

减少不确定性的不确定性

Matias Mattamala

Feb 23, 2021

第一部分 线性和非线性

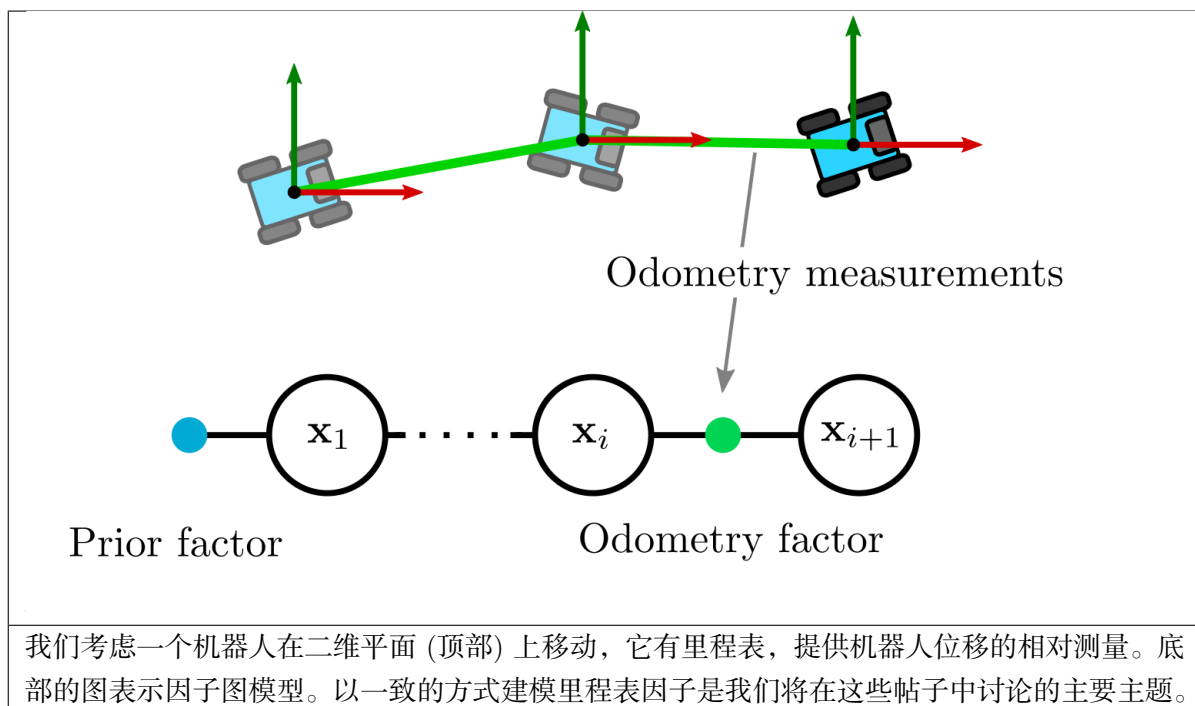
1 简介

在这系列文章中，我将回顾一些基于优化的状态估计方法的一般方面，以及如何从中输入和输出一致的数量和不确定性，即协方差矩阵。我们将采取 (希望是) 全面的游览，将涵盖**为什么我们所做的事情我们会这样做**的问题，旨在澄清一些**不确定的** (*uncertain*) 事情与协方差的工作。我们将看到大多数解释是如何通过明确定义和约定自然产生的，这些定义和约定有时是我们在使用这些工具时隐含的。

它们总结并扩展了我们在gtsam-users组中进行的一些有趣的讨论。我们希望，这样的空间将继续把我们大家共同关心的有关问题摆到桌面上。

2 一个简单的例子：位姿图

作为一个动机，我们将使用与其它 GTSAM 示例中使用的类似的位姿图：



我们考虑一个机器人在二维平面 (顶部) 上移动，它有里程表，提供机器人位移的相对测量。底部的图表示因子图模型。以一致的方式建模里程表因子是我们将这些帖子中讨论的主要主题。

首先，我们将考虑图 \mathbf{x}_i 中的变量对应于位置 $\mathbf{x}_i = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ 。这些变量由一个线性模型联系起来，线性模型由一个过渡矩阵 \mathbf{A}_i 和一个常数项 $\mathbf{b}_i = (b_x, b_y)$ 给出，它可以从某些传感器 (如车轮里程表) 获得。然后我们可以在变量 i 和 $i+1$ 之间建立以下关系：

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{b}_i \quad (1)$$

然而，我们知道事实上事情并不是这样的，我们通常会在传感器或执行器中产生由噪声产生的误差。解决这个问题最常用的方法是加入一些**零均值高斯噪声** (*zero-mean Gaussian noise*) $\eta_i \sim \text{Gaussian}(\mathbf{0}_{2 \times 1}, \Sigma_i)$ 到我们的模型中，它代表了这种不确定性：

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{b}_i + \eta_i \quad (2)$$

我们可以在这里识别典型的**运动** (*motion*) 或**过程模型** (*process model*)，例如，我们在卡尔曼滤波中使用的，描述我们的状态如何演变。我们说，我们在右边引入的噪声表明，我们的下一个状态 \mathbf{x}_{i+1} 将在 $\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{b}_i$ 附近，协方差矩阵 Σ_i 描述了我们期望的 \mathbf{x}_{i+1} 所在区域。

我们还可以注意到，通过一些操作，可以建立以下关系：

$$\eta_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i - \mathbf{b}_i \quad (3)$$

这是一个重要的表达式，因为我们知道左侧的表达式遵循高斯分布。但既然我们有一个等价项，右侧的项也必须如此。这里我们必须注意，作为高斯分布的既不是 \mathbf{x}_i ，也不是 \mathbf{x}_{i+1} ，而是**差分** (*difference*) $(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i - \mathbf{b}_i)$ 。这使得我们可以使用差值作为**里程计因子** (*odometry factor*)，该因子在我们的因子图中把 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{x}_{i+1} 概率地联系起来：

$$(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i - \mathbf{b}_i) \sim \text{Gaussian}(\mathbf{0}_{2 \times 1}, \Sigma_i) \quad (4)$$

3 解的分析

在假设我们的所有因子均为高斯且我们使用**最大后验概率** (*maximum-a-posteriori*, MAP) 估计的情况下，使用前面的里程计因子表达式求解因子图等效于求解以下最小二乘问题，幸运的是，这是我们的情况：

$$\mathcal{X}^* = \arg \min \sum_i \|\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{b}_i - \mathbf{x}_{i+1}\|_{\Sigma_i}^2 \quad (5)$$

请注意，虽然我们交换了因子中的项与 GTSAM 的文档保持一致，但这并不影响公式，因为该项是平方的。

以前的优化问题对于变量是线性的，因此可以在封闭形式下求解。通过对成本的平方进行微分，将其设置为零并进行一些操作，我们得到了所谓的正规方程，这与我们的后验分析特别相关：

$$\mathbf{A}^T \Sigma^{-1} \mathbf{A} \mathcal{X}^* = \mathbf{A}^T \Sigma^{-1} \mathbf{b} \quad (6)$$

其中向量 \mathcal{X}^* 叠加问题中的所有变量， \mathbf{A} 是一个矩阵，它叠加因子中的线性项， \mathbf{b} 对常数向量项也是如此。

这里要注意的第一点是，找到 \mathcal{X}^* 的解，需要对矩阵 $\mathbf{A}^T \Sigma^{-1} \mathbf{A}$ 进行转置，这在一般情况下是很难的，因为它在某些部分可能是巨大而密集的计算。然而，我们知道有一些聪明的方法来解决它，比如 GTSAM 已经实现的 iSAM 和 iSAM2，这将在 Frank Dellaert 和 Michael Kaess 的这篇综合性文章中介绍。

在求解正规方程时，左侧称为 Fisher 信息矩阵或 Hessian 矩阵。其逆函数近似于最小二乘解的协方差。

我们对这个矩阵的兴趣，被称为 **Fisher 信息矩阵 (Fisher information matrix)** 或 **Hessian 矩阵** (因为它近似于原始二次成本的 Hessian 矩阵)，它的逆矩阵 $\Sigma^* = (\mathbf{A}^T \Sigma^{-1} \mathbf{A})^{-1}$ 也近似于我们的解的协方差——在机器学习 (Bishop (2006), Chap. 4.4) 中称为拉普拉斯近似 (*Laplace approximation*)。这是一个非常重要的结果，因为通过求解因子图，我们不仅恢复了对解的均值的估计，而且还恢复了对不确定性的测量。在 GTSAM 中，`Marginals` 类实现了这个程序，教程中可以进一步探讨一个示例。

因此，我们可以说，在求解因子图之后，**解的概率分布 (probability distribution of the solution)** 由 $\text{Gaussian}(\mathcal{X}^*, \Sigma^*)$ 给出。

4 获取非线性

前面的位姿图非常简单，可能不适用于我们的大多数问题。对于大多数应用程序来说，将线性因子作为前一个因子是**不可能的梦想**。更现实的想法是，我们的状态 $i+1$ 将演变为状态 i 和测量值的非线性函数，这比以前假设的线性模型 $\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{b}_i$ 更普遍：

$$\mathbf{x}_{i+1} = f(\mathbf{x}_i) \quad (7)$$

尽管是非线性的，我们仍然可以说我们的映射包含了一些误差，这些误差嵌入到零均值高斯噪声中，我们可以像以前一样简单地增加：

$$\mathbf{x}_{i+1} = f(\mathbf{x}_i) + \eta_i \quad (8)$$

按照与之前类似的隔离噪声步骤，我们可以将问题重新表述为以下**非线性最小二乘** (*nonlinear least squares*, NLS) 问题：

$$\mathcal{X} = \arg \min \sum_i \|f(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_{i+1}\|_{\Sigma_i}^2 \quad (9)$$

因为系统对于变量不再是线性的，所以我们不能用封闭形式来求解它。我们需要使用非线性优化算法，如Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt或Dogleg。他们将试图通过线性化残差来近似我们的**线性梦想**，这些残差是关于在迭代 k 时由猜测 $\bar{\mathbf{x}}^k$ 给出的某些有效的**线性化或操作点**：

$$f(\mathbf{x}_i) \approx f(\bar{\mathbf{x}}^k) + \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}^k)\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_k + \mathbf{H}^k\mathbf{x}_i \quad (10)$$

其中 $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}^k)$ 表示 $f(\cdot)$ 在线性化点 $\bar{\mathbf{x}}^k$ 处评估的 Jacobian 矩阵。因此，问题变成：

$$\delta\mathcal{X}^k = \arg \min \sum_i \|\mathbf{H}^k\mathbf{x}_i + \mathbf{b}_i - \mathbf{x}_{i+1}\|_{\Sigma_i^k}^2 \quad (11)$$

这里需要注意的是，我们得到的不是全局解 \mathcal{X} ，而是一个很小的增量 $\delta\mathcal{X}^k$ ，这将使我们更接近于一些极小值，这取决于初始值。这个线性问题可以像我们以前做的那样用封闭形式来解决。事实上，正规方程现在变得类似于线性情况：

$$(\mathbf{H}^k)^T(\Sigma^k)^{-1}\mathbf{H}^k\delta\mathcal{X} = (\mathbf{H}^k)^T(\Sigma^k)^{-1}\mathbf{b} \quad (12)$$

其中 \mathbf{H}^k 是通过在迭代 k 时叠加 Jacobian 矩阵来建立的。该解 $\delta\mathcal{X}^k$ 将用于在迭代 k 时使用更新规则更新当前的解：

$$\mathcal{X}^{k+1} = \mathcal{X}^k + \delta\mathcal{X}^k \quad (13)$$

其中 \mathcal{X}^{k+1} 对应于迄今为止的最佳估计，并且可以用作下一次迭代的新的线性化点。

同样，左侧的表达式 $\Sigma^{k+1} = ((\mathbf{H}^k)^T(\Sigma^k)^{-1}\mathbf{H}^k)^{-1}$ 同样对应于 Fisher 信息矩阵或 Hessian 矩阵，**但与线性化点有关**。这一点非常重要，因为迄今为止的最佳解 \mathcal{X}^{k+1} 和与其相关的协方差 Σ^{k+1} 将只在这个线性化点中有效，并且随着非线性优化的每次迭代而变化。但是理解了这一点，我们仍然可以说在**迭代 $k+1$ 时，我们的最佳解将遵循一个分布 $Gaussian(\mathcal{X}^{k+1}, \Sigma^{k+1})$** 。

5 结论

在第一篇文章中，我们回顾了求解因子图并从中提取估计值的基本思想。我们展示了用正规方程组 (*normal equations*) 描述的线性问题不仅可以让我们找到解，而且还可以编码由 Fisher 信息矩阵的逆给出的协方差信息。此外，在非线性问题的背景下，我们展示了**这种协方差如何仅在线性化点附近有效**。

在我们的下一篇文章中，我们将回顾当我们不再估计向量变量而是估计其它对象时，如旋转矩阵和刚体变换——通常称为**流形 (manifold)**，这些思想是如何推广的。虽然这不仅在数学上，而且在符号上都会带来一些复杂性，但通过明确我们的约定，我们将能够始终如一地解决通常在机器人学和计算机视觉中发现的更广泛的问题。

第二部分 坐标系与流形

6 简介

在上一篇文章中，我们讨论了求解线性和非线性因子图以及从中提取不确定性估计的一些基本概念。我们回顾了 Fisher 信息矩阵对应于解的逆协方差矩阵的近似，并且在非线性情况下，解及其协方差估计**仅对当前线性化点有效**。

虽然非线性案例有效地让我们能够模拟一堆问题，但我们必须承认，当我们说这是我们模拟实际问题所需要的一切东西时，我们并不太诚实。到目前为止，我们的公式假设在我们的因子图中的变量是**向量 (vector)**，而机器人和计算机视觉至少不是这样。

第二部分将回顾**流形 (manifold)** 的概念以及参考系如何影响因子图的形成。我们在这里介绍的工具也将有助于以更一般的方式定义概率分布，以及将我们的估计框架扩展到更一般的问题。

7 获取非欧几里德空间

在机器人学中，我们不仅通过机器人的位置，而且还通过机器人的方向来估计机器人的状态。那么我们就说，它的**位姿 (pose)**，即位置和方向结合在一起，是定义其状态的关键。

