

# 姿态卡尔曼滤波中姿态重置问题的全阶解

Rajan Gill\*, Mark W. Mueller<sup>†</sup> and Raffaello D'Andrea<sup>‡</sup>

11 May 2020

## 摘要

由于旋转流形的限制，包括姿态在内的状态 Kalman 滤波带来了挑战。标准方法之一是考虑一个偏差姿态，以简化的 3 元向量参数化的形式，由卡尔曼滤波器跟踪，再作用到一些标称参考姿态。在对该偏差的统计信息进行更新之后，执行重置步骤来调整参考姿态。此重置步骤调整偏差的统计信息，这在文献中通常被忽略。本文提出了一种将偏差表示为旋转向量的算法。提出了重置操作后均值和协方差的调整，并用蒙特卡罗抽样进行了评估，并与文献中使用的其他方法进行了比较。最终的结果可能很容易实现，并且计算成本很低。与乘性扩展卡尔曼滤波 (MEKF)、无迹四元数估计 (USQUE) 和李群卡尔曼滤波 (LG-KF) 进行了连接和比较，并以刚体为例进行了仿真。

## 1 简介

实时确定刚体的姿态是 20 世纪 60 年代太空竞赛期间研究的一个问题 [1]，至今仍是一个研究课题 [2-6]。由于其计算效率和鲁棒性，Kalman 滤波器是许多应用的理想选择，并已被用于解决实时姿态估计问题。然而，如文献所示，应用卡尔曼滤波器估计姿态并不是一个简单的问题。这在很大程度上是由于缺乏一个向量空间结构的共同奇点自由姿态表示，如欧拉对称参数，今后称为单位四元数，或旋转矩阵。因此，在定义这样一个空间的概率描述时必须小心，更不用说应用 Kalman 滤波工具了。然而，许多工作 [7-14] 忽略了这一事实，直接应用卡尔曼滤波器来估计姿态的单位四元数参数化。其他人确实指出，这样做的实际后果是病态的，甚至是奇异协方差矩阵 [15]。其他工作至少在使用特别解决方案的测量更新中规避了这个问题，即对已知产生次优估计的测量值进行预滤波 [15-17]，或故意遵守奇异和高度非线性表示（即欧拉角），以避免上述问题 [18]。

文献 [19] 提出了一种范数约束 Kalman 滤波器，它直接应用于姿态的单位四元数参数化估计。这是通过确定最小均方误差 (MMSE) 来进行测量更新的，该最小均方误差产生 Kalman 更新增益，并通过 Lagrange 乘数受状态的范数约束。这将产生对协方差更新的加性校正，并导致额外的理论和计算复杂性 [20]。

另一种方法是考虑将扰动姿态的低维参数化为某个确定性参考姿态，该姿态将由卡尔曼滤波器跟踪；这种方法可归因于 1969 年的文献 [21]。这一想法引发了大量的研究 [2, 3, 22-56]，其中一些研究将这一总体想法扩展到了其他 Bayesian 推断方案，如粒子滤波。在文献中，这个架构通常被称为乘性（扩展）Kalman 滤波器 (MEKF)、间接 Kalman 滤波器、序贯 Kalman 滤波器和误差状态 Kalman 滤波器。在对该扰动状态的每次更新（通过过程模型和/或测量更新的预测）之后，执行所谓的重置步骤，其中调整后重置参考姿态，使得后重置扰动状态为零均值。该重置步骤确保参考姿态代表刚体的平均姿态（见第 2.2 节；不清楚该解释以前是否在文献中被理解），但更重要的是，确保扰动姿态状态保持“小”以便远离奇点，可做为旋转的无奇点的自由三元向量参数化的存在 [23]。

已经注意到, 关于重置步骤之后对统计数据的调整存在混淆 [15, 20]。然而, 当偏差姿态由 Gibbs-Rodrigues 向量<sup>1</sup>的 2 倍表示时, 文献 [15] 确实给出了正确的调整。在文献 [20] 中, 通过制定重置问题, 提出了旋转向量精确调整的一阶近似, 更正式地解决了挥之不去的困惑。类似的一阶变换可以在文献 [57] 中找到。

没有协方差调整 (零阶) 和一阶近似仍然可以在实践中工作, 如文献所示, 如果刚体相对于采样时间旋转得不太快, 如果测量值与预测的测量值吻合, 或者通过调整问题数据。然而, 仍然会有精度上的损失。与先前的方法相比, 使用本文使用全阶重置开发的算法的估计可以预期具有更高的质量 (示例可以在第 5 节中找到)。

在第 2 节中, 讨论了一些关于旋转和概率的预备知识。特别地, 将使用旋转向量参数化来建模偏差姿态。在第 3 节中, 讨论了一般的估计问题, 给出了姿态重置问题的背景。文中还对刚体中常见的旋转运动学进行了详细的分析, 并提出了相应的公式, 该公式具有离散时间精确的特点。第 4 节介绍了全阶姿态重置方法, 并与零阶和一阶方法进行了蒙特卡罗和奇异值比较。如果读者只想在 MEKF[23] 或 USQUE[26] 的测量更新上实现解决方案, 或者在文献 [20] 的基础上升级 EKF 或 UKF 的姿态重置, 他们可以跳到此节。在第 5 节中, 考虑了一个示例刚体, 提出了各种 EKF 和 UKFs, 并通过仿真将其与文献中的其他方法 (例如 MEKF、LG-UKF[4] 和 USQUE) 进行了比较。特别是, 在备注 4 中, 为提议的 EKF 提出了一个计算效率高的方法。

## 2 旋转

### 2.1 参数化和运动学

后面, 旋转矩阵将用于表示姿态, 以便于后续推导, 但在实际实现中, 将其替换为单位四元数对应项并不重要。无论哪种情况, 只要扰动姿态表示为旋转向量, 将要绘制的全阶姿态重置映射都保持不变。

旋转集合用  $\mathcal{SO}(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid R^\top R = I_{3 \times 3}, \det(R) = 1\}$  标志。注意这个集合在矩阵加法下不是封闭的, 在矩阵积下也不是交换的。然而, 它确实形成了一个由它们的矩阵积构成的旋转组合群 [58]。

给定一个三元向量  $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ , 设其斜对称矩阵为

$$[a \times] := \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{so}(3) \quad (1)$$

使得  $a$  和另外三元向量  $b$  的叉积是  $a \times b = [a \times] b$ , 因此  $\mathfrak{so}(3)$  是  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  中包含的一组斜对称矩阵。类似地, 将斜对称矩阵  $A$  带到其组成的三元向量的映射用  $[A]^\vee$  表示, 即  $[[a \times]]^\vee = a$ 。

斜对称矩阵集可以参数化任意旋转 [59], 通过扩展, 三元向量也可以参数化 (因为斜对称矩阵和三元向量是同构的)。这是通过以下映射实现的

$$\exp : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathcal{SO}(3) \quad (2)$$

$$[a \times] \mapsto \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} [a \times]^k = \begin{cases} I_{3 \times 3} + \frac{\sin(\|a\|)}{\|a\|} [a \times] + \frac{1 - \cos(\|a\|)}{\|a\|^2} [a \times]^2 : & \|a\| \neq 0 \\ I_{3 \times 3} : & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

<sup>1</sup>类似的调整在文献 [34] 中给出, 但是有不同的平方根因子。

其中  $\|\cdot\|$  表示向量参数的平方范数。上面的向量  $a$  被视为旋转向量。令  $\log(\cdot)$  表示相应的逆映射，得出

$$\log : \mathcal{SO}(3) \rightarrow \{[a \times] \in \mathfrak{so}(3) \mid \|a\| < \pi\} \quad (4)$$

$$R \mapsto \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (R - I_{3 \times 3})^k = \begin{cases} \frac{\theta(R)}{2 \sin(\theta(R))} (R - R^\top) : & \theta(R) \neq 0 \\ 0_{3 \times 3} : & \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

其中  $\theta(R) := \cos^{-1}((\text{Tr}(R) - 1)/2)$ 。注意， $\log(\exp([a \times])) = a$  仅当  $\|a\| < \pi$  时有效，否则将发生回绕。如需更彻底的论述，请参见文献 [58-61]。

考虑姿态  $R \in \mathcal{SO}(3)$  的如下表示，表示物体从某个任意坐标系到某个固定坐标系的向前坐标系旋转

$$R := R^{\text{ref}} \exp([\delta \times]) \quad (6)$$

其中  $\delta$  可以看作是某个参考旋转  $R^{\text{ref}}$  的扰动旋转向量。该旋转向量的动力学如下所示，忽略了对时间  $t$  的依赖性 [60]：

$$\dot{\delta} = \omega + \frac{1}{2} [\delta \times] \omega + \frac{2 - \|\delta\| \cot(\|\delta\|/2)}{2 \|\delta\|^2} [\delta \times]^2 \omega \quad (7)$$

$$=: \Gamma(\delta)^{-1} \omega \quad (8)$$

当  $\|\delta\| = 2\pi$  时， $\omega$  是物体在机体坐标系中的相对角速度，会产生奇异性，并且

$$\Gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (9)$$

$$\delta \mapsto \Gamma(\delta) = \begin{cases} I_{3 \times 3} - \frac{1 - \cos(\|\delta\|)}{\|\delta\|^2} [\delta \times] + \frac{\|\delta\| - \sin(\|\delta\|)}{\|\delta\|^3} [\delta \times]^2 : & \|\delta\| \neq 0 \\ I_{3 \times 3} : & \text{else} \end{cases} \quad (10)$$

有趣的是，映射  $\Gamma(\cdot)$  也将用于第 3 节所示的 EKF 中的 Jacobian 矩阵，以及第 4 节中的姿态重置步骤。此外，对于  $\|\delta\| \neq 0$  的  $\Gamma(\delta)$  可以重写 (见附录 A<sup>2</sup>) 以产生

$$\Gamma(\delta) = \frac{1}{\|\delta\|^2} \left( \delta \delta^\top + [\delta \times] \left( \exp([\delta \times])^\top - I_{3 \times 3} \right) \right) \quad (11)$$

其与方程 (10) 相比，如果已经计算了  $\exp([\delta \times])$ ，将减少计算量，如第 5.2 节中的情况。

值得注意的是，对于一阶，

$$\Gamma(\delta) \approx I_{3 \times 3} - \frac{1}{2} [\delta \times] \quad (12)$$

$$\Gamma(\delta)^{-1} \approx I_{3 \times 3} + \frac{1}{2} [\delta \times] \quad (13)$$

类似地，动力学可以直接在旋转流形上定义，并给出

$$\dot{R} = R[\omega \times] \quad (14)$$

## 2.2 平均姿态

类似于文献 [15] 中的讨论，如果  $\delta$  是方程 (6) 中概率分布函数 (Probability Distribution Function, PDF) 为  $p_\delta(\cdot)$  的随机三元向量，因此  $R$  也是分布为  $p_R(\cdot)$  的随机变量，则简单地取方程 (6)

<sup>2</sup>这个等价的映射似乎是最近在文献 [62] 中发现的，使用了一个非常不同的推导。

的期望值

$$\mathbb{E}_{(R)}[R] = \mathbb{E}_{(\delta)}[R^{\text{ref}} \exp([\delta \times])] = \int_{\mathbb{R}^3} R^{\text{ref}} \exp([x \times]) p_{\delta}(x) dx \quad (15)$$

在某种程度上是没有意义的，因为结果不会是一个旋转。这是因为  $\mathcal{SO}(3)$  不是向量空间。

因此，给出  $\delta$  的概率描述 (这将在下一节中由 Kalman 滤波器完成)，明确平均姿态的定义非常重要。首先考虑向量空间的情形：具有 PDF 为  $p_z(\cdot)$  的随机变量  $z$  的均值  $\mu_z \in \mathbb{R}^n$  被定义为满足文献 [63] 的值

$$0_{n \times 1} = \mathbb{E}_{(z)}[z - \mu_z] = \int_{\mathbb{R}^n} (\bar{z} - \mu_z) p_z(\bar{z}) d\bar{z} \quad (16)$$

类似地，这里的平均姿态被定义为  $\mu_R \in \mathcal{SO}(3)$  以满足

$$0_{3 \times 1} = \mathbb{E}_{(R)}[\log(\mu_R^{\top} R)]^{\vee} = \int_{\mathbb{R}^3} [\log(\mu_R^{\top} R^{\text{ref}} \exp([x \times]))]^{\vee} p_{\delta}(x) dx \quad (17)$$

其中无意识统计学家的法则 [64] 被用来得到右手侧。如果在它的所有随机变量的范数小于  $\pi$  的意义上， $\delta$  是零均值并且很小，则

$$\int_{\mathbb{R}^3} [\log((R^{\text{ref}})^{\top} R^{\text{ref}} \exp([x \times]))]^{\vee} p_{\delta}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} x p_{\delta}(x) dx = 0_{3 \times 1} \quad (18)$$

因此，在这种情况下，平均姿态是  $R^{\text{ref}}$ 。这在一定程度上推动了姿态重置步骤，其中  $\delta$  的统计信息将以这样的方式传播，以便后重置，平均姿态用  $R^{\text{ref}}$  表示，后重置的扰动姿态在零均值意义上很小。例如，当  $\delta$  是一个高斯随机三元向量，因此无穷多个变量的范数等于或大于  $\pi$  时，那么尽管方程 (18) 只是一个近似值，如果尾部很小，它是一个很好的近似值。

### 3 问题设置和解题方法

考虑一般的离散时间过程

$$\xi[k+1], R[k+1] = \bar{f}_k(\xi[k], R[k], \eta^{\text{proc}}[k]) \quad (19)$$

其中  $\eta^{\text{proc}}[k]$  是一个零均值白噪声过程， $\xi[k]$  和  $R[k]$  构成了时间步长  $k$  处的系统状态 (包括姿态)(两者都是随机变量)。如果系统的动力学本质上是连续的 (如方程 (14) 中给出的  $R$  的运动学)，则可以通过适当的离散化方法得到上述结果。

