

用于从大的干扰中恢复的多旋翼姿态控制

Mark W. Mueller

摘要—我们提出了一种新颖的、高性能的多旋翼姿态控制律，以期从大干扰中恢复。该控制器与文献中三种成熟的替代方案进行了比较。所考虑的所有控制器在一阶上都是相同的，但在姿态误差计算上有所不同。我们表明，从安全角度来看，普遍使用的旋转矩阵的斜对称部分是有问题的，特别是闭环系统可能会在大的姿态误差下停留任意时间（这将导致实际系统的潜在故障）。新提出的控制器优先考虑飞行器推力方向上的误差，其性能优于文献中类似的现有控制器。稳定性通过 Lyapunov 函数实现，控制器在实验中得到验证。这种新型控制器在安全关键情况下尤其具有吸引力，在这种情况下，多旋翼可能需要从大的初始干扰中恢复。

I. 简介

成功控制多旋翼无人机的一个关键要求是控制其姿态，或方向。典型的多旋翼飞机的设计意味着它们能够在任意方向上产生扭矩，从而使姿态动力学被完全激励。对多旋翼飞机良好的姿态控制的实际需要，进一步补充了方向的非线性动力学的耐人寻味和优雅的性质，这导致了关于该主题的大量出版物。

在文献 [4] 中，对姿态控制做了很好的介绍，详细讨论了方向的特性及其动力学，并提出了一些控制法，同时提供了深入的稳定性分析。具体来说，其中的一个主要论点是直接使用旋转矩阵进行控制，而不是（例如）使用旋转的欧拉对称参数/四元数。在文献 [7] 中给出了一个使用四元数进行姿态控制的例子。替代策略可以使用，例如，欧拉角 [12]，这是很直观的描述，但在大方向上有着不想要的特性。

多旋翼飞机的敏捷性是毋庸置疑的，并且它们能够完成非凡的壮举（例如 [17, 15, 20, 16, 6]）。因此，它们在日常生活中执行越来越多的任务，包括检查、监视、运输货物，以及作为剧团的一部分进行表演。作为这种日益普遍的现象的一部分，预计他们将遇到（并从中恢复）越来越多的潜在干扰。

本文的目标如下。首先，我们简要介绍三种流行的多旋翼飞机姿态控制策略，并讨论其相对优势和劣势。这些控制器仅在姿态误差如何影响指令角加速度方面有所不同，具体包括使用旋转矩阵的倾斜对称分量（如文献 [10]）、旋转向量（旋转的轴-角表示，如文献 [3, 25]），或基于四元数的倾斜优先级（如文献 [2]）。具

体来说，我们认为斜对称控制策略虽然被证明具有几乎全局的稳定性，但在实际系统中使用时，由于系统有可能在接近 180° 的姿态下依期望滞留任意长的时间，实际上代表了一种安全问题。然后，受文献 [2] 的启发，我们提出了一种新型的倾斜优先的多旋翼飞机姿态控制器，它优先考虑多旋翼飞机实现目标加速度的能力。这种新型控制器使用旋转矩阵和旋转向量进行分析，允许使用一个特别简单的 Lyapunov 函数进行稳定性分析。本文给出了数值结果，比较了各种控制器的性能，并强调了拟议控制法的优点。因此，本文的贡献是推导出一个新的倾斜优先的姿态控制法，将其与文献中流行的姿态方法进行比较，演示和讨论一个流行的和广泛使用的姿态控制器的安全问题，并对控制法进行数值和实验验证。

应该注意的是，除了文献 [2] 之外，还有其它形式的倾斜优先级被使用。例如，在文献 [25] 中，使用了与所拟议方法类似的姿态分解；然而，优先级是通过将恢复轨迹分为两阶段来完成：第一阶段控制倾斜角，第二阶段随后控制类似偏航的角度。

我们接着简要介绍多旋翼飞机动力学和姿态数学的显著特征，以及飞行器姿态如何影响其运动。在 Section III 中，我们描述了文献中的控制器，并推导出新的控制器。在 Section IV 中用数值例子说明了控制器的特性，在 Section V 中给出了实验结果，并且我们在 Section VI 中给出结论。

II. 问题描述

传统的多翼机的特点是具有偶数个（至少四个）大小相等的固定螺距螺旋桨，这些螺旋桨围绕几何中心以旋转对称的方式排列，几何中心大致与飞行器的电池、电子设备和有效载荷重合。螺旋桨手性交替排列，以使它们的空气动力学的反应扭矩的总和为零。

除了这种典型的配置外，许多其它的设计也是可能的，并且已经被考虑过。例如，使用直径大不相同的螺旋桨以提高效率 [18]，使螺旋桨可倾斜 [21]，以及螺旋桨不对齐的飞行器，使其平移能力被完全激励 [14]。尽管这类飞行器并不完全符合下面的描述，但它们的姿态控制问题是相似的，因为它们能够产生任意的 3D 扭

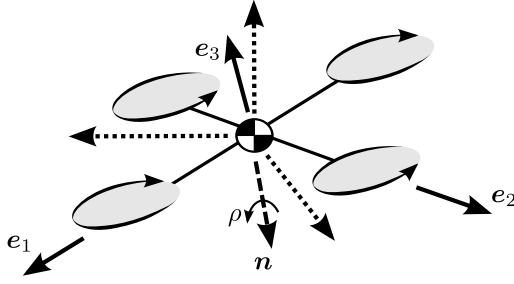


图 1. 一架多旋翼飞机带机体固连轴 e_1 、 e_2 和 e_3 ，从点线表示的期望的轴，被 R 旋转过来。旋转 R 是围绕单位向量 n ，角度为 ρ 的旋转。

矩，因此它们的姿态动力学是被完全激励的。

A. 动力学

多旋翼飞机的方向 (将机体固连坐标系与惯性坐标系联系起来) 由旋转矩阵 $R \in \text{SO}(3)$ 描述，而角速度由 $\omega \in \mathbb{R}^3$ 给出。旋转矩阵主要通过推力向量的方向来影响多旋翼飞机的运动，推力向量相对于飞行器有固定方向。

