伴随表示

wikipedia

13 January 2023

在数学中，李群 G 的**伴随表示** (**adjoint representation**) 或**伴随作用** (**adjoint action**) 是一种将群元素表示为群的李代数的线性变换的方法，其中李代数被认为是向量空间。例如，如果 G 是 $GL(n,\mathbb{R})$，实 $n\times n$ 可逆矩阵的李群，则伴随表示是群同态，它将 $n\times n$ 可逆的矩阵 g 发送到 $\mathbb{R}^n$ 的所有线性变换的向量空间的自同态，该向量空间被定义为 $x\mapsto gxg^{-1}$。

对于任意李群，这种自然表示是通过共轭将 G 对其自身的作用线性化 (即取其微分) 而获得的。伴随表示可以定义为任意域上的线性代数群。

1 定义

设 G 为一个李群，并设

$$\Psi : G \to \mathrm{Aut}(G)$$

为映射 $g\mapsto \Psi_g$，其中 $\mathrm{Aut}(G)$ 为 G 的自同构群，并且 $\Psi_g : G\to G$ 由内部自同构 (共轭) 给出为

$$\Psi_g(h) = ghg^{-1}.$$

这个 Ψ 是一个李群同态。

对于在 G 中的每一个 g，定义 Ad_g 为 Ψ_g 在原点处的导数：

$$\mathrm{Ad}_g = (d\Psi_g)_e : T_eG \to T_eG$$

其中 d 是微分，并且 $\mathfrak{g} = T_eG$ 是在原点 e 处 (e 为群 G 的恒等元) 的切空间。由于 Ψ_g 是一个李群自同构，Ad_g 是李代数自同构；即 $\mathfrak{g}$ 到其自身的可逆线性变换，并保持李括号。而且，因为 $g\mapsto\Psi_g$ 是一个群同态，所以 $g\mapsto \mathrm{Ad}_g$ 也是一个群同态。[1]因此，映射

$$\mathrm{Ad} : G\to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}), g\mapsto \mathrm{Ad}_g$$

是一个群表示，被称为 G 的**伴随表示** (**adjoint representation**)。

如果 G 是一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (被称为浸入线性李群) 的浸入李子群，则李代数 $\mathfrak{g}$ 由矩阵组成，并且对于具有小的算子范数的矩阵 X，指数映射是矩阵指数 $\exp(X) = e^X$。因此，对于在 G 中的 g 以及在 $\mathfrak{g}$ 中的小 X ，取在 $t=0$ 处 $\Psi_g(\exp(tX)) = ge^{tX}g^{-1}$ 的导数，我们得到：

$$\mathrm{Ad}_g(X) = gXg^{-1}$$

其中在右侧我们有矩阵的乘积。若 $G\subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 是一个闭子群 (即 G 一个是矩阵李群)，则该公式对于在 G 中的所有 g 和在 $\mathfrak{g}$ 中的所有 X 都有效。

[1]事实上，通过链式规则，$\mathrm{Ad}_{gh} = d\left(\Psi_{gh}\right)_e = d\left(\Psi_g\circ\Psi_h\right)_e = d\left(\Psi_g\right)_e\circ d\left(\Psi_h\right)_e = \mathrm{Ad}_g\circ\mathrm{Ad}_h$ 。

简单地说，伴随表示是在 G 的单位元周围与 G 共轭作用相关联的各向同性表示 (isotropy representation)。

2 Ad 的导数

通过在恒等式处取导数，我们始终可以从李群 G 的表示形式传递到李代数的表示形式。

取伴随映射的导数

$$\mathrm{Ad}: G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$$

在单位元处给出 G 的李代数 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ 的**伴随表示 (adjoint representation)**：

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}: \mathfrak{g} &\to \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \\ x &\mapsto \mathrm{ad}_x = d(\mathrm{Ad})_e(x) \end{aligned}$$

其中 $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ 是 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 的李代数，其可以通过 $\mathfrak{g}$ 的导子代数标识。我们可以证明

$$\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$$

对于所有的 $x, y \in \mathfrak{g}$ 成立，其中右侧由向量场的李括号给出 (诱导)。实际上，[2]回想一下，将 $\mathfrak{g}$ 视为在 G 上左不变向量场的李代数，在 $\mathfrak{g}$ 上的括号给出为：[3]对于左不变向量场 X, Y，

$$[X, Y] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(d\varphi_{-t}(Y) - Y \right)$$