然而，使用旋转向量  $\delta[k]$  进行旋转的局部参数化方程 (6) 是很自然的：

$$R[k] := R_k^{\text{ref}} \exp([\delta[k] \times]) \quad (20)$$

其中， $R_k^{\text{ref}}$  是时间  $k$  处的确定参考姿态 (随机序列的时间索引将使用方括号进行，确定性的时间索引将使用下标)。原因如下：

- 如第 2.2 节所述，在旋转向量存在于向量空间中的情况下，使用  $\delta[k]$  的统计量来描述  $R[k]$  的统计量是方便的，特别是对于诸如 EKF 或 UKF 之类假定 Euclidean 状态的计算高效的 Bayesian 跟踪方案。但这并不排除旋转向量，例如 Gibbs-Rodrigues 向量可以如文献 [23] 所述使用。Gibbs-Rodrigues 向量在编码大的不确定性方面也可能更好 [15]。然而，使用旋转向量可能更直观，具有很好的特性，即  $\|\delta\|$  是旋转角度。

- 过程模型方程 (19) 通常涉及连续时间运动学方程 (14) 的数值积分方案。因此, 为了确保数值积分格式不违反  $R[k] \in \mathcal{SO}(3)$  的约束, 必须执行投影 [65], 这增加了复杂性 (尽管在单位四元数的情况下较小)。当积分方程 (8) 时, 这不再是一个问题, 这可以通过使用旋转向量合成规则 [60] 通过以下方式来完成, 以避免方程 (8) 中的奇异性:

$$\delta[k+1] = [\log(\exp([\delta[k] \times]) \exp([\bar{\delta}(\Delta t) \times]))]^\vee =: f_{\text{rv}}(\delta[k], \bar{\delta}(\Delta t)) \quad (21)$$

其中  $\bar{\delta}(\Delta t)$  是方程 (8) 的解, 在离散化步长  $\Delta t$  下计算, 初始条件  $\bar{\delta}(0) = 0$ 。如果  $\omega(t)$  在时间间隔  $\Delta t$  内是常数, 可能是由于数字陀螺仪传感器的测量, 那么

$$\delta[k+1] = f_{\text{rv}}(\delta[k], \omega(t_k) \Delta t) \quad (22)$$

即 Euler 积分方案是精确的, 其中  $t_k$  是对应于离散时间步长  $k$  的采样时间 (即  $\omega[k] := \omega(t_k)$ )。

- 对于某些应用, 如果旋转向量不基于运动学方程 (14), 则使用旋转向量来描述传播方程可能更自然 (参见例如文献 [66, 67], 可以扩展到 3D)。

因此, 通过使用方程 (20), 模型方程 (19) 被转换为以下形式

$$x[k+1] = f_k(x[k], \eta^{\text{proc}}[k]) \quad (23)$$

其中  $x[k] := (\xi[k], \delta[k]) \in \mathbb{R}^n$  为新的系统状态, 并且  $R_k^{\text{ref}}$  被吸收到函数  $f_k(\cdot, \cdot)$  中。

此外, 假设以下通用测量模型:

$$y[k] = h_k(x[k], \eta^{\text{meas}}[k]) \quad (24)$$

其中,  $R_k^{\text{ref}}$  再次被吸收到函数  $h_k(\cdot, \cdot)$  中。

现在, 任意 Bayesian 推断方案都可以使用模型方程 (23)、方程 (24) 来跟踪状态  $x[k]$  的统计信息, 例如扩展卡尔曼滤波 (EKF) 或无迹卡尔曼滤波 (UKF)<sup>3</sup>。

**备注 1.** 如果旋转向量的演化符合精确运动学映射方程 (21), 则 EKF 需要以下 *Jacobians* 矩阵:

$$\left. \frac{\partial f_{\text{rv}}(\delta, \Delta)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} = \Gamma(\Delta)^{-1} \exp([\Delta \times])^\top \quad (25)$$

$$\left. \frac{\partial f_{\text{rv}}(\delta, \Delta)}{\partial \Delta} \right|_{\delta=0} = I_{3 \times 3} \quad (26)$$

推导见附录 B。对于非零  $\delta$ , 很难建立 *Jacobians* 矩阵的解析表达式。

接下来, 介绍姿态重置的概念。在  $\delta[k]$  的统计量被更新之后, 通过先验使用方程 (23) 和/或后验使用方程 (24), 然后引入新的确定性姿态  $R_k^{\text{ref,post}}$  和随机变量  $\delta^{\text{post}}[k]$ , 使得

$$R[k] = R_k^{\text{ref}} \exp([\delta[k] \times]) =: R_k^{\text{ref,post}} \exp([\delta^{\text{post}}[k] \times]) \quad (27)$$

要求  $\delta^{\text{post}}[k]$  为零均值。此后, 后重置的变量  $R_k^{\text{ref,post}}$  和  $\delta^{\text{post}}[k]$  取代前重置的变量  $R_k^{\text{ref}}$  和  $\delta[k]$ , Bayesian 跟踪方案继续进行。执行这种姿态重置的原因如下:

<sup>3</sup>也可以使用粒子滤波器。尽管如此, 人们可以选择直接处理  $\mathcal{SO}(3)$ , 而不是使用局部参数化方程 (6)。然而, 使用这种局部参数化和采用姿态重置的好处是通过  $R_k^{\text{ref}}$  获得 (近似) 平均姿态, 可立即使用方程 (30), 并将变换方程 (31) 应用于每个粒子。此外, 本文中的方法可用于混合 Kalman 粒子滤波方案, 参见例如文献 [68-72]。

- 如果  $\delta[k]$  的传播是使用精确传播方程 (21) 进行的, 那么如备注 1 所述, 对于非零均值  $\delta[k]$ , EKF 中协方差传播所需的 Jacobians 矩阵很难评估。
- 同样, 如果传播符合方程 (21) 的要求, 那么对于较大的  $\delta[k]$ , 动力学变得非常非线性 (见附录 B)。因此, 对于像 EKF 或 UKF 这样的算法来说, 最大限度地减小非线性, 以便尽可能精确地跟踪统计数据, 这是最有意义的文献 [68, 73]。
- 如果根据连续时间运动学方程 (7) 的数值积分执行传播, 则必须执行重置步骤, 以避免  $\delta[k]$  及其变量变得足够大以达到奇点。
- 如果  $\delta[k]$  为零均值, 则根据第 2.2 节, 通过  $R_k^{\text{ref}}$  可立即获得平均姿态, 而不必使用平均姿态定义方程 (17) 求解。

在任意情况下, 滤波器设计者可以选择在任意时候执行姿态重置。然而, 对于上面使用运动学进行预测的前两点, 作者建议在每个预测和测量更新步骤之后执行姿态重置, 如第 5 节的示例所示。

如文献 [20] 中所述, 如何执行方程 (27) 的问题可以在下一节中简洁地概括为问题 1。注意, 由此产生的变换也会影响  $\delta[k]$  和  $\xi[k]$  的交叉统计量。

## 4 姿态重置问题及解决方案

**问题 1.** 设  $\delta$  是一个随机三元向量, 其 PDF 已知,  $R^{\text{ref}} \in \mathcal{SO}(3)$  具有某种确定性姿态。确定一个可确定的  $R^{\text{ref,post}} \in \mathcal{SO}(3)$  和随机变量  $\delta^{\text{post}} \in \mathbb{R}^3$ , 使得以下为真:

$$R^{\text{ref}} \exp([\delta \times]) = R^{\text{ref,post}} \exp([\delta^{\text{post}} \times]) \quad (28)$$

$$\mathbb{E}_{(\delta^{\text{post}})} [\delta^{\text{post}}] = 0_{3 \times 1} \quad (29)$$

我们给出了问题 1 在  $\delta^{\text{post}}$  中一阶的解, 即假设  $\delta^{\text{post}}$  很小, 但在前重置  $\delta$  中为全阶。这是一个合理的假设, 因为问题的一部分要求是  $\delta^{\text{post}}$  的均值为零, 这是一个“小”的概念。注意, 相关工作 [20] 和间接的工作 [57] 给出了问题 1 的近似解, 另外假设前重置向量  $\delta$  很小。

**定理 1.** 对于  $\delta^{\text{post}}$  中的一阶, 问题 1 的解是

$$R^{\text{ref,post}} = R^{\text{ref}} \exp([\mu \times]) \quad (30)$$

$$\delta^{\text{post}} = \Gamma(\mu)(\delta - \mu) \quad (31)$$

其中  $\mu := \mathbb{E}_{(\delta)} [\delta]$ 。

证明. 见附录 C。当  $\delta$  代表单位四元数向量部分的 2 倍时, 类似的结果见附录 D。□

**备注 2.** 如果第 3 节中提到的状态  $x[k]$  被 EKF 或 UKF 跟踪, 则后重置协方差由下式给出

$$\text{diag} \left( I_{(n-3) \times (n-3)}, \Gamma(\mu) \right) \text{Var}_{(x[k])} [x[k]] \text{diag} \left( I_{(n-3) \times (n-3)}, \Gamma(\mu)^\top \right) \quad (32)$$

其中  $\text{diag}(\cdot)$  通过其参数形成块对角矩阵。

值得一提的是, 方程 (30) 只适用于前重置  $\delta$  (和  $\delta^{\text{post}}$ ) 中的一阶。事实证明, 前重置  $\delta$  中的全阶也是如此。以往忽略调整后重置协方差的工作可视为将  $\Gamma(\mu)$  调整为零阶, 即

$$\Gamma_0(\mu) := I_{3 \times 3} \approx \Gamma(\mu) \quad (33)$$

类似地, 根据文献 [57] 的工作, 文献 [20] 提出了一阶解

$$\Gamma_1(\mu) := I_{3 \times 3} - [\mu \times] / 2 \approx \Gamma(\mu) \quad (34)$$

$$\Gamma_{\text{exp}}(\mu) := \exp(-[\mu \times] / 2) \approx \Gamma(\mu) \quad (35)$$

分别等于  $\Gamma(\mu)$  最多至一阶。

#### 4.1 蒙特卡罗评估

所提出的重置方程 (30)、方程 (31) 的精确度可以通过蒙特卡罗抽样来量化。此后, 规定的  $_{\text{MC}}(\cdot)$  将用于表示蒙特卡罗特定变量。前重置  $_{\text{MC}}\delta$  是从由  $l, c \in \mathbb{R}^3$  参数化的概率分布中选取的。后重置  $_{\text{MC}}\delta^{\text{post}}$  可按方程 (30)、方程 (28) 计算:

$$_{\text{MC}}\delta^{\text{post}} := [\log(\exp([-_{\text{MC}}\mu(l, c) \times]) \exp([_{\text{MC}}\delta \times]))]^\vee \quad (36)$$

其中

$$_{\text{MC}}\mu(l, c) := \mathbb{E}_{(_{\text{MC}}\delta|l, c)}[_{\text{MC}}\delta] \quad (37)$$

由于  $\log(\cdot)$  算子的使用,  $_{\text{MC}}\delta^{\text{post}}$  的所有变量的范数都小于  $\pi$ 。使用方程 (36) 计算后重置样本均值和方差, 以查看其符合方程 (29) 和方程 (32) 的程度 ( $n = 3$ )。通过随机生成参数  $l, c$ , 对  $_{\text{MC}}\delta$  的各种概率分布重复该过程, 由此构造后重置均值和方差的误差分布。

##### 4.1.1 误差度量

给定  $l, c \in \mathbb{R}^3$ ,  $_{\text{MC}}\delta$  的每个分量  $i \in \{0, 1, 2\}$  的 PDF 给出为

$$p_{_{\text{MC}}\delta_i|l_i, c_i}(x) := U(x, c_i - l_i/2, c_i + l_i/2) \quad (38)$$

其中

$$U(x, a, b) := \begin{cases} 1/(b-a) : & x \in [a, b] \\ 0 : & \text{else} \end{cases} \quad (39)$$

表示均匀分布。假设  $\|l\|$  足够小, 使用均匀分布是为了避免  $\log(\cdot)$  引起的回绕。注意  $_{\text{MC}}\mu(l, c) = c$ 。

给定参数  $l, c$ , 进行  $2^{20} \approx 10^6$  个粒子采样并通过方程 (36) 给出的映射, 计算后重置的样本均值  $_{\text{MC}}\delta_{\text{s,mean}}^{\text{post}}(l, c)$  和样本协方差  $_{\text{MC}}\delta_{\text{s,cov}}^{\text{post}}(l, c)$ , 得出以下绝对误差度量

$$\epsilon_{\text{mean}}(l, c) := \|_{\text{MC}}\delta_{\text{s,mean}}^{\text{post}}(l, c)\| \quad (40)$$

$$\epsilon_{\text{cov}}(l, c) := \left\| _{\text{MC}}\delta_{\text{s,cov}}^{\text{post}}(l, c) - \Gamma \left( _{\text{MC}}\mu(l, c) \underset{(_{\text{MC}}\delta|l, c)}{\text{Var}}[_{\text{MC}}\delta] \Gamma(_{\text{MC}}\mu(l, c))^\top \right) \right\|_F \quad (41)$$

