四元数与动力学

Basile Graf
basile.graf@epfl.ch

February, 2007

摘要

本文简单介绍了四元数及其在动力学中的实际应用。详细介绍了刚体动力学。在附录中，给出了一些更为奇异的关系，这些关系允许编写更为复杂的模型，例如，在非惯性参考系中表示的带有惯性轮的卫星模型。众所周知，四元数相对于欧拉角的一个很好的优点是，除了通常的参数外，它允许完全手工记录相当复杂的动力学。

Contents

1 四元数

1.1 基本原则

关系方程(1)，以及关联性和分布性都是我们用来推导四元数的基本实际应用的。

$$\boxed{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1} \tag{1}$$

通过左乘和右乘，在上面的方程中，我们可以写出

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{i\ ijk = -jk = -i} \\ \multicolumn{2}{c}{ijk\ k = -ij = -k} \\ j\ jk = -k = ji & ij\ j = -i = kj \\ i\ ij = -j = ik & ji\ i = -j = -ki \end{array}$$

这表明乘积是非交换的($non\ commutative$)，并给出了基本的乘法规则：

$$\boxed{\begin{array}{cc} ij = k & ji = -k \\ jk = i & kj = -i \\ ki = j & ik = -j \end{array}} \tag{2}$$

1.2 符号和定义

四元数q 是四个参数的集合，一个实数q_0 和三个虚数$q_1 i, q_2 j, q_3 k$ 以及$q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$，这可以写为

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k.$$

然而，这个符号证明自己是非常不实用的。因此，我们将使用两种不同的符号：

- 四元数q 作为一个实数和一个向量虚数的有序对
  $q = (q_0, \vec{q})$ $\quad$ $\mathrm{Re}\{q\} = q_0$ $\quad$ $\vec{\mathrm{Im}}\{q\} = \vec{q} = (q_1\ q_2\ q_3)^T$
- 四个参数的列向量
  $\mathbf{q} = (q_0\ q_1\ q_2\ q_3)^T$

q 的共轭$\bar{q}$ 被定义为

$$\bar{q} = (q_0, -\vec{q})$$

并且它的范数(非负实值) 是

$$|q| = |\mathbf{q}| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

如下一节所述，两个四元数的乘积写成一对，将用符号$\circ$ 标记。

1.3 四元数乘积

根据方程(2)中给出的规则，我们可以写出q 和p 的乘积。

$$
\begin{aligned}
&(q_0+q_1i+q_2j+q_3k)(p_0+p_1i+p_2j+p_3k) \; = \\
&\begin{array}{ccccccccc}
 & p_0q_0 & + & q_0p_1\ i & + & q_0p_2\ j & + & q_0p_3\ k & \\
+ & q_1p_0\ i & + & q_1p_1\ ii & + & q_1p_2\ ij & + & q_1p_3\ ik & \\
+ & q_2p_0\ j & + & q_2p_1\ ji & + & q_2p_2\ jj & + & q_2p_3\ jk & \\
+ & q_3p_0\ k & + & q_3p_1\ ki & + & q_3p_2\ kj & + & q_3p_3\ kk & =
\end{array} \\
&\begin{array}{cccccccc}
 & p_0q_0 & - & q_1p_1 & - & q_2p_2 & - & q_3p_3 \\
+ & (q_1p_0 & + & q_0p_1 & + & q_2p_3 & - & q_3p_2)\ i \\
+ & (q_2p_0 & + & q_0p_2 & + & q_3p_1 & - & q_1p_3)\ j \\
+ & (q_3p_0 & + & q_0p_3 & + & q_1p_2 & - & q_2p_1)\ k
\end{array}
\end{aligned}
$$

$$q \circ p = (p_0q_0 - \vec{p}\cdot\vec{q}, q_0\vec{p} + p_0\vec{q} + \vec{q}\times\vec{p}). \tag{3}$$

从方程(3) 可以看出

$$q \circ \bar{q} = \bar{q} \circ q = (|q|^2, \vec{0}) = |q|^2 \tag{4}$$

并且如果q 是赋范的($|q| = 1$)

$$q \circ \bar{q} = \bar{q} \circ q = (1, \vec{0}) = Id. \tag{5}$$

在方程(3) 中我们也看到

$$\overline{q \circ p} = \bar{p} \circ \bar{q} \tag{6}$$

那就是

$$|q \circ p|^2 = (q \circ p) \circ (\overline{q \circ p}) = q \circ \underbrace{p \circ \bar{p}}_{|p|^2} \circ \bar{q} = |p|^2(q \circ \bar{q}) = |q|^2|p|^2$$

$$|q \circ p| = |q||p|. \tag{7}$$

1.4 四元数和空间旋转

首先，注意以下关系

$$
\begin{gathered}
(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u} \\
\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{2} \qquad \cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1+\cos\varphi}{2}.
\end{gathered}
$$

从现在起，q 通常表示一个涉及旋转的赋范四元数($|q| = 1$) 。现在让我们在四元数x 的虚部放置一个向量$\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ，看看它在下面的关系中会发生什么

$$x' = \bar{q} \circ x \circ q \qquad x = (0, \vec{x}) \qquad q = (q_0, \vec{q}).$$

