投影矩阵

unknown

unknown

在讨论正交投影时，我们简要地讨论投影矩阵。特别地，我们讨论下面的定理。

Theorem 1 令 $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 W 的正交基。形成 $n \times k$ 矩阵

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_k \end{array}\right]$$

那么 $\mathrm{proj}_W \mathbf{v} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{v}$。

矩阵 $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$ 称为子空间 W 的投影矩阵。它不依赖于正交基的选择。

如果我们不从 W 的正交基开始呢？

Theorem 2 令 $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 W 的任意基。形成 $n \times k$ 矩阵

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_k \end{array}\right]$$

那么 W 的投影矩阵是 $\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T$。

要知道为什么这个公式是真的，我们需要一个引理。

Lemma 3 假设 $\mathbf{A}$ 是 $n \times k$ 矩阵，其列是线性独立的。那么 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 是可逆的。

为了解释这个引理为什么成立，考虑由 $\mathbf{A}$ 决定的变换 $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$。由于 $\mathbf{A}$ 的列是线性独立的，所以这个变换是一对一的。此外，$\mathbf{A}^T$ 的零空间与 $\mathbf{A}$ 的列空间正交，因此，$\mathbf{A}^T$ 在 $\mathbf{A}$ 的列空间上是一对一的，因此，$\mathbf{A}^T\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ 是一对一的。根据可逆矩阵定理，$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 是可逆的。

现在我们可以计算 $\mathbf{A}$ 列空间的投影矩阵 (注意，$W = \mathrm{Col}\,\mathbf{A}$)。矩阵 $\mathbf{A}$ 列空间的任何元素都是 $\mathbf{A}$ 列的线性组合，即，

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_k\mathbf{a}_k$$

如果我们令

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

那么

$$x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\ldots+x_k\mathbf{a}_k=\mathbf{A}\mathbf{x}$$

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的 $\mathbf{v}$，我们用 $\mathbf{x}_p$ 表示对应于 $\mathbf{v}$ 到 W 的投影的 $\mathbf{x}$。换句话说，令

$$\mathrm{proj}_W\mathbf{v}=\mathbf{A}\mathbf{x}_p$$

我们通过计算 $\mathbf{x}_p$ 求投影矩阵。

$\mathbf{v}$ 向 W 的投影的特点是

$$\mathbf{v}-\mathrm{proj}_W\mathbf{v}$$

与 W 中的每个向量 $\mathbf{w}$ 正交，也就是说，

$$\mathbf{w}\cdot(\mathbf{v}-\mathrm{proj}_W\mathbf{v})=0$$

对于 W 中的所有 $\mathbf{w}$ 成立。因为 $\mathbf{w}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ 对于某些 $\mathbf{x}$，我们有

$$\mathbf{A}\mathbf{x}\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{A}\mathbf{x}_p)=0$$

对于在 $\mathbb{R}^k$ 中所有的 $\mathbf{x}$ 成立。用矩阵的形式写这个点积可以得到

$$(\mathbf{A}\mathbf{x})^T(\mathbf{v}-\mathbf{A}\mathbf{x}_p)=0$$

相当于

$$\left(\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\right)(\mathbf{v}-\mathbf{A}\mathbf{x}_p)=0$$

转换回点积，我们有

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}^T(\mathbf{v}-\mathbf{A}\mathbf{x}_p)=0$$

换句话说，向量 $\mathbf{A}^T(\mathbf{v}-\mathbf{A}\mathbf{x}_p)$ 与 $\mathbb{R}^k$ 中的每个向量 $\mathbf{x}$ 正交。$\mathbb{R}^k$ 中唯一具有这个性质的向量是零向量，所以我们可以得出这样的结论

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{v}-\mathbf{A}\mathbf{x}_p)=\mathbf{0}$$

我们得到

$$\mathbf{A}^T\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}_p$$

从这个引理，我们知道 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 是可逆的，并且我们有

$$\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{v} = \mathbf{x}_p$$

由于 $\mathbf{A}\mathbf{x}_p$ 是所需的投影，我们有

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{v} = \mathrm{proj}_W\mathbf{v}$$

我们得出结论，W 的投影矩阵是

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T$$

注意，任何投影矩阵 $\mathbf{P}$ 都满足这两个性质

1. $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$，并且
2. $\mathbf{P}$ 是对称的。

任何满足这两个性质的矩阵都是 $\mathbb{R}^n$ 中的某个子空间的投影矩阵 (see Exercise 36 in Section 7.1 of Lay)。