飞行器的螺旋桨都在相同的机体固连方向上产生推力 e_3 ，并且量值为 f_Σ ，示意图参见 Fig. 1。飞行器具有质量 m ，受到重力加速度 g 的作用，因此，飞行器平移加速度 a 给出为

$$a = \frac{1}{m} R e_3 f_\Sigma + g. \quad (1)$$

因此，通过控制飞行器的姿态和指定总推力，可以控制平移加速度。从方程 (1) 中值得注意的是，姿态的三个自由度中只有两个与平移动力学有关，特别是围绕飞行器的 e_3 轴的旋转并不重要。

姿态演变为

$$\dot{R} = R S(\omega) \quad (2)$$

其中 $S(\cdot) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{so}(3)$ 产生向量参数的倾斜对称矩阵形式 (通常称为 “hat-map”)，特别是如果 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 则

$$S(x) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

值得注意的是，对于 $x, y \in \mathbb{R}^3$ 以及 $R \in \text{SO}(3)$ [1]

$$S(x) = -S(x)^T \quad (4)$$

$$S(x) y = x \times y = -S(y) x \quad (5)$$

$$S(Rx) = R S(x) R^T \quad (6)$$

上述 $S(\cdot)$ 的逆函数是 $v(\cdot) : \text{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ，所以

$$v(S(x)) = x \quad (7)$$

角加速度 α 是飞行器质量惯性矩张量 J 、作用在飞行器上的外部力矩 τ 和当前角速度的函数，为

$$\alpha = \dot{\omega} = J^{-1} (\tau - S(\omega) J \omega) \quad (8)$$

所有传统多旋翼飞机 (四旋翼、六旋翼和八旋翼) 的配置都可以使飞行器产生一个任意 (达到电机力饱和) 的三维力矩 τ ，其与总推力 f_Σ 无关。作为单个螺旋桨力的函数，力矩和总推力的计算以直截了当的方式遵循飞行器的几何形状和螺旋桨的特性。典型的多旋翼飞机的一个重要特征是，它们能够在垂直于推力向量的方向上产生比围绕推力向量大得多的扭矩。这是由于螺旋桨与质心的距离很大，这可能比螺旋桨的空气动力扭矩与推力的比率大一个数量级以上。对于敏捷机动在计算推力方面的深入讨论，示例参见文献 [5]。

B. 控制问题

因此，从方程 (8) 可以看出，在任何瞬时角速度下都可以产生任意的角加速度 α (直至电机推力饱和)。这促使将角加速度用作姿态子系统的控制输入，并且特别的是，这意味着多旋翼飞机的姿态可以被视为被完全激励，从而得到更简单的姿态动力学：

$$\dot{R} = R S(\omega) \quad (9)$$

$$\dot{\omega} = \alpha \quad (10)$$

我们认为控制问题是将飞行器的方向控制在一个期望的姿态 R_{des} ，它有一个相关的期望的角速度 ω_{des} 和角加速度 α_{des} ，以便

$$\frac{d}{dt} R_{\text{des}} = R_{\text{des}} S(\omega_{\text{des}}) \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \omega_{\text{des}} = \alpha_{\text{des}} \quad (12)$$

旋转误差 R_e 和它的角速度 ω_e 被定义为

$$R_e = R_{\text{des}}^{-1} R \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} R_e = R_e S(\omega_e) \quad (14)$$

代入旋转误差的定义，并经过一些代数运算，由此得出

$$\omega_e = \omega - R_e^{-1} \omega_{\text{des}} \quad (15)$$

$$\alpha_e = \frac{d}{dt} \omega_e = \alpha - R_e^{-1} \alpha_{\text{des}} + S(\omega_e) \omega_{\text{des}} \quad (16)$$

为紧凑起见,我们将使用 α_e 作为控制输入,注意,指令扭矩是通过将方程 (16) 代入方程 (8) 恢复的。

为了进行分析,通常更直观的方法是将旋转矩阵 \mathbf{R} 表示为旋转向量,其被分解为角度 $\rho \in [0, \pi]$ 和单位长度旋转轴 \mathbf{n} (通常称为特征轴)。这些数量之间的关系由文献 [22] 给出为

$$\mathbf{R} = \cos \rho \mathbf{I} + (1 - \cos \rho) \mathbf{n} \mathbf{n}^T + \sin \rho \mathbf{S}(\mathbf{n}) \quad (17)$$

由此,给定旋转矩阵的角度和轴也可以直接向前恢复,除非以 180° 的旋转,此时围绕 \mathbf{n} 和 $-\mathbf{n}$ 的旋转是相同的,以及与轴不相关的零旋转。

III. 控制器

我们考虑了四种不同的控制布局,其中三种在有趣和具有挑战性的环境中都有过应用历史,而第四种是一种新的算法。所有的控制器都有一个与角速度成比例的动作,以及一个与飞行器姿态 (以某种表示) 成比例的动作分量。这些控制器的主要区别在于该姿态的表示,并且尽管这些控制器在一阶上是相同的,但在下一节中会显示,对于大的姿态误差会出现重要的差异。

A. 斜对称控制

这种控制如文献 [10] 所述,并且首先提出它是因为它在文献中的使用特别广泛 (有一些示例包括文献 [24, 8, 11, 23, 19]), 特别是它在有影响力的文献 [13] 中的使用。注意,我们使用了一个大大不同的符号和表示方法,希望提供一个统一的比较和额外的洞察力。

姿态误差由旋转矩阵的斜对称分量计算出来,因此期望的角加速度给出为

$$\alpha_{e,des}^{SS} := -K_\omega \omega_e - \frac{1}{2} K_R v(\mathbf{R}_e - \mathbf{R}_e^T) \quad (18)$$

其中 K_ω 和 K_R 为正定控制器增益,每种增益都是 $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ 。注意,可以通过方程 (17) 重写姿态分量,为

$$\frac{1}{2} v(\mathbf{R}_e - \mathbf{R}_e^T) = \sin \rho_e \mathbf{n}_e \quad (19)$$

