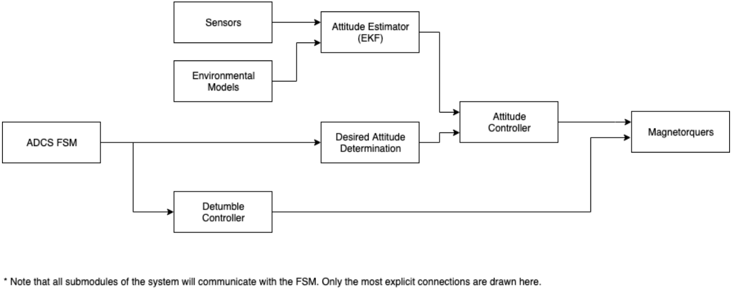
误差状态卡尔曼滤波器 (ESKF) 简介

Martin Brandt

January 22, 2020

概述

动机



控制器需要知道姿态，以便控制它，但没有办法直接测量它 $\rightarrow$ 我们必须估计它！

警告

这些幻灯片总结了**很多**东西，所以你可能不会理解所有的东西。但希望你能理解什么是卡尔曼滤波器，以及为什么我们使用误差状态卡尔曼滤波器的步骤背后的推理。这也应该是作为一个 ADC 的新人，希望进入 ESKF 领域的介绍和参考。

状态空间模型

我们想用向量的形式来表示一个任意的微分方程组。一般来说：
$\dot{x} = f(x, u)$

连续 LTI 状态空间模型

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{1}$$

离散 LTI 状态空间模型

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] &= Cx[k] + Du[k] \end{aligned} \tag{2}$$

质量-弹簧-阻尼器示例

你是如何习惯看它的

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = u \tag{3}$$

状态空间表示

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \tag{4}$$

Luenberger 观测器

假设我们有一个系统的状态空间模型。我们如何估计系统的状态？

逻辑初试 (开环观测器)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu \tag{5}$$

但由于模型的不确定性，我们的估计值将很快偏离实际值 → 包括一个基于测量的校正项 (闭环回路) → Luenberger 观测器

Luenberger 观测器

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}), \quad \hat{y} = C\hat{x} \tag{6}$$

但是我们如何决定增益 L？

卡尔曼滤波器

首先假设我们的过程模型和测量模型包括**正态分布**噪声：

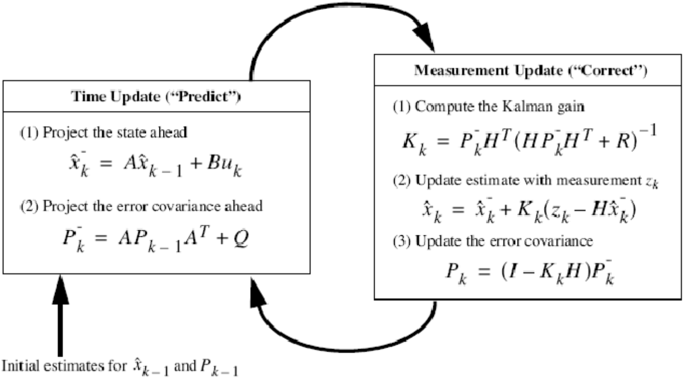
随机 LTI 系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + w \\ y &= Cx + Du + v \end{aligned} \tag{7}$$

卡尔曼滤波器是该系统的最优 Luenberger 观测器，在这个意义上，它使**均方误差**最小，即 $E\{(x-\hat{x})^2\}$.

卡尔曼滤波器方程式

对于离散情况 (这是在微控制器上实现的)，卡尔曼滤波方程式为:



这里的细节并不重要，但请注意 predict + correct 的步骤。

卫星运动学与动力学

让我们尝试将卡尔曼滤波器应用于我们的卫星：

卫星运动学

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega} \quad (8)$$

卫星动力学

$$\dot{\omega} = J^{-1}\left[\mathbf{L} - \omega \times (J\omega)\right] \quad (9)$$

问题：该系统是高度非线性的，因此卡尔曼滤波不能直接应用 (因为它假设一个线性模型)。

扩展卡尔曼滤波

解决这个问题最简单的方法是**在每个时间步线性化非线性动力学** $\rightarrow$ 扩展卡尔曼滤波 (EKF)。

问题：建模不确定性—动力学要求我们知道卫星的惯性矩阵，由于动力学高度非线性，EKF 可能会发散:(

$\rightarrow$ 放下动力学，只使用运动学：$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}$.
我们让 ω 成为 “控制输入”，我们使用 IMU 测量得到它。

误差状态卡尔曼滤波器

现在我们正接近一个有点实用的算法，但动力学仍然是高度非线性的，这意味着 EKF 将表现得很差 (容易发散)。

解决方法是研究**误差四元数**： $q = \delta q \otimes \hat{q}$

如果我们估计 $\delta q \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta} \\ 1 \end{bmatrix}$，忽略一些项我们得到：

