

三维姿态估计的间接卡尔曼滤波—四元数代数教程

Nikolas Trawny and Stergios I. Roumeliotis

March 2005

1 四元数代数的元素

1.1 四元数定义

四元数一般定义为

$$\bar{q} = q_4 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \quad (1)$$

其中, \mathbf{i} , \mathbf{j} 和 \mathbf{k} 是超虚数, 满足

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, -\mathbf{ij} = \mathbf{ji} = \mathbf{k}, -\mathbf{jk} = \mathbf{kj} = \mathbf{i}, -\mathbf{ki} = \mathbf{ik} = \mathbf{j} \quad (2)$$

注意, 这不符合汉密尔顿符号。相反, 这是一种约定, 导致四元数按“自然顺序”相乘 (另见第1.4节和文档 [1, 第 473 页])。这符合 JPL 提出的标准约定 [2]。

数量 q_4 是四元数的实部或标量部分, $q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ 是虚数部分或矢量部分。因此, 四元数也可以写在 4 维列矩阵中, 由下面给出

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

如果数量 \mathbf{q} 和 q_4 满足

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} k_x \sin(\theta/2) \\ k_y \sin(\theta/2) \\ k_z \sin(\theta/2) \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{k}} \sin(\theta/2), \quad q_4 = \cos(\theta/2) \quad (4)$$

这些元素 q_1, q_2, q_3, q_4 被称为“旋转四元数”或“欧拉对称参数” [1]。在这个符号中, 单位向量 $\hat{\mathbf{k}}$ 描述了旋转轴, θ 描述了旋转角度。旋转四元数是一个单位四元数, 满足

$$|\bar{q}| = \sqrt{\bar{q}^T \bar{q}} = \sqrt{|\mathbf{q}|^2 + q_4^2} \quad (5)$$

从今以后, 我们将用“四元数”来指旋转四元数。

四元数 \bar{q} 和四元数 $-\bar{q}$ 表示旋转到相同的最终坐标系位置, 即角度-轴表示不唯一 [1, 第 463 页]。唯一的区别是到达目标配置的旋转方向, 具有正标量元素 q_4 的四元数描述最短的旋转 [2]。

1.2 四元数乘法

四元数乘法定义为

$$\begin{aligned}
 \bar{q} \otimes \bar{p} &= (q_4 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k})(p_4 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}) \\
 &= (q_4p_4 - q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3) \\
 &\quad + (q_4p_1 + q_1p_4 - q_2p_3 + q_3p_2)\mathbf{i} \\
 &\quad + (q_4p_2 + q_2p_4 - q_3p_1 + q_1p_3)\mathbf{j} \\
 &\quad + (q_4p_3 + q_3p_4 - q_1p_2 + q_2p_1)\mathbf{k} \\
 &= \begin{bmatrix} q_4p_1 + q_3p_2 - q_2p_3 + q_1p_4 \\ -q_3p_1 + q_4p_2 + q_1p_3 + q_2p_4 \\ q_2p_1 - q_1p_2 + q_4p_3 + q_3p_4 \\ -q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3 + q_4p_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

其中我们使用式 (2) 中定义的关系式。

四元数乘法也可以写成矩阵形式。为此，我们首先介绍了用斜对称矩阵算符 $[\mathbf{q} \times]$ 表示交叉积的矩阵表示法，定义为

$$[\mathbf{q} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

然后将叉积写为

$$\mathbf{q} \times \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2p_3 - q_3p_2 \\ q_3p_1 - q_1p_3 \\ q_1p_2 - q_2p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{q} \times] \mathbf{p} \quad (7)$$

四元数乘法现在可以改写为矩阵形式

$$\bar{q} \otimes \bar{p} = \mathcal{L}(\bar{q}) \bar{p}$$

$$\bar{q} \otimes \bar{p} = \begin{bmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 & q_1 \\ -q_3 & q_4 & q_1 & q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\bar{q} \otimes \bar{p} = \begin{bmatrix} q_4 \mathbf{I}_{3 \times 3} - [\mathbf{q} \times] & \mathbf{q} \\ -\mathbf{q}^T & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ p_4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} q_4 \mathbf{p} + p_4 \mathbf{q} - \mathbf{q} \times \mathbf{p} \\ q_4 p_4 - \mathbf{q}^T \mathbf{p} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_4 \mathbf{q} + \mathbf{p} q_4 - [\mathbf{p} \times] \mathbf{q} \\ p_4 q_4 - \mathbf{p}^T \mathbf{q} \end{bmatrix} \\ \bar{q} \otimes \bar{p} &= \begin{bmatrix} p_4 \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\mathbf{p} \times] & \mathbf{p} \\ -\mathbf{p}^T & p_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix} \\ \bar{q} \otimes \bar{p} &= \begin{bmatrix} p_4 & -p_3 & p_2 & p_1 \\ p_3 & p_4 & -p_1 & p_2 \\ -p_2 & p_1 & p_4 & p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & p_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (10) \end{aligned}$$

$$\bar{q} \otimes \bar{p} = \mathcal{R}(\bar{p}) \bar{q}$$

四元数也有一个与乘法无关的中性元素，定义为

$$\bar{q}_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

$$\bar{q} \otimes \bar{q}_I = \bar{q}_I \otimes \bar{q} = \bar{q} \quad (12)$$

逆旋转由逆或复共轭四元数表示，表示为

$$\bar{q}^{-1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{k}} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}} \sin(-\theta/2) \\ \cos(-\theta/2) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\bar{q} \otimes \bar{q}^{-1} = \bar{q}^{-1} \otimes \bar{q} = \bar{q}_I \quad (14)$$

$$(\bar{q} \otimes \bar{p})^{-1} = \bar{p}^{-1} \otimes \bar{q}^{-1} \quad (15)$$

1.3 有用的标识

1.3.1 四元数乘法矩阵 \mathcal{L} 和 \mathcal{R} 的性质

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \Psi(\bar{q}) & \bar{q} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \Xi(\bar{p}) & \bar{p} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$(18)$$

其中矩阵 Ψ 和 Ξ 定义为

$$\Psi = \begin{bmatrix} q_4 \mathbf{I}_{3 \times 3} - [\mathbf{q} \times] \\ -\mathbf{q}^T \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} p_4 \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\mathbf{p} \times] \\ -\mathbf{p}^T \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\Psi^T \Psi = \Xi^T \Xi = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (21)$$

$$\mathcal{L}(\bar{q}^{-1}) = \mathcal{L}^T(\bar{q}) \quad (22)$$

$$\mathcal{R}(\bar{p}^{-1}) = \mathcal{R}^T(\bar{p}) \quad (23)$$

$$\mathcal{L}^T(\bar{q}) \mathcal{L}(\bar{q}) = \mathcal{L}(\bar{q}) \mathcal{L}^T(\bar{q}) = \mathbf{I}_{4 \times 4} \quad (24)$$

$$\mathcal{R}^T(\bar{p}) \mathcal{R}(\bar{p}) = \mathcal{R}(\bar{p}) \mathcal{R}^T(\bar{p}) = \mathbf{I}_{4 \times 4} \quad (25)$$

$$\mathcal{L}(\bar{q}) \mathcal{R}(\bar{r}) = \mathcal{R}(\bar{r}) \mathcal{L}(\bar{q}) \quad (26)$$

$$\mathcal{L}(\bar{q}) \mathcal{R}^T(\bar{r}) = \mathcal{R}^T(\bar{r}) \mathcal{L}(\bar{q}) \quad (27)$$

连乘

$$\begin{aligned} & \bar{p} \otimes \bar{q} \otimes \bar{r} \\ &= \mathcal{L}(\bar{p}) \mathcal{L}(\bar{q}) \bar{r} \end{aligned} \quad (28)$$

$$= \mathcal{L}(\bar{p}) \mathcal{R}(\bar{r}) \bar{q} \quad (29)$$

$$= \mathcal{R}(\bar{r}) \mathcal{L}(\bar{p}) \bar{q} \quad (30)$$

$$= \mathcal{R}(\bar{r}) \mathcal{R}(\bar{q}) \bar{p} \quad (31)$$

标量积

$$\begin{aligned} & \bar{p}^T \bar{r} \\ &= \bar{p}^T \mathcal{L}^T(\bar{q}) \mathcal{L}(\bar{q}) \bar{r} = (\bar{q} \otimes \bar{p})^T (\bar{q} \otimes \bar{r}) \end{aligned} \quad (32)$$

$$= \bar{p}^T \mathcal{R}^T(\bar{q}) \mathcal{R}(\bar{q}) \bar{r} = (\bar{p} \otimes \bar{q})^T (\bar{r} \otimes \bar{q}) \quad (33)$$

$$(\bar{p} \otimes \bar{q})^T \bar{r} = \bar{p}^T \mathcal{R}^T(\bar{q}) \bar{r} = \bar{p}^T (\bar{r} \otimes \bar{q}^{-1}) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \bar{p}^T (\bar{q} \otimes \bar{r} \otimes \bar{q}^{-1}) \\ &= \bar{p}^T \mathcal{R}^T(\bar{q}) \mathcal{L}(\bar{q}) \bar{r} \end{aligned} \quad (35)$$

$$= \bar{q}^T \mathcal{L}^T(\bar{p}) \mathcal{R}(\bar{r}) \bar{q} \quad (36)$$

$$= \bar{q}^{-T} \mathcal{R}^T(\bar{p}) \mathcal{L}(\bar{r}) \bar{q}^{-1} \quad (37)$$

