姿态估计中的扩展卡尔曼滤波器

ahrs.readthedocs.io

2021

1 扩展卡尔曼滤波器

扩展卡尔曼滤波是目前世界上使用最多的算法之一，本模块将使用它来计算四元数姿态，并用三轴陀螺仪、加速度计和磁强计作为观测值。

这个**状态 (state)** 是物理状态，可以用动态变量描述。这个**噪音 (noise)** 在测量中意味着它们的不确定性程度[Hartikainen2011]。

动力系统是一个状态随时间演化的系统，因此通常使用微分方程对其进行建模[Labbe2015]。系统动力学中也存在噪声，即**过程噪声 (process noise)**，这意味着我们不能完全确定，但我们可以得到间接噪声测量值。

这里，术语**滤波 (filtering)** 指的是过滤掉 (*filtering out*) 测量中的噪声的过程，以提供给定观测测量的状态的最佳估计。

系统的瞬时状态用通过离散时间增量更新的向量表示，以生成下一个状态。最简单的状态空间模型是线性模型[Hartikainen2011]，可以用以下形式的方程表示：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_t &= \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w}_x \\
\mathbf{z}_t &= \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_z
\end{aligned}
$$

其中

- $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ 是系统的**状态 (state)**，描述时间 t 时 n 个元素的状况。
- $\mathbf{z}_t \in \mathbb{R}^m$ 是时间 t 的**测量值 (measurement)**。
- $\mathbf{w}_x \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_t)$ 是时间 t 的**过程噪声 (process noise)**。
- $\mathbf{w}_z \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_t)$ 是时间 t 的**测量噪声 (measurement noise)**。
- $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 称为**状态转移矩阵 (State Transition Matrix)** 或**基本矩阵 (Fundamental Matrix)**，有时用 $\mathbf{\Phi}$ 表示。这取决于文献。
- $\mathbf{H}$ 是测量模型矩阵。

许多线性模型也采用以下形式的连续时间状态方程进行描述：

$$
\dot{\mathbf{x}}_t = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_t}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{L}\mathbf{w}_t
$$

其中 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{L}$ 是表征模型行为的**常数 (constant)** 矩阵，$\mathbf{w}_t$ 是功率谱密度$\sigma_{\mathbf{w}}^2$ 的白噪声。

主要的区别在于 $\mathbf{A}$ 模拟了一组线性微分方程，并且是连续的。$\mathbf{F}$ 是离散的，表示一组线性方程组 (不是微分方程组)，在离散的时间步长 Δt 中从 $\mathbf{x}_{t-1}$ 转换到 $\mathbf{x}_t$。

获取 $\mathbf{F}$ 的一种常见方法是使用矩阵指数，它可以用泰勒级数[Sola]展开：

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}\Delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t + \frac{(\mathbf{A}\Delta t)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}\Delta t)^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}\Delta t)^k}{k!}$$

1.1 卡尔曼滤波器

[Kalman 1960]提出的解决方案，用一组 n 阶微分方程对系统进行建模，将其转换为一组等价的一阶微分方程，并将其放入矩阵形式 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$。一旦进入这种形式，就会使用一些技术将这些线性微分方程转换成递归方程 $\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1}$。

卡尔曼滤波器有两个步骤：

1. **预测步骤 (prediction step)** 在时间 t 时，给定时间 $t-1$ 时的上一个状态，估计系统的下一个状态及其协方差。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_t \\ \hat{\mathbf{P}}_t &= \mathbf{F}\mathbf{P}_{t-1}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}_t \end{aligned}$$

2. **校正步骤 (correction step)** 在时间 t 时用一组测量值 $\boldsymbol{z}$ 校正估计。

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t &= \mathbf{z}_t - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_t \\ \mathbf{S}_t &= \mathbf{H}\hat{\mathbf{P}}_t\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R} \\ \mathbf{K}_t &= \hat{\mathbf{P}}_t\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_t^{-1} \\ \mathbf{x}_t &= \hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K}_t\mathbf{v}_t \\ \mathbf{P}_t &= \hat{\mathbf{P}}_t - \mathbf{K}_t\mathbf{S}_t\mathbf{K}_t^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

其中

- $\hat{\mathbf{P}}_t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是看到测量值 $\mathbf{z}_t$ 之前状态的**预测协方差 (Predicted Covariance)**。
- $\mathbf{P}_t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是看到测量值 $\mathbf{z}_t$ 后状态的**估计协方差 (Estimated Covariance)**。
- $\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^{k}$ 是定义系统预期行为的**控制输入向量 (Control input vector)**。
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ 是**控制输入模型 (Control input model)**。
- $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是连接预测状态和测量值的**观测模型 (Observation model)**。
- $\mathbf{v}_t \in \mathbb{R}^{m}$ 是**新息 (Innovation)** 或**测量残差 (Measurement residual)**。
- $\mathbf{S}_t \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 是**测量预测协方差 (Measurement Prediction Covariance)**。
- $\mathbf{K}_t \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 是滤波器**增益** (*gain*)，又称**卡尔曼增益 (Kalman Gain)**，表示预测应被校正的量。

