

# 使用空间向量代数的刚体动力学高效解析导数

Shubham Singh<sup>1</sup>, Ryan P. Russell<sup>2</sup> and Patrick M. Wensing<sup>3</sup>

**摘要**—许多基于模型的机器人控制算法的一个基本要求是能够快速准确地计算运动方程的偏导数。目前解决这一问题的最新方法通常使用基于链式规则的分析方法,应用于现有的动力学算法。尽管这些方法在精确度上比有限差分法有所改进,但它们并不总是最高效的。本文给出了逆动力学一阶偏导数的新的闭式表达式,给出了递推算法。该算法与 Fortran 中的链式规则方法以及 C++ 中 Pinocchio 库中的现有算法进行了对比。测试考虑计算从运动链到仿人机器人和四足机器人的逆动力学和正向动力学的偏导数。与以前的开源 Pinocchio 实现相比,我们新的分析结果揭示了一个关键的计算重组,从而提高了效率。据报道,计算 50 自由度的 Talos 仿真机器人逆动力学偏导数的加速比高达 1.4 倍。

## I. 简介

刚体动力学模型被广泛应用于四足机器人和仿人机器人的控制算法的开发,其中递归动力学算法是许多实时控制器的核心。示范案例包括当前通过优化设计控制器的方法 [1], [2]。类似地,机器人库,如 Crocoddyl [3] 和 Drake [4] 等,需要刚体动力学相对于状态和控制变量的偏导数。这些导数的计算代表了许多最优控制应用所需的大部分 CPU 时间 [5]。

有多种通用方法可应用于刚体动力学计算导数。有限差分法 [7]–[9] 实现简单,并行化程度不高,但在精度上有缺陷 (Table I)。复杂步长法 [12] 对机器精度是精确的,但要求在复平面中计算所有函数,从而导致额外的开销。Cossette 等人 [13] 将此方法扩展到矩阵李群,提供了对刚体动力学的直接适用性。一种避免复杂步骤开销的方法是自动微分 (automatic differentiation, AD), 也称为算法微分 [4], [10], [11]。AD 通过运算符重载 [10] 或源代码转换 [4], [11], 自动累积链式规则表达式,从而计算算法的偏导。第一种方法重载基本数据类型,以便与所有算法同时计算偏导。第二种方法从源代码构建表达式图,并直接对源代码进行增强以计算偏导数。

<sup>1</sup>Graduate Research Assistant, Aerospace Engineering, The University of Texas at Austin, TX-78751, USA. [singh281@utexas.edu](mailto:singh281@utexas.edu)

<sup>2</sup>Associate Professor, Aerospace Engineering, The University of Texas at Austin, TX-78751, USA. [ryan.russell@utexas.edu](mailto:ryan.russell@utexas.edu)

<sup>3</sup>Assistant Professor, Aerospace & Mechanical Engineering, University of Notre Dame, IN-46556, USA. [pwensing@nd.edu](mailto:pwensing@nd.edu)

不依赖 AD, 但类似于 AD, 其他人开发的一些解析方法, 在现有算法的基础上累积链式规则表达式。例子包括许多关于动力学导数递归算法的现有描述 [5], [15], [16]。在参考文献 [5] 中的推导将链式规则应用于经典的两遍递归牛顿-欧拉算法 (Recursive-Newton-Euler Algorithm, RNEA), 以求解逆动力学 (inverse dynamics, ID)。该方法的计算复杂度为  $O(Nd)$ , 其中  $N$  是系统中的机体数量, 并且  $d$  是运动连通树的深度。然而, 与文献 [5] 相关联的 C++ Pinocchio (2.6.0) 代码 [6] 中的算法与文献 [5] 中给出的算法明显不同。该 Pinocchio 代码包括一个更高效的  $O(N)$  前向遍历和一个  $O(Nd)$  后向遍历。

直接在现有算法 (使用 AD 或手工) 上执行链式规则的导数算法可能并不总是最高效的。为了充分利用刚体运动方程的结构, 其它特殊用途的方法已被提出来。这种方法通常先解析地微分出封闭形式的运动方程, 然后设计一种算法来计算结果。参考文献 [17] 给出了一个例子, 其中考虑了质量矩阵  $M(q)$ 、科里奥利矩阵  $C(q, \dot{q})$ , 以及重力向量  $g(q)$  相对于状态变量  $q$  和  $\dot{q}$  的偏导数, 从而导致了一个  $O(N^3)$  的算法。

参考文献 [18] 给出了一种用于单自由度串联运动链逆动力学和正向动力学 (forward dynamics, FD) 的偏导数的递归方法。他们的方法包括一个的  $O(N^2)$  算法, 用于 FD 的偏导, 以及一个  $O(Nd)$  算法, 用于 ID 的偏导。

本文的主要贡献是将先前关于 ID 偏导数的解析结果 [18] 扩展到具有固定或浮动基座的通用多自由度关节机器人。我们首先推导出 ID 的一阶偏导数的闭式表达式。据作者所知, 这些结果代表了具有多自由度关节的一般刚体系统 (固定或浮动基座) 的第一类结果。新表达式立即导致一个  $O(Nd)$  阶算法, 该算法自然地推广了文献 [18] 中所示的算法。该方法与文献 [5] 中提出的直接链式规则方法有根本不同。但是, 这种在 Pinocchio 代码 [6] 中的不同的算法, 最终与我们算法中所需的计算直接相关。尽管有相似性, 我们新的闭式表达式揭示了加速计算的一个关键重组。我们以高效的方式使用 FD 与 ID 之间的关

方法	实现 (简单/中等/困难)	速度 (慢速/中速/快速)	精确度 (低/中/高)
有限差分 [7]–[9]	简单	中速	低
复杂步长微分 [13], [14]	简单	慢速/中速	高
自动微分 [4], [10], [11]	简单/中等	慢速/中速	高
解析链式规则微分 [15], [5] <sup>1</sup>	中等/困难	中速	高
特殊用途分析方法 [17], [18], [6] <sup>2</sup> , [本文] <sup>3</sup>	困难	中速/快速	高

表 I: 计算刚体机动力学偏导数的方法概要。

<sup>1</sup> 文献 [5] 的 Algo-2,3 对 ID 偏导数提供了一个链式规则方法。

<sup>2</sup> 附带于文献 [5] 对 ID 偏导数有 Pinocchio 代码，但与链式规则不同。

<sup>3</sup> 本文提供了一种特殊用途的分析方法，在速度方面优于最先进的方法。

系 [5], [18]，最终计算出 FD 的偏导数，其复杂度为  $\mathcal{O}(N^2)$ 。

## II. 刚体动力学的导数

**刚体动力学:** 对于一个刚体系统，状态变量是位形  $\mathbf{q}$  和广义速度向量  $\dot{\mathbf{q}}$ ，而控制变量是广义扭矩向量  $\boldsymbol{\tau}$ 。其运动方程，也被称为逆动力学 (Inverse Dynamics, ID)，给出为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (1)$$

$$= ID(model, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \quad (2)$$

其中  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是质量矩阵， $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是科里奥利矩阵，并且  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$  是广义重力的向量，而  $n$  是系统的自由度。对于一个固定状态，ID 为给定的  $\ddot{\mathbf{q}}$  计算  $\boldsymbol{\tau}$  (方程 1)，正向动力学 (Forward Dynamics, FD) 为给定的  $\boldsymbol{\tau}$  计算  $\ddot{\mathbf{q}}$ :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})) \quad (3)$$

$$= FD(model, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\tau}) \quad (4)$$

为了支持控制应用 (例如文献 [1], [9])，本项工作的目标是计算 FD 相对于状态  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  的偏导数和控制变量  $(\boldsymbol{\tau})$ 。对于计算 ID 和 FD 的最高效的算法分别是  $\mathcal{O}(N)$  的递归牛顿-欧拉算法 (Recursive-Newton-Euler Algorithm, RNEA) 和铰接体算法 (Articulated-Body Algorithm, ABA) [19]。

**逆向与正向动力学的导数:** 如文献 [5] 所示，计算 ID 偏导数的直接方法是通过链式规则 (chain-rule, CR) 手动区分 RNEA 算法，标志为 RNEACR (表 II)。对于 ABA 的导数，一个类似的链式规则方法被标志为 ABACR。因为 ABA 的计算量比 RNEA 的更大，所

以对于 FD 的导数，一个更高效的方法是首先应用 RNEACR，然后使用关系 [5], [18]

$$\left. \frac{\partial FD}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \boldsymbol{\tau}_0} = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_0) \left. \frac{\partial ID}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \ddot{\mathbf{q}}_0} \quad (5)$$

其中变量  $\mathbf{u} \in \{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\}$ 。从方程 (3)， $\partial FD / \partial \boldsymbol{\tau}$  可被直接计算为  $\mathbf{M}^{-1}$ ，允许在方程 (5) 中重复使用。对于 FD 的偏导，这种通过 RNEA 链式规则 (Chain Rule) 的方法缩写为 FDCR。

对于计算 FD 偏导数的最新数值方法，由 Pinocchio 软件包 [6] (Pinocchio FD Derivs, Table II) 提供。该方法首先计算 ID 的导数 (Pinocchio ID Derivs, Table II)。然后计算  $\mathbf{M}^{-1}$ ，并使用方程 (5) 获取 FD 的导数。

在下面的章节中，对动力学分析的空间向量代数 (Spatial Vector Algebra, SVA) 进行了回顾，随后对解析表达式进行了理论扩展，这导致了 ID 偏导数的算法。新表达式产生的算法与最先进的算法 [6] 有一个关键的区别，从而使能了加速比。

## III. 空间向量代数 (SVA)

**表示法:** 空间向量是 6D 向量，它组合了刚体运动或净力 [19] 的线性和角度方面的量。空间向量用小写粗体字母 (例如  $\mathbf{a}$ ) 标志，而矩阵用大写粗体字母 (例如  $\mathbf{A}$ ) 标志。运动向量，如速度和加速度，属于一个 6D 向量空间，标志为  $M^6$ 。空间向量通常用地面坐标帧或机体坐标 (局部坐标) 帧表达。例如，一个在机体帧中表达的机体  $k$  的空间速度  ${}^k\mathbf{v}_k \in M^6$  给出为  ${}^k\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} {}^k\boldsymbol{\omega}_k^T & {}^k\mathbf{v}_k^T \end{bmatrix}^T$  其中  ${}^k\boldsymbol{\omega}_k \in \mathbb{R}^3$  是在固连到机体的坐标帧中表达的角速度，而  ${}^k\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^3$  是机体帧原点的线速度。当在地面帧中表达时，机体  $k$  的空间速度标志为  ${}^0\mathbf{v}_k$ 。该向量同样由角速度和线速度分量组成。然而，线速度与机体  $k$  上的机体固连点相关

数学量	缩略词	算法
$\frac{\partial ID}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial ID}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$	RNEACR	在 RNEA 上链式规则的前向累积 [5, Algo. 2 &3]
	Pinocchio ID Derivs	Pinocchio 原始算法 [6]
	<b>IDSVA</b>	使用 SVA 的拟议算法 (Algorithm 1)
$\frac{\partial FD}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial FD}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$	ABACR	在 ABA 上的前向链式规则
	FDCR	RNEACR, 计算 $\mathbf{M}^{-1}$ [25], 应用方程 (5)
	Pinocchio FD Derivs	Pinocchio ID Derivs, 计算 $\mathbf{M}^{-1}$ [25], 应用方程 (5)
	<b>FDSVA</b>	IDSVA, 计算 $\mathbf{M}^{-1}$ [25], 使用 DMM/AZA, 对于方程 (5) 依赖于 $N$
$ABA(\mathbf{q}, 0, \mathbf{b}, 0)$	<b>AZA</b>	简化 ABA, 对于方程 (5) 选择零输入

表 II: 所使用的各种算法/方法的缩写。粗体首字母缩略词是本论文的贡献。

联, 该点与地面帧 0 的原点重合。在本文中, 当用于表达空间向量的帧被省略时, 假设为地面帧。

力类型的向量, 如力和动量, 属于另一个 6D 向量空间  $F^6$ , 它对偶于  $M^6$ 。两个运动向量  $(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  之间的空间叉积, 写为  $(\mathbf{v} \times) \mathbf{u}$ , 由方程 (6) 给出。当  $\mathbf{u}$  以空间速度  $\mathbf{v}$  移动时, 该计算可以理解为提供  $\mathbf{u}$  的时间变化率。对于笛卡尔向量, 矩阵  $\omega \times$  是经典的 3D 叉积算子。一个运动和力向量之间的空间叉积写为  $(\mathbf{v} \times^*) \mathbf{f}$ , 如方程 (7) 所定义。

$$\mathbf{v} \times = \begin{bmatrix} \omega \times & \mathbf{0} \\ \mathbf{v} \times & \omega \times \end{bmatrix} \quad (6) \quad \mathbf{v} \times^* = \begin{bmatrix} \omega \times & \mathbf{v} \times \\ \mathbf{0} & \omega \times \end{bmatrix} \quad (7)$$