如果两个旋转, \mathbf{C}_A 和 \mathbf{C}_B 是相关的, 例如 $\mathbf{C}_A \mathbf{C}_X = \mathbf{C}_X \mathbf{C}_B$ (手眼标定), 那么相关矩阵 $\mathcal{L}^T(\bar{q}_A) - \mathcal{R}(\bar{q}_B)$ 是斜对称的, 并且属于秩 2。特别的, 有 $\bar{q}_{A_4} = \bar{q}_{B_4}$ 和 $\|\mathbf{q}_A\| = \|\mathbf{q}_B\|$ 。

1.3.2 交叉积斜对称矩阵的性质

反交换性

$$[\boldsymbol{\omega} \times] = -[\boldsymbol{\omega} \times]^T \quad (38)$$

$$[\mathbf{a} \times] \mathbf{b} = -[\mathbf{b} \times] \mathbf{a} \quad (39)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{a}^T [\mathbf{b} \times] = -\mathbf{b}^T [\mathbf{a} \times] \quad (40)$$

加法的分配律

$$[\mathbf{a} \times] + [\mathbf{b} \times] = [\mathbf{a} + \mathbf{b} \times] \quad (41)$$

标量乘法

$$c \cdot [\boldsymbol{\omega} \times] = [c\boldsymbol{\omega} \times] \quad (42)$$

平行向量的叉积

$$\boldsymbol{\omega} \times (c \cdot \boldsymbol{\omega}) = c \cdot [\boldsymbol{\omega} \times] \boldsymbol{\omega} = -c \cdot (\boldsymbol{\omega}^T [\boldsymbol{\omega} \times])^T = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (43)$$

拉格朗日公式

$$[\mathbf{a} \times] [\mathbf{b} \times] = \mathbf{b} \mathbf{a}^T - (\mathbf{a}^T \mathbf{b}) \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (44)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a}^T \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a}^T \mathbf{b}) \quad (45)$$

$$[\mathbf{a} \times] [\mathbf{b} \times] + \mathbf{a} \mathbf{b}^T = [\mathbf{b} \times] [\mathbf{a} \times] + \mathbf{b} \mathbf{a}^T \quad (46)$$

$$[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times] = \mathbf{b} \mathbf{a}^T - \mathbf{a} \mathbf{b}^T (= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) \quad (47)$$

雅可比恒等式

$$[\mathbf{a} \times] [\mathbf{b} \times] \mathbf{c} + [\mathbf{b} \times] [\mathbf{c} \times] \mathbf{a} + [\mathbf{c} \times] [\mathbf{a} \times] \mathbf{b} = 0 \quad (48)$$

旋转

$$[\mathbf{C} \mathbf{a} \times] = \mathbf{C} [\mathbf{a} \times] \mathbf{C}^T \quad (49)$$

$$\mathbf{C} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{C} \mathbf{a}) \times (\mathbf{C} \mathbf{b}) \quad (50)$$

四元数表示法中向量的叉积 如果我们定义四元数

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

我们可以证明

$$\bar{c} = \frac{1}{2} (\bar{b} \otimes \bar{a} + \bar{a} \otimes \bar{b}^{-1}) \quad (52)$$

$$= \frac{1}{2} ((\mathcal{L}(\bar{b}) + \mathcal{R}^T(\bar{b})) \bar{a}) \quad (53)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} -[\mathbf{b} \times] - [\mathbf{b} \times] & \mathbf{b} - \mathbf{b} \\ -\mathbf{b}^T + \mathbf{b}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (54)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2[\mathbf{b} \times] & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$= \begin{bmatrix} -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$[\omega \times]$ 的幂

$$[\omega \times]^2 = \omega \omega^T - |\omega|^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} [\omega \times]^3 &= (\omega \omega^T - |\omega|^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}) [\omega \times] \\ &= \omega \omega^T [\omega \times] - |\omega|^2 \cdot [\omega \times] \\ &= \omega (-[\omega \times] \omega)^T - |\omega|^2 \cdot [\omega \times] \\ &= -\omega (\omega \times \omega)^T - |\omega|^2 \cdot [\omega \times] \\ &= -|\omega|^2 \cdot [\omega \times] \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} [\omega \times]^4 &= [\omega \times]^3 \cdot [\omega \times] \\ &= -|\omega|^2 \cdot [\omega \times]^2 \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} [\omega \times]^5 &= [\omega \times]^3 \cdot [\omega \times]^2 \\ &= -|\omega|^2 \cdot [\omega \times] (\omega \omega^T - |\omega|^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3}) \\ &= +|\omega|^4 \cdot [\omega \times] \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} [\omega \times]^6 &= [\omega \times]^5 \cdot [\omega \times] \\ &= +|\omega|^4 \cdot [\omega \times]^2 \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} [\omega \times]^7 &= [\omega \times]^5 \cdot [\omega \times]^2 \\ &= -|\omega|^6 \cdot [\omega \times] \end{aligned} \quad (62)$$

如此等等。

1.3.3 矩阵 Ω 的性质

矩阵 Ω 出现在向量和四元数的乘积中，例如用于四元数导数中。它具有以下特性：

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$= \begin{bmatrix} -[\omega \times] & \omega \\ -\omega^T & 0 \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \Omega(\omega)^2 &= \begin{bmatrix} [\omega \times]^2 - \omega \omega^T & -[\omega \times] \omega \\ \omega^T [\omega \times] & -\omega^T \omega \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -|\omega|^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & -|\omega|^2 \end{bmatrix} \\ &= -|\omega|^2 \cdot \mathbf{I}_{4 \times 4} \end{aligned} \quad (65)$$

$$\Omega(\omega)^3 = -|\omega|^2 \cdot \Omega(\omega) \quad (66)$$

$$\Omega(\omega)^4 = |\omega|^4 \cdot \mathbf{I}_{4 \times 4} \quad (67)$$

$$\Omega(\omega)^5 = |\omega|^4 \cdot \Omega(\omega) \quad (68)$$

$$\Omega(\omega)^6 = -|\omega|^6 \cdot \mathbf{I}_{4 \times 4} \quad (69)$$

如此等等。

1.3.4 矩阵 Ξ 的性质

矩阵 $\Xi(\bar{q})$ 出现在四元数与向量的乘法中。 $\Xi(\bar{q})$ 和 $\Omega(\mathbf{a})$ 之间的关系相当于乘法矩阵 $\mathcal{L}(\bar{q})$ 和 $\mathcal{R}(\bar{p})$ 之间的关系（参见第1.2节）。它被定义为

$$\begin{aligned} \Xi(\bar{q}) &= \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_4 \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\mathbf{q} \times] \\ -\mathbf{q}^T \end{bmatrix} \\ \Xi^T(\bar{q}) &= \begin{bmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 & -q_1 \\ -q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_4 & -q_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (70)$$

可以看出

$$\Xi^T(\bar{q}) \Xi(\bar{q}) = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (71)$$

$$\Xi(\bar{q}) \Xi^T(\bar{q}) = \mathbf{I}_{4 \times 4} - \bar{q}\bar{q}^T \quad (72)$$

$$\Xi^T(\bar{q}) \bar{q} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (73)$$

Ξ 和 Ω 之间的关系由 [3, 公式 (60)] 给出

$$\Omega(\mathbf{a}) \bar{q} = \Xi(\bar{q}) \mathbf{a} \quad (74)$$

1.4 四元数与旋转矩阵的关系

给定一个向量 \mathbf{p} , 我们将相应的四元数定义为

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (75)$$

我们将使用以下两种不同坐标系中表示的向量之间的关系

$${}^L\mathbf{p} = {}^L_G\mathbf{C}(\bar{q}) {}^G\mathbf{p} \quad (76)$$

等式中 $\bar{q} = {}^L_G\bar{q}$ 和 ${}^L_G\mathbf{C}(\bar{q})$ 是表示 (全局) 坐标系 $\{G\}$ 相对于 (局部) 坐标系 $\{L\}$ 的 (3×3) 旋转矩阵。

矢量也可以通过旋转四元数和逆四元数分别对其四元数进行前乘和后乘, 从一个坐标系转换为另一个坐标系。

$$\begin{aligned} {}^L\bar{p} &= {}^L_G\bar{q} \otimes {}^G\bar{p} \otimes {}^L_G\bar{q}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} q_4\mathbf{I}_{3 \times 3} - [\mathbf{q} \times] & \mathbf{q} \\ -\mathbf{q}^T & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes {}^G_L\bar{q}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} q_4\mathbf{p} - \mathbf{q} \times \mathbf{p} \\ -\mathbf{q}^T \mathbf{p} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -\mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_4^2\mathbf{p} - q_4\mathbf{q} \times \mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{q}^T\mathbf{p} + q_4\mathbf{q} \times \mathbf{p} - (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{q} \\ + q_4\mathbf{q}^T\mathbf{p} - q_4\mathbf{q}^T\mathbf{p} - \mathbf{q}^T(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_4^2\mathbf{p} - 2q_4\mathbf{q} \times \mathbf{p} + \mathbf{q}\mathbf{q}^T\mathbf{p} - ((1 - q_4^2)\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{q}\mathbf{q}^T\mathbf{p}) \\ -\mathbf{q}^T(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2q_4^2 - 1)\mathbf{I}_{3 \times 3} - 2q_4[\mathbf{q} \times] + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^G\mathbf{p} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (77)$$

这就给出了四元数与其对应的旋转矩阵之间的关系。

$${}^L_G\mathbf{C}(\bar{q}) = (2q_4^2 - 1)\mathbf{I}_{3 \times 3} - 2q_4[\mathbf{q} \times] + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T \quad (78)$$

