

数学：导数与微分

Frank Dellaert

January 25, 2022

第一部分 理论

1 优化

我们将关注最小化形式的非线性最小二乘目标，其形式为

$$x^* = \arg \min_x \|h(x) - z\|_\Sigma^2 \quad (1.1)$$

其中 $x \in \mathcal{M}$ 是 n 维流形 (可以是 \mathbb{R}^n , 一个 n 维李群 G , 或是一个通用流形 \mathcal{M}) 上的一个点, $z \in \mathbb{R}^m$ 为观察到的一组测量值, $h: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是一个测量函数, 它从 x 预测 z , 并且 $\|e\|_\Sigma^2 \triangleq e^T \Sigma^{-1} e$ 是用于协方差 Σ 的 Mahalanobis 平方的距离。

为最小化方程 (1.1), 我们需要一个概念, 即非线性测量函数 $h(x)$ 在一个线性化点 a 邻域的行为方式。粗略地说, 我们想要定义一个 $m \times n$ 雅可比矩阵 H_a , 以使得

$$h(a \oplus \xi) \approx h(a) + H_a \xi \quad (1.2)$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}^n$, 并且运算 \oplus “递增” $a \in \mathcal{M}$ 。下面我们更正式地扩展这个概念, 首先是针对来自 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的函数, 然后是李群, 且最后是流形。

一旦配备近似值方程 (1.2), 我们就可以相对于 δx 最小化目标函数方程 (1.1), 它被替换为:

$$\xi^* = \arg \min_\xi \|h(a) + H_a \xi - z\|_\Sigma^2 \quad (1.3)$$

这可以通过将方程 (1.3) 的导数设置为零来完成, 以产生正则方程组 (normal equations),

$$H_a^T H_a \xi = H_a^T (z - h(a))$$

这可以用 Cholesky 分解法求解。当然, 我们可能需要多次迭代, 并且当近似值方程 (1.2) 不好时, 使用信赖域方法来限制 ξ 。

2 多元微分

2.1 导数

对于一个向量空间 \mathbb{R}^n , 增量的概念仅通过向量加法来完成

$$a \oplus \xi \triangleq a + \xi$$

并且对于近似值方程 (1.2)，我们将使用多元微分的泰勒展开式。但是，不严格遵循文献 [2]，我们将使用一种可能不熟悉的方式来定义导数：

定义 1. 我们定义一个函数 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 a 处是**可微的** (differentiable)，若存在一个矩阵 $f'(a) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，以使得

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{|f(a) + f'(a)\xi - f(a + \xi)|}{|\xi|} = 0$$

其中 $|e| \triangleq \sqrt{e^T e}$ 是通常的范数。如果 f 是可微的，则矩阵 $f'(a)$ 被称为 f 在 a 处的**雅可比矩阵** (Jacobian matrix)，并且线性映射 $Df_a : \xi \mapsto f'(a)\xi$ 被称为 f 在 a 处的**导数** (derivative)。当不可能产生混淆时，我们使用符号 $F_a \triangleq f'(a)$ 以强调 $f'(a)$ 是一个矩阵。

使用这种定义的好处是它将标量导数 $f'(a) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 的概念从 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 推广到多元函数。特别地，导数 Df_a 将在 a 上的向量增量 ξ 映射到 $f(a)$ 上的增量 $f'(a)\xi$ ，以使得该线性映射局部逼近 f ：

$$f(a + \xi) \approx f(a) + f'(a)\xi$$

例 1. 函数 $\pi : (x, y, z) \mapsto (x/z, y/z)$ 投影一个 3D 点 (x, y, z) 到象平面，并有雅可比矩阵

$$\pi'(x, y, z) = \frac{1}{z} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x/z \\ 0 & 1 & -y/z \end{bmatrix}$$

2.2 导数的性质

多元导数的概念遵循通常的规则：

定理 1. (链式规则) 如果 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ 在 a 处可微，并且 $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 $f(a)$ 处可微，则 $h = g \circ f$ 在 a 处的雅可比矩阵 H_a 是 $m \times n$ 矩阵积

$$H_a = G_{f(a)} F_a$$

其中 $G_{f(a)}$ 是 g 在 $f(a)$ 处评估的 $m \times p$ 雅可比矩阵，并且 F_a 是 f 在 a 处评估的 $p \times n$ 雅可比矩阵。

证明. 参见文献 [2]。 □

例 2. 如果我们通过一个校准步骤 $\gamma : (x, y) \mapsto (u_0 + fx, u_0 + fy)$ 跟随投影 π ，具有

$$\gamma'(x, y) = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

则组合函数 $\gamma \circ \pi$ 具有雅可比矩阵

$$(\gamma \circ \pi)'(x, y) = \frac{f}{z} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x/z \\ 0 & 1 & -y/z \end{bmatrix}$$

定理 2. (求逆) 如果 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是可微的，且有可微逆 $g \triangleq f^{-1}$ ，则其在 a 处的雅可比矩阵 G_a 就是 f 在 $g(a)$ 处评估的逆矩阵：

$$G_a = [F_{g(a)}]^{-1}$$

证明. 参见文献 [2]。 □

例 3. 函数 $f: (x, y) \mapsto (x^2, xy)$ 具有雅可比矩阵

$$F_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{bmatrix}$$

并且, 对于 $x \geq 0$, 其逆函数为 $g: (x, y) \mapsto (x^{1/2}, x^{-1/2}y)$, 具有雅可比矩阵

$$G_{(x,y)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x^{-1/2} & 0 \\ -x^{-3/2}y & 2x^{-1/2} \end{bmatrix}$$

它很容易验证

$$g'(a, b)f'(a^{1/2}, a^{-1/2}b) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a^{-1/2} & 0 \\ -a^{-3/2}b & 2a^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a^{1/2} & 0 \\ a^{-1/2}b & a^{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

问题 1. 验证上述对于 $(a, b) = (4, 6)$ 的情况。用图形画出这种情况以获得灵感。

2.3 多元导数的计算

通过定义偏导数的概念, 计算导数变得简单:

定义 2. 对于 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, f 在 a 处的**偏导数** (partial derivative) 为,

$$D_j f(a) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a^1, \dots, a^j + h, \dots, a^n) - f(a^1, \dots, a^n)}{h}$$

这是标量函数 $g(x) \triangleq f(a^1, \dots, x, \dots, a^n)$ 的普通导数。

使用这个定义, 我们可以证明, 一个可微的多元 (multivariate) 函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的雅可比矩阵 F_a 简单地由 $m \times n$ 偏导数 $D_j f^i(a)$ 组成, 其在 $a \in \mathbb{R}^n$ 处评估:

$$F_a = \begin{bmatrix} D_1 f^1(a) & \cdots & D_n f^1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f^m(a) & \cdots & D_n f^m(a) \end{bmatrix}$$

问题 2. 验证示例 1 至 3 的导数。

3 在李群上的多元函数

3.1 李群

李群不像向量空间 \mathbb{R}^n 那么容易处理，但仍然有很多结构可处理。为了推广上述所有导数的概念，我们只需要将在方程 (1.3) 中的 $a \oplus \xi$ 用在李群 G 中的一个合适的操作替换。特别地，指数映射的概念允许我们定义一个从局部坐标 (local coordinates) ξ 返回到在 G 中 a 周围的一个邻域的映射，

$$a \oplus \xi \triangleq a \exp(\hat{\xi}) \quad (3.1)$$

其中对于一个 n 维李群， $\xi \in \mathbb{R}^n$ 。以上， $\hat{\xi} \in \mathfrak{g}$ 是对应于向量 ξ 的李代数元素，并且 $\exp \hat{\xi}$ 是指数映射。注意，若 G 等于 \mathbb{R}^n ，则与指数映射 $ae^{\hat{\xi}}$ 的组合就仅是向量加法 $a + \xi$ 。

例 4. 对于 3D 旋转的李群 $SO(3)$ ，向量 ξ 标志为 ωt ，并表示一个角位移。李代数元素 $\hat{\xi}$ 是一个斜对称矩阵，标志为 $[\omega t]_{\times} \in \mathfrak{so}(3)$ ，并给出为

$$[\omega t]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} t$$

最后，增量 $a \oplus \xi = ae^{\hat{\xi}}$ 对应于一个增量旋转 $R \oplus \omega t = Re^{[\omega t]_{\times}}$ 。

3.2 局部坐标与切向量

在微分几何中，在 a 处的切向量 (tangent vectors) $v \in T_a G$ 是李代数 \mathfrak{g} 的元素，并被定义为

$$v \triangleq \left. \frac{\partial \gamma(t)}{\partial t} \right|_{t=0}$$

其中 γ 是在 $t = 0$ 时通过 a 的一些曲线，即 $\gamma(0) = a$ 。特别是，对于任意固定的局部坐标 ξ ，映射方程 (3.1) 可用于定义在群流形上的一条测地线曲线 (geodesic curve)，其定义为 $\gamma: t \mapsto ae^{t\hat{\xi}}$ ，并且相应的切向量给出为

$$\left. \frac{\partial ae^{t\hat{\xi}}}{\partial t} \right|_{t=0} = a\hat{\xi} \quad (3.2)$$

这定义了局部坐标 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 和实际切向量 $a\hat{\xi} \in \mathfrak{g}$ 之间的映射：向量 ξ 定义流形上的行进方向，但在局部坐标帧 a 中完成。

