数学：导数与微分

Frank Dellaert

January 25, 2022

第一部分　理论

1　优化

我们将关注最小化形式的非线性最小二乘目标，其形式为

$$x^* = \arg\min_x \|h(x) - z\|_\Sigma^2 \tag{1.1}$$

其中 $x \in \mathcal{M}$ 是 n 维流形 (可以是 $\mathbb{R}^n$，一个 n 维李群 G，或是一个通用流形 $\mathcal{M}$) 上的一个点，$z \in \mathbb{R}^m$ 为观察到的一组测量值，$h : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^m$ 是一个测量函数，它从 x 预测 z，并且 $\|e\|_\Sigma^2 \triangleq e^T \Sigma^{-1} e$ 是用于协方差 Σ 的 Mahalanobis 平方的距离。

为最小化方程 (1.1)，我们需要一个概念，即非线性测量函数 $h(x)$ 在一个线性化点 a 邻域的行为方式。粗略地说，我们想要定义一个 $m \times n$ 雅可比矩阵 H_a，以使得

$$h(a \oplus \xi) \approx h(a) + H_a \xi \tag{1.2}$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}^n$，并且运算 $\oplus$“递增” $a \in \mathcal{M}$。下面我们更正式地扩展这个概念，首先是针对来自 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的函数，然后是李群，且最后是流形。

一旦配备近似值方程 (1.2)，我们就可以相对于 δx 最小化目标函数方程 (1.1)，它被替换为：

$$\xi^* = \arg\min_\xi \|h(a) + H_a \xi - z\|_\Sigma^2 \tag{1.3}$$

这可以通过将方程 (1.3) 的导数设置为零来完成，以产生**正则方程组 (normal equations)**，

$$H_a^T H_a \xi = H_a^T (z - h(a))$$

这可以用 Cholesky 分解法求解。当然，我们可能需要多次迭代，并且当近似值方程 (1.2) 不好时，使用信赖域方法来限制 ξ。

2　多元微分

2.1　导数

对于一个向量空间 $\mathbb{R}^n$，增量的概念仅通过向量加法来完成

$$a \oplus \xi \triangleq a + \xi$$

并且对于近似值方程 (1.2)，我们将使用多元微分的泰勒展开式。但是，不严格遵循文献 [2]，我们使用一种可能不熟悉的方式来定义导数：

定义 1. 我们定义一个函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 在 a 处是**可微的** (**differentiable**)，若存在一个矩阵 $f'(a)\in\mathbb{R}^{m\times n}$，以使得

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{|f(a)+f'(a)\xi-f(a+\xi)|}{|\xi|}=0$$

其中 $|e|\triangleq\sqrt{e^Te}$ 是通常的范数。如果 f 是可微的，则矩阵 $f'(a)$ 被称为 f 在 a 处的**雅可比矩阵** (**Jacobian matrix**)，并且线性映射 $Df_a:\xi\mapsto f'(a)\xi$ 被称为 f 在 a 处的**导数** (**derivative**)。当不可能产生混淆时，我们使用符号 $F_a\triangleq f'(a)$ 以强调 $f'(a)$ 是一个矩阵。

使用这种定义的好处是它将标量导数 $f'(a):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的概念从 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 推广到多元函数。特别地，导数 Df_a 将在 a 上的向量增量 ξ 映射到 $f(a)$ 上的增量 $f'(a)\xi$，以使得该线性映射局部逼近 f：

$$f(a+\xi)\approx f(a)+f'(a)\xi$$

例 1. 函数 $\pi:(x,y,z)\mapsto(x/z,y/z)$ 投影一个 3D 点 (x,y,z) 到象平面，并有雅可比矩阵

$$\pi'(x,y,z)=\frac{1}{z}\begin{bmatrix}1&0&-x/z\\0&1&-y/z\end{bmatrix}$$

2.2 导数的性质

多元导数的概念遵循通常的规则：

定理 1. *(链式规则) 如果 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 在 a 处可微，并且 $g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$ 在 $f(a)$ 处可微，则 $h=g\circ f$ 在 a 处的雅可比矩阵 H_a 是 $m\times n$ 矩阵积*

$$H_a=G_{f(a)}F_a$$

其中 $G_{f(a)}$ 是 g 在 $f(a)$ 处评估的 $m\times p$ 雅可比矩阵，并且 F_a 是 f 在 a 处评估的 $p\times n$ 雅可比矩阵。

证明. 参见文献 [2]。 □

例 2. 如果我们通过一个校准步骤 $\gamma:(x,y)\mapsto(u_0+fx,u_0+fy)$ 跟随投影 π，具有

$$\gamma'(x,y)=\begin{bmatrix}f&0\\0&f\end{bmatrix}$$

则组合函数 $\gamma\circ\pi$ 具有雅可比矩阵

$$(\gamma\circ\pi)'(x,y)=\frac{f}{z}\begin{bmatrix}1&0&-x/z\\0&1&-y/z\end{bmatrix}$$

定理 2. *(求逆) 如果 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是可微的，且有可微逆 $g\triangleq f^{-1}$，则其在 a 处的雅可比矩阵 G_a 就是 f 在 $g(a)$ 处评估的逆矩阵：*

$$G_a=\left[F_{g(a)}\right]^{-1}$$

证明. 参见文献 [2]。 □

例 3. 函数 $f:(x,y)\mapsto(x^2,xy)$ 具有雅可比矩阵

$$F_{(x,y)}=\begin{bmatrix}2x & 0\\ y & x\end{bmatrix}$$

并且，对于 $x\geq 0$，其逆函数为 $g:(x,y)\mapsto(x^{1/2},x^{-1/2}y)$，具有雅可比矩阵

$$G_{(x,y)}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x^{-1/2} & 0\\ -x^{-3/2}y & 2x^{-1/2}\end{bmatrix}$$

它很容易验证

$$g'(a,b)f'(a^{1/2},a^{-1/2}b)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}a^{-1/2} & 0\\ -a^{-3/2}b & 2a^{-1/2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2a^{1/2} & 0\\ a^{-1/2}b & a^{1/2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

问题 1. 验证上述对于 $(a,b)=(4,6)$ 的情况。用图形画出这种情况以获得灵感。

2.3 多元导数的计算

通过定义偏导数的概念，计算导数变得简单：

定义 2. 对于 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，$f$ 在 a 处的**偏导数** (**partial derivative**) 为，

$$D_jf(a)\triangleq\lim_{h\to 0}\frac{f\left(a^1,\ldots,a^j+h,\ldots,a^n\right)-f\left(a^1,\ldots,a^n\right)}{h}$$

这是标量函数 $g(x)\triangleq f\left(a^1,\ldots,x,\ldots,a^n\right)$ 的普通导数。

使用这个定义，我们可以证明，一个可微的多元 (*multivariate*) 函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 的雅可比矩阵 F_a 简单地由 $m\times n$ 偏导数 $D_jf^i(a)$ 组成，其在 $a\in\mathbb{R}^n$ 处评估：

$$F_a=\begin{bmatrix}D_1f^1(a) & \cdots & D_nf^1(a)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ D_1f^m(a) & \ldots & D_nf^m(a)\end{bmatrix}$$

问题 2. 验证示例 1 至 3 的导数。

3 在李群上的多元函数

3.1 李群

李群不像向量空间 $\mathbb{R}^n$ 那么容易处理，但仍然有很多结构可处理。为了推广上述所有导数的概念，我们只需要将在方程 (1.3) 中的 $a \oplus \xi$ 用在李群 G 中的一个合适的操作替换。特别地，指数映射的概念允许我们定义一个从**局部坐标 (local coordinates)** ξ 返回到在 G 中 a 周围的一个邻域的映射，

$$a \oplus \xi \triangleq a \exp\left(\hat{\xi}\right) \tag{3.1}$$

其中对于一个 n 维李群，$\xi \in \mathbb{R}^n$。以上，$\hat{\xi} \in \mathfrak{g}$ 是对应于向量 ξ 的李代数元素，并且 $\exp \hat{\xi}$ 是指数映射。注意，若 G 等于 $\mathbb{R}^n$，则与指数映射 $ae^{\hat{\xi}}$ 的组合就仅是向量加法 $a + \xi$。

例 4. 对于 3D 旋转的李群 $SO(3)$，向量 ξ 标志为 ωt，并表示一个角位移。李代数元素 $\hat{\xi}$ 是一个斜对称矩阵，标志为 $[\omega t]_\times \in \mathfrak{so}(3)$，并给出为

$$[\omega t]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} t$$

最后，增量 $a \oplus \xi = ae^{\hat{\xi}}$ 对应于一个增量旋转 $R \oplus \omega t = Re^{[\omega t]_\times}$。

3.2 局部坐标与切向量

在微分几何中，在 a 处的**切向量 (tangent vectors)** $v \in T_a G$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的元素，并被定义为

$$v \triangleq \left.\frac{\partial \gamma(t)}{\partial t}\right|_{t=0}$$

其中 γ 是在 $t = 0$ 时通过 a 的一些曲线，即 $\gamma(0) = a$。特别是，对于任意固定的局部坐标 ξ，映射方程 (3.1) 可用于定义在群流形上的一条**测地线曲线 (geodesic curve)**，其定义为 $\gamma : t \mapsto ae^{\widehat{t\xi}}$，并且相应的切向量给出为

$$\left.\frac{\partial ae^{\widehat{t\xi}}}{\partial t}\right|_{t=0} = a\hat{\xi} \tag{3.2}$$

这定义了局部坐标 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 和实际切向量 $a\hat{\xi} \in g$ 之间的映射：向量 ξ 定义流形上的行进方向，但在局部坐标帧 a 中完成。