也可以写为

$${}^L_G \mathbf{C}(\bar{q}) = \mathbf{\Xi}^T(\bar{q}) \mathbf{\Psi}(\bar{q}) \quad (79)$$

使用第1.3.1节中的 $\mathbf{\Xi}$ 和 $\mathbf{\Psi}$ 的定义。

对于四元数的三重积，尽管没有明显的物理解释，也可以得出类似的形式。

$$\bar{q} \otimes \bar{p} \otimes \bar{q}^{-1} \quad (80)$$

$$= \mathcal{L}(\bar{q}) \mathcal{R}^T(\bar{q}) \bar{p} \quad (81)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\bar{q}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ p_4 \end{bmatrix} \quad (82)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\bar{q}) \mathbf{p} \\ p_4 \end{bmatrix} \quad (83)$$

在只有很小的旋转角度 $\delta\bar{q}$ 的情况下，我们可以使用小角度近似来简化上述表达式。我们可以把描述小旋转的四元数写成

$$\delta\bar{q} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{q} \\ \delta q_4 \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}} \sin(\delta\theta/2) \\ \cos(\delta\theta/2) \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$\approx \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (86)$$

导致相应旋转矩阵的以下表达式

$${}^L_G \mathbf{C}(\delta\bar{q}) \approx \mathbf{I}_{3 \times 3} - [\delta\boldsymbol{\theta} \times] \quad (87)$$

公式 (78) 的结果也可以通过重写欧拉公式得到，欧拉公式涉及旋转矩阵和角-轴表示 [2]

$${}^L_G \mathbf{C} = \cos(\theta) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} - \sin(\theta) \left[\hat{\mathbf{k}} \times \right] + (1 - \cos(\theta)) \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}}^T \quad (88)$$

$$= (2 \cos^2(\theta/2) - 1) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} - 2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \left[\hat{\mathbf{k}} \times \right] + 2 \sin^2(\theta/2) \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}}^T \quad (89)$$

根据公式 (4) 替换适当的四元数分量，很容易得到公式 (78)。后者也可以用四元数分量表示为

$${}^L_G \mathbf{C}(\bar{q}) = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (90)$$

$$= \begin{bmatrix} 2q_1^2 + 2q_4^2 - 1 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & 2q_2^2 + 2q_4^2 - 1 & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & 2q_3^2 + 2q_4^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (91)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 2q_2^2 - 2q_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & 1 - 2q_1^2 - 2q_3^2 & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & 1 - 2q_1^2 - 2q_2^2 \end{bmatrix} \quad (92)$$

等式 (78) 的另一种替代形式出现在利用 $\mathbf{q}\mathbf{q}^T$ 与 $[\mathbf{q}\times]^2$ 之间的关系之后 (参见等式 (57))。

$${}^L_G\mathbf{C}(\bar{q}) = \mathbf{I}_{3\times 3} - 2q_4[\mathbf{q}\times] + 2[\mathbf{q}\times]^2 \quad (93)$$

请注意, 由于四元数乘法选择的约定 (参见等式 (2)), 两个旋转矩阵的乘积将对应于两个四元数按相同顺序的乘积 [2, 1]。因此,

$${}^{L_1}_{L_2}\mathbf{C}({}^{L_1}_{L_2}\bar{q}) \cdot {}^{L_2}_G\mathbf{C}({}^{L_2}_G\bar{q}) = {}^{L_1}_G\mathbf{C}({}^{L_1}_{L_2}\bar{q} \otimes {}^{L_2}_G\bar{q}) \quad (94)$$

最后, 我们可以解释 ${}^{L_1}_{L_2}\bar{q} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$ 为描述坐标系帧 (frame) $\{L_2\}$ 以坐标系帧 (frame) $\{L_1\}$ 上的 $\hat{\mathbf{k}}$ 为轴, 围绕 $\{L_1\}$ 旋转 (参见图 1) 的四元数。这也可以表示为矩阵指数

$${}^L_G\mathbf{C}(\bar{q}) = \exp\left(-[\hat{\mathbf{k}}\times]\theta\right) \quad (95)$$

反问题是确定 \bar{q} 作为 $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ 的函数。以下解决方案取自 [2]:

$$T = \text{trace}(\mathbf{C}) = c_{11} + c_{22} + c_{33} \quad (96)$$

$$= -(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - 3q_4^2) = -1 + 4q_4^2 \quad (97)$$

$$q = \begin{bmatrix} \sqrt{1 + 2c_{11} - T}/2 \\ (c_{12} + c_{21})/(4q_1) \\ (c_{13} + c_{31})/(4q_1) \\ (c_{23} - c_{32})/(4q_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_{12} + c_{21})/(4q_2) \\ \sqrt{1 + 2c_{22} - T}/2 \\ (c_{23} + c_{32})/(4q_2) \\ (c_{31} - c_{13})/(4q_2) \end{bmatrix} \quad (98)$$

$$= \begin{bmatrix} (c_{13} + c_{31})/(4q_3) \\ (c_{23} + c_{32})/(4q_3) \\ \sqrt{1 + 2c_{33} - T}/2 \\ (c_{12} - c_{21})/(4q_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_{23} - c_{32})/(4q_4) \\ (c_{31} - c_{13})/(4q_4) \\ (c_{12} - c_{21})/(4q_4) \\ \sqrt{1 + T}/2 \end{bmatrix} \quad (99)$$

当关键元素为零时, 这四个解中的每一个都有可能是奇异的, 但至少有一个不会是奇异的 (否则 q 就不能有单位范数)[1]¹。为了获得最大的数值精度, 应使用具有最大轴元素的形式。($|q_1|, |q_2|, |q_3|, |q_4|$) 的最大值对应于 $(c_{11}, c_{22}, c_{33}, T)$ 的最大值。

1.5 四元数时间导数

当局部坐标系帧 (frame) $\{L\}$ 相对于全局参考系帧 (frame) $\{G\}$ 移动时, 我们可以计算变化率或描述其关系为相应四元数的导数。我们通过计算差商的极限来做到这一点。

$${}^L_G\dot{\bar{q}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left({}^L_G\bar{q}(t+\Delta t) - {}^L_G\bar{q}(t) \right) \quad (100)$$

¹进一步指出, $T = -1 + 4\cos^2(\theta/2) = 1 + 2\cos\theta$, 因此 $T_{min} = -1$ 。只有 $q_4 = \sqrt{1+T}/2$ 为零的唯一情况下是 $T = -1$ 。由于 \mathbf{C} 的正交性, 对角线元素被限定为 $-1 \leq c_{ii} \leq 1$ 。对于 q_4 和所有其他关键元素为零, 我们需要 $c_{ii} = -1$, 但这与 $T = -1$ 矛盾。因此, 至少一个关键元素将是非零的。

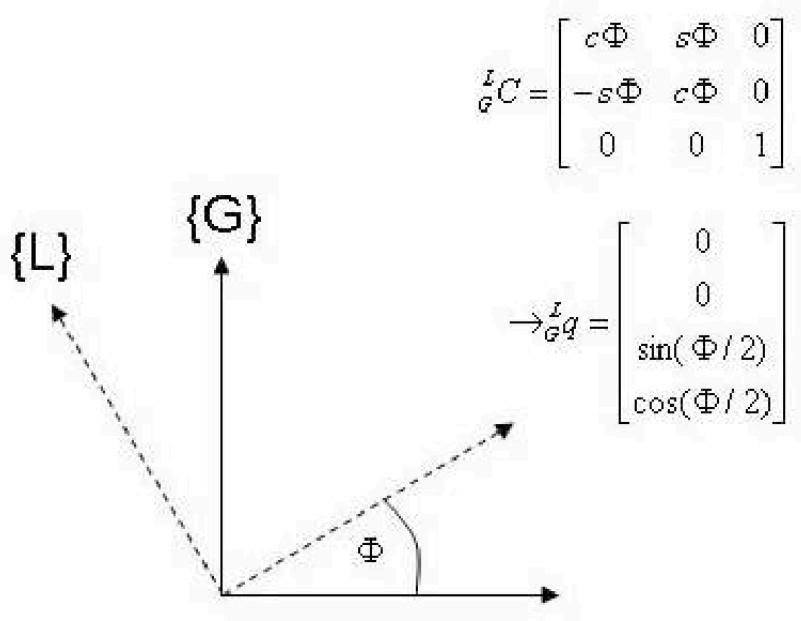


图 1: 四元数和旋转矩阵之间的关系。注意，所选择的四元数约定导致“左手规则”类型的旋转矩阵。

四元数 ${}^{L(t+\Delta t)}_G \bar{q}$ 可以表示为两个四元数的乘积。

$${}^{L(t+\Delta t)}_G \bar{q} = {}^{L(t+\Delta t)}_{L(t)} \bar{q} \otimes {}^{L(t)}_G \bar{q} \quad (101)$$

其中

$${}^{L(t+\Delta t)}_{L(t)} \bar{q} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \quad (102)$$

注意，四元数 ${}^{L(t+\Delta t)}_{L(t)} \bar{q}$ 表示参考坐标系 $\{L(t)\}$ 以旋转角度 θ 和旋转轴 $\hat{\mathbf{k}}$ 旋转至参考坐标系 $\{L(t+\Delta t)\}$ (后者以 $\{L(t+\Delta t)\}$ 表示)。

在极限情况下，当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，旋转角会变得非常小，因此我们可以通过一阶泰勒展开来近似 \sin 和 \cos 函数。

$${}^{L(t+\Delta t)}_{L(t)} \bar{q} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}} \cdot (\theta/2) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \delta\boldsymbol{\theta} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (103)$$

