计算机视觉中的李群

Ethan Eade

2014-12-25

1 简介

本文档描述对计算机视觉有用的变换群的性质，主要用作实现的参考。省略冗长的推导。

2 一般性质

2.1 矩阵群

李群 G 同时是光滑可微流形和群。本文所讨论的李群都是实矩阵群：群元素用 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 表示。群的乘法和求逆运算是相同的矩阵乘法和求逆运算。由于每个群都由一个特定的非奇异 $n\times n$ 矩阵子类表示，所以自由度小于 n^2。

2.2 李代数

考虑一个李群 G，用 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 表示，具有 k 个自由度。李代数 $\mathfrak{g}$ 是围绕 G 的幺元的微分变换空间 — 切空间 (*tangent space*)。该切空间是具有基元素 $\{G_1,\dots,G_k\}$ 的 k 维向量空间：生成元 (*generator*)。$\mathfrak{g}$ 的元素用 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 表示为矩阵，但是在加法和标量乘法下表示，而不是矩阵乘法。

对于这样的李代数 $\mathfrak{g}$，我们将由系数 $\mathbf{c}$ 的向量指定的生成元 $\{G_i\}$ 的线性组合写为 $\mathrm{alg}(\mathbf{c})$ ：

$$\mathrm{alg}:\mathbb{R}^k\to\mathfrak{g}\subset\mathbb{R}^{n\times n} \tag{1}$$

$$\mathrm{alg}(\mathbf{c})\equiv\sum_{i=1}^{k}\mathbf{c}_iG_i \tag{2}$$

我们用 alg^{-1} 标志该线性组合的唯一逆。一个切向量 (*tangent vector*) 实际上是一个 $n\times n$ 矩阵，这似乎令人困惑，但它总是可以被认为是 (且被表示为) 生成元系数的向量。

2.3 指数映射与对数

指数映射将代数中的元素带入到群中的元素。直观地说，它沿着代数中切向量指定的微分方向沿着群流形行走。对于矩阵群，指数映射仅为矩阵指数：

$$\exp:\mathfrak{g}\to \mathrm{G} \tag{3}$$

$$\exp(x)=\mathbf{I}+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{i!}x^i+\cdots \tag{4}$$

对于下面描述的几个群，指数映射有一个封闭形式，它总是一个连续映射。

指数映射的逆映射为对数：

$$\exp(\log(X)) = X \tag{5}$$

对数通常不是处处连续的，但在幺元附近总是连续的。注意，对于大多数群，包括具有紧致子群 (如旋转) 的所有群，不论 exp 还是 log 都不是内射的。

2.4 流形上的插值

指数映射和对数为插值或混合变换提供了直观的方法。考虑变换 $X, Y \in \mathrm{G}$ 和一个插值系数 $t \in [0,1] \subset \mathbb{R}$。函数 f 通过沿两个变换之间的测地线稳定地移动来混合这两个变换：

$$f : G \times G \times \mathbb{R} \to G \tag{6}$$

$$f(X, Y, t) = \exp\left(t \cdot \log\left(Y \cdot X^{-1}\right)\right) \cdot X \tag{7}$$

$$\implies f(X, Y, 0) = X \tag{8}$$

$$\implies f(X, Y, 1) = Y \tag{9}$$

$$\implies f\left(X, Y, \frac{1}{2}\right) \cdot X^{-1} = Y \cdot f\left(X, Y, \frac{1}{2}\right)^{-1} \tag{10}$$