其中  $\|\cdot\|_F$  表示其矩阵参数的 Frobenius 范数。

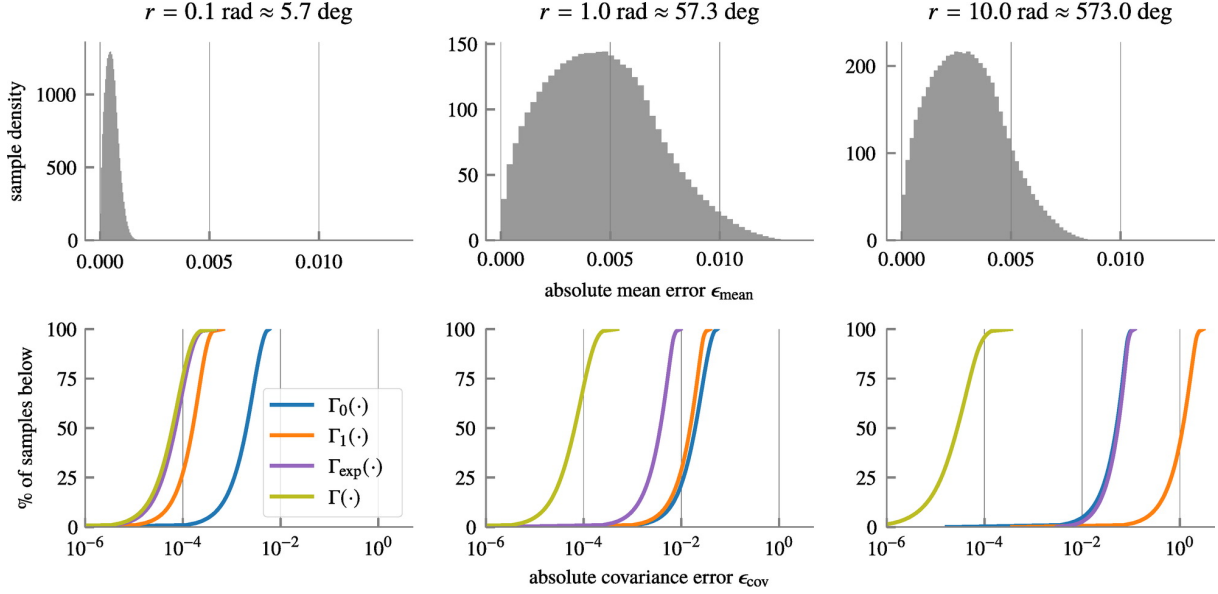


图 1: 蒙特卡罗评估: 每列代表不同的  $r$  值, 即平均前重置旋转向量的范数。顶行显示根据每个方程 (40) 的绝对平均误差; 底行使用近似和精确的  $\Gamma(\cdot)$  映射显示根据每个方程 (41) 的绝对协方差误差。

#### 4.1.2 系综蒙特卡罗

我们现在绘制各种  $l$  和  $c$  来创建平均误差均值  $\epsilon_{\text{mean}}(l, c)$  和协方差误差  $\epsilon_{\text{cov}}(l, c)$  的集合样本, 如下所示:

$$p_{l_i}(x) := U(x, 0, 1), \quad i = 0, 1, 2 \quad (42)$$

并且

$$c := \begin{bmatrix} r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$p_\theta(x) := U(x, -\pi, \pi) \quad (44)$$

$$p_\phi(x) := \begin{cases} \cos(x)/2 : & x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 : & \text{else} \end{cases} \quad (45)$$

使用参数化方程 (43) 有效地均匀地对半径为  $r$  的球体进行采样。

对于每一个  $r$ , 为每个固定的  $r$  绘制  $2^{20} \approx 10^6$  个  $l, c$  样本, 因此图 1 中为每个  $r$  绘制了  $2^{20}$  个  $\epsilon_{\text{mean}}(l, c)$ ,  $\epsilon_{\text{cov}}(l, c)$  的值。还将协方差误差与重置映射  $\Gamma(\cdot)$  的零阶和一阶版本进行了比较。由于方程 (30) 在前重置变量中是精确的, 所以无论前重置均值  $r$  的大小, 还是后重置均值误差都非常小。例如, 当  $r = 0.1, 1$  和  $10 \text{ rad}$  时, 95% 的样本的平均误差分别小于 0.0011、0.0092 和 0.0060。

对于旋转, 只报告角度取模  $\pi$  是有意义的, 但是, 例如, 如果直接积分运动学方程 (8), 或者如果旋转向量的演化不是基于运动学, 则角度可能更大。

全阶映射的协方差误差始终很小, 并且明显优于零阶和一阶映射, 尤其是在较大的前重置均值情况下。例如, 在 95% 处误差见表 1。



表 1: 在 95% 处的绝对协方差误差

	$r$ [rad]		
	0.1	1.0	10
$\Gamma_0(\cdot)$	0.0044	0.042	0.085
$\Gamma_1(\cdot)$	0.00034	0.028	2.1
$\Gamma_{\text{exp}}(\cdot)$	0.00019	0.0069	0.086
$\Gamma(\cdot)$	0.00017	0.00018	0.000092

对于 0.1 的小  $r$ ，一阶映射和全阶映射有相同数量级的误差，全阶方法比  $\Gamma_1(\cdot)$  好 2 倍。然而，对于  $r = 1$  和 10，情况并非如此，因为全阶方法在数量级上优于其他方法。

## 4.2 封闭式比较

通过奇异值分析，可以将映射  $\Gamma(\cdot)$  与零阶和一阶方法进行比较。设

$$E_0(\mu) := \Gamma(\mu) - \Gamma_0(\mu) \quad (46)$$

$$= -\frac{1 - \cos(\|\mu\|)}{\|\mu\|^2} [\mu \times] + \frac{\|\mu\| - \sin(\|\mu\|)}{\|\mu\|^3} [\mu \times]^2 \quad (47)$$

$$E_1(\mu) := \Gamma(\mu) - \Gamma_1(\mu) \quad (48)$$

$$= \left( -\frac{1 - \cos(\|\mu\|)}{\|\mu\|^2} + \frac{1}{2} \right) [\mu \times] + \frac{\|\mu\| - \sin(\|\mu\|)}{\|\mu\|^3} [\mu \times]^2 \quad (49)$$

$$E_{\text{exp}}(\mu) := \Gamma(\mu) - \Gamma_{\text{exp}}(\mu) \quad (50)$$

$$= \left( -\frac{1 - \cos(\|\mu\|)}{\|\mu\|^2} + \frac{\sin(\|\mu\|/2)}{\|\mu\|} \right) [\mu \times] + \left( \frac{\|\mu\| - \sin(\|\mu\|)}{\|\mu\|^3} - \frac{1 - \cos(\|\mu\|/2)}{\|\mu\|^2} \right) [\mu \times]^2 \quad (51)$$

为误差矩阵，当  $\mu \neq 0$  时，全阶重置矩阵  $\Gamma(\mu)$  与文献中使用的相应近似之间的差。一个合理的标量度量是谱范数 (或最大奇异值)，由文献 [74] 给出

$$\epsilon_i(\mu) := \|E_i(\mu)\| := \max_{\|x\|=1} \|E_i(\mu)x\| = \sqrt{\lambda_{\max}(E_i(\mu)^\top E_i(\mu))}, \quad i \in \{0, 1, \text{exp}\} \quad (52)$$

其中  $\lambda_{\max}(\cdot)$  表示其矩阵参数的最大特征值。

观察到对于一些标量  $c_1$  和  $c_2$ ，两个误差矩阵都具有  $c_1 [\mu \times] + c_2 [\mu \times]^2$  的结构，下面的事实将被证明是有用的。

**事实 1.** 设  $\mu \in \mathbb{R}^3$ 。形式为

$$(c_1 [\mu \times] + c_2 [\mu \times]^2)^\top (c_1 [\mu \times] + c_2 [\mu \times]^2) \quad (53)$$

的矩阵的特征值-特征向量对由表 2 给出，其中  $\mu^\perp$  是满足  $\mu^T \mu^\perp = 0$  的向量。

表 2: 方程 (53) 的特征值和特征向量

Eigenvalue	Eigenvector
0	$\mu$
$(c_1 \ \mu\ )^2 + (c_2 \ \mu\ ^2)^2$	$\mu^\perp$

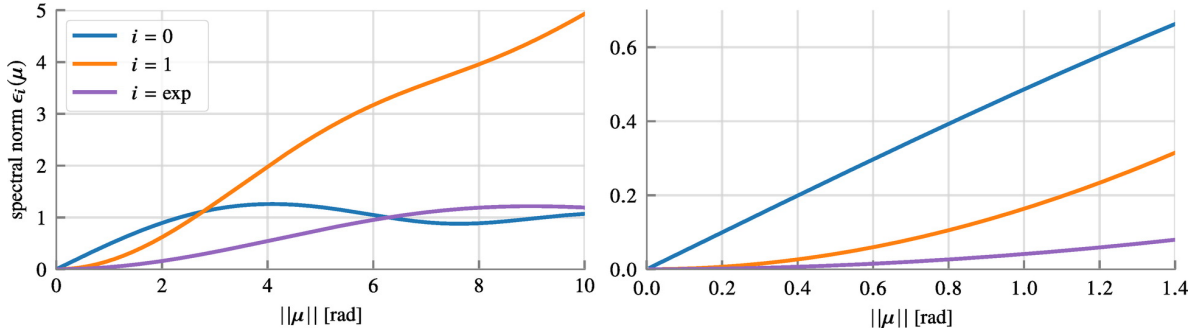


图 2: 全阶姿态重置矩阵  $\Gamma(\mu)$  与其零阶/一阶近似 (如方程 (52) 中所定义) 之间的差值在旋转向量变元不同量级上的谱范数。放大的绘图显示在右侧。

证明. 可通过直接替换进行验证。 □

因此根据事实 1 ,

$$\epsilon_0(\mu) = \frac{1}{\|\mu\|} \sqrt{\|\mu\|^2 - 2\|\mu\| \sin(\|\mu\|) - 2\cos(\|\mu\|) + 2} \quad (54)$$

$$\epsilon_1(\mu) = \frac{1}{2\|\mu\|} \sqrt{\|\mu\|^4 + 4\|\mu\|^2 \cos(\|\mu\|) - 8\|\mu\| \sin(\|\mu\|) - 8\cos(\|\mu\|) + 8} \quad (55)$$

$$\epsilon_{\text{exp}}(\mu) = 1 - \frac{2 \sin(\|\mu\|/2)}{\|\mu\|} \quad (56)$$

请注意, 这些误差并不取决于参数  $\mu$  的方向, 而只取决于其量级。图 2 显示了上述误差项的曲线图。有趣的是, 在某些领域, 零阶映射比一阶方法更精确, 这与图 1 中的结果一致。值得注意的是, 对于小  $\|\mu\|$ ,

$$\epsilon_0(\mu) \approx \|\mu\|/2 \quad (57)$$

$$\epsilon_1(\mu) \approx \|\mu\|^2/6 \quad (58)$$

$$\epsilon_{\text{exp}}(\mu) \approx \|\mu\|^2/24 \quad (59)$$

粗略地说, 对于前重置均值不大的 Kalman 滤波应用, 即在预测步骤中, 采样时间足够小或者运动本身很慢, 并且在测量更新中由于测量而引起的校正很小, 一阶映射  $\Gamma_1(\cdot)$  将是非常好的近似值。此外, 方程 (112) 中给出的级数的附加项可用于更好的近似。然而, 当计算开销不成问题时, 应始终使用全阶映射  $\Gamma(\cdot)$ , 其已经是很小的复杂性 (并且与  $\Gamma_{\text{exp}}(\cdot)$  为相同的复杂性), 以提高精度。对于已经在姿态重置中使用零阶或一阶映射方程 (33)-(35) 的 EKF/UKF 的实现, 用  $\Gamma(\cdot)$  进行简单的替换产生到全阶姿态重置的升级。

**备注 3.** 虽然 *EKF* 分别将均值和协方差传播近似为一阶和三阶 [73], 但低阶姿态重置 (独立地) 会增加额外的误差源。例如, 测量更新仍可能导致估计状态的大幅跳变, 因此全阶协方差重置将有助于减轻总体统计跟踪误差; 示例见第 5 节。这也可以在表 1 中看到, 其中对于 1 rad 的前重置均值,  $\Gamma_1(\cdot)$  的在 95% 处的协方差误差是全阶  $\Gamma(\cdot)$  的在 95% 处的协方差误差的 156 倍。

## 5 刚体示例

### 5.1 系统

考虑以下刚体系统:

$$\dot{p}(t) = v(t) \quad (60a)$$

$$\dot{v}(t) = R(t) a(t) \quad (60b)$$

$$\dot{R}(t) = R(t) [\omega(t) \times] \quad (60c)$$

其中  $p(t) \in \mathbb{R}^3$  为位置,  $v(t) \in \mathbb{R}^3$  为速度,  $R(t) \in \mathcal{SO}(3)$ ,  $a(t) := (1|\cos(t)|, 10|\sin(t)|, 100|\cos(t)|) \text{ m/s}^2$  为机体坐标系加速度向量,  $\omega(t) := (10|\sin(t)|, 1|\cos(t)|, 0.1|\sin(t)|) \text{ rad/s}$  为机体坐标系角速度。采用 “embedded Runge-Kutta Prince-Dormand” 方法对系统进行了数值模拟 [75]。初始条件设为  $p(0) := (100, 100, 100) \text{ m}$ ,  $v(0) := (10, 10, 10) \text{ m/s}$ , 并且  $R(0) := \exp([(0, 0, \pi/2) \times])$ 。

每个估计器将有一个读取  $a(t)$  的无噪声加速计传感器和一个读取  $\omega(t)$  但被零均值白噪声破坏的陀螺仪传感器, 每个轴的方差为  $0.01 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ 。两个传感器都是数字的, 以 1000 Hz 的频率读取。此外, 类似 GPS 的传感器提供 10 Hz 的位置读数, 并且还受到零均值白噪声的破坏, 每个轴的方差为  $100 \text{ m}^2$ 。可以证明系统是 (局部) 可观测的。所有的噪声都是由高斯分布产生的。所有的估计器被初始化为初始位置和速度为零, 初始姿态由单位矩阵给出。

模拟和测试的所有滤波器的源代码可在补充材料 S1 中找到。

### 5.2 提议 EKF

使用  $\Delta t = 0.001 \text{ s}$  的采样率对系统方程 (60) 进行离散化。离散化模型使用简单欧拉积分和精确旋转传播方程 (22) 的组合:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p[k+1] \\ v[k+1] \\ \delta[k+1] \end{bmatrix}}_{=:x[k+1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} p[k] + v[k] \Delta t + R_k^{\text{ref}} \exp([\delta[k] \times]) a_k \Delta t^2 / 2 \\ v[k] + R_k^{\text{ref}} \exp([\delta[k] \times]) a_k \Delta t \\ f_{\text{rv}}(\delta[k], (\omega[k] + \eta_\omega[k]) \Delta t) \end{bmatrix}}_{=:f_k(x[k], \eta_\omega[k])} \quad (61)$$