因此

$$\alpha_{e,des}^{SS} = -K_\omega \omega_e - K_R \sin \rho_e \mathbf{n}_e. \quad (20)$$

该控制器的稳定性可以用下面的 Lyapunov 函数来研究

$$J^{SS} := \frac{1}{2} \omega_e^T K_R^{-1} \omega_e + \frac{3 - \text{tr}(\mathbf{R}_e)}{2} \quad (21)$$

其中,矩阵的迹 $\text{tr}(\mathbf{R}_e)$ 与旋转角度相关,如下所示

$$\text{tr}(\mathbf{R}_e) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i^T \mathbf{R}_e \mathbf{e}_i \quad (22)$$

$$= 2 \cos \rho_e + 1 \quad (23)$$

其中后面的等式来自于方程 (17)。因此, Lyapunov 函数可以更直观地写为

$$J^{SS} := \frac{1}{2} \omega_e^T K_R^{-1} \omega_e + (1 - \cos \rho_e) \quad (24)$$

我们可以很容易地验证它是一个有效的候选 Lyapunov 函数。

矩阵的迹 $\text{tr}(\mathbf{R}_e)$ 的时间导数从方程 (22) 得出为

$$\frac{d}{dt} \text{tr}(\mathbf{R}_e) = - \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i^T \mathbf{R}_e \mathbf{S}(\mathbf{e}_i) \omega_e. \quad (25)$$

此外,通过直接计算,它可以被证明为

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i^T \mathbf{R}_e \mathbf{S}(\mathbf{e}_i) = v(\mathbf{R}_e - \mathbf{R}_e^T)^T \quad (26)$$

因此,取 Lyapunov 函数的时间导数以获得

$$\frac{d}{dt} J^{SS} = \omega_e^T \left(K_R^{-1} \alpha + \frac{1}{2} v(\mathbf{R}_e - \mathbf{R}_e^T) \right) \quad (27)$$

$$= -\omega_e^T K_R^{-1} K_\omega \omega_e \leq 0 \quad (28)$$

通过注意二阶时间导数,渐进稳定性给出为

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} J^{SS} = & \omega_e^T (K_R^{-1} K_\omega + K_\omega^T K_R^{-T}) \cdot \\ & (-K_R \sin \rho_e \mathbf{n}_e - K_\omega \omega_e) \end{aligned} \quad (29)$$

负半定导数意味着 $J^{SS}(t) \leq J^{SS}(0)$; 反过来形成角速度 ω_e 的界限。从这个界限来看,二阶导数是有界限的,所以 $\frac{d}{dt} J^{SS}$ 是一致连续和可积的。因此,当 $t \rightarrow \infty$ 时,根据 Barbalat 引理, $\frac{d}{dt} J^{SS} \rightarrow 0$, 并且明确地, $\omega_e \rightarrow 0$ 。代入控制法可以得出结论,如果 $\rho_e \neq \pi$, 则方向误差也会收敛到特征值,从而建立渐近稳定性。

一个非常密切相关的控制策略是用不同的标量值 [4] 对方程 (22) 右侧的各项进行加权总和。由此产生的闭环系统具有一些理想的特性 (并且其稳定性在文献 [4] 中得到了证明,而不依赖于 Lyapunov 函数), 并且在姿态动力学中引入了在方程 (18) 中不存在的三个鞍点。然而,该控制器足够相似,我们只考虑所有项都具有相等权重的更简单形式。

B. 旋转向量控制

对于这种控制策略，使用旋转向量计算姿态误差 (以便反馈的姿态部分与角度误差成比例)。所期望的角加速度为

$$\alpha_{e,des}^{RV} := -K_\omega \omega_e - K_R \rho_e \mathbf{n}_e \quad (30)$$

其中 K_ω 和 K_R 同样是正定的增益矩阵。注意，根据定义，角度是有界限的，因此 $0 \leq \rho_e \leq \pi$ 。此外，注意与方程 (18) 的相似性，关键的区别在于这里使用了角度值，而不是它的正弦值。

利用 Lyapunov 函数分析其所产生的闭环系统的稳定性

$$J^{RV} := \frac{1}{2} \omega_e^T K_R^{-1} \omega_e + \frac{1}{2} \left(\arccos \frac{\text{tr}(\mathbf{R}_e) - 1}{2} \right)^2 \quad (31)$$

其可简化为

$$J^{RV} = \frac{1}{2} \omega_e^T K_R^{-1} \omega_e + \frac{1}{2} \rho_e^2 \quad (32)$$

注意到旋转角度的时间导数由文献 [22, 方程 (270)] 给出为

$$\frac{d}{dt} \rho_e = \mathbf{n}_e^T \omega_e \quad (33)$$

则方程 (31) 的时间导数跟着为

$$\frac{d}{dt} J^{RV} = \omega_e^T K_R^{-1} \alpha + \rho_e \omega_e^T \mathbf{n}_e \quad (34)$$

$$= -\omega_e^T K_R^{-1} K_\omega \omega_e \leq 0 \quad (35)$$

从这一点来看，通过注意到有界限的二阶导数并援引 Barbalat 引理，渐近稳定性与斜对称控制器类似。同样，这需要 $\rho_e \neq \pi$ 。

旋转向量的使用在概念上很优雅，因为控制动作与角度成比例，即使是大的姿态误差也是如此。这意味着系统的闭环行为 (如果限制在一个单一的旋转自由度上) 将表现得像一个二阶阻尼系统，即使是大角度，只要 $\rho_e < 180^\circ$ 。然而，当角度‘穿过’ 180° 时，控制输入会有不连续性，因为对于 \mathbf{n}_e 的符号会翻转。

C. 基于四元数的倾斜优先控制

这种控制器基于这样的直觉，即四旋翼飞机姿态的最重要部分是其推力轴的方向，因此应优先控制该方向，而不是其它单一的姿态自由度。该控制器在文献 [2] 中提出，并且其推导基于旋转四元数。在这里它被转变为旋转矩阵表示法，以便更好地与其它两种已提出的方法放在相同上下文进行比较，并作为拟议的控制器的预览。