预测 (*predicted*) 状态 $\hat{\mathbf{x}}_t$ 是在第一步中根据先前计算的状态 $\mathbf{x}_{t-1}$ 估计的，随后在第二步中被“**校正** (*corrected*)”，以获得最终的估计 $\mathbf{x}_t$。类似的计算发生在其协方差 $\mathbf{P}$ 上。

注释：帽子符号 ˆ (主要) 用于表示估计值。它在这里标记在时间 t 时的预测步骤中对状态的计算。

循环从先验 (prior) 均值 $\mathbf{x}_0$ 和先验协方差 $\mathbf{P}_0$ 开始，这是由系统模型定义的。

1.2 扩展卡尔曼滤波器

到目前为止，这些函数都是高斯和线性的，因此，输出总是另一个高斯，但是高斯在非线性函数下是不封闭的。

EKF 通过使用基于泰勒级数的变换对状态 $\mathbf{x}$ 和测量值 $\mathbf{z}$ 的联合分布形成高斯近似来处理非线性问题[Hartikainen2011]。

同样地，EKF 也分为两个步骤：

1. **预测 (Prediction)**

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t) \\
\hat{\mathbf{P}}_t &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t)\mathbf{P}_{t-1}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t) + \mathbf{Q}_t
\end{aligned}
$$

2. **校正 (Correction)**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_t &= \mathbf{z}_t - \mathbf{h}(\mathbf{x}_t) \\
\mathbf{S}_t &= \mathbf{H}(\mathbf{x}_t)\hat{\mathbf{P}}_t\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_t) + \mathbf{R}_t \\
\mathbf{K}_t &= \hat{\mathbf{P}}_t\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_t)\mathbf{S}_t^{-1} \\
\mathbf{x}_t &= \hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K}_t\mathbf{v}_t \\
\mathbf{P}_t &= \big(\mathbf{I}_4 - \mathbf{K}_t\mathbf{H}(\mathbf{x}_t)\big)\hat{\mathbf{P}}_t
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbf{f}$ 是非线性动态模型函数，并且 $\mathbf{h}$ 是非线性测量模型函数。矩阵 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{H}$ 分别是 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{h}$ 的Jacobian矩阵：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t) &= \tfrac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t)}{\partial\mathbf{x}} \\
\mathbf{H}(\mathbf{x}_t) &= \tfrac{\partial\mathbf{h}(\mathbf{x}_t)}{\partial\mathbf{x}}
\end{aligned}
$$

注意，正常 KF 的矩阵 $\mathbf{F}_{t-1}$ 和 $\mathbf{H}_t$ 分别被 EKF 中的 Jacobian 矩阵 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t)$ 和 $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}_t)$ 取代。预测的状态 $\hat{\mathbf{x}}_t$ 以及预测的残差 $\mathbf{v}_t$ 的计算方法也不同。

敬告：状态转移和观测模型**必须**是可微函数。

2 四元数扩展卡尔曼滤波器

在这种情况下，我们将使用 EKF 来估计表示为四元数 $\mathbf{q}$ 的方向。首先，我们使用陀螺仪的即时测量值**预测** (*predict*) 新的状态 (最新方向)，然后使用加速度计和磁强计的测量值**校正** (*correct*) 此状态。

假设所有传感器都具有固定的采样率 ($f = \frac{1}{\Delta t}$)，即使时间步长可以在任何样本 n 处计算为 $\Delta t = t_n - t_{n-1}$。数值积分将给出一组离散的 n 值，即离散时间 $t_n = t_0 + n\Delta t$ 的近似值。

陀螺仪数据被视为滤波器的外部输入，而不是测量值，其测量噪声作为**过程噪声** (*process noise*) 而不是测量噪声进入滤波器[Sabatini2011]。

对于该模型，四元数 $\mathbf{q}$ 将是**状态向量 (state vector)**，角速度 $\boldsymbol{\omega}$，单位为 rad/s，将是**控制向量 (control vector)**：

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &\triangleq \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_w & \mathbf{q}_v \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} q_w & q_x & q_y & q_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{u} &\triangleq \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

因此，变换模型描述为：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_t &= \mathbf{A}\mathbf{q}_{t-1} + \mathbf{B}\boldsymbol{\omega}_t + \mathbf{w}_{\mathbf{q}} \\ \hat{\mathbf{q}}_t &= \mathbf{F}\mathbf{q}_{t-1} = e^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{q}_{t-1}\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{w}_{\mathbf{q}}$ 做为**过程噪声 (process noise)**。