使用方程(3)

$$x' = (\vec{q} \cdot \vec{x},\ q_0\vec{x} - \vec{q} \times \vec{x}) \circ q$$
$$= (\underbrace{(\vec{q} \cdot \vec{x})q_0 - (q_0\vec{x} - \vec{q} \times \vec{x}) \cdot \vec{q}}_{\mathrm{Re}\{x'\}},\ \underbrace{(\vec{q} \cdot \vec{x})\vec{q} + q_0(q_0\vec{x} - \vec{q} \times \vec{x}) + (q_0\vec{x} - \vec{q} \times \vec{x}) \times \vec{q}}_{\vec{\mathrm{Im}}\{x'\}})$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\{x'\} &= (\vec{q} \cdot \vec{x})q_0 - q_0(\vec{x} \cdot \vec{q}) - (\vec{q} \times \vec{x}) \cdot \vec{q} = 0 \\
&\Rightarrow\ x' = (0, \vec{x}'), \\
\vec{\mathrm{Im}}\{x'\} &= \vec{x}' \\
&= (\vec{q} \cdot \vec{x})\vec{q} + q_0^2\vec{x} - q_0(\vec{q} \times \vec{x}) + q_0(\vec{x} \times \vec{q}) - (\vec{q} \times \vec{x}) \times \vec{q} \\
&= (\vec{q} \cdot \vec{x})\vec{q} + q_0^2\vec{x} + 2q_0(\vec{x} \times \vec{q}) - (\vec{q} \times \vec{x}) \times \vec{q} \\
&= (\vec{q} \cdot \vec{x})\vec{q} + q_0^2\vec{x} + 2q_0(\vec{x} \times \vec{q}) - (\vec{q} \cdot \vec{q})\vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{q})\vec{q} \\
&= 2(\vec{q} \cdot \vec{x})\vec{q} + q_0^2\vec{x} + 2q_0(\vec{x} \times \vec{q}) - (\vec{q} \cdot \vec{q})\vec{x}.
\end{aligned}$$

一个有效的赋范四元数($|q| = \sqrt{(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)} = 1$) 将会

$$q = (q_0, \vec{q}) = (\cos\frac{\varphi}{2},\ \sin\frac{\varphi}{2}\vec{n}) \qquad |\vec{n}| = 1.$$

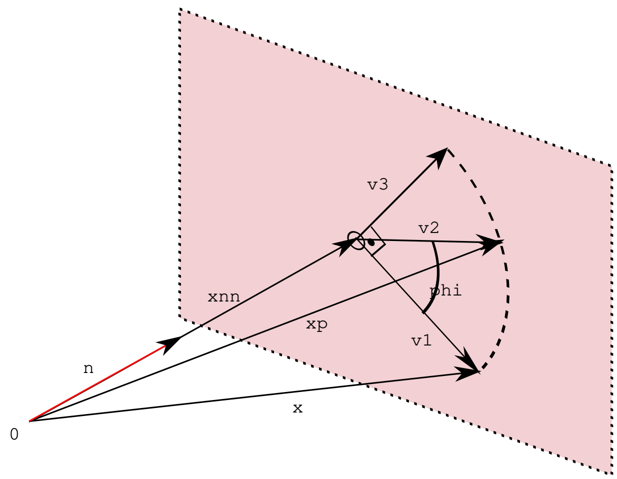
在这种情况下，$\vec{x}'$ 变成

$$\begin{aligned}
\vec{x}' &= 2\sin^2\frac{\varphi}{2}(\vec{n} \cdot \vec{x})\vec{n} + \cos^2\frac{\varphi}{2}\vec{x} + 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}(\vec{x} \times \vec{n}) - \sin^2\frac{\varphi}{2}\vec{x} \\
&= (1 - \cos\varphi)(\vec{n} \cdot \vec{x})\vec{n} + \cos\varphi\ \vec{x} + \sin\varphi\ (\vec{x} \times \vec{n}).
\end{aligned}$$

最后一个关系是用一个角度φ 绕一个赋范轴矢量$\vec{n}$ 的旋转公式，如下图所示:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_2 &= \cos\varphi\ \vec{v}_1 + \sin\varphi\ \vec{v}_3 \\
\vec{v}_1 &= \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n} \\
\vec{v}_3 &= \vec{v}_1 \times \vec{n} \\
&= (\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}) \times \vec{n} \\
&= (\vec{x} \times \vec{n}) - (\vec{x} \cdot \vec{n})\underbrace{\vec{n} \times \vec{n}}_{\vec{0}} \\
\Rightarrow\ \vec{v}_2 &= \cos\varphi\ (\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}) + \sin\varphi\ (\vec{x} \times \vec{n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{x}' &= (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n} + \vec{v}_2 \\
&= (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n} + \cos\varphi\ (\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}) + \sin\varphi\ (\vec{x} \times \vec{n}) \\
&= (1 - \cos\varphi)(\vec{n} \cdot \vec{x})\vec{n} + \cos\varphi\ \vec{x} + \sin\varphi\ (\vec{x} \times \vec{n}).
\end{aligned}$$



而且

$$x' = \bar{q} \circ x \circ q$$
$$q \circ x' \circ \bar{q} = \underbrace{q \circ \bar{q}}_{(1,\vec{0})} \circ x \circ \underbrace{q \circ \bar{q}}_{(1,\vec{0})}.$$

因此我们得到了旋转及其逆的关系

$$\boxed{x' = \bar{q} \circ x \circ q \qquad x = q \circ x' \circ \bar{q}}. \tag{8}$$

1.5 四元数和旋转速度

我们现在将推导旋转速度矢量和四元数时间导数之间的关系。$\vec{x}'$ 是任意恒定矢量，位于机体参考坐标系(*body (rotating) reference frame*)中，并且$\vec{x}$ 是在固定参考坐标系(*fixed reference frame*)中的同一个矢量。如前所述，两个矢量都可以与

$$x = q \circ x' \circ \bar{q} \qquad x' = \bar{q} \circ x \circ q.$$

将时间导数应用于$x = (0, \vec{x})$，以及$x' = (0, \vec{x}')$ 和$\dot{\vec{x}}' = \vec{0}$，我们得到

$$\dot{x} = \dot{q} \circ x' \circ \bar{q} + q \circ x' \circ \dot{\bar{q}}$$
$$\dot{x} = \dot{q} \circ \bar{q} \circ x \circ \underbrace{q \circ \bar{q}}_{Id} + \underbrace{q \circ \bar{q}}_{Id} \circ x \circ q \circ \dot{\bar{q}}$$

$$\dot{x} = \dot{q} \circ \bar{q} \circ x + x \circ q \circ \dot{\bar{q}} \tag{9}$$