2.5 伴随表示法

考虑切向量 $a, b \in \mathfrak{g}$ 和一个群元素 $X \in G$。我们怎样才能选择 b，使下列关系成立？

$$\exp(b) \cdot X = X \cdot \exp(a) \tag{11}$$

将两侧右乘 X^{-1} 以产生 X 的共轭：

$$\exp(b) = X \cdot \exp(a) \cdot X^{-1} \tag{12}$$

然后我们可以通过取对数来计算 b：

$$b = \log\left(X \cdot \exp(a) \cdot X^{-1}\right) \tag{13}$$

事实上，使用伴随表示可以得到相同的结果。具有 k 个自由度的一个群 $G \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ 具有一个与在 $\mathfrak{g}$ 上的线性变换群同构的表示，称为伴随：

$$X \in G \tag{14}$$

$$a \in \mathfrak{g} \tag{15}$$

$$\mathrm{Adj}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \tag{16}$$

$$\mathrm{Adj}_X(a) = X \cdot a \cdot X^{-1} \in \mathfrak{g} \tag{17}$$

伴随表示的元素通常被写为 $k \times k$ 矩阵，通过乘法作用于 $\mathfrak{g}$ 中元素的系数向量。
伴随表示保留 G 的群结构：

$$X, Y \in G \tag{18}$$

$$\mathrm{Adj}_{X \cdot Y} = \mathrm{Adj}_X \cdot \mathrm{Adj}_Y \tag{19}$$

$$\mathrm{Adj}_{X^{-1}} = \mathrm{Adj}_X^{-1} \tag{20}$$

回到我们的动机问题，我们使用伴随定义 b：

$$b \equiv \mathrm{Adj}_X(a) \tag{21}$$
$$\implies \exp(b) = X \cdot \exp(a) \cdot X^{-1} \tag{22}$$
$$\implies \exp(b) \cdot X = X \cdot \exp(a) \tag{23}$$

因此，伴随实际上是通过群元素的切向量变换的 Jacobian 矩阵：

$$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k \tag{24}$$
$$X \in G \tag{25}$$
$$f : G \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \tag{26}$$
$$f(X, \mathbf{c}) = \mathrm{alg}^{-1}\left(\log\left(X \cdot \exp(\mathrm{alg}(\mathbf{c})) \cdot X^{-1}\right)\right) \tag{27}$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}}\right|_{\mathbf{c}=0} = \mathrm{Adj}_X \tag{28}$$

2.6 $\mathbb{R}^n$ 上的群作用

给定 G 在 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的矩阵表示，在向量空间 $\mathbb{R}^n$ (相当于射影空间 $\mathbb{P}^{n-1}$) 上有一个自然的作用：

$$X \in G \tag{29}$$
$$X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{30}$$
$$X(\mathbf{v}) = X \cdot \mathbf{v} \tag{31}$$

对于下面描述的群，通过矩阵乘法的该群作用产生在 2D 或 3D 欧几里得空间或射影空间中的点或线上的变换。例如，SE(2) 元素在 $\mathbb{P}^2$ 上 (在 $\mathbb{R}^3$ 中作为齐次坐标的 2D 平面) 的群作用是平面坐标的旋转和平移。

通过使用代数的 k 个生成元，可以简单地计算围绕幺元的群微分所产生的该作用的 Jacobian 矩阵：

$$\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \tag{32}$$
$$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k \tag{33}$$
$$f(\mathbf{c}, \mathbf{p}) \equiv \exp(\mathrm{alg}(\mathbf{c})) \cdot \mathbf{p} \tag{34}$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}}\right|_{\mathbf{c}=0} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} G_1 \cdot \mathbf{p} & G_2 \cdot \mathbf{p} & \cdots & G_k \cdot \mathbf{p} \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{n\times k} \tag{35}$$

3 SO(2)

3.1 说明

SO(2) 是 2D 平面中的旋转群。它有一个自由度：旋转角度。群是可交换的。求逆由转置给出：

$$X \in \mathrm{SO}(2) \subset \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{36}$$
$$X^{-1} = X^T \tag{37}$$

3.2 李代数

李代数 $\mathfrak{so}(2)$ 由一个反对称元素生成，对应于微分旋转：

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

3.3 指数映射

从 $\mathfrak{so}(2)$ 到 SO(2) 的指数映射只是一个简单的 2D 旋转：

$$\exp(\mathrm{alg}(\theta)) = \exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{39}$$