表示位姿是一件棘手的事情。我们可以说“好吧，但是让我们把方向附加到位置向量上，然后像以前一样做所有的事情”，但这在实践中不起作用。当我们要组成两个位姿 $\mathbf{T}_1 = (x_1, y_1, \theta_1)$ 和 $\mathbf{T}_2 = (x_2, y_2, \theta_2)$ 时，问题就来了。在向量假设下，我们可以把下面的表达式写成两个位姿的组合：

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

这基本上是说，不管我们是从 \mathbf{T}_1 位姿还是 \mathbf{T}_2 位姿开始，我们最终都会以相同的位姿结束，因为在向量空间中，我们可以交换元素。**但这在现实中是行不通的，因为旋转和平移不能相互交换。**一个简单的例子是，如果你现在坐在办公桌前，站起来，旋转 180 度，向前走一步，这与站起来，向前走一步，然后旋转 180 度完全不同（除了如果你做后者，你会撞到你的办公桌）。

因此，我们需要一种不同的位姿表示法，让我们能够准确地描述我们在现实中观察到的东西。长话短说，我们必须将平面位姿表示为 3×3 矩阵称为**刚体变换 (rigid-body transformation)**：

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & x_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{t}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

这里 $\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}$ 是二维旋转矩阵，还有 $\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}$ 是平移向量。当我们现在使用 3×3 矩阵表示位姿的时候，它的**自由度**仍然是 3，因为它是 (x_1, y_1, θ_1) 的函数。

使用变换矩阵的工作是非常好的，因为我们现在可以使用矩阵操作来描述我们之前用文字解释的行为。如果我们从位姿 \mathbf{T}_1 开始，应用变换 \mathbf{T}_2 ：

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{t}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{t}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_1 \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

我们现在可以重写与以前一样的问题，但现在使用我们的变换矩阵：

$$\mathbf{T}_{i+1} = \mathbf{T}_i \Delta \mathbf{T}_i \quad (17)$$

在这里我们说下一个状态 \mathbf{T}_{i+1} 是由上一个状态 \mathbf{T}_i 加上一些由传感器给出的增量 $\Delta \mathbf{T}_i$ ，在这种情况下，传感器是里程表。请注意，由于我们现在正在处理变换矩阵， $\Delta \mathbf{T}_i$ 几乎是我们需要更精确地建模问题的所有内容，因为它将代表位置和方向的变化。

现在，在继续工作之前**有两件事我们必须讨论**，这是使一切保持一致的基础。我们现在将仔细审查。

7.1 参考系的重要性

虽然有些人 (包括我在内) 喜欢像以前一样编写流程，在**右侧**应用增量：

$$\mathbf{T}_{i+1} = \mathbf{T}_i \Delta \mathbf{T}_i \quad (18)$$

其他人则以不同的方式，在**左侧**应用：

$$\mathbf{T}_{i+1} = \Delta \mathbf{T}_i \mathbf{T}_i \quad (19)$$

正如我们已经讨论过的那样，这些表达方式并不等价，因为刚体变换不能相互交换。然而，在**特定的约定下，两者都有意义**。通过在符号中引入**参考系 (reference frame)** 的概念，我们现在将更加明确。我们将使用 Paul Furgale 在其博客文章“表示机器人位姿：好的、坏的和丑陋的”中提出的符号。

假设机器人在空间中的轨迹是用一个固定的坐标系来表示的；我们称之为**世界坐标系 (world frame)** W 。机器人本身在它的机体内部定义了一个坐标系，**机体坐标系 (body frame)** B 。

然后我们可以使用以下符号来定义机器人机体 B 在世界坐标系 W 中的位姿：

$$\mathbf{T}_{WB} \quad (20)$$

类似地，我们可以用以下符号来定义在机器人坐标系 B 中表示的**原点/世界 W 的位姿**：

$$\mathbf{T}_{BW} \quad (21)$$

根据这个公式，第一个表示是从一个**固定的世界坐标系**来描述，注意下标的左侧，而另一个则是从**机器人的角度**来描述。有趣的是，我们总是可以通过转置矩阵从一个得到另一个：

$$\mathbf{T}_{WB}^{-1} = \mathbf{T}_{BW} \quad (22)$$

因此，**逆向交换 (inverse swap)** 子索引，有效地改变了我们描述世界的**观点**。

选择使用哪一个并不重要。重要的是保持一致。事实上，通过在我们的约定中明确坐标系，我们总是可以检查我们是否犯了错误。假设我们使用的是第一个定义，而我们的里程表提供的是**相对**

于前一个机体状态的增量。我们的增量 $\Delta \mathbf{T}_i$ 将会是 $\Delta \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}}$ ，也就是说，它是一个变换，它描述了在前一个 i 时刻中表示的 $i+1$ 时刻机体的位姿。

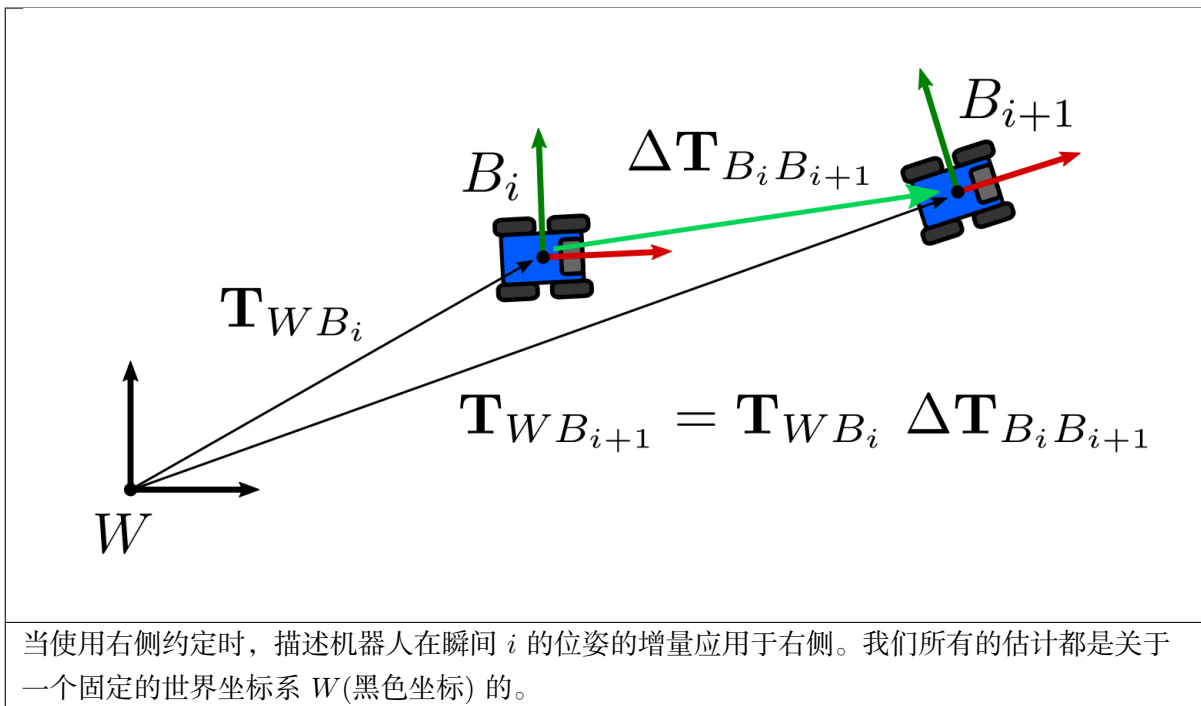
因此，在世界坐标系 W 中表示的时间 $i+1$ 处机体的实际位姿通过右侧增量的矩阵乘法给出：

$$\mathbf{T}_{W B_{i+1}} = \mathbf{T}_{W B_i} \Delta \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}} \quad (23)$$

我们知道这是正确的，因为内部索引相互抵消，有效地表示我们想要的坐标系中 $i+1$ 处的位姿：

$$\mathbf{T}_{W B_{i+1}} = \mathbf{T}_{W B_i} \Delta \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}} \quad (24)$$

因为我们应用右侧增量，所以我们将此称为**右侧约定 (right-hand convention)**。



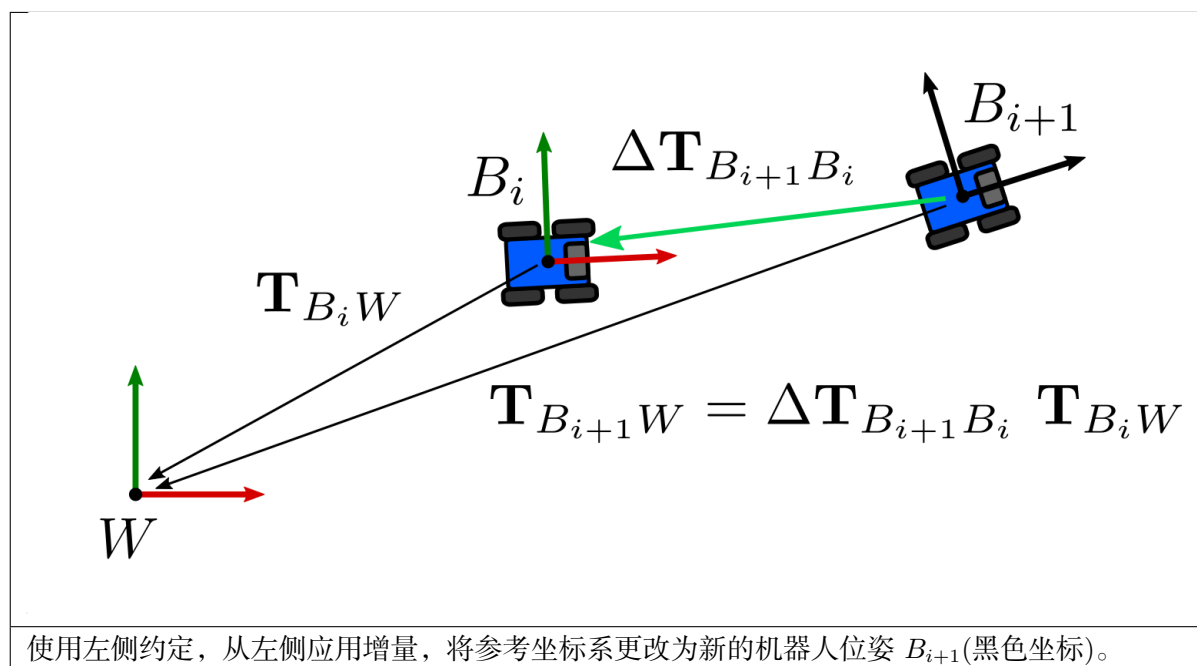
如果要将增量应用于 \mathbf{T}_{BW} ，则需要对测量值求逆：

$$\Delta \mathbf{T}_{B_{i+1} B_i} = \Delta \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}}^{-1} \quad (25)$$

所以我们可以**在左侧**应用变换：

$$\mathbf{T}_{B_{i+1} W} = \Delta \mathbf{T}_{B_{i+1} B_i} \mathbf{T}_{B_i W} \quad (26)$$

我们称之为**左侧约定 (left-hand convention)**。



在 GTSAM 中，我们使用右侧约定：我们假设变量相对于固定的坐标系 W 表示，因此增量应用于右侧。

记住这一点很重要，因为实现的所有操作都遵循这一点。事实上，3D 计算机视觉通常使用左侧约定，因为从左侧应用投影模型很简单：

$${}_I \mathbf{p} = \mathbf{K}_{IC} \mathbf{T}_{CW} {}_W \mathbf{P} \quad (27)$$

这里，我们明确了我们通常在教科书中可以找到的所有涉及到的变换的坐标系：用世界坐标系 W 表示的一个齐次点 ${}_W \mathbf{P}$ ，由在相机坐标系 C 中表示的世界 W 的外部校准矩阵 \mathbf{T}_{CW} (刚体变换) 进行变换，在相机坐标系 (未显示) 中产生向量 ${}_C \mathbf{P}$ 。这通过内部校准矩阵 \mathbf{K}_{IC} 投影到图像上，产生在图像坐标系 I 中表示的向量 ${}_I \mathbf{p}$ 。

由于在 GTSAM 中，外部校准是以另一种方式定义的，以符合右手约定，即 \mathbf{T}_{WC} ，因此 CalibratedCamera 的实现通过在进行投影之前正确求逆矩阵来处理它，正如我们所期望的：

$${}_I \mathbf{p} = \mathbf{K}_{IC} (\mathbf{T}_{WC})^{-1} {}_W \mathbf{P} \quad (28)$$

7.2 它们不仅仅是矩阵

我们需要讨论的第二个重要点是，虽然刚体变换很好，但是当我们尝试使用前面的方法在因子图中使用它时，给我们用来表示这个过程的新表达式带来了一些挑战：

$$\mathbf{T}_{WB_{i+1}} = \mathbf{T}_{WB_i} \Delta \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}} \quad (29)$$

首先，我们需要找出一种方法来包括噪声 (noise) 项 η_i ，我们之前用它来处理关于我们的测量 $\Delta \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}}$ 的不确定性，这也是我们用来生成我们在因子图中使用的高斯因子的技巧。现在，我们将说，噪声将由矩阵 $\mathbf{N}_i \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 给出，其中包含以下内容：

$$\mathbf{T}_{WB_{i+1}} = \mathbf{T}_{WB_i} \Delta \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}} \mathbf{N}_i \quad (30)$$

其次, 假设噪声 \mathbf{N}_i 是以某种方式定义的, 我们可以像以前一样隔离它。但是, 我们现在需要使用矩阵操作:

$$\mathbf{N}_i = (\mathbf{T}_{WB_i} \Delta \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}})^{-1} \mathbf{T}_{WB_{i+1}} \quad (31)$$

并且我们可以对其进行一些处理, 以使其更加清晰:

$$\mathbf{N}_i = (\Delta \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}})^{-1} (\mathbf{T}_{WB_i})^{-1} \mathbf{T}_{WB_{i+1}} \quad (32)$$

如果我们做之前做过的子索引取消技巧, 适当地交换由于求逆而产生的索引, 我们可以确认误差是在帧 B_{i+1} 中定义的, 并在帧 B_{i+1} 中表达。这看起来可能违反直觉, 但实际上描述了我们想要的: 我们的模型和测量之间的不匹配程度, 以表达帧 B_{i+1} 处的位姿, 理想情况下应该是零。

然而, 误差仍然是一个矩阵, 这是不可能将其作为一个因子纳入到我们迄今为止构建的框架中。我们不能像以前那样计算向量残差 (*vector residual*), 也不能完全确定矩阵 \mathbf{N}_i 遵循某种高斯分布。