一个算子  $\bar{\times}^*$  通过交换叉积的顺序来定义, 使得  $(\mathbf{f} \bar{\times}^*) \mathbf{v} = (\mathbf{v} \times^*) \mathbf{f}$  [20]。对 SVA 的进一步介绍, 在附录 A 中提供。

**连通性:** 一个具有串联或分支连通的开链运动学树 (图 1) 被认为有  $N$  个连杆, 由关节连接, 每个连杆最多有 6 个自由度。机体  $i$  朝向运动学树根的父亲系标志为  $\lambda(i)$ 。 $\nu(i)$  标志在子树中以机体  $i$  为根的机体集合, 而  $\bar{\nu}(i)$  标志在  $\nu(i)$  中不包括机体  $i$  的机体集合。如果机体  $i$  位于从机体  $j$  到基座的路径中, 我们定义  $i \leq j$ 。

树中相邻机体的空间速度与  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\lambda(i)} + \mathbf{S}_i \dot{\mathbf{q}}_i$  相关, 其中  $\mathbf{S}_i$  对于关节  $i$  是关节运动子空间矩阵 [19], 并且  $\dot{\mathbf{q}}_i$  对于关节  $i$  是关节速率。对于一个单自由度旋转关节,  $\mathbf{S}_i \in \mathbb{R}^6$ , 以及  $\dot{\mathbf{q}}_i$  是一个标量。对于 6 自由度的自由运动关节,  $\mathbf{S}_i \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ , 而  $\dot{\mathbf{q}}_i \in \mathbb{R}^6$ 。速度  $\mathbf{v}_i$  也可以写成子树前面各关节速度之和, 即  $\mathbf{v}_i = \sum_{l \leq i} \mathbf{S}_l \dot{\mathbf{q}}_l$ 。由于轴线相对于局部坐标 (通常标志为  $\hat{\mathbf{S}}_i$  [19]) 的变化而引起的关节运动子空间矩阵 (subspace matrix) 的导数被假设为零。量值

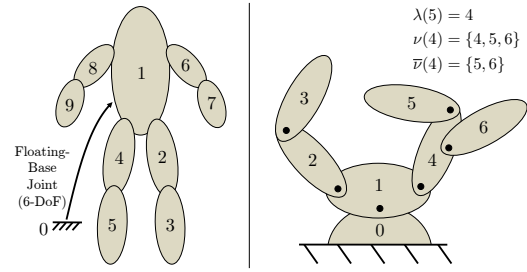


图 1: 浮动和固定基座系统的机体编号和符号示例。

$\dot{\mathbf{S}}_i = \mathbf{v}_i \times \mathbf{S}_i$  表示由于局部坐标系移动而导致的  $\mathbf{S}_i$  的变化率。

**动力学:** 对于机体  $k$  的空间运动方程 [19] 给出为:

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{I}_k \mathbf{a}_k + \mathbf{v}_k \times^* \mathbf{I}_k \mathbf{v}_k \quad (8)$$

其中  $\mathbf{f}_k$  是作用于机体  $k$  的净空间力,  $\mathbf{I}_k$  是其空间惯量 [19], 并且  $\mathbf{a}_k$  是其空间加速度。与将重力视为一个外力不同, 一个常见的技巧是将基座向上加速, 与重力加速度相反 ( $\mathbf{a}_0 = -\mathbf{a}_g$ ), 提供机体  $k$  的加速度为:

$$\mathbf{a}_k = \sum_{l \leq k} (\mathbf{S}_l \ddot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{v}_l \times \mathbf{S}_l \dot{\mathbf{q}}_l) + \mathbf{a}_0. \quad (9)$$

为了以后的使用, 我们将  $\mathbf{a}_k$  分解为来自关节加速度的项, 以及来自关节速率的项, 根据

$$\gamma_k = \sum_{l \leq k} \mathbf{S}_l \ddot{\mathbf{q}}_l \quad \text{and} \quad \xi_k = \sum_{l \leq k} \mathbf{v}_l \times \mathbf{S}_l \dot{\mathbf{q}}_l$$

( $\gamma, \xi \in M^6$ )。根据这些定义,  $\mathbf{a}_k = \gamma_k + \xi_k + \mathbf{a}_0$ 。

以类似方式, 作用在机体  $k$  上的净空间力分解为:

$$\mathbf{f}_k = \boldsymbol{\eta}_k + \boldsymbol{\zeta}_k + \mathbf{I}_k \mathbf{a}_0 \quad (10)$$

其中,  $\boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{I}_k \gamma_k$  ( $\boldsymbol{\eta} \in F^6$ ) 是关节加速度  $\ddot{\mathbf{q}}$  引起的机体上的空间力, 并且  $\boldsymbol{\zeta}_k = \mathbf{v}_k \times^* \mathbf{I}_k \mathbf{v}_k + \mathbf{I}_k \xi_k$

( $\zeta \in F^6$ ) 给出了机体  $k$  上的科里奥利力和向心力。根据 RNEA [19] 的公式,  $\tau_i = S_i^T f_i^C$ , 其中  $f_i^C = \sum_{k \succeq i} f_k$  是通过关节  $i$  传递的空间力。

继续考虑系统整体, 对于任意特定关节  $i$ , 方程 (1) 可写成如下。

$$\tau_i = [M(q)\ddot{q}]_i + [C(q, \dot{q})\dot{q}]_i + g_i(q) \quad (11)$$

则使用  $\tau_i = S_i^T f_i^C$ , 方程 (9) 和 (11) 分解为:

$$[M(q)\ddot{q}]_i = S_i^T \sum_{k \succeq i} [I_k \gamma_k] \quad (12)$$

$$[C(q, \dot{q})\dot{q}]_i = S_i^T \sum_{k \succeq i} [v_k \times^* I_k v_k + I_k \xi_k] \quad (13)$$

$$g_i = S_i^T I_i^C a_0 \quad (14)$$

其中,  $I_i^C$  标志以机体  $i$  为根的子树的复合刚体惯量, 给出为  $I_i^C = \sum_{k \succeq i} I_k$ 。

#### IV. 使用 SVA 解析偏导数

在本节中, 对于 ID 的导数推导出封闭形式表达式。对推导不太感兴趣的读者可以跳到方程 (30) 和方程 (32) 作为总结。

##### A. 构建矩阵块

在附录 C 中给出了几个运动学特征式, 作为主要推导的基础。我们用  $n_j$  标志关节  $j$  的自由度数量。则对于该关节的运动子空间矩阵给出为  $S_j = [s_{j,1} \cdots s_{j,n_j}]$  其中, 每一个空间向量  $s_{j,p}$  对于关节  $j$  给出第  $p$  个关节运动的自由模式。带一点符号随意,  $\partial/\partial q_{j,p}$  标志沿关节的这个第  $p$  个关节的自由模式的方向导数的一个算子。例如, 考虑到  $j \preceq i$  的情况, 给出特征式 J1:

$$\frac{\partial}{\partial q_{j,p}} S_i = s_{j,p} \times S_i \quad (J1)$$

它提供了  $S_i$  相对于在链中较早的关节  $j$  处的相对运动  $s_{j,p}$  的变化率。对于旋转关节, 这些导数只是常规的相对于关节角度的导数。用于多自由度关节如浮动基座, 它们是更正式的李导数。考虑位形相关向量  $u$ , 我们通过

$$\frac{\partial u}{\partial q_j} = \left[ \partial u / \partial q_{j,1} \cdots \partial u / \partial q_{j,n_j} \right]$$

标志与关节  $j$  相关的导数矩阵。为了说明, 我们推导出特征式 J7, 以便稍后在本节中使用。

考虑  $j \preceq i$  并使用  $\gamma_i$  的定义:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial q_{j,p}} = \sum_{l \preceq i} \frac{\partial S_l}{\partial q_{j,p}} \ddot{q}_l \quad (15)$$

使用 J1 并交换叉积的顺序:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial q_{j,p}} = - \sum_{j \preceq l \preceq i} S_l \ddot{q}_l \times s_{j,p} \quad (16)$$

收集关节  $j$  的所有自由度, 方程 (80) 变为:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial q_j} = - \sum_{j \preceq l \preceq i} S_l \ddot{q}_l \times S_j \quad (17)$$

使用  $\gamma_l$  的定义, 对  $l$  求和:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial q_j} = (\gamma_{\lambda(j)} - \gamma_i) \times S_j \quad (18)$$

##### B. ID 相对于 $q$ 的一阶偏导数

随后的推导使用这些公式和来自于附录 C 的特征式以获得在方程 (11) 中的各项的偏导。由于推导过程相当冗长, 因此本演示侧重于解释该方法。在附录 D 中提供完整的推导。

**方程 (12) 的偏导数:** 对于所有的  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ , 我们推导  $[M(q)\ddot{q}]_i$  相对于  $q_j$  的偏导数。首先, 考虑当  $j \preceq i$  时的情况。使用在方程 (12) 中的微分的乘积规则:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [M(q)\ddot{q}]_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial (S_i^T)}{\partial q_j} \sum_{k \succeq i} [I_k \gamma_k] + \\ &S_i^T \sum_{k \succeq i} \left[ \frac{\partial I_k}{\partial q_j} \gamma_k + I_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial q_j} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

对于项  $\frac{\partial (S_i^T)}{\partial q_j}$  使用特征式 J3, 对于项  $\frac{\partial I_k}{\partial q_j} \gamma_k$  使用特征式 J4, 对于项  $\frac{\partial \gamma_k}{\partial q_j}$  使用特征式 J7, 并消除各项:

$$\frac{\partial [M(q)\ddot{q}]_i}{\partial q_j} = S_i^T \sum_{k \succeq i} [I_k (\gamma_{\lambda(j)} \times)] S_j \quad (20)$$

对索引  $k$  求和后, 最终表达式为:

$$\frac{\partial [M(q)\ddot{q}]_i}{\partial q_j} = S_i^T [I_i^C \gamma_{\lambda(j)} \times S_j] \quad (21)$$

对于  $i < j$  的情况, 我们有:

$$\frac{\partial [M(q)\ddot{q}]_i}{\partial q_j} = S_i^T \sum_{k \succeq i} \left[ \frac{\partial I_k}{\partial q_j} \gamma_k + I_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial q_j} \right] \quad (22)$$

使用特征式 J3、J4 和 J7 并消除各项:

$$\frac{\partial [M(q)\ddot{q}]_i}{\partial q_j} = S_i^T \sum_{k \succeq j} [(I_k \gamma_k) \bar{\times}^* + I_k (\gamma_{\lambda(j)} \times)] S_j \quad (23)$$

在索引  $k$  上求和的结果为:

$$\frac{\partial [M(q)\ddot{q}]_i}{\partial q_j} = S_i^T [\eta_j^C \bar{\times}^* + I_j^C (\gamma_{\lambda(j)} \times)] S_j \quad (24)$$

其中,  $\eta_j^C$  对于子树收集关节加速度相关的力, 计算为  $\eta_j^C = \sum_{k \succeq j} \eta_k$ 。

为了便于实现, 我们考虑一个单一情况, 其中  $j \preceq i$ 。指数  $i$  和  $j$  在方程 (24) 中被交换, 以获取对于  $\frac{\partial[M(q)\ddot{q}]_i}{\partial q_i}$  在  $j \prec i$  情况下的表达式。

$$\begin{aligned} \frac{\partial[M(q)\ddot{q}]_i}{\partial q_j} &= S_i^T [I_i^C \gamma_{\lambda(j)} \times S_j] \\ \frac{\partial[M(q)\ddot{q}]_j}{\partial q_i} &= S_j^T [\eta_i^C \bar{\times}^* + I_i^C \gamma_{\lambda(i)} \times] S_i, (j \neq i) \end{aligned} \quad (25)$$

**方程 (13) 的偏导数:** 类似地, 当  $j \preceq i$  情况时, 我们使用特征式 J2-J6 (附录 C) 以获得  $[C(q, \dot{q})\ddot{q}]_i$  相对于  $q_j$  的一阶偏导数, 如方程 (26, 27) 所示。

在这些方程中, 对于子树,  $\zeta_i^C$  的组合被定义为  $\zeta_i^C = \sum_{k \succeq i} \zeta_k$ , 并且矩阵  $B_k(v_k, I_k)$  是一个机体级别的科里奥利矩阵 [20]–[22], 给出为:

$$B_k = \frac{1}{2} [(v_k \times^*) I_k - I_k (v_k \times) + (I_k v_k) \bar{\times}^*] \quad (28)$$