其中  $\text{Var}[\eta_\omega[k]] = 0.01 I_{3 \times 3}$ , 并且  $a_k$  是在时间步长  $k$  处测得的确定性机体坐标系加速度。现在应用标准 EKF 方程 [73], 我们得到了平均预测步长:

$$\hat{p}_{k+1|k} = \hat{p}_{k|k} + \hat{v}_{k|k} \Delta t + R_k^{\text{ref}} a_k \Delta t^2 / 2 \quad (62a)$$

$$\hat{v}_{k+1|k} = \hat{v}_{k|k} + R_k^{\text{ref}} a_k \Delta \tau \quad (62b)$$

$$\hat{\delta}_{k+1|k} = f_{\text{rv}}(\hat{\delta}_{k|k}, \overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t) = \overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t \quad (62c)$$

其中,  $\overline{\omega_k^{\text{meas}}}$  是随机测量的实现 (注意, 如果没有关于角速度的先验知识, 则给出先验均值), 在方程 (62c) 中, 假设  $\hat{\delta}_{k|k} = 0$ , 即刚在手之前进行了姿态重置。协方差传播由下式给出

$$\hat{P}_{k+1|k} = A_k \hat{P}_{k|k} A_k^\top + Q \quad (63a)$$

$$A_k = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & \Delta t I_{3 \times 3} & -R_k^{\text{ref}} [a_k \times] \Delta t^2 / 2 \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & -R_k^{\text{ref}} [a_k \times] \Delta t \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \Gamma(\overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t)^{-1} \exp([- \overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t \times]) \end{bmatrix} \quad (63b)$$

其中,  $\hat{P}_{k+1|k}$  是状态  $x[k+1]$  的先验协方差的估计, 其中  $\hat{P}_{0|0} := \text{diag}(I_{6 \times 6}, 0.1 I_{3 \times 3})$  表示该估计量和所有后续估计量, 并且  $Q = \text{diag}(0_{6 \times 6}, 0.01 \Delta t^2 I_{3 \times 3})$ 。接下来, 按如下方式应用姿态重置:

$$R_{k+1}^{\text{ref}} = R_k^{\text{ref}} \exp\left(\left[\hat{\delta}_{k+1|k} \times\right]\right) \quad (64a)$$

$$\hat{P}_{k+1|k} \leftarrow \text{diag}\left(I_{6 \times 6}, \Gamma\left(\hat{\delta}_{k+1|k}\right)\right) \hat{P}_{k+1|k} \text{diag}\left(I_{6 \times 6}, \Gamma\left(\hat{\delta}_{k+1|k}\right)^\top\right) \quad (64b)$$

$$\hat{\delta}_{k+1|k} \leftarrow 0 \quad (64c)$$

**备注 4.** 可以组合传播方程 (62)-(64), 其中方程 (64b) 中的  $\Gamma(\cdot)$  与 Jacobian 矩阵  $A_k$  中的  $\Gamma(\cdot)^{-1}$  相消, 得到以下合并传播方程:

$$\hat{p}_{k+1|k} = \hat{p}_{k|k} + \hat{v}_{k|k} \Delta t + R_k^{\text{ref}} a_k \Delta t^2 / 2 \quad (65a)$$

$$\hat{v}_{k+1|k} = \hat{v}_{k|k} + R_k^{\text{ref}} a_k \Delta \tau \quad (65b)$$

$$\hat{\delta}_{k+1|k} = 0 \quad (65c)$$

$$R_{k+1}^{\text{ref}} = R_k^{\text{ref}} \exp\left(\left[\overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t \times\right]\right) \quad (65d)$$

$$\hat{P}_{k+1|k} = \bar{A}_k \hat{P}_{k|k} \bar{A}_k^\top + \text{diag}\left(I_{6 \times 6}, \Gamma\left(\overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t\right)\right) Q \text{diag}\left(I_{6 \times 6}, \Gamma\left(\overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t\right)^\top\right) \quad (65e)$$

$$\bar{A}_k = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & \Delta t I_{3 \times 3} & -R_k^{\text{ref}} [a_k \times] \Delta t^2 / 2 \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & -R_k^{\text{ref}} [a_k \times] \Delta t \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \exp\left(\left[\overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t \times\right]\right)^\top \end{bmatrix} \quad (65f)$$

为了提高计算效率, 应首先计算在  $\bar{A}_k$  中的  $\exp\left(\left[\overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t \times\right]\right)^\top$  项, 接着是  $\Gamma\left(\overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t\right)^\top$ , 对于  $Q$  上的变换, 可以使用紧映射方程 (11) 有效地进行计算。

后验, 或测量更新, 给出为

$$\begin{bmatrix} \hat{p}_{k|k} \\ \hat{v}_{k|k} \\ \hat{\delta}_{k|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}_{k|k-1} \\ \hat{v}_{k|k-1} \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} + K_k (\overline{y_k^{\text{meas}}} - p_{k|k-1}) \quad (66a)$$

$$\hat{P}_{k|k} = (I_{9 \times 9} - K_k C) \hat{P}_{k|k-1} \quad (66b)$$

其中,  $C = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}$ , 并且  $K_k$  是使用标准 KF 方程的 Kalman 增益 [73]。之后, 再次应用姿态重置:

$$R_k^{\text{ref}} \leftarrow R_k^{\text{ref}} \exp\left(\left[\hat{\delta}_{k|k} \times\right]\right) \quad (67a)$$

$$\hat{P}_{k|k} \leftarrow \text{diag}\left(I_{6 \times 6}, \Gamma\left(\hat{\delta}_{k|k}\right)\right) \hat{P}_{k|k} \text{diag}\left(I_{6 \times 6}, \Gamma\left(\hat{\delta}_{k|k}\right)^\top\right) \quad (67b)$$

$$\hat{\delta}_{k|k} \leftarrow 0 \quad (67c)$$

该算法在图 3 中称为“ekf-zoh-reset-F”，因为它是基于角速度零阶保持假设的精确传播映射方程 (22) 的 EKF，并使用全阶 (F) 姿态重置。

**备注 5.** 可以表明，本文中提出的 *EKF* 在应用于提出的模型方程 (61) 时等效于文献 [76] 中的 *LG-EKF*。不同之处在于推导，这里是直接在姿态的上下文中使用姿态重置的视角来完成的。这可能使得更容易为其他系统制定 *EKF*s，例如，某些固有的离散时间过程模型直接用于旋转向量，如第 3 节所述，允许直接实现而无需进一步推导。

### 5.3 其它 EKF

一种常见的 EKF 方法是使用旋转向量运动学方程 (7) 的近似值来模拟  $\delta$  的传播 [52, 54–56, 77]:

$$\delta[k+1] = \delta[k] + (I_{3 \times 3} + [\delta[k] \times] / 2) ((\omega[k] + \eta_\omega[k]) \Delta t) \quad (68)$$

并且在预测方程 (64) 中执行姿态重置步骤时，使用一阶近似  $\Gamma(\cdot) \approx \Gamma_1(\cdot)$ 。这导致平均传播与方程 (62) 相同。协方差传播的不同之处在于，在方程 (63) 中  $A_k$  的  $\Gamma(\overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t)^{-1} \exp([\overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t \times])$  项被用近似  $I_{3 \times 3} - [\overline{\omega_k^{\text{meas}}} \times] \Delta t / 2$  代替。测量更新与方程 (66) 相同，应用测量更新后的姿态重置步骤方程 (67)，再次使用一阶近似  $\Gamma(\cdot) \approx \Gamma_1(\cdot)$ 。该算法在图 3 中称为“ekf-euler-reset-1”，因为滤波方程相当于使用旋转向量方程 (7) 的连续时间运动学的 Euler 离散化，并且使用协方差重置的一阶近似（在预测和测量更新期间）。

另一个常见的变体是采用“ekf-euler-reset-1”滤波器并且省略测量后协方差重置步骤方程 (67b)，并且被称为“ekf-euler-reset-0”。

图 3 显示了上述 EKF 的估计器性能。两者都能够恢复系统状态，但很明显，全阶“ekf-zoh-reset-F”能够更快、更一致地完成这项工作，并且传播更少。有趣的是，如果初始速度误差增加，使得  $v(0) = (100, 100, 100)$  m/s，那么“ekf-euler-reset-1”完全失效；见图 4。这里发生的是协方差矩阵的条件变差，当应用协方差重置时，如果  $\delta$  在  $\Gamma_1(\delta)$  中变大，就会发生这种情况。

### 5.4 MEKF[23]

#### 5.4.1 原始设计

文献 [23] 中的 MEKF 算法是在连续时间内制定的，适用于实例刚体系统方程 (60)。为了简单和一致，平均传播采用方程 (65a)-(65d) 离散时间实现。协方差传播适应于系统，产生

$$\dot{\hat{P}}(t) = F(t) \hat{P}(t) + \hat{P}(t) F(t)^\top + Q_c \quad (69a)$$

$$F(t) = \left[ \begin{array}{c|c|c} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \hline 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -R_k^{\text{ref}} \exp([\overline{\omega_k^{\text{meas}}}(t - t_k) \times]) [a_k \times] \\ \hline 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & [-\overline{\omega_k^{\text{meas}}} \times] \end{array} \right] \quad (69b)$$

并且  $Q_c = \text{diag}(0_{6 \times 6}, 0.01 \Delta t I_{3 \times 3})$  [73]。由于协方差传播是在连续时间内形成的，因此它们是使用 Euler 积分方案实现的，如文献 [78]，在连续离散时间步长之间，步长为  $\Delta t_{\text{mekf}}$ （参见算法 1）。计算和实现方面有利于使用这样一个简单的集成方案，更精确的集成将产生更准确的结果；参数  $\Delta t_{\text{mekf}}$  将被改变以探索这一点。注意，在预测步骤中没有显式的姿态重置步骤，因为这已经隐式地完成了。

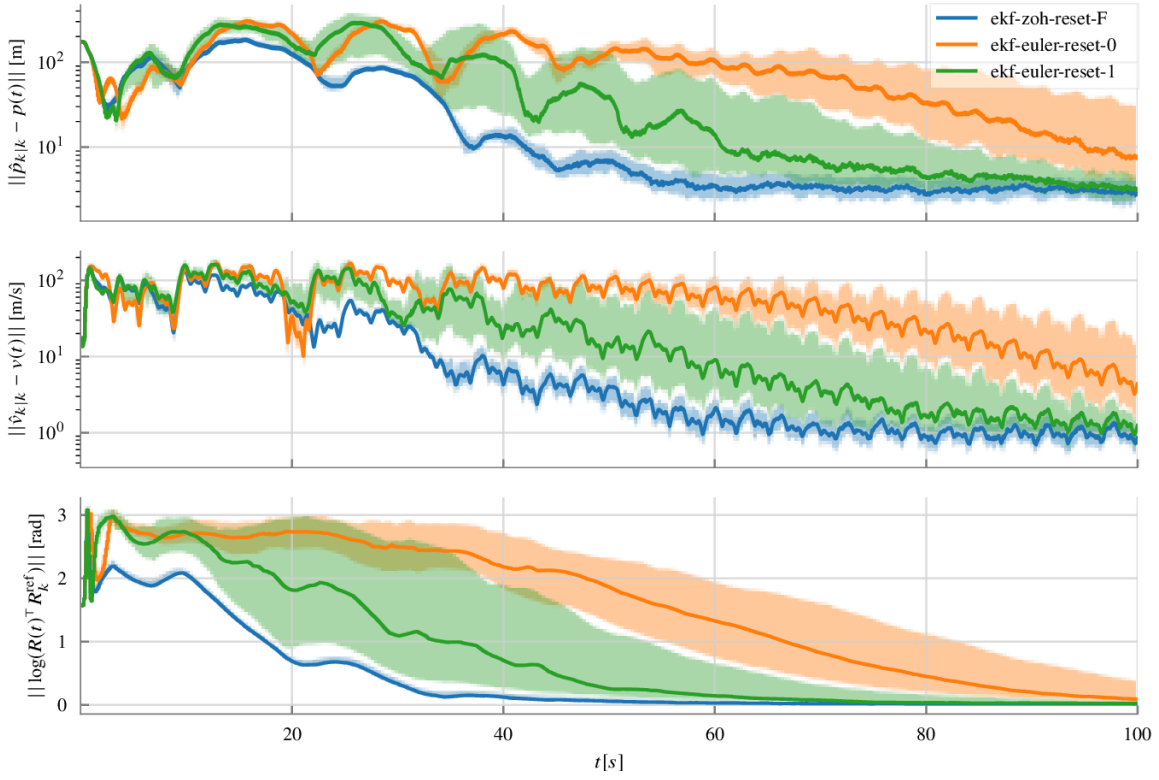


图 3: 第 5.2 - 5.3 节中描述的 EKFs 的位置、速度和姿态误差。进行了 100 次模拟，实线表示中值，阴影区域表示 25% 到 75% 的区域。

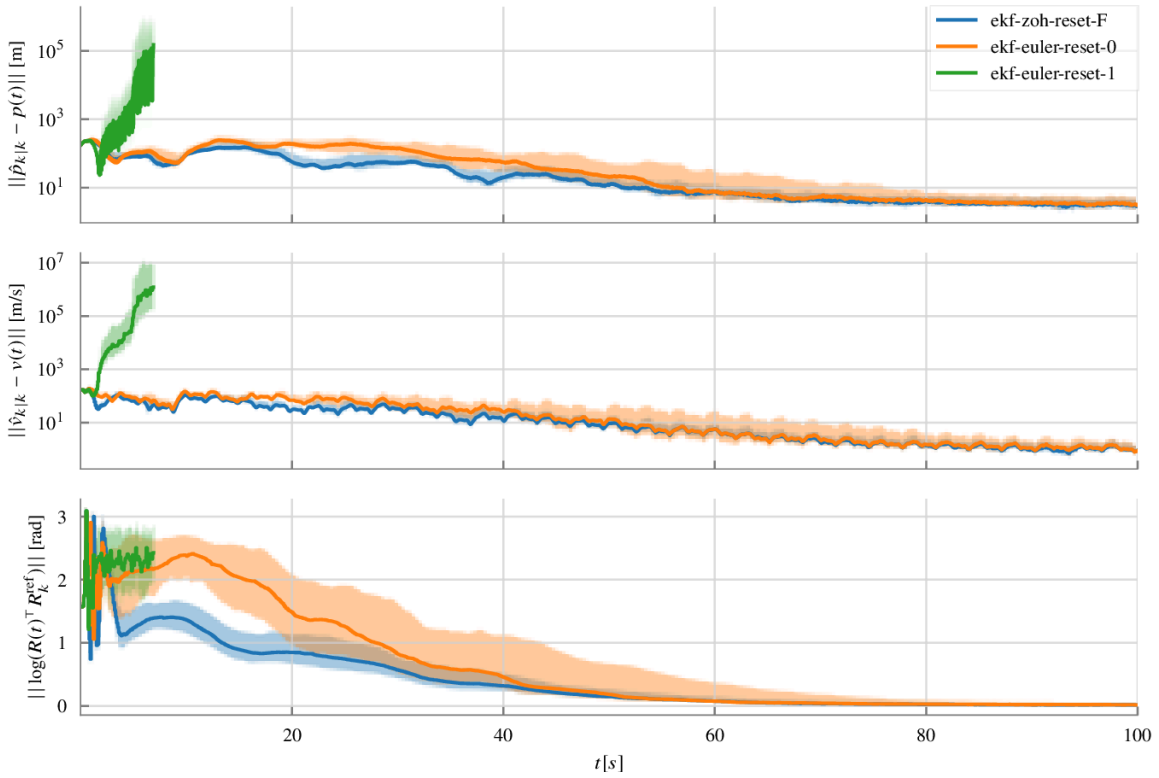


图 4: 第 5.2 - 5.3 节中描述的 EKFs 的位置、速度和姿态误差，但  $v(0) = (100, 100, 100) \text{ m/s}$ 。进行了 100 次模拟，实线表示中值，阴影区域表示 25% 到 75% 的区域。