并且从方程(3)

$$\dot{q} \circ \bar{q} = (\underbrace{\dot{q}_0 q_0 + \dot{\vec{q}} \cdot \vec{q}}_{\circledast}, -\dot{q}_0 \vec{q} + q_0 \dot{\vec{q}} - \dot{\vec{q}} \times \vec{q})$$

$$\circledast = q_0 \dot{q}_0 + q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2 + q_3 \dot{q}_3 = \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$$

因为$|\mathbf{q}| = 1$。那就是

$$\dot{q} \circ \bar{q} = (0, \vec{\nu}) \qquad \text{and similarly} \qquad \bar{q} \circ \dot{q} = (0, -\vec{\nu}). \tag{10}$$

1.5.1 固定参考系中的转速ω

从方程(9) 和(10) 并且使用(3) 我们有

$$\dot{x} = (0, \vec{\nu}) \circ x - x \circ (0, -\vec{\nu})$$
$$\dot{\vec{x}} = \vec{\nu} \times \vec{x} - \vec{x} \times \vec{\nu} = 2\vec{\nu} \times \vec{x}$$

并且从方程(7)

$$|\dot{\vec{x}}| = |2\vec{\nu}||\vec{x}| \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\nu} \perp \vec{x}$$

如果$\vec{x}$ 经历纯旋转，我们知道这个

$$\dot{\vec{x}} = \vec{\omega} \times \vec{x} \qquad \text{and} \qquad \vec{\omega} \perp \vec{x}$$

因此

$$\boxed{\omega = (0, \vec{\omega}) = 2(0, \vec{\nu}) = 2\dot{q} \circ \bar{q}}. \tag{11}$$

并且右乘以q

$$\omega \circ q = 2\dot{q} \circ \underbrace{\bar{q} \circ q}_{Id} \quad \Rightarrow \quad \omega \circ q = 2\dot{q}$$

$$\boxed{\dot{q} = \tfrac{1}{2}\omega \circ q}. \tag{12}$$

1.5.2 机体参考系中的转速ω'

$$\omega' = \bar{q} \circ \omega \circ q \qquad \text{with} \qquad \omega = 2\dot{q} \circ \bar{q}$$
$$\Rightarrow \quad \omega' = 2\bar{q} \circ \dot{q} \circ \underbrace{\bar{q} \circ q}_{Id}$$

$$\boxed{\omega' = 2\bar{q} \circ \dot{q}}. \tag{13}$$

并且左乘以q

$$q \circ \omega' = 2\underbrace{q \circ \bar{q}}_{Id} \circ \dot{q} = 2\dot{q}$$

$$\boxed{\dot{q} = \tfrac{1}{2} q \circ \omega'}. \tag{14}$$

1.5.3 矩阵乘积表示的ω

从

$$\omega = 2\dot{q} \circ \bar{q}$$

并且使用方程(3)

$$\begin{aligned} \vec{\omega} = \vec{\mathrm{Im}}\{2\dot{q} \circ \bar{q}\} &= 2(-\dot{q}_0\vec{q} + q_0\dot{\vec{q}} - \dot{\vec{q}} \times \vec{q}) \\ &= 2\underbrace{\begin{pmatrix} -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}}_{E} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{\omega} = 2E\dot{\mathbf{q}}.$$

更改符号并反转交叉积可以制造另一个标识

$$\vec{\omega} = -2(-q_0\dot{\vec{q}} + \dot{q}_0\vec{q} - \vec{q} \times \dot{\vec{q}})$$

$$\vec{\omega} = -2\dot{E}\mathbf{q}.$$

因此，固定参考系(*fixed reference*)中的转速矢量可以写为

$$\boxed{\vec{\omega} = 2E\dot{\mathbf{q}} = -2\dot{E}\mathbf{q}}. \tag{15}$$

并且从

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\omega \circ q \qquad\qquad \omega = (0, \vec{\omega}) \;\Rightarrow\; \omega_0 = 0$$

同样，我们也可以发现

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-\vec{\omega} \cdot \vec{q}) \\ (q_0\vec{\omega} + \vec{\omega} \times \vec{q}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}E^T\vec{\omega}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{q}} = \tfrac{1}{2}E^T\vec{\omega}}. \tag{16}$$

1.5.4 矩阵乘积表示的ω'

从

$$\omega' = 2\bar{q} \circ \dot{q}$$

并且使用方程(3)

$$\begin{aligned}\vec{\omega'} &= \vec{\mathrm{Im}}\{2\bar{q} \circ \dot{q}\} = 2(q_0\dot{\vec{q}} - \dot{q}_0\vec{q} - \vec{q} \times \dot{\vec{q}}) \\ &= 2 \underbrace{\begin{pmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix}}_{G} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\vec{\omega'} = 2G\dot{\mathbf{q}}.$$

改变符号并反转交叉积可以制造另一个标识

$$\vec{\omega'} = -2(\dot{q}_0\vec{q} - q_0\dot{\vec{q}} - \dot{\vec{q}} \times \vec{q})$$

$$\vec{\omega'} = -2\dot{G}\mathbf{q}.$$

所以机体参考系(*body reference*)中的旋转速度矢量可以写为

$$\boxed{\vec{\omega'} = 2G\dot{\mathbf{q}} = -2\dot{G}\mathbf{q}}. \tag{17}$$

并且从

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \circ \omega' \qquad \omega' = (0, \vec{\omega'}) \;\Rightarrow\; \omega'_0 = 0$$

同样，我们也可以发现

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-\vec{q} \cdot \vec{\omega'}) \\ (q_0\vec{\omega'} + \vec{q} \times \vec{\omega'}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} G^T \vec{\omega'}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{q}} = \tfrac{1}{2} G^T \vec{\omega'}}. \tag{18}$$

1.5.5 旋转矩阵R

我们已经有

$$\vec{\omega} = 2E\dot{\mathbf{q}} = -2\dot{E}\mathbf{q} \qquad\qquad \vec{\omega'} = 2G\dot{\mathbf{q}} = -2\dot{G}\mathbf{q}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} E^T \vec{\omega} \qquad\qquad \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} G^T \vec{\omega'}$$