2.1 预测步骤

在第一步中，时间 t 时的四元数是通过积分角速率 $\boldsymbol{\omega}$ 来**预测 (predicted)** 的，并将其添加到之前计算的四元数 $\mathbf{q}_{t-1}$ 中：

$$\hat{\mathbf{q}}_t = \mathbf{q}_{t-1} + \int_{t-1}^{t} \boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}t$$

这种恒定的增量有时被称为**姿态传播 (Attitude Propagation)**。由于没有精确的封闭式积分解，所以需要一种近似的方法。

2.1.1 离散化

使用Euler-Rodrigues 旋转公式重新定义四元数[Sabatini 2011]，我们发现：

$$\hat{\mathbf{q}}_t = \left[\cos\left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}\|\Delta t}{2}\right)\mathbf{I}_4 + \frac{2}{\|\boldsymbol{\omega}\|}\sin\left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}\|\Delta t}{2}\right)\boldsymbol{\Omega}_t\right]\mathbf{q}_{t-1}$$

其中，$\mathbf{I}_4$ 为 4×4 单位矩阵，并且：

$$\boldsymbol{\Omega}_t = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\omega} & \lfloor\boldsymbol{\omega}\rfloor_\times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

表达式 $\lfloor\mathbf{x}\rfloor_\times$ 将一个向量 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ 扩展为一个 3×3 的倾斜对称矩阵。括号内的大项，乘以 $\mathbf{q}_{t-1}$，是一个正交旋转，保留了传播姿态四元数的归一化，我们可能会倾向于认为它等于 $\mathbf{F}$，但它还不是线性的，尽管它**已经离散 (already discrete)**。它必须被线性化才能用于 EKF 中。

2.1.2 线性化

n 阶多项式线性化方法可以从时间 $t = t_n$ 时附近的 $\mathbf{q}(t_n + \Delta t)$ 的泰勒级数建立：

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{t-1} + \dot{\mathbf{q}}_{t-1}\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{\mathbf{q}}_{t-1}\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\dddot{\mathbf{q}}_{t-1}\Delta t^3 + \cdots$$

其中 $\dot{\mathbf{q}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t}$ 是四元数的导数[1]：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{q}(t+\Delta t) - \mathbf{q}(t)}{\Delta t} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{\Omega}_t \mathbf{q}_{t-1} \\ &= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -\omega_x q_x - \omega_y q_y - \omega_z q_z \\ \omega_x q_w + \omega_z q_y - \omega_y q_z \\ \omega_y q_w - \omega_z q_x + \omega_x q_z \\ \omega_z q_w + \omega_y q_x - \omega_x q_y \end{bmatrix}\end{aligned}$$

角速率 $\boldsymbol{\omega}$ 由局部**传感器坐标系** (*sensor frame*) 中的陀螺仪测量。因此，该术语描述了相对于局部坐标系的方向演变[Sola]。

使用 $\dot{\mathbf{q}}$ 的定义，预测状态 $\hat{\mathbf{q}}_t$ 写为[Wertz]：

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{q}}_t = &\Bigg(\mathbf{I}_4 + \tfrac{1}{2}\mathbf{\Omega}_t\Delta t + \tfrac{1}{2!}\Big(\tfrac{1}{2}\mathbf{\Omega}_t\Delta t\Big)^2 + \tfrac{1}{3!}\Big(\tfrac{1}{2}\mathbf{\Omega}_t\Delta t\Big)^3 + \cdots\Bigg)\mathbf{q}_{t-1} \\ &+ \tfrac{1}{4}\dot{\mathbf{\Omega}}_t\Delta t^2\mathbf{q}_{t-1} + \Big[\tfrac{1}{12}\dot{\mathbf{\Omega}}_t\mathbf{\Omega}_t + \tfrac{1}{24}\mathbf{\Omega}_t\dot{\mathbf{\Omega}}_t + \tfrac{1}{12}\ddot{\mathbf{\Omega}}_t\Big]\Delta t^3\mathbf{q}_{t-1} + \cdots\end{aligned}$$

假设角速率在 $[t-1, t]$ 期间是恒定的，我们有 $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$，并且我们可以从 $\mathbf{\Omega}$ 的导数中预分离，将级数减少为：

$$\hat{\mathbf{q}}_t = \Bigg(\mathbf{I}_4 + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_t\Delta t + \frac{1}{2!}\Big(\frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_t\Delta t\Big)^2 + \frac{1}{3!}\Big(\frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_t\Delta t\Big)^3 + \cdots\Bigg)\mathbf{q}_{t-1}$$