姿态误差被分为两部分：一个优先的‘减小的’姿态 \mathbf{R}_r ，表示将推力方向与所期望的推力方向对齐的最短旋转，以及一个围绕推力轴的旋转 \mathbf{R}_y ，表示围绕推力轴的剩余旋转。具体地，减小的姿态是最小的旋转，对它来说

$$\mathbf{R}_e \mathbf{R}_r^T \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \quad (36)$$

并且

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{R}_y \mathbf{R}_r \quad (37)$$

由此可知， \mathbf{R}_y 是一个纯粹地围绕 \mathbf{e}_3 的旋转。注意，这个角度在一阶上等同于 (3-2-1 偏航-俯仰-横滚序列的) 欧拉‘偏航’角。

与 \mathbf{R}_r 相对应的轴 \mathbf{n}_r 和角度 ρ_r 可计算为

$$\rho_r = \arccos \mathbf{e}_3^T \mathbf{R}_e \mathbf{e}_3 \quad (38)$$

$$\mathbf{n}_r = \frac{S(\mathbf{R}_e^T \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3}{\|S(\mathbf{R}_e^T \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3\|} = \frac{S(\mathbf{R}_e^T \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3}{\sin \rho_r} \quad (39)$$

注意这个，根据结构， \mathbf{n}_r 垂直于推力方向。还要注意，在方 (39) 中潜在的除以零的情况并不重要，因为此时在方程 (38) 中相应的角度则为零 (并且因此可以指定一个任意的轴)。

偏航旋转的轴 \mathbf{n}_y 和角度 ρ_y 被计算为与旋转矩阵 \mathbf{R}_y 相对应的值，如下所示

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{R}_e \mathbf{R}_r^{-1} \quad (40)$$

其中 \mathbf{n}_y 将总是与 \mathbf{e}_3 平行或反平行。因为 \mathbf{R}_r 和 \mathbf{R}_y 的旋转轴是垂直的，因此角度的关系如下所示 [22, 方程 (114)]

$$\cos \left(\frac{1}{2} \rho_e \right) = \cos \left(\frac{1}{2} \rho_r \right) \cos \left(\frac{1}{2} \rho_y \right) \quad (41)$$

因此 $\rho_r \leq \rho_e$ (由于角度在区间 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 中的 \cos 的单调性)。

控制动作给出如下，其中半角的使用来自于原始的基于旋转四元数的形式 [2]：

$$\alpha_{e,des}^{QTP} = -K_\omega \omega_e - 2k_r \mathbf{n}_r \sin \frac{\rho_r}{2} - 2k_y \mathbf{n}_y \sin \frac{\rho_y}{2} \quad (42)$$

并且特别的是 $k_r > k_y$ 以优先减少倾斜误差 ρ_r 。这个控制器的稳定性证明有点复杂，这里就不重复了 – 读者可以参考文献 [2]。

作为无穷小旋转代偿 (因此它们的旋转向量表示可以被添加到相关的旋转组合中)，可以看到这个控制法以与先前的控制器相同的方式线性化。

像旋转向量控制一样，控制动作在 $\rho_e = 180^\circ$ 处是不连续的。然而，与基于旋转向量的控制器不同，正弦函数的非线性意味着大的纯旋转不会表现得像二阶阻尼旋转。

D. 倾斜优先的比例控制

受旋转向量和基于四元数的倾斜优先控制器的启发，我们提出了一种替代形式，其中控制动作与角度成比例，而不是四元数公式所采用的半角的 \sin 。这有四个优点：(1) 与旋转向量控制器一样，闭环系统的反应与围绕其中一个主轴的任意初始旋转的二阶阻尼系统完全相同，(2) 其 Lyapunov 函数非常简单，(3) 当减小的姿态误差的相对优先级接近整体姿态的优先级时，控制器收敛到旋转向量控制器，并且 (4) 拟议的控制器在收敛速度和控制动作效率方面都优于基于四元数的控制器。

再次使用 k_r 作为应用于倾斜角度误差的增益，并且使用 k_y 作为剩余角度的增益，我们使用控制法

$$\alpha_{e,des}^{New} = -K_\omega \omega_e - k_y \rho_e \mathbf{n}_e - (k_r - k_y) \rho_r \mathbf{n}_r \quad (43)$$

其中，与前面一样， ρ_e 表示总的姿态误差，并且 ρ_r 表示减小的姿态误差。与基于四元数的控制器不同，这不需要计算 ρ_y 和 \mathbf{n}_y 。注意，控制器有两个与姿态误差相关的项，并且对于对称控制 ($k_y = k_r$)，它简化为旋转向量控制方程 (30)。

稳定性通过以下 Lyapunov 函数实现

$$J^{New} := \frac{1}{2} \omega_e^T \omega_e + \frac{1}{2} k_y \rho_e^2 + \frac{1}{2} (k_r - k_y) \rho_r^2 \quad (44)$$

这对于 $0 < k_y \leq k_r$ 是正定的 (换句话说，对倾斜角的控制必须至少与整体姿态的控制一样重要)。

减小的倾斜角度误差 ρ_r 的导数可以从方程 (38)-(39) 中计算为

$$\frac{d}{dt} \rho_r = \mathbf{n}_r^T \omega_e \quad (45)$$

(其与方程 (33) 相似)，因此

$$\frac{d}{dt} J^{New} = \omega_e^T (\alpha + k_y \rho_e \mathbf{n}_e + (k_r - k_y) \rho_r \mathbf{n}_r) \quad (46)$$

$$= -\omega_e^T K_\omega \omega_e \leq 0 \quad (47)$$

应用 Barbalat 引理 (与斜对称控制器一样) 可以得到 $\rho_e \neq \pi$ 的渐进稳定性，这里需要注意的是，不需要 ρ_r 进行附加约束，因为根据方程 (41)， $\rho_r \leq \rho_e$ 。再次注意，这个控制器的性能与其它所有控制器的一阶性能相同。