所以我们可以写

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= 2E\dot{\mathbf{q}} \\ &= 2E(\frac{1}{2}E^T\vec{\omega}) \\ &= EE^T\vec{\omega} \\ &\Rightarrow \boxed{EE^T = Id}. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \vec{\omega'} &= 2G\dot{\mathbf{q}} \\ &= 2G(\frac{1}{2}G^T\vec{\omega'}) \\ &= GG^T\vec{\omega'} \\ &\Rightarrow \boxed{GG^T = Id}. \end{aligned}$$

并且两边混合

$$\vec{\omega'} = 2G\dot{\mathbf{q}} = 2G(\frac{1}{2}E^T\vec{\omega}) = GE^T\vec{\omega}$$
$$\vec{\omega} = 2E\dot{\mathbf{q}} = 2E(\frac{1}{2}G^T\vec{\omega'}) = EG^T\vec{\omega'}.$$

我们现在应该记得，$\vec{\omega}$ 是在固定参考系(*fixed reference frame*)中的矢量，并且$\vec{\omega}'$ 是同一个矢量位于机体参考系(*body reference frame*)，就是说$\vec{\omega} = R\vec{\omega'}$。通过与前两个结果的比较，我们发现

$$\boxed{R = EG^T} \qquad \text{and} \qquad \boxed{R^{-1} = R^T = GE^T}. \tag{19}$$

1.5.6 $E\mathbf{p}$ 和$G\mathbf{p}$

从在第1.5.3 和1.5.4 节制造的标识可以看出，E 和G 与任何四元数$\mathbf{p}$ 的乘积的一般含义是

$$E\mathbf{p} = \vec{\mathrm{Im}}\{p \circ \bar{q}\} \qquad\qquad G\mathbf{p} = \vec{\mathrm{Im}}\{\bar{q} \circ p\}. \tag{20}$$

并且从

$$q \circ \bar{q} = \bar{q} \circ q = (|q|, \vec{0}) = (1, \vec{0})$$

接下来是

$$\boxed{E\mathbf{q} = \vec{0}} \qquad\qquad \boxed{G\mathbf{q} = \vec{0}}.$$

1.5.7 最后一个关系

对于任何$\vec{v}$，由于关联性

$$
\begin{aligned}
\underbrace{(0,\vec{\omega}')}_{2\bar{q}\circ\dot{q}}\circ(0,\vec{v}) = (-\vec{\omega}'\cdot\vec{v},\vec{\omega}'\times\vec{v})& \\
&= 2\bar{q}\circ\dot{q}\circ v \\
&= 2(q_0\dot{q}_0+\vec{q}\cdot\dot{\vec{q}},\, q_0\dot{\vec{q}}-\dot{q}_0\vec{q}-\vec{q}\times\dot{\vec{q}})\circ v = 2\bar{q}\circ(\dot{q}_0 v_0-\dot{\vec{q}}\cdot\vec{v},\, \dot{q}_0\vec{v}+v_0\dot{\vec{q}}+\dot{\vec{q}}\times\vec{v}) \\
&\equiv 2\left(\begin{array}{cccc} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ \hline -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} \dot{q}_0 & -\dot{q}_1 & -\dot{q}_2 & -\dot{q}_3 \\ \dot{q}_1 & \dot{q}_0 & -\dot{q}_3 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_2 & \dot{q}_3 & \dot{q}_0 & -\dot{q}_1 \\ \dot{q}_3 & -\dot{q}_2 & \dot{q}_1 & \dot{q}_0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\right) \\
&= 2\begin{pmatrix} \mathbf{q}^T \\ G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} & \dot{G}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{\omega}'\cdot\vec{v} \\ \vec{\omega}'\times\vec{v} \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow\ 2G\dot{G}^T\vec{v} = \Omega'\vec{v} = \vec{\omega}'\times\vec{v}.
\end{aligned}
$$

与方程(17)相比，我们的结论是

$$
\boxed{\Omega' = 2G\dot{G}^T = -2\dot{G}G^T \qquad \text{and} \qquad \Omega'\vec{v} = \vec{\omega}'\times\vec{v}}. \tag{21}
$$

1.5.8 关系总结

下表总结了已开发的关系。q 始终是赋范四元数，即$q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=1$。

四元数表示法		矩阵表示法	
固定参考系	机体参考系	固定参考系	机体参考系
$x = q\circ x'\circ\bar{q}$	$x' = \bar{q}\circ x\circ q$	$\vec{x} = R\vec{x}'$ $R = EG^T$	$\vec{x}' = R^T\vec{x}$ $R^T = R^{-1} = GE^T$
$\omega = (0,\vec{\omega}) = 2\dot{q}\circ\bar{q}$	$\omega' = (0,\vec{\omega}') = 2\bar{q}\circ\dot{q}$	$\vec{\omega} = 2E\dot{\mathbf{q}} = -2\dot{E}\mathbf{q}$	$\vec{\omega}' = 2G\dot{\mathbf{q}} = -2\dot{G}\mathbf{q}$
$\dot{q} = \frac{1}{2}\omega\circ q$	$\dot{q} = \frac{1}{2}q\circ\omega'$	$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}E^T\vec{\omega}$	$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}G^T\vec{\omega}'$
		$EE^T = Id$	$GG^T = Id$
$q\circ\bar{q} = \bar{q}\circ q = (\lvert q\rvert,\vec{0})$		$E\mathbf{q} = \vec{0}$	$G\mathbf{q} = \vec{0}$
	$(0,\vec{\omega})\circ(0,\vec{v}) =$ $(-\vec{\omega}'\cdot\vec{v},\vec{\omega}'\times\vec{v})$		$\Omega' = 2G\dot{G}^T$ $= -2\dot{G}G^T$ $\Omega'\vec{v} = \vec{\omega}'\times\vec{v}$

$$E = \begin{pmatrix} -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

1.6 刚体旋转动力学

我们现在来看看一个自由旋转的刚体的动力学，这个刚体上应用了动量$\vec{T}'$ 。不讨论物体的平移(它可以与旋转动力学分离，而且相当容易)。我们还将考虑一个无势系统，这样拉格朗日方程只恢复到转动动能

$$L = E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\vec{\omega}'^T J \vec{\omega}'. \tag{22}$$