矢量 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 具有旋转轴的方向和旋转角度的大小。将该矢量除以 Δt 将在极限处产生旋转速度。

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\boldsymbol{\theta}}{\Delta t} \quad (104)$$

我们现在准备将四元数导数

$$\begin{aligned}
{}^{L(t)}\dot{\bar{q}}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left({}^{L(t+\Delta t)}\bar{q} - {}^{L(t)}\bar{q} \right) \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left({}^{L(t+\Delta t)}\bar{q} \otimes {}^{L(t)}\bar{q} - {}^{L(t)}\bar{q} \otimes {}^{L(t)}\bar{q} \right) \\
&\approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \right) \otimes {}^{L(t)}\bar{q} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes {}^{L(t)}\bar{q}
\end{aligned} \tag{105}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -[\boldsymbol{\omega} \times] & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} {}^{L(t)}\bar{q} \\
&= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) {}^{L(t)}\bar{q}
\end{aligned} \tag{106}$$

$$= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Xi}({}^{L(t)}\bar{q}) \boldsymbol{\omega} \tag{107}$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \tag{108}$$

和 (参见第1.3.3和1.3.4节)

$$\boldsymbol{\Xi}({}^{L(t)}\bar{q}) = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \tag{109}$$

注意, $\boldsymbol{\omega} = {}^{L(t)}\boldsymbol{\omega}$, 即旋转速率用局部坐标系表示, 而不是用惯性坐标系 [1, p.482]。

1.6 四元数积分

积分四元数等于解一阶微分方程 (参见等式 (106))。

$${}^L\dot{\bar{q}}(t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) {}^L\bar{q} \tag{110}$$

其中, 我们将时间索引从前导上标中删除, 并通过写 $\bar{q} = \bar{q}(t)$ 来表示四元数的时间可变性, 以提高符号的清晰度。应该清楚的是, 前导上标 L 指的是时间瞬间 t 的局部坐标系 $\{L\}$ 。

这个微分方程的解具有一般形式 [4, p.40]

$${}^L\bar{q}(t) = \boldsymbol{\Theta}(t, t_k) {}^L\bar{q}(t_k) \tag{111}$$

$\boldsymbol{\Theta}(t, t_k)$ 的控制方程是通过微分和代入得到的。

$${}^L_G \dot{\bar{q}}(t) = \dot{\Theta}(t, t_k) {}^L_G \bar{q}(t_k) \quad (112)$$

$$\frac{1}{2} \Omega(\omega) {}^L_G \bar{q}(t) = \dot{\Theta}(t, t_k) {}^L_G \bar{q}(t_k) \quad (113)$$

$$\frac{1}{2} \Omega(\omega) \Theta(t, t_k) {}^L_G \bar{q}(t_k) = \dot{\Theta}(t, t_k) {}^L_G \bar{q}(t_k) \quad (114)$$

$$\Leftrightarrow \dot{\Theta}(t, t_k) = \frac{1}{2} \Omega(\omega(t)) \Theta(t, t_k) \quad (115)$$

并具有初始条件

$$\Theta(t_k, t_k) = \mathbf{I}_{4 \times 4} \quad (116)$$

在某些假设下, 我们可以得到这个方程的闭式解。最简单的假设是 ω 在积分周期 $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ 内是常数, 从而使微分方程线性时不变。这个假设导致了零阶四元数积分器。下一个更精确的近似是假设 ω 在 Δt 期间的线性演化。我们将把得到的公式称为一阶四元数积分器。

1.6.1 零阶四元数积分器

如果 $\omega(t) = \omega$ 在积分期间 $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ 为常数, 则矩阵 Ω 不依赖于时间, 并且 $\Theta(t_{k+1}, t_k)$ 可以表示为 [4, 式 (2-58a)]

$$\Theta(t_{k+1}, t_k) = \Theta(\Delta t) = \exp\left(\frac{1}{2} \Omega(\omega) \Delta t\right) \quad (117)$$

我们可以用它的泰勒级数展开重写这个矩阵指数

$$\Theta(\Delta t) = \mathbf{I}_{4 \times 4} + \frac{1}{2} \Omega(\omega) \Delta t + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2} \Omega(\omega) \Delta t\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} \Omega(\omega) \Delta t\right)^3 + \dots \quad (118)$$

利用第1.3.3节所述矩阵的性质, 将其转换为

$$\begin{aligned} \Theta(\Delta t) &= \mathbf{I}_{4 \times 4} + \frac{1}{2} \Delta t \Omega(\omega) - \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2} \Delta t\right)^2 |\omega|^2 \cdot \mathbf{I}_{4 \times 4} \\ &\quad - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} \Delta t\right)^3 |\omega|^2 \cdot \Omega(\omega) + \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{2} \Delta t\right)^4 |\omega|^4 \cdot \mathbf{I}_{4 \times 4} \\ &\quad + \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{2} \Delta t\right)^5 |\omega|^4 \cdot \Omega(\omega) - \frac{1}{6!} \left(\frac{1}{2} \Delta t\right)^6 |\omega|^6 \cdot \mathbf{I}_{4 \times 4} - \dots \end{aligned} \quad (119)$$

以 $|\omega|$ 的产出重新排序和扩展

$$\begin{aligned} \Theta(\Delta t) &= \left(1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2} \Delta t\right)^2 |\omega|^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{2} \Delta t\right)^4 |\omega|^4 - \dots\right) \mathbf{I}_{4 \times 4} \\ &\quad + \frac{1}{|\omega|} \left(\frac{1}{2} |\omega| \Delta t - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} |\omega| \Delta t\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{2} |\omega| \Delta t\right)^5 - \dots\right) \Omega(\omega) \end{aligned} \quad (120)$$

经过仔细检查, 我们认识到这是 \sin 和 \cos 函数的泰勒级数展开式。

$$\Theta(\Delta t) = \cos\left(\frac{|\omega|}{2}\Delta t\right) \cdot \mathbf{I}_{4 \times 4} + \frac{1}{|\omega|} \sin\left(\frac{|\omega|}{2}\Delta t\right) \cdot \Omega(\omega) \quad (121)$$

我们最后可以把零阶四元数积分器写成

$$\begin{aligned} {}^L_G \bar{q}(t_{k+1}) &= \Theta(t_{k+1}, t_k) {}^L_G \bar{q}(t_k) \\ &= \left(\cos\left(\frac{|\omega|}{2}\Delta t\right) \cdot \mathbf{I}_{4 \times 4} + \frac{1}{|\omega|} \sin\left(\frac{|\omega|}{2}\Delta t\right) \cdot \Omega(\omega) \right) {}^L_G \bar{q}(t_k) \end{aligned} \quad (122)$$

仔细观察发现 $\Theta(t_{k+1}, t_k)$ 只不过是特定四元数相关联的乘法矩阵，因此我们可以将零阶四元数积分改写为四元数积。

$${}^L_G \bar{q}(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} \frac{\omega}{|\omega|} \sin\left(\frac{|\omega|}{2}\Delta t\right) \\ \cos\left(\frac{|\omega|}{2}\Delta t\right) \end{bmatrix} \otimes {}^L_G \bar{q}(t_k) \quad (123)$$

这个四元数积对应于通过围绕由原始坐标系定义的旋转轴 ω ，旋转 $|\omega| \Delta t$ 角度，这正好对应于常数 ω 的假设。

由于分母中出现 $|\omega|$ ，上述表达式将导致极小 ω 时的数值不稳定。因此，当 $|\omega|$ 趋于零时，我们将使用 L' Hôpital 的乘法规则来计算上述方程的极限。

$$\begin{aligned} \lim_{|\omega| \rightarrow 0} \Theta(\Delta t) &= \lim_{|\omega| \rightarrow 0} \left(\cos\left(\frac{|\omega|}{2}\Delta t\right) \mathbf{I}_{4 \times 4} + \frac{1}{|\omega|} \sin\left(\frac{|\omega|}{2}\Delta t\right) \Omega(\omega) \right) \\ &= \mathbf{I}_{4 \times 4} + \lim_{|\omega| \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|\omega|} \sin\left(\frac{|\omega|}{2}\Delta t\right) \Omega(\omega) \right) \\ &= \mathbf{I}_{4 \times 4} + \frac{\Delta t}{2} \Omega(\omega) \end{aligned} \quad (124)$$

1.6.2 一阶四元数积分器

一阶四元数积分器假设在积分区间 Δt 期间 ω 的线性演化。在这种情况下，我们必须从等式 (117) 中修改矩阵 $\Theta(t_{k+1}, t_k)$ 。为此，我们引入平均旋转速率 $\bar{\omega}$ ，定义为

$$\bar{\omega} = \frac{\omega(t_{k+1}) + \omega(t_k)}{2} \quad (125)$$

我们还可以定义旋转率 $\dot{\omega}$ 和相关矩阵 $\Omega(\dot{\omega})$ 的导数，在线性情况下，它是常数。

$$\Omega(\dot{\omega}) = \Omega\left(\frac{\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)}{\Delta t}\right) \quad (126)$$

注意 $\Omega(\omega)$ 的高阶导数是零。

根据 Wertz[5, p.565] 的观点，为了计算时间瞬间 t_{k+1} 的四元数，我们将其泰勒级数展开式写在时间瞬间 t_k 。

$${}^L_G \bar{q}(t_{k+1}) = {}^L_G \bar{q}(t_k) + {}^L_G \dot{\bar{q}}(t_k) \Delta t + \frac{1}{2} {}^L_G \ddot{\bar{q}}(t_k) \Delta t^2 + \dots \quad (127)$$