对数是由 SO(2) 的一个元素简单地计算出来的。

3.4 伴随表示法

SO(2) 的伴随表示是平凡的：

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2), a^2 + b^2 = 1 && (40) \\ \mathrm{Adj}_X(\mathrm{alg}(\theta)) &= X \cdot \mathrm{alg}(\theta) \cdot X^{-1} && (41) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} && (42) \\ &= \mathrm{alg}(\theta) && (43) \\ \implies \mathrm{Adj}_X &= \mathbf{I} && (44) \end{aligned}$$

4 SE(2)

4.1 说明

SE(2) 是 2D 平面上的刚性变换群，半直积 $\mathrm{SO}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$。它有三个自由度：两个用于平移，一个用于旋转。子群包括 SO(2)。

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\in \mathrm{SO}(2) && (45) \\ \mathbf{t} &\in \mathbb{R}^2 && (46) \\ X &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right) \in \mathrm{SE}(2) \subset \mathbb{R}^{3\times 3} && (47) \\ X^{-1} &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T\mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right) && (48) \end{aligned}$$

4.2 李代数

李代数 $\mathfrak{se}(2)$ 有三个生成元：

$$G_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \; G_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \; G_3 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{49}$$

4.3 指数映射

从 $\mathfrak{se}(2)$ 到 SE(2) 的指数映射具有封闭形式：

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{50}$$

$$\mathbf{R} \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{51}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\sin\theta}{\theta} & -\frac{1-\cos\theta}{\theta} \\ \frac{1-\cos\theta}{\theta} & \frac{\sin\theta}{\theta} \end{pmatrix} \tag{52}$$

$$\exp(\mathrm{alg}(v)) = \exp\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -\theta & x \\ \theta & 0 & y \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{V}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right) \tag{53}$$

当 θ 较小时，应使用泰勒级数计算 $\mathbf{V}$ 的元素 (参见第 11 节) 。

4.4 伴随表示法

$$X = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right) \in \mathrm{SE}(2) \tag{54}$$

$$\mathrm{Adj}_X = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ -\mathbf{t}_0 \end{pmatrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \tag{55}$$

5 Sim(2)

5.1 说明

Sim(2) 是 2D 平面上的保向相似变换群，半直积 $\mathrm{SE}(2) \rtimes \mathbb{R}^*$。它有四个自由度：两个用于平移，一个用于旋转，一个用于缩放。子群包括 SE(2) 和 $\mathbb{R}^*$。

$$X = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & s^{-1} \end{array}\right) \in \mathrm{Sim}(2) \subset \mathbb{R}^{3\times 3} \tag{56}$$

$$X^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R}^T & -s\mathbf{R}^T\mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & s \end{array}\right) \tag{57}$$

5.2 李代数

李代数 $\mathfrak{sim}(2)$ 有四个生成元：

$$G_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right),\ G_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right),\ G_3 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right),\ G_4 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \tag{58}$$

5.3 指数映射

从 sim(2) 到 Sim(2) 的指数映射具有封闭形式：

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \tag{59}$$

$$\mathbf{R} \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{60}$$

$$A \equiv \frac{\sin\theta}{\theta} \tag{61}$$

$$B \equiv \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} \tag{62}$$

$$C \equiv \frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3} \tag{63}$$

$$\alpha \equiv \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \theta^2} \tag{64}$$

$$s \equiv e^{\lambda}$$

$$X \equiv \alpha\left(\frac{1-s^{-1}}{\lambda}\right) + (1-\alpha)(A - \lambda B) \tag{65}$$

$$Y \equiv \alpha\left(\frac{s^{-1}-1+\lambda}{\lambda^2}\right) + (1-\alpha)(B - \lambda C) \tag{66}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} X & -\theta Y \\ \theta Y & X \end{pmatrix} \tag{67}$$

$$\exp(\operatorname{alg}(v)) = \exp\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -\theta & x \\ \theta & 0 & y \\ \hline 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{V}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \hline \mathbf{0} & s^{-1} \end{array}\right) \tag{68}$$