**Algorithm 1** MEKF 协方差传播的 Euler 积分方程 (69)

**input:** 协方差矩阵  $\hat{P}_{k|k}$ , 采样加速度计和陀螺仪测量值  $a_k, \overline{\omega}_k^{\text{meas}}$ , 参考姿态  $R_k^{\text{ref}}$ , 积分步长  $\Delta t_{\text{mekf}}$ , 离散化时间步长  $\Delta t$ 。

**output:** 先验协方差矩阵  $\hat{P}_{k+1|k}$ 。

$\hat{P}_{k+1|k} \leftarrow \hat{P}_{k|k}$ ;

$N \leftarrow \Delta t / \Delta t_{\text{mekf}}$ ;

**for**  $j \leftarrow 1$  **to**  $N$  **do**

$$F \leftarrow \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -R_k^{\text{ref}} \exp([\overline{\omega}_k^{\text{meas}}(t - t_k) \times]) [a_k \times] \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & [-\overline{\omega}_k^{\text{meas}} \times] \end{bmatrix};$$

$$\hat{P}_{k+1|k} \leftarrow \hat{P}_{k|k} + (F \hat{P}_{k|k} + \hat{P}_{k|k} F^\top + Q_c) \Delta t_{\text{mekf}};$$

**end for**

测量更新与方程 (66) 相同。更新之后的姿态重置也与方程 (67) 相同，只是协方差重置方程 (67b) 没有发生。这个滤波器在图 5 中称为 “mekf-0”。

#### 5.4.2 提议的修改

在测量更新之后的姿态重置中，执行步骤方程 (67b)。此滤波器称为 “mekf-F”。另一种变体是在方程 (67b) 中使用一阶近似  $\Gamma(\cdot) \approx \Gamma_1(\cdot)$ ，称为 “mekf-1”。

如文献 [23] 所述，由于用于导出滤波器的近似，MEKF 中的偏差姿态  $\delta$  可以解释为迄今为止的旋转向量、Gibbs-Rodrigues 向量的 2 倍或单位四元数的向量部分的 2 倍。因此，在测量更新方程 (66) 之后，测试姿态重置方程 (67) 的两个附加版本：第一个是方程 (67a) 中的  $\exp(\cdot)$  映射替换为  $\exp^G(\cdot)$ ，将 Gibbs-Rodrigues 向量映射到旋转流形 (参见例如文献 [23, 方程 (18b)]，在协方差重置方程 (67b) 中的  $\Gamma(\cdot)$  替换为  $\Gamma^G(\cdot)$ ：

$$\Gamma^G(\delta) = \frac{1}{1 + \|\delta\|^2/4} (I_{3 \times 3} - [\delta \times]/2) \quad (70)$$

其证明见文献 [15] 的附录。此滤波器变体称为 “mekf-G”。

类似地，另一个变体是用  $\exp^{\text{qv}}(\cdot)$  替换方程 (67a) 中的  $\exp(\cdot)$  映射，将单位四元数的向量部分映射 2 倍到旋转流形 (参见例如文献 [23, 方程 (18d)]，并且将协方差重置方程 (67b) 中的  $\Gamma(\cdot)$  替换为  $\Gamma^{\text{qv}}(\cdot)$ ：

$$\Gamma^{\text{qv}}(\delta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \|\delta\|^2/4}} (I_{3 \times 3} + [\delta \times]^2/4) - [\delta \times]/2 \quad (71)$$

其证明见附录 D。请注意， $\Gamma^{\text{qv}}(\cdot)$  具有奇点，且对于  $\|\delta\| \geq 4$  定义不清，这可能会导致问题，因为在应用大重置的应用中，会创建病态协方差矩阵。这种滤波器变体称为 “mekf-qv”。

结果如图 5 所示。MEKF 对用于求解方程 (69) 的积分方案很敏感，因为左图中使用较大的  $\Delta t_{\text{mekf}}$  会导致所有 MEKF 变体的性能比 “ekf-zoh-reset-F” 差。与图 4 中先前的结果类似，一阶 “mekf-1” 和 “mekf-qv” 导致条件较差的协方差矩阵，从而导致估计器失败，即使 “mekf-0” 仍然能够恢复状态轨迹 (大体上)。“mekf-G” 也有很好的表现，尽管它比 “ekf-zoh-reset-F” 有更多的传播。

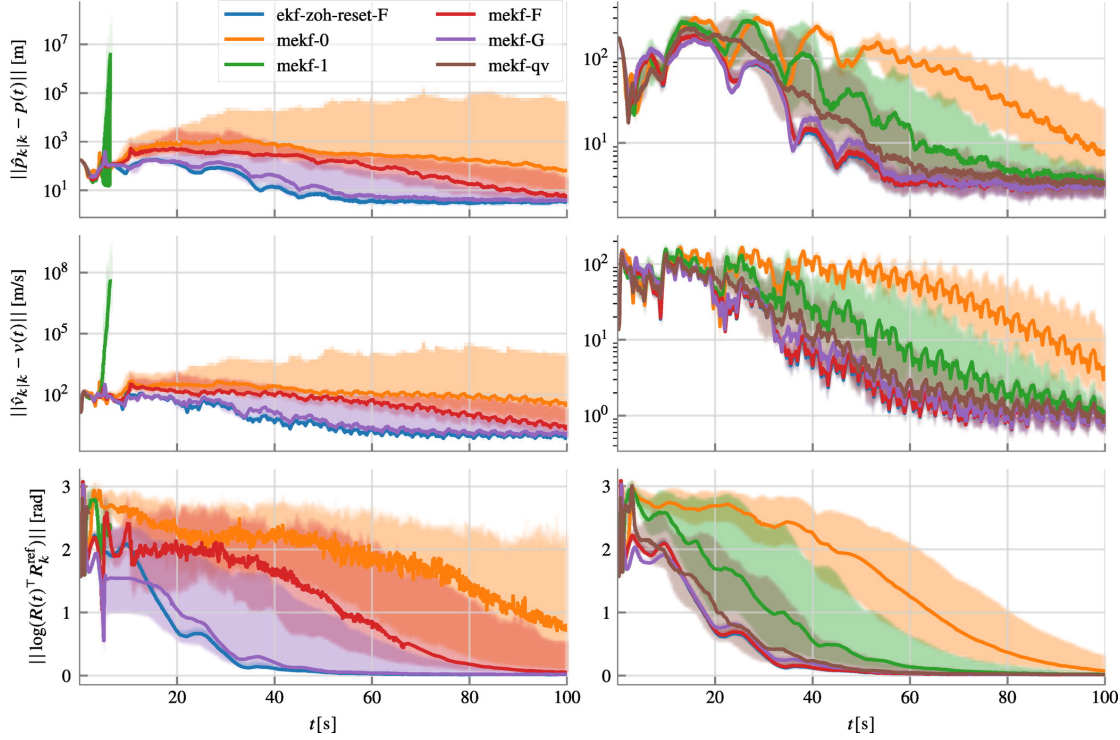


图 5: 使用第 5.4 节所述的各种姿态重置的 MEKF 的位置、速度和姿态误差。进行了 100 次模拟，实线表示中值，阴影区域表示 25% 到 75% 的区域。左图为  $\Delta t_{\text{mekf}} = \Delta t = 0.001 \text{ s}$ ；右图为  $\Delta t_{\text{mekf}} = \Delta t/100 = 0.00001 \text{ s}$ ，计算时间约为 100 倍。第 5.2 节中的“ekf-zoh-reset-F”仅供参考。

利用连续时间运动学和方程 (14) 的四元数等价，导出了 MEKF 的协方差传播。这与“ekf-zoh-reset-F”的方法相反，“ekf-zoh-reset-F”使用精确的离散化映射直接在离散时间中导出协方差传播方程 (22)。因此，预计 MEKF 性能 (使用正确的姿态重置) 接近“ekf-zoh-reset-F”的性能，极限为  $\Delta t_{\text{mekf}} \rightarrow 0$ ，尽管对于 MEKF 来说这意味着计算复杂度的增加 [26]。这正是图 5 右侧较小的  $\Delta t_{\text{mekf}}$  所发生的情况，现在全阶变体“mekf-F”、“mekf-G”和“mekf-qv”在平均性能和一致性方面的表现与“ekf-zoh-reset-F”类似，同时优于“mekf-0”和“mekf-1”变体。

## 5.5 提议 UKF

首先，使用状态协方差  $\hat{P}_{k|k}$  和任意 sigma 点生成方法 [73, 79]，为系统方程 (61) 生成 sigma 点  $x_{k|k}^{(i)} = (p_{k|k}^{(i)}, v_{k|k}^{(i)}, \delta_{k|k}^{(i)})$ ,  $i = 0, \dots, 2n$  (本例中  $n = 9$ )。由于过程噪声在动力学映射方程 (61) 中是非加性的，因此系统状态可以被增强以包括过程噪声，在这种情况下产生 6 个额外的 sigma 点。然而，为了简单和与后面讨论的其他 UKFs 保持一致，将使用标准 EKF 方法合并过程噪声。sigma 点向前传播：

$$x_{k+1|k}^{(i)} := f_k(x_{k|k}^{(i)}, 0), \quad i = 0, \dots, 2n \quad (72)$$

然后取平均先验状态作为加权和

$$\hat{x}_{k+1|k} := \sum_{i=0}^{2n} w_m^{(i)} x_{k+1|k}^{(i)} \quad (73)$$



其中  $w_m^{(i)}$  是加权系数 [73, 79]。类似地, 估计先验协方差

$$\hat{P}_{k+1|k} := \sum_{i=0}^{2n} w_c^{(i)} \left( x_{k+1|k}^{(i)} - \hat{x}_{k+1|k} \right) \left( x_{k+1|k}^{(i)} - \hat{x}_{k+1|k} \right)^\top + Q \quad (74)$$

其中  $Q = \text{diag}(0_{6 \times 6}, 0.01\Delta t^2 I_{3 \times 3})$  与之前相同,  $w_c^{(i)}$  是加权系数 [73, 79]。现在继续进行后预测姿态重置方程 (64)<sup>4</sup>。

由于测量模型在系统状态下是线性的, 因此测量更新与方程 (66) 相同。应用测量后姿态重置方程 (67)。此滤波器在图 6 中称为 “ukf-zoh-reset-F”。

## 5.6 LG-UKF[4]

文献 [4] 中的 LG-UKF 算法适用于实例刚体系统。传播方程与上一小节类似, 只是旋转的 sigma 点直接在  $\mathcal{SO}(3)$  上计算, 如下所示:

$$R_{k+1|k}^{(i)} = R_k^{\text{ref}} \exp \left( \left[ \delta_{k|k}^{(i)} \times \right] \right) \exp \left( \left[ \overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t \times \right] \right), \quad i = 0, \dots, 2n \quad (75)$$

平均旋转  $R_k^{\text{ref}}$  通过文献 [4, 算法 1] 进行数值计算, 写于附录 E 中的算法使用本文的约定。协方差传播计算如下:

$$\hat{P}_{k+1|k} := \sum_{i=0}^{2n} w_c^{(i)} d^{(i)} d^{(i)\top} + Q \quad (76)$$

$$d^{(i)} := \left( p_{k+1|k}^{(i)} - \hat{p}_{k+1|k}, v_{k+1|k}^{(i)} - \hat{v}_{k+1|k}, \left[ \log \left( (R_{k+1}^{\text{ref}})^{-1} R_{k+1|k}^{(i)} \right) \right]^\vee \right) \quad (77)$$

不执行姿态重置, 因为这是隐式执行的。此外, 请注意, 过程噪声协方差矩阵  $Q$  未经变换, 其中使用了近似值  $\Gamma(\overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t) \approx \Gamma_{\exp}(\overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t)$ , 如第 4.2 节所示, 这是小  $\overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t$  的一个非常好的近似值。这与  $Q$  是对角的 (如文献 [4] 所示, 在本例中也如此), 与这一事实相结合, 得到了  $\text{diag}(I_{6 \times 6}, \Gamma_{\exp}(\overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t)) Q \text{diag}(I_{6 \times 6}, \Gamma_{\exp}(\overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t))^\top = Q$ 。但是, 对于非各向同性过程噪声, 这是不正确的。