例 5. 假设一个刚体的姿态由 $R_b^n(t)$ 描述，其中，上下标分别标志导航帧 N 和机体帧 B。一个经过外部校准的陀螺仪在机体帧中测量角速度 ω^b，以及相应的切向量为

$$\dot{R}_b^n(t) = R_b^n(t)\widehat{\omega^b}$$

3.3 导数

我们可以推广定义 1，将局部坐标 ξ 映射到 $f(a)$ 上的增量 $f'(a)\xi$，以使得线性映射 Df_a 近似函数 f 在 a 周围的一个邻域中从 G 到 $\mathbb{R}^m$ 为：

$$f(ae^{\hat{\xi}}) \approx f(a) + f'(a)\xi$$

定义 3. 我们定义一个函数 $f: G \to \mathbb{R}^m$ 在 $a \in G$ 处是**可微的** (**differentiable**)，如果存在一个矩阵 $f'(a) \in \mathbb{R}^{m \times n}$，以使得

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\left| f(a) + f'(a)\xi - f(ae^{\hat{\xi}}) \right|}{|\xi|} = 0$$

如果 f 是可微的，则矩阵 $f'(a)$ 被称为 f 在 a 处的**雅可比矩阵** (**Jacobian matrix**)，并且线性映射 $Df_a : \xi \mapsto f'(a)\xi$ 被称为 f 在 a 处的**导数** (**derivative**)。

3.4 作用的导数

矩阵群 G 的 (通常的) 作用是在 $\mathbb{R}^n$ 上的矩阵向量乘法，即 $f: G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，其中

$$f(T, p) = Tp$$

由于这是一个定义在积 $G \times \mathbb{R}^n$ 上的函数，所以导数是一个线性变换 $Df: \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$，其中

$$Df_{(T,p)}(\xi, \delta p) = D_1 f_{(T,p)}(\xi) + D_2 f_{(T,p)}(\delta p)$$

其中 m 是流形 G 的维度。

定理 3. *群作用 $f(T,p) = Tp$ 在 (T,p) 处的雅可比矩阵给出为*

$$F_{(T,p)} = \begin{bmatrix} TH(p) & T \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} H(p) & I_n \end{bmatrix}$$

其中 $H: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n \times m}$ 是一个依赖于 p 的线性映射，并且 I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵。

证明. 首先，相对于 p 的导数 $D_2 f$ 很容易，因为它的矩阵是简单的 T：

$$f(T, p + \delta p) = T(p + \delta p) = Tp + T\delta p = f(T,p) + D_2 f(\delta p)$$

对于导数 $D_1 f$，相对于第一个参数 T 的变化，我们想找到线性映射 $D_1 f$，以使得

$$Tp + D_1 f(\xi) \approx f(Te^{\hat{\xi}}, p) = Te^{\hat{\xi}} p$$

由于矩阵指数由级数 $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots$ 给出。我们有，对于一阶

$$Te^{\hat{\xi}} p \approx T(I + \hat{\xi})p = Tp + T\hat{\xi}p$$

并且 $D_1 f(\xi) = T\hat{\xi}p$。因此，为了完成证明，我们需要证明

$$\hat{\xi} p = H(p)\xi \tag{3.3}$$

其中 $H(p)$ 是依赖于 p 的一个 $n \times m$ 矩阵，按照李代数生成元 G^i 表达映射 $\xi \to \hat{\xi}$，使用张量和爱因斯坦求和，我们有 $\hat{\xi}^i_j = G^i_{jk}\xi^k$，以允许我们计算 $\hat{\xi}p$ 为

$$\left(\hat{\xi}p\right)^i = \hat{\xi}^i_j p^j = G^i_{jk}\xi^k p^j = \left(G^i_{jk}p^j\right)\xi^k = H^i_k(p)\xi^k$$

□

例 6. 对于 3D 旋转 $R \in SO(3)$，我们有 $\hat{\omega} = [\omega]_\times$ 以及

$$G_{k=1}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} G_{k=2}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} G_{k=3}: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵 $(G_k^i)_j$ 通过组装上述生成元的第 j^{th} 列来获得，产生的 $H(p)$ 等于：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} p^1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} p^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} p^3 = \begin{pmatrix} 0 & p^3 & -p^2 \\ -p^3 & 0 & p^1 \\ p^2 & -p^1 & 0 \end{pmatrix} = [-p]_\times$$

因此，$f(R,p) = Rp$ 的雅可比矩阵给出为：

$$F_{(R,p)} = R \begin{pmatrix} [-p]_\times & I_3 \end{pmatrix}$$

3.5 逆作用的导数

通过应用 $T \in G$ 的逆作用，产生一个函数 $g : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，定义为

$$g(T,p) = T^{-1}p$$

定理 4. *逆群作用 $g(T,p) = T^{-1}p$ 的雅可比矩阵给出为*

$$G_{(T,p)} = \begin{bmatrix} -H(T^{-1}p) & T^{-1} \end{bmatrix}$$

其中 $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 是与前面相同的映射。

证明. 同样，相对于 p 的导数 $D_2 g$ 很容易，其矩阵是简单的 T^{-1}：

$$g(T, p + \delta p) = T^{-1}(p + \delta p) = T^{-1}p + T^{-1}\delta p = g(T,p) + D_2 g(\delta p)$$

反之，在 T 中的一个变化产生

$$g(Te^{\hat{\xi}}, p) = \left(Te^{\hat{\xi}}\right)^{-1} p = e^{-\hat{\xi}} T^{-1} p$$

与之前类似，如果我们扩展矩阵指数化，我们得到

$$e^{-A} = I - A + \frac{A^2}{2!} - \frac{A^3}{3!} + \dots$$

所以

$$e^{-\hat{\xi}} T^{-1} p \approx (I - \hat{\xi}) T^{-1} p = g(T,p) - \hat{\xi}\left(T^{-1}p\right)$$

□

例 7. 对于 3D 旋转 $R \in SO(3)$，我们有 $R^{-1} = R^T$，$H(p) = -[p]_\times$，并因此 $g(R,p) = R^T p$ 的雅可比矩阵给出为

$$G_{(R,p)} = \begin{pmatrix} \left[R^T p\right]_\times & R^T \end{pmatrix}$$

4 瞬时速度

对于矩阵李群，如果我们有依赖于一个参数 t 的一个矩阵 $T_b^n(t)$，即 $T_b^n(t)$ 跟随流形上的一条曲线，则我们有兴趣找到一个点 $q^n(t) = T_b^n(t)p^b$ 的速度，其受 $T_b^n(t)$ 的作用。我们可以同时在 n 帧和 b 帧中表达 $q(t)$ 的速度：

$$\dot{q}^n = \dot{T}_b^n p^b = \dot{T}_b^n \left(T_b^n\right)^{-1} p^n \quad \text{and} \quad \dot{q}^b = \left(T_b^n\right)^{-1} \dot{q}^n = \left(T_b^n\right)^{-1} \dot{T}_b^n p^b$$

两个矩阵 $\hat{\xi}_{nb}^n \triangleq \dot{T}_b^n \left(T_b^n\right)^{-1}$ 和 $\hat{\xi}_{nb}^b \triangleq \left(T_b^n\right)^{-1} \dot{T}_b^n$ 都为斜对称李代数元素，其描述**瞬时速度** (**instantaneous velocity**) [1, 对于旋转参见第 51 页, 对于 SE(3) 参见第 419 页]。对于旋转和刚性 3D 变换，我们将重新进行讨论。

5 微分：李群之间的平滑映射

5.1 动机与定义

前面显示了如何计算一个函数 $f: G \to \mathbb{R}^m$ 的导数。然而，如果 f 的参数本身是李群之间映射的结果呢？换句话说，$f = g \circ \varphi$，其中 $g: G \to \mathbb{R}^m$，并且这里 $\varphi: H \to G$ 是一个从 n 维李群 H 到 p 维李群 G 的平滑映射。在这种情况下，我们可以期望通过组合线性映射得到 Df_a，如下所示：

$$f'(a) = (g \circ \varphi)'(a) = G_{\varphi(a)} \varphi'(a)$$

其中 $\varphi'(a)$ 是一个 $n \times p$ 矩阵，其是映射 $\varphi: H \to G$ 的最佳线性近似。相应的线性映射 $D\varphi_a$ 被称为映射 φ 在 a 处是**可微的** (**differential**) 或**可前推的** (**pushforward**)。

因为一个严格的定义会让我们误入歧途，在这里我们只是非正式地定义 φ 在 a 处的前推，作为线性映射 $D\varphi_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$，以使得 $D\varphi_a(\xi) \triangleq \varphi'(a)\xi$ 并且

$$\varphi\left(ae^{\hat{\xi}}\right) \approx \varphi(a) \exp\left(\widehat{\varphi'(a)\xi}\right) \tag{5.1}$$

对于 $\xi \to 0$ 是相等的。我们称 $\varphi'(a)$ 为映射 φ 在 a 处的**雅可比矩阵** (**Jacobian matrix**)。下面我们显示，即使使用这个非正式的定义，我们也可以在一些有用的情况下推导出前推。

5.2 用常数左乘

定理 5. 假设 G 是一个 n 维李群，并且 $\varphi: G \to G$ 被定义为 $\varphi(g) = hg$，其中 $h \in G$ 是一个常数。则 $D\varphi_a$ 是特征映射，并且

$$\varphi'(a) = I_n$$

证明. 如在方程 (5.1) 中定义 $y = D\varphi_a x$，我们有

$$\begin{aligned} \varphi(a)e^{\hat{y}} &= \varphi(ae^{\hat{x}}) \\ hae^{\hat{y}} &= hae^{\hat{x}} \\ y &= x \end{aligned}$$

□

5.3 逆映射的前推

李群的一个众所周知的性质是，在不同帧 g 中应用增量变化 $\hat{\xi}$，可以通过在原始帧中应用变化 $Ad_g\hat{\xi}$，以在单个步骤中完成应用，

$$ge^{\hat{\xi}}g^{-1} = \exp\left(Ad_g\hat{\xi}\right) \tag{5.2}$$

其中 $Ad_g: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是伴随表示 (**adjoint representation**) [1]。这在以下方面很方便：