其中 $\varphi_t : G \to G$ 标识由 X 生成的流。结果表明，$\varphi_t(g) = g\varphi_t(e)$，这大致是因为两侧满足定义流的相同 ODE。也就是，$\varphi_t = R_{\varphi_t(e)}$，其中 R_h 标识与 $h \in G$ 的右乘法。另一方面，由于 $\Psi_g = R_{g^{-1}} \circ L_g$，根据链式规则，

$$\mathrm{Ad}_g(Y) = d\left(R_{g^{-1}} \circ L_g\right)(Y) = dR_{g^{-1}}\left(dL_g(Y)\right) = dR_{g^{-1}}(Y)$$

因为 Y 是左不变的。因此，

$$[X, Y] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\mathrm{Ad}_{\varphi_t(e)}(Y) - Y \right)$$

这就是我们需要证明的。

因此，ad_x 与下面第 3 节“李代数的伴随表示”中的定义相同。Ad 和 ad 通过指数映射相关：具体地，$\mathrm{Ad}_{\exp(x)} = \exp\left(\mathrm{ad}_x\right)$ 对于在李代数中所有的 x 都成立。[4]它是通过指数映射将李群与李代数同态联系起来的一般结果的一个后果。[5]

如果 G 是一个浸入线性李群，则上述计算将简化：确实，如前所述，$\mathrm{Ad}_g(Y) = gYg^{-1}$，并因此有 $g = e^{tX}$，

$$\mathrm{Ad}_{e^{tX}}(Y) = e^{tX} Y e^{-tX}.$$

取其在 $t = 0$ 处的导数，我们有：

$$\mathrm{ad}_X Y = XY - YX.$$

[2]Kobayashi & Nomizu 1996, page 41

[3]Kobayashi & Nomizu 1996, Proposition 1.9.

[4]Hall 2015 Proposition 3.35

[5]Hall 2015 Theorem 3.28

一般情况也可以由线性情形导出：其实，设 G' 为一个浸入线性李群，其李代数与 G 相同，则 Ad 在 G 的单位元处的导数与 G' 的导数重合；因此，在不丧失一般性的情况下，G 可以假定为 G'。

大写/小写符号在文献中广泛使用。因此，例如，在代数 $\mathfrak{g}$ 中的一个向量 x 生成在群 G 中的一个向量场 X。类似地，在 $\mathfrak{g}$ 中的向量的伴随映射 $\mathrm{ad_x y} = [x, y]$ 同态于在群 G 上 (其做为一个流形) 的向量场的李导数 $\mathrm{L}_X Y = [X, Y]$。

进一步的内容请参见“指数映射的导数”一文。

3 李代数的伴随表示

设 $\mathfrak{g}$ 为某个域上的李代数。给定李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个元素 x，我们定义在 $\mathfrak{g}$ 上的 x 的伴随作用为映射

$$\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \quad \text{with} \quad \mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$$

其对所有在 $\mathfrak{g}$ 中的 y 成立。它被称为**伴随自同态** (**adjoint endomorphism**) 或**伴随作用** (**adjoint action**)。(ad_x 通常也标志为 $\mathrm{ad}(x)$。) 由于括号是双线性的，这决定线性映射

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = (\mathrm{End}(\mathfrak{g}), [,])$$

由 $x \mapsto \mathrm{ad}_x$ 给出。在 $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ 内，根据定义，括号由两个算子的交换子 (commutator) 给出为：

$$[T, S] = T \circ S - S \circ T$$

其中 $\circ$ 标识线性映射的组合。使用上述括号定义雅各比恒等式 (Jacobi identity)

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

采用形式

$$([\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y])(z) = \left(\mathrm{ad}_{[x,y]}\right)(z)$$

其中 x, y 和 z 是 $\mathfrak{g}$ 的任意元素。

最后一个恒等式表明 ad 是一个李代数同态；即从括号到括号的线性映射。因此，ad 是李代数的一个表示，并被称为代数 $\mathfrak{g}$ 的**伴随表示** (**adjoint representation**)。