测量更新与之前的方程 (66)-(67) 相同。此滤波器在图 6 中称为 “lg-ukf”。

## 5.7 USQUE[26]

### 5.7.1 原始设计

文献 [26] 中给出的 USQUE 适用于示例刚体系统。如最初使用广义 Rodrigues 参数所示, 本文将使用 Gibbs-Rodrigues 向量的 2 倍。因此, 系统模型方程 (61) 中用于传播位置和速度 sigma 点的  $\exp(\cdot)$  映射被  $\exp^G(\cdot)$  映射替换。旋转 sigma 点传播如下:

$$R_{k+1|k}^{(i)} := R_k^{\text{ref}} \exp^G \left( \left[ \delta_{k|k}^{(i)} \times \right] \right) \exp \left( \left[ \overline{\omega_k^{\text{meas}}} \Delta t \times \right] \right), \quad i = 0, \dots, 2n \quad (78)$$

然而, 根据文献 [26] 的方程 (36) 和方程 (37a), 可以假定  $R_{k+1|k}^{(0)}$  代表平均先验姿态, 因此  $R_{k+1}^{\text{ref}} := R_{k+1|k}^{(0)}$ 。由于  $\hat{\delta}_{k|k}^{(0)} = 0$ , 这本质上意味着 USQUE 对平均姿态传播进行 EKF 近似 (参见方

<sup>4</sup>这里提出的姿态重置是真正的一阶后重置偏差姿态。因此, 对于预期姿态存在较大不确定性的情况, LG-UKF 可能表现更好。然而, 提议的 UKF 可以被看作是对文献 [20, 53] 中方法的升级。

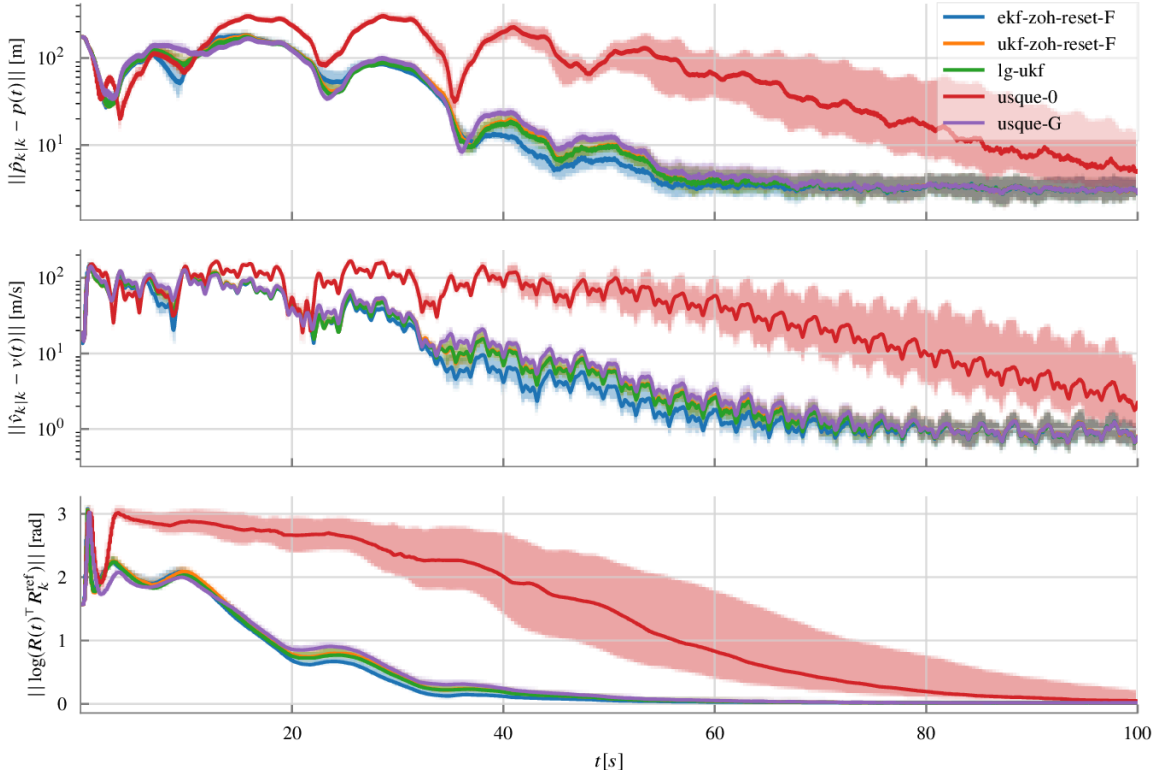


图 6: 第 5.5 - 5.7 节中描述的 UKFs 的位置、速度和姿态误差。进行了 100 次模拟，实线表示中值，阴影区域表示 25% 到 75% 的区域。第 5.2 节中的“ekf-zoh-reset-F”仅供参考。

程 (65d))。协方差传播计算如下：

$$\hat{P}_{k+1|k} := \sum_{i=0}^{2n} w_c^{(i)} d^{(i)} d^{(i)\top} + Q \quad (79)$$

$$d^{(i)} := \begin{pmatrix} p_{k+1|k}^{(i)} - \hat{p}_{k+1|k}, v_{k+1|k}^{(i)} - \hat{v}_{k+1|k}, \left[ \log^G \left( (R_{k+1}^{\text{ref}})^{-1} R_{k+1|k}^{(i)} \right) \right]^\vee \end{pmatrix} \quad (80)$$

其中  $\log^G(\cdot)$  将  $\mathcal{SO}(3)$  上的旋转元素映射回 Gibbs-Rodrigues 向量的 2 倍 (参见例如文献 [26, 方程 (20)]). 因此, USQUE 与 LG-UKF 非常相似, 只是平均姿态传播使用 EKF 近似, 并且偏差姿态  $\delta$  被视为 Gibbs-Rodrigues 向量 (或广义 Rodrigues 参数) 的 2 倍。同样, 没有对过程噪声协方差矩阵  $Q$  应用变换 (注意, 文献 [26] 确实提出了一种使用梯形积分方案积分  $Q_c$  的方法, 并且假设  $\omega \Delta t$  很小, 这将导致在传播步骤中生成 sigma 点时向  $\hat{P}_{k|k}$  添加因子  $Q/2$ , 在本例中用相同的因子替换方程 (79) 中的  $Q$ )。测量更新与方程 (66) 中之前相同, 并且姿态重置方程 (67) 中的  $\exp(\cdot)$  被  $\exp^G(\cdot)$  替换, 只是协方差重置方程 (67b) 没有发生。此滤波器在图 6 中称为“usque-0”。

### 5.7.2 提议的修改

一个明显的修改是在测量更新方程 (67b) 后执行协方差调整, 用方程 (70) 中给出的 Gibbs 版本  $\Gamma^G(\cdot)$  替换  $\Gamma(\cdot)$ , 将被称为“usque-G”。另一种方法是另外执行 UKF 平均传播, 这可以通过使用 LG-UKF 之类的方法或使用所提议的 UKF 之类的姿态重置方法对传播的均值进行数值求解来完成。然而, 本文对此也没有进行探讨。

上述 UKFs 的结果如图 6 所示。使用文献 [73, 第 14.2 节] 中概述的方案生成 sigma 点, 并应用

文献 [79] 中  $\alpha = 1$  和  $\beta = 2$  的比例。“ekf-zoh-reset-F”、“ukf-zoh-reset-F”、“lg-ukf” 和 “usque-G” 的行为相似，在平均误差和一致性方面都优于 “usque-0”。

## 6 结论

定理 1 建立了前重置和后重置姿态误差状态之间的关系，前者为全阶，后者为一阶。这可以在 EKF 和 UKF 中用于涉及姿态的一般问题设置。所提出的全阶重置步骤和所提出的 EKF 和 UKF 算法计算效率高，易于实现。全阶重置还提供了免费升级到任意零阶或一阶变种在实践中使用。比较了 MEKF 和 USQUE 采用不同的姿态重置方案，表明全阶重置是有益的。

## 附录 A 等价 $\Gamma(\cdot)$ 映射

根据文献 [74, 事实 3.5.25],  $[a \times]^2 = aa^\top - \|a\|^2 I_{3 \times 3}$ , 因此方程 (10) 可以重写为

$$\Gamma(a) = \frac{\sin(\|a\|)}{\|a\|} I_{3 \times 3} - \frac{1 - \cos(\|a\|)}{\|a\|^2} [a \times] + \frac{\|a\| - \sin(\|a\|)}{\|a\|^3} aa^\top \quad (81)$$

重新排列,

$$\Gamma(a) = \frac{1}{\|a\|^2} aa^\top + \frac{\sin(\|a\|)}{\|a\|^3} (-aa^\top + \|a\|^2 I_{3 \times 3}) - \frac{1 - \cos(\|a\|)}{\|a\|^2} [a \times] \quad (82)$$

再次根据文献 [74, 事实 3.5.25],  $[a \times]^3 = -\|a\|^2 [a \times]$ , 因此

$$\Gamma(a) = \frac{1}{\|a\|^2} aa^\top + \frac{\sin(\|a\|)}{\|a\|^3} (-[a \times]^2) + \frac{1 - \cos(\|a\|)}{\|a\|^4} [a \times]^3 \quad (83)$$

$$= \frac{1}{\|a\|^2} aa^\top + \frac{1}{\|a\|^2} [a \times] \left( -\frac{\sin(\|a\|)}{\|a\|} [a \times] + \frac{1 - \cos(\|a\|)}{\|a\|^2} [a \times]^2 \right) \quad (84)$$

$$= \frac{1}{\|a\|^2} aa^\top + \frac{1}{\|a\|^2} [a \times] (\exp([-a \times]) - I_{3 \times 3}) \quad (85)$$

$$= \frac{1}{\|a\|^2} aa^\top + \frac{1}{\|a\|^2} [a \times] (\exp([a \times])^\top - I_{3 \times 3}) \quad (86)$$

## 附录 B 方程 (25)-(26) 的推导

引理 1. 如果  $X, Y, Z \in \mathfrak{so}(3)$  有

$$\exp(Z) = \exp(X) \exp(Y) \quad (87)$$

则

$$Z = X + \frac{-\text{ad}_X}{\exp(-\text{ad}_X) - 1} (Y) + O(Y^2) \quad (88)$$

$$= Y + \frac{\text{ad}_Y}{\exp(\text{ad}_Y) - 1} (X) + O(X^2) \quad (89)$$

其中  $\text{ad}$  表示矩阵李群伴随映射  $\text{ad}_X(Y) := XY - YX$ ,  $\text{ad}_X$  的  $k$  次幂表示其从  $\text{ad}_X^0(Y) = Y$  以来第  $k$  次迭代, 并且  $\exp(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$ . 参见文献 [61] 进行更彻底的讨论。

证明. 方程 (88) 可通过对文献 [61] 的 Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) 方程 (5.8) 的积分形式进行直接操作而获得。

对于方程 (89), 从以下内容开始:

$$\exp(Z(t)) = \exp(tX) \exp(Y) \quad (90)$$

目标是使用  $Z(0) = Y$  确定  $Z(1)$ , 注意  $Z$  对  $Z(t)$  的符号的轻微滥用。取导数, 从文献 [61, 方程 (5.11)] 我们得到

$$\frac{d \exp(Z(t))}{dt} = \exp(Z(t)) \frac{1 - \exp(-\text{ad}_{Z(t)})}{\text{ad}_{Z(t)}} (\dot{Z}(t)) = X \exp(tX) \exp(Y) \quad (91)$$

$$= X \exp(Z(t)) \quad (92)$$

因此,

$$\frac{1 - \exp(-\text{ad}_{Z(t)})}{\text{ad}_{Z(t)}} (\dot{Z}(t)) = \exp(-Z(t)) X \exp(Z(t)) \quad (93)$$

$$= \text{Ad}_{\exp(-Z(t))}(X) \quad (94)$$

$$= \exp(-\text{ad}_{Z(t)})(X) \quad (95)$$

其中使用了文献 [61, 提案 3.35]。因此,

$$\dot{Z}(t) = \frac{\text{ad}_{Z(t)}}{1 - \exp(-\text{ad}_{Z(t)})} \exp(-\text{ad}_{Z(t)})(X) \quad (96)$$

$$= \frac{\text{ad}_{Z(t)}}{\exp(\text{ad}_{Z(t)}) - 1}(X) \quad (97)$$

$$= \frac{\log(\exp(\text{ad}_{tX}) \exp(\text{ad}_Y))}{\exp(\text{ad}_{tX}) \exp(\text{ad}_Y) - 1}(X) \quad (98)$$

$$= \bar{g}(\exp(\text{ad}_{tX}) \exp(\text{ad}_Y))(X) \quad (99)$$

其中使用了文献 [61, 定理 3.28],  $\log(A) := \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (A - I)^k$  和  $\bar{g}(A) := \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} (A - I)^k$ 。因此, BCH 的另一种积分形式为

$$Z = Y + \int_0^1 \bar{g}(\exp(\text{ad}_{tX}) \exp(\text{ad}_Y))(X) dt \quad (100)$$

并因此通过执行直接的操作产生方程 (89)。□

使用方程 (89), 方程 (21) 变为

$$f_{\text{rv}}(\delta, \Delta) = \Delta + \left[ \underbrace{\frac{\text{ad}_{[\Delta \times]}}{\exp(\text{ad}_{[\Delta \times]}) - 1}}_{=:[\xi \times]} ([\delta \times]) + O([\delta \times]^2) \right]^\vee \quad (101)$$

其中  $\Delta := \bar{\delta}(\Delta t)$  为表示简洁。解中间项,

$$\left( \frac{(\exp(\text{ad}_{[\Delta \times]}) - 1)}{\text{ad}_{[\Delta \times]}} \right) [\xi \times] = [\delta \times] \quad (102)$$

$$\left( \exp(\text{ad}_{[\Delta \times]}) \frac{(1 - \exp(-\text{ad}_{[\Delta \times]}))}{\text{ad}_{[\Delta \times]}} \right) [\xi \times] = \quad (103)$$

注意到

$$[\text{ad}_{[x \times]} ([y \times])]^\vee = [[x \times] [y \times] - [y \times] [x \times]]^\vee \quad (104)$$

$$= [x \times] y \quad (105)$$

$$\Leftrightarrow [\text{ad}_{[x \times]}^k ([y \times])]^\vee = [x \times]^k y \quad (106)$$