注意，该级数具有矩阵指数已知的形式：

$$e^{\frac{\Delta t}{2}\mathbf{\Omega}_t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\Big(\frac{\Delta t}{2}\mathbf{\Omega}_t\Big)^k$$

在高阶或时间步长 $\Delta t \to 0$ 时，近似的误差会迅速消失。我们拥有的项数越多，我们的近似值就越好，但缺点是计算量大。对于简单的体系结构 (如嵌入式系统)，我们可以通过将序列截断为其第二项，使其成为**一阶 EKF(First Order EKF)**[2]，从而减少这种负担，并获得相当好的结果。因此，我们的**过程模型 (process model)** 缩短为：

[1]通过反复应用四元数导数的表达式，可以获得 $\mathbf{q}_n$ 的连续导数，其中 $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_n &= \tfrac{1}{2}\mathbf{q}_n\boldsymbol{\omega}_n \\ \ddot{\mathbf{q}}_n &= \tfrac{1}{4}\mathbf{q}_n\boldsymbol{\omega}_n^2 + \tfrac{1}{2}\mathbf{q}_n\dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dddot{\mathbf{q}}_n &= \tfrac{1}{6}\mathbf{q}_n\boldsymbol{\omega}_n^3 + \tfrac{1}{4}\mathbf{q}_n\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\omega}_n + \tfrac{1}{2}\mathbf{q}\boldsymbol{\omega}_n\dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \mathbf{q}_n^{i\geq 4} &= \tfrac{1}{2^i}\mathbf{q}_n\boldsymbol{\omega}_n^i + \cdots\end{aligned}$$

[2]EKF 的其他应用在第二项之后截断序列，产生第二、第三或第 n 阶 EKF。这略微提高了模型的精度，但缺点是计算量增加。

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{q}}_t &= \mathbf{f}(\mathbf{q}_{t-1}, \boldsymbol{\omega}_t) \\
&= \Big(\mathbf{I}_4 + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{\Omega}_t\Big)\mathbf{q}_{t-1} \\
\begin{bmatrix}\hat{q_w} \\ \hat{q_x} \\ \hat{q_y} \\ \hat{q_z}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}
q_w - \frac{\Delta t}{2}\omega_x q_x - \frac{\Delta t}{2}\omega_y q_y - \frac{\Delta t}{2}\omega_z q_z \\
q_x + \frac{\Delta t}{2}\omega_x q_w - \frac{\Delta t}{2}\omega_y q_z + \frac{\Delta t}{2}\omega_z q_y \\
q_y + \frac{\Delta t}{2}\omega_x q_z + \frac{\Delta t}{2}\omega_y q_w - \frac{\Delta t}{2}\omega_z q_x \\
q_z - \frac{\Delta t}{2}\omega_x q_y + \frac{\Delta t}{2}\omega_y q_x + \frac{\Delta t}{2}\omega_z q_w
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

现在，我们简单地计算 $\mathbf{F}$ 为[3]：

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{q}_{t-1}, \boldsymbol{\omega}_t) &= \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_{t-1}, \boldsymbol{\omega}_t)}{\partial \mathbf{q}} \\
&= \begin{bmatrix}\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_{t-1}, \boldsymbol{\omega}_t)}{\partial q_w} & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_{t-1}, \boldsymbol{\omega}_t)}{\partial q_x} & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_{t-1}, \boldsymbol{\omega}_t)}{\partial q_y} & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_{t-1}, \boldsymbol{\omega}_t)}{\partial q_z}\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
1 & -\frac{\Delta t}{2}\omega_x & -\frac{\Delta t}{2}\omega_y & -\frac{\Delta t}{2}\omega_z \\
\frac{\Delta t}{2}\omega_x & 1 & \frac{\Delta t}{2}\omega_z & -\frac{\Delta t}{2}\omega_y \\
\frac{\Delta t}{2}\omega_y & -\frac{\Delta t}{2}\omega_z & 1 & \frac{\Delta t}{2}\omega_x \\
\frac{\Delta t}{2}\omega_z & \frac{\Delta t}{2}\omega_y & -\frac{\Delta t}{2}\omega_x & 1
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2.1.3 过程噪声协方差

根据定义，预测误差状态协方差计算如下：

$$\hat{\mathbf{P}}_t = \mathbf{F}(\mathbf{q}_{t-1}, \boldsymbol{\omega}_t)\mathbf{P}_{t-1}\mathbf{F}(\mathbf{q}_{t-1}, \boldsymbol{\omega}_t)^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}_t$$

我们已经知道如何计算 $\mathbf{F}(\mathbf{q}_{t-1}, \boldsymbol{\omega}_t)$，但我们仍然需要计算**过程噪声协方差矩阵** (*Process Noise Covariance Matrix*) $\mathbf{Q}_t$。