[1]译注：本文所用的伴随符号 Ad 在其它资料中通常写为 ad，即 $ad_X = XY - YX = [X, Y]$. 而符号 Ad 通常表示 $Ad_g(Y) = gYg^{-1}$. 如果 G 是浸入线性李群，$Ad_g(Y) = gYg^{-1}$ 且有 $g = e^{tX}$，则

$$Ad_{e^{tX}}(Y) = e^{tX}Ye^{-tX}.$$

在 $t = 0$ 处求导，我们获得

$$ad_X = XY - YX.$$

并且 Ad 和 ad 之间有一个重要的对应关系，即方程 (5.2)

$$Ad_g\left(\hat{\xi}\right) = \exp\left(ad_g\hat{\xi}\right),$$

即李群上的操作可以通过指数映射来转化为李代数上的操作，这就是方程 (5.2) 想要表达的内容。

定理 6. 假设 $\varphi : G \to G$ 定义为从元素 g 到其**逆** ***(inverse)*** g^{-1} 的映射，即 $\varphi(g) = g^{-1}$，则前推 $D\varphi_a$ 满足

$$(D\varphi_a x)\hat{} = -Ad_a \hat{x} \tag{5.3}$$

换句话说，并且事后来看，这是很直观的，近似逆映射是通过对 $\hat{\xi}$ 取反来完成的，同时还有一个伴随，以确保它被应用在正确的帧中。但是，请注意方程 (5.3) 不会立即产生雅可比矩阵 $\varphi'(a)$ 的一个有用表达式，但是在许多重要情况下，这将变得很容易。

证明. 如在方程 (5.1) 中定义 $y = D\varphi_a x$，我们有

$$\begin{aligned}
\varphi(a)e^{\hat{y}} &= \varphi(ae^{\hat{x}}) \\
a^{-1}e^{\hat{y}} &= \left(ae^{\hat{x}}\right)^{-1} \\
e^{\hat{y}} &= ae^{-\hat{x}}a^{-1} \\
\hat{y} &= -Ad_a \hat{x}
\end{aligned}$$

□

例 8. 对于 3D 旋转 $R \in SO(3)$，我们有

$$Ad_g(\hat{\omega}) = R\hat{\omega}R^T = [R\omega]_\times$$

并因此，对于逆映射 $\varphi(R) = R^T$ 的前推有矩阵 $\varphi'(R) = -R$。

5.4 用常数右乘

定理 7. 假设 $\varphi : G \to G$ 被定义为 $\varphi(g) = gh$，其中 $h \in G$ 是一个常数。则 $D\varphi_a$ 满足

$$(D\varphi_a x)\hat{} = Ad_{h^{-1}} \hat{x}$$

证明. 如在方程 (5.1) 中定义 $y = D\varphi_a x$，我们有

$$\begin{aligned}
\varphi(a)e^{\hat{y}} &= \varphi(ae^{\hat{x}}) \\
ahe &= ae^{\hat{x}}h \\
e^{\hat{y}} &= h^{-1}e^{\hat{x}}h = \exp\left(Ad_{h^{-1}}\hat{x}\right) \\
\hat{y} &= Ad_{h^{-1}}\hat{x}
\end{aligned}$$

□

例 9. 在 3D 旋转的情况下，通过映射 $\varphi(A) = AR$ 来完成与一个恒定旋转 R 的右乘，并满足

$$[D\varphi_A x]_\times = Ad_{R^T}[x]_\times$$

对于 3D 旋转 $R \in SO(3)$ 我们有

$$Ad_{R^T}(\hat{\omega}) = R^T\hat{\omega}R = \left[R^T\omega\right]_\times$$

并因此，φ 在 A 处的雅可比矩阵为 $\varphi'(A) = R^T$。

5.5 组合的前推

定理 8. 如果我们定义映射 $\varphi : G \times G \to G$ 为两个群元素 $g, h \in G$ 的乘积，即 $\varphi(g,h) = gh$，则前推将满足

$$D\varphi_{(a,b)}(x,y) = D_1\varphi_{(a,b)}x + D_2\varphi_{(a,b)}y$$

其中

$$\left(D_1\varphi_{(a,b)}x\right)\hat{} = Ad_{b^{-1}}\hat{x} \quad and\; D_2\varphi_{(a,b)}y = y$$

证明. 看第一个参数，证明非常类似于用常数 b 的右乘法。事实上，如在方程 (5.1) 中定义 $y = D\varphi_a x$，我们有

$$\begin{aligned}
\varphi(a,b)e^{\hat{y}} &= \varphi(ae^{\hat{x}}, b) \\
abe^{\hat{y}} &= ae^{\hat{x}}b \\
e^{\hat{y}} &= b^{-1}e^{\hat{x}}b = \exp\left(Ad_{b^{-1}}\hat{x}\right) \\
\hat{y} &= Ad_{b^{-1}}\hat{x}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

换句话说，要将一个增量更改 $\hat{x}$ 应用于 a，我们首先需要撤消 b，然后应用 $\hat{x}$，并然后再次应用 b。使用方程 (5.2)，这可以通过简单地应用 $Ad_{b^{-1}}\hat{x}$ 来一步完成。

第二个参数要简单得多，并简单产生特征映射：

$$\begin{aligned}
\varphi(a,b)e^{\hat{y}} &= \varphi(a, be^{\hat{x}}) \\
abe^{\hat{y}} &= abe^{\hat{x}} \\
y &= x
\end{aligned} \tag{5.5}$$

□

例 10. 对于 3D 旋转 $A, B \in SO(3)$，我们有 $\varphi(A,B) = AB$，并且 $Ad_{B^T}[\omega]_\times = \left[B^T\omega\right]_\times$，因此组合两个旋转的雅可比矩阵 $\varphi'(A,B)$ 给出为

$$\varphi'(A,B) = \left[\begin{array}{cc} B^T & I_3 \end{array}\right]$$

5.6 相差 (Between) 的前推

最后，让我们找到**相差** (**between**) 的前推，定义为 $\varphi(g,h) = g^{-1}h$。对于第一个参数，我们的理由是：

$$\begin{aligned}
\varphi(g,h)e^{\hat{y}} &= \varphi(ge^{\hat{x}}, h) \\
g^{-1}he^{\hat{y}} &= \left(ge^{\hat{x}}\right)^{-1}h = e^{-\hat{x}}g^{-1}h \\
e^{\hat{y}} &= \left(h^{-1}g\right)e^{-\hat{x}}\left(h^{-1}g\right)^{-1} = \exp Ad_{(h^{-1}g)}(-\hat{x}) \\
\hat{y} &= -Ad_{(h^{-1}g)}\hat{x} = -Ad_{\varphi(h,g)}\hat{x}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

第二个参数产生特征映射。

例 11. 对于 3D 旋转 $A, B \in SO(3)$，我们有 $\varphi(A,B) = A^TB$，并且 $Ad_{B^TA}[-\omega]_\times = \left[-B^TA\omega\right]_\times$，因此，相差 (between) 的雅可比矩阵 $\varphi'(A,B)$ 给出为

$$\varphi'(A,B) = \left[\begin{array}{cc} \left(-B^TA\right) & I_3 \end{array}\right]$$

5.7 数值前推

让我们检查

$$f\left(g\right)e^{\hat{y}}=f\left(ge^{\hat{x}}\right)$$

并在两侧都用 $f(g)^{-1}$ 相乘：

$$e^{\hat{y}}=f\left(g\right)^{-1}f\left(ge^{\hat{x}}\right)$$

然后我们取 log (在我们的案例中返回 y，而不是 $\hat{y}$)：

$$y(x)=\log\left[f\left(g\right)^{-1}f\left(ge^{\hat{x}}\right)\right]$$

让我们查看当 $x=0$，并在方向 i 上进行扰动，$e_i=[0,0,1,0,0]$。然后取导数，

$$\frac{\partial y(d)}{\partial d}\triangleq\lim_{d\to 0}\frac{y(d)-y(0)}{d}=\lim_{d\to 0}\frac{1}{d}\log\left[f\left(g\right)^{-1}f\left(ge^{\widehat{de_i}}\right)\right]$$

这是一个数值导数方案的基础。

5.8 指数映射的导数

定理 9. 函数 $f:\mathbb{R}^n\to G$ 应用楔形算子和指数映射，即 $f(\xi)=\exp\hat{\xi}$，对于 $\xi=0$，其导数是特征映射。

证明. 对于 $\xi=0$，我们有

$$\begin{aligned}f(\xi)e^{\hat{y}}&=f(\xi+x)\\f(0)e^{\hat{y}}&=f(0+x)\\e^{\hat{y}}&=e^{\hat{x}}\end{aligned}$$

□

推论 1. 逆函数 f^{-1} 的导数也是特征式，即对于 $T=e$，其为在 G 中的特征元素。

对于 $\xi\neq 0$，事情并不简单。与上面的前推一样，我们将寻找一个 $n\times n$ 雅可比矩阵 $f'(\xi)$，以使得

$$f\left(\xi+\delta\right)\approx f\left(\xi\right)\exp\left(\widehat{f'(\xi)\delta}\right)\tag{5.7}$$

微分几何告诉我们，对于任意李代数元素 $\hat{\xi}\in\mathfrak{g}$，存在一个线性映射 $d\exp_{\hat{\xi}}:T_{\hat{\xi}}\mathfrak{g}\to T_{\exp(\hat{\xi})}G$，其被给出为[2]

$$d\exp_{\hat{\xi}}\hat{x}=\exp(\hat{\xi})\frac{1-\exp(-ad_{\hat{\xi}})}{ad_{\hat{\xi}}}\hat{x}\tag{5.8}$$