例 5. 假设一个刚体的姿态由 $R_b^n(t)$ 描述，其中，上下标分别标志导航帧 N 和机体帧 B 。一个经过外部校准的陀螺仪在机体帧中测量角速度 ω^b ，以及相应的切向量为

$$\dot{R}_b^n(t) = R_b^n(t) \widehat{\omega^b}$$

3.3 导数

我们可以推广定义 1，将局部坐标 ξ 映射到 $f(a)$ 上的增量 $f'(a)\xi$ ，以使得线性映射 Df_a 近似函数 f 在 a 周围的一个邻域中从 G 到 \mathbb{R}^m 为：

$$f(ae^{\hat{\xi}}) \approx f(a) + f'(a)\xi$$

定义 3. 我们定义一个函数 $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 $a \in G$ 处是**可微的 (differentiable)**, 如果存在一个矩阵 $f'(a) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 以使得

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{|f(a) + f'(a)\xi - f(ae^\xi)|}{|\xi|} = 0$$

如果 f 是可微的, 则矩阵 $f'(a)$ 被称为 f 在 a 处的**雅可比矩阵 (Jacobian matrix)**, 并且线性映射 $Df_a : \xi \mapsto f'(a)\xi$ 被称为 f 在 a 处的**导数 (derivative)**。

3.4 作用的导数

矩阵群 G 的 (通常的) 作用是在 \mathbb{R}^n 上的矩阵向量乘法, 即 $f : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 其中

$$f(T, p) = Tp$$

由于这是一个定义在积 $G \times \mathbb{R}^n$ 上的函数, 所以导数是一个线性变换 $Df : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, 其中

$$Df_{(T,p)}(\xi, \delta p) = D_1 f_{(T,p)}(\xi) + D_2 f_{(T,p)}(\delta p)$$

其中 m 是流形 G 的维度。

定理 3. 群作用 $f(T, p) = Tp$ 在 (T, p) 处的雅可比矩阵给出为

$$F_{(T,p)} = \begin{bmatrix} TH(p) & T \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} H(p) & I_n \end{bmatrix}$$

其中 $H : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ 是一个依赖于 p 的线性映射, 并且 I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵。

证明. 首先, 相对于 p 的导数 $D_2 f$ 很容易, 因为它的矩阵是简单的 T :

$$f(T, p + \delta p) = T(p + \delta p) = Tp + T\delta p = f(T, p) + D_2 f(\delta p)$$

对于导数 $D_1 f$, 相对于第一个参数 T 的变化, 我们想找到线性映射 $D_1 f$, 以使得

$$Tp + D_1 f(\xi) \approx f(Te^\xi, p) = Te^\xi p$$

由于矩阵指数由级数 $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$ 给出。我们有, 对于一阶

$$Te^\xi p \approx T(I + \hat{\xi})p = Tp + T\hat{\xi}p$$

并且 $D_1 f(\xi) = T\hat{\xi}p$ 。因此, 为了完成证明, 我们需要证明

$$\hat{\xi}p = H(p)\xi \quad (3.3)$$

其中 $H(p)$ 是依赖于 p 的一个 $n \times m$ 矩阵, 按照李代数生成元 G^i 表达映射 $\xi \rightarrow \hat{\xi}$, 使用张量和爱因斯坦求和, 我们有 $\hat{\xi}_j^i = G_{jk}^i \xi^k$, 以允许我们计算 $\hat{\xi}p$ 为

$$(\hat{\xi}p)^i = \hat{\xi}_j^i p^j = G_{jk}^i \xi^k p^j = (G_{jk}^i p^j) \xi^k = H_k^i(p) \xi^k$$

□

例 6. 对于 3D 旋转 $R \in SO(3)$, 我们有 $\hat{\omega} = [\omega]_\times$ 以及

$$G_{k=1} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} G_{k=2} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} G_{k=3} : \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵 $(G_k^i)_j$ 通过组装上述生成元的第 j^{th} 列来获得, 产生的 $H(p)$ 等于:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} p^1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} p^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} p^3 = \begin{pmatrix} 0 & p^3 & -p^2 \\ -p^3 & 0 & p^1 \\ p^2 & -p^1 & 0 \end{pmatrix} = [-p]_{\times}$$

因此, $f(R, p) = Rp$ 的雅可比矩阵给出为:

$$F_{(R,p)} = R \begin{pmatrix} [-p]_{\times} & I_3 \end{pmatrix}$$

3.5 逆作用的导数

通过应用 $T \in G$ 的逆作用, 产生一个函数 $g: G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 定义为

$$g(T, p) = T^{-1}p$$

定理 4. 逆群作用 $g(T, p) = T^{-1}p$ 的雅可比矩阵给出为

$$G_{(T,p)} = \begin{bmatrix} -H(T^{-1}p) & T^{-1} \end{bmatrix}$$

其中 $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ 是与前面相同的映射。

证明. 同样, 相对于 p 的导数 D_2g 很容易, 其矩阵是简单的 T^{-1} :

$$g(T, p + \delta p) = T^{-1}(p + \delta p) = T^{-1}p + T^{-1}\delta p = g(T, p) + D_2g(\delta p)$$

反之, 在 T 中的一个变化产生

$$g(Te^{\hat{\xi}}, p) = (Te^{\hat{\xi}})^{-1}p = e^{-\hat{\xi}}T^{-1}p$$

与之前类似, 如果我们扩展矩阵指数化, 我们得到

$$e^{-A} = I - A + \frac{A^2}{2!} - \frac{A^3}{3!} + \dots$$

所以

$$e^{-\hat{\xi}}T^{-1}p \approx (I - \hat{\xi})T^{-1}p = g(T, p) - \hat{\xi}(T^{-1}p)$$

□

例 7. 对于 3D 旋转 $R \in SO(3)$, 我们有 $R^{-1} = R^T$, $H(p) = -[p]_{\times}$, 并因此 $g(R, p) = R^T p$ 的雅可比矩阵给出为

$$G_{(R,p)} = \begin{pmatrix} [R^T p]_{\times} & R^T \end{pmatrix}$$

4 瞬时速度

对于矩阵李群, 如果我们有依赖于一个参数 t 的一个矩阵 $T_b^n(t)$, 即 $T_b^n(t)$ 跟随流形上的一条曲线, 则我们感兴趣找到一个点 $q^n(t) = T_b^n(t)p^b$ 的速度, 其受 $T_b^n(t)$ 的作用。我们可以同时在 n 帧和 b 帧中表达 $q(t)$ 的速度:

$$\dot{q}^n = \dot{T}_b^n p^b = \dot{T}_b^n (T_b^n)^{-1} p^n \quad \text{and} \quad \dot{q}^b = (T_b^n)^{-1} \dot{q}^n = (T_b^n)^{-1} \dot{T}_b^n p^b$$

两个矩阵 $\hat{\xi}_{nb}^n \triangleq \dot{T}_b^n (T_b^n)^{-1}$ 和 $\hat{\xi}_{nb}^b \triangleq (T_b^n)^{-1} \dot{T}_b^n$ 都为斜对称李代数元素, 其描述**瞬时速度 (instantaneous velocity)** [1, 对于旋转参见第 51 页, 对于 SE(3) 参见第 419 页]。对于旋转和刚性 3D 变换, 我们将重新进行讨论。

5 微分：李群之间的平滑映射

5.1 动机与定义

前面显示了如何计算一个函数 $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的导数。然而，如果 f 的参数本身是李群之间映射的结果呢？换句话说， $f = g \circ \varphi$ ，其中 $g: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ ，并且这里 $\varphi: H \rightarrow G$ 是一个从 n 维李群 H 到 p 维李群 G 的平滑映射。在这种情况下，我们可以期望通过组合线性映射得到 Df_a ，如下所示：

$$f'(a) = (g \circ \varphi)'(a) = G_{\varphi(a)} \varphi'(a)$$

其中 $\varphi'(a)$ 是一个 $n \times p$ 矩阵，其是映射 $\varphi: H \rightarrow G$ 的最佳线性近似。相应的线性映射 $D\varphi_a$ 被称为映射 φ 在 a 处是**可微的 (differential)** 或**可前推的 (pushforward)**。

因为一个严格的定义会让我们误入歧途，在这里我们只是非正式地定义 φ 在 a 处的前推，作为线性映射 $D\varphi_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ，以使得 $D\varphi_a(\xi) \triangleq \varphi'(a)\xi$ 并且

$$\varphi(ae^{\hat{\xi}}) \approx \varphi(a) \exp(\widehat{\varphi'(a)\xi}) \quad (5.1)$$

对于 $\xi \rightarrow 0$ 是相等的。我们称 $\varphi'(a)$ 为映射 φ 在 a 处的**雅可比矩阵 (Jacobian matrix)**。下面我们显示，即使使用这个非正式的定义，我们也可以在一些有用的情况下推导出前推。

5.2 用常数左乘

定理 5. 假设 G 是一个 n 维李群，并且 $\varphi: G \rightarrow G$ 被定义为 $\varphi(g) = hg$ ，其中 $h \in G$ 是一个常数。则 $D\varphi_a$ 是特征映射，并且

$$\varphi'(a) = I_n$$

证明. 如在方程 (5.1) 中定义 $y = D\varphi_a x$ ，我们有

$$\begin{aligned} \varphi(a)e^{\hat{y}} &= \varphi(ae^{\hat{x}}) \\ hae^{\hat{y}} &= hae^{\hat{x}} \\ y &= x \end{aligned}$$