预测阶段的噪声主要存在于控制输入中。因此，$\mathbf{Q}_t$ 主要来自陀螺仪。

我们定义 $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\omega}}^2 = \begin{bmatrix}\sigma_{\omega x}^2 & \sigma_{\omega y}^2 & \sigma_{\omega z}^2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 为各轴上陀螺噪声的谱密度，其标准偏差 $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\omega}}$ 被指定为标量，单位为 rad/s。

在不对 DSP 进行过多的分析的情况下，我们可以坦率地说，一个传感器的频谱密度越小，其信号的噪声就越小，并且我们会倾向于更相信它的读数。通常情况下，这些噪音已经可以在传感器制造商提供的数据表中找到。

假定陀螺仪在其轴上是同一类型的，制造商保证它们之间的完美正交性和不相关性，我们构建**频谱噪声协方差矩阵** (*spectral noise covariance matrix*) 如下：

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix}\sigma_{\boldsymbol{\omega} x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\boldsymbol{\omega} y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\boldsymbol{\omega} z}^2\end{bmatrix}$$

最简单的解决方案是假设该噪声是一致的，我们的过程噪声协方差仅为 $\mathbf{Q}_t = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\omega}}$，但在实际系统中，该协方差随角速度的变化而变化，因此每次预测都需要重新计算。

[3]在数值上，$\mathbf{F}$ 可用矩阵指数$e^{\mathbf{A}\Delta t}$ 近似。这个函数已经在多个包中大量实现，包括Scipy： `F=scipy.linalg.expm(A*Dt)`；然而，$\mathbf{f}$ 的 Jacobian 矩阵总是首选的。

我们需要知道在离散间隔 Δt 上向系统添加了多少噪声，因此，我们对间隔 $[0,\Delta t]$ 上的过程噪声进行积分

$$\mathbf{Q}_t=\int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_t}\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{\omega}}e^{\mathbf{A}_t^{\mathrm{T}}}\mathrm{d}t$$

正如我们所看到的，矩阵指数往往在计算上要求很高，所以，我们选择使用预测的 Jacobian 矩阵，但相对于角速率：

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_t &= \frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{q}_{t-1},\boldsymbol{\omega}_t)}{\partial\boldsymbol{\omega}} \\ &= \begin{bmatrix}\frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{q}_{t-1},\boldsymbol{\omega}_t)}{\partial\omega_x} & \frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{q}_{t-1},\boldsymbol{\omega}_t)}{\partial\omega_y} & \frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{q}_{t-1},\boldsymbol{\omega}_t)}{\partial\omega_z}\end{bmatrix} \\ &= \frac{\Delta t}{2}\begin{bmatrix}-q_x & -q_y & -q_z \\ q_w & -q_z & q_y \\ q_z & q_w & -q_x \\ -q_y & q_x & q_w\end{bmatrix}\end{aligned}$$

注意，这个 Jacobian 矩阵与 $\mathbf{F}$ 矩阵非常相似，但它对 $\boldsymbol{\omega}$ 有偏导数。有了噪声值和 Jacobian 矩阵 $\mathbf{W}_t$，在每个时间 t 时计算过程噪声协方差，其中：

$$\mathbf{Q}_t=\mathbf{W}_t\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{W}_t^{\mathrm{T}}$$

为方便起见，假设各轴上的噪声相等，且互不影响，产生白色、不相关且各向同性 (isotropic)的噪声[4]：

$$\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{\omega}}=\sigma_{\boldsymbol{\omega}}^2\mathbf{I}_3$$

进一步将计算简化为

$$\mathbf{Q}_t=\sigma_{\boldsymbol{\omega}}^2\mathbf{W}_t\mathbf{W}_t^{\mathrm{T}}$$

警告：陀螺仪轴的噪声方差都相等 $(\sigma_{wx}=\sigma_{wy}=\sigma_{wz})$ 的假设在现实中几乎不成立。通过仔细的建模和校准过程，可以推断出个体差异[Lam2003]。如果这三个不同的值在手边，则建议使用 $\mathbf{W}_t\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{W}_t^{\mathrm{T}}$ 计算过程噪声协方差。

最后，该模型的预测步骤将传播协方差矩阵，如下所示：

$$\hat{\mathbf{P}}_t=\mathbf{F}(\mathbf{q}_{t-1},\boldsymbol{\omega}_t)\mathbf{P}_{t-1}\mathbf{F}(\mathbf{q}_{t-1},\boldsymbol{\omega}_t)^{\mathrm{T}}+\sigma_{\boldsymbol{\omega}}^2\mathbf{W}_t\mathbf{W}_t^{\mathrm{T}}$$