当 θ 或 λ 较小时，应使用泰勒级数计算 $\mathbf{V}$ 的元素 (参见第 11 节) 。

5.4 伴随表示法

$$X = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & s^{-1} \end{array}\right) \in \mathrm{Sim}(2) \tag{69}$$

$$\mathrm{Adj}_X = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{s\mathbf{R}} & \multicolumn{2}{c}{s \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 & -\mathbf{t}_0 \\ -\mathbf{t}_0 & -\mathbf{t}_1 \end{pmatrix}} \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{70}$$

6 Aff(2)

6.1 说明

Aff(2) 是 2D 平面上的仿射变换群。它有六个自由度：两个用于平移，一个用于旋转，一个用于缩放，一个用于拉伸，一个用于剪切。子群包括 Sim(2)。

$$X = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right) \in \quad \mathrm{Aff}(2) \subset \mathbb{R}^{3\times 3} \tag{71}$$

$$X^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right) \tag{72}$$

6.2 李代数

李代数 $\mathfrak{aff}(2)$ 有六个生成元：

$$G_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad G_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad G_3 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{73}$$

$$G_4 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad G_5 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad G_6 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{74}$$

6.3 指数映射

从 $\mathfrak{aff}(2)$ 到 Aff(2) 的指数映射没有封闭形式，它可以用任何一般的矩阵指数例程来计算。对数也是如此。

6.4 伴随表示法

设

$$X = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} a & b & x \\ c & d & y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \in \mathrm{Aff}(2) \tag{75}$$

$$\mathbf{E} \equiv \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{6\times 6} \tag{76}$$

$$f \equiv \frac{1}{ad - bc} \tag{77}$$

$$\mathbf{C} \equiv \left(\begin{array}{c|c} a \cdot \mathbf{A}^{-T} & b \cdot \mathbf{A}^{-T} \\ \hline c \cdot \mathbf{A}^{-T} & d \cdot \mathbf{A}^{-T} \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{4\times 4} \tag{78}$$

$$= f \begin{pmatrix} ad & -ac & bd & -bc \\ -ab & a^2 & -b^2 & ab \\ cd & -c^2 & d^2 & -cd \\ -bc & ac & -bd & ad \end{pmatrix} \tag{79}$$

$$\mathbf{T} \equiv \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4} \tag{80}$$

则

$$\mathrm{Adj}_X = \mathbf{E}^T \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & -\mathbf{T}\cdot\mathbf{C} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{array}\right) \mathbf{E} \tag{81}$$

明确写出乘积：

$$\mathrm{Adj}_X = \left(\begin{array}{cc|cccc} a & b & fy\left(a^2+b^2\right) - fx(ac+bd) & -x & fy(2ab) - fx(ad+bc) & fx(ac-bd) - fy\left(a^2-b^2\right) \\ c & d & fy(ac+bd) - fx\left(c^2+d^2\right) & -y & fy(ad+bc) - fx(2cd) & fx\left(c^2-d^2\right) - fy(ac-bd) \\ \hline 0 & 0 & \frac{f}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) & 0 & f(ab+cd) & \frac{f}{2}\left(-a^2+b^2-c^2+d^2\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(ac+bd) & 0 & f(ad+bc) & f(bd-ac) \\ 0 & 0 & \frac{f}{2}\left(-a^2-b^2+c^2+d^2\right) & 0 & f(cd-ab) & \frac{f}{2}\left(a^2-b^2-c^2+d^2\right) \end{array}\right) \tag{82}$$