其中 $\hat{x}\in T_{\hat{\xi}}\mathfrak{g}$，并且 $ad_{\hat{\xi}}$ 它本身是一个线性映射，把 $\hat{x}$ 带到 $[\hat{\xi},\hat{x}]$，即李括号。上面的实际公式并没有线性映射存在的事实那么重要，尽管它直接根据切向量来表达 $\mathfrak{g}$ 和 G。方程 (5.8) 是一个切向量，并且与方程 (3.2) 相比，我们看到它映射到局部坐标 y，如下所示：

$$\hat{y}=\frac{1-\exp(-ad_{\hat{\xi}})}{ad_{\hat{\xi}}}\hat{x}$$

这可被用来构造雅可比矩阵 $f'(\xi)$。

[2]参见 `http://deltaepsilons.wordpress.com/2009/11/06/` 或 `https://en.wikipedia.org/wiki/Derivative_of_the_exponential_map` 。

例 12. 对于 $SO(3)$, 当使用 3 元向量表示 $\mathfrak{so}(3)$ 时, 算子 $ad_{\hat{\xi}}$ 简单地是一个矩阵乘法, 即 $ad_{\hat{\xi}}x = \hat{\xi}x$, 并且对应于 $d\exp$ 的 3×3 雅可比矩阵为

$$f'(\xi) = \frac{I_{3\times3} - \exp(-\hat{\xi})}{\hat{\xi}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\hat{\xi}^k$$

其类似于指数映射，对于 $SO(3)$ 有一个简单的封闭形式的表达式。

6 一般流形

6.1 收回

非李群的一般流形不具有指数映射，但仍然可以通过定义**收回** (**retraction**) $\mathcal{R}:\mathcal{M}\times\mathbb{R}^n\rightarrow\mathcal{M}$ 来处理，以使得

$$a\oplus\xi\triangleq\mathcal{R}_a(\xi)$$

一个收回 [?] 需要在 a 处与在流形 $\mathcal{M}$ 上的测地线相切。我们可以为流形 $\mathcal{M}$ 定义许多种收回，甚至是对于那些具有更多结构的流形。对于向量空间 $\mathbb{R}^n$，收回仅为向量加法，对于李群，明显的收回仅为指数收回，即 $\mathcal{R}_a(\xi)=a\cdot\exp\hat{\xi}$。然而，我们可以选择其它的，可能在计算上有吸引力的收回，只要在 a 周围，它们与指数映射诱导的测地线一致，即，

$$\lim_{\xi\rightarrow 0}\frac{\left|a\cdot\exp\hat{\xi}-\mathcal{R}_a(\xi)\right|}{|\xi|}=0$$

例 13. 对于 $SE(3)$，与其使用真正的指数映射，不如定义收回，它使用平移更新的一阶近似值，在计算上更有效率

$$\mathcal{R}_T\left(\begin{bmatrix}\omega\\ v\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}R & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{[\omega]_\times} & v\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Re^{[\omega]_\times} & t+Rv\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

6.2 导数

通过配备一个收回，则我们可以将导数的概念推广到从一般的一个流形 $\mathcal{M}$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的函数 f 上：

定义 4. 我们定义一个函数 $f:\mathcal{M}\rightarrow\mathbb{R}^m$ 在 $a\in\mathcal{M}$ 处是**可微的** (**differentiable**)，如果存在一个矩阵 $f'(a)$，以使得

$$\lim_{\xi\rightarrow 0}\frac{|f(a)+f'(a)\xi-f(\mathcal{R}_a(\xi))|}{|\xi|}=0$$

其中，对于 n 维流形 $\xi\in\mathbb{R}^n$，并且 $\mathcal{R}_a:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{R}$ 在 a 处的一个收回。若 f 是可微的，则 $f'(a)$ 被称为 f 在 a 处的**雅可比矩阵** (**Jacobian matrix**)，并且线性变换 $Df_a:\xi\mapsto f'(a)\xi$ 被称为 f 在 a 处的**导数** (**derivative**)。

对于同样是李群的流形，无论使用什么收回 $\mathcal{R}$，任意函数 $f:G\rightarrow\mathbb{R}^m$ 的导数都将同意。

第二部分　实践

下面我们将理论部分推导出的结果应用于在 GTSAM 中使用的几何对象。在上面，对于偏导数我们倾向于使用现代符号 $D_1 f$。下面 (因为这是早些时候写的) 我们使用更经典的符号

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

此外，对于李群，我们将滥用符号，并取

$$\left.\frac{\partial \varphi(g)}{\partial \xi}\right|_a$$

为映射 φ 在 $a \in G$ 处的雅可比矩阵 $\varphi'(\mathrm{a})$，其与前推 $D\varphi_a$ 相关。

7　SLAM 示例

让我们检查一个可视化 SLAM 示例。我们有 2D 测量值 z_{ij}，其中每个测量值由下式预测为

$$z_{ij} = h(T_i, p_j) = \pi(T_i^{-1} p_j)$$

其中 T_i 是第 i 个相机的 3D 位姿，p_j 是第 j 个点的位置，并且 $\pi : (x, y, z) \mapsto (x/z, y/z)$ 是来自示例 1 的相机投影函数。

8　BetweenFactor

BetweenFactor 是在 GTSAM 中的一个因子，广泛用于处理指示两个未知位姿 T_1 和 T_2 之间的相对位姿的测量值。让我们假设测量的相对位姿为 Z，则计算在 ***BetweenFactor*** 中的误差的代码首先计算预测的相对位姿 T_{12}，然后计算测量的相对位姿与预测的相对位姿之间的误差：

```
T12 = between(T1, T2);
return localCoordinates(Z, T12);
```

在这里，我们回顾一下，函数 ***between*** 在群论的符号中给出为

$$\varphi(g, h) = g^{-1} h$$

函数 ***localCoordinates*** 它本身也会调用 ***between***，并转换到规范坐标：

```
localCoordinates(Z,T12) = Logmap(between(Z, T12));
```

因此，给定两个元素 T_1 和 T_2，***BetweenFactor*** 评估 $g : G \times G \to \mathbb{R}^n$，

$$g(T_1, T_2; Z) = f^{-1}\left(\varphi(Z, \varphi(T_1, T_2)\right) = f^{-1}\left(Z^{-1}\left(T_1^{-1} T_2\right)\right)$$

其中 f^{-1} 是映射 $f : \xi \mapsto \exp \hat{\xi}$ 的逆。如果我们假设测量只有很小的误差，则 $Z \approx T_1^{-1} T_2$，并因此我们有 $Z^{-1} T_1^{-1} T_2 \approx e$，并且我们可以援引定理 9，也就是说，指数映射 $f : \xi \mapsto \exp \hat{\xi}$ 的导数在 $\xi = 0$ 时是特征式，同时也是它的逆。

最后，由于 ***between*** 的导数在其第二个参数中是特征式，因此 ***BetweenFactor*** 的误差的导数等同于在第 5.6 节中推导的 $\varphi(T_1, T_2)$ 的前推的导数。

9 Point3

一个叉积 $a \times b$ 可被写为一个矩阵乘法

$$a \times b = [a]_\times b$$

其中 $[a]_\times$ 是一个斜对称矩阵，被定义为

$$[x, y, z]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

我们还有

$$a^T [b]_\times = -([b]_\times a)^T = -(a \times b)^T$$

叉积的导数为

$$\frac{\partial(a \times b)}{\partial a} = [-b]_\times \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial(a \times b)}{\partial b} = [a]_\times \tag{9.2}$$

10 2D 旋转

10.1 在 GTSAM 中的 Rot2

一个旋转存储为 $(\cos\theta, \sin\theta)$。使用三角加和的规则应用一个增量旋转：

$$\cos\theta' = \cos\theta\cos\delta - \sin\theta\sin\delta$$

$$\sin\theta' = \sin\theta\cos\delta + \cos\theta\sin\delta$$

其中 δ 是一个增量旋转角。

10.2 作用的导数

在 $SO(2)$ 的情况下，向量空间是 $\mathbb{R}^2$，并且群作用 $f(R,p)$ 对应于旋转 2D 点 p

$$f(R,p) = Rp$$

根据定理 3, f 的雅可比矩阵给出为

$$f'(R,p) = \begin{bmatrix} RH(p) & R \end{bmatrix}$$

其中 $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ 是一个依赖于 p 的线性映射。在 $SO(2)$ 的情况下，我们可以通过等式 (如在方程 (3.3) 中所示) 寻找 $H(p)$：

$$[w]_+ p = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \omega = H(p)\omega$$

请注意

$$H(p) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R_{\pi/2}p$$

并由于 2D 旋转可交换，我们也有，其中 $q = Rp$：

$$f'(R,p) = \begin{bmatrix} R\left(R_{\pi/2}p\right) & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\pi/2}q & R \end{bmatrix}$$

10.3 映射的前推

因为 $Ad_R [\omega]_+ = [\omega]_+$，我们有**逆** (**inverse**) 的导数，

$$\frac{\partial R^T}{\partial \omega} = -Ad_R = -1$$

组合 (**compose**)，

$$\frac{\partial (R_1R_2)}{\partial \omega_1} = Ad_{R_2^T} = 1 \text{ and } \frac{\partial (R_1R_2)}{\partial \omega_2} = 1$$

以及**相差** (**between**)：

$$\frac{\partial \left(R_1^TR_2\right)}{\partial \omega_1} = -Ad_{R_2^TR_1} = -1 \text{ and } \frac{\partial \left(R_1^TR_2\right)}{\partial \omega_2} = 1$$

11 2D 刚性变换

11.1 作用的导数

在 2D 点上 $SE(2)$ 的作用通过使用齐次坐标将点嵌入 $\mathbb{R}^3$ 来完成

$$f(T,p)=\hat{q}=\begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}=T\hat{p}$$