使用四元数$\mathbf{q}$ 作为坐标，且有约束$C = \mathbf{q}^T\mathbf{q} = 1$，拉格朗日动力学给出

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F_q} + \lambda\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}}. \tag{23}$$

$\mathbf{F_q}$ 是广义力的4-vector，稍后将用施加的扭矩表示。λ 是用来满足约束C 的拉格朗日乘子。

1.6.1 L 的导数

注意以下提醒

$$\frac{\partial A\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = A$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}^T\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}^T\mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = (A^T + A)\mathbf{x} \overset{\text{if } A=A^T}{=} 2A\mathbf{x}$$

(写成列向量)

$$(AB)^T = B^T A^T\ .$$

我们现在导出方程(23) 左边的每一项。首先，让我们用两种不同的方法重写L 。

$$L = \frac{1}{2}\vec{\omega}'^T J\vec{\omega}' = 2(G\dot{\mathbf{q}})^T J(G\dot{\mathbf{q}}) = 2(\dot{G}\mathbf{q})^T J(\dot{G}\mathbf{q})$$

并且在围绕J 分组

$$L = \frac{1}{2}\vec{\omega}'^T J\vec{\omega}' = 2\dot{\mathbf{q}}^T(G^T JG)\dot{\mathbf{q}} = 2\mathbf{q}^T(\dot{G}^T J\dot{G})\mathbf{q}.$$

因为J 是对称的，$(G^T JG)$ 和$(\dot{G}^T J\dot{G})$ 也是对称的。所以我们有

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 4\dot{G}^T J \dot{G}\mathbf{q} = 2\dot{G}^T J \underbrace{(2\dot{G}\mathbf{q})}_{-\vec{\omega}'} = -2\dot{G}^T J\vec{\omega}', \tag{24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 4G^T J G\dot{\mathbf{q}} = 2G^T J \underbrace{(2G\dot{\mathbf{q}})}_{\vec{\omega}'} = 2G^T J\vec{\omega}'$$

并且

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{d}{dt}(2G^T J\vec{\omega}') = 2\dot{G}^T J\vec{\omega}' + 2G^T J\dot{\vec{\omega}}'. \tag{25}$$

1.6.2 广义力

找到相对于坐标$\mathbf{c}$ 的广义力$\mathbf{F_c}$ 的一种方法就是识别它于方程

$$\delta W = \mathbf{F_c} \cdot \delta\mathbf{c}.$$

(一个简单的例子是粒子的纯平移$\delta\vec{x}$ ，在其上施加一个外力$\vec{F}$ 。因此，做功是$\delta W = \mathbf{F}_{\vec{x}} \cdot \delta\vec{x} = \vec{F} \cdot \delta\vec{x}$。因此，在这种情况下，广义力$\mathbf{F}_{\vec{x}}$ 是简单的$\vec{F}$ 。)

对于一个刚体，施加一个扭矩$\vec{T}'$，它围绕着轴$\vec{n}$ ，旋转一个角度$\delta\varphi$ ，做功可以写为

$$\delta W = (\vec{n} \cdot \vec{T}')\delta\varphi \qquad\qquad |\vec{n}| = 1. \tag{26}$$

这种微小的姿态变化可以在一边表示为坐标四元数q 的微小变化δq ，在另一边表示为从q 表示的当前姿态(即，组合)操作的旋转四元数q_δ 。那就是

$$q + \delta q = q \circ q_\delta$$
$$|q| = 1 \qquad |q_\delta| = 1 \qquad |\delta q| \ll 1.$$

我们不需要考虑变量δq 必须保持q的范数这一事实，因为在拉格朗日公式(Lagrange formulation)中引入一个约束，它将自动得到满足。

这一边我们可以写

$$q + \delta q = q \circ q_\delta$$
$$\underbrace{\bar{q} \circ q}_{(1,\vec{0})} + \bar{q} \circ \delta q = \underbrace{\underbrace{\bar{q} \circ q}_{(1,\vec{0})} \circ q_\delta}_{q_\delta}$$

$$\Rightarrow \quad q_\delta = (1, \vec{0}) + \bar{q} \circ \delta q. \tag{27}$$

在另一边

$$q_\delta = (\cos\frac{\delta\varphi}{2},\ \sin\frac{\delta\varphi}{2}\ \vec{n}).$$

考虑虚数部分

$$\vec{\mathrm{Im}}\{q_\delta\} = \vec{\mathrm{Im}}\{\bar{q}\circ\delta q\} = \sin\frac{\delta\varphi}{2}\ \vec{n} \approx \frac{\delta\varphi}{2}\ \vec{n}$$

与方程(26) 相比

$$\Rightarrow\ \delta W = 2\ \vec{\mathrm{Im}}\{\bar{q}\circ\delta q\}\cdot\vec{T}'$$

并且从方程(20)

$$\vec{\mathrm{Im}}\{\bar{q}\circ\delta q\} = G\delta\mathbf{q}$$
$$\Rightarrow\ \delta W = 2(G\delta\mathbf{q})\cdot\vec{T}' = 2\vec{T}'^T(G\delta\mathbf{q}) = 2(G^T\vec{T}')^T\delta\mathbf{q} = \underbrace{2(G^T\vec{T}')}_{\mathbf{F_q}}\cdot\delta\mathbf{q}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\mathbf{F_q} = 2G^T\vec{T}'}. \tag{28}$$

1.6.3 动力学

我们现在有一切可以写动力学的知识

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial\mathbf{q}} = \mathbf{F_q} + \lambda\frac{\partial C}{\partial\mathbf{q}}$$
$$4\dot{G}^T J\vec{\omega}' + 2G^T J\dot{\vec{\omega}}' = 2G^T\vec{T}' + \lambda\mathbf{q}.$$