反复应用四元数时间导数的定义 (等式 (106)) 得出

$$\begin{aligned}
{}^L_G \bar{q}(t_{k+1}) = & \left(\mathbf{I}_{4 \times 4} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}(t_k)) \Delta t + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}(t_k)) \Delta t \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}(t_k)) \Delta t \right)^3 + \dots \right) {}^L_G \bar{q}(t_k) \\
& + \frac{1}{4} \Delta t^2 \boldsymbol{\Omega}(\dot{\boldsymbol{\omega}}(t_k)) {}^L_G \bar{q}(t_k) + \left(\frac{1}{12} \boldsymbol{\Omega}(\dot{\boldsymbol{\omega}}(t_k)) \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}(t_k)) + \frac{1}{24} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}(t_k)) \boldsymbol{\Omega}(\dot{\boldsymbol{\omega}}(t_k)) \right) \Delta t^3 {}^L_G \bar{q}(t_k) + \dots
\end{aligned} \tag{128}$$

如果我们将平均值 $\boldsymbol{\Omega}(\bar{\boldsymbol{\omega}})$ 写为

$$\boldsymbol{\Omega}(\bar{\boldsymbol{\omega}}) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}(\tau)) d\tau = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}(t_k)) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\dot{\boldsymbol{\omega}}(t_k)) \Delta t \tag{129}$$

我们可以将等式 (128) 中的各项重新排序为

$$\begin{aligned}
{}^L_G \bar{q}(t_{k+1}) = & \left(\mathbf{I}_{4 \times 4} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\bar{\boldsymbol{\omega}}) \Delta t + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\bar{\boldsymbol{\omega}}) \Delta t \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\bar{\boldsymbol{\omega}}) \Delta t \right)^3 + \dots \right) \\
& + \frac{1}{48} (\boldsymbol{\Omega}(\dot{\boldsymbol{\omega}}(t_k)) \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}(t_k)) - \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}(t_k)) \boldsymbol{\Omega}(\dot{\boldsymbol{\omega}}(t_k))) \Delta t^3) {}^L_G \bar{q}(t_k)
\end{aligned} \tag{130}$$

将第一项识别为矩阵指数的泰勒级数展开式，用其定义 $\boldsymbol{\Omega}(\bar{\boldsymbol{\omega}})$ (等式 (126)) 代替，得到最终公式。

$${}^L_G \bar{q}(t_{k+1}) = \left(\exp \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\bar{\boldsymbol{\omega}}) \Delta t \right) + \frac{1}{48} (\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}(t_{k+1})) \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}(t_k)) - \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}(t_k)) \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}(t_{k+1}))) \Delta t^2 \right) {}^L_G \bar{q}(t_k) \tag{131}$$

2 姿态传播

卡尔曼滤波器由两个阶段组成，用于确定当前姿态的估计值。在第一阶段，滤波器根据最后的估计值和一些本体感知测量值对姿态进行预测。然后在更新阶段对该估计值进行修正，在更新阶段考虑了新的绝对方位测量。

预测系统状态的一种方法是将给系统的控制命令输入到系统模型中，从而预测系统的行为。另一种估计位置和方向的方法是使用来自惯性测量单元 (IMU) 的数据作为动态模型替换。IMU 提供作用于系统上的平移加速度和旋转速度的测量。在本文中，我们将采用后一种方法。

在讨论状态方程和误差传播之前，我们将描述陀螺的模型，该模型将提供旋转速度的测量。

2.1 陀螺噪声模型

作为 IMU 的一部分，三轴陀螺仪提供旋转速度的测量。陀螺会受到不同的误差项的影响，如速率噪声误差和偏差。根据文献 [3, 6]，我们使用一个简单的模型，将测量的转动率 $\boldsymbol{\omega}_m$ 与实际角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 联系起来，作为

$$\boldsymbol{\omega}_m = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{b} + \mathbf{n}_r \tag{132}$$

在这个方程中， \mathbf{b} 表示陀螺偏差和 \mathbf{n}_r 表示速率噪声，假设为具有高斯白噪声的特征。

$$E[\mathbf{n}_r] = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (133)$$

$$E[\mathbf{n}_r(t + \tau) \mathbf{n}_r^T(t)] = \mathbf{N}_r \delta(\tau) \quad (134)$$

陀螺偏差是非静态的，模拟为随机游走过程。

$$\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{n}_w \quad (135)$$

特征为

$$E[\mathbf{n}_w] = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (136)$$

$$E[\mathbf{n}_w(t + \tau) \mathbf{n}_w^T(t)] = \mathbf{N}_w \delta(\tau) \quad (137)$$

因此，偏差是一个随机量，需要与四元数一起估计。

为了简化，我们假设噪声在所有三个空间方向都相等，即

$$\mathbf{N}_r = \sigma_{r_c}^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (138)$$

$$\mathbf{N}_w = \sigma_{w_c}^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (139)$$

下标 c 表明，这些是连续时间系统的噪声协方差，与后来使用的离散系统的噪声协方差不同。

为了确定协方差 [6] 的单位，为了便于说明，我们考虑了标量情况，它直接扩展到矢量情况。因此，为了兼容性， n_r 其单位与 ω 相同，因此

$$E[n_r(t + \tau) n_r(t)] = [\sigma_{r_c}^2 \delta(\tau)] = \frac{\text{rad}^2}{\text{sec}^2} \quad (140)$$

但是 $\delta(\tau)$ 的单位定义为 [4, p.221]

$$[\delta(\tau)] = \frac{1}{\text{sec}} \quad (141)$$

因此

$$[\sigma_{r_c}^2] = \frac{\text{rad}^2}{\text{sec}^2} \cdot \text{sec} \quad (142)$$

$$= \left(\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right)^2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{\text{sec}}} \quad (143)$$

$$= \left(\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right)^2 \cdot \frac{1}{\text{Hz}} \quad (144)$$

和

$$[\sigma_{r_c}] = \left(\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\text{Hz}}} = \frac{\text{rad}}{\sqrt{\text{sec}}} \quad (145)$$

类似地，我们得到

$$[\sigma_{w_c}^2] = \left(\frac{\text{rad}}{\text{sec}} / \text{sec} \right)^2 \cdot \text{sec} \quad (146)$$

$$= \frac{\text{rad}^2}{\text{sec}^3} \quad (147)$$

$$= \left(\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right)^2 \cdot \text{Hz} \quad (148)$$

和

$$[\sigma_{w_c}] = \left(\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right) \cdot \sqrt{\text{Hz}} = \frac{\text{rad}}{\sqrt{\text{sec}^3}} \quad (149)$$

在离散情况下, \mathbf{n}_{r_d} 以及 \mathbf{n}_{w_d} 必须具有与旋转速率相同的单位 (参见第2.2节中的状态方程), 即 $\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ 。为了保持噪声强度的等效性, 在离散化、出产估计时必须考虑采样频率。

$$\sigma_{r_d} = \frac{\sigma_{r_c}}{\sqrt{\Delta t}} \quad (150)$$

$$\sigma_{w_d} = \sigma_{w_c} \cdot \sqrt{\Delta t} \quad (151)$$

Δt 是采样频率的倒数, 或 $f_{\text{sample}} = \frac{1}{\Delta t}$ 。离散方差将被用于模拟有噪声的真实数据。

Simon[7, pp.230-233] 对连续和离散噪声方差之间的转换作了进一步的解释。为了类比书中的推导, 偏差驱动噪声 \mathbf{n}_w 对应于过程噪声, 而速率噪声 \mathbf{n}_r 对应于测量噪声。

关于该陀螺噪声模型及其与制造商提供的各种规范之间的关系详细说明, 见 [8] 附录。

2.2 状态方程

在前面分析的直接结果中, 我们定义了由四元数和陀螺偏差组成的七元状态矢量。

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{b}(t) \end{bmatrix} \quad (152)$$

使用四元数导数的定义 (方程式 (106)) 和误差模型 (方程式, (132) 和 (135)), 我们发现下列控制状态的微分方程组

$${}^L_G \dot{\bar{\mathbf{q}}}(t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} (\boldsymbol{\omega}_m - \mathbf{b} - \mathbf{n}_r) {}^L_G \bar{\mathbf{q}}(t) \quad (153)$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{n}_w \quad (154)$$

根据上述预期, 得出在 EKF-framework 内部的状态的预测方程 (参见 [3, p.422])。

$${}^L_G \dot{\hat{\bar{\mathbf{q}}}}(t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} (\hat{\boldsymbol{\omega}}) {}^L_G \hat{\bar{\mathbf{q}}}(t) \quad (155)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{b}}} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (156)$$

其中

$$\hat{\omega} = \omega_m - \hat{\mathbf{b}} \quad (157)$$

由于偏差在积分区间内是常数，我们可以使用零阶 (参见第1.6.1节) 或一阶 (参见第1.6.2节) 积分器，使用 $\hat{\omega}$ 而不是 ω 来积分四元数。

2.3 误差和协方差表示

通常，误差向量及其协方差用状态向量及其估计值的算术差表示。然而，在手头的问题中，由于系统中存在约束，这种表示是有问题的。四元数被强制为单位长度的事实 (参见等式 (5)) 使得相应的协方差矩阵奇异 [3, p.423]，这在数值上难以保持。因此，出于稳定性的原因，我们将使用不同的 6 维误差向量表示。