为找到导数，我们将量 $\hat{\xi}\hat{p}$ 写为 3×3 矩阵 $H(p)$ 与 ξ 的乘积：

$$\hat{\xi}\hat{p}=\begin{bmatrix} [\omega]_+ & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [\omega]_+ p+v \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_2 & R_{\pi/2}p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}=H(p)\xi \tag{11.1}$$

因此，根据定理 3 我们有

$$\frac{\partial\left(T\hat{p}\right)}{\partial\xi}=TH(p)=\begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_2 & R_{\pi/2}p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R & RR_{\pi/2}p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R & R_{\pi/2}q \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11.2}$$

注意，仅查看方程 (11.1) 和 (11.2)，我们可以认出量 $[\omega]_+ p+v=v+\omega\left(R_{\pi/2}p\right)$ 为 p 在 $\mathbb{R}^2$ 中的速度，并且 $\begin{bmatrix} R & R_{\pi/2}q \end{bmatrix}$ 是作用于 $\mathbb{R}^2$ 上的导数。

逆作用 $g(T,p)=T^{-1}\hat{p}$ 的导数由定理 4 专门针对 $SE(2)$ 给出为：

$$\frac{\partial\left(T^{-1}\hat{p}\right)}{\partial\xi}=-H(T^{-1}p)=\begin{bmatrix} -I_2 & -R_{\pi/2}\left(T^{-1}p\right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11.2 映射的前推

我们可以仅用伴随映射定义所有的导数，在 $SE(2)$ 的情况下，在运动旋量坐标帧中，伴随映射是线性映射

$$Ad_T\xi=\begin{bmatrix} R & -R_{\pi/2}t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

并且我们有

$$\frac{\partial T^{^{-1}}}{\partial\xi} = -Ad_T$$

$$\frac{\partial\left(T_1T_2\right)}{\partial\xi_1} = Ad_{T_2^{-1}} \text{ and } \frac{\partial\left(T_1T_2\right)}{\partial\xi_2}=I_3$$

$$\frac{\partial\left(T_1^{-1}T_2\right)}{\partial\xi_1} = -Ad_{T_2^{-1}T_1}=-Ad_{between(T_2,T_1)} \text{ and } \frac{\partial\left(T_1^{-1}T_2\right)}{\partial\xi_2}=I_3$$

12　3D 旋转

12.1　作用的导数

在 $SO(3)$ 的情况下，向量空间是 $\mathbb{R}^3$，并且群作用 $f(R,p)$ 对应于旋转一个点

$$q = f(R,p) = Rp$$

为计算在定理 3 中使用的 $H(p)$，我们利用

$$[\omega]_\times p = \omega \times p = -p \times \omega = [-p]_\times \omega$$

所以 $H(p) \triangleq [-p]_\times$。因此，一个作用的最终的导数，在它的第一个参数中为

$$\frac{\partial (Rp)}{\partial \omega} = RH(p) = -R[p]_\times \tag{12.1}$$

同样，根据定理 4，逆作用的导数给出为

$$\frac{\partial \left(R^T p\right)}{\partial \omega} = -H(R^T p) = \left[R^T p\right]_\times$$

12.2　瞬时速度

对于从机体帧 b 到导航帧 n 的 3D 旋转 R_b^n，我们有空间角速度 ω_{nb}^n，其在导航帧中测量，

$$[\omega_{nb}^n]_\times \triangleq \dot{R}_b^n \left(R_b^n\right)^T = \dot{R}_b^n R_n^b$$

并且有机体的角速度 ω_{nb}^b，其在机体帧内测量：

$$\left[\omega_{nb}^b\right]_\times \triangleq \left(R_b^n\right)^T \dot{R}_b^n = R_n^b \dot{R}_b^n$$

这些量可用于推导一个点 p 的速度，并且根据我们选择表示 p 的帧，我们在空间或机体角速度之间进行选择：

$$v^n = [\omega_{nb}^n]_\times p^n = \omega_{nb}^n \times p^n$$
$$v^b = \left[\omega_{nb}^b\right]_\times p^b = \omega_{nb}^b \times p^b$$

我们可以通过共轭将这些斜对称矩阵从导航帧变换到机体帧，

$$\left[\omega_{nb}^b\right]_\times = R_n^b [\omega_{nb}^n]_\times R_b^n$$

但因为伴随表示满足

$$Ad_R [\omega]_\times \triangleq R[\omega]_\times R^T = [R\omega]_\times$$

我们甚至可以更容易地将空间角速度和机体角速度变换为 3 元向量：

$$\omega_{nb}^b = R_n^b \omega_{nb}^n$$

12.3 映射的前推

对于 $SO(3)$ 我们有 $Ad_R [\omega]_\times = [R\omega]_\times$，并且，根据角速度：$Ad_R\omega = R\omega$。因此，**逆** (**inverse**) 映射的雅可比矩阵为 (参见方程 (5.3))

$$\frac{\partial R^T}{\partial \omega} = -Ad_R = -R$$

对于**组合** (**compose**)，我们有 (方程 (5.4) 和 (5.5))：

$$\frac{\partial (R_1 R_2)}{\partial \omega_1} = R_2^T \text{ and } \frac{\partial (R_1 R_2)}{\partial \omega_2} = I_3$$

以及**相差** (**between**) (方程 (5.6)):

$$\frac{\partial \left(R_1^T R_2\right)}{\partial \omega_1} = -R_2^T R_1 = -between(R_2, R_1) \text{ and } \frac{\partial (R_1 R_2)}{\partial \omega_2} = I_3$$

12.4 Retractions

Absil [?, page 58] 讨论了对于 $SO(3)$，矩阵 $R[\omega]_\times$ 基于 QR 分解或极性分解的两种可能的收回，但它们是昂贵的。另一种收回基于 Cayley 变换 $\mathcal{C} : \mathfrak{so}(3) \to SO(3)$，一种从斜对称矩阵到旋转矩阵的映射：

$$Q = \mathcal{C}(\Omega) = (I - \Omega)(I + \Omega)^{-1}$$

有趣的是，逆 Cayley 变换 $\mathcal{C}^{-1} : SO(3) \to \mathfrak{so}(3)$ 具有相同的形式：

$$\Omega = \mathcal{C}^{-1}(Q) = (I - Q)(I + Q)^{-1}$$

然而，收回需要一个系数 $-\frac{1}{2}$，以使其与测地线局部对齐：

$$R' = \mathcal{R}_R(\omega) = R\mathcal{C}(-\frac{1}{2}[\omega]_\times)$$

注意，给定 $\omega = (x, y, z)$，它具有以下封闭形式表达式

$$\frac{1}{4 + x^2 + y^2 + z^2} \begin{bmatrix} 4 + x^2 - y^2 - z^2 & 2xy - 4z & 2xz + 4y \\ 2xy + 4z & 4 - x^2 + y^2 - z^2 & 2yz - 4x \\ 2xz - 4y & 2yz + 4x & 4 - x^2 - y^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4 + x^2 + y^2 + z^2} \left\{ 4(I + [\omega]_\times) + \begin{bmatrix} x^2 - y^2 - z^2 & 2xy & 2xz \\ 2xy & -x^2 + y^2 - z^2 & 2yz \\ 2xz & 2yz & -x^2 - y^2 + z^2 \end{bmatrix} \right\}$$

因此它可以看作是 $(I + [\omega]_\times)$ 的二阶修正。对数映射的相应近似值为：

$$[\omega]_\times = \mathcal{R}_R^{-1}(R') = -2\mathcal{C}^{-1}\left(R^T R'\right)$$

13 3D 刚性变换

13.1 作用的导数

在 3D 点上 $SE(3)$ 的作用通过使用齐次坐标将点嵌入 $\mathbb{R}^4$ 来完成

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix} = f(T, p) = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = T\hat{p}$$

量 $\hat{\xi}\hat{p}$ 对应于在 $\mathbb{R}^4$ 中的速度 (在局部 T 帧中)，并如方程 (3.3) 所示将其等同于 $H(p)\xi$ 以产生 4×6 矩阵 $H(p)$ [3]：

$$\hat{\xi}\hat{p} = \begin{bmatrix} [\omega]_\times & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \times p + v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-p]_\times & I_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} = H(p)\xi$$

请注意，速度如何类似于射影几何中无穷远的点：它们对应于自由向量指示一个方向和幅值的变化。根据定理 3，在齐次坐标中群作用的导数则为

$$\frac{\partial\left(T\hat{p}\right)}{\partial\xi} = TH(p) = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [-p]_\times & I_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\left[-p\right]_\times & R \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\left(T\hat{p}\right)}{\partial\hat{p}} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在 $\mathbb{R}^3$ 中它变为 $R\begin{bmatrix} -[p]_\times & I_3 \end{bmatrix}$。

逆作用 $T^{-1}p$ 的导数由定理 4 给出为：

$$\frac{\partial\left(T^{-1}\hat{p}\right)}{\partial\xi} = -H\left(T^{-1}\hat{p}\right) = \begin{bmatrix} [T^{-1}\hat{p}]_\times & -I_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\left(T^{-1}\hat{p}\right)}{\partial\hat{p}} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例 14. 让我们检查一个可视化 SLAM 示例。我们有 2D 测量值 z_{ij}，其中每个测量值由下式预测为

$$z_{ij} = h(T_i, p_j) = \pi(T_i^{-1}p_j) = \pi(q)$$

其中 T_i 是第 i 个相机的 3D 位姿，p_j 是第 j 个点的位置，$q = (x', y', z') = T^{-1}p$ 是相机坐标中的点，并且 $\pi : (x, y, z) \mapsto (x/z, y/z)$ 是来自示例 1 的相机投影函数。根据链式规则，我们则有

$$\frac{\partial h(T,p)}{\partial\xi} = \frac{\partial\pi(q)}{\partial q}\frac{\partial(T^{-1}p)}{\partial\xi} = \frac{1}{z'}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x'/z' \\ 0 & 1 & -y'/z' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [q]_\times & -I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi'(q)\,[q]_\times & -\pi'(q) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial h(T,p)}{\partial p} = \pi'(q)R^T$$