及其组合  $B_i^C = \sum_{k \succeq i} B_k$ 。

**重力项的偏导数:** 使用特征式 J3 和 J4, 对于  $j \preceq i$  的情况,  $g_i$  (方程 14) 相对于  $q_j$  的偏导数为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_i}{\partial q_j} &= S_i^T I_i^C (a_0 \times S_j) \\ \frac{\partial g_j}{\partial q_i} &= S_j^T [(I_i^C a_0) \bar{\times}^* + I_i^C (a_0 \times)] S_i, (j \neq i) \end{aligned} \quad (29)$$

**ID 相对于  $q$  的各偏导的摘要:** 单个组件的偏导现在被收集在一起。

将在方程 (25)、(26)、(27) 和 (29) 中的各项相加, 以获得在  $j \preceq i$  情况下对于  $\frac{\partial \tau}{\partial q}$  的总表达式。在附录 E 中提供完整的推导。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_i}{\partial q_j} &= S_i^T [2B_i^C \dot{\Psi}_j + S_i^T I_i^C \ddot{\Psi}_j] \\ \frac{\partial \tau_j}{\partial q_i} &= S_j^T [2B_i^C \dot{\Psi}_i + I_i^C \ddot{\Psi}_i + (f_i^C) \bar{\times}^* S_i], (j \neq i) \end{aligned} \quad (30)$$

该空间量  $\dot{\Psi}_j$  和  $\ddot{\Psi}_j$  被定义为:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_j &= v_{\lambda(j)} \times S_j \\ \ddot{\Psi}_j &= a_{\lambda(j)} \times S_j + v_{\lambda(j)} \times \dot{\Psi}_j \end{aligned} \quad (31)$$

C. ID 相对于  $\dot{q}$  的一阶偏导数

$\tau$  相对于  $\dot{q}$  的偏导仅依赖于科里奥利项  $C\dot{q}$ 。使用特征式 J8 和 J9 导致当  $j \preceq i$  情况时的表达式 (参见附录 F 的完整推导):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_i}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial [C\dot{q}]_i}{\partial \dot{q}_j} = S_i^T [2B_i^C S_j + I_i^C (\dot{\Psi}_j + \dot{S}_j)] \\ \frac{\partial \tau_j}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial [C\dot{q}]_j}{\partial \dot{q}_i} = S_j^T [2B_i^C S_i + I_i^C (\dot{\Psi}_i + \dot{S}_i)], (j \neq i) \end{aligned} \quad (32)$$

D. ID 的一阶偏导算法

算法 1 返回在方程 (30) 和方程 (32) 中的各项, 并具有计算复杂度  $\mathcal{O}(Nd)$ 。该方法与以地面帧坐标表达的所有空间向量一起计算。第一遍是在前向方向, 并从根部到叶子节点计算空间速度, 加速度,  $\dot{S}_i$ ,  $\dot{\Psi}_i$ ,  $\ddot{\Psi}_i$ ,  $B_i$ , 以及空间力  $f_i$ 。当关节  $i$  具有一个单一自由度时,  $\dot{S}_i = \dot{\Psi}_i$  并且  $\ddot{S}_i = \ddot{\Psi}_i$  而且计算步骤与文献 [18, Alg. 2] 中的相同。

第二遍是后向方向, 从叶子节点到根部。索引  $i$  获取从 1 到  $N$  的所有值。该量  $\frac{\partial \tau}{\partial q}[\nu(i), i]$  标志  $\tau$  对于在  $i$  的子树中所有机体相对于  $q_i$  的偏导数, 而  $\frac{\partial \tau}{\partial q}[i, \nu(i)]$  是  $\tau$  对于机体  $i$  相对于在  $i$  的子树中每一个机体的偏导数, 不包括机体  $i$ 。该后向遍历再次推广了在文献 [18, Alg. 2] 中的一个算法。区别是, 第 15 行的第三项在单一自由度情况可以被丢弃 (因为在这种情况下  $S_i^T (f_i^C \bar{\times}^*) S_i = 0$ )。而第 17-20 行重组在文献 [18] 中的第二层内循环为矩阵乘法。

E. FD 与 ID 的相关偏导

方程 (5) 给出 FD 和 ID 的导数之间的关系, 其中  $\frac{\partial ID}{\partial u}$  ( $u = [q, \dot{q}]$ ) 是一个  $n \times 2n$  矩阵, 并且  $M^{-1}$  是一个  $n \times n$  矩阵。两个矩阵直接相乘的结果产生一个  $\mathcal{O}(N^3)$  计算, 且它被称为直接矩阵相乘 (Direct Matrix Multiplication, DMM)。一种具有计算复杂度为  $(\mathcal{O}(N^2))$  的替代方法将在本节中介绍。

对于一个给定的  $\tau$ , ABA 给出了  $\ddot{q}$  (方程 3), 表示为:

$$\ddot{q} = ABA(q, \dot{q}, \tau, a_g) \quad (33)$$

$$\frac{\partial [C\dot{q}]_i}{\partial q_j} = S_i^T [2B_i^C \dot{\Psi}_j + I_i^C v_{\lambda(j)} \times \dot{\Psi}_j + I_i^C \xi_{\lambda(j)} \times S_j] \quad (26)$$

$$\frac{\partial [C\dot{q}]_j}{\partial q_i} = S_j^T [2B_i^C \dot{\Psi}_i + I_i^C v_{\lambda(i)} \times \dot{\Psi}_i + I_i^C \xi_{\lambda(i)} \times S_i + \zeta_i^C \bar{\times}^* S_i], (j \neq i) \quad (27)$$

---

**Algorithm 1** IDSVA 算法
 

---

**Require:**  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, model$

```

1:  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}; \mathbf{a}_0 = -\mathbf{a}_g$ 
2: for  $i = 1$  to  $N$  do
3:    $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\lambda(i)} + \mathbf{S}_i \dot{\mathbf{q}}_i$ 
4:    $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{\lambda(i)} + \mathbf{S}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{v}_i \times \mathbf{S}_i \dot{\mathbf{q}}_i$ 
5:    $\dot{\mathbf{S}}_i = \mathbf{v}_i \times \mathbf{S}_i$ 
6:    $\ddot{\mathbf{S}}_i = \mathbf{v}_{\lambda(i)} \times \mathbf{S}_i$ 
7:    $\ddot{\mathbf{S}}_i = \mathbf{a}_{\lambda(i)} \times \mathbf{S}_i + \mathbf{v}_{\lambda(i)} \times \dot{\mathbf{S}}_i$ 
8:    $\mathbf{I}_i^C = \mathbf{I}_i$ 
9:    $\mathbf{B}_i^C = \frac{1}{2}[(\mathbf{v}_i \times^*)\mathbf{I}_i - \mathbf{I}_i(\mathbf{v}_i \times) + (\mathbf{I}_i \mathbf{v}_i) \bar{\times}^*]$ 
10:   $\mathbf{f}_i^C = \mathbf{I}_i \mathbf{a}_i + (\mathbf{v}_i \times^*)\mathbf{I}_i \mathbf{v}_i$ 
11: end for
12: for  $i = N$  to  $1$  do
13:   $\mathbf{t}_1[i] = \mathbf{I}_i^C \mathbf{S}_i$ 
14:   $\mathbf{t}_2[i] = 2\mathbf{B}_i^C \mathbf{S}_i + \mathbf{I}_i^C (\dot{\mathbf{S}}_i + \ddot{\mathbf{S}}_i)$ 
15:   $\mathbf{t}_3[i] = 2\mathbf{B}_i^C \ddot{\mathbf{S}}_i + \mathbf{I}_i^C \ddot{\mathbf{S}}_i + \mathbf{f}_i^C \bar{\times}^* \mathbf{S}_i$ 
16:   $\mathbf{t}_4[i] = 2[\mathbf{B}_i^C]^\top \mathbf{S}_i$ 
17:   $\frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{q}}[i, \bar{\nu}(i)] = \mathbf{S}_i^\top \mathbf{t}_3[\bar{\nu}(i)]$ 
18:   $\frac{\partial \tau}{\partial \dot{\mathbf{q}}}[i, \bar{\nu}(i)] = \mathbf{S}_i^\top \mathbf{t}_2[\bar{\nu}(i)]$ 
19:   $\frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{q}}[\nu(i), i] = \mathbf{t}_4[\nu(i)]^\top \ddot{\mathbf{S}}_i + \mathbf{t}_1[\nu(i)]^\top \ddot{\mathbf{S}}_i$ 
20:   $\frac{\partial \tau}{\partial \dot{\mathbf{q}}}[\nu(i), i] = \mathbf{t}_4[\nu(i)]^\top \mathbf{S}_i + \mathbf{t}_1[\nu(i)]^\top (\dot{\mathbf{S}}_i + \ddot{\mathbf{S}}_i)$ 
21:  if  $\lambda(i) > 0$  then
22:     $\mathbf{I}_{\lambda(i)}^C = \mathbf{I}_{\lambda(i)}^C + \mathbf{I}_i^C; \mathbf{B}_{\lambda(i)}^C = \mathbf{B}_{\lambda(i)}^C + \mathbf{B}_i^C$ 
23:     $\mathbf{f}_{\lambda(i)}^C = \mathbf{f}_{\lambda(i)}^C + \mathbf{f}_i^C$ 
24:  end if
25: end for
26: return  $\frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial \tau}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ 

```

---

根据方程 (3)，对于  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{a}_g = \mathbf{0}$  和一个任意输入向量  $\tau = \mathbf{b}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$ 。矩阵  $\mathbf{M}^{-1}$  与任意向量  $\mathbf{b}$  的乘积因此可被计算为：

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{ABA}(\mathbf{q}, \mathbf{0}, \mathbf{b}, \mathbf{0}) \quad (34)$$

对于  $\mathbf{M}^{-1}$  与任意给定的矩阵 (大小为  $n \times m$ ) 的乘积, ABA 可以使用  $m$  次, 其中  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{a}_g = \mathbf{0}$  和  $\mathbf{b}$  做为给定矩阵的列向量, 一次使用一个, 其结果产生一个  $\mathcal{O}(Nm)$  运算。由于对于每一个输入列向量重复使用 ABA, 运动学变量和铰接惯量仅计算一次, 并被保存以供重复使用。为实现方程 (5), 方程 (34) 与做为  $\frac{\partial \mathbf{ID}}{\partial \mathbf{u}}$  的列向量  $\mathbf{b}$  一起被使用, 一次一个。该过程被定义为“ABA-零算法”(ABA-Zero-Algorithm, AZA), 因为输入  $\dot{\mathbf{q}}$  和  $\mathbf{a}_g$  都为  $\mathbf{0}$ 。

## V. 结果

### A. 算法正确性

将来自 ABACR、FDSVA 和 FDCR 的 FD 偏导数与在一个 Fortran 实现中的使用复杂步长法计算的导数进行比较, 以确定其精确度。对于  $N = 100$ , ABACR 方法会导致逐项的均方根 (root-mean-square, rms) 相对误差为  $10^{-13}$ , 而 FDSVA 和 FDCR 两者的均方根误差约为  $10^{-12}$ 。所有方法的均方根相对误差在对数尺度上随自由度的增长而线性增长。

### B. ID/FD 与 RNEACR/FDCR 偏导的运行时间对比, 如文献 [5] 所示, 通过 Fortran 实现两者

我们考虑一个有  $N$  个连杆的串联或分支运动学树, 所有的旋转关节都可围绕它们的局部  $z$  轴旋转。

在机体坐标上的 RNEACR [5, Algos. 2 & 3] (表 II) 被用于计算 ID 的偏导数, 并与 IDSVA (表 II) 方法进行比较。所有的算法都用 Fortran 90 编写, 并使用 Intel Fortran 编译器在一台 3.07 GHz Intel Xeon 处理器上实现。为了计算平均运行时间, 在状态变量和控制变量为随机输入的情况下, 每个算法运行 10,000 次。图 2 显示了两种方法的比较。对于  $N = 100$ , 发现 IDSVA 速度提高比 RNEACR 快 15 倍。

图 2 还显示了对于串联链的 FDSVA 与 FDCR 和 ABACR 的比较 (表 II)。使用本文开发的解析导数表达式, FDSVA 方法对于所有的  $N \geq 2$  的值上都优于 FDCR。

由于 SVA 允许坐标自由的表达式, 递归算法可以在机体坐标或地面坐标中制定 [19]。对于机体坐标算法, 所有中间量都使用变换矩阵  ${}^i\mathbf{X}_{\lambda(i)}$  在机体坐标之间进行变换, 而对于地面坐标算法, 这些中间量可以保留地面帧形式。后者一个主要优点是避免了在算法的后向遍历中局部机体帧之间的重复变换。此增益是在外向遍历期间以地面坐标帧表示运动学量 (速度  ${}^0\mathbf{v}_i$ 、加速度  ${}^0\mathbf{a}_i$ )、关节运动子空间矩阵  ${}^0\mathbf{S}_i$ , 以及惯量矩阵  ${}^0\mathbf{I}_i$  为代价实现的。图 3 显示了在机体坐标和地面坐标下 IDSVA (参见表 II) 的运行时间的比较。对于  $N = 2$  到  $N = 500$ , 地面坐标算法的加速比在 1.3 到 1.9 之间。