□

5.3 逆映射的前推

李群的一个众所周知的性质是，在不同帧 g 中应用增量变化 $\hat{\xi}$ ，可以通过在原始帧中应用变化 $Ad_g \hat{\xi}$ ，以在单个步骤中完成应用，

$$ge^{\hat{\xi}}g^{-1} = \exp(Ad_g \hat{\xi}) \quad (5.2)$$

其中 $Ad_g: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ 是伴随表示 (**adjoint representation**)。这在以下方面很方便：

定理 6. 假设 $\varphi: G \rightarrow G$ 定义为从元素 g 到其**逆 (inverse)** g^{-1} 的映射，即 $\varphi(g) = g^{-1}$ ，则前推 $D\varphi_a$ 满足

$$(D\varphi_a x)^\wedge = -Ad_a \hat{x} \quad (5.3)$$

换句话说，并且事后来，这是很直观的，近似逆映射是通过对 $\hat{\xi}$ 取反来完成的，同时还有一个伴随，以确保它被应用在正确的帧中。但是，请注意方程 (5.3) 不会立即产生雅可比矩阵 $\varphi'(a)$ 的一个有用表达式，但是在许多重要情况下，这将变得很容易。

证明. 如在方程 (5.1) 中定义 $y = D\varphi_a x$, 我们有

$$\begin{aligned}\varphi(a)e^{\hat{y}} &= \varphi(ae^{\hat{x}}) \\ a^{-1}e^{\hat{y}} &= (ae^{\hat{x}})^{-1} \\ e^{\hat{y}} &= ae^{-\hat{x}}a^{-1} \\ \hat{y} &= -Ad_a\hat{x}\end{aligned}$$

□

例 8. 对于 3D 旋转 $R \in SO(3)$, 我们有

$$Ad_g(\hat{\omega}) = R\hat{\omega}R^T = [R\omega]_{\times}$$

并因此, 对于逆映射 $\varphi(R) = R^T$ 的前推有矩阵 $\varphi'(R) = -R$ 。

5.4 用常数右乘

定理 7. 假设 $\varphi: G \rightarrow G$ 被定义为 $\varphi(g) = gh$, 其中 $h \in G$ 是一个常数。则 $D\varphi_a$ 满足

$$(D\varphi_a x)^{\wedge} = Ad_{h^{-1}}\hat{x}$$

证明. 如在方程 (5.1) 中定义 $y = D\varphi_a x$, 我们有

$$\begin{aligned}\varphi(a)e^{\hat{y}} &= \varphi(ae^{\hat{x}}) \\ ahe &= ae^{\hat{x}}h \\ e^{\hat{y}} &= h^{-1}e^{\hat{x}}h = \exp(Ad_{h^{-1}}\hat{x}) \\ \hat{y} &= Ad_{h^{-1}}\hat{x}\end{aligned}$$

□

例 9. 在 3D 旋转的情况下, 通过映射 $\varphi(A) = AR$ 来完成与一个恒定旋转 R 的右乘, 并满足

$$[D\varphi_A x]_{\times} = Ad_{R^T}[x]_{\times}$$

对于 3D 旋转 $R \in SO(3)$ 我们有

$$Ad_{R^T}(\hat{\omega}) = R^T\hat{\omega}R = [R^T\omega]_{\times}$$

并因此, φ 在 A 处的雅可比矩阵为 $\varphi'(A) = R^T$ 。

5.5 组合的前推

定理 8. 如果我们定义映射 $\varphi: G \times G \rightarrow G$ 为两个群元素 $g, h \in G$ 的乘积, 即 $\varphi(g, h) = gh$, 则前推将满足

$$D\varphi_{(a,b)}(x, y) = D_1\varphi_{(a,b)}x + D_2\varphi_{(a,b)}y$$

其中

$$(D_1\varphi_{(a,b)}x)^{\wedge} = Ad_{b^{-1}}\hat{x} \quad \text{and} \quad D_2\varphi_{(a,b)}y = y$$

证明. 看第一个参数, 证明非常类似于用常数 b 的右乘法。事实上, 如在方程 (5.1) 中定义 $y = D\varphi_a x$, 我们有

$$\begin{aligned}\varphi(a, b)e^{\hat{y}} &= \varphi(ae^{\hat{x}}, b) \\ abe^{\hat{y}} &= ae^{\hat{x}}b \\ e^{\hat{y}} &= b^{-1}e^{\hat{x}}b = \exp(Ad_{b^{-1}}\hat{x}) \\ \hat{y} &= Ad_{b^{-1}}\hat{x}\end{aligned}\tag{5.4}$$

换句话说, 要将一个增量更改 \hat{x} 应用于 a , 我们首先需要撤消 b , 然后应用 \hat{x} , 并然后再次应用 b 。使用方程 (5.2), 这可以通过简单地应用 $Ad_{b^{-1}}\hat{x}$ 来一步完成。

第二个参数要简单得多, 并简单产生特征映射:

$$\begin{aligned}\varphi(a, b)e^{\hat{y}} &= \varphi(a, be^{\hat{x}}) \\ abe^{\hat{y}} &= abe^{\hat{x}} \\ y &= x\end{aligned}\tag{5.5}$$

□

例 10. 对于 3D 旋转 $A, B \in SO(3)$, 我们有 $\varphi(A, B) = AB$, 并且 $Ad_{B^T}[\omega]_{\times} = [B^T\omega]_{\times}$, 因此组合两个旋转的雅可比矩阵 $\varphi'(A, B)$ 给出为

$$\varphi'(A, B) = \begin{bmatrix} B^T & I_3 \end{bmatrix}$$

5.6 相差 (Between) 的前推

最后, 让我们找到**相差 (between)** 的前推, 定义为 $\varphi(g, h) = g^{-1}h$ 。对于第一个参数, 我们的理由是:

$$\begin{aligned}\varphi(g, h)e^{\hat{y}} &= \varphi(ge^{\hat{x}}, h) \\ g^{-1}he^{\hat{y}} &= (ge^{\hat{x}})^{-1}h = e^{-\hat{x}}g^{-1}h \\ e^{\hat{y}} &= (h^{-1}g)e^{-\hat{x}}(h^{-1}g)^{-1} = \exp Ad_{(h^{-1}g)}(-\hat{x}) \\ \hat{y} &= -Ad_{(h^{-1}g)}\hat{x} = -Ad_{\varphi(h, g)}\hat{x}\end{aligned}\tag{5.6}$$

第二个参数产生特征映射。

例 11. 对于 3D 旋转 $A, B \in SO(3)$, 我们有 $\varphi(A, B) = A^TB$, 并且 $Ad_{B^TA}[-\omega]_{\times} = [-B^TA\omega]_{\times}$, 因此, 相差 (between) 的雅可比矩阵 $\varphi'(A, B)$ 给出为

$$\varphi'(A, B) = \begin{bmatrix} (-B^TA) & I_3 \end{bmatrix}$$

5.7 数值前推

让我们检查

$$f(g)e^{\hat{y}} = f(ge^{\hat{x}})$$

并在两侧都用 $f(g)^{-1}$ 相乘:

$$e^{\hat{y}} = f(g)^{-1}f(ge^{\hat{x}})$$

然后我们取 \log (在我们的案例中返回 y , 而不是 \hat{y}):

$$y(x) = \log \left[f(g)^{-1} f(ge^{\hat{x}}) \right]$$

让我们查看当 $x = 0$, 并在方向 i 上进行扰动, $e_i = [0, 0, 1, 0, 0]$ 。然后取导数,

$$\frac{\partial y(d)}{\partial d} \triangleq \lim_{d \rightarrow 0} \frac{y(d) - y(0)}{d} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{d} \log \left[f(g)^{-1} f(ge^{\widehat{de_i}}) \right]$$

这是一个数值导数方案的基础。

5.8 指数映射的导数

定理 9. 函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ 应用楔形算子和指数映射, 即 $f(\xi) = \exp \hat{\xi}$, 对于 $\xi = 0$, 其导数是特征映射。

证明. 对于 $\xi = 0$, 我们有

$$\begin{aligned} f(\xi)e^{\hat{y}} &= f(\xi + x) \\ f(0)e^{\hat{y}} &= f(0 + x) \\ e^{\hat{y}} &= e^{\hat{x}} \end{aligned}$$

□

推论 1. 逆函数 f^{-1} 的导数也是特征式, 即对于 $T = e$, 其为在 G 中的特征元素。

对于 $\xi \neq 0$, 事情并不简单。与上面的前推一样, 我们将寻找一个 $n \times n$ 雅可比矩阵 $f'(\xi)$, 以使得

$$f(\xi + \delta) \approx f(\xi) \exp \left(\widehat{f'(\xi)\delta} \right) \quad (5.7)$$

微分几何告诉我们, 对于任意李代数元素 $\hat{\xi} \in \mathfrak{g}$, 存在一个线性映射 $d \exp_{\hat{\xi}}: T_{\hat{\xi}}\mathfrak{g} \rightarrow T_{\exp(\hat{\xi})}G$, 其被给出为¹

$$d \exp_{\hat{\xi}} \hat{x} = \exp(\hat{\xi}) \frac{1 - \exp(-ad_{\hat{\xi}})}{ad_{\hat{\xi}}} \hat{x} \quad (5.8)$$