13.2 伴随的导数

考虑 $f : SE(3) \times \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ 被定义为 $f(T, \xi_b) = Ad_T\hat{\xi}_b$。导数用符号表示为 (参见第 3.4 节)：

$$Df_{(T,\xi_b)}(\xi, \delta\xi_b) = D_1 f_{(T,\xi_b)}(\xi) + D_2 f_{(T,\xi_b)}(\delta\xi_b)$$

首先，计算 $D_2 f_{(T,\xi_b)}(\xi_b)$ 很容易，因为它的矩阵是简单的 Ad_T：

$$f(T, \xi_b + \delta\xi_b) = Ad_T(\widehat{\xi_b + \delta\xi_b}) = Ad_T(\hat{\xi}_b) + Ad_T(\delta\hat{\xi}_b)$$

$$D_2 f_{(T,\xi_b)}(\xi_b) = Ad_T$$

[3] $H(p)$ 也可通过将 6 个生成元中的每个生成元的第 j 列乘以 $\hat{p}$ 的分量来获得

我们将用两种方法推导出 $D_1 f_{(T,\xi_b)}(\xi)$ 。首先，我们将定义 $g(T,\xi) \triangleq T\exp\hat{\xi}$。从第 3.4 节开始，

$$
\begin{aligned}
D_2 g_{(T,\xi)}(\xi) &= T\hat{\xi} \\
D_2 g^{-1}_{(T,\xi)}(\xi) &= -\hat{\xi}T^{-1}
\end{aligned}
$$

现在我们可以使用伴随表示 $Ad_g\hat{\xi} = g\hat{\xi}g^{-1}$ 的定义 (又称 g 共轭)，然后应用乘积规则并简化：

$$
\begin{aligned}
D_1 f_{(T,\xi_b)}(\xi) = D_1\left(Ad_{T\exp(\hat{\xi})}\hat{\xi}_b\right)(\xi) &= D_1\left(g\hat{\xi}_b g^{-1}\right)(\xi) \\
&= \left(D_2 g_{(T,\xi)}(\xi)\right)\hat{\xi}_b g^{-1}(T,0) + g(T,0)\hat{\xi}_b\left(D_2 g^{-1}_{(T,\xi)}(\xi)\right) \\
&= T\hat{\xi}\hat{\xi}_b T^{-1} - T\hat{\xi}_b\hat{\xi}T^{-1} \\
&= T\left(\hat{\xi}\hat{\xi}_b - \hat{\xi}_b\hat{\xi}\right)T^{-1} \\
&= Ad_T(ad_{\hat{\xi}}\hat{\xi}_b) \\
&= -Ad_T(ad_{\hat{\xi}_b}\hat{\xi}) \\
D_1 F_{(T,\xi_b)} &= -(Ad_T)(ad_{\hat{\xi}_b})
\end{aligned}
$$

其中 $ad_{\hat{\xi}}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是李代数的伴随映射。

第二，也许是推导 $D_1 f_{(T,\xi_b)}(\xi_b)$ 的更直观的方法，将使用以下事实：根据伴随 ad_ξ 的定义，在原点处的导数为 $D_1 Ad_I\hat{\xi}_b = ad_{\hat{\xi}_b}$。然后应用性质 $Ad_{AB} = Ad_A Ad_B$，

$$
D_1 Ad_T\hat{\xi}_b(\xi) = D_1 Ad_{T*I}\hat{\xi}_b(\xi) = Ad_T\left(D_1 Ad_I\hat{\xi}_b(\xi)\right) = Ad_T\left(ad_{\hat{\xi}}(\hat{\xi}_b)\right) = -Ad_T\left(ad_{\hat{\xi}_b}(\hat{\xi})\right)
$$

13.3 伴随转置的导数

伴随的转置，$Ad_T^T: \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$，作为改变在对偶空间中向量的参考帧的一种方法，它非常有用 (注意符号 * 标志我们现在在对偶空间中)。更具体地说，尽管 $Ad_T\hat{\xi}_b$ 从 T 帧转换运动旋量 (*twist*) ξ_b，而 $Ad_T^T\hat{\xi}_b^*$ 从 T 帧转换动力旋量 (*wrench*) ξ_b^*。对于 $Ad_T^T\hat{\xi}_b^*$ 的导数，很难应用在第 13.2 节中类似的推导，因为 Ad_T^T 不能自然地定义为共轭，所以我们要通过代数来进行计算。省略细节，但结果的形式模糊相似于 (但并不完全匹配于) $ad(Ad_T^T\hat{\xi}_b^*)$：

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\omega_T \\ v_T\end{bmatrix}^* &\triangleq Ad_T^T\hat{\xi}_b^* \\
D_1 Ad_T^T\hat{\xi}_b^*(\xi) &= \begin{bmatrix}\hat{\omega}_T & \hat{v}_T \\ \hat{v}_T & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

13.4 瞬时速度

对于从机体帧 b 到导航帧 n 的刚性 3D 变换 T_b^n，我们有瞬时空间运动旋量 ξ_{nb}^n，其在导航帧中测量，

$$
\hat{\xi}_{nb}^n \triangleq \dot{T}_b^n\left(T_b^n\right)^{-1}
$$

并有瞬时机体运动旋量 ξ_{nb}^b，其在机体帧中测量：

$$
\hat{\xi}_{nb}^b \triangleq \left(T_b^n\right)^T\dot{T}_b^n
$$

13.5 映射的前推

因为我们可以根据运动旋量坐标表达伴随表示，我们有

$$\begin{bmatrix} \omega' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [t]_\times R & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}$$

因此，与 $SO(3)$ 一样，我们现在可以简单地假定**逆** (**inverse**) 的导数为，

$$\frac{\partial T^{-1}}{\partial \xi} = -Ad_T = -\begin{bmatrix} R & 0 \\ [t]_\times R & R \end{bmatrix}$$

在其第一个参数中的**组合** (**compose**) 为，

$$\frac{\partial (T_1 T_2)}{\partial \xi_1} = Ad_{T_2^{-1}}$$

在其第二个参数中的组合为，

$$\frac{\partial (T_1 T_2)}{\partial \xi_2} = I_6$$

在其第一个参数中的**相差** (**between**) 为，

$$\frac{\partial \left(T_1^{-1} T_2\right)}{\partial \xi_1} = -Ad_{T_2^{-1} T_1} = \begin{bmatrix} -R_2^T R_1 & 0 \\ R_2^T [t_2 - t_1]_\times R_1 & -R_2^T R_1 \end{bmatrix}$$

并且在其第二个参数中的相差为，

$$\frac{\partial \left(T_1^{-1} T_2\right)}{\partial \xi_2} = I_6$$

13.6 收回

对于 $SE(3)$，与其使用真实的指数映射，不如设计其它收回，这在计算上更有效率。指数映射的一阶近似并不能完全解决这个问题，因为它产生了一个不在 $SE(3)$ 中的 4×4 矩阵：

$$\begin{aligned} T \exp \hat{\xi} &\approx T(I + \hat{\xi}) \\ &= T\left(I_4 + \begin{bmatrix} [\omega]_\times & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 + [\omega]_\times & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R\left(I_3 + [\omega]_\times\right) & t + Rv \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

然而，我们可以通过使用为 $SO(3)$ 定义的任意收回来将其变成一个收回，包括如下，使用指数映射 $Re^{[\omega]_\times}$：

$$\mathcal{R}_T\left(\begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{[\omega]_\times} & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Re^{[\omega]_\times} & t + Rv \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

类似地，对于一个二阶近似，我们有

$$
\begin{aligned}
T\exp\hat{\xi} &\approx T(I+\hat{\xi}+\frac{\hat{\xi}^2}{2}) \\
&= T\left(I_4+\left[\begin{array}{cc}[\omega]_\times & v\\ 0 & 0\end{array}\right]+\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc}[\omega]_\times & v\\ 0 & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}[\omega]_\times & v\\ 0 & 0\end{array}\right]\right) \\
&= \left[\begin{array}{cc}R & t\\ 0 & 1\end{array}\right]\left(\left[\begin{array}{cc}I_3+[\omega]_\times+\frac{1}{2}[\omega]_\times^2 & v+\frac{1}{2}[\omega]_\times v\\ 0 & 1\end{array}\right]\right) \\
&= \left[\begin{array}{cc}R\left(I_3+[\omega]_\times+\frac{1}{2}[\omega]_\times^2\right) & t+R\left[v+(\omega\times v)/2\right]\\ 0 & 1\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

以激励收回

$$
\mathcal{R}_T\left(\left[\begin{array}{c}\omega\\ v\end{array}\right]\right)=\left[\begin{array}{cc}R & t\\ 0 & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}e^{[\omega]_\times} & v+(\omega\times v)/2\\ 0 & 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}Re^{[\omega]_\times} & t+R\left[v+(\omega\times v)/2\right]\\ 0 & 1\end{array}\right]
$$

14 球面 S^2

14.1 定义

球面 S^2 是 $\mathbb{R}^3$ 中的所有单位向量的集合，即三维空间中的所有方向：

$$S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 | \, \|p\| = 1\}$$

在点 p 处的切空间 T_pS^2 由三元向量 $\hat{\xi}$ 组成，以使得 $\hat{\xi}$ 在点 p 处与 S^2 相切，即，

$$T_pS^2 \triangleq \left\{\hat{\xi} \in \mathbb{R}^3 | p^T\hat{\xi} = 0\right\}$$