### C. ID/FD 的 C++ 偏导的运行时间与附带于文献 [5] 的 Pinocchio 实现的对比

地面坐标中的 IDSVA 在 Pinocchio 框架内用 C++ 实现。该策略可以直接与 Pinocchio 的原始 ID 偏导数进行比较 [6]。图 4 显示了具有一些分支因子

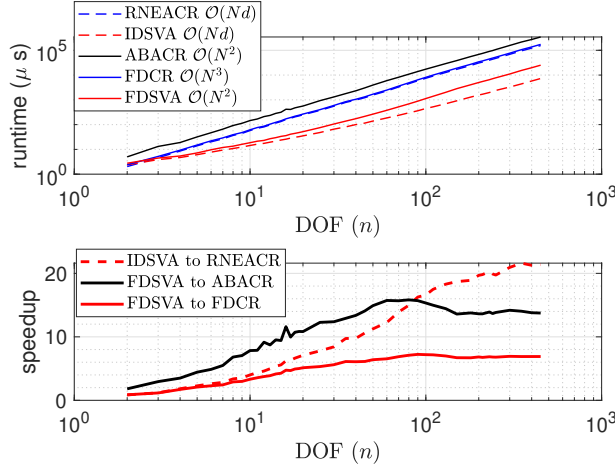


图 2: IDSVA 的 Fortran 实现优于 RNEACR, FDSVA 的优于 FDCR 和 ABACR (表 II), 适用于所有  $N \geq 2$  的串联链 (对于旋转关节,  $N = n$ )

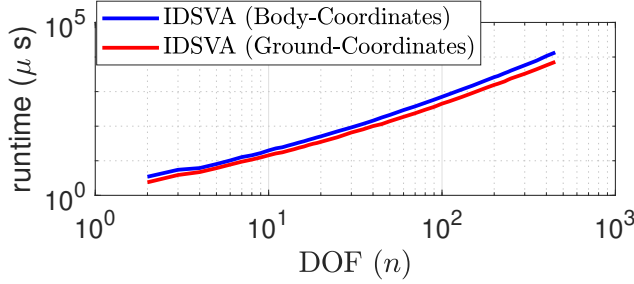


图 3: IDSVA 在地面与机体坐标帧中的 Fortran 实现。

$bf$  [19] 的串联和分支运动学树的两种方法的比较。对于  $N = 100$  的串联链, 使用 gcc-9.0 编译器和关闭 turbo boost 可以获得  $2\times$  倍的加速。图 5 显示了使用 LLVM Clang-10 和 gcc-9.0 编译程序将 IDSVA C++ 实现到多自由度关节机器人的结果。对于 50 个连杆的浮动基座仿人机器人 Talos, IDSVA 使用 gcc-9.0 编译器, 其速度比 Pinocchio [6] 中的 Pinocchio ID Derivs 算法快  $1.4\times$  倍。Pinocchio ID Derivs (开源, 但未公开) 和 IDSVA 之间有一个基本的相似之处。这两种算法基本上都计算相同的量, 但 IDSVA C++ 中更高效的后向遍历重组导致了图 5 所示的加速。与 Pinocchio ID Derivs 代码中机体  $i$  的祖先上的  $\mathcal{O}(d)$  最内层第二遍后向遍历相比, IDSVA 在第 19 行和第 20 行对机体  $i$  的子树使用矩阵-矩阵乘法, 从而提高速度。这一小小的改变使 Pinocchio 的性能达到了最先进的水平, 并被纳入了最新的版本中。图 6 显示了 FDSVA C++ (在 Pinocchio 中实现) 的 CPU 运行时间与 Pinocchio FD Derivs 的串联和分支运动树的比较。IDSVA 的开源 Pinocchio 实现参见文献 [23], 以

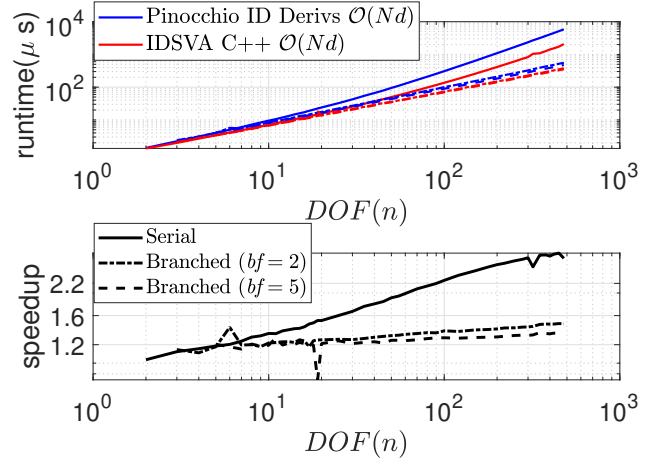


图 4: a) 串联链 (实线)、分支链 ( $bf=2$ , 虚线)、分支链条 ( $bf=5$ , 虚线) b) IDSVA C++ 对于所有的  $N \geq 2$  的 Pinocchio ID Derivs 的改进 (gcc-9.0 编译器)。对于具有旋转关节的运动学树,  $N = n$ 。

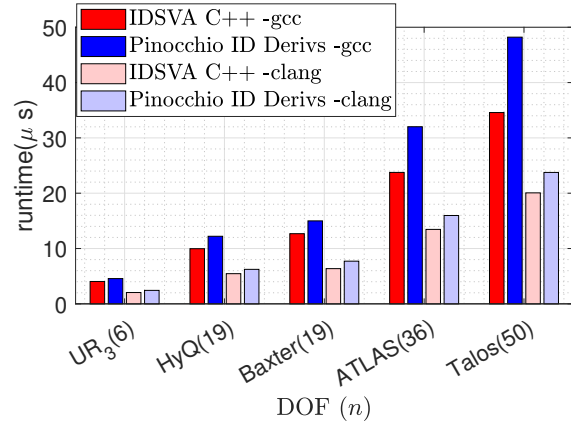


图 5: 几种浮动基座多自由度机器人的 IDSVA (在 C++ 中) 与 Pinocchio ID Derivs [6] 框架的比较 ( $n$ ) 固定基座 UR3, Baxter。使用 gcc-9.0 编译器 (深红/蓝色)、LLVM Clang-10 编译器 (浅红色/蓝色) 的浮动基座 HyQ、ATLAS、Talos。  $N \neq n$ , 适用于具有多自由度关节的模型。

及 MATLAB 版本参见文献 [24]。

#### D. 在 C++ 中 AZA 的 CPU 运行时间与附带于文献 [5] 的 Pinocchio 实现的 DMM 的比较

AZA 在 Pinocchio [6] 框架中实现。Pinocchio 的  $M^{-1}$  算法 [25] 被修改为包括 AZA。在图 7 中, “交叉点”  $N$  标志 DMM 比 AZA 表现得更好的点。该点取决于用于实现算法的硬件和编译器优化设置, 但对



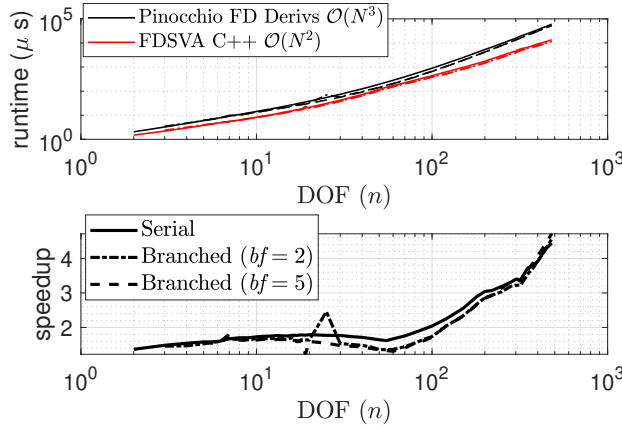


图 6: a) 对于串联和分支树的 FD 的一阶偏导数, Pinocchio FD Derivs 与 FDSVA C++ 的 CPU 运行时间比较 (对于旋转关节,  $N = n$ )。串联链 (实线)、分支链 ( $bf=2$ , 虚线)、分支链条 ( $bf=5$ , 虚线) b) 加速图显示 FDSVA C++ 对于所有的  $N$ , 都优于 Pinocchio FD Derivs。

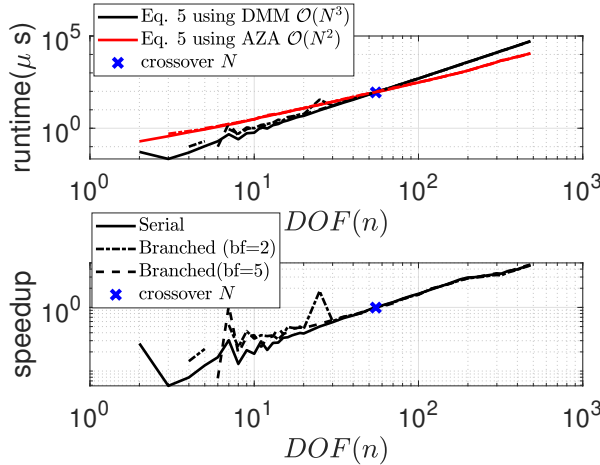


图 7: a) 在 Pinocchio C++ 框架中实现的 DMM 与 AZA 运行时间的比较 (使用 gcc-9.0) 显示了串联链 (实线)、分支链 ( $bf=2$ , 虚线) 和分支链 ( $bf=5$ , 虚线) 在 50 处的交叉点  $N$ 。b) 在对数-对数尺度上, AZA 相对 DMM 的速度随着  $n$  的线性增长而增长, 对于具有旋转关节的运动学树,  $N = n$ 。

于较高的  $N$ ,  $\mathcal{O}(N^2)$  AZA 是高效的, 因为它避免了昂贵的矩阵-矩阵乘法。表 III 给出了交叉点的  $N$  值 (对于运动学树), 在不同编译器设置下, AZA 的性能优于 DMM。这种交叉点的  $N$  的影响可以在图 6 中看到, 对于  $N = 50$  的 FDSVA 曲线, 由于从 DMM 切换到 AZA, 算法的秩从  $\mathcal{O}(N^3)$  变为  $\mathcal{O}(N^2)$ , 从而得到方程 (5)。

Compiler	AVX Off	AVX On
gcc-9.0	50	450
clang-10	80	350

表 III: 使用不同的编译器和自动矢量化 (`march=native`) 设置的交叉点  $N$  (自由度)。

## VI. 实现考虑事项

## VII. 结论

在本项工作中, 我们提出了逆动力学的封闭形式的偏导数, 以及一个高效的算法, 以计算具有多自由度关节和浮动基座的机器人的逆动力学和正向动力学部分。以优化算法的在线和离线应用。一些算法的优化和空间向量代数 (Spatial Vector Algebra, SVA) 的特征被利用以使得高效的实现。该方法使用 gcc 编译器为 TALOS 人形模型提供了  $1.4\times$  倍于最先进的 Pinocchio FD 导数的加速, 并且使用 Clang-10 编译器提供了  $1.2\times$  倍的加速。偏导数运行时间的减少使得在线和离线应用程序的优化算法更快。这些改进的时序最终可以导致腿式和工业机器人有更好的运动规划。

## VIII. ACKNOWLEDGEMENT

This work was partially supported by the National Science Foundation EAGER grant CMMI-1835013. The authors thank Pinocchio developers Justin Carpentier & Nicolas Mansard for important feedback and Wolfgang Merkt for benchmarking the IDSVA algorithm.