7 SL(3)

7.1 说明

SL(3) 是单位行列式线性变换群，尤其表示 2D 投影平面上的单应变换 (homographies)。它有八个自由度：两个用于平移，一个用于旋转，一个用于缩放，一个用于拉伸，一个用于剪切，两个用于透视变换。子群包括 Aff(2) 和 SO(3)。

$$\mathbf{H} \in \mathrm{SL}(3) \subset \mathbb{R}^{3\times 3} \tag{83}$$

$$\det(\mathbf{H}) = 1 \tag{84}$$

7.2 李代数

李代数 $\mathfrak{sl}(3)$ 有八个生成元，所有生成元都具有零矩阵迹 (trace)：

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{85}$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad G_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{86}$$

$$G_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{87}$$

7.3 指数映射

从 $\mathfrak{sl}(3)$ 到 SL(3) 的指数映射不存在封闭形式，它可以用任何一般的矩阵指数例程计算。对数也是如此。注意任何无迹方阵的指数都是单位行列式矩阵。

7.4 伴随表示法

首先，我们将 $\mathfrak{sl}(3)$ 的元素 (为 3×3 矩阵) 作为 9 参数向量，按行优先顺序写入。然后，对于 $h \in \mathfrak{sl}(3)$ 和 $\mathbf{H} \in \mathrm{SL}(3)$，共轭 $\mathbf{H}\cdot h\cdot \mathbf{H}^{-1}$ 可以表达为在 h 的元素上的线性映射 $\mathbf{C}_\mathbf{H}$。alg 和 alg^{-1} 分别表示前应用和后应用矩阵，然后给出伴随表示。

设

$$[\mathrm{alg}] \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{9\times 8} \tag{88}$$

$$\left[\mathrm{alg}^{-1}\right] \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{8\times 9} \tag{89}$$

$$\mathbf{C}_\mathbf{H} \equiv \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{H}_{11}\mathbf{H}^{-T} & \mathbf{H}_{12}\mathbf{H}^{-T} & \mathbf{H}_{13}\mathbf{H}^{-T} \\ \hline \mathbf{H}_{21}\mathbf{H}^{-T} & \mathbf{H}_{22}\mathbf{H}^{-T} & \mathbf{H}_{23}\mathbf{H}^{-T} \\ \hline \mathbf{H}_{31}\mathbf{H}^{-T} & \mathbf{H}_{32}\mathbf{H}^{-T} & \mathbf{H}_{33}\mathbf{H}^{-T} \end{array}\right) \tag{90}$$

则

$$\mathrm{Adj}_\mathbf{H} = \left[\mathrm{alg}^{-1}\right] \cdot \mathrm{C}_\mathbf{H} \cdot [\mathrm{alg}] \tag{91}$$

8 SO(3)

8.1 说明

SO(3) 是在 3D 空间中的旋转群，由 3×3 单位行列式正交矩阵表示。它有三个自由度：每个微分旋转轴对应一个。逆映射由转置给出：

$$\mathbf{R} \in \mathrm{SO}(3) \subset \mathbb{R}^{3\times 3} \tag{92}$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \tag{93}$$

$$\det(\mathbf{R}) = 1 \tag{94}$$

8.2 李代数

李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 是反对称 3×3 矩阵的集合，由围绕每个轴的微分旋转产生：

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ G_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{95}$$

映射 $\mathrm{alg} : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3)$ 将 3 参数向量发送到其斜对称矩阵：

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{96}$$

$$\mathrm{alg}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}_\times \tag{97}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \tag{98}$$

8.3 指数映射

从 $\mathfrak{so}(3)$ 到 SO(3) 的指数映射具有封闭形式 (也称 Rodrigues 公式)。切向量 $\boldsymbol{\omega}$ 可以解释为旋转的一个轴-角表示：其指数是围绕轴 $\boldsymbol{\omega}/\|\boldsymbol{\omega}\|$ 旋转 $\|\boldsymbol{\omega}\|$ 弧度：

$$\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3 \tag{99}$$

$$\theta \equiv \sqrt{\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega}} \tag{100}$$

$$\exp(\mathrm{alg}\boldsymbol{\omega}) = \exp(\boldsymbol{\omega}_\times) \tag{101}$$

$$= \mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}_\times + \frac{1}{2!}\boldsymbol{\omega}_\times^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{\omega}_\times^3 + \ldots \tag{102}$$

$$= \mathbf{I} + \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\boldsymbol{\omega}_\times + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\boldsymbol{\omega}_\times^2 \tag{103}$$