在极限情况下，当 k_y 接近零时，控制器倾向于只控制飞行器的倾斜角度，这是与基于四元数的倾斜优先控制共享的行为。然而，该控制器的一个有用的附加特性是，当倾斜角度的相对重要性降低时 (即当 $k_y \rightarrow k_r$ 时)，它平滑地收敛到基于旋转向量的控制。这意味着设计者可以实施此种控制法，即使不需要有倾角刚度的大量增加。

IV. 性能

在本节中，将在几个突出的不同的特性条件下比较控制器。如前所述，对于小的误差，所有的控制器的行为都类似 (并且设置 $K_R = \text{diag}(k_r, k_r, k_y)$)。然而，对于大的姿态误差，会出现显著的差异。具体来说，它将显示，斜对称控制器将在任意持续时间内保持几乎是 180° 的姿态误差；在安全关键环境中部署时，这是一个特别值得关注的问题。

在每种情况下，基于旋转向量的控制器在总的姿态误差方面表现最好；并且具体而言，基于旋转向量的控制器似乎比斜对称控制更可取。然而，当仅考虑推力方向误差时，倾斜优先控制器 (包括基于四元数的控制器以及拟议的控制器) 的性能优于旋转向量控制器。此外，拟议的控制器将被证明优于基于四元数的控制器。

A. 共用模拟参数

对于所有仿真，姿态控制参数如下：

$$K_R = \text{diag}(k_r, k_r, k_y) \quad (48)$$

$$k_r = 4 \text{ s}^{-2} \quad (49)$$

$$k_y = 1 \text{ s}^{-2} \quad (50)$$

$$K_\omega = \sqrt{2} \text{diag}(2, 2, 1) \text{ s}^{-1} \quad (51)$$

因此，所有的控制器在一阶上表现为质量-弹簧-阻尼器，其倾斜方向的自然频率为 2rad/s ，并且偏航方向为 1rad/s ，以及阻尼比为 $\sqrt{1/2} \approx 0.707$ 。所有控制器在实验中共享相同的控制参数。

B. 斜对称控制器的任意缓慢收敛

假设飞行器静止起步，但有一个姿态误差为 $\rho \approx 180^\circ$ 。从方程 (20) 可以清楚地看出，由于采用了角度的正弦，斜对称控制器指令的角加速度大约为零。在飞行中，这本身就是一个安全问题 – 虽然只要姿态不精确在 $\rho = 180^\circ$ 处，最终会收敛到所需的姿态，但这可能需要任意长的时间。具体而言，当姿态误差超过 90° 时，姿态控制的‘刚度’开始下降。在四个控制器中，这是斜对称控制器所独有的。

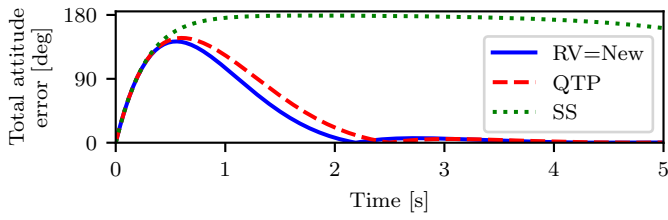


图 2. 来自 Section IV-B 的示例：从大的初始角速度恢复，显示了斜对称控制器的灾难性性能。‘SS’ 指的是斜对称控制器方程 (18)，‘RV’ 指的是旋转向量控制器方程 (30)，‘QTP’ 指的是基于四元数的倾斜优先级控制器方程 (42)，并且 ‘New’ 指的是提议的控制器方程 (43)。基于旋转向量的控制器的行为与新控制器的行为相同。

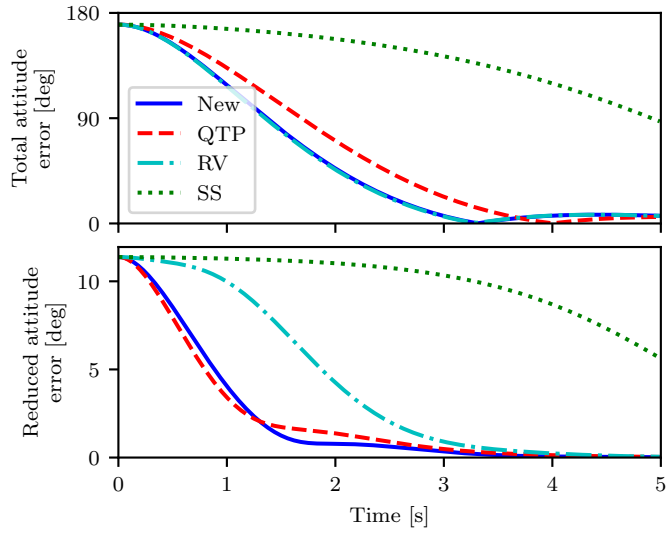


图 3. 来自 Section IV-C 的示例：从大的初始偏航误差中恢复，初始倾斜误差较小，显示了拟议的控制器的推力方向的更快收敛。

为了更生动地说明这一潜在的安全问题，考虑一个初始姿态误差为零的飞行器，但角速度为 $\omega(0) = (10.8, 0, 0)$ rad/s。系统的反应显示在 Fig. 2。值得注意的是，所有控制器都能迅速将角速度降为零，但斜对称控制器的姿态误差徘徊在 180° 左右。基于旋转向量的控制器和所提出的新控制器性能相同，并且略优于基于四元数的推力优先控制器。

尽管之前已经注意到斜对称控制器收敛缓慢的可能性 [9]，但该控制器在文献中仍然很受欢迎 (例如文献 [23, 24, 19])。

C. 倾斜优先的优点

根据设计，倾斜优先控制器应使飞行器的推力方向更快地收敛到期望的推力方向。作为这种行为的一个示例，考虑一个从静止开始的飞行器，但围绕轴 $n(0) \approx$

