right|\left|^S\boldsymbol{B}_c\right|} \tag{88}$$

应用方程 (85) 至 (87) 得到的方向矩阵可显示为等于 AN5017“航空航天、Android 和 Windows 坐标系”方程 (30) 中导出的 Android 方向矩阵：

$$\boldsymbol{R}_{Android} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi & -\cos\phi\sin\psi & \sin\phi \\ \cos\theta\sin\psi + \cos\psi\sin\phi\sin\theta & \cos\psi\cos\theta - \sin\phi\sin\psi\sin\theta & -\cos\phi\sin\theta \\ -\cos\psi\cos\theta\sin\phi + \sin\psi\sin\theta & \cos\theta\sin\phi\sin\psi + \cos\psi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix} \tag{89}$$

方程 (85) 计算为：

$$\frac{^S\boldsymbol{G}_c}{\left|^S\boldsymbol{G}_c\right|} = \boldsymbol{R}_{Android}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\phi \\ -\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \\ R_{zz} \end{pmatrix} \tag{90}$$

方程 (86) 计算为：

$$\frac{^S\boldsymbol{B}_c \times {^S\boldsymbol{G}_c}}{\left|^S\boldsymbol{B}_c \times {^S\boldsymbol{G}_c}\right|} = \frac{\boldsymbol{R}_{Android}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\delta \\ -\sin\delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\delta \\ -\sin\delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \boldsymbol{R}_{\text{Android}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{91}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi + \cos\psi\sin\phi\sin\theta \\ -\cos\psi\cos\theta\sin\phi + \sin\psi\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} \\ R_{yx} \\ R_{zx} \end{pmatrix} \tag{92}$$

方程 (87) 计算为：

$$\begin{pmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \\ R_{zz} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_{xx} \\ R_{yx} \\ R_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\phi \\ -\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi + \cos\psi\sin\phi\sin\theta \\ -\cos\psi\cos\theta\sin\phi + \sin\psi\sin\theta \end{pmatrix} \tag{93}$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos\phi\sin\theta(-\cos\psi\cos\theta\sin\phi + \sin\psi\sin\theta) - \cos\phi\cos\theta(\cos\theta\sin\psi + \cos\psi\sin\phi\sin\theta) \\ \cos\phi\cos\theta\cos\phi\cos\psi - \sin\phi(-\cos\psi\cos\theta\sin\phi + \sin\psi\sin\theta) \\ \sin\phi(\cos\theta\sin\psi + \cos\psi\sin\phi\sin\theta) + \cos\phi\sin\theta\cos\phi\cos\psi \end{pmatrix} \tag{94}$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos\phi\sin\psi \\ \cos\psi\cos\theta - \sin\phi\sin\psi\sin\theta \\ \cos\theta\sin\phi\sin\psi + \cos\psi\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xy} \\ R_{yy} \\ R_{zy} \end{pmatrix} \tag{95}$$

6.4 Windows 8

本节介绍文件 `orientation.c` 中的函数 `feCompassWin8` 的数学基础。

初始方向的 Windows 8 坐标系中的加速计读数与 z 轴反平行，因为 Windows 8 坐标系为 ENU，z 轴向上，且重力 (非加速度) 为正。因此，方向矩阵的 z 轴列向量是旋转的 z 轴向量，假设加速度为零，则为归一化加速度计测量 ${}^S\boldsymbol{G}_c$：

$$\begin{pmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \\ R_{zz} \end{pmatrix} = \frac{-{}^S\boldsymbol{G}_c}{|{}^S\boldsymbol{G}_c|} \tag{96}$$