左乘以G

$$\underbrace{4G\dot{G}^T}_{2\Omega'} J\vec{\omega}' + 2\underbrace{GG^T}_{Id} J\dot{\vec{\omega}}' = 2\underbrace{GG^T}_{Id}\vec{T}' + \lambda\underbrace{G\mathbf{q}}_{\vec{0}}$$
$$\Omega' J\vec{\omega}' + J\dot{\vec{\omega}}' = \vec{T}'$$
$$\vec{\omega}'\times J\vec{\omega}' + J\dot{\vec{\omega}}' = \vec{T}'$$
$$J\dot{\vec{\omega}}' = \vec{T}' - \vec{\omega}'\times J\vec{\omega}'.$$

最后一个关系就是旋转机体的欧拉运动方程。与方程(18) 一起，我们得到了完全动力学

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \dot{\vec{\omega}}' & = & J^{-1}\vec{T}' - J^{-1}(\vec{\omega}'\times J\vec{\omega}') \\ \dot{\mathbf{q}} & = & \frac{1}{2}G^T\vec{\omega}'. \end{array}} \tag{29}$$

A　导数和四元数

A.1　四元数的二次型导数

为了能够由非惯性四元数模型的$\mathbf{q}$ 分量导出拉格朗日方程，需要执行如下操作

$$\frac{\partial(\vec{v}^T R\vec{w})}{\partial \mathbf{q}} \quad , \qquad\qquad \frac{\partial(\vec{v}^T R^T\vec{w})}{\partial \mathbf{q}}$$

并且还有

$$\frac{\partial(\vec{u}^T RJR^T\vec{u})}{\partial \mathbf{q}}.$$

但是因为$R = EG^T$ 和

$$E = \begin{pmatrix} -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \qquad\qquad G = \begin{pmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

要导出的二次型矩阵在$\mathbf{q}$中不是常数，这意味着这些运算不再是平凡的。然而，由于$\mathbf{q}$ 分量中的R 依赖的特殊形式，高阶张量可以避免，如下所示。

A.1.1　"Single R" 二次型

通过计算二次型并取偏导数，我们得到(将它们放在列向量中)

$$\frac{\partial(\vec{v}^T R\vec{w})}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial(\vec{v}^T R\vec{w})}{\partial \mathbf{q}_i}\right)_i =$$

$$2\begin{pmatrix} w_1\,v_1\,q_0 + w_1\,v_2\,q_3 - w_1\,v_3\,q_2 - w_2\,v_1\,q_3 + w_2\,v_2\,q_0 + w_2\,v_3\,q_1 + w_3\,v_1\,q_2 - w_3\,v_2\,q_1 + w_3\,v_3\,q_0 \\ w_1\,v_1\,q_1 + w_1\,v_2\,q_2 + w_1\,v_3\,q_3 + w_2\,v_1\,q_2 - w_2\,v_2\,q_1 + w_2\,v_3\,q_0 + w_3\,v_1\,q_3 - w_3\,v_2\,q_0 - w_3\,v_3\,q_1 \\ -w_1\,v_1\,q_2 + w_1\,v_2\,q_1 - w_1\,v_3\,q_0 + w_2\,v_1\,q_1 + w_2\,v_2\,q_2 + w_2\,v_3\,q_3 + w_3\,v_1\,q_0 + w_3\,v_2\,q_3 - w_3\,v_3\,q_2 \\ -w_1\,v_1\,q_3 + w_1\,v_2\,q_0 + w_1\,v_3\,q_1 - w_2\,v_1\,q_0 - w_2\,v_2\,q_3 + w_2\,v_3\,q_2 + w_3\,v_1\,q_1 + w_3\,v_2\,q_2 + w_3\,v_3\,q_3 \end{pmatrix}.$$

得到的向量很难看，但可以看出它在$\mathbf{q}$ 中是线性的，因此可以用矩阵向量积重写：

$$2\underbrace{\begin{pmatrix} v_1\,w_1 + v_2\,w_2 + v_3\,w_3 & v_3\,w_2 - v_2\,w_3 & -v_3\,w_1 + v_1\,w_3 & v_2\,w_1 - v_1\,w_2 \\ v_3\,w_2 - v_2\,w_3 & v_1\,w_1 - v_2\,w_2 - v_3\,w_3 & v_1\,w_2 + v_2\,w_1 & v_1\,w_3 + v_3\,w_1 \\ -v_3\,w_1 + v_1\,w_3 & v_1\,w_2 + v_2\,w_1 & v_2\,w_2 - v_1\,w_1 - v_3\,w_3 & v_2\,w_3 + v_3\,w_2 \\ v_2\,w_1 - v_1\,w_2 & v_1\,w_3 + v_3\,w_1 & v_2\,w_3 + v_3\,w_2 & v_3\,w_3 - v_1\,w_1 - v_2\,w_2 \end{pmatrix}}_{\Delta[\vec{v},\vec{w}]}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

通过仔细检查$\Delta[\vec{v},\vec{w}]$，我们可以确定矩阵中允许紧凑符号的结构

$$\Delta[\vec{v},\vec{w}] = \begin{pmatrix} \vec{w}\cdot\vec{v} & (\vec{w}\times\vec{v})^T \\ \vec{w}\times\vec{v} & \vec{w}\vec{v}^T + \vec{v}\vec{w}^T - \vec{w}\cdot\vec{v}\ I_3 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

那就是

$$\frac{\partial(\vec{v}^T R\vec{w})}{\partial\mathbf{q}} = 2\Delta[\vec{v},\vec{w}]\mathbf{q} \tag{31}$$

并且因为$\vec{v}^T R^T \vec{w} = \vec{w}^T R\vec{v}$ ，我们还有

$$\frac{\partial(\vec{v}^T R^T \vec{w})}{\partial\mathbf{q}} = 2\Delta[\vec{w},\vec{v}]\mathbf{q} \tag{32}$$