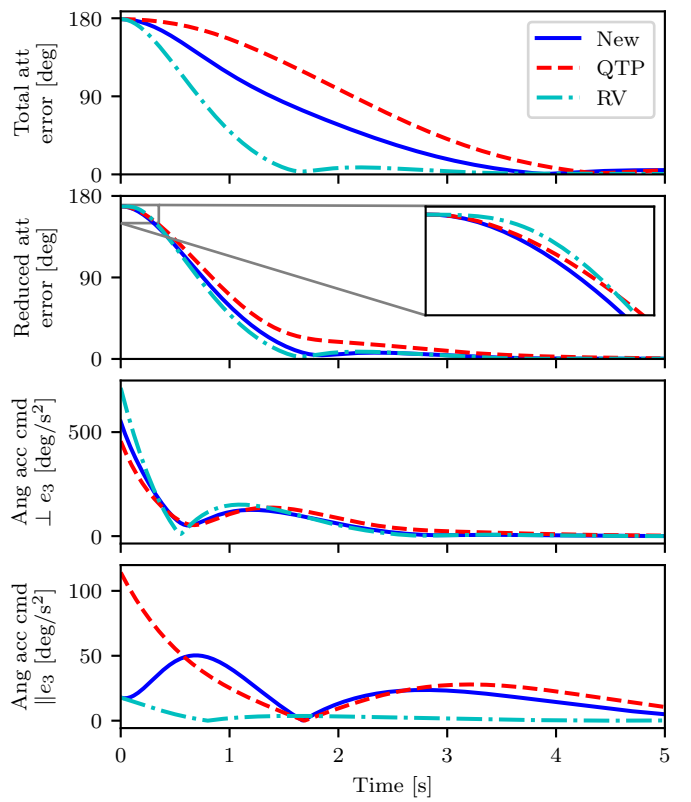


图 4. 来自 Section IV-D 的示例：从大的初始倾斜误差中恢复，初始偏航误差小，显示了基于旋转向量的控制优于拟议的推力优先控制器的例子。从上到下：总的姿态误差 ρ ；减小的姿态误差 ρ_r ；垂直于推力方向 e_3 的指令角加速度分量的量值；以及平行于推力方向的指令角加速度分量的量值。插图显示了减小的姿态反应的细节。

(0.0995, 0, 0.995) 已旋转 170° ，因此飞行器有很大的偏航误差，但只有轻微的倾斜误差。在 Fig. 3 中比较了控制器的性能，可以看出，基于四元数的控制器和拟议的控制器都比基于旋转向量的控制器减少倾斜误差的速度更快得多。此外，在这种特定情况下，对于总的姿态误差，拟议的控制器的性能实际上与基于旋转向量的控制器没有什么区别，而基于四元数的倾斜优先控制器的性能明显较差。

斜对称控制器的性能再次特别差。注意，从某种意义上说，这是一个比上一个例子更“友好”的初始条件，因为飞行器现在主要有一个初始偏航误差，理想情况下，这对飞行器的动力学影响应该很小。此外，由于多旋翼飞机典型的视觉旋转对称性，这种错误在起飞时比较典型 (例如，如果操作员错误地放置飞行器)。此外，偏航误差没有被特别仔细地选择；对于 $10/180 \approx 5\%$ 的偏航范围，性能不会比图中所示的更好。

D. 倾斜优先的缺点

对于总的姿态误差 (而不仅仅是倾斜误差), 基于旋转向量的控制通常会优于拟议的控制器, 因为它仅直接作用于该误差。例如, 考虑一个围绕轴 $\mathbf{n}(0) \approx (0.995, 0, 0.0995)$ 的 179° 的初始旋转。围绕垂直于飞行器推力方向的任意轴线进行的旋转将使飞行器的倾斜误差近乎为零, 然而, 通过改变旋转轴线的选择, 剩余的偏航误差可以是零, 也可以大到 180° 。

在 Fig. 4 中比较了控制器的性能。正如预期的那样, 基于旋转向量的控制在考虑整体姿态误差时表现最好, 在这种情况下, 倾斜误差也最终收敛得最快。基于四元数的控制器和新拟议的倾斜优先控制器在整体姿态误差方面的表现都比较差, 但在倾斜角度方面, 进行初始化时确实优于基于旋转向量的控制器。值得注意的是, 在初始化阶段, 拟议的控制器可以最快地减少‘减小的姿态误差’。

此外, 值得注意的是, 拟议的控制器在倾斜误差和总的角度误差方面都优于基于四元数的控制器。此外, 它在这样做的时候, 还指令降低围绕飞行器推力轴的角加速度峰值, 如 Fig. 4 底部所示, 尽管总的姿态误差下降得更快。这种特性在多旋翼飞行器中通常是可取的, 因为它们能够围绕 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 产生比推力方向 \mathbf{e}_3 更大的扭矩, 而围绕 \mathbf{e}_3 的大的角加速度指令可能会迅速导致电机推力的饱和。

V. 实验验证

我们提出两个实验来证明拟议的控制器, 同时也是为了强调上一节所讨论的确定的问题并不限于精心构建的数字模拟。实验使用 Crazyflie 2.0 四轴飞行器进行, 在室内运动捕捉空间中运行。第一个实验演示了一个带着大的初始偏航误差的飞行器起飞。在第二个实验中, 模拟了大的干扰, 以演示飞行器从大的初始误差中恢复。

飞行器采用简单的级联控制结构进行控制, 其中期望的平动加速度由位置误差上的比例-微分控制器计算,

$$\mathbf{a}_{\text{des}} := -k_p (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\text{des}}) - k_d \dot{\mathbf{p}} \quad (52)$$

根据期望的加速度, 期望的方向被生成为最小旋转矩阵 \mathbf{R}_{des} , 对其来说

$$\mathbf{a}_{\text{des}} = \frac{1}{m} \mathbf{R}_{\text{des}} \mathbf{e}_3 f_{\Sigma, \text{des}} + \mathbf{g} \quad (53)$$