如果 $\mathfrak{g}$ 是有限维的，并且选择了它的一个基 (basis)，则 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 是平方矩阵的李代数，并且组合对应于矩阵乘法。

在一个更模块理论的语言中，该结构说明 $\mathfrak{g}$ 是一个在其自身之上的模块。

ad 的核是 $\mathfrak{g}$ 的中心 (这只是对定义的重新表述)。另一方面，对于在 $\mathfrak{g}$ 中的每个元素 Z，线性映射 $\delta = \mathrm{ad}_z$ 服从莱布尼兹定律：

$$\delta([x, y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)]$$

这对于在代数中的所有 x 和 y 都成立 (雅可比恒等式的重述)。也就是说，ad_z 是一个导数，并且 $\mathfrak{g}$ 在 ad 下的象 (image) 是 $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ 的一个子代数，$\mathfrak{g}$ 的所有导数的空间。

当 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ 是李群 G 的李代数时，ad 是 Ad 在 G 的单位元处的微分。

以下公式类似于莱布尼兹公式：对于标量 α, β 和李代数元素 x, y, z，

$$(\mathrm{ad}_x - \alpha - \beta)^n [y, z] = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \left[(\mathrm{ad}_x - \alpha)^i y, (\mathrm{ad}_x - \beta)^{n-i} z\right]$$

4 结构常数

伴随表示的显式矩阵元素由代数的结构常数给出。也就是，设 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\}$ 是代数的一个基向量集合，具有

$$[e^i, e^j] = \sum_k c_k^{ij} e^k.$$

则 ad_{e^i} 的矩阵元素给出为

$$[\mathrm{ad}_{e^i}]_k^j = c_k^{ij}.$$

因此，例如，su(2) 的伴随表示是 so(3) 的定义表示。

5 示例

- 如果 G 是 n 维的阿贝尔群，则 G 的伴随表示是平凡的 n 维表示。
- 如果 G 是一个矩阵李群 (即 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的闭子群)，则其李代数是 $n \times n$ 矩阵的一个代数，其交换子为一个李括号 (即 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 的一个子代数)。在这种情况下，伴随映射由 $\mathrm{Ad}_g(x) = gxg^{-1}$ 给出。
- 如果 G 是 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ (具有行列式为 1 的实 2×2 矩阵)，则 G 的李代数由具有迹为 0 的实 2×2 矩阵组成。该表示等价于 G 在二元 (即 2 个变量) 二次型空间上通过线性代换的作用所给出的表示。

6 属性

下表总结了在定义中提到的各种映射的属性

$\Psi : G \to \mathrm{Aut}(G)$	$\Psi_g : G \to G$
李群同态： - $\Psi_{gh} = \Psi_g \Psi_h$	李群自同构： - $\Psi_g(ab) = \Psi_g(a)\Psi_g(b)$ - $(\Psi_g)^{-1} = \Psi_{g^{-1}}$
$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$	$\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$
李群同态： - $\mathrm{Ad}_{gh} = \mathrm{Ad}_g \mathrm{Ad}_h$	李代数自同构： - Ad_g 是线性的 - $(\mathrm{Ad}_g)^{-1} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}$ - $\mathrm{Ad}_g[x,y] = [\mathrm{Ad}_g x, \mathrm{Ad}_g y]$
$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$	$\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$
李代数同态： - ad 是线性的 - $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$	李代数导数： - ad_x 是线性的 - $\mathrm{ad}_x[y,z] = [\mathrm{ad}_x y, z] + [y, \mathrm{ad}_x z]$

G 在伴随表示下的象标志为 $\mathrm{Ad}(G)$。如果 G 是连通的，则伴随表示的核与 Ψ 的核重合，该核就是 G 的中心。因此，一个连通李群 G 的伴随表示是忠实的，当且仅当 G 是无中心的。更一般地

说，如果 G 是不连通的，则伴随映射的核是 G 的单位分量 G_0 的中心化子 (centralizer)。根据第一同构定理，我们有

$$\mathrm{Ad}(G) \cong G/Z_G(G_0).$$

给定一个有限维实李代数 $\mathfrak{g}$，根据李第三定理，存在一个连通李群 $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$，其李代数是 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示的象 (即 $\mathrm{Lie}(\mathrm{Int}(\mathfrak{g})) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$)。它被称为 $\mathfrak{g}$ 的**伴随群** (**adjoint group**)。