## 参考文献

- [1] M. Neunert et al., "Whole-Body Nonlinear Model Predictive Control Through Contacts for Quadrupeds," in *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 3, no. 3, pp. 1458-1465, 2018.
- [2] M. Posa, C. Cantu, R. Tedrake, "A direct method for trajectory optimization of rigid bodies through contact," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 33, no. 1, pp. 69-81, 2014.
- [3] C. Mastalli, R. Budhiraja, W. Merkt, G. Saurel, B. Hammoud, et al., "Crocodyl: An Efficient and Versatile Framework for Multi-Contact Optimal Control," in *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 2020.
- [4] R. Tedrake and the Drake Development Team, "Drake: Model-based design and verification for robotics" 2019, url - <https://drake.mit.edu>.
- [5] J. Carpentier, N. Mansard, "Analytical Derivatives of Rigid-Body Dynamics Algorithms," in *Robotics: Science and Systems*, Pittsburgh, United States, Jun. 2018.
- [6] Pinocchio (2.6.0). Inria. [Online]. Available: <https://github.com/stack-of-tasks/pinocchio/releases/tag/v2.6.0>



- [7] E. Todorov, T. Erez and Y. Tassa, "MuJoCo: A physics engine for model-based control," in *IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, 2012, pp. 5026-5033.
- [8] Y. Tassa, T. Erez and E. Todorov, "Synthesis and stabilization of complex behaviors through online trajectory optimization," in *IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, 2012, pp. 4906-4913.
- [9] J. Koenemann et al., "Whole-body model-predictive control applied to the HRP-2 humanoid," in *IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, 2015, pp. 3346-3351.
- [10] M. Kudruss, P. Manns and C. Kirches, "Efficient derivative evaluation for rigid-body dynamics based on recursive algorithms subject to kinematic and loop constraints," *IEEE Control Systems Letters*, vol. 3, no. 3, pp. 619-624, 2019.
- [11] M. Gifftthaler, M. Neunert, M. Stäuble, M. Frigerio, C. Semini, and J. Buchli, "Automatic differentiation of rigid-body dynamics for optimal control and estimation," *Advanced Robotics*, vol. 31, no. 22, pp. 1225-1237, 2017.
- [12] J.N. Lyness, and C. B. Moler, "Numerical differentiation of analytic functions," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 4, no.2, 202-210, 1967.
- [13] C. C. Cossette, A. Walsh and J. R. Forbes, "The Complex-Step Derivative Approximation on Matrix Lie Groups," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 5, no. 2, pp. 906-913, 2020.
- [14] G. Lantoiné, R. Russell and T. Dargent, "Using Multicomplex Variables for Automatic Computation of High-Order Derivatives," *ACM Trans. Math. Softw.*, 38, 3, Article 16 (April 2012).
- [15] G. A. Sohl and J. E. Bobrow, "A recursive multibody dynamics and sensitivity algorithm for branched kinematic chains," *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, vol. 123, no. 3, pp. 391-399, 2001.
- [16] S.-H. Lee, J. Kim, F. C. Park, M. Kim, and J. E. Bobrow, "Newton-type algorithms for dynamics-based robot movement optimization," *IEEE Trans. on Robotics*, vol. 21, no. 4, pp. 657-667, 2005.
- [17] G. Garofalo, C. Ott and A. Albu-Schäffer, "On the closed form computation of the dynamic matrices and their differentiations," in *IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, 2013, pp. 2364-2359.
- [18] A. Jain and G. Rodriguez, "Linearization of manipulator dynamics using spatial operators," *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 23, no. 1, pp. 239-248, 1993.
- [19] R. Featherstone, *Rigid-Body Dynamics Algorithms*, Springer, 2008.
- [20] S. Echeandia, and P. M. Wensing, "Numerical Methods to Compute the Coriolis Matrix and Christoffel Symbols for Rigid-Body Systems." ASME. J. Comput. Nonlinear Dynam. September 2021; 16(9): 091004.
- [21] G. D. Niemeyer, "Computational Algorithms for Adaptive Robot Control", Master's thesis, MIT, Boston, 1990.
- [22] G. Niemeyer, J.-J. E. Slotine "Performance in Adaptive Manipulator Control," *The International Journal of Robotics Research*, vol 10, no. 2, pp 149-161, 1991.
- [23] <https://github.com/shubhamsingh91/pinocchio>
- [24] [https://github.com/ROAM-Lab-ND/spatial\\_v2\\_\\_](https://github.com/ROAM-Lab-ND/spatial_v2__) extended
- [25] J. Carpentier, "Analytical Inverse of the Joint Space Inertia Matrix", Report LAAS 18125 2018, hal-01790934.

## 附录

### A. 空间向量代数 (*Spatial Vector Algebra*)

一个机体  $k$  在机体帧中具有空间速度  ${}^k\mathbf{v}_k \in M^6$ , 其被分解为角度和线性分量, 为:

$${}^k\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} {}^k\omega_k \\ {}^k\mathbf{v}_k \end{bmatrix} \quad (35)$$

其中  ${}^k\omega_k \in \mathbb{R}^3$  是固连在机体上的坐标帧中的机体角速度, 而  ${}^k\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^3$  是机体帧原点处的机体固连点的线速度。空间向量也可以在地面帧中表达。例如, 机体  $k$  在地面帧中的空间速度标志为  ${}^0\mathbf{v}_k$ 。在这种情况下, 线速度与机体  $k$  上的机体固连点相关联, 该点与地面帧的原点重合。在方程 (36) 中定义的机体上的净空间力  ${}^0\mathbf{f}_k \in F^6$  可以从运动的空间方程 (方程 37) 中计算出来:

$${}^0\mathbf{f}_k = \begin{bmatrix} {}^0n_k \\ {}^0\mathbf{f}_k \end{bmatrix} \quad (36)$$

$${}^0\mathbf{f}_k = {}^0\mathbf{I}_k {}^0\mathbf{a}_k + {}^0\mathbf{v}_k \times {}^0\mathbf{I}_k {}^0\mathbf{v}_k \quad (37)$$

其中,  ${}^0n_k \in \mathbb{R}^3$  是机体上围绕地面帧原点的净力矩,  ${}^0\mathbf{f}_k \in \mathbb{R}^3$  是机体上的净线性力,  ${}^0\mathbf{I}_k$  是机体  $k$  的空间惯量, 它将运动向量映射为力向量, 并且  ${}^0\mathbf{a}_k \in M^6$  是机体的空间加速度。变换矩阵  ${}^i\mathbf{X}_j$  用于将帧  $j$  的向量变换为帧  $i$  的向量, 被定义为:

$${}^i\mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{R}_j & \mathbf{0} \\ -{}^i\mathbf{R}_j(\mathbf{p}_{i/j} \times) & {}^i\mathbf{R}_j \end{bmatrix} \quad (38)$$

其中  ${}^i\mathbf{R}_j \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  是从帧  $j$  到帧  $i$  的旋转矩阵,  $\mathbf{p}_{i/j} \in \mathbb{R}^3$  是从帧  $j$  的原点到帧  $i$  的笛卡尔向量, 并且  $\mathbf{0}$  是  $3 \times 3$  零矩阵。 $\mathbf{p} \times$  是  $\mathbf{p}$  元素上的 3D 向量叉积, 被定义为:

$$\mathbf{p} \times = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

空间变换矩阵  ${}^0\mathbf{X}_k$  可被用于从向量  ${}^k\mathbf{v}_k$  获得空间速度向量  ${}^0\mathbf{v}_k$ , 即为:

$${}^0\mathbf{v}_k = {}^0\mathbf{X}_k {}^k\mathbf{v}_k \quad (40)$$

一个在两个运动向量  $(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  之间的空间叉积算子, 写为  $(\mathbf{v} \times) \mathbf{u}$ , 由方程 (41) 给出。该运算可理解为当  $\mathbf{u}$

以空间速度  $\mathbf{v}$  移动时, 提供  $\mathbf{u}$  的时间变化率, 并在方程 (42) 中被定义。

$$\mathbf{v} \times = \begin{bmatrix} \omega \times & \mathbf{0} \\ \mathbf{v} \times & \omega \times \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\mathbf{v} \times^* = \begin{bmatrix} \omega \times & \mathbf{v} \times \\ \mathbf{0} & \omega \times \end{bmatrix} \quad (42)$$

一个算子  $\bar{\times}^*$  (方程 43) 被定义为交换叉积的顺序, 使得  $(\mathbf{f} \bar{\times}^*) \mathbf{v} = (\mathbf{v} \times^*) \mathbf{f}$  [20]。

$$\mathbf{f} \bar{\times}^* = \begin{bmatrix} -\mathbf{n} \times & -\mathbf{f} \times \\ -\mathbf{f} \times & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (43)$$

因此, 上面定义的两个空间向量叉积算子在运动和力向量空间之间映射为: [19]

$$\begin{aligned} \times &: M^6 \times M^6 \rightarrow M^6 \\ \times^* &: M^6 \times F^6 \rightarrow F^6 \\ \bar{\times}^* &: F^6 \times M^6 \rightarrow F^6 \end{aligned} \quad (44)$$

### B. 空间向量的性质

假设  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{m}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in M^6$ , 并且  $\mathbf{f} \in F^6$ , 许多空间向量性质 [19] 在此被运用:

- P1.  $(\mathbf{v} \times \mathbf{m}) \times = (\mathbf{v} \times)(\mathbf{m} \times) - (\mathbf{m} \times)(\mathbf{v} \times)$
- P2.  $(\mathbf{v} \times \mathbf{m}) \times^* = (\mathbf{v} \times^*)(\mathbf{m} \times^*) - (\mathbf{m} \times^*)(\mathbf{v} \times^*)$
- P3.  $(\mathbf{v} \times^* \mathbf{f}) \bar{\times}^* = (\mathbf{v} \times^*)(\mathbf{f} \bar{\times}^*) - (\mathbf{f} \bar{\times}^*)(\mathbf{v} \times)$
- P4.  $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^T \mathbf{f} = -\mathbf{v}_2^T (\mathbf{v}_1 \times^* \mathbf{f})$
- P5.  $(\mathbf{v}_1 \times^* \mathbf{f})^T \mathbf{v}_2 = -\mathbf{f}^T (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$
- P6.  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})^T = -\mathbf{v}^T (\mathbf{u} \times^*)$
- P7.  $(\mathbf{u} \times^* \mathbf{f})^T = -\mathbf{f}^T \mathbf{u} \times$

### C. 多自由度关节的特征与表达式

通过扰动多自由度关节位置变量  $(\mathbf{q}_j)$ , 常见空间向量的偏导数的特征式如下所示。这些特征式则被用来推导具有多自由度关节和浮动基座的刚体系统的逆动力学的偏导数。

$$\begin{aligned} \text{J1. } \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial \mathbf{q}_{j,p}} &= \begin{cases} \mathbf{s}_{j,p} \times \mathbf{S}_i, & \text{if } j \preceq i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ \text{J2. } \frac{\partial (\mathbf{v}_i \times^* \mathbf{f})}{\partial \mathbf{q}_j} &= \begin{cases} \mathbf{f} \bar{\times}^* ((\mathbf{v}_{\lambda(j)} - \mathbf{v}_i) \times \mathbf{S}_j), & \text{if } j \preceq i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ \text{J3. } \frac{\partial (\mathbf{S}_i^T \mathbf{f})}{\partial \mathbf{q}_j} &= \begin{cases} -\mathbf{S}_i^T (\mathbf{f} \bar{\times}^* \mathbf{S}_j), & \text{if } j \preceq i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ \text{J4. } \frac{\partial (\mathbf{I}_i \mathbf{a})}{\partial \mathbf{q}_j} &= \begin{cases} (\mathbf{I}_i \mathbf{a}) \bar{\times}^* \mathbf{S}_j + \mathbf{I}_i (\mathbf{a} \times \mathbf{S}_j), & \text{if } j \preceq i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{J5. } \frac{\partial (\mathbf{I}_i \mathbf{v}_i)}{\partial \mathbf{q}_j} &= \begin{cases} (\mathbf{I}_i \mathbf{v}_i) \bar{\times}^* \mathbf{S}_j + \mathbf{I}_i (\dot{\mathbf{v}}_j), & \text{if } j \preceq i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ \text{J6. } \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{q}_j} &= \begin{cases} (\mathbf{v}_{\lambda(j)} - \mathbf{v}_i) \times \dot{\mathbf{v}}_j + (\xi_{\lambda(j)} - \xi_i) \times \mathbf{S}_j, & \text{if } j \preceq i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ \text{J7. } \frac{\partial \gamma_i}{\partial \mathbf{q}_j} &= \begin{cases} (\gamma_{\lambda(j)} - \gamma_i) \times \mathbf{S}_j, & \text{if } j \preceq i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ \text{J8. } \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{q}_j} &= \begin{cases} \mathbf{S}_j, & \text{if } j \preceq i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ \text{J9. } \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{q}_j} &= \begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_j + \dot{\mathbf{S}}_j - \mathbf{v}_i \times \mathbf{S}_j, & \text{if } j \preceq i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

以上列出的特征式详细推导如下:

- J1. 对于沿关节  $j$  的第  $p$  个自由模式的  $\mathbf{S}_i$  的方向导数, 相对于时间的总导数对于分子和分母取为:

$$\frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial \mathbf{q}_{j,p}} = \frac{\dot{\mathbf{S}}_i}{\dot{\mathbf{q}}_{j,p}} \quad (45)$$

使用  $\dot{\mathbf{S}}_i$  的定义为  $\dot{\mathbf{S}}_i = \mathbf{v}_i \times \mathbf{S}_i$ , 以及  $\mathbf{v}_i$  的定义:

$$\frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial \mathbf{q}_{j,p}} = \frac{\partial (\sum_{l \preceq i} \mathbf{S}_l \dot{\mathbf{q}}_l \times \mathbf{S}_i)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{j,p}} \quad (46)$$

在  $j \preceq i$  的情况下, 仅剩下一个单项:

$$\frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial \mathbf{q}_{j,p}} = \mathbf{s}_{j,p} \times \mathbf{S}_i \quad (47)$$