A.1.2 “Double R” 二次型

我们现在对包含RJR^T的二次型的导数感兴趣，也就是说，与$\mathbf{q}$ 相关的矩阵R出现两次。J 是一个惯性矩阵，因此，$J = J^T$ 。这次，左边和右边的向量是一样的，命名为$\vec{u}$ 。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\left(\vec{u}^T RJR^T\vec{u}\right) &= \frac{1}{2}\left(\vec{u}^T\frac{\partial R}{\partial\mathbf{q}_i}JR^T\vec{u}\right)_i + \frac{1}{2}\left(\vec{u}^T RJ\frac{\partial R^T}{\partial\mathbf{q}_i}\vec{u}\right)_i \\ &= \left(\vec{u}^T\frac{\partial R}{\partial\mathbf{q}_i}JR^T\vec{u}\right)_i. \end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\left(\vec{u}^T RJR^T\vec{u}\right) = 2\Delta[\vec{u}, JR^T\vec{u}]\mathbf{q} \tag{33}$$

A.1.3 特性

通过观察方程(30)，可以注意到以下关系

$$\Delta[\vec{v}_1+\vec{v}_2,\vec{w}] = \Delta[\vec{v}_1,\vec{w}] + \Delta[\vec{v}_2,\vec{w}] \tag{34}$$

$$\Delta[\vec{v},\vec{w}_1+\vec{w}_2] = \Delta[\vec{v},\vec{w}_1] + \Delta[\vec{v},\vec{w}_2] \tag{35}$$

$$\Delta\left[\sum_{i=1}^{n}\vec{v}_i, \sum_{j=1}^{m}\vec{w}_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Delta[\vec{v}_i,\vec{w}_j] \tag{36}$$

$$\Delta[\alpha\vec{v},\beta\vec{w}] = \alpha\beta\Delta[\vec{v},\vec{w}] \tag{37}$$

A.2 R 的时间导数

首先要注意的是，通过标识，我们可以确认

$$G^T G = E^T E = I_4 - \mathbf{q}\mathbf{q}^T \tag{38}$$

其中I_4 是$\mathbb{R}^4$ 中的特征矩阵。也要记住

$$\Omega' = 2G\dot{G}^T = -2\dot{G}G^T \qquad \text{with} \qquad \Omega'\vec{v} = \vec{\omega}' \times \vec{v}$$

和

$$\vec{\omega}' = 2G\dot{\mathbf{q}} = -2\dot{G}\mathbf{q}.$$

现在观察

$$\begin{aligned}
\Omega' R^T &= 2G\dot{G}^T G E^T \\
&= -2\dot{G}G^T G E^T \\
&= -2\dot{G}(I_4 - \mathbf{q}\mathbf{q}^T)E^T \\
&= -2\dot{G}E^T - 2\dot{G}\mathbf{q}\ \underbrace{\mathbf{q}^T E^T}_{(E\mathbf{q})^T = \vec{0}} \\
&= -2\dot{G}E^T = -\dot{R}^T.
\end{aligned}$$

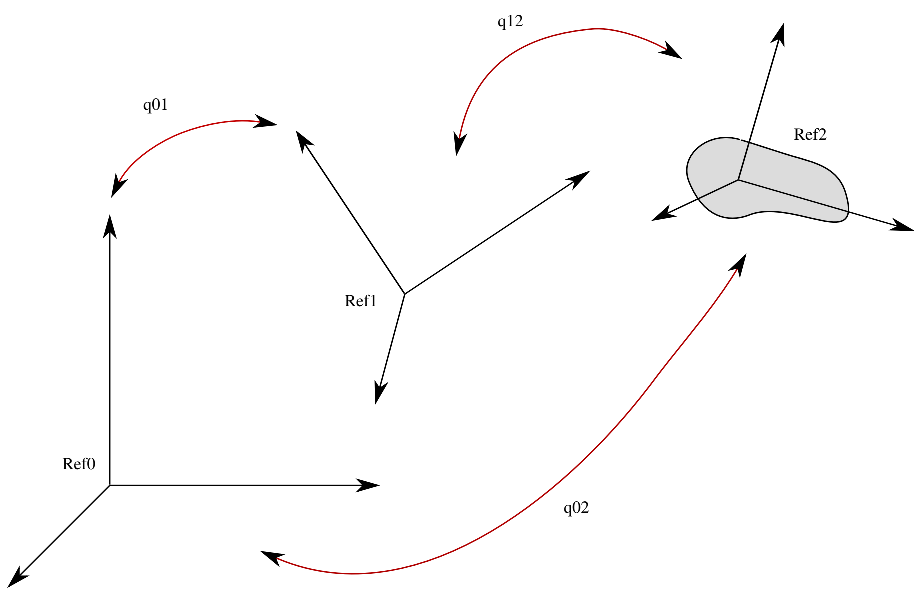
我们终于可以写为

$$\dot{R}^T = -\Omega' R^T \tag{39}$$

$$\dot{R} = -R\Omega'^T = R\Omega'. \tag{40}$$

B　速度组合

设有三个参考系，分别设计为0, 1 和2。参考系0 是惯性的，参考系1 是旋转的，而2 是机体的固定参考系。
同一个向量$\vec{x}$ 可以表示在这些参考系中的任何一个中；当用0表示时，我们将其标记为$\vec{x}^0$，当用1 表示时，它将标记为$\vec{x}^1$ 和$\vec{x}^2$ 于参考系2 中。我们还将写x^i 的四元数$(0, \vec{x}^i)$。
此外，还定义了三个四元数：q_{01} 表示参考系1 相对于参考系0 的相对姿态，q_{12} 表示参考系2 相对于参考系1 的相对姿态，而q_{02} 表示参考系2 相对于参考系0的相对姿态。



所以我们可以写为

$$x^0 = q_{01} \circ x^1 \circ \bar{q}_{01} \qquad x^1 = q_{12} \circ x^2 \circ \bar{q}_{12} \qquad x^0 = q_{02} \circ x^2 \circ \bar{q}_{02}$$