2.2 校正步骤

到目前为止，陀螺仪测量已被用于预测四元数的新状态，但还有可用的加速计和磁强计读数，可用于校正估计。

从上面的方程式中我们知道，校正状态可以计算为：

$$\mathbf{q}_t=\hat{\mathbf{q}}_t+\mathbf{K}_t\big(\mathbf{z}_t-\mathbf{h}(\mathbf{q}_t)\big)$$

其中

- $\mathbf{z}_t\in\mathbb{R}^6$ 是当前测量值。

[4]三维各向同性协方差描述以原点为中心的球体，这意味着其均值和协方差矩阵在旋转时不变。在代数术语中，各向同性协方差矩阵是一个单位矩阵乘以一个标量。

- $\mathbf{h}_t \in \mathbb{R}^6$ 是预测的测量值。
- $\mathbf{K}_t \in \mathbb{R}^{4\times 6}$ 是卡尔曼增益。

提示：卡尔曼增益可以被认为是 $[0.0, 1.0]$ 范围内的一个混合值，它决定了多少新息 $\mathbf{v}_t = \mathbf{z}_t - \mathbf{h}(\mathbf{q}_t)$ 将被考虑。例如，你可以看到：

- 如果 $\mathbf{K} = 0$，则无校正：$\mathbf{q}_t = \hat{\mathbf{q}}_t$。
- 如果 $\mathbf{K} = 1$，则状态将通过所有新息项进行校正：$\mathbf{q}_t = \hat{\mathbf{q}}_t + \mathbf{v}_t$。

我们首先将测量向量定义为：

$$\mathbf{z}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_t \\ \mathbf{m}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$$

这这些都是从传感器获得的数值，其中 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ 是三轴加速度计样本，单位是 $\frac{m}{s^2}$，$\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$ 是三轴磁力计样本，单位是 μT。

它们的噪声 $\mathbf{w}_\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{w}_\mathbf{m}$ 假设为独立的白高斯噪声，其协方差分别为零均值的 $\mathbf{\Sigma}_\mathbf{a} = \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{a}^2\mathbf{I}_3$ 和 $\mathbf{\Sigma}_\mathbf{m} = \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{m}^2\mathbf{I}_3$。

然而，虽然陀螺仪给出了**传感器坐标系** (*sensor frame*) 的测量值，但加速计[5]和磁力计提供了**全局坐标系** (*global frame*) 的测量值。如果我们想校正**传感器坐标系** (*sensor frame*) 中的估计方向，我们必须表示加速计和磁力计的读数。

预测的四元数 $\hat{\mathbf{q}}_t$ 描述了传感器坐标系相对于全局坐标系的方向。出于这个原因，它将被用于旋转传感器的测量。

为了通过四元数 $\mathbf{q} \in \mathbb{H}^4$ 旋转任意向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$，我们可以使用其所表示的旋转矩阵 $\mathbf{C}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$。对于估计的四元数 $\hat{\mathbf{q}}_t$，这变成了

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{C}(\hat{\mathbf{q}})\mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} 1-2(\hat{q}_y^2+\hat{q}_z^2) & 2(\hat{q}_x\hat{q}_y-\hat{q}_w\hat{q}_z) & 2(\hat{q}_x\hat{q}_z+\hat{q}_w\hat{q}_y) \\ 2(\hat{q}_x\hat{q}_y+\hat{q}_w\hat{q}_z) & 1-2(\hat{q}_x^2+\hat{q}_z^2) & 2(\hat{q}_y\hat{q}_z-\hat{q}_w\hat{q}_x) \\ 2(\hat{q}_x\hat{q}_z-\hat{q}_w\hat{q}_y) & 2(\hat{q}_w\hat{q}_x+\hat{q}_y\hat{q}_z) & 1-2(\hat{q}_x^2+\hat{q}_y^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.2.1 全局参考坐标系

基于局部切平面，有两个主要的全局参照系：

- **NED** 分别定义了地理的**北** (*North*)、**东** (*East*) 和**地** (*Down*) 的方向的 X、Y 和 Z 轴共线。

[5]译注：此处有误。加速计提供的是传感器坐标系的测量值。原文如此，未做修改。

- **ENU** 分别定义了地理的**东** (*East*)、**北** (*North*) 和**天** (*Up*) 的方向的 X、Y 和 Z 轴共线。

全局 *NED* 坐标系中的重力加速度向量通常定义为 $\mathbf{g}_{\text{NED}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -9.81\end{bmatrix}^{\text{T}}$，其中法向加速度 $g_0 \approx 9.81\frac{m}{s^2}$，仅作用于 Z 轴[6]。对于 *ENU* 坐标系，它只是沿 Z 轴翻转符号，$\mathbf{g}_{\text{ENU}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 9.81\end{bmatrix}^{\text{T}}$。