现在，如果 $\mathfrak{g}$ 是一个连通李群 G 的李代数，则 $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ 是 G 的伴随表示的象：$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ad}(G)$。

7 半单李群的根

如果 G 是半单的，则伴随表示的非零权重形成一个根系统。[6](通常，在继续之前需要先进行李代数的复数化。) 要了解这是如何工作的，请考虑案例 $G = \mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$。我们可以将对角矩阵 $\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)$ 的群作为我们的极大环面 T。通过 T 元素的共轭发送

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{11} & t_1t_2^{-1}a_{12} & \cdots & t_1t_n^{-1}a_{1n} \\ t_2t_1^{-1}a_{21} & a_{22} & \cdots & t_2t_n^{-1}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_nt_1^{-1}a_{n1} & t_nt_2^{-1}a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

因此，T 平凡地作用于 G 的李代数的对角部分，而特征向量 $t_it_j^{-1}$ 作用于各种非对角项。G 的根是权重 $\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) \to t_it_j^{-1}$ 。这说明 $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ 的根系统的标准描述为形式为 $e_i - e_j$ 的向量集合。

8 示例 $\mathrm{SL}(2, R)$

当计算李群最简单情形之一的根系统时，行列式为 1 的二维矩阵的群 $\mathrm{SL}(2, R)$ 由以下形式的矩阵集组成：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

其中 a, b, c, d 为实数，并且 $ad - bc = 1$。

一个极大紧连通阿贝尔李子群，或极大环面 T，由下列形式的所有矩阵的子集给出

$$\begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & 1/t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(\theta) & 0 \\ 0 & \exp(-\theta) \end{bmatrix}$$

其中 $t_1t_2 = 1$。极大环面上的李代数是由矩阵组成的 Cartan 子代数

$$\begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & -\theta \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \theta\,(e_1 - e_2).$$

如果我们将 $\mathrm{SL}(2, R)$ 的一个元素与极大环面的一个元素共轭，我们获得

$$\begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & 1/t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/t_1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} at_1 & bt_1 \\ c/t_1 & d/t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/t_1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & bt_1^2 \\ ct_1^{-2} & d \end{bmatrix}$$

[6] Hall 2015 Section 7.3

该矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则是共轭运算的“特征向量”，具有特征值 $1, 1, t_1^2, t_1^{-2}$ 。所给出的函数 Λ 是一个乘法特征，或是群的环面到下域 R 的同态。函数 λ 给出的 θ 是李代数的一个权重，其权重空间由矩阵的跨度给出。

结果表明，该方法能很好地显示特征的乘性和权重的线性。这进一步证明 Λ 的微分可以用来产生权重。考虑 SL$(3, R)$ 的情况也是有教育意义的。

9 变体与类似物

对于任意域上的代数群，也可以定义伴随表示。

协伴随表示 (**co-adjoint representation**) 是伴随表示的逆相关表示 (contragredient representation)。Alexandre Kirillov 观察到在协伴随表示中任意向量的轨道都是一个辛流形。根据表示论中称为**轨道方法** (**orbit method**) 的哲学 (也可参见 Kirillov 特征公式)，一个李群 G 的不可约表示应以某种方式通过其协伴随轨道进行索引。这种关系在幂零李群的情况下最为密切。

10 See also

- 伴随丛 — 通过伴随表示与任意主丛相关的向量丛

11 References

- Fulton, William; Harris, Joe (1991). Representation theory. A first course. Graduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics. Vol. 129. New York: Springer-Verlag. doi:10.1007/978-1-4612-0979-9 (https://doi.org/10.1007%2F978-1-4612-0979-9). ISBN 9780-387-97495-8. MR 1153249 (https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1153249). OCLC 246650103 (https://www.worldcat.org/oclc/246650103).

- Kobayashi, Shoshichi; Nomizu, Katsumi (1996). Foundations of Differential Geometry, Vol. 1 (New ed.). Wiley-Interscience. ISBN 978-0-471-15733-5.

- Hall, Brian C. (2015), Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction, Graduate Texts in Mathematics, vol. 222 (2nd ed.), Springer, ISBN 9783319134666.