我们需要定义一些在 GTSAM 中使用的重要概念, 以便更好地理解对象是如何被操纵的。

7.3 有些对象是群

首先, GTSAM 中使用的一些对象是群 (group)。刚体变换 (在 GTSAM 中的 `Pose3` 和 `Pose2`)、旋转矩阵 (`Rot2` 和 `Rot3`) 和四元数, 当然还有向量空间 (`Point2` 和 `Point3`) 具有一些基本操作, 允许我们对它们进行操作。这些概念在实现层面上已经在以前的文章中讨论过:

1. **组合 (Composition)**: 如何从同一流形组合 2 个具有关联性属性的对象。它类似于向量的加法 (*addition*) 操作。
2. **幺元 (Identity)**: 在组合/之间 (*composition/between*) 下的幺元算子。
3. **求逆 (Inverse)**: 一个元素, 当与它的逆元素组合操作时, 就成为幺元。

上面的 3 个操作允许我们定义之间 (*between*) 操作, 它计算来自同一群的 2 个对象之间的差异, 类似于减法 (*subtraction*) 操作。

由于对每一类对象的操作可以使用不同的方式定义 (例如, 旋转矩阵的组合与四元数或向量的组合是不同的), 一些作者定义了特殊的算子来表示组合/之间 (*composition/between*) 操作。一些例子是盒子加号 (*box-plus*) 田用于组合 (*composition*) 和盒子减号 (*box-minus*) 日用于之间 (*between*) 操作, 这由 Hertzberg 等人、Blanco-Claraco、Bloesch 等人, 还有 Kindr library 所做的工作。

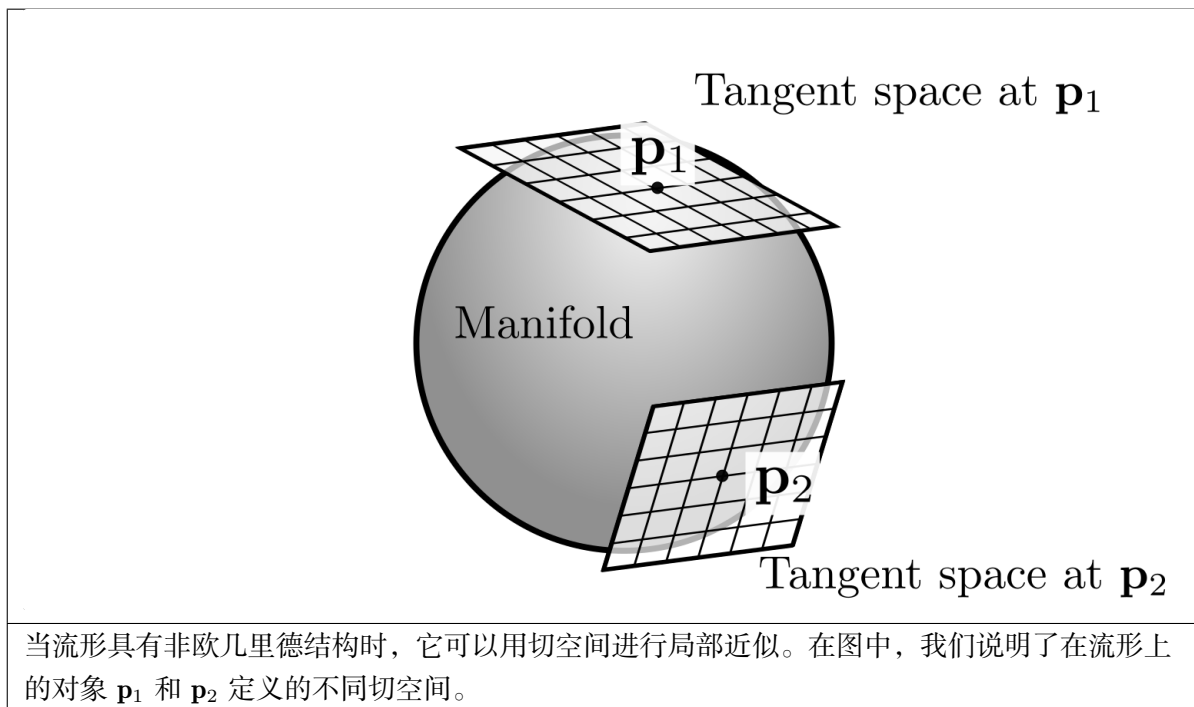
但是, 组合可以从左侧 (*left*) 或右侧 (*right*) 定义, 因为组合是结合的 (*associative*) 但不是分配的 (*distributive*)。这与我们之前在讨论参考系以及如何使用左侧 (*left*) 或右侧 (*right*) 约定增加小的增量时所描述的问题相同, 因为这两者都是有效的, 取决于我们或其他作者的决定。虽然我们可以清楚自己的决定, 但重要的是要知道每个作者的定义, 因为有时没有明确说明。例如, Solà 等人通过分别使用左侧 (*left*) 约定或右侧 (*right*) 约定, 定义左结合 \oplus 和右结合 \oplus 的组合, 明确了两者的区别, 我们需要注意识别对方的选择。

我们再次回顾, 在 GTSAM 和本文的其余部分中, 我们使用右侧约定 (*right convention*), 双关语¹, 因为我们表示我们的位姿是相对于固定世界坐标系 W 的, 并且增量是相对于机体坐标系 B 定义的。

¹ 译注: *right convention*, 有正确的约定之意。

7.4 有些对象是流形

另外，刚体变换、旋转矩阵、四元数甚至向量都是**可微流形** (differentiable manifold)。这意味着，即使它们在全局尺度上不表现为欧几里德空间，它们也可以通过使用称为**切空间** (tangent spaces) 的局部向量空间进行**局部近似** (locally approximated)。从流形的角度分析所有这些对象的主要优点是，我们可以根据适用于所有对象的共同原则构建通用算法。



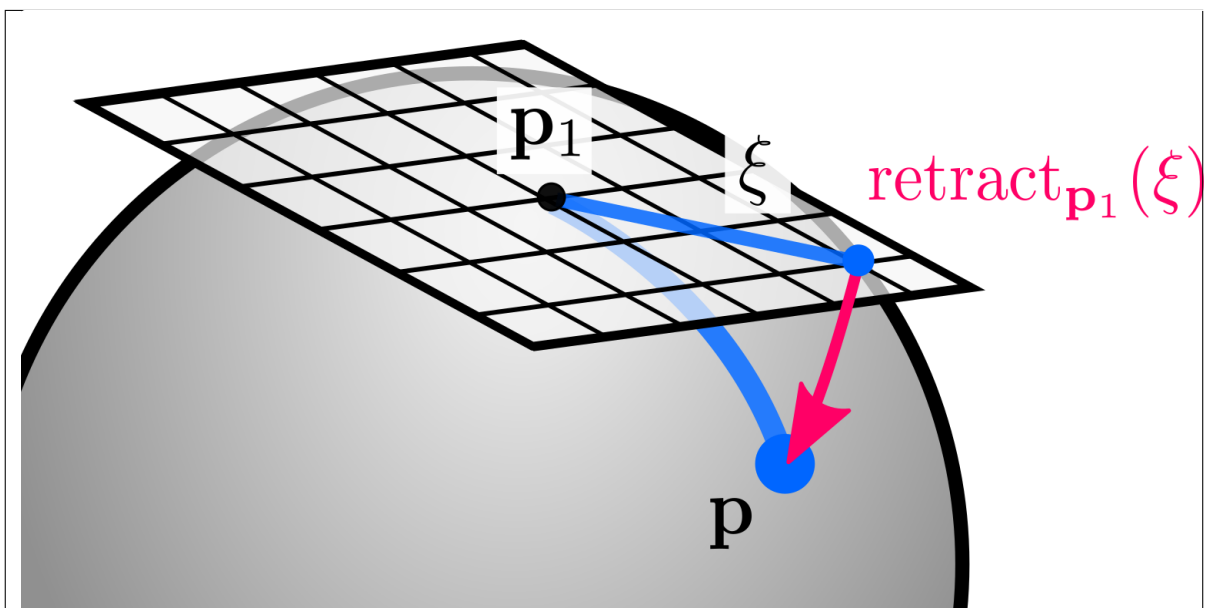
当流形具有非欧几里德结构时，它可以用切空间进行局部近似。在图中，我们说明了在流形上的对象 p_1 和 p_2 定义的不同切空间。

正如我们之前简单提到的，像旋转矩阵这样的对象很难在估计框架中操作，因为它们是矩阵。3D 旋转矩阵 \mathbf{R} 表示相对于参考坐标系的 3 个方向，但在原始元素项中，它们使用 9 个数值来表示，这似乎是**过度参数化** (overparametrize) 了对象。然而，定义旋转矩阵以及流形的约束，如正交性 $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ 和 $\det(\mathbf{R}) = 1$ ，使得旋转的固有维数仍然是 3。有趣的是，这正是可以在流形上定义的切空间的维数。

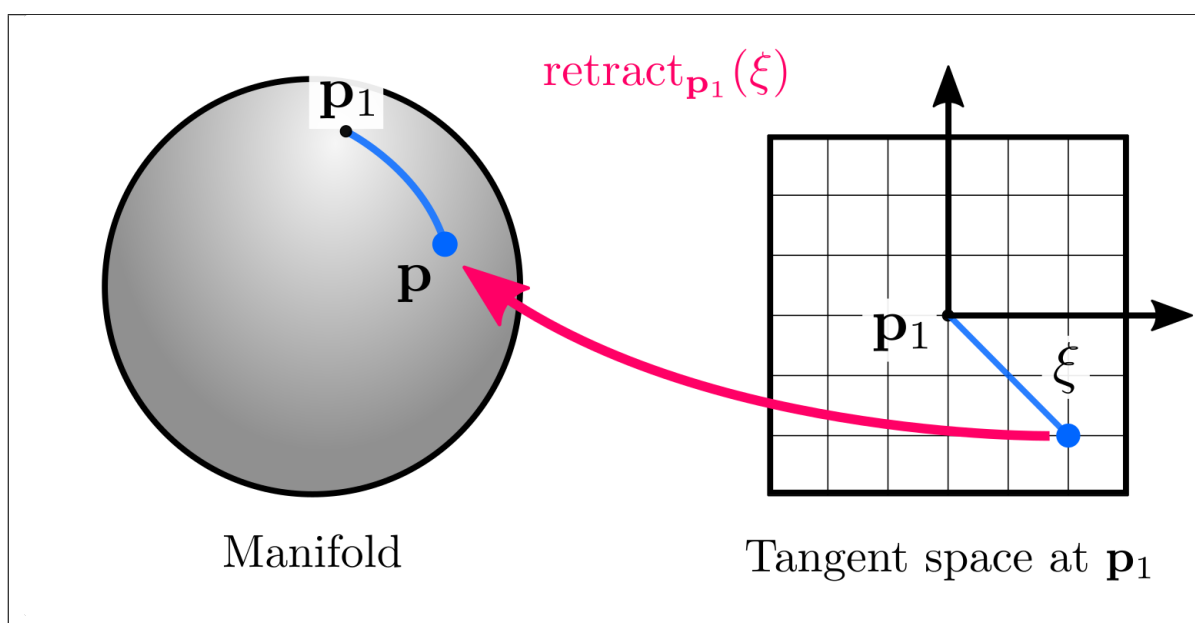
这就是使用流形如此方便的原因：作为对象定义一部分的所有约束都被自然地处理，我们可以利用其固有的维度在切向空间中工作。同样的情况也发生在刚体变换 (由 16 个元素矩阵表示的 6 维)、四元数 (由 4D 向量表示的 3 个方向)，**还有甚至不是群的对象，例如单位向量。**

为了使用流形，我们需要定义 2 个操作，它们是在流形和切空间之间变换对象的关键：

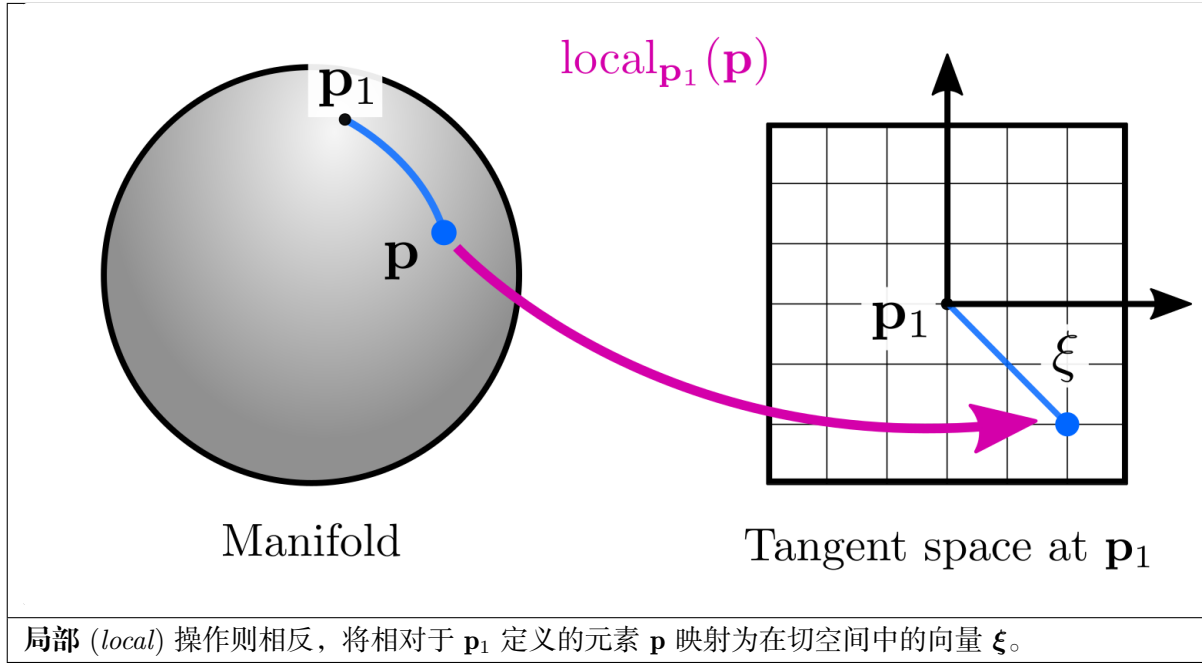
1. **收回** (retract or retraction): 将元素 ξ 从 p_1 处的切空间映射到流形的操作: $p = \text{retract}_{p_1}(\xi)$ 。
2. **局部** (local): 相反的操作: 将元素 p 从流形映射到切空间 $\xi = \text{local}_{p_1}(p)$ 。