其中 $f_{\Sigma, \text{des}}$ 是期望的推力量值, 也是通过上述定义。

注意, 这是一个不复杂的控制结构, 但它足以证明拟议的控制法。



图 5. 实验中使用的四旋翼飞机, 从螺旋桨尖到对置螺旋桨尖的尺寸约为 160mm。

A. 起飞时有大的偏航误差

典型的多旋翼飞机的旋转对称性使得操作者很容易放置一个初始偏航误差较大的多旋翼飞机, 这一点在 Fig. 5 中可以看到。为了说明这种误差的实际效果, 一个四轴飞行器被命令起飞, 并飞到一个高度为 1.5m 的设定点, 在离起飞位置大约 0.5m 的水平距离。然而, 四轴飞行器在初始化时有大的偏航误差 (大约 177°)。在 Fig. 6 中显示了新控制器和斜对称控制器的五个实验的位置轨迹。正如在 Section IV-C 中所预期的那样, 斜对称控制器的表现非常差, 在所有情况下, 飞行器在到达目标点之前都会在目标点附近蜿蜒一段距离 (如果它没有首先与墙壁相撞的话)。拟议的控制器没有表现出这种行为。

B. 从大的初始误差中恢复

为了证明拟议的控制器在从大的干扰中恢复时的性能, 我们进行了一系列的实验, 在这些实验中, 四旋翼飞机被用户抛到高空, 而控制器只在飞行器超过一定的高度阈值时才启动。这些实验的结果显示在 Fig. 7 中 – 从图中可以看出, 减小的姿态误差被迅速控制到零, 而总的姿态误差可能衰减得更慢。这与之前的数值模拟示例的直觉相符。

VI. 讨论与结论

在本文中, 我们比较了四种多旋翼飞机的姿态控制器, 其中三种来自文献, 一种为新的控制器。所有的性能都与一阶相同。然而, 事实表明, 角加速度与旋转矩阵的斜对称部分成比例的控制器存在安全问题, 因为如果总的角误差接近 180° , 则大的姿态误差可能会持续任意一段时间 (注意, 该行为存在于该点附近的一个相当大的邻域)。使用与姿态误差的旋转向量表示成比例的角加速度被证明是可取的, 因为不存在这种危险。此

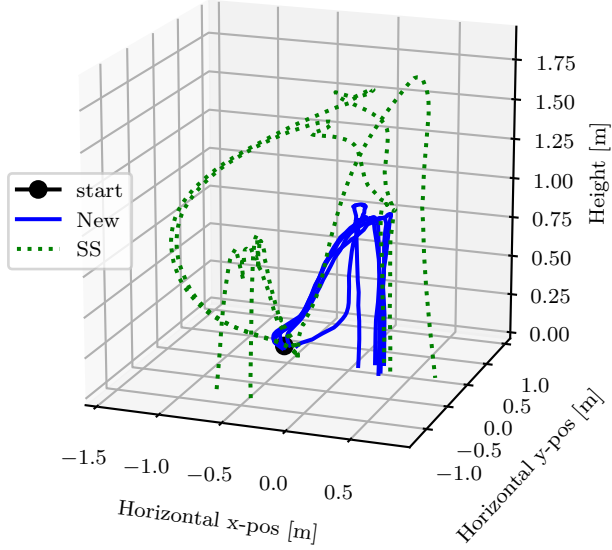


图 6. 四轴飞行器从黑点开始, 被命令沿 x 方向水平飞行 0.5m, 高度为 1.5m 的位置痕迹 (对于多次实验)。四轴飞行器开始时有大的偏航误差。轨迹的变化是由于系统中的噪声造成的。

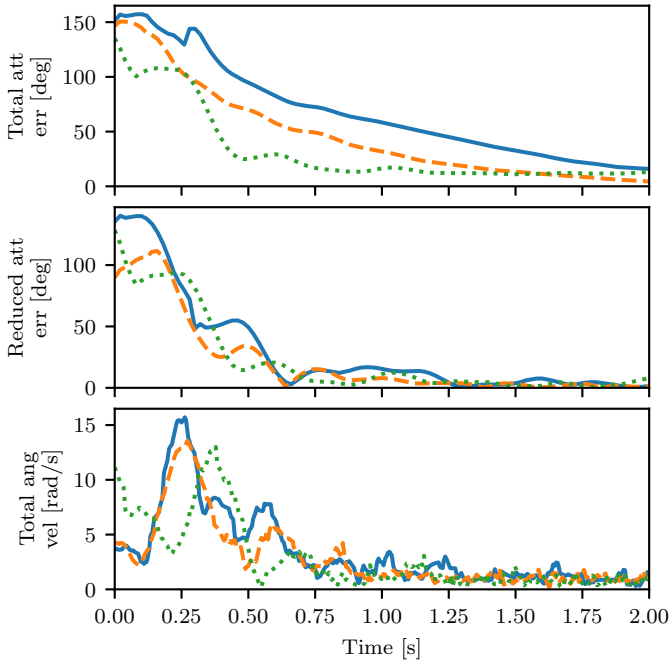


图 7. 一个飞行器在被用户扔到空中后, 使用拟议的控制器从大的初始干扰中恢复的实验结果。控制动作在时间 0 后立即开始, 并且每种线条样式在三个图中标识相同的实验。姿态误差由运动捕捉数据估计, 角速度由速率陀螺仪测量。

外, 任何纯的初始旋转都会像阻尼二阶系统一样衰减, 从而产生更直观的行为。

将姿态误差分解为倾斜和偏航分量, 允许控制器优先考虑飞行器的推力方向, 并因此有可能更快地收敛飞行器姿态中主导平移运动的那部分。我们在文献 [2] 中提出了基于四元数的倾斜优先控制器, 其中角加速度与一半误差角的正弦成比例。该控制器没有像斜对称控制器那样引起任何安全问题。

受此启发, 我们还提出了一种新型控制器, 该控制器优先考虑飞行器倾斜, 但角加速度与角度成比例。该控制器采用旋转轴和角度构成, 便于直观描述, 并且稳定性用相对简单的 Lyapunov 函数表示。具体而言, 控制动作是两种控制动作组合的结果, 是与旋转向量成比例控制和与单一的倾斜误差成比例控制的组合。虽然它受到基于四元数的倾斜优先控制器的启发, 但其行为与之不同, 而且闭环性能与基于四元数的控制器相比更有优势。此外, 如果倾斜的优先级不高于偏航角, 该新型控制器继续保持良好的性能, 特别是当偏航方向的控制权重收敛到倾斜方向的控制权重时, 在极限情况下会收敛到基于旋转向量的控制。实验结果验证了现实条件下该控制器的性能。

因此, 我们建议将该新型控制器应用于多旋翼飞机, 特别是在需要对大的干扰具有鲁棒性的地方。该控制器的性能优于标准控制器, 具体而言, 它不像斜对称控制器那样在大的姿态误差下收敛性差; 在大多数情况下, 它优于基于旋转向量的控制器; 姿态误差收敛的速度 (使用潜在的不太激进的输入) 比基于倾斜优先的四元数控制器更快。

Acknowledgements

This research was supported by funding from the Powley foundation. We also thank Koushil Sreenath and Dario Brescianini for their valuable inputs.