其中 $\hat{x} \in T_{\hat{\xi}}\mathfrak{g}$, 并且 $ad_{\hat{\xi}}$ 它本身是一个线性映射, 把 \hat{x} 带到 $[\hat{\xi}, \hat{x}]$, 即李括号。上面的实际公式并没有线性映射存在的事实那么重要, 尽管它直接根据切向量来表达 \mathfrak{g} 和 G 。方程 (5.8) 是一个切向量, 并且与方程 (3.2) 相比, 我们看到它映射到局部坐标 y , 如下所示:

$$\hat{y} = \frac{1 - \exp(-ad_{\hat{\xi}})}{ad_{\hat{\xi}}} \hat{x}$$

这可被用来构造雅可比矩阵 $f'(\xi)$ 。

例 12. 对于 $SO(3)$, 当使用 3 元向量表示 $\mathfrak{so}(3)$ 时, 算子 $ad_{\hat{\xi}}$ 简单地是一个矩阵乘法, 即 $ad_{\hat{\xi}}x = \hat{\xi}x$, 并且对应于 $d \exp$ 的 3×3 雅可比矩阵为

$$f'(\xi) = \frac{I_{3 \times 3} - \exp(-\hat{\xi})}{\hat{\xi}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \hat{\xi}^k$$

其类似于指数映射, 对于 $SO(3)$ 有一个简单的封闭形式的表达式。

¹参见 <http://deltaepsilons.wordpress.com/2009/11/06/> 或 https://en.wikipedia.org/wiki/Derivative_of_the_exponential_map。

6 一般流形

6.1 收回

非李群的一般流形不具有指数映射,但仍然可以通过定义**收回 (retraction)** $\mathcal{R} : \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$ 来处理,以使得

$$a \oplus \xi \triangleq \mathcal{R}_a(\xi)$$

一个收回 [?] 需要在 a 处与在流形 \mathcal{M} 上的测地线相切。我们可以为流形 \mathcal{M} 定义许多种收回,甚至对于那些具有更多结构的流形。对于向量空间 \mathbb{R}^n , 收回仅为向量加法, 对于李群, 明显的收回仅为指数收回, 即 $\mathcal{R}_a(\xi) = a \cdot \exp \hat{\xi}$ 。然而, 我们可以选择其它的, 可能在计算上有吸引力的收回, 只要在 a 周围, 它们与指数映射诱导的测地线一致, 即,

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{|a \cdot \exp \hat{\xi} - \mathcal{R}_a(\xi)|}{|\xi|} = 0$$

例 13. 对于 $SE(3)$, 与其使用真正的指数映射, 不如定义收回, 它使用平移更新的一阶近似值, 在计算上更有效率

$$\mathcal{R}_T \left(\begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{[\omega]_{\times}} & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Re^{[\omega]_{\times}} & t + Rv \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.2 导数

通过配备一个收回, 则我们可以将导数的概念推广到从一般的一个流形 \mathcal{M} 到 \mathbb{R}^m 的函数 f 上:

定义 4. 我们定义一个函数 $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 $a \in \mathcal{M}$ 处是**可微的 (differentiable)**, 如果存在一个矩阵 $f'(a)$, 以使得

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{|f(a) + f'(a)\xi - f(\mathcal{R}_a(\xi))|}{|\xi|} = 0$$

其中, 对于 n 维流形 $\xi \in \mathbb{R}^n$, 并且 $\mathcal{R}_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$ 是 \mathcal{R} 在 a 处的一个收回。若 f 是可微的, 则 $f'(a)$ 被称为 f 在 a 处的**雅可比矩阵 (Jacobian matrix)**, 并且线性变换 $Df_a : \xi \mapsto f'(a)\xi$ 被称为 f 在 a 处的**导数 (derivative)**。

对于同样是李群的流形, 无论使用什么收回 \mathcal{R} , 任意函数 $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的导数都将同意。

第二部分 实践

下面我们将理论部分推导出的结果应用于在 GTSAM 中使用的几何对象。在上面，对于偏导数我们倾向于使用现代符号 $D_1 f$ 。下面 (因为这是早些时候写的) 我们使用更经典的符号

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

此外，对于李群，我们将滥用符号，并取

$$\left. \frac{\partial \varphi(g)}{\partial \xi} \right|_a$$

为映射 φ 在 $a \in G$ 处的雅可比矩阵 $\varphi'(a)$ ，其与前推 $D\varphi_a$ 相关。

7 SLAM 示例

让我们检查一个可视化 SLAM 示例。我们有 2D 测量值 z_{ij} ，其中每个测量值由下式预测为

$$z_{ij} = h(T_i, p_j) = \pi(T_i^{-1} p_j)$$

其中 T_i 是第 i 个相机的 3D 位姿， p_j 是第 j 个点的位置，并且 $\pi : (x, y, z) \mapsto (x/z, y/z)$ 是来自示例 1 的相机投影函数。

8 BetweenFactor

BetweenFactor 是在 GTSAM 中的一个因子，广泛用于处理指示两个未知位姿 T_1 和 T_2 之间的相对位姿的测量值。让我们假设测量的相对位姿为 Z ，则计算在 **BetweenFactor** 中的误差的代码首先计算预测的相对位姿 T_{12} ，然后计算测量的相对位姿与预测的相对位姿之间的误差：

```
T12 = between(T1, T2);
return localCoordinates(Z, T12);
```

在这里，我们回顾一下，函数 **between** 在群论的符号中给出为

$$\varphi(g, h) = g^{-1}h$$

函数 **localCoordinates** 它本身也会调用 **between**，并转换到规范坐标：

```
localCoordinates(Z, T12) = Logmap(between(Z, T12));
```

因此，给定两个元素 T_1 和 T_2 ，**BetweenFactor** 评估 $g : G \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，

$$g(T_1, T_2; Z) = f^{-1}(\varphi(Z, \varphi(T_1, T_2))) = f^{-1}(Z^{-1}(T_1^{-1}T_2))$$

其中 f^{-1} 是映射 $f : \xi \mapsto \exp \hat{\xi}$ 的逆。如果我们假设测量只有很小的误差，则 $Z \approx T_1^{-1}T_2$ ，并因此我们有 $Z^{-1}T_1^{-1}T_2 \approx e$ ，并且我们可以援引定理 9，也就是说，指数映射 $f : \xi \mapsto \exp \hat{\xi}$ 的导数在 $\xi = 0$ 时是特征式，同时也是它的逆。

最后，由于 **between** 的导数在其第二个参数中是特征式，因此 **BetweenFactor** 的误差的导数等同于在第 5.6 节中推导的 $\varphi(T_1, T_2)$ 的前推的导数。

9 Point3

一个叉积 $a \times b$ 可被写为一个矩阵乘法

$$a \times b = [a]_{\times} b$$

其中 $[a]_{\times}$ 是一个斜对称矩阵，被定义为

$$[x, y, z]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

我们还有

$$a^T [b]_{\times} = -([b]_{\times} a)^T = -(a \times b)^T$$

叉积的导数为

$$\frac{\partial(a \times b)}{\partial a} = [-b]_{\times} \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial(a \times b)}{\partial b} = [a]_{\times} \quad (9.2)$$

10 2D 旋转

10.1 在 GTSAM 中的 Rot2

一个旋转存储为 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 。使用三角加和的规则应用一个增量旋转：

$$\cos \theta' = \cos \theta \cos \delta - \sin \theta \sin \delta$$

$$\sin \theta' = \sin \theta \cos \delta + \cos \theta \sin \delta$$

其中 δ 是一个增量旋转角。

10.2 作用的导数

在 $SO(2)$ 的情况下，向量空间是 \mathbb{R}^2 ，并且群作用 $f(R, p)$ 对应于旋转 2D 点 p

$$f(R, p) = Rp$$

根据定理 3, f 的雅可比矩阵给出为

$$f'(R, p) = \begin{bmatrix} RH(p) & R \end{bmatrix}$$

其中 $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 是一个依赖于 p 的线性映射。在 $SO(2)$ 的情况下，我们可以通过等式 (如在方程 (3.3) 中所示) 寻找 $H(p)$ ：

$$[w]_+ p = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \omega = H(p)\omega$$

请注意

$$H(p) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R_{\pi/2} p$$

并由于 2D 旋转可交换，我们也有，其中 $q = Rp$ ：

$$f'(R, p) = \begin{bmatrix} R(R_{\pi/2} p) & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\pi/2} q & R \end{bmatrix}$$

10.3 映射的前推

因为 $Ad_R[\omega]_+ = [\omega]_+$ ，我们有逆 (inverse) 的导数，

$$\frac{\partial R^T}{\partial \omega} = -Ad_R = -1$$

组合 (compose)，

$$\frac{\partial (R_1 R_2)}{\partial \omega_1} = Ad_{R_2^T} = 1 \text{ and } \frac{\partial (R_1 R_2)}{\partial \omega_2} = 1$$

以及相差 (between)：

$$\frac{\partial (R_1^T R_2)}{\partial \omega_1} = -Ad_{R_2^T R_1} = -1 \text{ and } \frac{\partial (R_1^T R_2)}{\partial \omega_2} = 1$$

11 2D 刚性变换

11.1 作用的导数

在 2D 点上 $SE(2)$ 的作用通过使用齐次坐标将点嵌入 \mathbb{R}^3 来完成

$$f(T, p) = \hat{q} = \begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = T\hat{p}$$

为找到导数, 我们将量 $\hat{\xi}\hat{p}$ 写为 3×3 矩阵 $H(p)$ 与 ξ 的乘积:

$$\hat{\xi}\hat{p} = \begin{bmatrix} [\omega]_+ & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\omega]_+ p + v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & R_{\pi/2} p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = H(p)\xi \quad (11.1)$$