收回 (*retract*) 操作将定义在 p_1 处的切空间中的一个元素 ξ 映射回流形。



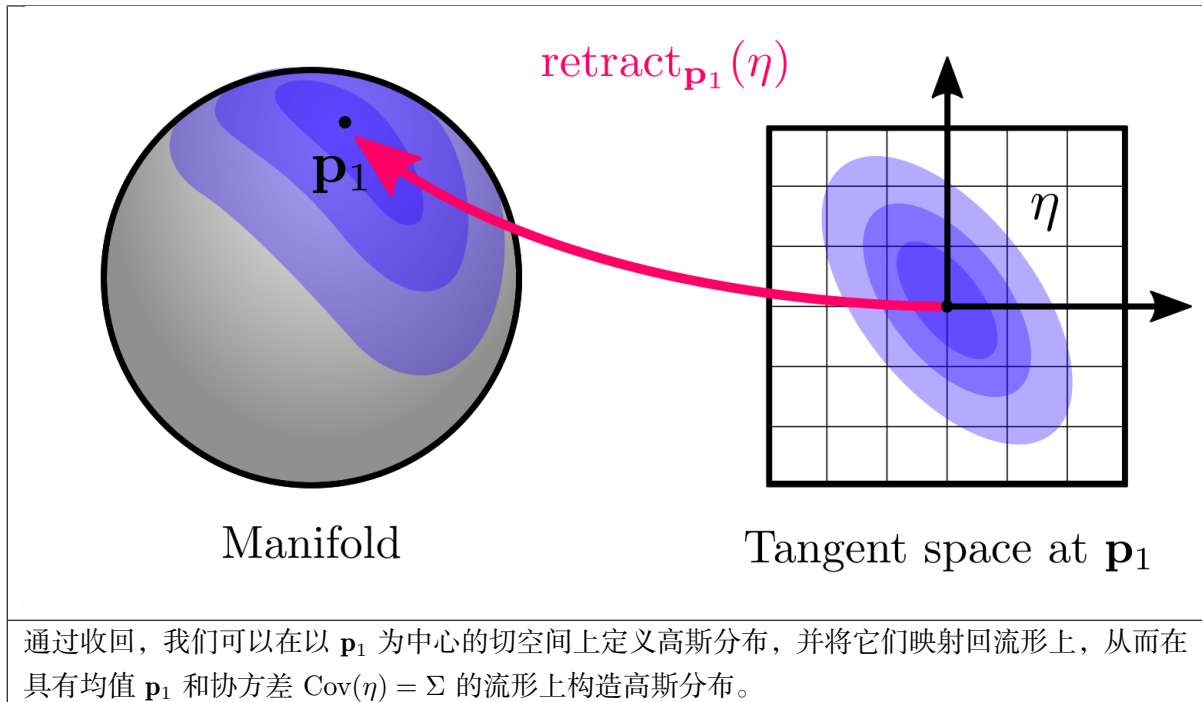
用另一个图形表示收回 (*retraction*)，它将用于其余的姿势，因为它更明确显示流形和切空间之间的相互作用。我们可以清楚地观察到，收回产生的元素 p 也与流形上的 p_1 有关。



收回 (*retraction*) 是求解优化问题和定义流形不确定性的基本概念。虽然本文后面将用一个例子讨论前者, 但现在解释后者是有用的。一般的想法是, 我们可以定义切空间上的分布, 并使用收回将它们映射回流形上。例如, 我们可以在以 \mathbf{p} 为中心的切空间中定义一个零均值的高斯变量 $\eta \sim \text{Gaussian}(\mathbf{0}_{n \times 1}, \Sigma)$, 并使用收回:

$$\text{Gaussian}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\eta}) := \text{retract}_{\mathbf{p}_1}(\boldsymbol{\eta}) \quad (33)$$

其图形对应于:

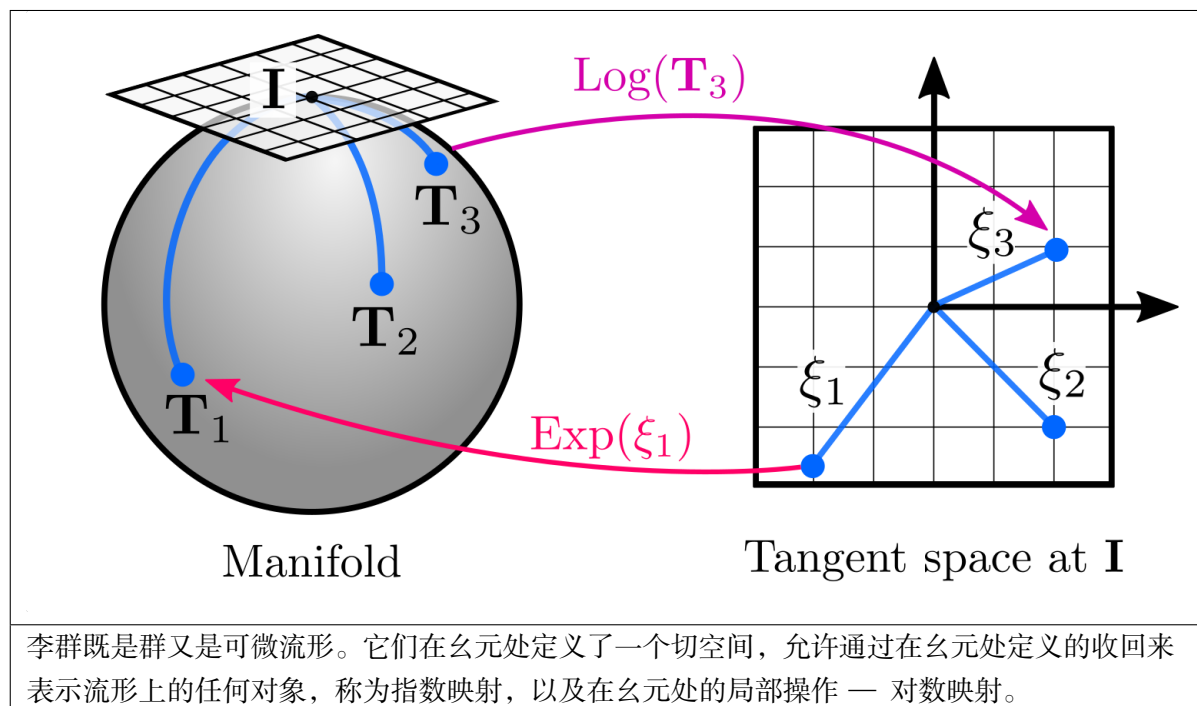


注意, 我们定义了从右侧的收回, 因为这与 GTSAM 使用的约定相匹配, 而这恰好也符合群的组合算子。然而, 在文献中我们可以发现不同的定义: Barfoot 和 Furgale(2014, 左侧约定)、

Forster 等人 (2017, 右侧约定) 以及 Mangelson 等人 (2020, 左侧约定), 就是其中一些例子。定义流形上概率分布的其它定义包括 Calinon(2020) 和 Lee 等人 (2008), 请参阅他们的工作以了解更多细节。

7.5 有些对象具有双重属性: 李群

在 GTSAM 中, 我们只需要对象是可微流形, 以便在估计框架中对其进行优化, 而完全不要求对象是群。然而, 需要注意的是, 我们处理的一些对象既是群又是可微流形, 称为李群 (Lie groups), 这是状态估计文献中普遍存在的公式。



像刚体矩阵和四元数等对象是李群。二维刚体变换是特殊欧几里德群 (Special Euclidean group) $SE(2)$ 的元素, 二维和三维旋转分别来自特殊正交群 (Special Orthogonal groups) $SO(2)$ 和 $SO(3)$ 。三维刚体变换是 $SE(3)$ 的对象, 并且我们可以使用这些定义来定义前面描述的群和流形的操作:

1. 组合 (Composition): 矩阵乘法 $T_1 T_2$ 。
2. 幺元 (Identity): 幺元矩阵 I 。
3. 求逆 (Inverse): 矩阵求逆 $(T_1)^{-1}$ 。
4. 收回 (Retract): 收回在幺元处的切空间定义, 称为 $SE(3)$ 的指数映射 (exponential map): $\text{retract}_I(\xi) := \text{Exp}(\xi)$ 。
5. 局部 (Local): 它也定义在幺元处, 称为 $SE(3)$ 的对数映射 (logarithm map): $\text{local}_I := \text{Log}(T_1)$ 。

请注意, 为了简单起见, 我们使用了大写的 $\text{Log}(\cdot) := \log(\cdot)^\vee$ 和 $\text{Exp}(\cdot) := \exp((\cdot)^\wedge)$ 算子, 正如 Forster 等人 (2017), 还有 Solà 等人 (2020) 所使用的那样, 因为在收回视角下, 它们很容易理解。更详细的描述请参考 Solà 等人的文章, 包括切空间和李代数 (Lie algebra) 之间的关系。

在 GTSAM 中, 3D 位姿被实现为 `Pose3` 对象, 我们可以把它们看作是 $SE(3)$ 元素。因此, 为了简单起见, 我们将继续使用对数映射和指数映射来讨论它们的收回和局部算子。然而, GTSAM

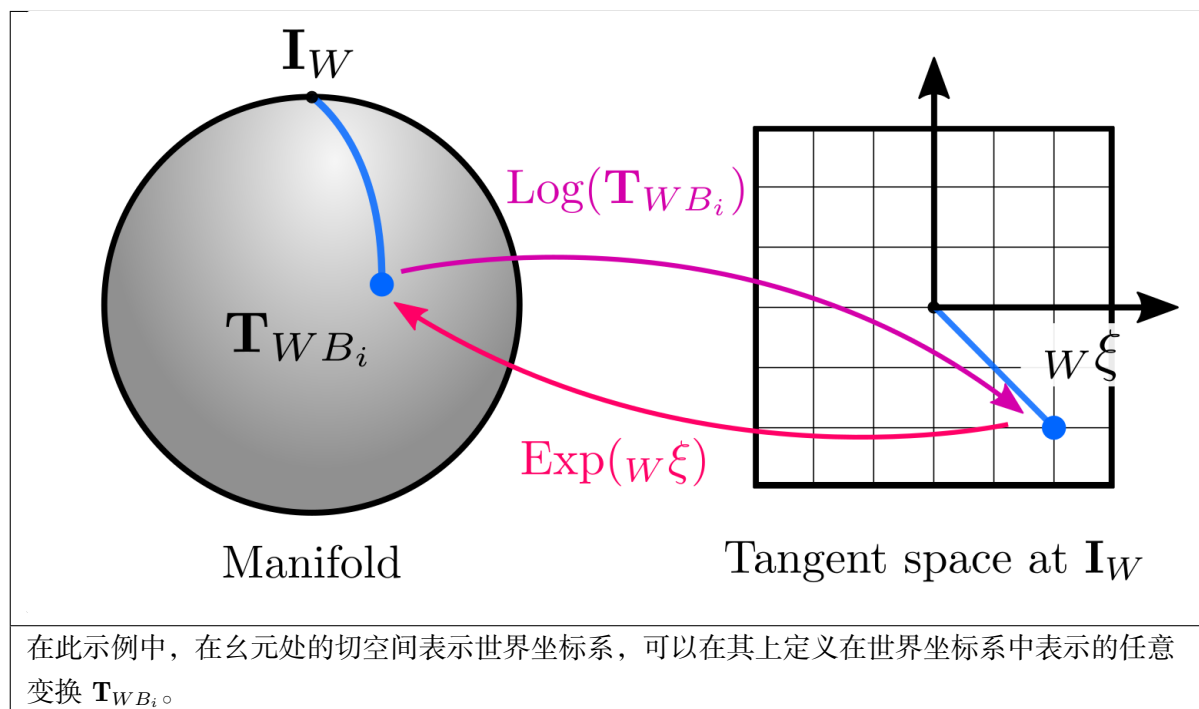
也允许我们在某些情况下使用替代性的收回，就像使用其它李群来表示位姿一样，比如 $\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$ 群，见这里的解释。

7.6 流形上的参考系

在应用局部和收回操作时，参考坐标系被保留。我们将使用 $\text{SE}(3)$ 来介绍一些重要的想法，因为它与我们最初的位姿估计问题有关。

首先，当我们讨论定义在幺元处的切空间时，在物理术语中，它指的是有一个固定的，全局的坐标系，我们用它来表达我们的位姿。然后，当使用定义为 $\text{SE}(3)$ 的对数映射的局部操作时，我们获得一个向量 ${}_W\xi_W \in \mathbb{R}^6$ (有时也称为切向量 (*tangent vector*) 或扭转向量 (*twist vector*))，它定义在世界坐标系 (*world frame*) 的切空间中：