- J2. 机体  $i$  沿关节  $j$  的第  $p$  个自由模式的空间速度的方向导数, 当  $j \preceq i$  时给出为:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{q}_{j,p}} = \sum_{l \preceq i} \frac{\partial \mathbf{S}_l}{\partial \mathbf{q}_{j,p}} \dot{\mathbf{q}}_l \quad (48)$$

使用 J1, 我们得到:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{q}_{j,p}} = \sum_{j \preceq l \preceq i} \mathbf{s}_{j,p} \times \mathbf{S}_l \dot{\mathbf{q}}_l \quad (49)$$

通过交换符号, 方程 (49) 也可写为:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{q}_{j,p}} = - \sum_{j \preceq l \preceq i} \mathbf{S}_l \dot{\mathbf{q}}_l \times \mathbf{s}_{j,p} \quad (50)$$

方程 (50) 可写为, 对于关节  $j$  的每个第  $p$  模式, 获得  $\mathbf{v}_i$  相对于  $\mathbf{q}_j$  的偏导数 (大小为  $6 \times n_j$ , 其中  $n_j$  是关节  $j$  的自由度数量), 即为:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{q}_j} = - \sum_{j \preceq l \preceq i} \mathbf{S}_l \dot{\mathbf{q}}_l \times \mathbf{S}_j \quad (51)$$

使用  $\mathbf{v}_l$  的定义, 方程 (51) 现在是:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{q}_j} = (\mathbf{v}_{\lambda(j)} - \mathbf{v}_i) \times \mathbf{S}_j \quad (52)$$

使用方程 (52), 对于  $j \preceq i$ ,  $\mathbf{v}_i \times \mathbf{a}$  相对于  $\mathbf{q}_j$  的偏导数, 其中  $\mathbf{a} \in M^6$  是任意固连运动向量, 给出为:

$$\frac{\partial(\mathbf{v}_i \times \mathbf{a})}{\partial \mathbf{q}_j} = -\mathbf{a} \times ((\mathbf{v}_{\lambda(j)} - \mathbf{v}_i) \times \mathbf{S}_j) \quad (53)$$

类似于方程 (53),  $\mathbf{v}_i \times^* \mathbf{f}$  的偏导数, 其中  $\mathbf{f} \in F^6$  是任意固连力向量, 被计算为:

$$\frac{\partial(\mathbf{v}_i \times^* \mathbf{f})}{\partial \mathbf{q}_j} = \mathbf{f} \bar{\times}^* ((\mathbf{v}_{\lambda(j)} - \mathbf{v}_i) \times \mathbf{S}_j) \quad (54)$$

J3. 对于任意固连力向量  $\mathbf{f}$ , 计算当  $j \preceq i$  时  $\mathbf{S}_i^T \mathbf{f}$  相对于  $\mathbf{q}_j$  的偏导数。使用 J1:

$$\frac{\partial(\mathbf{S}_i^T \mathbf{f})}{\partial q_{j,p}} = (\mathbf{s}_{j,p} \times \mathbf{S}_i)^T \mathbf{f} \quad (55)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{S}_i^T \mathbf{f})}{\partial q_{j,p}} = -\mathbf{S}_i^T (\mathbf{s}_{j,p} \times^*) \mathbf{f} \quad (56)$$

方程 (56) 可针对关节  $j$  的每个自由度改写。因此, 相对于  $\mathbf{q}_j$  的偏导数为:

$$\frac{\partial(\mathbf{S}_i^T \mathbf{f})}{\partial \mathbf{q}_j} = -\mathbf{S}_i^T (\mathbf{f} \bar{\times}^* \mathbf{S}_j) \quad (57)$$

J4. 对于任意固连运动向量  $\mathbf{a}$ , 计算当  $j \preceq i$  时  $\mathbf{I}_i \mathbf{a}$  相对于  $\mathbf{q}_j$  的偏导数。 $\mathbf{I}_i$  在关节  $j$  的第  $p$  个自由模式方向上的方向导数 [19] 为:

$$\frac{\partial \mathbf{I}_i}{\partial q_{j,p}} = \mathbf{s}_{j,p} \times^* \mathbf{I}_i - \mathbf{I}_i (\mathbf{s}_{j,p} \times) \quad (58)$$

两边都乘以  $\mathbf{a}$  的结果为:

$$\frac{\partial(\mathbf{I}_i \mathbf{a})}{\partial q_{j,p}} = \mathbf{s}_{j,p} \times^* \mathbf{I}_i \mathbf{a} - \mathbf{I}_i (\mathbf{s}_{j,p} \times \mathbf{a}) \quad (59)$$

类似于方程 (56), 方程 (59) 可对于关节  $j$  的每个自由度共同写为:

$$\frac{\partial(\mathbf{I}_i \mathbf{a})}{\partial \mathbf{q}_j} = (\mathbf{I}_i \mathbf{a}) \bar{\times}^* \mathbf{S}_j + \mathbf{I}_i (\mathbf{a} \times \mathbf{S}_j) \quad (60)$$

J5. 对于  $j \preceq i$ ,  $\mathbf{I}_i \mathbf{v}_i$  相对于  $\mathbf{q}_j$  的偏导数现在使用上面导出的特征式来计算。使用乘积规则:

$$\frac{\partial(\mathbf{I}_i \mathbf{v}_i)}{\partial \mathbf{q}_j} = \frac{\partial(\mathbf{I}_i)}{\partial \mathbf{q}_j} \mathbf{v}_i + \mathbf{I}_i \frac{\partial(\mathbf{v}_i)}{\partial \mathbf{q}_j} \quad (61)$$

对于在方程 (61) 右侧的第一项, 假设  $\mathbf{v}_i$  是固连运动向量。因此, 可以使用特征式 J4。对于方程 (61) 右侧的第二项, 方程 (52) 被使用为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{I}_i \mathbf{v}_i)}{\partial \mathbf{q}_j} &= (\mathbf{I}_i \mathbf{v}_i) \bar{\times}^* \mathbf{S}_j + \mathbf{I}_i (\mathbf{v}_i \times \mathbf{S}_j) + \\ &\quad \mathbf{I}_i ((\mathbf{v}_{\lambda(j)} - \mathbf{v}_i) \times \mathbf{S}_j) \end{aligned} \quad (62)$$

扩展各项:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{I}_i \mathbf{v}_i)}{\partial \mathbf{q}_j} &= (\mathbf{I}_i \mathbf{v}_i) \bar{\times}^* \mathbf{S}_j + \mathbf{I}_i (\mathbf{v}_i \times \mathbf{S}_j) + \\ &\quad \mathbf{I}_i (\mathbf{v}_{\lambda(j)} \times \mathbf{S}_j) - \mathbf{I}_i (\mathbf{v}_i \times \mathbf{S}_j) \end{aligned} \quad (63)$$

消除并化简后, 方程 (63) 变为:

$$\frac{\partial(\mathbf{I}_i \mathbf{v}_i)}{\partial \mathbf{q}_j} = (\mathbf{I}_i \mathbf{v}_i) \bar{\times}^* \mathbf{S}_j + \mathbf{I}_i (\dot{\Psi}_j) \quad (64)$$

其中  $\dot{\Psi}_j$  在方程 (31) 中定义。

J6. 使用上面导出的特征式以及  $\xi_i$  的定义, 对于  $j \preceq i$ ,  $\xi_i$  相对于  $\mathbf{q}_j$  的偏导数计算为:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{q}_j} = \sum_{l \preceq i} \frac{\partial(\mathbf{v}_l \times \mathbf{v}_{J_l})}{\partial \mathbf{q}_j} \quad (65)$$

其中  $\mathbf{v}_{J_l}$  是关节速度, 被定义为:

$$\mathbf{v}_{J_l} = \mathbf{S}_l \dot{\mathbf{q}}_l \quad (66)$$

使用微分的乘积规则:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{q}_j} = \sum_{j \preceq l \preceq i} \frac{\partial(\mathbf{v}_l \times)}{\partial \mathbf{q}_j} \mathbf{v}_{J_l} + \mathbf{v}_l \times \frac{\partial(\mathbf{v}_{J_l})}{\partial \mathbf{q}_j} \quad (67)$$

计算当  $j \preceq i$  时的关节速度  $\mathbf{v}_{J_i}$  相对于  $\mathbf{q}_j$  的偏导数。使用  $\mathbf{v}_{J_i}$  的定义 (方程 68) 我们得到:

$$\mathbf{v}_{J_i} = \mathbf{S}_i \dot{\mathbf{q}}_i \quad (68)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{J_i}}{\partial q_{j,p}} = \frac{\partial(\mathbf{S}_i \dot{\mathbf{q}}_i)}{\partial q_{j,p}} \quad (69)$$

使用特征式 J1, 我们得到

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{J_i}}{\partial q_{j,p}} = \mathbf{s}_{j,p} \times \mathbf{S}_i \dot{\mathbf{q}}_i \quad (70)$$

简化方程 (70),

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{J_i}}{\partial q_{j,p}} = -\mathbf{v}_{J_i} \times \mathbf{s}_{j,p} \quad (71)$$

对于关节  $j$  的所有自由度, 方程 (71) 可被共同写为:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{J_i}}{\partial \mathbf{q}_j} = -\mathbf{v}_{J_i} \times \mathbf{S}_j \quad (72)$$

将  $\mathbf{v}_{J_i}$  视为在方程 (67) 右侧的第一项中的固连运动向量, 使用方程 (52)。方程 (53) 被用于第二项。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{q}_j} &= \sum_{j \preceq l \preceq i} -(\mathbf{v}_{J_l} \times ((\mathbf{v}_{\lambda(j)} - \mathbf{v}_l) \times \mathbf{S}_j)) \\ &\quad + \mathbf{v}_l \times (-\mathbf{v}_{J_l} \times \mathbf{S}_j) \end{aligned} \quad (73)$$

扩展各项, 并使用  $\dot{\Psi}_j$  的定义 (方程 31):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{q}_j} = \sum_{j \preceq l \preceq i} & -(\mathbf{v}_{J_l} \times \dot{\Psi}_j) + \mathbf{v}_{J_l} \times (\mathbf{v}_l \times \mathbf{S}_j) \\ & - \mathbf{v}_l \times (\mathbf{v}_{J_l} \times \mathbf{S}_j) \end{aligned} \quad (74)$$

合并各项并化简,

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{q}_j} = \sum_{j \preceq l \preceq i} -(\mathbf{v}_{J_l} \times \dot{\Psi}_j) + (\mathbf{v}_{J_l} \times \mathbf{v}_l \times - \mathbf{v}_l \times \mathbf{v}_{J_l} \times) \mathbf{S}_j \quad (75)$$

使用空间向量交叉性质 P1、 $\xi_i$  的定义并化简,

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{q}_j} = \sum_{j \preceq l \preceq i} -(\mathbf{v}_{J_l} \times \dot{\Psi}_j) - (\mathbf{v}_l \times \mathbf{v}_{J_l}) \times \mathbf{S}_j \quad (76)$$

对各项求和并化简, 我们得到:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{q}_j} = (\mathbf{v}_{\lambda(j)} - \mathbf{v}_i) \times \dot{\Psi}_j + (\xi_{\lambda(j)} - \xi_i) \times \mathbf{S}_j \quad (77)$$

J7. 使用  $\gamma_i$  的定义, 对于  $j \preceq i$ ,  $\gamma_i$  沿关节  $j$  的第  $p$  个自由模式的方向导数计算为:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial q_{j,p}} = \sum_{l \preceq i} \frac{\partial \mathbf{S}_l}{\partial q_{j,p}} \ddot{\mathbf{q}}_l \quad (78)$$

使用 J1, 我们得到:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial q_{j,p}} = \sum_{j \preceq l \preceq i} \mathbf{s}_{j,p} \times \mathbf{S}_l \ddot{\mathbf{q}}_l \quad (79)$$

方程 (79) 也可被写为

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial q_{j,p}} = - \sum_{j \preceq l \preceq i} \mathbf{S}_l \ddot{\mathbf{q}}_l \times \mathbf{s}_{j,p} \quad (80)$$

对于关节  $j$  的所有自由度, 方程 (80) 可被共同写为:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial \mathbf{q}_j} = - \sum_{j \preceq l \preceq i} \mathbf{S}_l \ddot{\mathbf{q}}_l \times \mathbf{S}_j \quad (81)$$

使用  $\gamma_l$  的定义, 方程 (81) 变为:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial \mathbf{q}_j} = (\gamma_{\lambda(j)} - \gamma_i) \times \mathbf{S}_j \quad (82)$$

J8. 对于  $j \preceq i$ , 计算  $\mathbf{v}_i$  相对于  $\dot{\mathbf{q}}_j$  的偏导数。使用  $\mathbf{v}_i$  的定义, 我们得到:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = \sum_{j \preceq l \preceq i} \mathbf{S}_l \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_l}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \quad (83)$$