我们不使用四元数和四元数估计之间的算术差来定义误差，而是使用误差四元数 $\delta\hat{q}$ ；估计值和局部参照系的真实方向之间的小旋转。这个误差不是差值，而是定义为乘法。

$${}^L_G\bar{q} = {}^L_L\delta\bar{q} \otimes {}^L_G\hat{q} \quad (158)$$

$${}^L_L\delta\bar{q} = {}^L_G\bar{q} \otimes {}^L_G\hat{q}^{-1} \quad (159)$$

由于与误差四元数 $\delta\bar{q}$ 有关的旋转可以假定非常小，因此我们可以使用小角度近似 (如第1.4节所示)，并定义如下姿态误差角矢量 $\delta\theta$

$$\delta\bar{q} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{q} \\ \delta q_4 \end{bmatrix} \quad (160)$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}} \sin(\delta\theta/2) \\ \cos(\delta\theta/2) \end{bmatrix} \quad (161)$$

$$\approx \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\delta\theta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (162)$$

该误差角矢量 $\delta\theta$ 的维度为 3×1 ，将与误差状态矢量中的偏差误差一起使用。偏差误差定义为

$$\Delta\mathbf{b} = \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} \quad (163)$$

我们现在可以将误差向量定义为

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \Delta\mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (164)$$

在下一节中，我们将扩展误差向量的连续时间一阶状态方程。

2.4 连续时间误差状态方程

为了推导误差向量的连续时间线性状态方程，我们将从误差四元数的定义开始 (式 (158))。

$$\bar{q} = \delta\bar{q} \otimes \hat{q} \quad \Big| \frac{d}{dt} \quad (165)$$

$$\dot{\bar{q}} = \delta\dot{\bar{q}} \otimes \hat{q} + \delta\bar{q} \otimes \dot{\hat{q}} \quad (166)$$

将定义替换为 $\dot{\bar{q}}$ (式 (105)) 和 $\dot{\hat{q}}$ (式 (155)) 可导致

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \bar{q} = \delta\dot{\bar{q}} \otimes \hat{q} + \delta\bar{q} \otimes \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \hat{q} \right) \quad \Big| - \frac{1}{2} \left(\delta\bar{q} \otimes \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \hat{q} \right) \quad (167)$$

$$\delta\dot{\bar{q}} \otimes \hat{q} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \omega \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \bar{q} - \delta\bar{q} \otimes \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \hat{q} \right) \quad \Big| \otimes \hat{q}^{-1}, \text{eq. (159)} \quad (168)$$

$$\delta\dot{\bar{q}} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \omega \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta\bar{q} - \delta\bar{q} \otimes \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (169)$$

结合 ω 的陀螺模型 (参见式 (132)) 和 $\hat{\omega}$ 的定义 (参见式 (157)) 得出:

$$\omega = \hat{\omega} - \Delta\mathbf{b} - \mathbf{n}_r \quad (170)$$

如果将其替换为上述内容, 则会导致

$$\delta\dot{\bar{q}} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta\bar{q} - \delta\bar{q} \otimes \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \right) - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{b} + \mathbf{n}_r \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta\bar{q} \quad (171)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} -[\hat{\omega} \times] & \hat{\omega} \\ -\hat{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta\bar{q} - \begin{bmatrix} +[\hat{\omega} \times] & \hat{\omega} \\ -\hat{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta\bar{q} \right) - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{b} + \mathbf{n}_r \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta\bar{q} \quad (172)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2[\hat{\omega} \times] & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta\bar{q} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{b} + \mathbf{n}_r \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta\bar{q} \quad (173)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2[\hat{\omega} \times] & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta\bar{q} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -[(\Delta\mathbf{b} + \mathbf{n}_r) \times] & (\Delta\mathbf{b} + \mathbf{n}_r) \\ -(\Delta\mathbf{b} + \mathbf{n}_r)^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\mathbf{q} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (174)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2[\hat{\omega} \times] & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta\bar{q} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\Delta\mathbf{b} + \mathbf{n}_r) \\ 0 \end{bmatrix} - O(|\Delta\mathbf{b}| |\delta\mathbf{q}|, |\mathbf{n}_r| |\delta\mathbf{q}|) \quad (175)$$

忽略二阶项, 我们可以写

$$\delta\dot{\bar{q}} = \begin{bmatrix} \delta\dot{\mathbf{q}} \\ \delta\dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \delta\dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\mathbf{i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\omega} \times \delta\mathbf{q} - \frac{1}{2} (\Delta\mathbf{b} + \mathbf{n}_r) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (176)$$

或者最后

$$\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\omega} \times \delta\boldsymbol{\theta} - \Delta\mathbf{b} - \mathbf{n}_r \quad (177)$$

偏差误差的控制方程很容易从方程 (154) 和 (156) 中计算出来。

$$\Delta\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{b}} - \dot{\hat{\mathbf{b}}} = \mathbf{n}_w \quad (178)$$

结合这些结果，我们可以将误差状态方程写成

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta\theta} \\ \dot{\Delta\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\hat{\omega} \times] & -\mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \Delta\mathbf{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{n}_r \\ \mathbf{n}_w \end{bmatrix} \quad (179)$$

或

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}_c \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_c \cdot \mathbf{n} \quad (180)$$

其中

$$\mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} -[\hat{\omega} \times] & -\mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \mathbf{G}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (181)$$

是系统矩阵和噪声矩阵，以及

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \Delta\mathbf{b} \end{bmatrix}, \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_r \\ \mathbf{n}_w \end{bmatrix} \quad (182)$$

分别表示误差状态和噪声矢量。

如第2.1节所述，我们假设 \mathbf{n}_r 和 \mathbf{n}_w 为白色且独立，因此连续时间系统噪声协方差矩阵由以下方程给出

$$\mathbf{Q}_c = E[\mathbf{n}(t+\tau)\mathbf{n}^T(t)] = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_r & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{N}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{r_c}^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \sigma_{w_c}^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (183)$$

2.5 离散时间误差状态方程

为了实现离散时间卡尔曼滤波方程，需要对上述误差传播模型进行离散化。特别是，我们必须找到状态转换矩阵 Φ 和系统噪声协方差 \mathbf{Q}_d [4, 4.9 章]。

2.5.1 状态转移矩阵 Φ

由于连续时间系统矩阵 \mathbf{F}_c 在积分时间步上是常数，我们可以将状态转换矩阵写为 [4, 式 (2-58a)]

$$\Phi(t + \Delta t, t) = \exp(\mathbf{F}_c \Delta t) \quad (184)$$

$$= \mathbf{I}_{6 \times 6} + \mathbf{F}_c \Delta t + \frac{1}{2!} \mathbf{F}_c^2 \Delta t^2 + \dots \quad (185)$$

\mathbf{F}_c 简单的幂计算产生了

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c &= \begin{bmatrix} -[\hat{\omega} \times] & -\mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, & \mathbf{F}_c^2 &= \begin{bmatrix} [\hat{\omega} \times]^2 & [\hat{\omega} \times] \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_c^3 &= \begin{bmatrix} -[\hat{\omega} \times]^3 & -[\hat{\omega} \times]^2 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, & \mathbf{F}_c^4 &= \begin{bmatrix} [\hat{\omega} \times]^4 & [\hat{\omega} \times]^3 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (186)$$

与 Lefferts 等人 [3] 的符号一致，我们发现转换矩阵具有以下块结构

$$\Phi(t + \Delta t, t) = \begin{bmatrix} \Theta & \Psi \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (187)$$

矩阵 Θ 可以写为

$$\Theta = \mathbf{I}_{3 \times 3} - [\hat{\omega} \times] \Delta t + \frac{1}{2!} [\hat{\omega} \times]^2 \Delta t^2 - \frac{1}{3!} [\hat{\omega} \times]^3 \Delta t^3 + \dots \quad (188)$$

使用斜对称矩阵 $[\hat{\omega} \times]$ 的性质 (参见第1.3.2节) 并重新排序条目, 得出

$$\Theta = \mathbf{I}_{3 \times 3} + \left(-\Delta t + \frac{1}{3!} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^3 - \dots \right) [\hat{\omega} \times] + \left(\frac{1}{2!} \Delta t^2 - \frac{1}{4!} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^4 + \dots \right) [\hat{\omega} \times]^2 \quad (189)$$

$$= \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{1}{|\hat{\omega}|} \left(|\hat{\omega}| \Delta t - \frac{1}{3!} |\hat{\omega}|^3 \Delta t^3 + \dots \right) [\hat{\omega} \times] + \frac{1}{|\hat{\omega}|^2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2!} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^2 + \frac{1}{4!} |\hat{\omega}|^4 \Delta t^4 - \dots \right) \right) [\hat{\omega} \times]^2 \quad (190)$$

$$= \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{1}{|\hat{\omega}|} \sin(|\hat{\omega}| \Delta t) [\hat{\omega} \times] + \frac{1}{|\hat{\omega}|^2} (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) [\hat{\omega} \times]^2 \quad (191)$$

进一步展开 $[\hat{\omega} \times]$ 得出

$$\Theta = \cos(|\hat{\omega}| \Delta t) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} - \sin(|\hat{\omega}| \Delta t) \cdot \left[\frac{\hat{\omega}}{|\hat{\omega}|} \times \right] + (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) \cdot \frac{\hat{\omega}}{|\hat{\omega}|} \frac{\hat{\omega}}{|\hat{\omega}|}^T \quad (192)$$

与第1.4节的比较表明, 实际上 Θ 是旋转矩阵, 其中 ω 为旋转轴, $|\hat{\omega}| \Delta t$ 为相应角度。

对于 $|\hat{\omega}|$ 的小值, 上述任何一个表达式都将导致数值不稳定。通过极限和应用 L'Hôpital 法则, 我们得出

$$\lim_{|\hat{\omega}| \rightarrow 0} \Theta = \mathbf{I}_{3 \times 3} - \Delta t [\hat{\omega} \times] + \frac{\Delta t^2}{2} [\hat{\omega} \times]^2 \quad (193)$$