$${}_W\xi = \text{Log}(\mathbf{T}_{WB_i}) \quad (34)$$

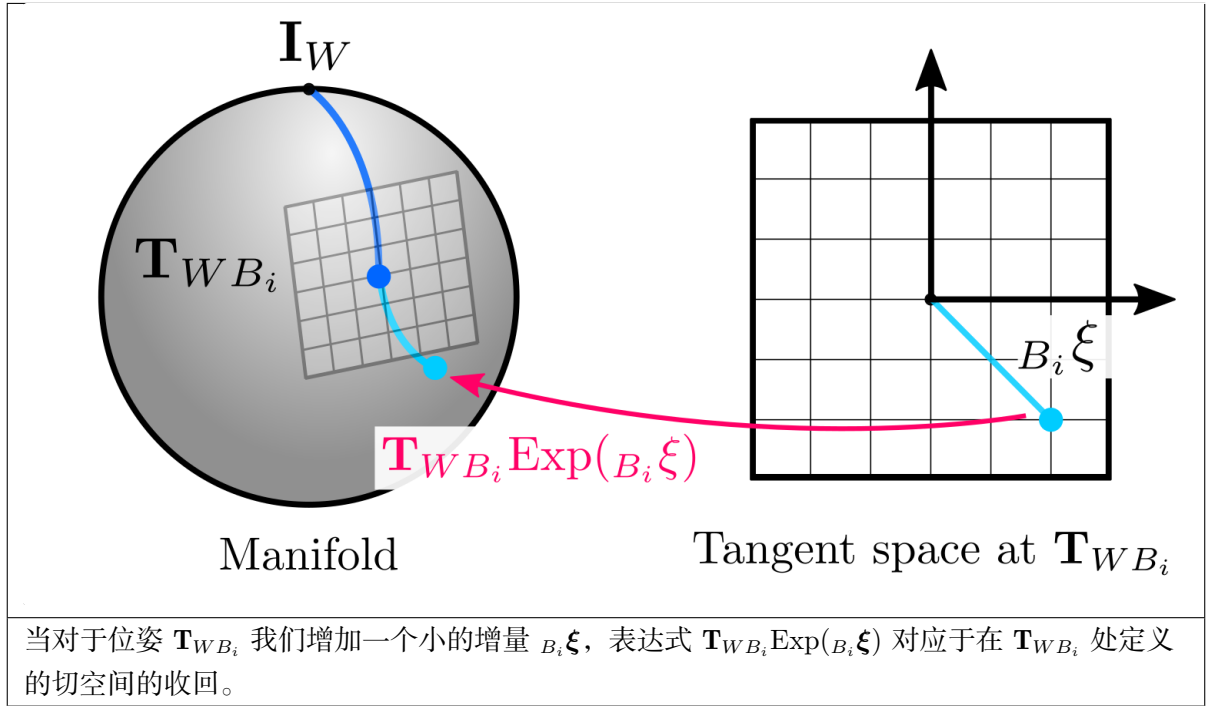


此外，我们可以使用收回将增量变化增加到变换中，对于 $\text{SE}(3)$ ，使用指数映射完成，如下所示：

$$\mathbf{T}_{WB_{i+1}} = \mathbf{T}_{WB_i} \text{Exp}({}_{B_i}\xi) \quad (35)$$

在本例中，我们从时间 i 处的机体坐标系增加了一个增量，其表示时间 $i+1$ 处的新位姿。请注意，增量是相对于参考坐标系定义的，但它们不需要指定结果坐标系。它们的含义 (代表时间 $i+1$ 处的新位姿) 是我们 — 作为用户 — 定义的，但在公式中并不明确。(虽然我们可以这样做，但它可能会导致混淆，因为在这个特定的情况下，我们表示的是下一个瞬间的位姿，但我们也可以使用收回来描述对世界坐标系的校正，我们将在最后一篇文章中看到。)

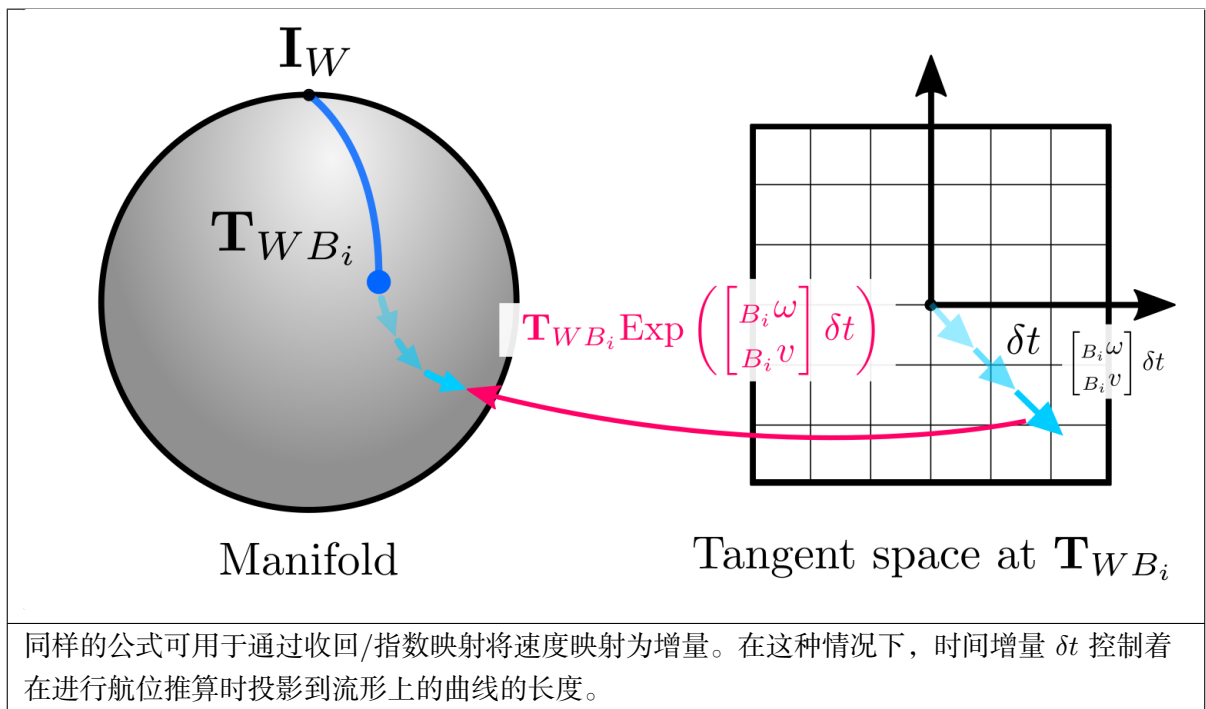
流形的图形解释与我们对收回和坐标系的一般定义是一致的。使用右侧的指数映射在 \mathbf{T}_{WB_i} 处定义一个切空间，可以将其解释为 B_i 处的新的参考系 (*reference frame*)，我们使用它来定义增量：



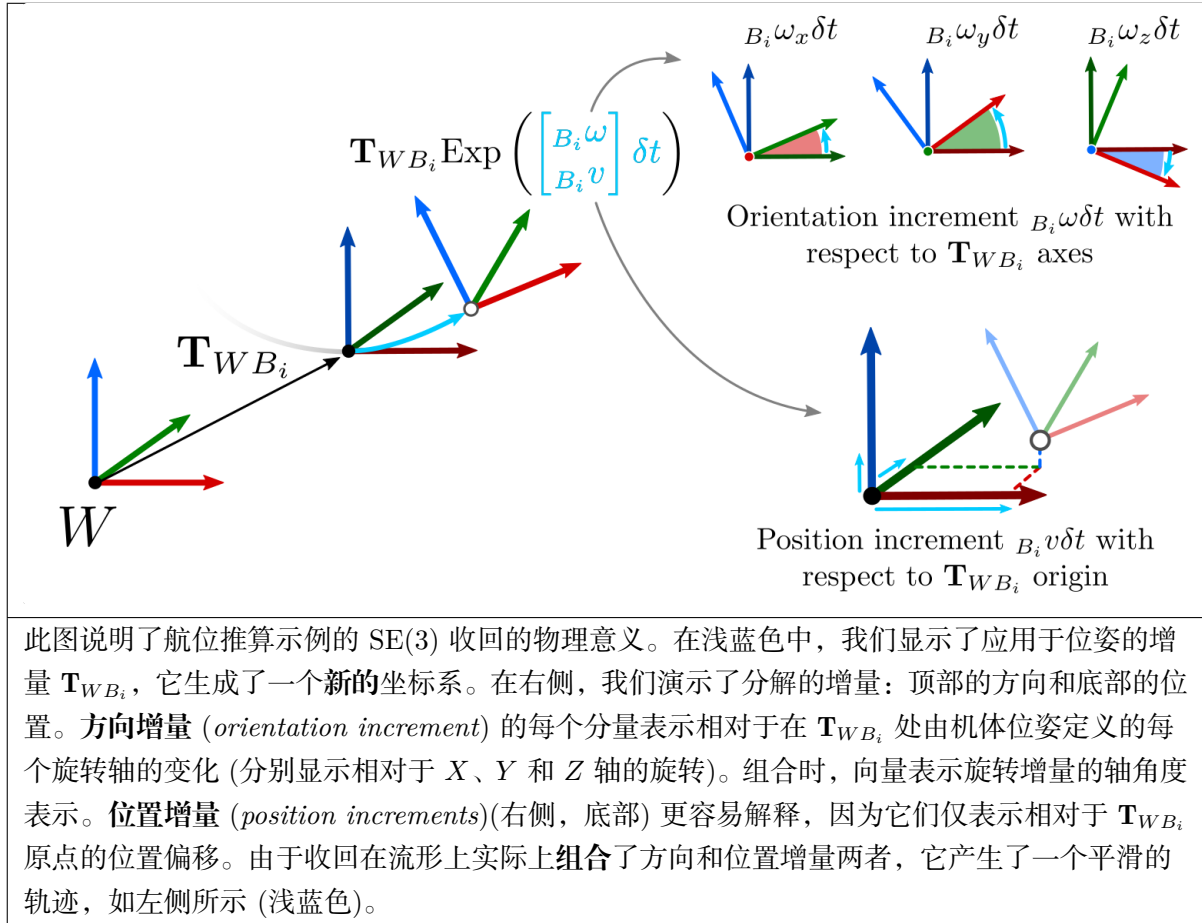
当我们有局部（机体坐标系）速度测量值时，也称为**扭转** (*twists*)， $(B_i \omega, B_i v)$ ，其中 $B_i \omega \in \mathbb{R}^3, B_i v \in \mathbb{R}^3$ ，通过收回表述增量公式也很方便，并且我们想做航位推算 (dead reckoning):

$$\mathbf{T}_{WB_{i+1}} = \mathbf{T}_{WB_i} \text{Exp} \left(\begin{bmatrix} B_i \omega \\ B_i v \end{bmatrix} \delta t \right) \quad (36)$$

乘积 $\begin{bmatrix} B_i \omega & \delta t \\ B_i v & \delta t \end{bmatrix}$ 代表速度的时间积分所得到的切向量，它通过 SE(3) 的收回映射到流形上：



最后一个例子也有助于理解 3D 位姿下收回/局部 (retraction/local) 操作的物理意义，这一点并不总是很清晰。用 SE(3) 说明这一点的一个有趣的方面是，如果我们只使用旋转 (SO(3), SO(2)) 或 2D 位姿 (SE(2))，其意义也适用：



7.7 关于收回和局部操作的几点备注

最后，我们想与大家分享一些重要的备注，这些备注在数学中并不总是被提及的，但在实现中却可能成为真正的问题。首先，我们需要注意在收回/局部 (retraction/local) 操作中各分量的顺序的约定 (是的，又是约定)。弄清楚每个软件或论文对这些操作所使用的定义，甚至是隐含的，对于理解我们在估计问题中所投入的数据和我们所提取的估计值，这是至关重要的。

例如，我们提出的 SE(3) 收回的定义，与 GTSAM 中的 Pose3 匹配，使用一种先方向后平移 (orientation-then-translation) 的约定，即 6D 切向量在前 3 个坐标中为方向，在后 3 个坐标中为平移， $\xi = (\phi, \rho)$ ，其中 $\phi \in \mathbb{R}^3$ 表示方向分量，而 $\rho \in \mathbb{R}^3$ 是平移分量。另一方面，Pose2 使用先平移后方向 (translation-then-orientation) 约定 (x, y, θ) 是因为历史原因。

这也与协方差的定义有关。例如，对于 Pose3 对象，我们必须定义与切向量的定义和意义相匹配的协方差矩阵。事实上，左上角的块必须编码为方向协方差，即每个旋转轴的不确定度，而右下角的块编码为位置协方差：

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{\phi\phi} & \Sigma_{\phi\rho} \\ \Sigma_{\phi\rho}^T & \Sigma_{\rho\rho} \end{bmatrix} \quad (37)$$

这是至关重要的，因为，例如，先前的协方差矩阵与在 ROS 中存储在 `PoseWithCovariance` 中的协方差的约定不匹配。在使用不同的库或软件时可能会出现类似的问题，因此我们必须了解它们的约定。如果文档中没有说明，我们的建议是**一定要检查收回/指数映射的定义**。

8 把所有的东西放在一起

现在我们可以回到我们最初的使用刚体变换的估计问题上。让我们回顾一下，我们定义了以下由里程表测量值给出的过程模型：

$$\mathbf{T}_{WB_{i+1}} = \mathbf{T}_{WB_i} \Delta \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}} \mathbf{N}_i \quad (38)$$

我们之前报告了两个问题：

1. 我们需要将噪声 \mathbf{N}_i 定义为高斯噪声，但它是一个 4×4 矩阵。
2. 当隔离噪声以产生残差时，我们最终得到的是一个矩阵表达式，而不是我们的估计框架中所需要的向量表达式。

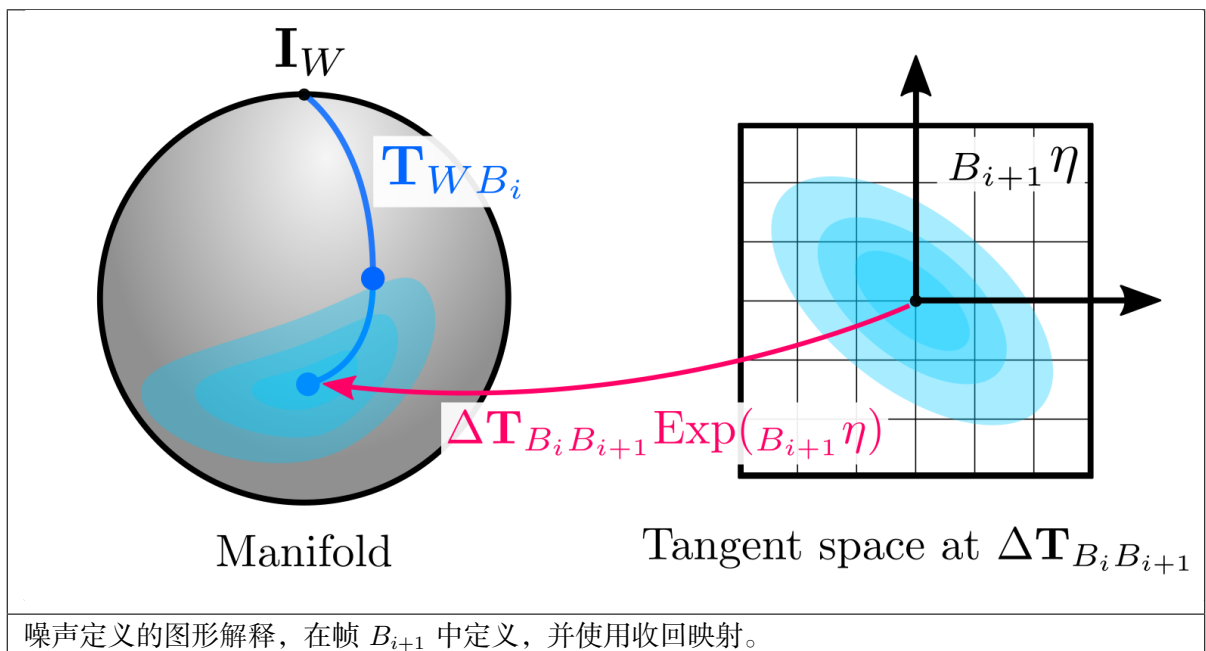
现在我们可以确定我们的位姿是 $\text{SE}(3)$ 的对象，因此我们可以使用刚刚定义的工具。