因此, 根据定理 3 我们有

$$\frac{\partial (T\hat{p})}{\partial \xi} = TH(p) = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & R_{\pi/2} p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & RR_{\pi/2} p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & R_{\pi/2} q \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

注意, 仅查看方程 (11.1) 和 (11.2), 我们可以认出量 $[\omega]_+ p + v = v + \omega (R_{\pi/2} p)$ 为 p 在 \mathbb{R}^2 中的速度, 并且 $\begin{bmatrix} R & R_{\pi/2} q \end{bmatrix}$ 是作用于 \mathbb{R}^2 上的导数。

逆作用 $g(T, p) = T^{-1}\hat{p}$ 的导数由定理 4 专门针对 $SE(2)$ 给出为:

$$\frac{\partial (T^{-1}\hat{p})}{\partial \xi} = -H(T^{-1}p) = \begin{bmatrix} -I_2 & -R_{\pi/2} (T^{-1}p) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11.2 映射的前推

我们可以仅用伴随映射定义所有的导数, 在 $SE(2)$ 的情况下, 在运动旋量坐标帧中, 伴随映射是线性映射

$$Ad_T \xi = \begin{bmatrix} R & -R_{\pi/2} t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

并且我们有

$$\frac{\partial T^{-1}}{\partial \xi} = -Ad_T$$

$$\frac{\partial (T_1 T_2)}{\partial \xi_1} = Ad_{T_2^{-1}} \text{ and } \frac{\partial (T_1 T_2)}{\partial \xi_2} = I_3$$

$$\frac{\partial (T_1^{-1} T_2)}{\partial \xi_1} = -Ad_{T_2^{-1} T_1} = -Ad_{between(T_2, T_1)} \text{ and } \frac{\partial (T_1^{-1} T_2)}{\partial \xi_2} = I_3$$

12 3D 旋转

12.1 作用的导数

在 $SO(3)$ 的情况下，向量空间是 \mathbb{R}^3 ，并且群作用 $f(R, p)$ 对应于旋转一个点

$$q = f(R, p) = Rp$$

为计算在定理 3 中使用的 $H(p)$ ，我们利用

$$[\omega]_{\times} p = \omega \times p = -p \times \omega = [-p]_{\times} \omega$$

所以 $H(p) \triangleq [-p]_{\times}$ 。因此，一个作用的最终的导数，在它的第一个参数中为

$$\frac{\partial (Rp)}{\partial \omega} = RH(p) = -R[p]_{\times} \quad (12.1)$$

同样，根据定理 4，逆作用的导数给出为

$$\frac{\partial (R^T p)}{\partial \omega} = -H(R^T p) = [R^T p]_{\times}$$

12.2 瞬时速度

对于从机体帧 b 到导航帧 n 的 3D 旋转 R_b^n ，我们有空间角速度 ω_{nb}^n ，其在导航帧中测量，

$$[\omega_{nb}^n]_{\times} \triangleq \dot{R}_b^n (R_b^n)^T = \dot{R}_b^n R_n^b$$

并且有机体的角速度 ω_{nb}^b ，其在机体帧内测量：

$$[\omega_{nb}^b]_{\times} \triangleq (R_b^n)^T \dot{R}_b^n = R_n^b \dot{R}_b^n$$

这些量可用于推导一个点 p 的速度，并且根据我们选择表示 p 的帧，我们在空间或机体角速度之间进行选择：

$$v^n = [\omega_{nb}^n]_{\times} p^n = \omega_{nb}^n \times p^n$$

$$v^b = [\omega_{nb}^b]_{\times} p^b = \omega_{nb}^b \times p^b$$

我们可以通过共轭将这些斜对称矩阵从导航帧变换到机体帧，

$$[\omega_{nb}^b]_{\times} = R_n^b [\omega_{nb}^n]_{\times} R_b^n$$

但因为伴随表示满足

$$Ad_R [\omega]_{\times} \triangleq R [\omega]_{\times} R^T = [R\omega]_{\times}$$

我们甚至可以更容易地将空间角速度和机体角速度变换为 3 元向量：

$$\omega_{nb}^b = R_n^b \omega_{nb}^n$$

12.3 映射的前推

对于 $SO(3)$ 我们有 $Ad_R[\omega]_\times = [R\omega]_\times$, 并且, 根据角速度: $Ad_R\omega = R\omega$. 因此, 逆 (inverse) 映射的雅可比矩阵为 (参见方程 (5.3))

$$\frac{\partial R^T}{\partial \omega} = -Ad_R = -R$$

对于组合 (compose), 我们有 (方程 (5.4) 和 (5.5)):

$$\frac{\partial (R_1 R_2)}{\partial \omega_1} = R_2^T \text{ and } \frac{\partial (R_1 R_2)}{\partial \omega_2} = I_3$$

以及相差 (between) (方程 (5.6)):

$$\frac{\partial (R_1^T R_2)}{\partial \omega_1} = -R_2^T R_1 = -between(R_2, R_1) \text{ and } \frac{\partial (R_1 R_2)}{\partial \omega_2} = I_3$$

12.4 Retractions

Absil [?, page 58] 讨论了对于 $SO(3)$, 矩阵 $R[\omega]_\times$ 基于 QR 分解或极性分解的两种可能的收回, 但它们是昂贵的。另一种收回基于 Cayley 变换 $\mathcal{C}: \mathfrak{so}(3) \rightarrow SO(3)$, 一种从斜对称矩阵到旋转矩阵的映射:

$$Q = \mathcal{C}(\Omega) = (I - \Omega)(I + \Omega)^{-1}$$

有趣的是, 逆 Cayley 变换 $\mathcal{C}^{-1}: SO(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ 具有相同的形式:

$$\Omega = \mathcal{C}^{-1}(Q) = (I - Q)(I + Q)^{-1}$$

然而, 收回需要一个系数 $-\frac{1}{2}$, 以使其与测地线局部对齐:

$$R' = \mathcal{R}_R(\omega) = R\mathcal{C}\left(-\frac{1}{2}[\omega]_\times\right)$$

注意, 给定 $\omega = (x, y, z)$, 它具有以下封闭形式表达式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4 + x^2 + y^2 + z^2} \begin{bmatrix} 4 + x^2 - y^2 - z^2 & 2xy - 4z & 2xz + 4y \\ 2xy + 4z & 4 - x^2 + y^2 - z^2 & 2yz - 4x \\ 2xz - 4y & 2yz + 4x & 4 - x^2 - y^2 + z^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4 + x^2 + y^2 + z^2} \left\{ 4(I + [\omega]_\times) + \begin{bmatrix} x^2 - y^2 - z^2 & 2xy & 2xz \\ 2xy & -x^2 + y^2 - z^2 & 2yz \\ 2xz & 2yz & -x^2 - y^2 + z^2 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

因此它可以看作是 $(I + [\omega]_\times)$ 的二阶修正。对数映射的相应近似值为:

$$[\omega]_\times = \mathcal{R}_R^{-1}(R') = -2\mathcal{C}^{-1}(R^T R')$$

13 3D 刚性变换

13.1 作用的导数

在 3D 点上 $SE(3)$ 的作用通过使用齐次坐标将点嵌入 \mathbb{R}^4 来完成

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix} = f(T, p) = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = T\hat{p}$$

量 $\hat{\xi}\hat{p}$ 对应于在 \mathbb{R}^4 中的速度 (在局部 T 帧中), 并如方程 (3.3) 所示将其等同于 $H(p)\xi$ 以产生 4×6 矩阵 $H(p)$ ²:

$$\hat{\xi}\hat{p} = \begin{bmatrix} [\omega]_{\times} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \times p + v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-p]_{\times} & I_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} = H(p)\xi$$

请注意, 速度如何类似于射影几何中无穷远的点: 它们对应于自由向量指示一个方向和幅值的变化。根据定理 3, 在齐次坐标中群作用的导数则为

$$\frac{\partial (T\hat{p})}{\partial \xi} = TH(p) = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [-p]_{\times} & I_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R[-p]_{\times} & R \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial (T\hat{p})}{\partial \hat{p}} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在 \mathbb{R}^3 中它变为 $R \begin{bmatrix} -[p]_{\times} & I_3 \end{bmatrix}$ 。

逆作用 $T^{-1}p$ 的导数由定理 4 给出为:

$$\frac{\partial (T^{-1}\hat{p})}{\partial \xi} = -H(T^{-1}\hat{p}) = \begin{bmatrix} [T^{-1}\hat{p}]_{\times} & -I_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial (T^{-1}\hat{p})}{\partial \hat{p}} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例 14. 让我们检查一个可视化 SLAM 示例。我们有 2D 测量值 z_{ij} , 其中每个测量值由下式预测为

$$z_{ij} = h(T_i, p_j) = \pi(T_i^{-1}p_j) = \pi(q)$$

其中 T_i 是第 i 个相机的 3D 位姿, p_j 是第 j 个点的位置, $q = (x', y', z') = T^{-1}p$ 是相机坐标中的点, 并且 $\pi : (x, y, z) \mapsto (x/z, y/z)$ 是来自示例 1 的相机投影函数。根据链式规则, 我们则有

$$\frac{\partial h(T, p)}{\partial \xi} = \frac{\partial \pi(q)}{\partial q} \frac{\partial (T^{-1}p)}{\partial \xi} = \frac{1}{z'} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x'/z' \\ 0 & 1 & -y'/z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [q]_{\times} & -I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi'(q)[q]_{\times} & -\pi'(q) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial h(T, p)}{\partial p} = \pi'(q)R^T$$