对所有索引项  $l$  求和, 除与索引  $j$  相关的项外, 所有项都消失了, 结果为:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = \mathbf{S}_j \quad (84)$$

J9. 使用  $\xi_i$  的定义, 对于  $j \preceq i$ ,  $\xi_i$  相对于  $\dot{\mathbf{q}}_j$  的偏导数为:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = \sum_{l \preceq i} \frac{\partial (\mathbf{v}_l \times \mathbf{S}_l \dot{\mathbf{q}}_l)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \quad (85)$$

使用微分的乘积规则, 我们得到:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = \sum_{j \preceq l \preceq i} \frac{\partial (\mathbf{v}_l \times)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \mathbf{S}_l \dot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{v}_l \times \frac{\partial (\mathbf{S}_l \dot{\mathbf{q}}_l)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \quad (86)$$

使用 J8, 对索引  $l$  求和, 结果为:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = (\mathbf{v}_{\lambda(j)} - \mathbf{v}_i) \times \mathbf{S}_j + \dot{\mathbf{S}}_j \quad (87)$$

通过化简并使用  $\dot{\Psi}_j$  的定义 (方程 31), 我们得到:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = \dot{\Psi}_j + \dot{\mathbf{S}}_j - \mathbf{v}_i \times \mathbf{S}_j \quad (88)$$

D. ID 相对于  $\mathbf{q}$  的偏导数: 导数

$[M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}]_i$  的偏导数:

1) 当  $j \preceq i$  时的情况

在方程 (12) 中使用微分乘积规则, 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}]_i}{\partial \mathbf{q}_j} &= \frac{\partial (\mathbf{S}_i^T)}{\partial \mathbf{q}_j} \sum_{k \succeq i} [\mathbf{I}_k \gamma_k] + \\ &\mathbf{S}_i^T \sum_{k \succeq i} \left[ \frac{\partial \mathbf{I}_k}{\partial \mathbf{q}_j} \gamma_k + \mathbf{I}_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial \mathbf{q}_j} \right] \end{aligned} \quad (89)$$

使用特征式 J3、J4 和 J7, 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}]_i}{\partial \mathbf{q}_j} &= -\mathbf{S}_i^T \left( \sum_{k \succeq i} [\mathbf{I}_k \gamma_k] \bar{\times}^* \right) \mathbf{S}_j + \\ &\mathbf{S}_i^T \sum_{k \succeq i} \left[ (\mathbf{I}_k \gamma_k) \bar{\times}^* \mathbf{S}_j + \mathbf{I}_k (\gamma_k \times \mathbf{S}_j) + \right. \\ &\left. \mathbf{I}_k (\gamma_{\lambda(j)} - \gamma_k) \times \mathbf{S}_j \right] \end{aligned} \quad (90)$$

消除并化简后, 最终表达式为:

$$\frac{\partial [M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}]_i}{\partial \mathbf{q}_j} = \mathbf{S}_i^T [\mathbf{I}_i^C \gamma_{\lambda(j)} \times \mathbf{S}_j] \quad (91)$$

2) 当  $j \succ i$  时的情况

对于这种情况, 特征式 J3、J4 和 J7 被使用为:

$$\frac{\partial [M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}]_i}{\partial \mathbf{q}_j} = \mathbf{S}_i^T \sum_{k \succeq i} \left[ \frac{\partial \mathbf{I}_k}{\partial \mathbf{q}_j} \gamma_k + \mathbf{I}_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial \mathbf{q}_j} \right] \quad (92)$$

展开:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}]_i}{\partial \mathbf{q}_j} &= \mathbf{S}_i^T \sum_{k \succeq j} \left[ (\mathbf{I}_k \gamma_k) \bar{\times}^* \mathbf{S}_j + \right. \\ &\left. \mathbf{I}_k (\gamma_k \times \mathbf{S}_j) + \mathbf{I}_k (\gamma_{\lambda(j)} - \gamma_k) \times \mathbf{S}_j \right] \end{aligned} \quad (93)$$

消除并化简后, 我们得到以下表达式。

$$\frac{\partial[M(q)\ddot{q}]_i}{\partial q_j} = S_i^T [\eta_j^C \bar{\times}^* S_j + I_j^C \gamma_{\lambda(j)} \times S_j] \quad (94)$$

$[C(q, \dot{q})\ddot{q}]_i$  的偏导数:

1) 当  $j \preceq i$  时的情况

在方程 (13) 中使用微分乘积规则, 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial[C\dot{q}]_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial(S_i^T)}{\partial q_j} \sum_{k \geq i} [v_k \times^* I_k v_k + I_k \xi_k] + \\ &S_i^T \sum_{k \geq i} \left[ \frac{\partial(v_k \times^*)}{\partial q_j} I_k v_k + (v_k \times^*) \frac{\partial(I_k v_k)}{\partial q_j} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial I_k}{\partial q_j} \xi_k + I_k \frac{\partial \xi_k}{\partial q_j} \right] \quad (95) \end{aligned}$$

使用特征式 J2-J6, 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial[C\dot{q}]_i}{\partial q_j} &= -S_i^T \left( \sum_{k \geq i} [v_k \times^* I_k v_k + I_k \xi_k] \bar{\times}^* \right) S_j \\ &+ S_i^T \sum_{k \geq i} \left[ (I_k v_k) \bar{\times}^* ((v_{\lambda(j)} - v_k) \times S_j) + \right. \\ &\quad (v_k \times^*) (I_k v_k) \bar{\times}^* S_j + (v_k \times^*) I_k (\dot{\Psi}_j) + \\ &\quad (I_k \xi_k) \bar{\times}^* S_j + I_k (\xi_k \times S_j) + \\ &\quad I_k ((v_{\lambda(j)} - v_k) \times \dot{\Psi}_j + \\ &\quad \left. (\xi_{\lambda(j)} - \xi_k) \times S_j) \right] \quad (96) \end{aligned}$$

展开各项, 并使用性质 P3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial[C\dot{q}]_i}{\partial q_j} &= -S_i^T \left( \sum_{k \geq i} [v_k \times^* (I_k v_k) \bar{\times}^* S_j - \right. \\ &\quad (I_k v_k) \bar{\times}^* v_k \times S_j + (I_k \xi_k) \bar{\times}^* S_j] \left. \right) + \\ &S_i^T \sum_{k \geq i} \left[ (I_k v_k) \bar{\times}^* \dot{\Psi}_j - (I_k v_k) \bar{\times}^* v_k \times S_j + \right. \\ &\quad (v_k \times^*) (I_k v_k) \bar{\times}^* S_j + (v_k \times^*) I_k (\dot{\Psi}_j) + \\ &\quad (I_k \xi_k) \bar{\times}^* S_j + I_k (\xi_k \times S_j) + I_k v_{\lambda(j)} \times \dot{\Psi}_j - \\ &\quad I_k (v_k \times \dot{\Psi}_j) + I_k \xi_{\lambda(j)} \times S_j - \\ &\quad \left. I_k (\xi_k \times S_j) \right] \quad (97) \end{aligned}$$

化简各项,

$$\begin{aligned} \frac{\partial[C\dot{q}]_i}{\partial q_j} &= S_i^T \left( \sum_{k \geq i} [-v_k \times^* (I_k v_k) \bar{\times}^* S_j + \right. \\ &\quad (I_k v_k) \bar{\times}^* v_k \times S_j - (I_k \xi_k) \bar{\times}^* S_j] \left. \right) + \\ &S_i^T \sum_{k \geq i} \left[ (I_k v_k) \bar{\times}^* \dot{\Psi}_j - (I_k v_k) \bar{\times}^* v_k \times S_j + \right. \\ &\quad (v_k \times^*) (I_k v_k) \bar{\times}^* S_j + (v_k \times^*) I_k (\dot{\Psi}_j) + \\ &\quad (I_k \xi_k) \bar{\times}^* S_j + I_k (\xi_k \times S_j) + \\ &\quad I_k v_{\lambda(j)} \times \dot{\Psi}_j - I_k (v_k \times \dot{\Psi}_j) + \\ &\quad \left. I_k \xi_{\lambda(j)} \times S_j - I_k (\xi_k \times S_j) \right] \quad (98) \end{aligned}$$

消除各项,

$$\begin{aligned} \frac{\partial[C\dot{q}]_i}{\partial q_j} &= S_i^T \sum_{k \geq i} \left[ (I_k v_k) \bar{\times}^* \dot{\Psi}_j + \right. \\ &\quad (v_k \times^*) I_k (\dot{\Psi}_j) + I_k v_{\lambda(j)} \times \dot{\Psi}_j - \\ &\quad \left. I_k (v_k \times \dot{\Psi}_j) + I_k \xi_{\lambda(j)} \times S_j \right] \quad (99) \end{aligned}$$

合并各项,

$$\begin{aligned} \frac{\partial[C\dot{q}]_i}{\partial q_j} &= S_i^T \sum_{k \geq i} \left[ (I_k v_k) \bar{\times}^* \dot{\Psi}_j + \right. \\ &\quad (v_k \times^*) I_k (\dot{\Psi}_j) + I_k v_{\lambda(j)} \times \dot{\Psi}_j - \\ &\quad \left. I_k (v_k \times \dot{\Psi}_j) + I_k \xi_{\lambda(j)} \times S_j \right] \quad (100) \end{aligned}$$

使用  $B_i$  的定义 (方程 28), 并对索引  $k$  求和, 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial[C\dot{q}]_i}{\partial q_j} &= S_i^T \left[ 2B_i^C \dot{\Psi}_j + I_i^C v_{\lambda(j)} \times \dot{\Psi}_j + \right. \\ &\quad \left. I_i^C \xi_{\lambda(j)} \times S_j \right] \quad (101) \end{aligned}$$

2) 当  $j \succ i$  时的情况

对于这种情况, 首先使用微分乘积规则:

$$\begin{aligned} \frac{\partial[C\dot{q}]_i}{\partial q_j} &= S_i^T \sum_{k \geq i} \left[ \frac{\partial(v_k \times^*)}{\partial q_j} I_k v_k + \right. \\ &\quad (v_k \times^*) \frac{\partial(I_k v_k)}{\partial q_j} + \frac{\partial I_k}{\partial q_j} \xi_k + I_k \frac{\partial \xi_k}{\partial q_j} \left. \right] \quad (102) \end{aligned}$$

使用特征式 J2-J6 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial[C\dot{q}]_i}{\partial q_j} &= S_i^T \sum_{k \geq j} \left[ (I_k v_k) \bar{\times}^* ((v_{\lambda(j)} - v_k) \times S_j) \right. \\ &\quad + (v_k \times^*) (I_k v_k) \bar{\times}^* S_j + (v_k \times^*) I_k (\dot{\Psi}_j) + \\ &\quad (I_k \xi_k) \bar{\times}^* S_j + I_k (\xi_k \times S_j) + \\ &\quad \left. I_k ((v_{\lambda(j)} - v_k) \times \dot{\Psi}_j + (\xi_{\lambda(j)} - \xi_k) \times S_j) \right] \quad (103) \end{aligned}$$

展开各项

$$\frac{\partial[C\dot{q}]_i}{\partial q_j} = S_i^T \sum_{k \geq j} \left[ (I_k v_k) \bar{\times}^* \dot{\Psi}_j - \frac{\partial g_i}{\partial q_j} = S_i^T I_i^C (a_0 \times S_j) \right] \quad (110)$$

$$\begin{aligned} & (I_k v_k) \bar{\times}^* v_k \times S_j + (v_k \times^*) (I_k v_k) \bar{\times}^* S_j + \\ & (v_k \times^*) I_k (\dot{\Psi}_j) + (I_k \xi_k) \bar{\times}^* S_j + \\ & I_k (\xi_k \times S_j) + I_k v_{\lambda(j)} \times \dot{\Psi}_j - \\ & I_k (v_k \times \dot{\Psi}_j) + I_k \xi_{\lambda(j)} \times S_j - \\ & I_k (\xi_k \times S_j) \end{aligned} \quad (104)$$

消除并重新排列各项,

$$\begin{aligned} \frac{\partial[C\dot{q}]_i}{\partial q_j} = S_i^T \sum_{k \geq j} & \left[ (I_k v_k) \bar{\times}^* \dot{\Psi}_j - \right. \\ & (I_k v_k) \bar{\times}^* v_k \times S_j + \\ & (v_k \times^*) (I_k v_k) \bar{\times}^* S_j + \\ & (v_k \times^*) I_k (\dot{\Psi}_j) + (I_k \xi_k) \bar{\times}^* S_j + \\ & I_k v_{\lambda(j)} \times \dot{\Psi}_j - I_k (v_k \times \dot{\Psi}_j) + \\ & \left. I_k \xi_{\lambda(j)} \times S_j \right] \end{aligned} \quad (105)$$