由于 $\boldsymbol{\omega}_\times^3 = -\theta^2\boldsymbol{\omega}_\times$，等式 (102) 中的高阶项折回。当 θ 较小时，$\mathbf{R}$ 的系数应采用泰勒级数计算 (参见第 11 节)。

给定一个旋转矩阵 $\mathbf{R} \in \mathrm{SO}(3)$，可以先确定 $\cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(\mathbf{R}) - 1)$ 来计算对数，然后根据对称微分计算 $\boldsymbol{\omega}$ (参见等式 (103) 的第二项)。

8.4 伴随表示法

SO(3) 的伴随表示实际上与旋转矩阵表示相同，这是由于叉积的性质：

$$\mathbf{R} \in \mathrm{SO}(3) \tag{104}$$

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \tag{105}$$

$$\left(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}_\times \cdot \mathbf{R}^T\right) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{R} \cdot \left(\mathbf{a} \times \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{b}\right) \tag{106}$$

$$= (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{b} \tag{107}$$

$$= (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})_\times \cdot \mathbf{b} \tag{108}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{R} \cdot \mathbf{a}_\times \cdot \mathbf{R}^T = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})_\times \tag{109}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Adj}_{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \tag{110}$$

9 SE(3)

9.1 说明

SE(3) 是 3D 空间中的刚性变换群，半直积 $\mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3$。它有六个自由度：三个用于平移，三个用于旋转。子群包括 SE(2) 和 SO(3)。

$$\mathbf{R} \in \mathrm{SO}(3) \tag{111}$$

$$\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3 \tag{112}$$

$$X = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right) \in \mathrm{SE}(3) \subset \mathbb{R}^{4\times 4} \tag{113}$$

$$X^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T\mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right) \tag{114}$$

9.2 李代数

李代数 $\mathfrak{se}(3)$ 有六个生成元：

$$G_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), G_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad G_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{115}$$

$$G_4 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), G_5 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad G_6 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{116}$$

因此映射 $\mathrm{alg} : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{se}(3)$：

$$\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3 \tag{117}$$

$$\mathrm{alg}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\omega}_\times & \mathbf{u} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \tag{118}$$

9.3 指数映射

从 $\mathfrak{se}(3)$ 到 SE(3) 的指数映射具有封闭形式：

$$\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3 \tag{119}$$

$$\theta \equiv \sqrt{\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega}} \tag{120}$$

$$\exp\left(\mathrm{alg}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \boldsymbol{\omega}\end{pmatrix}\right) = \exp\left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{\omega}_\times & \mathbf{u}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right) \tag{121}$$

$$= \mathbf{I} + \left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{\omega}_\times & \mathbf{u}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right) + \frac{1}{2!}\left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{\omega}_\times^2 & \boldsymbol{\omega}_\times \mathbf{u}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right) + \frac{1}{3!}\left(\begin{array}{c|c}\boldsymbol{\omega}_\times^2 & \boldsymbol{\omega}_\times^2 \mathbf{u}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right) + \ldots \tag{122}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c}\exp(\boldsymbol{\omega}_\times) & \mathbf{V}\cdot\mathbf{u}\\ \hline 0 & 1\end{array}\right) \tag{123}$$

$$\mathbf{V} \equiv \mathbf{I} + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\boldsymbol{\omega}_\times + \left(\frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3}\right)\boldsymbol{\omega}_\times^2 \tag{124}$$