13.2 伴随的导数

考虑 $f : SE(3) \times \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ 被定义为 $f(T, \xi_b) = Ad_T \hat{\xi}_b$ 。导数用符号表示为 (参见第 3.4 节):

$$Df_{(T, \xi_b)}(\xi, \delta \xi_b) = D_1 f_{(T, \xi_b)}(\xi) + D_2 f_{(T, \xi_b)}(\delta \xi_b)$$

首先, 计算 $D_2 f_{(T, \xi_b)}(\xi_b)$ 很容易, 因为它的矩阵是简单的 Ad_T :

$$f(T, \xi_b + \delta \xi_b) = Ad_T(\widehat{\xi_b + \delta \xi_b}) = Ad_T(\hat{\xi}_b) + Ad_T(\delta \hat{\xi}_b)$$

$$D_2 f_{(T, \xi_b)}(\xi_b) = Ad_T$$

² $H(p)$ 也可通过将 6 个生成元中的每个生成元的第 j 列乘以 \hat{p} 的分量来获得

我们将用两种方法推导出 $D_1 f_{(T, \xi_b)}(\xi)$ 。首先，我们将定义 $g(T, \xi) \triangleq T \exp \hat{\xi}$ 。从第 3.4 节开始，

$$\begin{aligned} D_2 g_{(T, \xi)}(\xi) &= T \hat{\xi} \\ D_2 g_{(T, \xi)}^{-1}(\xi) &= -\hat{\xi} T^{-1} \end{aligned}$$

现在我们可以使用伴随表示 $Ad_g \hat{\xi} = g \hat{\xi} g^{-1}$ 的定义 (又称 g 共轭)，然后应用乘积规则并简化：

$$\begin{aligned} D_1 f_{(T, \xi_b)}(\xi) &= D_1 \left(Ad_{T \exp(\hat{\xi})} \hat{\xi}_b \right) (\xi) = D_1 \left(g \hat{\xi}_b g^{-1} \right) (\xi) \\ &= \left(D_2 g_{(T, \xi)}(\xi) \right) \hat{\xi}_b g^{-1}(T, 0) + g(T, 0) \hat{\xi}_b \left(D_2 g_{(T, \xi)}^{-1}(\xi) \right) \\ &= T \hat{\xi} \hat{\xi}_b T^{-1} - T \hat{\xi}_b \hat{\xi} T^{-1} \\ &= T \left(\hat{\xi} \hat{\xi}_b - \hat{\xi}_b \hat{\xi} \right) T^{-1} \\ &= Ad_T(ad_{\hat{\xi}} \hat{\xi}_b) \\ &= -Ad_T(ad_{\hat{\xi}_b} \hat{\xi}) \\ D_1 F_{(T, \xi_b)} &= -(Ad_T)(ad_{\hat{\xi}_b}) \end{aligned}$$

其中 $ad_{\hat{\xi}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ 是李代数的伴随映射。

第二，也许是推导 $D_1 f_{(T, \xi_b)}(\xi_b)$ 的更直观的方法，将使用以下事实：根据伴随 $ad_{\hat{\xi}}$ 的定义，在 原点处的导数为 $D_1 Ad_I \hat{\xi}_b = ad_{\hat{\xi}_b}$ 。然后应用性质 $Ad_{AB} = Ad_A Ad_B$ ，

$$D_1 Ad_T \hat{\xi}_b(\xi) = D_1 Ad_{T \circ I} \hat{\xi}_b(\xi) = Ad_T \left(D_1 Ad_I \hat{\xi}_b(\xi) \right) = Ad_T \left(ad_{\hat{\xi}_b}(\hat{\xi}) \right) = -Ad_T \left(ad_{\hat{\xi}_b}(\hat{\xi}) \right)$$

13.3 伴随转置的导数

伴随的转置， $Ad_T^T : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ ，作为改变在对偶空间中向量的参考帧的一种方法，它非常有用 (注意符号 $*$ 标志我们现在在对偶空间中)。更具体地说，尽管 $Ad_T \hat{\xi}_b$ 从 T 帧转换运动旋量 (*twist*) ξ_b ，而 $Ad_T^T \hat{\xi}_b^*$ 从 T 帧转换动力旋量 (*wrench*) ξ_b^* 。对于 $Ad_T^T \hat{\xi}_b^*$ 的导数，很难应用在第 13.2 节中类似的推导，因为 Ad_T^T 不能自然地定义为共轭，所以我们要通过代数来进行计算。省略细节，但结果的形式模糊相似于 (但并不完全匹配于) $ad(Ad_T^T \hat{\xi}_b^*)$ ：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_T \\ v_T \end{bmatrix}^* &\triangleq Ad_T^T \hat{\xi}_b^* \\ D_1 Ad_T^T \hat{\xi}_b^*(\xi) &= \begin{bmatrix} \hat{\omega}_T & \hat{v}_T \\ \hat{v}_T & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

13.4 瞬时速度

对于从机体帧 b 到导航帧 n 的刚性 3D 变换 T_b^n ，我们有瞬时空间运动旋量 ξ_{nb}^n ，其在导航帧中测量，

$$\hat{\xi}_{nb}^n \triangleq \dot{T}_b^n (T_b^n)^{-1}$$

并有瞬时机体运动旋量 ξ_{nb}^b ，其在机体帧中测量：

$$\hat{\xi}_{nb}^b \triangleq (T_b^n)^T \dot{T}_b^n$$

13.5 映射的前推

因为我们可以根据运动旋量坐标表达伴随表示，我们有

$$\begin{bmatrix} \omega' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [t]_{\times} R & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}$$

因此，与 $SO(3)$ 一样，我们现在可以简单地假定逆 (inverse) 的导数为，

$$\frac{\partial T^{-1}}{\partial \xi} = -Ad_T = -\begin{bmatrix} R & 0 \\ [t]_{\times} R & R \end{bmatrix}$$

在其第一个参数中的组合 (compose) 为，

$$\frac{\partial (T_1 T_2)}{\partial \xi_1} = Ad_{T_2^{-1}}$$

在其第二个参数中的组合为，

$$\frac{\partial (T_1 T_2)}{\partial \xi_2} = I_6$$

在其第一个参数中的相差 (between) 为，

$$\frac{\partial (T_1^{-1} T_2)}{\partial \xi_1} = -Ad_{T_2^{-1} T_1} = \begin{bmatrix} -R_2^T R_1 & 0 \\ R_2^T [t_2 - t_1]_{\times} R_1 & -R_2^T R_1 \end{bmatrix}$$

并且在其第二个参数中的相差为，

$$\frac{\partial (T_1^{-1} T_2)}{\partial \xi_2} = I_6$$

13.6 收回

对于 $SE(3)$ ，与其使用真实的指数映射，不如设计其它收回，这在计算上更有效率。指数映射的一阶近似并不能完全解决这个问题，因为它产生了一个不在 $SE(3)$ 中的 4×4 矩阵：

$$\begin{aligned} T \exp \hat{\xi} &\approx T(I + \hat{\xi}) \\ &= T \left(I_4 + \begin{bmatrix} [\omega]_{\times} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 + [\omega]_{\times} & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R(I_3 + [\omega]_{\times}) & t + Rv \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

然而，我们可以通过使用为 $SO(3)$ 定义的任何收回来将其变成一个收回，包括如下，使用指数映射 $Re^{[\omega]_{\times}}$ ：

$$\mathcal{R}_T \left(\begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{[\omega]_{\times}} & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Re^{[\omega]_{\times}} & t + Rv \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

类似地，对于一个二阶近似，我们有

$$\begin{aligned}
 T \exp \hat{\xi} &\approx T(I + \hat{\xi} + \frac{\hat{\xi}^2}{2}) \\
 &= T\left(I_4 + \begin{bmatrix} [\omega]_{\times} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [\omega]_{\times} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\omega]_{\times} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
 &= \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I_3 + [\omega]_{\times} + \frac{1}{2} [\omega]_{\times}^2 & v + \frac{1}{2} [\omega]_{\times} v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} R \left(I_3 + [\omega]_{\times} + \frac{1}{2} [\omega]_{\times}^2 \right) & t + R[v + (\omega \times v)/2] \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

以激励收回

$$\mathcal{R}_T \left(\begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{[\omega]_{\times}} & v + (\omega \times v)/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R e^{[\omega]_{\times}} & t + R[v + (\omega \times v)/2] \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14 球面 S^2

14.1 定义

球面 S^2 是 \mathbb{R}^3 中的所有单位向量的集合，即三维空间中的所有方向：

$$S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1\}$$

在点 p 处的切空间 $T_p S^2$ 由三元向量 $\hat{\xi}$ 组成，以使得 $\hat{\xi}$ 在点 p 处与 S^2 相切，即，

$$T_p S^2 \triangleq \left\{ \hat{\xi} \in \mathbb{R}^3 \mid p^T \hat{\xi} = 0 \right\}$$

虽然不是一个李群，但我们可以定义一个指数映射，这在 Ma et. al [?] 中给出，以及在 Anuj Srivastava 的 CVPR 教程中也给出：http://stat.fsu.edu/~anuj/CVPR_Tutorial/Part2.pdf。

$$\exp_p \hat{\xi} = \cos\left(\|\hat{\xi}\|\right) p + \sin\left(\|\hat{\xi}\|\right) \frac{\hat{\xi}}{\|\hat{\xi}\|}$$