8.1 定义噪声

如前所述，通过使用流形上的概率分布解决了第一个恰当定义噪声的问题。我们在切空间中的 $\Delta \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}}$ 处定义一个零均值高斯，并将其收回到流形上：

$$\mathbf{T}_{WB_{i+1}} = \mathbf{T}_{WB_i} \Delta \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}} \text{Exp}_{B_{i+1}}(\boldsymbol{\eta}) \quad (39)$$

其中我们定义了 $B_{i+1} \boldsymbol{\eta} \sim \text{Gaussian}(\mathbf{0}_{6 \times 1}, B_{i+1} \Sigma)$ 。请注意，为了匹配我们的右侧约定，我们所使用的协方差必须在时间 $i+1$ 的机体坐标系中定义，即 B_{i+1} 。此外，协方差矩阵必须遵循我们前面提到的由收回定义相同顺序。



8.2 定义残差

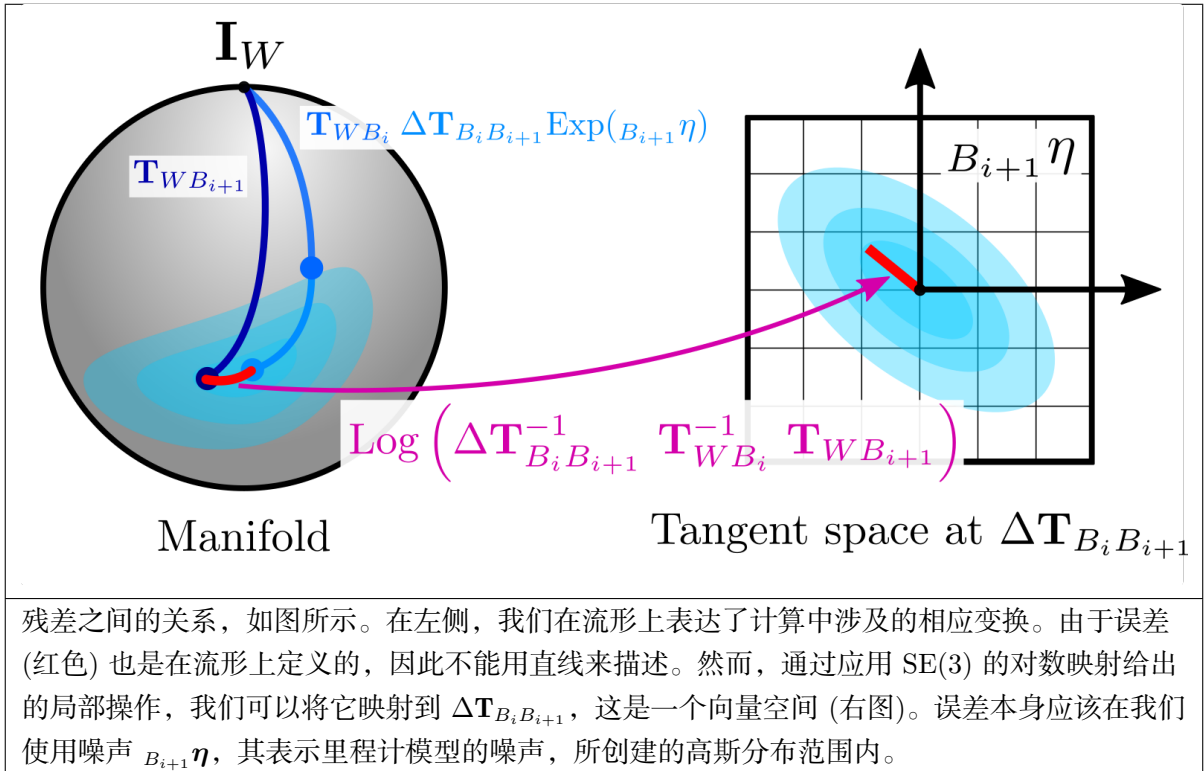
在解决第一个问题之后，我们现在可以关注残差定义。我们可以像以前一样隔离噪音，这就意味着：

$$\text{Exp}_{B_{i+1}}(\eta) = \Delta \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}}^{-1} \mathbf{T}_{WB_i}^{-1} \mathbf{T}_{WB_{i+1}} \quad (40)$$

现在，我们可以在两边应用流形的局部 (local) 算子，将残差映射到切空间中 (简单起见，回想一下，我们对 SE(3) 元素使用对数映射 (logarithm map))：

$${}_{B_{i+1}}\eta = \text{Log} \left(\Delta \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}}^{-1} \mathbf{T}_{WB_i}^{-1} \mathbf{T}_{WB_{i+1}} \right) \quad (41)$$

因为噪声是在切空间中定义的，所以两边都表示 \mathbb{R}^6 中的向量表达式。两者也都对应于零均值高斯噪声，因此在我们估计框架中，右侧可以作为适当的因子使用。事实上，右侧的表达式与 GTSAM 中用以定义 BetweenFactor 的表达式完全相同。



在这里我们还必须记住，通过使用局部 (local) 操作，残差向量将遵循同样的排序。如前所述，对于 Pose3 对象，它将在前 3 个分量中编码方向误差，而在后 3 个分量中编码平移误差。这样，如果我们写出高斯因子的扩展表达式，我们可以注意到，所有分量都相应地由求逆协方差加权，正如我们之前回顾的那样 (先方向，然后平移)：

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{between}}(\mathbf{T}_{WB_i}, \mathbf{T}_{WB_{i+1}}) &= \left\| \text{Log} \left(\Delta \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}}^{-1} \mathbf{T}_{WB_i}^{-1} \mathbf{T}_{WB_{i+1}} \right) \right\|_{\Sigma_i}^2 \\ &= \text{Log} \left(\Delta \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}}^{-1} \mathbf{T}_{WB_i}^{-1} \mathbf{T}_{WB_{i+1}} \right)^T \Sigma_i^{-1} \\ &\quad \text{Log} \left(\Delta \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}}^{-1} \mathbf{T}_{WB_i}^{-1} \mathbf{T}_{WB_{i+1}} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

因子现在是一个非线性向量表达式，可以使用我们前面介绍的非线性优化技术来求解。实际上，GTSAM 已经为所有已实现的对象的**局部 (local)** 算子实现了 Jacobian 矩阵，这简化了过程。然而，我们必须澄清一些细微的差别。

首先，由于因子在当前线性化点的切空间中定义了一个残差，优化本身在**当前线性化点定义的切空间中**执行。这意味着，当我们对因子进行线性化并建立正规方程时，我们计算的增量 ${}_{B_i}\delta\mathbf{T}^k$ 位于切空间。

出于这个原因，我们需要使用收回操作更新**在流形上的**变量。例如，对于 SE(3)：

$$\tilde{\mathbf{T}}_{WB_i}^{k+1} = \mathbf{T}_{WB_i}^k \text{Exp}({}_{B_i}\delta\mathbf{T}^k) \quad (43)$$

第二个要点是，我们可以从信息矩阵中恢复的协方差，也**在线性化点周围的切空间中定义，遵循收回操作的约定**。这意味着，如果我们在当前线性化点的信息矩阵由下式给出：

$$\Sigma^{k+1} = ((\mathbf{H}^k)^T (\Sigma^k)^{-1} \mathbf{H}^k)^{-1} \quad (44)$$

然后，在当前线性化点 $\mathbf{T}_{WB_i}^{k+1}$ 周围的解的相应分布将由下式给出：

$$\text{Gaussian}(\mathbf{T}_{WB_i}^{k+1}, \Sigma^{k+1}) := \mathbf{T}_{WB_i}^{k+1} \text{Exp}({}_{B_i}\eta^{k+1}) \quad (45)$$

其中 ${}_{B_i}\eta^{k+1} \sim \text{Gaussian}(\mathbf{0}_{6 \times 1}, {}_{B_i}\Sigma^{k+1})$ 。作为收回约定的结果，产生的协方差也在**机体坐标系中表示，并使用先方向后平移 (orientation-then-translation) 的顺序对协方差矩阵进行排序**。

9 结论

在第二部分文章中，我们扩展了前面提出的估计框架，以明确的方式将参考坐标系引入到我们的符号中，这有助于理解数据的含义。

我们还回顾了流形的群的概念。我们所讨论的流形，是将基本概念推广到在 GTSAM 中定义的优化框架以及概率分布的概念。

我们提出了右侧和左侧约定的概念，虽然不是标准的，但是允许我们识别不同的公式，这些公式可以在操作群和流形的文献中找到。通过明确说明 GTSAM 使用群的组合以及流形上的收回的右侧约定，我们可以确定用于定义变量的坐标系，以及我们通过 **Marginals** 所获得的解的协方差。

此外，局部和收回操作的定义也直接影响协方差矩阵的排序，这也因对象的不同而不同。例如，我们讨论了 Pose2 使用**先平移后方向 (translation-then-orientation)** 约定，而 Pose3 使用**先方向后平移 (orientation-then-translation)** 约定。当我们想在不同的软件中使用 GTSAM 数据时，这一点特别重要，例如 ROS，它对其 3D 位姿结构使用**先平移后方向 (translation-then-orientation)** 约定，例如 (PoseWithCovariance)。

最后一篇文章将涉及一些关于我们定义的约定，还有李群**伴随 (adjoint)** 的应用，以及最后的评论，这对于正确变换为位姿定义的协方差矩阵相当有用。

第三部分 伴随与协方差

10 简介

在我们前面的文章中，我们介绍了参考坐标系的概念，以及它们如何与群和流形相关联，从而为我们的估计框架的变量赋予物理意义。我们注意到，我们的 GTSAM 对象的优化和定义概率分布所需的唯一属性是**流形** (*manifolds*)。然而，群有助于理解某些对象的组成，也有助于提出**李群** (*Lie groups*) 的概念，李群既是群又是可微流形。

这最后的部分主要讨论李群，这是我们用来表示机器人位姿的大多数对象的情况。特别地，我们将回顾李群**伴随** (*adjoint*) 的概念，这将有助于我们将应用在右侧的增量或校正，与左侧的增量或校正联系起来。这样的性质将允许我们用代数方法处理李群定义的不确定性，并获得不同协方差变换的表达式。我们将集中讨论 3D 位姿，即 $SE(3)$ ，因为它具有广泛的适用性，但是类似的定义也应该适用于其它李群，因为它们主要依赖于伴随的定义。

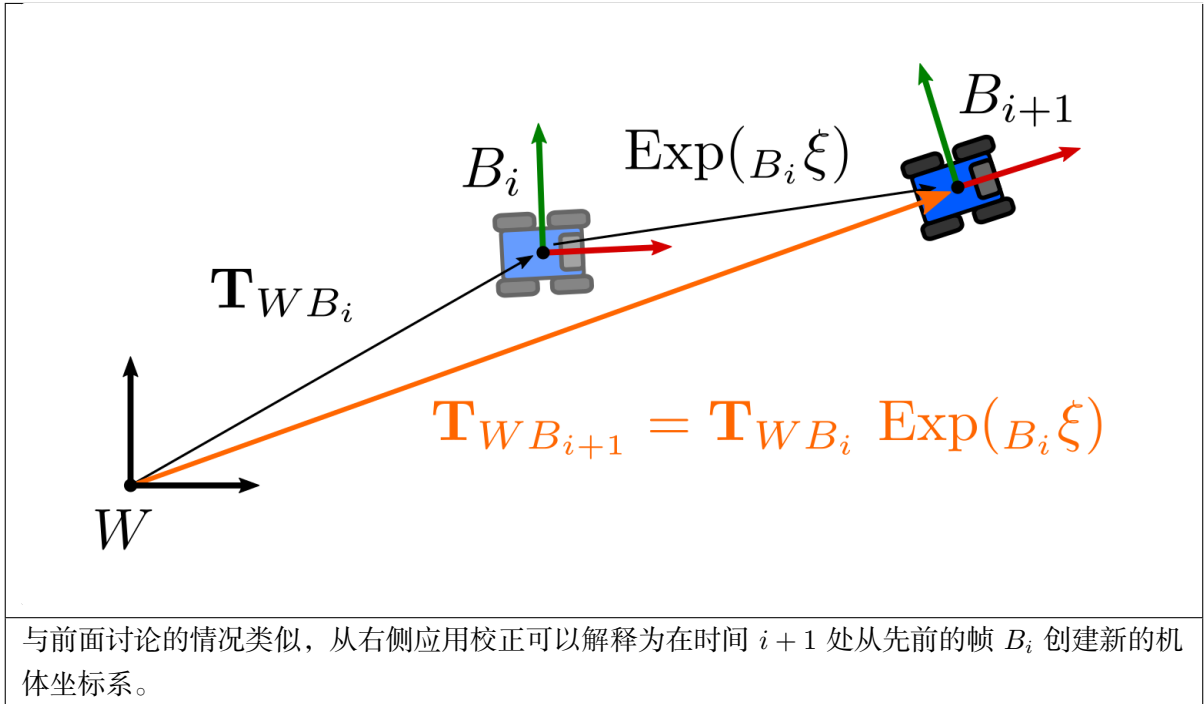
大部分的表达式已经由 Barfoot 和 Furgale(2014) 以及 Mangelson 等人 (2020) 在文献中展示过，但由于它们遵循左侧约定，因此无法直接用于 GTSAM。我们提供了 Mangelson 等人的协方差变换的结果表达式，但我们建议参考他们的工作以了解过程的细节。