注意，旋转块根据等式 (103) 计算。当 θ 较小时，应使用泰勒级数计算 $\mathbf{V}$ 的系数 (参见第 11 节) 。V 的逆矩阵也可以用封闭形式表示：

$\mathbf{V}$ 的逆矩阵也可以写为封闭形式：

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_\times + \frac{1}{\theta^2}\left(1 - \frac{\theta\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}\right)\boldsymbol{\omega}_\times^2 \tag{125}$$

$\left(\begin{array}{c|c}\mathbf{R} & \mathbf{t}\\ \hline \mathbf{0} & 1\end{array}\right) \in \mathrm{SE}(3)$ 的对数可以通过首先计算 $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{alg}^{-1}(\log(\mathbf{R}))$ 来确定，然后计算 $\mathbf{u} = \mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{t}$。

9.4 伴随表示法

$$X = \left(\begin{array}{c|c}\mathbf{R} & \mathbf{t}\\ \hline \mathbf{0} & 1\end{array}\right) \in \mathrm{SE}(3) \tag{126}$$

$$\mathrm{Adj}_X = \left(\begin{array}{c|c}\mathbf{R} & \mathbf{t}_\times\mathbf{R}\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{R}\end{array}\right) \in \mathbb{R}^{6\times 6} \tag{127}$$

10 Sim(3)

10.1 说明

Sim(3) 是 3D 空间中的相似变换群，半直积 SE(3) $\rtimes \mathbb{R}^*$。它有七个自由度：三个用于平移，三个用于旋转，一个用于缩放。子群包括 Sim(2) 和 SE(3)。

$$\mathbf{R} \in \mathrm{SO}(3) \tag{128}$$

$$\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3 \tag{129}$$

$$s \in \mathbb{R}^+ \tag{130}$$

$$X = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & s^{-1} \end{array}\right) \in \mathrm{Sim}(3) \subset \mathbb{R}^{4\times 4} \tag{131}$$

$$X^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R}^T & -s\mathbf{R}^T\mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & s \end{array}\right) \tag{132}$$

10.2 李代数

李代数 $\mathfrak{sim}(3)$ 有七个生成元：

$$G_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad G_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad G_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{133}$$

$$G_4 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad G_5 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad G_6 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{134}$$

$$G_7 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \tag{135}$$

10.3 指数映射

从 $\mathfrak{sim}(3)$ 到 Sim(3) 的指数映射具有封闭形式：

$$v = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\omega} \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^7 \tag{136}$$

$$\theta \equiv \sqrt{\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega}} \tag{137}$$

$$A \equiv \frac{\sin\theta}{\theta} \tag{138}$$

$$B \equiv \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} \tag{139}$$

$$C \equiv \frac{1-A}{\theta^2} \tag{140}$$

$$D \equiv \frac{\frac{1}{2}-B}{\theta^2} \tag{141}$$

$$s^{-1} \equiv e^{-\lambda} \tag{142}$$

$$\alpha \equiv \frac{\lambda^2}{\lambda^2+\theta^2} \tag{143}$$

$$\beta \equiv \frac{s^{-1}-1+\lambda}{\lambda^2} \tag{144}$$

$$\gamma \equiv \frac{\frac{1}{2}-\beta}{\lambda} \tag{145}$$

$$X \equiv \frac{1-s^{-1}}{\lambda} \tag{146}$$

$$Y \equiv \alpha \cdot \beta + (1-\alpha)\cdot(B-\lambda C) \tag{147}$$

$$Z \equiv \alpha \cdot \gamma + (1-\alpha)\cdot(C-\lambda D) \tag{148}$$

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{I} + A\boldsymbol{\omega}_\times + B\boldsymbol{\omega}_\times^2 \tag{149}$$

$$\mathbf{V} \equiv X\mathbf{I} + Y\boldsymbol{\omega}_\times + Z\boldsymbol{\omega}_\times^2 \tag{150}$$

$$\exp(\mathrm{alg}(v)) = \exp\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\omega}_\times & \mathbf{u} \\ \hline 0 & -\lambda \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{V}\cdot\mathbf{u} \\ \hline \mathbf{0} & s^{-1} \end{array}\right) \tag{151}$$