后者也给出逆映射，即从 p 到 q 得到切向量 z ：

$$z = \log_p q = \frac{\theta}{\sin \theta} (q - p \cos \theta) p$$

其中 $\theta = \cos^{-1}(p^T q)$ 。

14.2 局部坐标

对于切空间 $T_p S^2$ ，我们可以找到一个基 B_p ，其中 $B_p = [b_1 | b_2]$ ，一个 3×2 矩阵，它通过以下两种方式之一找到

1. 分解 $p = QR$ ，其中 Q 为正交矩阵，并且 R 的形式为 $[1 0 0]^T$ ，并因此 $p = Q_1$ 。该基为 $B_p = [Q_2 | Q_3]$ ，即 Q 的最后两列。
2. 形式 $b_1 = p \times a$ ，其中 a (一致地) 选择与 p 不平行，并且 $b_2 = p \times b_1$ 。

现在我们可以用 $\xi \in \mathbb{R}^2$ 写出 $\hat{\xi} = B_p \xi$ ，在切平面基 B_p 中的 2D 坐标。

14.3 收回

指数映射使用 \cos 和 \sin ，并且这超出我们优化的需要。假设我们有一个点 $p \in S^2$ 和一个 3 元向量 $\hat{\xi} \in T_p S^2$ ，Absil [?] 告诉我们，我们可以简单地把 $\hat{\xi}$ 加到 p 上，然后重新正规化以得到球面上的一个新点 q 。这就是他所说的**收回 (retraction)** $\mathcal{R}_p(\hat{\xi})$ ，

$$q = \mathcal{R}_p(\hat{\xi}) = \frac{p + \hat{\xi}}{\|p + \hat{\xi}\|} = \frac{p + \hat{\xi}}{\alpha}$$

其中 α 为 $p + \hat{\xi}$ 的范数。

我们也可以从局部坐标 $\xi \in \mathbb{R}^2$ 定义一个收回：

$$q = \mathcal{R}_p(\xi) = \frac{p + B_p \xi}{\|p + B_p \xi\|}$$

逆收回

如果 $\hat{\xi} = B_p \xi$, 其中 $\xi \in R^2$ 是在切平面基 B_p 中的 2D 坐标, 我们有

$$\xi = \frac{B_p^T q}{p^T q}$$

证明. 我们寻求

$$\alpha q = p + B_p \xi$$

如果我们将两边都乘以 B_p^T (在基 B_p 上投影), 我们获得

$$\alpha B_p^T q = B_p^T p + B_p^T B_p \xi$$

并且因为 $B_p^T p = 0$ 和 $B_p^T B_p = I$, 我们很容易获得 ξ 作为标度投影 $B_p^T q$:

$$\xi = \alpha B_p^T q$$

为了恢复比例因子 α , 我们在两侧都乘以 p^T , 然后我们得到

$$\alpha p^T q = p^T p + p^T B_p \xi$$

因为 $p^T p = 1$ 和 $p^T B_p \xi = 0$, 则我们获得 $\alpha = 1/(p^T q)$, 从而完成了证明。□

14.4 在 3D 方向上的旋转作用

旋转在球面上的一个点 $p \in S^2$ 显然会产生在其上的另一个点 $q = Rp \in S^2$, 因为旋转保持范数。 $f(R, p)$ 相对于 R 的导数可以通过下式找到

$$Rp + B_{Rp} \xi = R(I + [\omega]_{\times})p = Rp + R[\omega]_{\times} p$$

$$B_{Rp} \xi = -R[p]_{\times} \omega$$

$$\xi = -B_{Rp}^T R[p]_{\times} \omega$$

而相对于 p , 我们有

$$Rp + B_{Rp} \xi_q = R(p + B_p \xi_p)$$

$$\xi_q = B_{Rp}^T R B_p \xi_p$$

换句话说, 雅可比矩阵给出为

$$f'(R, p) = \begin{bmatrix} -B_{Rp}^T R[p]_{\times} & B_{Rp}^T R B_p \end{bmatrix}$$

14.5 3D 方向之间的误差

我们想要定义两个方向 $p, q \in S^2$ 之间的距离度量 $e(p, q)$ 。一个明显的选择是

$$\theta = \cos^{-1}(p^T q)$$

这正是在球面上沿最短路径 (测地线) 的距离, 也就是说, 这是与指数相关的距离度量。其优点是, 它在任何地方都有定义, 但它涉及 \cos^{-1} 。相对于在 q 中的一个变化的导数, 通过 ξ , 则为

$$\frac{\partial \theta(p, q)}{\partial \xi} = \frac{\partial \cos^{-1}(p^T q)}{\partial \xi} = \frac{p^T B_q}{\sqrt{1 - (p^T q)^2}}$$

其中对于 $p = q$ ，这也是未定义的。

一个更简单的度量由收回推导出来，但仅当 $q \approx p$ 时成立。它简单地将 q 投影到由 p 定义的局部坐标基 B_p 上，并取范数：

$$\theta(p, q) = \|B_p^T q\|$$

相对于在 q 中的一个变化的导数，通过 ξ ，则为

$$\frac{\partial \theta(p, q)}{\partial \xi_q} = \frac{\partial}{\partial \xi_q} \sqrt{(B_p^T q)^2} = \frac{1}{\sqrt{(B_p^T q)^2}} (B_p^T q) B_p^T B_q = \frac{B_p^T q}{\theta(q; p)} B_p^T B_q$$

注意，对于 $\theta = 0$ ，这也是未定义的。

对于在概率因子中的使用，一个有符号的向量-值误差不会具有不连续性：

$$\theta(p, q) = B_p^T q$$

注意，这是一个标量的逆收回。相对于在 q 中的一个变化的导数，通过 ξ ，通过下式找到：

$$\frac{\partial \theta(p, q)}{\partial \xi_q} = B_p^T \frac{\partial q}{\partial \xi_q} = B_p^T B_q$$

应用

我们可以利用上述方法来寻找一个相机和一个 IMU 之间的未知的旋转。如果我们测量两帧之间的旋转为 $c_1 Z c_2$ ，并且来自 IMU 的预测旋转为 $i_1 R i_2$ ，则我们可以预测

$$c_1 Z c_2 = i R c^T \cdot i_1 R i_2 \cdot i R c$$

并且增量旋转的轴线的关系为

$$p = i R c \cdot z$$

其中 p 为在 IMU 帧中的角速度轴，而 z 为两个相机之间的测量旋转轴。注意，这仅在旋转不为零时才有意义。因此，对于 IMU 和相机之间的未知旋转 $i R c$ ，给定一个初始估计 R ，误差的导数为（使用方程 (12.1)）

$$\frac{\partial \theta(Rz; p)}{\partial \omega} = B_p^T (Rz) B_p^T B_{Rz} \frac{\partial (Rz)}{\partial \omega} = B_p^T (Rz) B_p^T R [z]_{\times}$$

这里，该 2×3 矩阵 $B_{Rz}^T [z]_{\times}$ 将在 R 中的变化转换为在 Rz 中的变化，并且该 1×2 矩阵 $B_p^T (Rz)$ 描述在误差度量上的下游效应。

15 本质矩阵流形

我们将本质矩阵参数化为一对 (R, t) ，其中 $R \in SO(3)$ ，并且 $t \in S^2$ 是单位球面。则对极矩阵给出为

$$E = [t]_{\times} R$$

并且给定两个对应点 a 和 b 的对极误差为

$$e(R, t; a, b) = a^T E b$$

我们当然对相对于方向的导数感兴趣（使用方程 (12.1)）

$$\frac{\partial (a^T [t]_{\times} R b)}{\partial \omega} = a^T [t]_{\times} \frac{\partial (R b)}{\partial \omega} = -a^T [t]_{\times} R [b]_{\times} = -a^T E [b]_{\times}$$

并且相对于在方向 t 中的变化的导数为

$$\frac{\partial e(a^T[t]_{\times} Rb)}{\partial \xi} = a^T \frac{\partial (B\xi \times Rb)}{\partial v} = -a^T [Rb]_{\times} B$$

这里我们利用了收回可以被写为 $t + B\xi$ 的事实, 其中 B 是一个局部基, 并且我们利用了方程(9.1):

$$\frac{\partial (a \times b)}{\partial a} = [-b]_{\times}$$

16 2D 线段 (Ocaml)

在 Line3.ml 中定义了一条无限直线 (a, b, c) 和一条 2D 线段 $((x1, y1), (x2, y2))$ 之间的误差。

17 Line3vd (Ocaml)

直线的一种表示形式是通过 2 个向量 (v, d) , 其中 v 是方向, 而向量 d 从原点指向直线上最近的点。

在这种表示中, 将一条 3D 线从世界坐标帧变换到在 (R_w^c, t^w) 处的相机帧通过下式完成

$$v^c = R_w^c v^w$$

$$d^c = R_w^c (d^w + (t^w v^w) v^w - t^w)$$

18 Line3

对于 3D 直线, 我们使用 C.J. Taylor 的参数化, 使用 1 个旋转矩阵 R 和 2 个标量 a 和 b 进行。直线方向 v 只是旋转帧的 Z 轴, 即 $v = R_3$, 而向量 d 由 $d = aR_1 + bR_2$ 给出。