其中第二个方程来自文献 [74, 事实 3.5.25]。因此,

$$\left[ \left( \exp(\text{ad}_{[\Delta \times]}) \frac{1 - \exp(-\text{ad}_{[\Delta \times]})}{\text{ad}_{[\Delta \times]}} \right) [\xi \times] \right]^\vee = \delta \quad (107)$$

$$\left( \exp([\Delta \times]) \frac{1 - \exp(-[\Delta \times])}{[\Delta \times]} \right) \xi = \quad (108)$$

$$\exp([\Delta \times]) \Gamma(\Delta) \xi = \quad (109)$$

$$\Leftrightarrow \xi = \Gamma(\Delta)^{-1} \exp(-[\Delta \times]) \delta \quad (110)$$

其中, 对于从方程 (108) 到方程 (109) 的步骤, 使用以下方程<sup>5</sup>:

$$\frac{1 - \exp(-[\Delta \times])}{[\Delta \times]} = \frac{I - \sum_{k \geq 0} (-[\Delta \times])^k / k!}{[\Delta \times]} \quad (111)$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} [\Delta \times]^k \quad (112)$$

$$= \sum_{k \geq 0} \left( \frac{(-1)^{2k}}{(2k+1)!} [\Delta \times]^{2k} + \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+2)!} [\Delta \times]^{2k+1} \right) \quad (113)$$

$$= \left( I_{3 \times 3} + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{3k-1} \|\Delta\|^{2k-2}}{(2k+1)!} [\Delta \times]^2 + \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{3k+1} \|\Delta\|^{2k}}{(2k+2)!} [\Delta \times] \right) \quad (114)$$

$$= \left( I_{3 \times 3} + \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \|\Delta\|^{2k}}{(2k+3)!} [\Delta \times]^2 + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k \|\Delta\|^{2k-2}}{(2k)!} [\Delta \times] \right) \quad (115)$$

$$= \left( I_{3 \times 3} + \frac{1}{\|\Delta\|^2} \left( 1 - \frac{1}{\|\Delta\|} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \|\Delta\|^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) [\Delta \times]^2 + \frac{1}{\|\Delta\|^2} \left( \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \|\Delta\|^{2k}}{(2k)!} - 1 \right) [\Delta \times] \right) \quad (116)$$

$$= \left( I_{3 \times 3} + \frac{1}{\|\Delta\|^2} \left( 1 - \frac{1}{\|\Delta\|} \sin(\|\Delta\|) \right) [\Delta \times]^2 + \frac{1}{\|\Delta\|^2} (\cos(\|\Delta\|) - 1) [\Delta \times] \right) \quad (117)$$

$$= \Gamma(\Delta) \quad (118)$$

其中, 以下步骤用于从方程 (113) 到方程 (114) 的步骤:

$$[x \times]^{2k+1} = (-1)^k \|x\|^{2k} [x \times], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (119)$$

$$[x \times]^{2k} = (-1)^{k-1} \|x\|^{2k-2} [x \times]^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (120)$$

因此,

$$f_{\text{iv}}(\delta, \Delta) = \Delta + \Gamma(\Delta)^{-1} \exp([\Delta \times])^\top \delta + \left[ O([\delta \times]^2) \right]^\vee \quad (121)$$

从中可得到方程 (25)-(26)。注意, 从方程 (121) 开始, 映射中的非线性随着  $\delta$  的增加而增加。

<sup>5</sup>类似的关系也可以在文献 [80, 81] 中找到, 无需推导。

## 附录 C 问题 1 的解

由于  $R^{\text{ref}}, R^{\text{ref}, \text{post}} \in SO(3)$ , 存在一些确定性的  $\mu \in \mathbb{R}^3$ , 使得

$$R^{\text{ref}} \exp([\mu \times]) = R^{\text{ref}, \text{post}} \quad (122)$$

因此,

$$R^{\text{ref}} \exp([\delta \times]) = R^{\text{ref}, \text{post}} \exp([\delta^{\text{post}} \times]) \quad (123)$$

$$\Rightarrow \exp([\delta \times]) = \exp([\mu \times]) \exp([\delta^{\text{post}} \times]) \quad (124)$$

使用方程 (88),

$$[\delta \times] = [\mu \times] + \frac{-\text{ad}_{[\mu \times]}}{\exp(-\text{ad}_{[\mu \times]}) - 1}([\delta^{\text{post}} \times]) + O([\delta^{\text{post}} \times]^2) \quad (125)$$

$$\Rightarrow \delta = \mu + \left[ \frac{-\text{ad}_{[\mu \times]}}{\exp(-\text{ad}_{[\mu \times]}) - 1}([\delta^{\text{post}} \times]) + O([\delta^{\text{post}} \times]^2) \right]^\vee \quad (126)$$

去掉  $\delta^{\text{post}}$  中的高阶项,

$$\delta \approx \mu + \frac{[\mu \times]}{I - \exp([- \mu \times])} \delta^{\text{post}} \quad (127)$$

因此,

$$\delta^{\text{post}} \approx \frac{I - \exp([- \mu \times])}{[\mu \times]} (\delta - \mu) \quad (128)$$

$$= \Gamma(\mu) (\delta - \mu) \quad (129)$$

其中使用了方程 (118)。上述在随机变量  $\delta$  和  $\delta^{\text{post}}$  中是线性的, 因此约束方程 (29) 意味着  $\mu = \mathbb{E}_{(\delta)}[\delta]$ 。

## 附录 D 当 $\delta$ 是单位四元数向量部分的 2 倍时的问题 1 的解

重新排列方程 (124) 并使用四元数代数 [82],

$$q(\delta^{\text{post}}) = q(-\mu) \odot q(\delta) \quad (130)$$

其中,

$$q : \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 2\} \rightarrow \{(a, v), a \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^3 \mid |a|^2 + \|v\|^2 = 1\} \quad (131)$$

$$x \mapsto \begin{bmatrix} a \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{4 - \|x\|^2} \\ x \end{bmatrix} \quad (132)$$

将一个单位四元数的向量部分的 2 倍映射到另一个单位四元数 [23], 并且

$$q_1 \odot q_2 = (a_1, v_1) \odot (a_2, v_2) = \begin{bmatrix} a_1 a_2 - v_1^\top v_2 \\ a_1 v_2 + a_2 v_1 + v_1 \times v_2 \end{bmatrix} \quad (133)$$

因此,

$$a_\delta^{\text{post}} = a_\mu a_\delta + \mu^\top \delta / 4 \quad (134)$$

$$\delta^{\text{post}} = a_\mu \delta - a_\delta \mu + \delta \times \mu / 2 \quad (135)$$

其中,  $a_\mu = \sqrt{1 - \|\mu\|^2/4}$  和  $a_\delta = \sqrt{1 - \|\delta\|^2/4}$ 。继续,

$$\delta^{\text{post}} = \frac{a_\mu^2 \delta - a_\mu a_\delta \mu}{a_\mu} - \mu \times \delta/2 \quad (136)$$

$$= \frac{a_\mu^2 \delta - (a_\delta^{\text{post}} - \mu^\top \delta/4) \mu}{a_\mu} - \mu \times \delta/2 \quad (137)$$

$$= \frac{a_\mu^2 \delta - \left( \sqrt{1 - \|\delta^{\text{post}}\|^2/4} - \mu^\top \delta/4 \right) \mu}{a_\mu} - \mu \times \delta/2 \quad (138)$$

$$= \frac{a_\mu^2 \delta - \left( 1 + O(\|\delta^{\text{post}}\|^2) - \mu^\top \delta/4 \right) \mu}{a_\mu} - \mu \times \delta/2 \quad (139)$$

如同在附录 C 中的一样, 去掉了  $\delta^{\text{post}}$  中的高阶项,

$$\delta^{\text{post}} \approx \frac{a_\mu^2 \delta - (1 - \mu^\top \delta/4) \mu}{a_\mu} - \mu \times \delta/2 \quad (140)$$

$$= \frac{\left( 1 - \|\mu\|^2/4 \right) \delta - (1 - \mu^\top \delta/4) \mu}{\sqrt{1 - \|\mu\|^2/4}} - \mu \times \delta/2 \quad (141)$$

使用文献 [74, 事实 3.5.25],  $[\mu \times]^2 = \mu \mu^\top - \|\mu\|^2 I_{3 \times 3}$ , 并注意到  $[\mu \times] \mu = 0$ , 上述方程变换为

$$\delta^{\text{post}} \approx \Gamma^{\text{qv}}(\mu) (\delta - \mu) \quad (142)$$

其中,  $\Gamma^{\text{qv}}(\cdot)$  在方程 (71) 中给出。上述在随机变量  $\delta$  和  $\delta^{\text{post}}$  中是线性的, 因此约束方程 (29) 意味着  $\mu = \mathbb{E}_{(\delta)} [\delta]$ 。作者想感谢其中一位审查者指出这个结果。

## 附录 E LG-UKF 平均姿态的计算

---

**Algorithm 2**  $\mathcal{SO}(3)$  上的加权内禀均值。

---

**input:** 旋转集合  $R^{(i)}$  具有相关权重,  $w_m^{(i)}, i = 0, \dots, n$ , 并有整数  $N > 0$ 。

**output:** 加权平均  $R^{\text{ref}}$ 。

$R^{\text{ref}} \leftarrow R^{(0)}$ ;

**for**  $j \leftarrow 0$  **to**  $N$  **do**

$\Delta \leftarrow \sum_{i=0}^n w_m^{(i)} \log \left( R^{\text{ref}^{-1}} R^{(i)} \right)$  ;

$R^{\text{ref}} \leftarrow R^{\text{ref}} \exp(\Delta)$ ;

**end for**

---

## References

1. Grewal, M. S., and Andrews, A. P., “Applications of Kalman filtering in aerospace 1960 to the present [historical perspectives],” *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 30, No. 3, 2010, pp. 69–78. doi:10.1109/MCS.2010.936465.
2. Stovner, B. N., Johansen, T. A., Fossen, T. I., and Schjølberg, I., “Attitude estimation by multiplicative exogenous Kalman filter,” *Automatica*, Vol. 95, 2018, pp. 347 – 355. doi:10.1016/j.automatica.2018.05.038.
3. Eliahu, D. S., Elkaim, G. H., and Curry, R. E., “A Two-stage multiplicative Kalman filter for attitude estimation of the human wrist,” *IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium*, 2018, pp. 666–672. doi:10.1109/PLANS.2018.8373441.
4. Kang, D., Jang, C., and Park, F. C., “Unscented Kalman Filtering for Simultaneous Estimation of Attitude and Gyroscope Bias,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 24, No. 1, 2019, pp. 350–360. doi:10.1109/TMECH.2019.2891776.
5. Chiella, A. C. B., Teixeira, B. O. S., and Pereira, G. A. S., “Quaternion-Based Robust Attitude Estimation Using an Adaptive Unscented Kalman Filter,” *Sensors*, Vol. 19, No. 10, 2019. doi:10.3390/s19102372.
6. Bernal-Polo, P., and Martínez-Barberá, H., “Kalman Filtering for Attitude Estimation with Quaternions and Concepts from Manifold Theory,” *Sensors*, Vol. 19, No. 1, 2019. doi:10.3390/s19010149.
7. Yun, X., and Bachmann, E. R., “Design, implementation, and experimental results of a quaternion-based Kalman filter for human body motion tracking,” *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 22, No. 6, 2006, pp. 1216–1227. doi:10.1109/TRO.2006.886270.
8. Sabatini, A. M., “Quaternion-based extended Kalman filter for determining orientation by inertial and magnetic sensing,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol. 53, No. 7, 2006, pp. 1346–1356. doi:10.1109/TBME.2006.875664.
9. Kingston, D., and Beard, R., “Real-time attitude and position estimation for small UAVs using Low-cost Sensors,” *AIAA 3rd "Unmanned Unlimited" Technical Conference, Workshop and Exhibit*, 2004, p. 6488. doi:10.2514/6.2004-6488.
10. de Marina, H. G., Pereda, F. J., Giron-Sierra, J. M., and Espinosa, F., “UAV attitude estimation using unscented Kalman filter and TRIAD,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 59, No. 11, 2012, pp. 4465–4474. doi:10.1109/TIE.2011.2163913.
11. Yun, X., Lizarraga, M., Bachmann, E. R., and McGhee, R. B., “An improved quaternion-based Kalman filter for real-time tracking of rigid body orientation,” *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Vol. 2, 2003, pp. 1074 – 1079 vol.2. doi:10.1109/IROS.2003.1248787.



12. Bar-Itzhack, I., and Oshman, Y., "Attitude determination from vector observations: quaternion estimation," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-21, No. 1, 1985, pp. 128-136. doi:10.1109/TAES.1985.310546.
13. Marins, J. L., Yun, X., Bachmann, E. R., McGhee, R. B., and Zyda, M. J., "An extended Kalman filter for quaternion-based orientation estimation using MARG sensors," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems.*, Vol. 4, 2001, pp. 2003-2011 vol.4. doi:10.1109/IROS.2001.976367.
14. Feng, K., Li, J., Zhang, X., Shen, C., Bi, Y., Zheng, T., and Liu, J., "A New Quaternion-Based Kalman Filter for Real-Time Attitude Estimation Using the Two-Step Geometrically-Intuitive Correction Algorithm," *Sensors*, Vol. 17, No. 9, 2017. doi:10.3390/s17092146.
15. Markley, L., "Lessons learned," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 57, 2009. doi:10.1007/BF03321491.
16. Li, D., Landry, R., and Lavoie, P., "Low-cost MEMS sensor-based attitude determination system by integration of magnetometers and GPS: A real-data test and performance evaluation," *IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium*, 2008, pp. 1190-1198. doi:10.1109/PLANS.2008.4570005.
17. Crassidis, J. L., Markley, F. L., and Cheng, Y., "Survey of nonlinear attitude estimation methods," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 30, No. 1, 2007, pp. 12-28. doi:10.2514/1.22452.
18. Gross, J. N., Gu, Y., Rhudy, M. B., Gururajan, S., and Napolitano, M. R., "Flight-test evaluation of sensor fusion algorithms for attitude estimation," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 48, No. 3, 2012, pp. 2128-2139. doi:10.1109/TAES.2012.6237583.
19. Zanetti, R., Majji, M., Bishop, R. H., and Mortari, D., "Norm-constrained Kalman Filtering," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 5, 2009, pp. 1458-1465. doi:10.2514/1.43119.
20. Mueller, M. W., Hehn, M., and D'Andrea, R., "Covariance correction Step for Kalman filtering with an attitude," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 40, No. 9, 2016, pp. 2301-2306. doi:10.2514/1.G000848.
21. Toda, N., Heiss, J., and Schlee, F., "Spars: the system, algorithms, and test results," *Proceedings of the Symposium on Spacecraft Attitude Determination*, Aerospace Corp. Rept. TR-0066 (6306)-12, Vol. 1, 1969, pp. 361-370.
22. Lefferts, E. J., Markley, F. L., and Shuster, M. D., "Kalman filtering for spacecraft attitude estimation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 5, No. 5, 1982, pp. 417-429. doi:10.2514/3.56190.
23. Markley, F. L., "Attitude error representations for Kalman filtering," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No. 2, 2003, pp. 311-317. doi:10.2514/2.5048.