当 θ 或 λ 较小时，应使用泰勒级数计算 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{V}$ 的系数 (参见第 11 节) 。

10.4 伴随表示法

$$X = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & s^{-1} \end{array}\right) \in \mathrm{Sim}(3) \tag{152}$$

$$\mathrm{Adj}_X = \left(\begin{array}{c|c|c} s\mathbf{R} & s\mathbf{t}_\times\mathbf{R} & -s\mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{7\times 7} \tag{153}$$

11 泰勒级数

这里是上述等式中系数的泰勒级数，对于当参数接近零时：

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{6} + \frac{\theta^4}{120} - \frac{\theta^6}{5040} + O\left(\theta^8\right) \tag{154}$$

$$\approx 1 - \frac{\theta^2}{6}\left(1 - \frac{\theta^2}{20}\left(1 - \frac{\theta^2}{42}\right)\right) \tag{155}$$

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2} - \frac{\theta^2}{24} + \frac{\theta^4}{720} - \frac{\theta^6}{40320} + O\left(\theta^8\right) \tag{156}$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\theta^2}{12}\left(1 - \frac{\theta^2}{30}\left(1 - \frac{\theta^2}{56}\right)\right)\right) \tag{157}$$

$$\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3} = \frac{1}{6} - \frac{\theta^2}{120} + \frac{\theta^4}{5040} - \frac{\theta^6}{362880} + O\left(\theta^8\right) \tag{158}$$

$$\approx \frac{1}{6}\left(1 - \frac{\theta^2}{20}\left(1 - \frac{\theta^2}{42}\left(1 - \frac{\theta^2}{72}\right)\right)\right) \tag{159}$$

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}}{\theta^2} = \frac{1}{24} - \frac{\theta^2}{720} + \frac{\theta^4}{40320} - \frac{\theta^6}{3628800} + O\left(\theta^8\right) \tag{160}$$

$$\approx \frac{1}{24}\left(1 - \frac{\theta^2}{30}\left(1 - \frac{\theta^2}{56}\left(1 - \frac{\theta^2}{90}\right)\right)\right) \tag{161}$$

$$\frac{1}{\theta^2}\left(1 - \frac{\theta\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}\right) = \frac{1}{12} + \frac{\theta^2}{720} + \frac{\theta^4}{30240} + \frac{\theta^6}{1209600} + O\left(\theta^8\right) \tag{162}$$

$$\approx \frac{1}{12}\left(1 + \frac{\theta^2}{60}\left(1 + \frac{\theta^2}{42}\left(1 + \frac{\theta^2}{40}\right)\right)\right) \tag{163}$$

$$\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} = 1 - \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6} - \frac{\lambda^3}{24} + O\left(\lambda^4\right) \tag{164}$$

$$\approx 1 - \frac{\lambda}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{3}\left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)\right) \tag{165}$$

$$\frac{e^{-\lambda}-1+\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{6} + \frac{\lambda^2}{24} - \frac{\lambda^3}{120} + O\left(\lambda^4\right) \tag{166}$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{3}\left(1 - \frac{\lambda}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{5}\right)\right)\right) \tag{167}$$

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{e^{-\lambda}-1+\lambda}{\lambda^2}}{\lambda} = \frac{1}{6} - \frac{\lambda}{24} + \frac{\lambda^2}{120} - \frac{\lambda^3}{720} + O\left(\lambda^4\right) \tag{168}$$

$$\approx \frac{1}{6}\left(1 - \frac{\lambda}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{5}\left(1 - \frac{\lambda}{6}\right)\right)\right) \tag{169}$$