虽然不是一个李群，但我们可以定义一个指数映射，这在 Ma et. al [?] 中给出，以及在 Anuj Srivastava 的 CVPR 教程中也给出：http://stat.fsu.edu/∼anuj/CVPR_Tutorial/Part2.pdf 。

$$\exp_p \hat{\xi} = \cos\left(\left\|\hat{\xi}\right\|\right) p + \sin\left(\left\|\hat{\xi}\right\|\right) \frac{\hat{\xi}}{\left\|\hat{\xi}\right\|}$$

后者也给出逆映射，即从 p 到 q 得到切向量 z：

$$z = \log_p q = \frac{\theta}{\sin\theta}\left(q - p\cos\theta\right) p$$

其中 $\theta = \cos^{-1}\left(p^Tq\right)$。

14.2 局部坐标

对于切空间 T_pS^2，我们可以找到一个基 B_p，其中 $B_p = [b_1|b_2]$，一个 3×2 矩阵，它通过以下两种方式之一找到

1. 分解 $p = QR$，其中 Q 为正交矩阵，并且 R 的形式为 $[1\,0\,0]^T$，并因此 $p = Q_1$。该基为 $B_p = [Q_2|Q_3]$，即 Q 的最后两列。
2. 形式 $b_1 = p \times a$，其中 a (一致地) 选择与 p 不平行，并且 $b_2 = p \times b_1$。

现在我们可以用 $\xi \in R^2$ 写出 $\hat{\xi} = B_p\xi$，在切平面基 B_p 中的 2D 坐标。

14.3 收回

指数映射使用 cos 和 sin，并且这超出我们优化的需要。假设我们有一个点 $p \in S^2$ 和一个 3 元向量 $\hat{\xi} \in T_pS^2$，Absil [?] 告诉我们，我们可以简单地把 $\hat{\xi}$ 加到 p 上，然后重新正规化以得到球面上的一个新点 q。这就是他所说的**收回 (retraction)** $\mathcal{R}_p(\hat{\xi})$，

$$q = \mathcal{R}_p(\hat{\xi}) = \frac{p + \hat{\xi}}{\|p + z\|} = \frac{p + \hat{\xi}}{\alpha}$$

其中 α 为 $p + \hat{\xi}$ 的范数。

我们也可以从局部坐标 $\xi \in \mathbb{R}^2$ 定义一个收回：

$$q = \mathcal{R}_p(\xi) = \frac{p + B_p\xi}{\|p + B_p\xi\|}$$

逆收回

如果 $\hat{\xi} = B_p\xi$，其中 $\xi \in R^2$ 是在切平面基 B_p 中的 2D 坐标，我们有

$$\xi = \frac{B_p^T q}{p^T q}$$

证明. 我们寻求

$$\alpha q = p + B_p\xi$$

如果我们将两边都乘以 B_p^T (在基 B_p 上投影)，我们获得

$$\alpha B_p^T q = B_p^T p + B_p^T B_p\xi$$

并且因为 $B_p^T p = 0$ 和 $B_p^T B_p = I$ ，我们很容易获得 ξ 作为标度投影 $B_p^T q$：

$$\xi = \alpha B_p^T q$$

为了恢复比例因子 α，我们在两侧都乘以 p^T，然后我们得到

$$\alpha p^T q = p^T p + p^T B_p\xi$$

因为 $p^T p = 1$ 和 $p^T B_p\xi = 0$，则我们获得 $\alpha = 1/(p^T q)$，从而完成了证明。 □

14.4 在 3D 方向上的旋转作用

旋转在球面上的一个点 $p \in S^2$ 显然会产生在其上的另一个点 $q = Rp \in S^2$，因为旋转保持范数。$f(R, p)$ 相对于 R 的导数可以通过下式找到

$$Rp + B_{Rp}\xi = R(I + [\omega]_\times)p = Rp + R\,[\omega]_\times\, p$$

$$B_{Rp}\xi = -R\,[p]_\times\,\omega$$

$$\xi = -B_{Rp}^T R\,[p]_\times\,\omega$$

而相对于 p，我们有

$$Rp + B_{Rp}\xi_q = R(p + B_p\xi_p)$$

$$\xi_q = B_{Rp}^T R B_p \xi_p$$

换句话说，雅可比矩阵给出为

$$f'(R, p) = \left[\begin{array}{cc} -B_{Rp}^T R\,[p]_\times & B_{Rp}^T R B_p \end{array}\right]$$

14.5 3D 方向之间的误差

我们想要定义两个方向 $p, q \in S^2$ 之间的距离度量 $e(p, q)$。一个明显的选择是

$$\theta = \cos^{-1}\left(p^T q\right)$$

这正是在球面上沿最短路径 (测地线) 的距离，也就是说，这是与指数相关的距离度量。其优点是，它在任何地方都有定义，但它涉及 $\cos^{-1}$。相对于在 q 中的一个变化的导数，通过 ξ，则为

$$\frac{\partial\theta(p, q)}{\partial\xi} = \frac{\partial\cos^{-1}\left(p^T q\right)}{\partial\xi} = \frac{p^T B_q}{\sqrt{1 - \left(p^T q\right)^2}}$$

其中对于 $p=q$，这也是未定义的。

一个更简单的度量由收回推导出来，但仅当 $q \approx p$ 时成立。它简单地将 q 投影到由 p 定义的局部坐标基 B_p 上，并取范数：

$$\theta(p,q) = \left\| B_p^T q \right\|$$

相对于在 q 中的一个变化的导数，通过 ξ，则为

$$\frac{\partial \theta(p,q)}{\partial \xi_q} = \frac{\partial}{\partial \xi_q}\sqrt{\left(B_p^T q\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(B_p^T q\right)^2}}\left(B_p^T q\right) B_p^T B_q = \frac{B_p^T q}{\theta(q;p)} B_p^T B_q$$

注意，对于 $\theta = 0$，这也是未定义的。

对于在概率因子中的使用，一个有符号的向量-值误差不会具有不连续性：

$$\theta(p,q) = B_p^T q$$

注意，这是一个标量的逆收回。相对于在 q 中的一个变化的导数，通过 ξ，通过下式找到：

$$\frac{\partial \theta(p,q)}{\partial \xi_q} = B_p^T \frac{\partial q}{\partial \xi_q} = B_p^T B_q$$

应用

我们可以利用上述方法来寻找一个相机和一个 IMU 之间的未知的旋转。如果我们测量两帧之间的旋转为 $c_1 Z c_2$，并且来自 IMU 的预测旋转为 $i_1 R i_2$，则我们可以预测

$$c_1 Z c_2 = iRc^T \cdot i_1 R i_2 \cdot iRc$$

并且增量旋转的轴线的关系为

$$p = iRc \cdot z$$

其中 p 为在 IMU 帧中的角速度轴，而 z 为两个相机之间的测量旋转轴。注意，这仅在旋转不为零时才有意义。因此，对于 IMU 和相机之间的未知旋转 iRc，给定一个初始估计 R，误差的导数为 (使用方程 (12.1))

$$\frac{\partial \theta(Rz;p)}{\partial \omega} = B_p^T\left(Rz\right) B_p^T B_{Rz} \frac{\partial\left(Rz\right)}{\partial \omega} = B_p^T\left(Rz\right) B_p^T R\left[z\right]_\times$$

这里，该 2×3 矩阵 $B_{Rz}^T\left[z\right]_\times$ 将在 R 中的变化转换为在 Rz 中的变化，并且该 1×2 矩阵 $B_p^T\left(Rz\right)$ 描述在误差度量上的下游效应。

15　本质矩阵流形

我们将本质矩阵参数化为一对 (R,t)，其中 $R \in SO(3)$，并且 $t \in S^2$ 是单位球面。则对极矩阵给出为

$$E = \left[t\right]_\times R$$

并且给定两个对应点 a 和 b 的对极误差为

$$e(R,t;a,b) = a^T E b$$

我们当然对相对于方向的导数感兴趣 (使用方程 (12.1))

$$\frac{\partial (a^T [t]_\times Rb)}{\partial \omega} = a^T [t]_\times \frac{\partial (Rb)}{\partial \omega} = -a^T [t]_\times R\left[b\right]_\times = -a^T E [b]_\times$$

并且相对于在方向 t 中的变化的导数为

$$\frac{\partial e(a^T[t]_\times Rb)}{\partial \xi} = a^T \frac{\partial (B\xi \times Rb)}{\partial v} = -a^T [Rb]_\times B$$

这里我们利用了收回可以被写为 $t + B\xi$ 的事实，其中 B 是一个局部基，并且我们利用了方程(9.1)：

$$\frac{\partial (a \times b)}{\partial a} = [-b]_\times$$

16 2D 线段 (Ocaml)

在 Line3.ml 中定义了一条无限直线 (a, b, c) 和一条 2D 线段 $((x1, y1), (x2, y2))$ 之间的误差。

17 Line3vd (Ocaml)

直线的一种表示形式是通过 2 个向量 (v, d)，其中 v 是方向，而向量 d 从原点指向直线上最近的点。

在这种表示中，将一条 3D 线从世界坐标帧变换到在 (R_w^c, t^w) 处的相机帧通过下式完成

$$v^c = R_w^c v^w$$

$$d^c = R_w^c \left(d^w + (t^w v^w) v^w - t^w\right)$$

18 Line3

对于 3D 直线，我们使用 C.J. Taylor 的参数化，使用 1 个旋转矩阵 R 和 2 个标量 a 和 b 进行。直线方向 v 只是旋转帧的 Z 轴，即 $v = R_3$，而向量 d 由 $d = aR_1 + bR_2$ 给出。

现在，我们将**不**使用我们对于旋转已使用的增量旋转方案：因为矩阵 R 从直线坐标帧变换到世界坐标帧，我们需要在右侧应用增量旋转：

$$R' = R(I + \Omega)$$

18.1 投影 Line3

将一条直线投影到 2D 可以很容易地完成，因为 v 和 d 也是投影线上两点的 2D 齐次坐标，并因此我们有

$$\begin{aligned} l &= v \times d \\ &= R_3 \times (aR_1 + bR_2) \\ &= a\left(R_3 \times R_1\right) + b\left(R_3 \times R_2\right) \\ &= aR_2 - bR_1 \end{aligned}$$