地球磁场也用一个三维向量 $\mathbf{r} = \begin{bmatrix}r_x & r_y & r_z\end{bmatrix}^{\text{T}}$ 表示，其值指示磁流的方向。在理想情况下，只有**北方** (*North*) 分量持有一个值，产生选项 $\mathbf{r}_{\text{NED}} = \begin{bmatrix}r_x & 0 & 0\end{bmatrix}^{\text{T}}$ 或 $\mathbf{r}_{\text{ENU}} = \begin{bmatrix}0 & r_y & 0\end{bmatrix}^{\text{T}}$。

然而，地球上的地磁场是不规则的，甚至随时间而变化 (详见WMM)。通常，某些作者倾向于抛弃向东的磁性信息来定义这个参考向量，有时借助磁倾角度 θ 将其大小投影到 XY 平面，结果是 $\mathbf{r}_{\text{NED}} = \begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\end{bmatrix}^{\text{T}}$ 和 $\mathbf{r}_{\text{ENU}} = \begin{bmatrix}0 & \cos\theta & -\sin\theta\end{bmatrix}^{\text{T}}$。

从加速度和磁场来看，只需要它们的方向，而不是它们的大小。因此，我们可以使用其标准化值，将其定义简化为：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g} &= \begin{cases} \begin{bmatrix}0 & 0 & -1\end{bmatrix}^{\text{T}} & \text{if NED} \\ \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\text{T}} & \text{if ENU} \end{cases} \\
\mathbf{r} &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}} \begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\end{bmatrix}^{\text{T}} & \text{if NED} \\ \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}} \begin{bmatrix}0 & \cos\theta & -\sin\theta\end{bmatrix}^{\text{T}} & \text{if ENU} \end{cases}
\end{aligned}
$$

为了将这些向量与其相应的观测值进行比较，我们还必须将传感器的测量值**标准化 (normalize)**：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{1}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}} \begin{bmatrix}a_x & a_y & a_z\end{bmatrix}^{\text{T}} \\
\mathbf{m} &= \frac{1}{\sqrt{m_x^2+m_y^2+m_z^2}} \begin{bmatrix}m_x & m_y & m_z\end{bmatrix}^{\text{T}}
\end{aligned}
$$

2.2.2 测量模型

传感器坐标系中的**期望** (*expected*) 重力加速度 $\hat{\mathbf{a}}$ 可根据**估计方向** (*estimated orientation*) 进行估计：

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{C}(\hat{\mathbf{q}})^{\text{T}}\mathbf{g}$$

同样，传感器坐标系中的**期望磁场** (*expected magnetic field*) $\hat{\mathbf{m}}$ 为：

$$\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{C}(\hat{\mathbf{q}})^{\text{T}}\mathbf{r}$$

测量模型 $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{q}}_t)$ 及其 Jacobian 矩阵 $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{q}}_t)$ 可用于校正预测模型。**测量模型** (*Measurement model*) 通过这些变换直接定义为：

[6]正常重力的大小也随地球上的位置而变化。简单的模型只考虑纬度和海平面上的高度来估计这个量级。为便于分析，给出了 9.81 的通用值。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{h}(\hat{\mathbf{q}}_t) &= \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{m}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{C}(\hat{\mathbf{q}})^{\mathrm{T}}\mathbf{g} \\ \mathbf{C}(\hat{\mathbf{q}})^{\mathrm{T}}\mathbf{r}\end{bmatrix} \\
&= 2\begin{bmatrix}
g_x(\frac{1}{2} - q_y^2 - q_z^2) + g_y(q_wq_z + q_xq_y) + g_z(q_xq_z - q_wq_y) \\
g_x(q_xq_y - q_wq_z) + g_y(\frac{1}{2} - q_x^2 - q_z^2) + g_z(q_wq_x + q_yq_z) \\
g_x(q_wq_y + q_xq_z) + g_y(q_yq_z - q_wq_x) + g_z(\frac{1}{2} - q_x^2 - q_y^2) \\
r_x(\frac{1}{2} - q_y^2 - q_z^2) + r_y(q_wq_z + q_xq_y) + r_z(q_xq_z - q_wq_y) \\
r_x(q_xq_y - q_wq_z) + r_y(\frac{1}{2} - q_x^2 - q_z^2) + r_z(q_wq_x + q_yq_z) \\
r_x(q_wq_y + q_xq_z) + r_y(q_yq_z - q_wq_x) + r_z(\frac{1}{2} - q_x^2 - q_y^2)
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