以类似的方式处理矩阵 Ψ , 我们发现

$$\Psi = -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{1}{2!} \Delta t^2 [\hat{\omega} \times] - \frac{1}{3!} \Delta t^3 [\hat{\omega} \times]^2 + \dots \quad (194)$$

$$= -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \left(\frac{1}{2!} \Delta t^2 - \frac{1}{4!} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^4 + \dots \right) [\hat{\omega} \times] + \left(-\frac{1}{3!} \Delta t^3 + \frac{1}{5!} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^5 - \dots \right) [\hat{\omega} \times]^2 \quad (195)$$

$$= -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{1}{|\hat{\omega}|^2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2!} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^2 + \frac{1}{4!} |\hat{\omega}|^4 \Delta t^4 - \dots \right) \right) [\hat{\omega} \times] \\ + \left(-\frac{|\hat{\omega}| \Delta t}{|\hat{\omega}|^3} + \left(\frac{|\hat{\omega}| \Delta t}{|\hat{\omega}|^3} - \frac{1}{3!} \Delta t^3 + \frac{1}{5!} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^5 - \dots \right) \right) [\hat{\omega} \times]^2 \quad (196)$$

$$= -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{1}{|\hat{\omega}|^2} (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) [\hat{\omega} \times] - \frac{1}{|\hat{\omega}|^3} (|\hat{\omega}| \Delta t - \sin(|\hat{\omega}| \Delta t)) [\hat{\omega} \times]^2 \quad (197)$$

对于 $|\hat{\omega}|$ 的小值, 我们可以再次取其极限, 应用 L'Hôpital 法则, 得到

$$\lim_{|\hat{\omega}| \rightarrow 0} \Psi = -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \lim_{|\hat{\omega}| \rightarrow 0} \frac{\sin(|\hat{\omega}| \Delta t) \Delta t}{2 |\hat{\omega}|} [\hat{\omega} \times] - \lim_{|\hat{\omega}| \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) \Delta t}{3 |\hat{\omega}|^2} [\hat{\omega} \times]^2 \quad (198)$$

$$= -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \lim_{|\hat{\omega}| \rightarrow 0} \frac{\cos(|\hat{\omega}| \Delta t) \Delta t^2}{2} [\hat{\omega} \times] - \lim_{|\hat{\omega}| \rightarrow 0} \frac{\sin(|\hat{\omega}| \Delta t) \Delta t^2}{6 |\hat{\omega}|} [\hat{\omega} \times]^2 \quad (199)$$

$$= -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} [\hat{\omega} \times] - \lim_{|\hat{\omega}| \rightarrow 0} \frac{\cos(|\hat{\omega}| \Delta t) \Delta t^3}{6} [\hat{\omega} \times]^2 \quad (200)$$

$$= -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} [\hat{\omega} \times] - \frac{\Delta t^3}{6} [\hat{\omega} \times]^2 \quad (201)$$

关于小 ω 近似值的一个注记 如果非近似项除以 $|\hat{\omega}|^n$ ，则使用小角度近似值产生的误差大致为 $\Delta t^{n+2} |\hat{\omega}|^2$ 。

因此，在 100 Hz 的采样率下，上述 Θ 的误差将为 $10^{-6} \cdot |\hat{\omega}_{\text{thresh}}|^2$ 的阶，其中 $|\hat{\omega}_{\text{thresh}}|$ 表示小 ω 近似的阈值。

2.5.2 噪声协方差矩阵 \mathbf{Q}_d

离散时间系统中噪声的协方差可根据 [4, p.171] 计算。

$$\mathbf{Q}_d = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}_c(\tau) \mathbf{Q}_c \mathbf{G}_c^T(\tau) \Phi^T(t_{k+1}, \tau) d\tau \quad (202)$$

$$= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} \Theta & \Psi \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_c \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \Psi^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} d\tau \quad (203)$$

$$= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} -\Theta & \Psi \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_c \begin{bmatrix} -\Theta^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \Psi^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} d\tau \quad (204)$$

$$(205)$$

假设噪声为白色且独立 (参见等式 (183))，我们可以进一步扩展到

$$\mathbf{Q}_d = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} -\Theta & \Psi \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{r_c}^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \sigma_{w_c}^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Theta^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \Psi^T & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} d\tau \quad (206)$$

$$= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} \sigma_r^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} + \sigma_w^2 \cdot \Psi \Psi^T & \sigma_w^2 \cdot \Psi \\ \sigma_w^2 \cdot \Psi^T & \sigma_w^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} d\tau \quad (207)$$

最后一步从事实出发， Θ 是一个旋转矩阵，因此 $\Theta \Theta^T$ 给出了单位矩阵。

生成的矩阵 \mathbf{Q}_d 具有以下结构

$$\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}^T & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \quad (208)$$

各元素在相当多的代数替换之后如下

$$\mathbf{Q}_{11} = \sigma_r^2 \Delta t \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} + \sigma_w^2 \cdot \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} \frac{\Delta t^3}{3} + \frac{(|\hat{\omega}| \Delta t)^3}{3} + \frac{2 \sin(|\hat{\omega}| \Delta t) - 2|\hat{\omega}| \Delta t}{|\hat{\omega}|^5} \cdot [\hat{\omega} \times]^2 \right) \quad (209)$$

$$\mathbf{Q}_{12} = -\sigma_w^2 \cdot \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} \frac{\Delta t^2}{2} - \frac{|\hat{\omega}| \Delta t - \sin(|\hat{\omega}| \Delta t)}{|\hat{\omega}|^3} \cdot [\hat{\omega} \times] + \frac{(|\hat{\omega}| \Delta t)^2 + \cos(|\hat{\omega}| \Delta t) - 1}{2|\hat{\omega}|^4} \cdot [\hat{\omega} \times]^2 \right) \quad (210)$$

$$\mathbf{Q}_{22} = \sigma_w^2 \Delta t \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (211)$$

与转换矩阵相似，我们可以通过取极限并应用 L'Hôpital 法则，得到小 $|\hat{\omega}|$ 的形式。

$$\lim_{|\hat{\omega}| \rightarrow 0} \mathbf{Q}_{11} = \sigma_r^2 \Delta t \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} + \sigma_w^2 \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} \frac{\Delta t^3}{3} + \frac{2\Delta t^5}{5!} \cdot [\hat{\omega} \times]^2 \right) \quad (212)$$

$$\lim_{|\hat{\omega}| \rightarrow 0} \mathbf{Q}_{12} = -\sigma_w^2 \cdot \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} \frac{\Delta t^2}{2} - \frac{\Delta t^3}{3!} \cdot [\hat{\omega} \times] + \frac{\Delta t^4}{4!} \cdot [\hat{\omega} \times]^2 \right) \quad (213)$$

2.6 传播方程

前面定义了四元数的传播 (参见第1.6节)，以及离散时间状态转换和噪声协方差矩阵 (参见第2.5节)，我们现在可以编写卡尔曼滤波器传播方程。

假设我们在时间步 k ，接收到陀螺测量值 ω_{m_k} 和 $\omega_{m_{k+1}}$ ，我们得到四元数的估计值 $\hat{q}_{k|k}$ 和偏差 $\hat{\mathbf{b}}_{k|k}$ ，以及相应的协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k|k}$ 。由此，利用式 (157)，我们还得到了 $\hat{\omega}_{k|k}$ 的估计值。

我们现在进行如下操作：

1. 我们使用等式 (156) 的离散形式将偏差传播为

$$\hat{\mathbf{b}}_{k+1|k} = \hat{\mathbf{b}}_{k|k} \quad (214)$$

2. 利用测量 $\omega_{m_{k+1}}$ 和 $\hat{\mathbf{b}}_{k+1|k}$ ，我们根据等式 (157) 得出新的旋转速率估计值，如下所示：

$$\hat{\omega}_{k+1|k} = \omega_{m_{k+1}} - \hat{\mathbf{b}}_{k+1|k} \quad (215)$$

3. 我们使用一阶积分器 (参见第1.6.2节) 和 $\hat{\omega}_{k|k}$ 和 $\hat{\omega}_{k+1|k}$ 传播四元数，以获得 $\hat{q}_{k+1|k}$ 。
4. 根据第2.5.1和2.5.2节中的公式，我们计算了状态转换矩阵 Φ 和离散时间噪声协方差矩阵 \mathbf{Q}_d 。
5. 我们根据扩展卡尔曼滤波方程计算状态协方差矩阵。

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \Phi \mathbf{P}_{k|k} \Phi^T + \mathbf{Q}_d \quad (216)$$

3 更新

在卡尔曼滤波器的更新阶段，我们将使用一个外部传感器来测量方向。常见的例子是恒星和太阳传感器。我们现在考虑一个太阳传感器的简化模型，更详细的版本见 [9]。

3.1 测量模型

为了给姿态滤波器提供外部信息，我们可以设想许多传感器。每个传感器都有其特定的传感器模型。

在下面，我们将介绍一系列传感器模型，然后介绍将这些测量值与滤波器估计值融合的一般步骤。

3.1.1 太阳传感器

在这个模型中，我们假设我们能够测量从传感器到太阳的矢量相对于传感器坐标系的投影，传感器坐标系 $^S\mathbf{r}_\odot$ 在全局坐标坐标系中的表示 $^G\mathbf{r}_\odot$ 是已知的。