并且替换

$$x^0 = q_{01} \circ x^1 \circ \bar{q}_{01} = q_{01} \circ q_{12} \circ x^2 \circ \bar{q}_{12} \circ \bar{q}_{01} = (q_{01} \circ q_{12}) \circ x^2 \circ (\overline{q_{01} \circ q_{12}})$$

我们可以确定q_{02}

$$q_{02} = q_{01} \circ q_{12}. \tag{41}$$

注意$\omega_{ij}^j = (0, \vec{\omega}_{ij}^j)$ 在帧j 中表示的参考帧j 相对于帧i 的旋转速度，并记住$\omega_{ij}^j = 2\bar{q}_{ij} \circ \dot{q}_{ij}$，我们可以写为

$$
\begin{aligned}
\omega_{02}^2 &= 2\bar{q}_{02} \circ \dot{q}_{02} \\
&= 2(\bar{q}_{12} \circ \bar{q}_{01}) \circ (\dot{q}_{01} \circ q_{12} + q_{01} \circ \dot{q}_{12}) \\
&= 2\bar{q}_{12} \circ \bar{q}_{01} \circ \dot{q}_{01} \circ q_{12} + 2\bar{q}_{12} \circ \underbrace{\bar{q}_{01} \circ q_{01}}_{Id} \circ \dot{q}_{12} \\
&= \bar{q}_{12} \circ \underbrace{(2\bar{q}_{01} \circ \dot{q}_{01})}_{\omega_{01}^1} \circ q_{12} + \underbrace{2\bar{q}_{12} \circ \dot{q}_{12}}_{\omega_{12}^2} \\
&= \bar{q}_{12} \circ \omega_{01}^1 \circ q_{12} + \omega_{12}^2 \\
&= \omega_{01}^2 + \omega_{12}^2.
\end{aligned}
$$

也就是说，我们可以添加连续的转速，如果它们表示在同一个参考。
在Cubsat 的情况下，$\vec{\omega}_{02}^2$ 是惯性参考模型中以机体坐标表示的卫星的旋转速度$\vec{\omega}'$；我们将在这里注意到它$\vec{\omega}'_{Inertial}$。另一方面，$\vec{\omega}_{12}^2$ 是卫星在非惯性参考模型(即在轨道参考系中，ORF) 中的旋转速度$\vec{\omega}'$；我们会注意到$\vec{\omega}'_{NonInertial}$。
$\vec{\omega}_{01}^1$ 是ORF 中表示的ORF，即$\vec{\omega}_o$，而$\vec{\omega}_{01}^2$ 是相同的矢量，在机体参考系中变换。这个转换是由非惯性模型(在上面展开的是$\bar{q}_{12}$)中的R^T 执行的。
换句话说，我们可以将惯性和非惯性公式(模型)中的$\vec{\omega}'$ 链接在一起

$$\vec{\omega}'_{Inertial} = R_{NonInertial}^T \vec{\omega}_o + \vec{\omega}'_{NonInertial}. \tag{42}$$

这是用来计算非惯性模型动能的速度。

C 欧拉角到四元数

每个轴绕欧拉角的三个旋转可以被写为

$$R_\psi = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

它们结合在一起定义了旋转矩阵

$$R = R_\phi R_\theta R_\psi.$$

这三个旋转也可以表示为四元数旋转

$$\mathbf{q}_\phi = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\phi\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}\phi\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \\ 0 \\ \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}_\psi = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\psi\right) \\ 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{1}{2}\psi\right) \end{bmatrix}.$$

然后把这三个数相乘就可以得到四元数

$$
\mathbf{q}=\mathbf{q}_{\phi}\circ\mathbf{q}_{\theta}\circ\mathbf{q}_{\psi}=\begin{bmatrix}
\cos\left(\frac{1}{2}\,\phi\right)\cos\left(\frac{1}{2}\,\theta\right)\cos\left(\frac{1}{2}\,\psi\right)-\sin\left(\frac{1}{2}\,\phi\right)\sin\left(\frac{1}{2}\,\theta\right)\sin\left(\frac{1}{2}\,\psi\right)\\
\cos\left(\frac{1}{2}\,\psi\right)\cos\left(\frac{1}{2}\,\theta\right)\sin\left(\frac{1}{2}\,\phi\right)+\cos\left(\frac{1}{2}\,\phi\right)\sin\left(\frac{1}{2}\,\theta\right)\sin\left(\frac{1}{2}\,\psi\right)\\
\cos\left(\frac{1}{2}\,\psi\right)\cos\left(\frac{1}{2}\,\phi\right)\sin\left(\frac{1}{2}\,\theta\right)-\cos\left(\frac{1}{2}\,\theta\right)\sin\left(\frac{1}{2}\,\phi\right)\sin\left(\frac{1}{2}\,\psi\right)\\
\cos\left(\frac{1}{2}\,\phi\right)\cos\left(\frac{1}{2}\,\theta\right)\sin\left(\frac{1}{2}\,\psi\right)+\cos\left(\frac{1}{2}\,\psi\right)\sin\left(\frac{1}{2}\,\phi\right)\sin\left(\frac{1}{2}\,\theta\right)
\end{bmatrix}.
$$

注意：此结果取决于欧拉角和旋转轴的顺序和选择中使用的约定！参见文档[5]

References

[1] Quaternion, Finite Rotation and Euler Parameters
Arend L. Schwab
http://tam.cornell.edu/~als93/quaternion.pdf

[2] Quaternion based dynamics - Single Turbine Aircraft - Lagrange and Hamiltonian approaches
S. Gros
LA, EPFL.

[3] Classical Mechanics
Herbert Goldstein.

[4] Lagrangian Dynamics
Dare A. Wells
Schaum's Outline Series.

[5] *http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/aeroblks/index.html?/access/helpdesk/help/toolbox/aeroblks/euleranglestoquaternions.html*