根据校准的磁强计测量值估计的地磁向量在初始方向上指向北方 (Windows 8 坐标系为 y 方向)，在北 (南) 半球向下 (向上)。磁强计和负加速度计测量值的归一化向量积给出了与两者正交的归一化向量，因此，该向量沿指向东的 x 轴对齐：

$$\begin{pmatrix} R_{xx} \\ R_{yx} \\ R_{zx} \end{pmatrix} = \frac{-{}^S\boldsymbol{B}_c \times {}^S\boldsymbol{G}_c}{|{}^S\boldsymbol{B}_c \times {}^S\boldsymbol{G}_c|} \tag{97}$$

最后，由于旋转矩阵是正交的，因此旋转矩阵 z 轴和 x 轴的向量积给出了方向矩阵的剩余 y 分量：

$$\begin{pmatrix} R_{xy} \\ R_{yy} \\ R_{zy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \\ R_{zz} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_{xx} \\ R_{yx} \\ R_{zx} \end{pmatrix} \tag{98}$$

倾角 δ 由加速度计和校准磁测量的标量积计算得出，给出：

$${}^S\boldsymbol{G}_c \cdot {}^S\boldsymbol{B}_c = \left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right| \left|{}^S\boldsymbol{B}_c\right| \sin\delta \Rightarrow \sin\delta = \frac{{}^SG_{cx}{}^SB_{cx} + {}^SG_{cy}{}^SB_{cy} + {}^SG_{cz}{}^SB_{cz}}{\left|{}^S\boldsymbol{G}_c\right| \left|{}^S\boldsymbol{B}_c\right|} \tag{99}$$

应用方程 (96) 至 (98) 得到的方向矩阵可显示为等于 AN5017“航空航天、Android 和 Windows 坐标系”方程 (55) 中导出的 Windows 8 方向矩阵：

$$\boldsymbol{R}_{Win8} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\theta\sin\psi & \cos\phi\sin\psi + \cos\psi\sin\phi\sin\theta & -\sin\phi\cos\theta \\ -\cos\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi & \sin\theta \\ \cos\psi\sin\phi + \cos\phi\sin\psi\sin\theta & \sin\phi\sin\psi - \cos\phi\cos\psi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix} \tag{100}$$

方程 (96) 计算为：

$$\frac{-{}^S\boldsymbol{G}_c}{|{}^S\boldsymbol{G}_c|} = -\boldsymbol{R}_{Win8}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi\cos\theta \\ \sin\theta \\ \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \\ R_{zz} \end{pmatrix} \tag{101}$$

方程 (97) 计算为：

$$\frac{-{}^S\boldsymbol{B}_c \times {}^S\boldsymbol{G}_c}{|{}^S\boldsymbol{B}_c \times {}^S\boldsymbol{G}_c|} = \frac{-\boldsymbol{R}_{Win8}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\delta \\ -\sin\delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\delta \\ -\sin\delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \boldsymbol{R}_{Win8}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{102}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\cos\theta\sin\psi \\ \cos\psi\sin\phi + \cos\phi\sin\psi\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} \\ R_{yx} \\ R_{zx} \end{pmatrix} \tag{103}$$

方程 (98) 计算为：

$$\begin{pmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \\ R_{zz} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_{xx} \\ R_{yx} \\ R_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi\cos\theta \\ \sin\theta \\ \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\cos\theta\sin\psi \\ \cos\psi\sin\phi + \cos\phi\sin\psi\sin\theta \end{pmatrix} \tag{104}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\theta(\cos\psi\sin\phi + \cos\phi\sin\psi\sin\theta) + \cos\phi\cos\theta\cos\theta\sin\psi \\ \cos\phi\cos\theta(\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\theta\sin\psi) + \sin\phi\cos\theta(\cos\psi\sin\phi + \cos\phi\sin\psi) \\ \sin\phi\cos\theta\cos\theta\sin\psi - \sin\theta(\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\theta\sin\psi) \end{pmatrix} \tag{105}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\psi + \cos\psi\sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta\cos\psi \\ \sin\phi\sin\psi - \cos\phi\cos\psi\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xy} \\ R_{yy} \\ R_{zy} \end{pmatrix} \tag{106}$$