误差四元数运动学

$$\delta\dot{\theta} = -S(\omega_m)\,\delta\theta - n_r \tag{10}$$

这是线性的，所以我们可以离散它，并使用好的老卡尔曼滤波器。这比 EKF 稳定得多，非常好，非常好。

误差状态卡尔曼滤波器

最后一个问题：IMU 测量值漂移… → 估计速率陀螺偏差 b 以及姿态四元数 q。我们假设偏差误差遵循以下动力学 (随机游走)：

偏差动力学

$$\delta\dot{b} = \dot{b} - \dot{\hat{b}} = n_w \tag{11}$$

新的带有偏差的误差四元数动力学是：

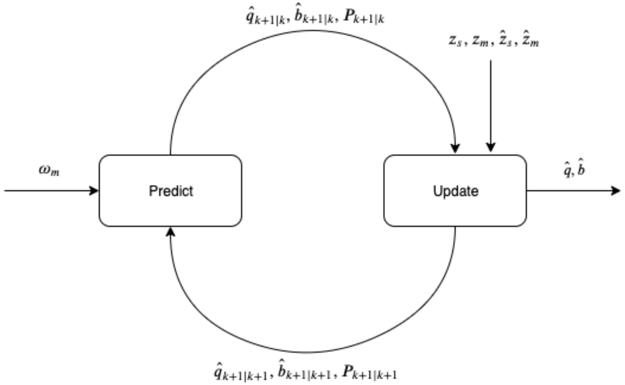
误差四元数运动学

$$\delta\dot{\theta} = -S\left(\omega_m - b\right)\delta\theta - \delta b - n_r \tag{12}$$

如果我们将 KF 方程式应用到这些方程中，我们最终 (经过大量的数学运算) 得到了我们目前使用的 ESKF 算法。我不想费心去写所有的方程式，如果需要的话你可以查一下。

误差状态卡尔曼滤波器

虽然这一切看起来相当复杂，但它实际上只是带有一些额外技巧的常规卡尔曼滤波器 (估计误差而不是真实状态，使用陀螺测量作为输入，还估计偏差)。作为 ESKF 的用户，你真正需要知道的是：



ESKF 预测方程参考

接下来的几张幻灯片将总结 ESKF 中的实际方程式，在试图理解代码时，主要应作为参考。我出于懒惰跳过了一些最讨厌的表达式，看提供的源码去找它们。

从我们非常简单的模型中预测 $\hat{b}_{k+1|k}$ 和 $\hat{\omega}_{k+1|k}$：

$$\hat{b}_{k+1|k} \leftarrow \hat{b}_{k|k} \tag{13}$$

$$\hat{\omega}_{k+1|k} \leftarrow \omega_m - \hat{b}_{k|k} \tag{14}$$

使用一阶四元数积分预测 $\hat{q}_{k+1|k}$：

$$\hat{q}_{k+1|k} \leftarrow \left(q\{\bar{\omega}\Delta t\} + \frac{\Delta t^2}{24} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{k|k} \times \omega_{k+1|k} \end{bmatrix} \right) \otimes \hat{q}_{k|k} \tag{15}$$

使用状态转移矩阵和过程噪声协方差矩阵预测协方差矩阵：

$$P_{k+1|k} \leftarrow \Phi P_{k|k} \Phi^\top + Q \tag{16}$$

ESKF 更新方程参考

首先计算当前姿态旋转矩阵 $A(\hat{q}_{k+1|k})$:

$$A(\hat{q}_{k+1|k}) \leftarrow \begin{bmatrix} 1-2(q_2^2+q_3^2) & 2(q_1q_2+q_3q_4) & 2(q_1q_3-q_2q_4) \\ 2(q_1q_2-q_3q_4) & 1-2(q_1^2+q_3^2) & 2(q_2q_3+q_1q_4) \\ 2(q_1q_3+q_2q_4) & 2(q_2q_3-q_1q_4) & 1-2(q_1^2+q_2^2) \end{bmatrix} \quad (17)$$

ESKF 更新方程参考

然后依次对每个测量执行以下步骤:

使用 $A(\hat{q}_{k+1|k})$ 将 $\hat{z}$ 从地心惯性系 (Earth Central Inertial) 旋转至机体坐标系:

$$\hat{z}_b \leftarrow A(\hat{q}_{k+1|k})\hat{z}_{ECI} \tag{18}$$

计算测量矩阵:

$$H_k \leftarrow \begin{bmatrix} S(\hat{z}_b) & 0_{3x3} \end{bmatrix} \tag{19}$$

计算卡尔曼增益:

$$K_k \leftarrow P_{k+1|k} H_k^\top S_k^{-1}, \quad S_k \leftarrow H_k P_{k+1|k} H_k^\top + R \tag{20}$$

计算校正:

$$\Delta x \leftarrow \Delta x + K(\varepsilon - H_k \Delta x), \quad \varepsilon \leftarrow z - \hat{z} \tag{21}$$

更新协方差估计:

$$P_{k+1|k+1} \leftarrow (I_6 - KH)\, P_{k+1|k}\, (I_6 - KH)^\top + KRK^\top \tag{22}$$

ESKF 更新方程参考

更新姿态四元数估计：

$$\hat{q}_{k+1|k+1} \leftarrow \hat{q}_{k+1|k} \otimes \delta\hat{q}, \quad \delta\hat{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Delta x_{1:3} \\ \sqrt{1 - \frac{1}{2}\Delta x_{1:3}^{\top}\frac{1}{2}\Delta x_{1:3}} \end{bmatrix} \tag{23}$$

更新偏差估计：

$$\hat{b}_{k+1|k+1} = \hat{b}_{k+1|k} + \Delta x_{4:6} \tag{24}$$

更新角速度估计：

$$\hat{\omega}_{k+1|k+1} = \omega_m - \hat{b}_{k+1|k+1} \tag{25}$$

周而复始！

ESKF code

Let's have a brief look at the code I guess?

Code: `https://git.orbitntnu.no/adcs/libeskf`
Tests: `https://git.orbitntnu.no/adcs/eskf_test`
Matlab tests: `https://://git.orbitntnu.no/Martimos/adcs_simulation/tree/eskf-c-test`

Thank you for coming to my TEDx talk

Read more in J. Sola, "Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter" and N. Trawny & S. Roumeliotis, "Indirect Kalman Filter for 3D Attitude Estimation"