11 伴随

让我们考虑一个类似于前面例子的情况，即我们将一个小的增量 ${}_{B_i}\xi$ 增加到一个位姿 \mathbf{T}_{WB_i} 上：

$$\mathbf{T}_{WB_i} \text{Exp}({}_{B_i}\xi) \quad (46)$$

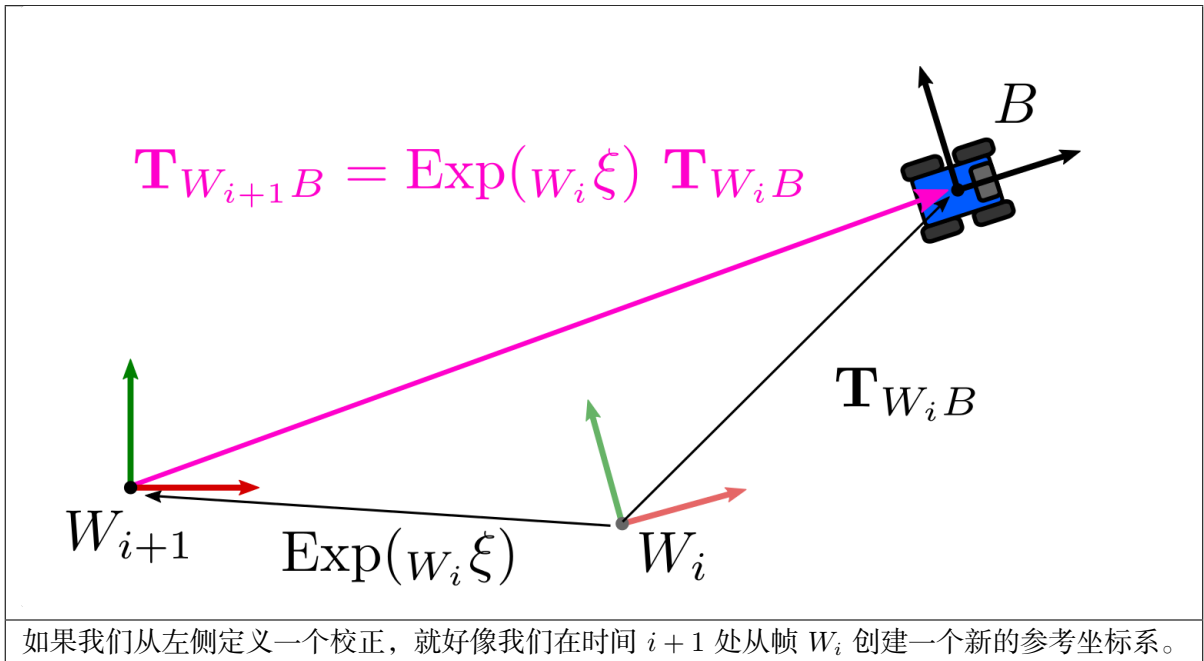
其中我们已经使用 $SE(3)$ 的收回，使用**右侧约定** (*right-hand convention*) 增加了一个小的增量，就像 GTSAM 所做的那样。



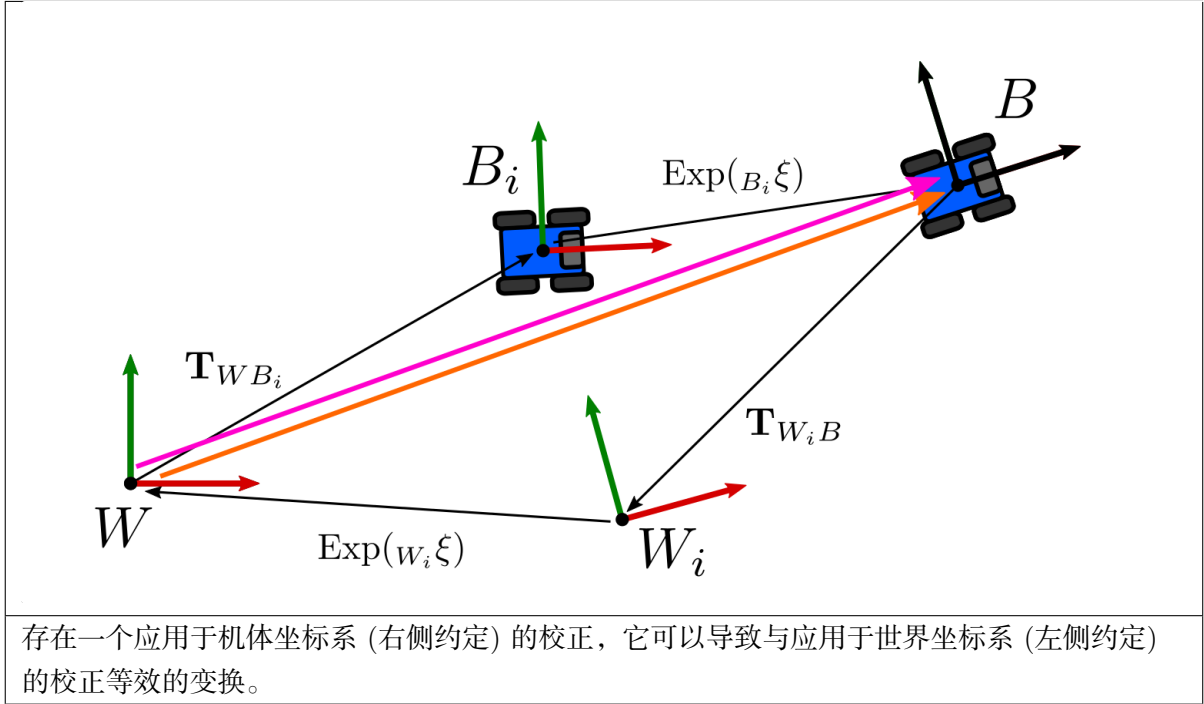
但是，对于某些应用，我们可能对**从左侧**应用校正感兴趣：

$$\mathbf{T}_{W_{i+1}B} = \text{Exp}(w_i \xi) \mathbf{T}_{W_i B} \quad (47)$$

请注意，这种情况是不同的例子，在前面的文章中，我们把坐标系求逆了。在这里，我们实际上是在世界坐标系上应用了一个校正。



我们感兴趣的是找出一个机体上的校正，这种校正可以导致与应用在右侧的校正相同的结果。对于这种特定的校正，两种公式将有效地表示相同的位姿，但使用**不同的参考坐标系**。如下图所示：



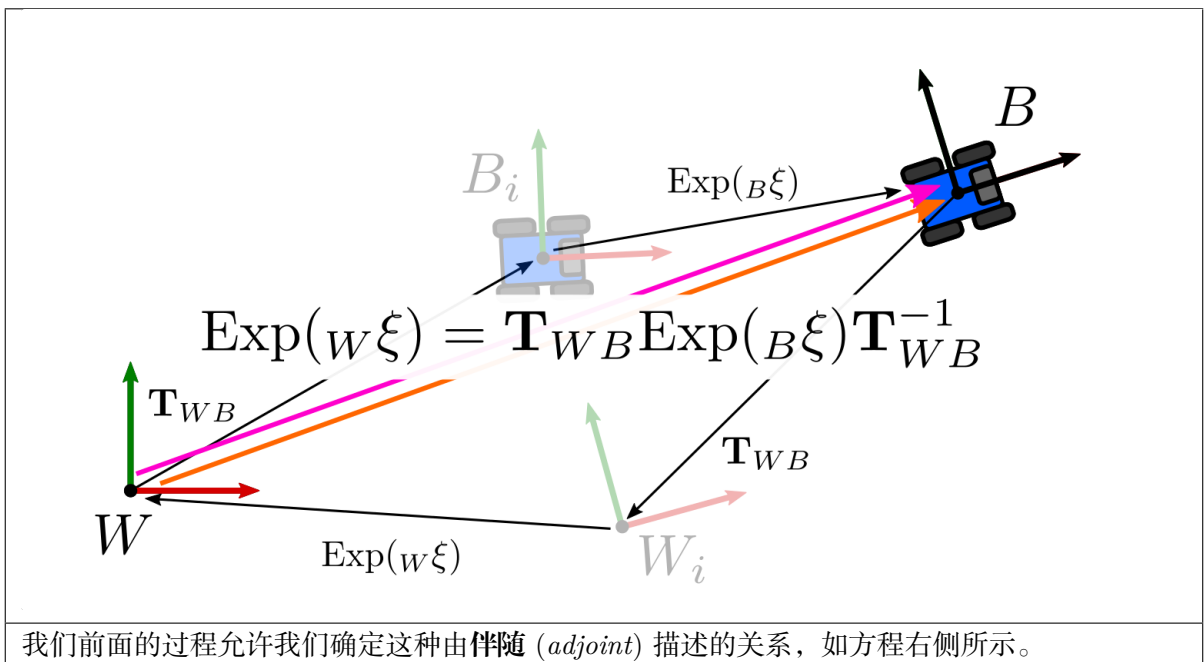
为了找到它, 我们可以写出应用于机体坐标系和世界坐标系的校正之间的等价关系, 如下所示:

$$\text{Exp}(w\xi)\mathbf{T}_{WB} = \mathbf{T}_{WB}\text{Exp}(B\xi) \quad (48)$$

为了简单起见, 我们去掉了与时间相关的索引, 因为这是一个几何关系。为了满足这个条件, 我们在左侧应用增量变化, 即在世界坐标系中, $w\xi$ 必须由下式给出:

$$\text{Exp}(w\xi) = \mathbf{T}_{WB}\text{Exp}(B\xi)\mathbf{T}_{WB}^{-1} \quad (49)$$

该项是我们通过分离得到。右侧的表达式称为 SE(3) 的**伴随作用** (*adjoint action*)。它把在左侧应用的增量与在右侧应用的增量相关联。



出于我们的目的，使用一个直接适用于来自切空间的元素的等效替代表达式，这很有用 (Solà 等人给出了一个更完整的推导，我们在这里省略了一些特性)：

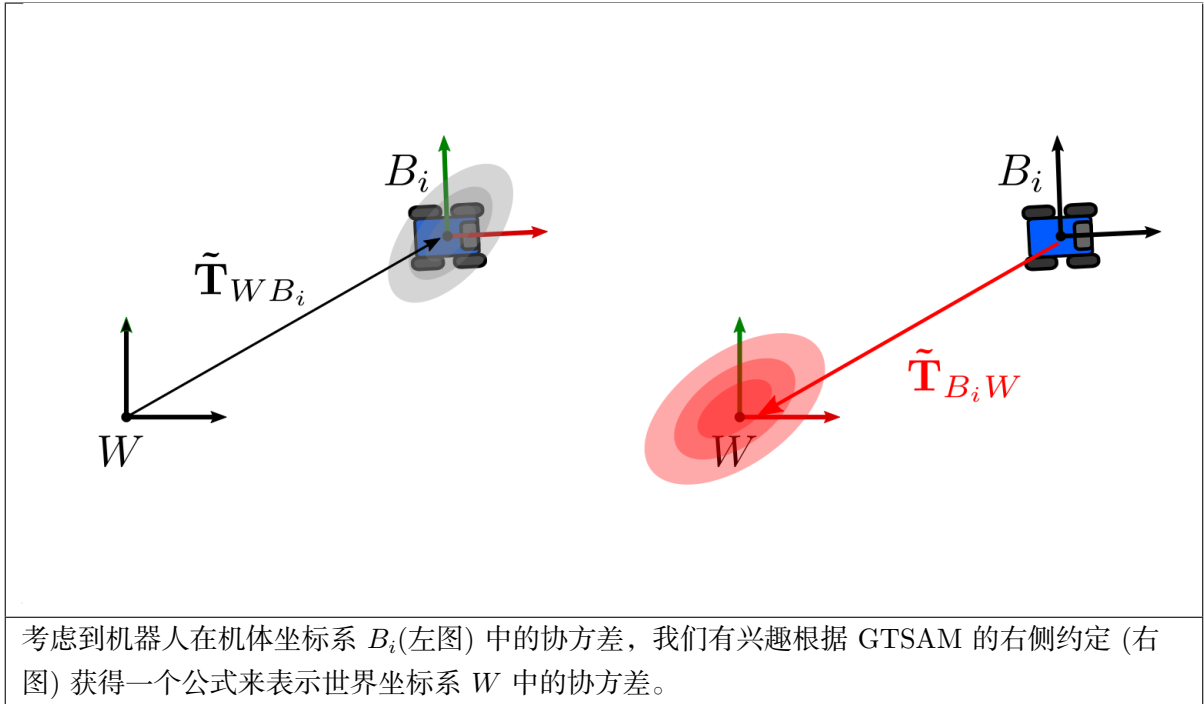
$$\text{Exp}({}_W\xi)\mathbf{T}_{WB_i} = \mathbf{T}_{WB_i}\text{Exp}(\text{Ad}_{T_{WB_i}^{-1}}{}_W\xi) \quad (50)$$

其中 $\text{Ad}_{T_{WB_i}^{-1}}$ 称为**伴随矩阵** (*adjoint matrix*) 或 $T_{WB_i}^{-1}$ 的**伴随** (**adjoint**)。伴随直接作用于切空间的元素，改变它们的参考坐标系。请注意，同样的子索引取消也适用于这里，因此我们可以确认这些变换的定义是正确的。

我们还可以将此解释为一种方法，将应用于左侧 (在世界坐标系中) 的增量一致地**移动**到右侧 (机体坐标系)，这对于保持右侧收回约定和概率分布的一致性特别有用。这是我们将在下一节中用来定义一些协方差变换的主要属性，它已经在 Pose3 中做为 `AdjointMap` 实现。

12 逆分布

作为第一个例子，伴随如何帮助操纵协方差的，让我们考虑这样一种情况，我们有一个因子图的解，其协方差定义在我们前面讨论过的机体坐标系中。我们感兴趣的是获得一个表达式来表达在世界坐标系中的协方差：



假定高斯分布的位姿的分布将用下式表示：

$$\tilde{\mathbf{T}}_{WB} = \mathbf{T}_{WB}\text{Exp}({}_B\boldsymbol{\eta}) \quad (51)$$

