用特征值快速求解 Fibonacci 数列

Shuyong Chen

2020 年 12 月 22 日

1 简介

本习题来自于[Eigenvectors and eigenvalues | Essence of linear algebra, chapter 14]。

取下面这个矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

首先，手算它的前几次幂，如 A^2, A^3 等等，你发现了什么规律？你能解释为什么会出现这种规律吗？这可能会让你好奇，是不是有一种计算这个矩阵任意次幂的有效方法。

这个矩阵的两个特征向量如下所示：

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

试试看你能否通过一下方式计算出 A^n：首先变换为特征基，在新基的表象下计算出 A^n，然后转换回我们的标准基，最终得到的公式能告诉你什么？

2 分析题目

首先，手算 A 的前几次幂：

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
A^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
A^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\
A^4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \\
A^5 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \\
A^6 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

矩阵右下角的数值和幂次的关系为：

幂次	1	2	3	4	5	6
数值	1	2	3	5	8	13

所以这是 Fibonacci 数列。

计算这个矩阵任意次幂的有效方法，就是将矩阵分解为 $A = X\Lambda X^{-1}$

形式，其中 Λ 为特征值构成的特征基，X 为由特征向量构成的基变换矩阵。则有

$$A^n = X\Lambda^n X^{-1}$$

3 解题

求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

的特征值和相应的特征向量。

解 特征方程为

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= 0 \\
\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\
\lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \\
\lambda^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\lambda + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4} \\
\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{5}{4}\right)^2 \\
\lambda - \frac{1}{2} &= \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \\
\lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

因此，A 的特征值为

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

并且有

$$\begin{aligned}
\lambda_1\lambda_2 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = -1 \\
\lambda_1 - \lambda_2 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}
\end{aligned}$$

构造特征值对角阵 Λ(特征基) 为

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

为求得 $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 对应的特征向量，必须求 $A - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}I$ 的零空间：

$$\begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

求解 $\left(A - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}I\right)x = 0$，我们有

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

因此，任何 $\overrightarrow{x_1}$ 的非零倍数均为 λ_1 对应的特征向量，且 $\overrightarrow{x_1}$ 为 λ_1 对应的特征空间的一组基。类似的，为求 λ_2 的特征向量，必须求解 $A - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}I$ 的零空间：

$$\begin{bmatrix} 0-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

我们有

$$\overrightarrow{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

构造基变换矩阵 X：

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

则 X^{-1} 为：

$$X^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}$$

最后，矩阵分解 $A = X\Lambda X^{-1}$ 为：

$$\begin{aligned} A &= X\Lambda X^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

则矩阵 A^n 结果为:

$$
\begin{aligned}
A^n &= X\Lambda^n X^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n \lambda_2 & -\lambda_1^n \\ -\lambda_1 \lambda_2^n & \lambda_2^n \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_1^n \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^n & -\lambda_1^n + \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^{n+1} & -\lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1} \end{bmatrix} \\
&\because \lambda_1 \lambda_2 = -1 \\
&= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

将 $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 代入上式可得最终数值结果。

4 小结

Fibonacci 数列用矩阵的形式表达：

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

前面已经分解出 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量。设：

$$\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{F}_{n-1} = \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{F}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}_1 &= A\overrightarrow{F}_0 \\ \overrightarrow{F}_2 &= A^2\overrightarrow{F}_0 \\ \vdots &= \vdots \\ \overrightarrow{F}_n &= A^n\overrightarrow{F}_0 \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

将 $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 代入上式可得

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \end{bmatrix}$$

这种方法将 Fibonacci 数列的一般式转化为一个线性运算 (矩阵幂运算)，从而通过矩阵的特征值可以快速算出最终结果。