参考文献

- [1] Dennis S Bernstein. Matrix mathematics: theory, facts, and formulas. Princeton University Press, 2009.
- [2] Dario Brescianini, Markus Hehn, and Raffaello D'Andrea. Nonlinear quadcopter attitude control. 2013.
- [3] Francesco Bullo and Richard M. Murray. Proportional derivative (PD) control on the Euclidean group. In European Control Conference (ECC), volume 2, pages 1091–1097, 1995.

- [4] Nalin A Chaturvedi, Amit K Sanyal, and N Harris McClamroch. Rigid-body attitude control. *IEEE Control Systems*, 31(3):30–51, 2011.
- [5] Matthias Faessler, Davide Falanga, and Davide Scaramuzza. Thrust mixing, saturation, and body-rate control for accurate aggressive quadrotor flight. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2(2):476–482, 2017.
- [6] Davide Falanga, Elias Mueggler, Matthias Faessler, and Davide Scaramuzza. Aggressive quadrotor flight through narrow gaps with onboard sensing and computing using active vision. In *Robotics and Automation (ICRA), 2017 IEEE International Conference on*, pages 5774–5781. IEEE, 2017.
- [7] Emil Fresk and George Nikolakopoulos. Full quaternion based attitude control for a quadrotor. In *Control Conference (ECC), 2013 European*, pages 3864–3869. IEEE, 2013.
- [8] Farhad Goodarzi, Daewon Lee, and Taeyoung Lee. Geometric nonlinear PID control of a quadrotor UAV on SE (3). In *European Control Conference (ECC)*, pages 3845–3850. IEEE, 2013.
- [9] Taeyoung Lee. Exponential stability of an attitude tracking control system on SO(3) for large-angle rotational maneuvers. *Systems & Control Letters*, 61(1):231–237, 2012.
- [10] Taeyoung Lee, Melvin Leok, and N Harris McClamroch. Geometric tracking control of a quadrotor UAV on SE (3). In *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*, pages 5420–5425. IEEE, 2010.
- [11] Taeyoung Lee, Melvin Leok, and N Harris McClamroch. Nonlinear robust tracking control of a quadrotor UAV on SE (3). *Asian Journal of Control*, 15(2):391–408, 2013.
- [12] Sergei Lupashin, Markus Hehn, Mark Wilfried Mueller, Angela P. Schoellig, Michael Sherback, and Raffaello D’Andrea. A platform for aerial robotics research and demonstration: The Flying Machine Arena. *Mechatronics*, 24(1):41 – 54, 2014. ISSN 0957-4158.
- [13] Robert Mahony, Vijay Kumar, and Peter Corke. Aerial vehicles: Modeling, estimation, and control of quadrotor. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 19(3):20–32, 2012.
- [14] Hamza Mehmood, Takuma Nakamura, and Eric N Johnson. A maneuverability analysis of a novel hexarotor UAV concept. In *Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2016 International Conference on*, pages 437–446. IEEE, 2016.
- [15] Daniel Mellinger, Nathan Michael, and Vijay Kumar. Trajectory generation and control for precise aggressive maneuvers with quadrotors. *The International Journal of Robotics Research*, 31(5): 664–674, 2012.
- [16] Mark W. Mueller and Raffaello D’Andrea. Relaxed hover solutions for multicopters: application to algorithmic redundancy and novel vehicles. 35(8): 873–889, 2015.
- [17] Mark W. Mueller, Sergei Lupashin, and Raffaello D’Andrea. Quadrocopter ball juggling. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 5113–5120, 2011.
- [18] P Pounds, R Mahony, P Hynes, and J Roberts. Design of a four-rotor aerial robot. In *Australasian Conference on Robotics and Automation*, volume 27, page 29, 2002.
- [19] Ramy Rashad, Petra Kuipers, Johan Engelen, and Stefano Stramigioli. Design, modeling, and geometric control on SE (3) of a fully-actuated hexarotor for aerial interaction. *arXiv preprint arXiv:1709.05398*, 2017.
- [20] Robin Ritz, Mark W. Mueller, Markus Hehn, and Raffaello D’Andrea. Cooperative quadrocopter ball throwing and catching. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 4972–4978. IEEE, 2012.
- [21] Markus Ryll, Heinrich H Bühlhoff, and Paolo Robuffo Giordano. Modeling and control of a quadrotor uav with tilting propellers. In *Robotics and Automation (ICRA), 2012 IEEE International Conference on*, pages 4606–4613. IEEE, 2012.
- [22] Malcolm D Shuster. A survey of attitude representations. *Journal of the Astronautical Sciences*, 41(4):439–517, 1993.

- [23] Ashutosh Simha, Sharvaree Vadgama, and Soumyendu Raha. Almost-global exponential tracking of a variable pitch quadrotor on $se(3)$. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):10268–10273, 2017.
- [24] Koushil Sreenath, Taeyoung Lee, and Vijay Kumar. Geometric control and differential flatness of a quadrotor UAV with a cable-suspended load. In *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 2269–2274. IEEE, 2013.
- [25] Yun Yu, Shuo Yang, Mingxi Wang, Cheng Li, and Zexiang Li. High performance full attitude control of a quadrotor on $SO(3)$. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1698–1703. IEEE, 2015.