现在, 我们将不使用我们对于旋转已使用的增量旋转方案: 因为矩阵 R 从直线坐标帧变换到世界坐标帧, 我们需要在右侧应用增量旋转:

$$R' = R(I + \Omega)$$

18.1 投影 Line3

将一条直线投影到 2D 可以很容易地完成, 因为 v 和 d 也是投影线上两点的 2D 齐次坐标, 并因此我们有

$$\begin{aligned} l &= v \times d \\ &= R_3 \times (aR_1 + bR_2) \\ &= a(R_3 \times R_1) + b(R_3 \times R_2) \\ &= aR_2 - bR_1 \end{aligned}$$

这可被写为一个点的一个旋转,

$$l = R \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

但是因为增量旋转现在是在右侧完成的，我们需要再次计算导数：

$$\frac{\partial(R(I + \Omega)x)}{\partial\omega} = \frac{\partial(R\Omega x)}{\partial\omega} = R \frac{\partial(\Omega x)}{\partial\omega} = R[-x]_{\times} \quad (18.1)$$

并因此，投影 l 相对于 3D 线的旋转矩阵 R 的导数为

$$\frac{\partial(l)}{\partial\omega} = R \left[\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\times} = \begin{bmatrix} aR_3 & bR_3 & -(aR_1 + bR_2) \end{bmatrix} \quad (18.2)$$

或相对于 a, b 标量的导数为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial(l)}{\partial a} &= R_2 \\ \frac{\partial(l)}{\partial b} &= -R_1 \end{aligned}$$

18.2 在直线上 $SE(3)$ 的作用

将 3D 线 $(R, (a, b))$ 从一个世界坐标帧变换为一个相机帧 $T_c^w = (R_c^w, t^w)$ 由下式完成

$$\begin{aligned} R' &= R_c^w R \\ a' &= a - R_1^T t^w \\ b' &= b - R_2^T t^w \end{aligned}$$

其中 R_1 和 R_2 是 R 的列，如前所述。

为找到导数，一条直线 $l^w = (R, a, b)$ 从世界坐标帧到相机坐标帧 T_c^w (在世界坐标帧中指定) 的变换可被写为一个函数 $f: SE(3) \times L \rightarrow L$ ，如上所述，即，

$$f(T_c^w, l^w) = \left((R_c^w)^T R, a - R_1^T t^w, b - R_2^T t^w \right).$$

让我们寻找 f 相对于第一个参数 T_c^w 的雅可比矩阵 J_1 ，它应该服从于

$$f(T_c^w e^{\hat{\xi}}, l^w) \approx f(T_c^w, l^w) + J_1 \xi$$

请注意

$$T_c^w e^{\hat{\xi}} \approx \begin{bmatrix} R_c^w (I_3 + [\omega]_{\times}) & t^w + R_c^w v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

让我们分别为每一个 R, a, b 写出：

$$\begin{aligned} (R_c^w (I_3 + [\omega]_{\times}))^T R &\approx (R_c^w)^T R (I + [J_{R\omega}\omega]_{\times}) \\ a - R_1^T (t^w + R_c^w v) &\approx a - R_1^T t^w + J_{av} v \\ b - R_2^T (t^w + R_c^w v) &\approx b - R_2^T t^w + J_{bv} v \end{aligned}$$

简化后，我们得到：

$$\begin{aligned} -[\omega]_{\times} R' &\approx R' [J_{R\omega}\omega]_{\times} \\ -R_1^T R_c^w &\approx J_{av} \\ -R_2^T R_c^w &\approx J_{bv} \end{aligned}$$

这对于 J_{av} 和 J_{bv} 给出了表达式。可以进一步简化顶行：

$$\begin{aligned} -[\omega]_{\times} R' &\approx R' [J_{R\omega}\omega]_{\times} \\ -R'^T [\omega]_{\times} R' &\approx [J_{R\omega}\omega]_{\times} \\ -[R'^T \omega]_{\times} &\approx [J_{R\omega}\omega]_{\times} \\ -R'^T &\approx J_{R\omega} \end{aligned}$$

对于第二个参数 R ，我们现在简单地有：

$$\begin{aligned} AB(I + \Omega') &= AB(I + \Omega) \\ \Omega' &= \Omega \\ \omega' &= \omega \end{aligned}$$

标量导数可以通过以下实现来找到

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} - R^T t^w$$

这里我们不关心第三行。因此

$$\frac{\partial((R(I + \Omega_2))^T t^w)}{\partial \omega} = -\frac{\partial(\Omega_2 R^T t^w)}{\partial \omega} = -[R^T t^w]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & R_3^T t^w & -R_2^T t^w \\ -R_3^T t^w & 0 & R_1^T t^w \\ \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

19 对齐 3D 扫描

下面是 Pose3.align 的基本解释，即使用 SVD 对齐两个点云。该灵感来自 CVOnline，但经过修改...

我们的模型是

$$p^c = R(p^w - t)$$

即 R 是从相机到世界的变换，并且 t 是相机在世界坐标中的位置。目标函数为

$$\frac{1}{2} \sum (p^c - R(p^w - t))^2 = \frac{1}{2} \sum (p^c - Rp^w + Rt)^2 = \frac{1}{2} \sum (p^c - Rp^w - t')^2 \quad (19.1)$$

其中 $t' = -Rt$ 是在相机帧中原点的位置。相对于 t' 取导数并将其设置为零，我们有

$$\sum (p^c - Rp^w - t') = 0$$

或者

$$t' = \frac{1}{n} \sum (p^c - Rp^w) = \bar{p}^c - R\bar{p}^w \quad (19.2)$$

这里 \bar{p}^c 和 \bar{p}^w 是点云的中心。将其代回方程 (19.1)，我们得到

$$\frac{1}{2} \sum (p^c - R(p^w - t))^2 = \frac{1}{2} \sum ((p^c - \bar{p}^c) - R(p^w - \bar{p}^w))^2 = \frac{1}{2} \sum (\hat{p}^c - R\hat{p}^w)^2$$

现在，要最小化上述内容，只需将其最大化即可 (参见 CVOnline)

$$\text{trace}(R^T C)$$

其中 $C = \sum \hat{p}^c (\hat{p}^w)^T$ 是相关矩阵。直观地说，点云被旋转以与主轴对齐。这可以通过在 C 上的 SVD 分解来实现

$$C = USV^T$$

并设置

$$R = UV^T$$

显然，从方程 (19.2)，我们也恢复最优 t 为

$$t = \bar{p}^w - R^T \bar{p}^c$$

附录

微分规则

Spivak [2] 还注意到一些按分量定义的多元导数规则，但它们在实践中不太有用：

- 因为 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是按照 m 的分量函数 f^i 定义的，则 f 在 a 处是可微的，当且仅当每一个 f^i 是，并且雅可比矩阵 F_a 是 $m \times n$ 矩阵，它们的第 i 行是 $(f^i)'(a)$ ：

$$F_a \triangleq f'(a) = \begin{bmatrix} (f^1)'(a) \\ \vdots \\ (f^m)'(a) \end{bmatrix}$$

- 标量微分规则：如果 $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 在 a 处是可微的，则

$$(f + g)'(a) = F_a + G_a$$

$$(f \cdot g)'(a) = g(a)F_a + f(a)G_a$$

$$(f/g)'(a) = \frac{1}{g(a)^2} [g(a)F_a - f(a)G_a]$$

切空间与切丛

以下内容改编自在文献 [1] 中的附录 A。

一个流形 M 在一个点 $p \in M$ 处的**切空间** (tangent space) $T_p M$ 是在 p 处的**切向量** (tangent vectors) 的向量空间。**切丛** (tangent bundle) TM 是所有切向量的集合

$$TM \triangleq \bigcup_{p \in M} T_p M$$

一个**向量场** (vector field) $X: M \rightarrow TM$ 为每一个点 p 分配一个单一的切向量 $x \in T_p M$ 。

如果 $F: M \rightarrow N$ 是从流形 M 到流形 N 的一个平滑映射，则我们可以定义 F 在 p 处的**切映射** (tangent map) 为线性映射 $F_{*p}: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ ，它将在 $T_p M$ 中在 p 处的切向量映射到在 $T_{F(p)} N$ 中在象 $F(p)$ 处的切向量。

同态

以下内容可能与 [?, page 45] 相关: 假设 $\Phi : G \rightarrow H$ 是一个映射 (李群同态)。则存在一个唯一的线性映射 $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$

$$\phi(\hat{x}) \triangleq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \Phi(e^{t\hat{x}})$$

以使得

1. $\Phi(e^{\hat{x}}) = e^{\phi(\hat{x})}$
2. $\phi(T\hat{x}T^{-1}) = \Phi(T)\phi(\hat{x})\Phi(T^{-1})$
3. $\phi([\hat{x}, \hat{y}]) = [\phi(\hat{x}), \phi(\hat{y})]$

换句话说, 映射 ϕ 是 Φ 在特征处的导数。举例来说, 假设 $\Phi(g) = g^{-1}$, 则在特征处相应的导数为

$$\phi(\hat{x}) \triangleq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} (e^{t\hat{x}})^{-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} e^{-t\hat{x}} = -\hat{x} \lim_{t \rightarrow 0} e^{-t\hat{x}} = -\hat{x}$$

在一般情况下, 只需对 \mathfrak{g} 的一个基计算 ϕ 即可。

参考文献

- [1] Richard M Murray, Zexiang Li, S Shankar Sastry, and S Shankara Sastry. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC press, 1994.
- [2] Michael Spivak. *Calculus on manifolds*, volume 1. WA Benjamin New York, 1965.