两者之间的关系由旋转给出。

$$^S\mathbf{r}_\odot = {}^S_G\mathbf{C}^G\mathbf{r}_\odot \quad (217)$$

旋转矩阵 ${}^S_G\mathbf{C}$ 可以分解为

$${}^S_G\mathbf{C} = {}^S_L\mathbf{C}_G^L\mathbf{C} \quad (218)$$

其中传感器坐标系 $\{S\}$ 和航天器坐标系 $\{L\}$ 之间的转换 ${}^S_L\mathbf{C}$ 是已知的和固定的，并且转换 ${}^L_G\mathbf{C}$ 是姿态四元数的函数。

实际测量 \mathbf{z} 将是矢量 \mathbf{r}_\odot 的投影，被零均值、白噪声、高斯噪声 \mathbf{n}_m 破坏。

$$\mathbf{z} = \Pi {}^S_L\mathbf{C}_G^L\mathbf{C}^G\mathbf{r}_\odot + \mathbf{n}_m \quad (219)$$

其中 Π 是投影矩阵

测量噪声的特征是

$$E[\mathbf{n}_m] = 0 \quad (220)$$

$$E[\mathbf{n}_m\mathbf{n}_m^T] = \mathbf{R} \quad (221)$$

对于卡尔曼滤波器的更新阶段，我们需要将测量误差 $\tilde{\mathbf{z}}$ 与状态向量联系起来。

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}} = \Pi {}^S_L\mathbf{C} \left({}^L_G\mathbf{C}(\bar{q}) - {}^L_G\mathbf{C}(\hat{q}) \right) \cdot {}^G\mathbf{r}_\odot + \mathbf{n}_m \quad (222)$$

根据误差模型 (参见第2.3节) 和旋转矩阵的性质 (参见第1.4节)，我们可以回忆以下表达式

$$\bar{q} = \delta\bar{q} \otimes \hat{q} \quad (223)$$

$$\begin{aligned} {}^L_G\mathbf{C}(\bar{q}) &= {}^L_G\mathbf{C}(\delta\bar{q} \otimes \hat{q}) \\ &= {}^L_G\mathbf{C}(\delta\bar{q}) \cdot {}^L_G\mathbf{C}(\hat{q}) \end{aligned} \quad (224)$$

$${}^L_G\mathbf{C}(\delta\bar{q}) \approx \mathbf{I} - [\delta\boldsymbol{\theta} \times] \quad (225)$$

因此²

$$\hat{L}_G \mathbf{C}(\bar{q}) - \hat{L}_G \mathbf{C}(\hat{q}) = (\hat{L}_G \mathbf{C}(\delta\bar{q}) - \mathbf{I}_{3 \times 3}) \cdot \hat{L}_G \mathbf{C}(\hat{q}) = -[\delta\boldsymbol{\theta} \times] \cdot \hat{L}_G \mathbf{C}(\hat{q}) \quad (227)$$

我们现在可以写

$$\tilde{\mathbf{z}} = \prod \hat{L}_G \mathbf{C}(\hat{L}_G \mathbf{C}(\delta\bar{q}) - \mathbf{I}) \hat{L}_G \mathbf{C}(\hat{q}) \cdot {}^G \mathbf{r}_{\odot} + \mathbf{n}_m \quad (228)$$

$$\approx \prod \hat{L}_G \mathbf{C}(-[\delta\boldsymbol{\theta} \times]) \hat{L}_G \mathbf{C}(\hat{q}) \cdot {}^G \mathbf{r}_{\odot} + \mathbf{n}_m \quad (229)$$

$$= \prod \hat{L}_G \mathbf{C} \left[\hat{L}_G \mathbf{C}(\hat{q}) {}^G \mathbf{r}_{\odot} \times \right] \cdot \delta\boldsymbol{\theta} + \mathbf{n}_m \quad (230)$$

$$= \left[\prod \hat{L}_G \mathbf{C} \left[\hat{L}_G \mathbf{C}(\hat{q}) {}^G \mathbf{r}_{\odot} \times \right] \quad \mathbf{0} \right] \cdot \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\theta} \\ \tilde{\mathbf{b}} \end{bmatrix} + \mathbf{n}_m \quad (231)$$

因此测量矩阵 \mathbf{H} 对应于

$$\mathbf{H} = \left[\prod \hat{L}_G \mathbf{C} \left[\hat{L}_G \mathbf{C}(\hat{q}) {}^G \mathbf{r}_{\odot} \times \right] \quad \mathbf{0} \right] \quad (232)$$

3.2 卡尔曼滤波器更新

考虑到传播状态估计值 $\hat{q}_{k+1|k}$ 和 $\hat{\mathbf{b}}_{k+1|k}$ ，以及它们的协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k+1|k}$ 、当前测量值 $\mathbf{z}(k+1)$ 和测量矩阵 \mathbf{H} ，我们可以通过以下方式更新我们的估计：

1. 根据公式 (232) 计算测量矩阵 $\mathbf{H}(k)$
2. 根据计算残差 \mathbf{r}

$$\mathbf{r} = \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}} \quad (233)$$

$$(234)$$

3. 将残差的协方差计算为 \mathbf{S}

$$\mathbf{S} = \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T + \mathbf{R} \quad (235)$$

4. 计算卡尔曼增益 \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{S}^{-1} \quad (236)$$

5. 计算校正 $\Delta \hat{\mathbf{x}}(+)$

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}(+) = \begin{bmatrix} \delta\hat{\boldsymbol{\theta}}(+) \\ \Delta \hat{\mathbf{b}}(+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \delta\hat{\mathbf{q}}(+) \\ \Delta \hat{\mathbf{b}}(+) \end{bmatrix} = \mathbf{K} \mathbf{r} \quad (237)$$

6. 根据更新四元数

$$\delta\bar{q} = \begin{bmatrix} \delta\hat{\mathbf{q}}(+) \\ \sqrt{1 - \delta\hat{\mathbf{q}}^T(+) \delta\hat{\mathbf{q}}(+)} \end{bmatrix} \quad (238)$$

²请注意，如果我们使用的是加法而不是乘法误差模型，则得到的表达式的差异，其中 $\bar{q} = \hat{q} + \Delta\bar{q}$ 与 $\Delta\bar{q} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{q}^T & \Delta q_4 \end{bmatrix}^T$ ：

$$\hat{L}_G \mathbf{C}(\hat{q} + \Delta\bar{q}) - \hat{L}_G \mathbf{C}(\hat{q}) = 4\hat{q}_4 \Delta q_4 \mathbf{I}_{3 \times 3} - 2\hat{q}_4 [\Delta\mathbf{q} \times] - 2\Delta q_4 [\hat{\mathbf{q}} \times] + 2\Delta\mathbf{q} \hat{\mathbf{q}}^T + 2\hat{\mathbf{q}} \Delta\mathbf{q}^T \quad (226)$$

或者, 如果 $\delta\hat{\mathbf{q}}^T(+)\delta\hat{\mathbf{q}}(+)>1$, 使用

$$\delta\bar{q} = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta\hat{\mathbf{q}}^T(+)\delta\hat{\mathbf{q}}(+)}} \cdot \begin{bmatrix} \delta\hat{\mathbf{q}}(+) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (239)$$

$$\hat{q}_{k+1|k+1} = \delta\bar{q} \otimes \hat{q}_{k+1|k} \quad (240)$$

7. 更新偏差

$$\hat{\mathbf{b}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{b}}_{k+1|k} + \Delta\hat{\mathbf{b}}(+) \quad (241)$$

8. 使用新的偏差估计值更新估计的旋转速率

$$\hat{\omega}_{k+1|k+1} = \omega_{m_{k+1}} - \hat{\mathbf{b}}_{k+1|k+1} \quad (242)$$

9. 计算新的协方差矩阵

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = (\mathbf{I}_{6 \times 6} - \mathbf{KH})\mathbf{P}_{k+1|k}(\mathbf{I}_{6 \times 6} - \mathbf{KH})^T + \mathbf{KRK}^T \quad (243)$$

4 References

1. M. D. Shuster, "A survey of attitude representations," Journal of the Astronautical Sciences, vol. 41, no. 4, pp. 439-517, October-December 1993.
2. W. G. Breckenridge, "Quaternions - Proposed Standard Conventions," JPL, Tech. Rep. INTEROFFICE MEMO- RANDUM IOM 343-79-1199, 1999.
3. E. J. Lefferts, F. L. Markley, and M. D. Shuster, "Kalman filtering for spacecraft attitude estimation," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 5, no. 5, pp. 417-429, Sept.-Oct. 1982.
4. P. S. Maybeck, Stochastic Models, Estimation and Control. New York: Academic Press, 1979, vol. 1.
5. J. R. Wertz, Ed., Spacecraft Attitude Determination and Control. Dordrecht; Boston: Kluwer Academic, 1978.
6. R. O. Allen and D. H. Chang, "Performance Testing of the Systron Donner Quartz Gyro (QRS11-100-420); Sn' s 3332, 3347 and 3544," JPL, Tech. Rep. ENGINEERING MEMO- RANDUM EM #343-1297, 1993.
7. D. Simon, Optimal State Estimation, Kalman, H_∞ , and Nonlinear Approaches. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2006.
8. J. Crassidis, "Sigma-point Kalman filtering for integrated GPS and inertial navigation," in Proc. of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Paper #2005-6052, San Francisco, CA, Aug. 2005. [Online]. Available: <http://www.acsu.buffalo.edu/~johnc/gpsinsgnc05.pdf>
9. N. Trawny, "Sun sensor model," University of Minnesota, Dept. of Comp. Sci. & Eng., Tech. Rep. 2005-001, Jan. 2005.