使用性质 P3 以合并各项,

$$\begin{aligned} \frac{\partial[C\dot{q}]_i}{\partial q_j} = S_i^T \sum_{k \geq j} & \left[ (I_k v_k) \bar{\times}^* \dot{\Psi}_j + \right. \\ & (v_k \times^* I_k v_k + I_k \xi_k) \bar{\times}^* S_j + \\ & (v_k \times^*) I_k (\dot{\Psi}_j) + \\ & I_k v_{\lambda(j)} \times \dot{\Psi}_j - \\ & \left. I_k (v_k \times \dot{\Psi}_j) + I_k \xi_{\lambda(j)} \times S_j \right] \end{aligned} \quad (106)$$

对索引  $k$  求和, 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial[C\dot{q}]_i}{\partial q_j} = S_i^T & \left[ 2B_j^C \dot{\Psi}_j + I_j^C v_{\lambda(j)} \times \dot{\Psi}_j + \right. \\ & \left. I_j^C \xi_{\lambda(j)} \times S_j + \zeta_j^C \bar{\times}^* S_j \right] \end{aligned} \quad (107)$$

**重力项的偏导数:**

1) 当  $j \leq i$  时的情况

对于  $j \leq i$  的情况,  $g_i$  相对于  $q_j$  的偏导数为:

$$\frac{\partial g_i}{\partial q_j} = \frac{\partial S_i^T}{\partial q_j} \sum_{k \geq i} I_k a_0 + S_i^T \sum_{k \geq i} \frac{\partial I_k}{\partial q_j} a_0 \quad (108)$$

使用特征式 J3 和 J4, 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_i}{\partial q_j} = -S_i^T \sum_{k \geq i} & (I_k a_0) \bar{\times}^* S_j + \\ & S_i^T \sum_{k \geq i} (I_k a_0) \bar{\times}^* S_j + I_k (a_0 \times S_j) \end{aligned} \quad (109)$$

消除各项, 并对索引  $k$  求和, 我们得到:

2) 当  $j > i$  时的情况

对于  $j > i$  的情况, 我们遵循类似的过程, 并使用特征式 J4 为:

$$\frac{\partial g_i}{\partial q_j} = S_i^T \sum_{k \geq i} \frac{\partial I_k}{\partial q_j} a_0 \quad (111)$$

展开:

$$\frac{\partial g_i}{\partial q_j} = S_i^T \sum_{k \geq j} (I_k a_0) \bar{\times}^* S_j + I_k (a_0 \times S_j) \quad (112)$$

对索引  $k$  求和, 我们得到:

$$\frac{\partial g_i}{\partial q_j} = S_i^T \left[ (I_j^C a_0) \bar{\times}^* S_j + I_j^C (a_0 \times S_j) \right] \quad (113)$$

E. 组合各项的细节 (相对于  $q$  的偏导数):

1)  $\frac{\partial \tau_i}{\partial q_j}$

对于  $\frac{\partial[M\ddot{q}]_i}{\partial q_j}$ ,  $\frac{\partial[C\dot{q}]_i}{\partial q_j}$ , 以及  $\frac{\partial g_i}{\partial q_j}$  收集各项, 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_i}{\partial q_j} = S_i^T & [I_i^C (\gamma_{\lambda(j)}) \times S_j] + \\ & S_i^T [2B_i^C \dot{\Psi}_j + I_i^C v_{\lambda(j)} \times \dot{\Psi}_j + \\ & I_i^C \xi_{\lambda(j)} \times S_j] + S_i^T I_i^C (a_0 \times S_j) \end{aligned} \quad (114)$$

在这里重新排列各项

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_i}{\partial q_j} = S_i^T & [I_i^C (\xi_{\lambda(j)} + \gamma_{\lambda(j)} + a_0) \times S_j + \\ & 2B_i^C \dot{\Psi}_j + I_i^C v_{\lambda(j)} \times \dot{\Psi}_j] \end{aligned} \quad (115)$$

化简:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_i}{\partial q_j} = S_i^T & [I_i^C a_{\lambda(j)} \times S_j + 2B_i^C \dot{\Psi}_j + \\ & I_i^C v_{\lambda(j)} \times \dot{\Psi}_j] \end{aligned} \quad (116)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_i}{\partial q_j} = S_i^T & [I_i^C a_{\lambda(j)} \times S_j + 2B_i^C \dot{\Psi}_j + \\ & I_i^C v_{\lambda(j)} \times \dot{\Psi}_j] \end{aligned} \quad (117)$$

使用  $\ddot{\Psi}_k$  (方程 31), 对于  $\frac{\partial \tau_i}{\partial q_j}$  的最终紧凑表达式为:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial q_j} = S_i^T [2B_i^C] \dot{\Psi}_j + S_i^T I_i^C \ddot{\Psi}_j \quad (118)$$

2)  $\frac{\partial \tau_j}{\partial q_i} (j \neq i)$

类似于前面的情况, 收集各项  $\frac{\partial[M\ddot{q}]_j}{\partial q_i}$ ,  $\frac{\partial[C\dot{q}]_j}{\partial q_i}$ , 以及  $\frac{\partial g_j}{\partial q_i}$  我们得到:



$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_j}{\partial \mathbf{q}_i} = & \mathbf{S}_j^T [\eta_i^C \bar{\times}^* \mathbf{S}_i + \mathbf{I}_i^C (\gamma_{\lambda(i)}) \times \mathbf{S}_i] + \\ & \mathbf{S}_j^T \left[ 2\mathbf{B}_i^C \dot{\Psi}_i + \mathbf{I}_i^C \mathbf{v}_{\lambda(i)} \times \dot{\Psi}_i + \right. \\ & \left. \mathbf{I}_i^C \xi_{\lambda(i)} \times \mathbf{S}_i + \zeta_i^C \bar{\times}^* \mathbf{S}_i \right] + \\ & \mathbf{S}_j^T [(\mathbf{I}_i^C \mathbf{a}_0) \bar{\times}^* \mathbf{S}_i + \mathbf{I}_i^C (\mathbf{a}_0 \times \mathbf{S}_i)] \end{aligned} \quad (119)$$

重新排列各项, 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_j}{\partial \mathbf{q}_i} = & \mathbf{S}_j^T [(\eta_i^C + \zeta_i^C + \mathbf{I}_i^C \mathbf{a}_0) \bar{\times}^* \mathbf{S}_i + \\ & \mathbf{I}_i^C (\gamma_{\lambda(i)} + \xi_{\lambda(i)} + \mathbf{a}_0) \times \mathbf{S}_i + \\ & 2\mathbf{B}_i^C \dot{\Psi}_i + \mathbf{I}_i^C \mathbf{v}_{\lambda(i)} \times \dot{\Psi}_i] \end{aligned} \quad (120)$$

使用  $\mathbf{a}_i$  和  $\mathbf{f}_i$  的定义 (方程 10), 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_j}{\partial \mathbf{q}_i} = & \mathbf{S}_j^T [(\mathbf{f}_i^C) \bar{\times}^* \mathbf{S}_i + \mathbf{I}_i^C \mathbf{a}_{\lambda(i)} \times \mathbf{S}_i + \\ & 2\mathbf{B}_i^C \dot{\Psi}_i + \mathbf{I}_i^C \mathbf{v}_{\lambda(i)} \times \dot{\Psi}_i] \end{aligned} \quad (121)$$

使用  $\ddot{\Psi}_i$  的定义 (方程 31), 对于  $\frac{\partial \tau_j}{\partial \mathbf{q}_i}$  的最终紧凑表达式为:

$$\frac{\partial \tau_j}{\partial \mathbf{q}_i} = \mathbf{S}_j^T [2\mathbf{B}_i^C \dot{\Psi}_i + \mathbf{I}_i^C \ddot{\Psi}_i + (\mathbf{f}_i^C) \bar{\times}^* \mathbf{S}_i] \quad (122)$$

F. ID 相对于  $\dot{\mathbf{q}}$  的偏导数: 导数

1) 当  $j \preceq i$  时的情况

在方程 (13) 中使用微分乘积规则, 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}]_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = & \mathbf{S}_i^T \sum_{k \succeq i} \left[ \frac{\partial (\mathbf{v}_k \times^*)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \mathbf{I}_k \mathbf{v}_k + \right. \\ & \left. \mathbf{v}_k \times^* \mathbf{I}_k \frac{\partial (\mathbf{v}_k)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} + \mathbf{I}_k \frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right] \end{aligned} \quad (123)$$

使用特征式 J8 和 J9, 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}]_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = & \mathbf{S}_i^T \sum_{k \succeq i} \left[ (\mathbf{I}_k \mathbf{v}_k) \bar{\times}^* \mathbf{S}_j + \mathbf{v}_k \times^* \mathbf{I}_k \mathbf{S}_j + \right. \\ & \left. \mathbf{I}_k ((\mathbf{v}_{\lambda(j)} - \mathbf{v}_k) \times \mathbf{S}_j + \dot{\mathbf{S}}_j) \right] \end{aligned} \quad (124)$$

化简并收集各项, 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}]_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = & \mathbf{S}_i^T \sum_{k \succeq i} \left[ (\mathbf{I}_k \mathbf{v}_k) \bar{\times}^* \mathbf{S}_j + \right. \\ & \left. \mathbf{v}_k \times^* \mathbf{I}_k \mathbf{S}_j - \mathbf{I}_k (\mathbf{v}_k \times) \mathbf{S}_j + \right. \\ & \left. \mathbf{I}_k (\mathbf{v}_{\lambda(j)} \times \mathbf{S}_j + \dot{\mathbf{S}}_j) \right] \end{aligned} \quad (125)$$

对索引  $k$  求和, 我们得到:

$$\frac{\partial [\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}]_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = \mathbf{S}_i^T [2\mathbf{B}_i^C \mathbf{S}_j + \mathbf{I}_i^C (\dot{\Psi}_j + \dot{\mathbf{S}}_j)] \quad (126)$$

2) 当  $j \succ i$  时的情况

类似于前面的情况, 在方程 (13) 中使用微分乘积规则:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}]_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = & \mathbf{S}_i^T \sum_{k \succeq i} \left[ \frac{\partial (\mathbf{v}_k \times^*)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \mathbf{I}_k \mathbf{v}_k + \right. \\ & \left. \mathbf{v}_k \times^* \mathbf{I}_k \frac{\partial (\mathbf{v}_k)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} + \mathbf{I}_k \frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right] \end{aligned} \quad (127)$$

使用特征式 J8 和 J9, 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}]_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = & \mathbf{S}_i^T \sum_{k \succeq j} \left[ (\mathbf{I}_k \mathbf{v}_k) \bar{\times}^* \mathbf{S}_j + \mathbf{v}_k \times^* \mathbf{I}_k \mathbf{S}_j + \right. \\ & \left. \mathbf{I}_k ((\mathbf{v}_{\lambda(j)} - \mathbf{v}_k) \times \mathbf{S}_j + \dot{\mathbf{S}}_j) \right] \end{aligned} \quad (128)$$

化简并收集各项, 我们得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}]_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = & \mathbf{S}_i^T \sum_{k \succeq j} \left[ (\mathbf{I}_k \mathbf{v}_k) \bar{\times}^* \mathbf{S}_j + \right. \\ & \left. \mathbf{v}_k \times^* \mathbf{I}_k \mathbf{S}_j - \mathbf{I}_k (\mathbf{v}_k \times) \mathbf{S}_j + \right. \\ & \left. \mathbf{I}_k (\mathbf{v}_{\lambda(j)} \times \mathbf{S}_j + \dot{\mathbf{S}}_j) \right] \end{aligned} \quad (129)$$

对索引  $k$  求和, 我们得到:

$$\frac{\partial [\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}]_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = \mathbf{S}_i^T [2\mathbf{B}_j^C \mathbf{S}_j + \mathbf{I}_j^C (\dot{\Psi}_j + \dot{\mathbf{S}}_j)] \quad (130)$$

在方程 (130) 中翻转索引项  $i$  和  $j$ , 以获得对于  $j \prec i$  情况的  $\frac{\partial [\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}]_j}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}$ :

$$\frac{\partial [\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}]_j}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} = \mathbf{S}_j^T [2\mathbf{B}_i^C \mathbf{S}_i + \mathbf{I}_i^C (\dot{\Psi}_i + \dot{\mathbf{S}}_i)] (j \neq i) \quad (131)$$

因此,  $\tau$  相对于  $\dot{\mathbf{q}}$  的偏导数为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = & \mathbf{S}_i^T [2\mathbf{B}_i^C \mathbf{S}_j + \mathbf{I}_i^C (\dot{\Psi}_j + \dot{\mathbf{S}}_j)] \\ \frac{\partial \tau_j}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} = & \mathbf{S}_j^T [2\mathbf{B}_i^C \mathbf{S}_i + \mathbf{I}_i^C (\dot{\Psi}_i + \dot{\mathbf{S}}_i)] (j \neq i) \end{aligned} \quad (132)$$