其中 ${}_B\boldsymbol{\eta}$ 为零均值高斯噪声，协方差为 Σ_B ，如以前一样。可以通过对表达式求逆来计算逆分布：

$$(\tilde{\mathbf{T}}_{WB})^{-1} = (\mathbf{T}_{WB} \text{Exp}({}_B\boldsymbol{\eta}))^{-1} \quad (52)$$

$$= (\text{Exp}({}_B\boldsymbol{\eta}))^{-1} \mathbf{T}_{WB}^{-1} \quad (53)$$

$$= \text{Exp}(-{}_B\boldsymbol{\eta}) \mathbf{T}_{WB}^{-1} \quad (54)$$

然而，噪声是在左侧定义的，这是不方便的，因为它仍然是机体坐标系中的协方差，并且它也不符合右侧约定。我们可以用伴随把它移到右侧：

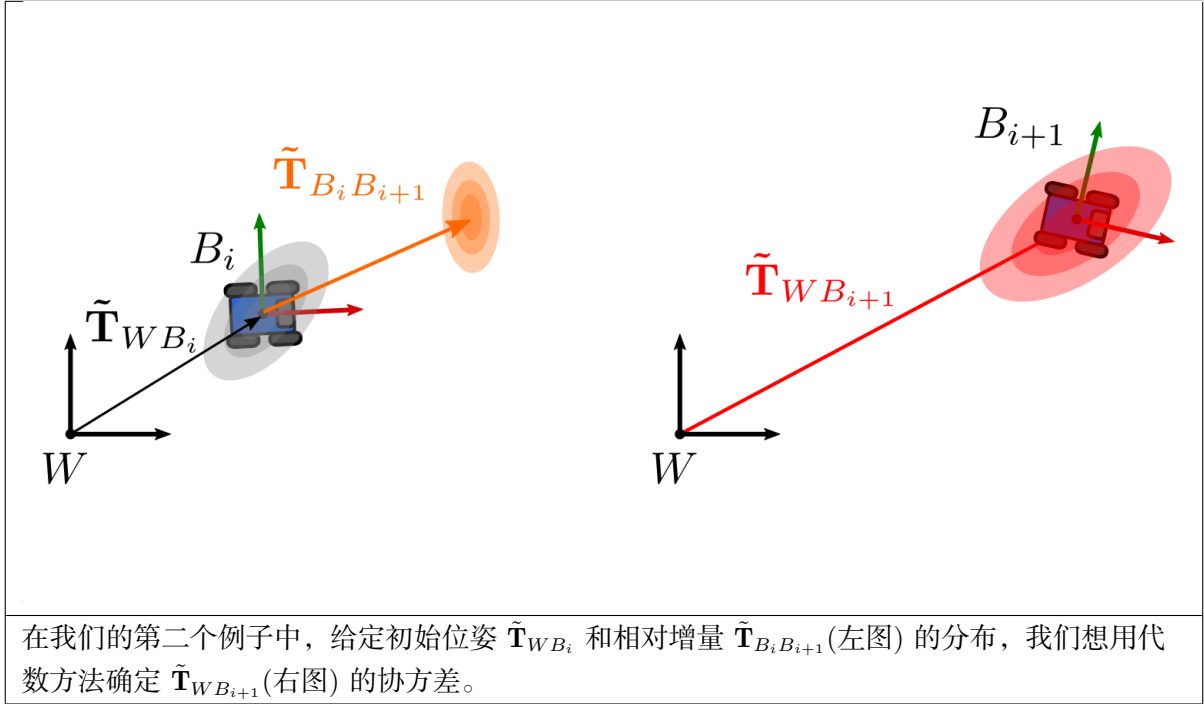
$$(\tilde{\mathbf{T}}_{WB})^{-1} = \mathbf{T}_{WB}^{-1} \text{Exp}(-\text{Ad}_{\mathbf{T}_{WB}} {}_B\boldsymbol{\eta}) \quad (55)$$

这是遵循右侧约定的恰当分布，它定义了世界坐标系中的协方差。求逆协方差由下式给出：

$$\Sigma_W = \text{Ad}_{\mathbf{T}_{WB}} \Sigma_B \text{Ad}_{\mathbf{T}_{WB}}^T \quad (56)$$

13 组合分布

一个不同的情况是，如果我们有一个位姿 $\tilde{\mathbf{T}}_{WB_i}$ 的分布，我们还有一个由另一个分布 $\tilde{\mathbf{T}}_{B_i B_{i+1}}$ 给出的增量。通过一些代数操作，我们可以确定组合 $\tilde{\mathbf{T}}_{WB_{i+1}}$ 的分布。这在进行航位推算时非常有用，例如：



如果我们遵循与之前类似的公式，我们可以确定组合分布 (及其协方差)：

$$\tilde{\mathbf{T}}_{WB_{i+1}} = \tilde{\mathbf{T}}_{WB_i} \tilde{\mathbf{T}}_{B_i B_{i+1}} \quad (57)$$

$$= \mathbf{T}_{WB_i} \text{Exp}({}_B\boldsymbol{\eta}) \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}} \text{Exp}({}_{B_{i+1}}\boldsymbol{\eta}) \quad (58)$$

类似地，我们需要**移动**噪声 ${}_{B_i}\boldsymbol{\eta}$ 到右侧，以便将**变换放在左侧** (代表分布的均值)，而将**噪声放在右侧** (编码协方差)。我们可以再次使用伴随：

$$\tilde{\mathbf{T}}_{WB_i} = \mathbf{T}_{WB_i} \mathbf{T}_{B_i B_{i+1}} \text{Exp}(\text{Ad}_{\mathbf{T}_{B_i B_{i+1}}^{-1}} {}_{B_i}\boldsymbol{\eta}) \text{Exp}({}_{B_{i+1}}\boldsymbol{\eta}) \quad (59)$$

然而，我们不能合并指数，因为这将假定群中的交换性，对我们之前讨论过的 SE(3) 并不成立。尽管如此，仍然可以使用一些近似值 (在 Mangelson 的文章中也讨论过) 来最终得到组合协方差的以下表达式：

$$\Sigma_{B_{i+1}} = \text{Ad}_{\mathbf{T}_{B_i B_{i+1}}^{-1}} \Sigma_{B_i} \text{Ad}_{\mathbf{T}_{B_i B_{i+1}}^{-1}}^T + \Sigma_{B_{i+1}} \quad (60)$$

此外，如果我们认为位姿是相关的，那么联合分布的协方差由下式给出：

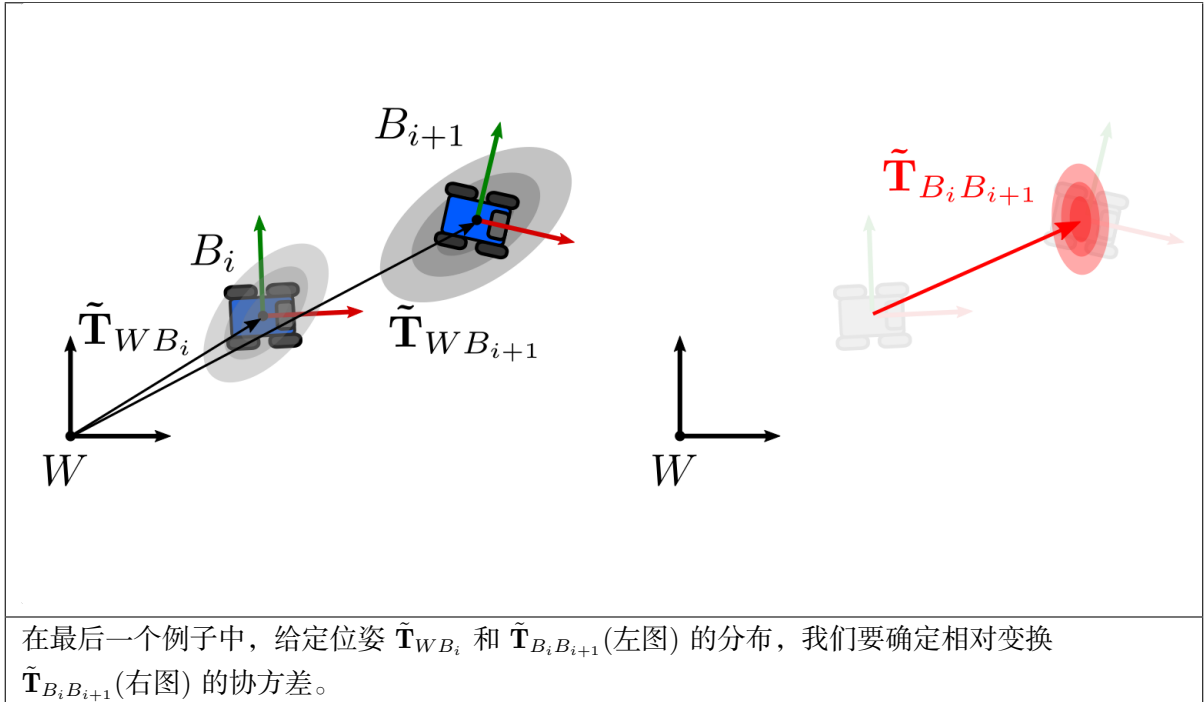
$$\begin{bmatrix} \Sigma_{B_i} & \Sigma_{B_i, B_{i+1}} \\ \Sigma_{B_i, B_{i+1}}^T & \Sigma_{B_{i+1}} \end{bmatrix} \quad (61)$$

我们具有的组的协方差是：

$$\begin{aligned} \Sigma_{B_{i+1}} &= \text{Ad}_{\mathbf{T}_{B_i B_{i+1}}^{-1}} \Sigma_{B_i} \text{Ad}_{\mathbf{T}_{B_i B_{i+1}}^{-1}}^T + \Sigma_{B_{i+1}} \\ &\quad + \text{Ad}_{\mathbf{T}_{B_i B_{i+1}}^{-1}} \Sigma_{B_i, B_{i+1}} + \Sigma_{B_i, B_{i+1}}^T \text{Ad}_{\mathbf{T}_{B_i B_{i+1}}^{-1}}^T \end{aligned} \quad (62)$$

14 相对变换分布

最后，可能的情况是，我们有两个位姿的分布在同一个参考坐标系中表示，我们想计算它们之间的相对变换的分布。例如，如果我们有一个提供协方差估计的里程计系统，并且我们想要使用相对测量作为位姿图 SLAM 系统的因子，我们将需要相对变换的均值和协方差。



为了确定它，我们遵循相同的代数过程：

$$\tilde{\mathbf{T}}_{B_i B_{i+1}} = \tilde{\mathbf{T}}_{WB_i}^{-1} \tilde{\mathbf{T}}_{WB_{i+1}} \quad (63)$$

$$= (\mathbf{T}_{WB_i} \text{Exp}(B_i \boldsymbol{\eta}))^{-1} \mathbf{T}_{WB_{i+1}} \text{Exp}(B_{i+1} \boldsymbol{\eta}) \quad (64)$$

$$= \text{Exp}(-B_i \boldsymbol{\eta}) \mathbf{T}_{WB_i}^{-1} \mathbf{T}_{WB_{i+1}} \text{Exp}(B_{i+1} \boldsymbol{\eta}) \quad (65)$$

类似地，我们使用伴随移动指数两次：

$$\tilde{\mathbf{T}}_{B_i B_{i+1}} = \mathbf{T}_{WB_i}^{-1} \text{Exp}(-\text{Ad}_{\mathbf{T}_{WB_i}^{-1} B_i} \boldsymbol{\eta}) \mathbf{T}_{WB_{i+1}} \text{Exp}(B_{i+1} \boldsymbol{\eta}) \quad (66)$$

$$= \mathbf{T}_{WB_i}^{-1} \mathbf{T}_{WB_{i+1}} \text{Exp}(-\text{Ad}_{\mathbf{T}_{WB_{i+1}}^{-1}} \text{Ad}_{\mathbf{T}_{WB_i}^{-1} B_i} \boldsymbol{\eta}) \text{Exp}(B_{i+1} \boldsymbol{\eta}) \quad (67)$$

因此，在假设独立位姿的情况下，对于相对位姿，以下协方差成立：

$$\Sigma_{B_{i+1}} = \left(\text{Ad}_{\mathbf{T}_{WB_{i+1}}^{-1}} \text{Ad}_{\mathbf{T}_{WB_i}} \right) \Sigma_{B_i} \left(\text{Ad}_{\mathbf{T}_{WB_{i+1}}^{-1}} \text{Ad}_{\mathbf{T}_{WB_i}} \right)^T + \Sigma_{B_{i+1}} \quad (68)$$

然而，该表达式存在的一个问题是，通过假设独立性，相对位姿的协方差将分别大于每个位姿的协方差。这与我们计算独立高斯的差分分布的一维情形是一致的，在这种情形下，均值是差分，而协方差会增加。然而，这并不是我们想要的结果，因为我们的里程计因子会随着时间的推移而退化。

Mangelson 等人证明，如果存在某些相关性（如我们对组合示例所示），并且在计算中明确考虑了这些相关性，则估计值会更精确，协方差不会过高或过低。那么，符合 GTSAM 的相应表达式为：

$$\begin{aligned} \Sigma_{B_{i+1}} &= \left(\text{Ad}_{\mathbf{T}_{WB_{i+1}}^{-1}} \text{Ad}_{\mathbf{T}_{WB_i}} \right) \Sigma_{B_i} \left(\text{Ad}_{\mathbf{T}_{WB_{i+1}}^{-1}} \text{Ad}_{\mathbf{T}_{WB_i}} \right)^T + \Sigma_{B_{i+1}} \\ &\quad - \left(\text{Ad}_{\mathbf{T}_{WB_{i+1}}^{-1}} \text{Ad}_{\mathbf{T}_{WB_i}} \right) \Sigma_{B_i B_{i+1}} - \Sigma_{B_i B_{i+1}}^T \left(\text{Ad}_{\mathbf{T}_{WB_{i+1}}^{-1}} \text{Ad}_{\mathbf{T}_{WB_i}} \right)^T \end{aligned} \quad (69)$$

15 结论

在这最后一篇文章中，我们回顾了李群伴随的概念，用来解释左侧的增量和右侧的增量之间的关系。这是我们需要的最后一部分，以确保我们的估计与 GTSAM 中使用的约定一致。

我们还提出了一些表达式来操作位姿的分布。虽然它们以前在文献中有过介绍，但我们展示了如何操纵不确定性的一般准则，以便与我们使用的坐标系和约定保持一致。

16 Acknowledgments

I would like to thank again the interesting discussions originated in the gtsam-users group. Stefan Gächter guided a rich conversation doing some important questions that motivated the idea of writing this post.

Coincidentally, similar discussions we had at the Dynamic Robot Systems group at the University of Oxford were aligned with the topics discussed here and facilitated the writing process. Special thanks to Yiduo Wang and Milad Ramezani for our conversations, derivation and testing of the

formulas for the covariance of relative poses presented here, Marco Camurri for feedback on the notation and proofreading, and Maurice Fallon for encouraging to write this post.

Finally, thanks to Frank Dellaert, José Luis Blanco-Claraco, and John Lambert for proofreading the posts and their feedback, as well as Michael Bosse for providing insightful comments to ensure the consistency of the topics presented here.