这可被写为一个点的一个旋转，

$$l = R \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

但是因为增量旋转现在是在右侧完成的，我们需要再次计算导数：

$$\frac{\partial(R(I+\Omega)x)}{\partial\omega} = \frac{\partial(R\Omega x)}{\partial\omega} = R\frac{\partial(\Omega x)}{\partial\omega} = R\left[-x\right]_\times \tag{18.1}$$

并因此，投影 l 相对于 3D 线的旋转矩阵 R 的导数为

$$\frac{\partial(l)}{\partial\omega} = R\left[\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\times = \begin{bmatrix} aR_3 & bR_3 & -(aR_1+bR_2) \end{bmatrix} \tag{18.2}$$

或相对于 a, b 标量的导数为：

$$\frac{\partial(l)}{\partial a} = R_2$$
$$\frac{\partial(l)}{\partial b} = -R_1$$

18.2 在直线上 $SE(3)$ 的作用

将 3D 线 $(R,(a,b))$ 从一个世界坐标帧变换为一个相机帧 $T_c^w = (R_c^w, t^w)$ 由下式完成

$$R' = R_w^c R$$

$$a' = a - R_1^T t^w$$

$$b' = b - R_2^T t^w$$

其中 R_1 和 R_2 是 R 的列，如前所述。

为找到导数，一条直线 $l^w = (R, a, b)$ 从世界坐标帧到相机坐标帧 T_c^w (在世界坐标帧中指定) 的变换可被写为一个函数 $f : SE(3) \times L \to L$，如上所述，即，

$$f(T_c^w, l^w) = \left((R_c^w)^T R, a - R_1^T t^w, b - R_2^T t^w\right).$$

让我们寻找 f 相对于第一个参数 T_c^w 的雅可比矩阵 J_1，它应该服从于

$$f(T_c^w e^{\hat{\xi}}, l^w) \approx f(T_c^w, l^w) + J_1\xi$$

请注意

$$T_c^w e^{\hat{\xi}} \approx \begin{bmatrix} R_c^w\left(I_3 + [\omega]_\times\right) & t^w + R_c^w v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

让我们分别为每一个 R, a, b 写出：

$$\left(R_c^w\left(I_3+[\omega]_\times\right)\right)^T R \approx (R_c^w)^T R(I + [J_{R\omega}\omega]_\times)$$
$$a - R_1^T\left(t^w + R_c^w v\right) \approx a - R_1^T t^w + J_{av} v$$
$$b - R_2^T\left(t^w + R_c^w v\right) \approx b - R_2^T t^w + J_{bv} v$$

简化后，我们得到：

$$-\left[\omega\right]_\times R' \approx R'\left[J_{R\omega}\omega\right]_\times$$
$$-R_1^T R_c^w \approx J_{av}$$
$$-R_2^T R_c^w \approx J_{bv}$$

这对于 J_{av} 和 J_{bv} 给出了表达式。可以进一步简化顶行：

$$\begin{aligned} -\left[\omega\right]_{\times} R' &\approx R' \left[J_{R\omega}\omega\right]_{\times} \\ -R'^{T} \left[\omega\right]_{\times} R' &\approx \left[J_{R\omega}\omega\right]_{\times} \\ -\left[R'^{T}\omega\right]_{\times} &\approx \left[J_{R\omega}\omega\right]_{\times} \\ -R'^{T} &\approx J_{R\omega} \end{aligned}$$

对于第二个参数 R，我们现在简单地有：

$$\begin{aligned} AB(I+\Omega') &= AB(I+\Omega) \\ \Omega' &= \Omega \\ \omega' &= \omega \end{aligned}$$

标量导数可以通过以下实现来找到

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} - R^{T} t^{w}$$

这里我们不关心第三行。因此

$$\frac{\partial((R(I+\Omega_2))^{T}\, t^{w})}{\partial\omega} = -\frac{\partial(\Omega_2 R^{T} t^{w})}{\partial\omega} = -\left[R^{T} t^{w}\right]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & R_3^{T} t^{w} & -R_2^{T} t^{w} \\ -R_3^{T} t^{w} & 0 & R_1^{T} t^{w} \\ \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

19 对齐 3D 扫描

下面是 Pose3.align 的基本解释，即使用 SVD 对齐两个点云。该灵感来自 CVOnline，但经过修改...

我们的模型是

$$p^{c} = R\left(p^{w} - t\right)$$

即 R 是从相机到世界的变换，并且 t 是相机在世界坐标中的位置。目标函数为

$$\frac{1}{2}\sum\left(p^{c} - R(p^{w} - t)\right)^{2} = \frac{1}{2}\sum\left(p^{c} - Rp^{w} + Rt\right)^{2} = \frac{1}{2}\sum\left(p^{c} - Rp^{w} - t'\right)^{2} \tag{19.1}$$

其中 $t' = -Rt$ 是在相机帧中原点的位置。相对于 t' 取导数并将其设置为零，我们有

$$\sum\left(p^{c} - Rp^{w} - t'\right) = 0$$

或者

$$t' = \frac{1}{n}\sum\left(p^{c} - Rp^{w}\right) = \bar{p}^{c} - R\bar{p}^{w} \tag{19.2}$$

这里 $\bar{p}^{c}$ 和 $\bar{p}^{w}$ 是点云的中心。将其代回方程 (19.1)，我们得到

$$\frac{1}{2}\sum\left(p^{c} - R(p^{w} - t)\right)^{2} = \frac{1}{2}\sum\left((p^{c} - \bar{p}^{c}) - R\left(p^{w} - \bar{p}^{w}\right)\right)^{2} = \frac{1}{2}\sum\left(\hat{p}^{c} - R\hat{p}^{w}\right)^{2}$$

现在，要最小化上述内容，只需将其最大化即可 (参见 CVOnline)

$$trace\left(R^{T} C\right)$$

其中 $C=\sum \hat{p}^c\left(\hat{p}^w\right)^T$ 是相关矩阵。直观地说，点云被旋转以与主轴对齐。这可以通过在 C 上的 SVD 分解来实现

$$C=USV^T$$

并设置

$$R=UV^T$$

显然，从方程 (19.2)，我们也则恢复最优 t 为

$$t=\bar{p}^w-R^T\bar{p}^c$$

附录

微分规则

Spivak [2] 还注意到一些按分量定义的多元导数规则，但它们在实践中不太有用：

- 因为 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是按照 m 的分量函数 f^i 定义的，则 f 在 a 处是可微的，当且仅当每一个 f^i 是，并且雅可比矩阵 F_a 是 $m\times n$ 矩阵，它们的第 i 行是 $\left(f^i\right)'(a)$：

$$F_a\triangleq f'(a)=\left[\begin{array}{c}\left(f^1\right)'(a)\\ \vdots\\ \left(f^m\right)'(a)\end{array}\right]$$

- 标量微分规则：如果 $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 在 a 处是可微的，则

$$(f+g)'(a)=F_a+G_a$$

$$(f\cdot g)'(a)=g(a)F_a+f(a)G_a$$

$$(f/g)'(a)=\frac{1}{g(a)^2}\left[g(a)F_a-f(a)G_a\right]$$

切空间与切丛

以下内容改编自在文献 [1] 中的附录 A。

一个流形 M 在一个点 $p\in M$ 处的**切空间** (**tangent space**) T_pM 是在 p 处的**切向量** (**tangent vectors**) 的向量空间。**切丛** (**tangent bundle**) TM 是所有切向量的集合

$$TM\triangleq\bigcup_{p\in M}T_pM$$

一个**向量场** (**vector field**) $X:M\to TM$ 为每一个点 p 分配一个单一的切向量 $x\in T_pM$。

如果 $F:M\to N$ 是从流形 M 到流形 N 的一个平滑映射，则我们可以定义 F 在 p 处的**切映射** (**tangent map**) 为线性映射 $F_{*p}:T_pM\to T_{F(p)}N$，它将在 T_pM 中在 p 处的切向量映射到在 $T_{F(p)}N$ 中在象 $F(p)$ 处的切向量。

同态

以下内容**可能**与 [**?**, page 45] 相关：假设 $\Phi : G \to H$ 是一个映射 (李群同态)。则存在一个唯一的线性映射 $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$

$$\phi(\hat{x}) \triangleq \lim_{t\to 0} \frac{d}{dt} \Phi\left(e^{t\hat{x}}\right)$$

以使得

1. $\Phi\left(e^{\hat{x}}\right) = e^{\phi(\hat{x})}$
2. $\phi\left(T\hat{x}T^{-1}\right) = \Phi(T)\phi(\hat{x})\Phi(T^{-1})$
3. $\phi\left([\hat{x}, \hat{y}]\right) = [\phi(\hat{x}), \phi(\hat{y})]$

换句话说，映射 ϕ 是 Φ 在特征处的导数。举例来说，假设 $\Phi(g) = g^{-1}$，则**在特征处**相应的导数为

$$\phi(\hat{x}) \triangleq \lim_{t\to 0} \frac{d}{dt} \left(e^{t\hat{x}}\right)^{-1} = \lim_{t\to 0} \frac{d}{dt} e^{-t\hat{x}} = -\hat{x} \lim_{t\to 0} e^{-t\hat{x}} = -\hat{x}$$

在一般情况下，只需对 $\mathfrak{g}$ 的一个基计算 ϕ 即可。

参考文献

[1] Richard M Murray, Zexiang Li, S Shankar Sastry, and S Shankara Sastry. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC press, 1994.

[2] Michael Spivak. *Calculus on manifolds*, volume 1. WA Benjamin New York, 1965.