24. Axelrad, P., and Ward, L. M., "Spacecraft attitude estimation using the global positioning system-methodology and results for RADCAL," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 19, No. 6, 1996, pp. 1201-1209. doi:10.2514/3.21772.
25. Shuster, M., "A simple Kalman filter and smoother for spacecraft attitude," *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 37, No. 1, 1989, pp. 89-106.
26. Crassidis, J. L., and Markley, F. L., "Unscented filtering for spacecraft attitude estimation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No. 4, 2003, pp. 536-542. doi:10.2514/2.5102.
27. Jia, B., Xin, M., and Cheng, Y., "Sparse Gauss-Hermite quadrature filter with application to spacecraft attitude estimation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 34, No. 2, 2011, pp. 367-379. doi:10.2514/1.52016.
28. Kim, S.-G., Crassidis, J. L., Cheng, Y., Fosbury, A. M., and Junkins, J. L., "Kalman filtering for relative spacecraft attitude and position estimation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 30, No. 1, 2007, pp. 133-143. doi:10.2514/1.22377.
29. Pittelkau, M. E., "Rotation vector in attitude estimation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No. 6, 2003, pp. 855-860. doi:10.2514/2.6929.
30. Trawny, N., and Roumeliotis, S. I., "Indirect Kalman filter for 3D attitude estimation," University of Minnesota, Department of Computer Science & Engineering, Technical Report, Vol. 2, 2005, p. 2005. doi:10.1.1.304.6207.
31. Cheng, Y., and Crassidis, J. L., "Particle filtering for attitude estimation using a minimal local-error representation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 4, 2010, pp. 1305-1310. doi:10.2514/1.47236.
32. Crassidis, J. L., "Sigma-point Kalman filtering for integrated GPS and inertial navigation," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 42, No. 2, 2006, pp. 750-756. doi:10.1109/TAES.2006.1642588.
33. Hall, J. K., Knoebel, N. B., and McLain, T. W., "Quaternion attitude estimation for miniature air vehicles using a multiplicative extended Kalman filter," *IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium*, 2008, pp. 1230-1237. doi:10.1109/PLANS.2008.4570043.
34. Reynolds, R. G., "Asymptotically optimal attitude filtering with guaranteed convergence," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 1, 2008, pp. 114-122. doi:10.2514/1.30381.
35. Leishman, R. C., and McLain, T. W., "Multiplicative extended Kalman filter for relative rotorcraft navigation," *Journal of Aerospace Information Systems*, Vol. 12, No. 12, 2014, pp. 728-744. doi:10.2514/1.I010236.
36. Gui, H., and Ruiter, A., "Quaternion invariant extended Kalman filtering for spacecraft attitude estimation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 41, 2017, pp. 1-16. doi:10.2514/1.G003177.

37. Chang, L., Hu, B., and Li, K., "Iterated multiplicative extended kalman filter for attitude estimation using vector observations," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 52, No. 4, 2016, pp. 2053-2060. doi:10.1109/TAES.2016.150237.
38. Seba, A., Hadri, A. E., Benziane, L., and Benallegue, A., "Attitude estimation using line-based vision and multiplicative extended Kalman filter," *International Conference on Control Automation Robotics Vision*, 2014, pp. 456-461. doi: 10.1109/ICARCV.2014.7064348.
39. Pham, M. D., Low, K. S., Goh, S. T., and Chen, S., "Gain-scheduled extended kalman filter for nanosatellite attitude determination system," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 51, No. 2, 2015, pp. 1017-1028. doi:10.1109/TAES.2014.130204.
40. Santos, D. A., and Gonçalves, P. F., "Attitude determination of multirotor aerial vehicles using camera vector measurements," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, Vol. 86, No. 1, 2017, pp. 139-149. doi:10.1007/s10846-016-0418-0.
41. Yang, Y., Zhou, J., and Loffeld, O., "Quaternion-based Kalman filtering on INS/GPS," *International Conference on Information Fusion*, 2012, pp. 511-518.
42. Farsoni, S., Landi, C. T., Ferraguti, F., Secchi, C., and Bonfè, M., "Compensation of load Dynamics for admittance controlled interactive industrial robots using a quaternion-based Kalman filter," *IEEE Robotics and Automation Letters*, Vol. 2, No. 2, 2017, pp. 672-679. doi:10.1109/LRA.2017.2651393.
43. Setoodeh, P., Khayatian, A., and Frajah, E., "Attitude estimation by separate-bias Kalman filter-based data fusion," *The Journal of Navigation*, Vol. 57, No. 2, 2004, pp. 261-273. doi:10.1017/S037346330400270X.
44. Le, H. X., and Matunaga, S., "Real-time tuning separate-Bias extended Kalman filter for attitude estimation," *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 57, No. 5, 2014, pp. 299-307. doi:10.2322/tjsass.57.299.
45. Wilthil, E. F., and Brekke, E. F., "Compensation of navigation uncertainty for target tracking on a moving platform," *International Conference on Information Fusion*, 2016, pp. 1616-1621.
46. Vinther, K., Jensen, K. F., Larsen, J. A., and Wisniewski, R., "Inexpensive cubesat attitude estimation using quaternions and unscented Kalman filtering," *Automatic Control in Aerospace*, Vol. 4, No. 1, 2011, pp. 1-12.
47. Szczesna, A., and Pruszowski, P., "Model-based extended quaternion Kalman filter to inertial orientation tracking of arbitrary kinematic chains," *Springerplus*, Vol. 5, No. 1, 2016, p. 1965. doi:10.1186/s40064-016-3653-8.
48. Hu, J., and Chen, M., "A sliding-window visual-IMU odometer based on tri-focal tensor geometry," *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2014, pp. 3963-3968. doi:10.1109/ICRA.2014.6907434.

49. Weiss, S., and Siegwart, R., “Real-time metric state estimation for modular vision-inertial systems,” IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2011, pp. 4531–4537. doi:10.1109/ICRA.2011.5979982.
50. Mirzaei, F. M., and Roumeliotis, S. I., “A Kalman Filter-Based Algorithm for IMU-Camera Calibration: Observability Analysis and Performance Evaluation,” IEEE Transactions on Robotics, Vol. 24, No. 5, 2008, pp. 1143–1156. doi: 10.1109/TRO.2008.2004486.
51. Mourikis, A. I., and Roumeliotis, S. I., “A Multi-State Constraint Kalman Filter for Vision-aided Inertial Navigation,” IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2007, pp. 3565–3572. doi:10.1109/ROBOT.2007.364024.
52. Koch, D. P., Wheeler, D. O., Beard, R., McLain, T., and Brink, K. M., “Relative multiplicative extended Kalman filter for observable GPS-denied navigation,” BYU Ira A. Fulton College of Engineering and Technology Report 1963, 2017.
53. Tagliabue, A., Kamel, M., Siegwart, R., and Nieto, J., “Robust collaborative object transportation using multiple MAVs,” The International Journal of Robotics Research, Vol. 38, No. 9, 2019, pp. 1020–1044. doi:10.1177/0278364919854131.
54. Hamer, M., and D’Andrea, R., “Self-Calibrating Ultra-Wideband Network Supporting Multi-Robot Localization,” IEEE Access, Vol. 6, 2018, pp. 22292–22304. doi:10.1109/ACCESS.2018.2829020.
55. Greiff, M., Robertsson, A., and Berntorp, K., “Performance Bounds in Positioning with the VIVE Lighthouse System,” IEEE International Conference on Information Fusion, 2019.
56. Beffa, L., Ledergerber, A., and D’Andrea, R., “State Estimate Recovery for Autonomous Quadcopters,” IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2018, pp. 1–7. doi:10.1109/IROS.2018.8594332.
57. Sola, J., “Quaternion kinematics for the error-state KF,” Laboratoire d’Analyse et d’Architecture des Systèmes-Centre national de la recherche scientifique (LAAS-CNRS), Toulouse, France, Tech. Rep IRI-TR-16-02, 2015.
58. Chirikjian, G. S., Stochastic models, information theory, and Lie groups, volume 2: analytic methods and modern applications, Vol. 2, Birkhäuser Basel, 2011. doi:10.1007/978-0-8176-4944-9.
59. Gallier, J., and Quaintance, J., “Notes on differential geometry and Lie groups,” University of Pennsylvania, Vol. 4, 2012.
60. Shuster, M. D., “A survey of attitude representations,” Navigation, Vol. 8, No. 9, 1993, pp. 439–517.
61. Hall, B. C., “Lie Groups, Lie Algebras, and Representations,” Quantum Theory for Mathematicians, Springer, 2013, pp. 333–366. doi:10.1007/978-1-4614-7116-5\_16.

62. Gallego, G., and Yezzi, A., “A compact formula for the derivative of a 3-D rotation in exponential coordinates,” *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol. 51, No. 3, 2015, pp. 378–384. doi:10.1007/s10851-014-0528-x.
63. Chirikjian, G. S., *Stochastic models, information Theory, and Lie groups, volume 1: classical results and geometric methods. Applied and numerical harmonic analysis*, Birkhäuser Basel, 2009. doi:10.1007/978-0-8176-4803-9.
64. Ross, S. M., *Applied probability models with optimization applications*, Courier Corporation, 2013.
65. Andrieu, M. S., and Crassidis, J. L., “Geometric Integration of Quaternions,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 36, No. 6, 2013, pp. 1762–1767. doi:10.2514/1.58558.
66. Codling, E., and Hill, N., “Sampling rate effects on measurements of correlated and biased random walks,” *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 233, No. 4, 2005, pp. 573 – 588. doi:https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2004.11.008.
67. Ledergerber, A., and D’ Andrea, R., “Ultra-Wideband Angle of Arrival Estimation Based on Angle-Dependent Antenna Transfer Function,” *Sensors*, Vol. 19, No. 20, 2019. doi:10.3390/s19204466.
68. Aggarwal, P., Syed, Z., and El-Sheimy, N., “Hybrid Extended Particle Filter (HEPF) for integrated civilian navigation system,” *IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium*, 2008, pp. 984–992. doi:10.1109/PLANS.2008.4570072.
69. Wang, X., Li, T., Sun, S., and Corchado, J. M., “A Survey of Recent Advances in Particle Filters and Remaining Challenges for Multitarget Tracking,” *Sensors*, Vol. 17, No. 12, 2017. doi:10.3390/s17122707.
70. Doucet, A., De Freitas, N., Murphy, K., and Russell, S., “Rao-Blackwellised particle filtering for dynamic Bayesian networks,” *Proceedings of the Sixteenth conference on Uncertainty in artificial intelligence*, Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2000, pp. 176–183.
71. Shariati, H., Moosavi, H., and Danesh, M., “Application of particle filter combined with extended Kalman filter in model identification of an autonomous underwater vehicle based on experimental data,” *Applied Ocean Research*, Vol. 82, 2019, pp. 32 –40. doi:10.1016/j.apor.2018.10.015.
72. Van Der Merwe, R., Doucet, A., De Freitas, N., and Wan, E., “The Unscented Particle Filter,” *International Conference on Neural Information Processing Systems*, MIT Press, Cambridge, MA, USA, 2000, pp. 563–569.
73. Simon, D., *Optimal State Estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches*, John Wiley & Sons, 2006.
74. Bernstein, D. S., *Matrix mathematics: theory, facts, and formulas with application to linear systems theory*, Vol. 41, Princeton University Press, 2005.

75. Galassi, M., Davies, J., Theiler, J., Gough, B., Jungman, G., Alken, P., Booth, M., Rossi, F., and Ulerich, R., GNU scientific library, Network Theory Limited, 2002.
76. Bourmaud, G., Mégret, R., Giremus, A., and Berthoumieu, Y., “Discrete extended Kalman filter on Lie groups,” European Signal Processing Conference, 2013, pp. 1–5.
77. Hamer, M., “Scalable Localization and Coordination of Robot Swarms,” Ph.D. thesis, ETH Zurich, 2019.
78. Hall, J. K., Knoebel, N. B., and McLain, T. W., “Quaternion attitude estimation for miniature air vehicles using a multiplicative extended Kalman filter,” IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium, 2008, pp. 1230–1237. doi:10.1109/PLANS.2008.4570043.
79. Julier, S. J., “The scaled unscented transformation,” American Control Conference, Vol. 6, 2002, pp. 4555–4559 vol.6. doi:10.1109/ACC.2002.1025369.
80. Mäkinen, J., “Rotation manifold  $SO(3)$  and its tangential vectors,” Computational Mechanics, Vol. 42, No. 6, 2008, p. 907. doi:10.1007/s00466-008-0293-z.
81. Barfoot, T. D., and Furgale, P. T., “Associating Uncertainty With Three-Dimensional Poses for Use in Estimation Problems,” IEEE Transactions on Robotics, Vol. 30, No. 3, 2014, pp. 679–693. doi:10.1109/TRO.2014.2298059.
82. Sommer, H., Gilitschenski, I., Bloesch, M., Weiss, S., Siegwart, R., and Nieto, J., “Why and How to Avoid the Flipped Quaternion Multiplication,” Aerospace, Vol. 5, No. 3, 2018. doi:10.3390/aerospace5030072.