测量方程是非线性的，因此必须计算其 Jacobian 矩阵，如下所示：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}(\hat{\mathbf{q}}_t) &= \frac{\partial\mathbf{h}(\hat{\mathbf{q}}_t)}{\partial\mathbf{q}} \\
&= \begin{bmatrix}\frac{\partial\mathbf{h}(\hat{\mathbf{q}}_t)}{\partial q_w} & \frac{\partial\mathbf{h}(\hat{\mathbf{q}}_t)}{\partial q_x} & \frac{\partial\mathbf{h}(\hat{\mathbf{q}}_t)}{\partial q_y} & \frac{\partial\mathbf{h}(\hat{\mathbf{q}}_t)}{\partial q_z}\end{bmatrix} \\
&= 2\begin{bmatrix}
g_yq_z - g_zq_y & g_yq_y + g_zq_z & -2g_xq_y + g_yq_x - g_zq_w & -2g_xq_z + g_yq_w + g_zq_x \\
-g_xq_z + g_zq_x & g_xq_y - 2g_yq_x + g_zq_w & g_xq_x + g_zq_z & -g_xq_w - 2g_yq_z + g_zq_y \\
g_xq_y - g_yq_x & g_xq_z - g_yq_w - 2g_zq_x & g_xq_w + g_yq_z - 2g_zq_y & g_xq_x + g_yq_y \\
r_yq_z - r_zq_y & r_yq_y + r_zq_z & -2r_xq_y + r_yq_x - r_zq_w & -2r_xq_z + r_yq_w + r_zq_x \\
-r_xq_z + r_zq_x & r_xq_y - 2r_yq_x + r_zq_w & r_xq_x + r_zq_z & -r_xq_w - 2r_yq_z + r_zq_y \\
r_xq_y - r_yq_x & r_xq_z - r_yq_w - 2r_zq_x & r_xq_w + r_yq_z - 2r_zq_y & r_xq_x + r_yq_y
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

该 Jacobian 矩阵可以重构为：

$$
\mathbf{H}(\hat{\mathbf{q}}_t) = \begin{bmatrix}\frac{\partial\hat{\mathbf{a}}}{\partial\mathbf{q}} \\ \frac{\partial\hat{\mathbf{m}}}{\partial\mathbf{q}}\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}\mathbf{u}_g & \lfloor\mathbf{u}_g + \hat{q}_w\mathbf{g}\rfloor_\times + (\hat{\mathbf{q}}_v\cdot\mathbf{g})\mathbf{I}_3 - \mathbf{g}\hat{\mathbf{q}}_v^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{u}_r & \lfloor\mathbf{u}_r + \hat{q}_w\mathbf{r}\rfloor_\times + (\hat{\mathbf{q}}_v\cdot\mathbf{r})\mathbf{I}_3 - \mathbf{r}\hat{\mathbf{q}}_v^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_g &= \lfloor\mathbf{g}\rfloor_\times\hat{\mathbf{q}}_v = \mathbf{g}\times\hat{\mathbf{q}}_v \\
\mathbf{u}_r &= \lfloor\mathbf{r}\rfloor_\times\hat{\mathbf{q}}_v = \mathbf{r}\times\hat{\mathbf{q}}_v
\end{aligned}
$$

测量噪声协方差矩阵，$\mathbf{R}\in\mathbb{R}^{6\times6}$，直接表示为影响每个传感器的测量噪声的统计数据[Sabatini 2011]。传感器噪声被视为不相关的和各向同性噪声，从而产生一个对角矩阵：

$$
\mathbf{R} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{a}}^2\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{m}}^2\mathbf{I}_3\end{bmatrix}
$$

这个定义允许我们获得 $\mathbf{P}_t$ 的简单表达式。校正步骤中的其余 EKF 元素按照最初定义获得：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_t &= \mathbf{z}_t - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{q}}_t) \\
\mathbf{S}_t &= \mathbf{H}(\hat{\mathbf{q}}_t)\hat{\mathbf{P}}_t\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\hat{\mathbf{q}}_t) + \mathbf{R} \\
\mathbf{K}_t &= \hat{\mathbf{P}}_t\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\hat{\mathbf{q}}_t)\mathbf{S}_t^{-1}
\end{aligned}
$$

最后，使用以下公式计算时间 t 时的校正状态 (四元数) 及其协方差：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_t &= \hat{\mathbf{q}}_t + \mathbf{K}_t \mathbf{v}_t \\
\mathbf{P}_t &= \big(\mathbf{I}_4 - \mathbf{K}_t \mathbf{H}(\hat{\mathbf{q}}_t)\big)\hat{\mathbf{P}}_t
\end{aligned}
$$

EKF 不是一个最优估计器，可能会因不正确的模型而迅速发散。问题的根源在于四元数的四个分量缺乏独立性，因为它们由单位范数约束关联。最简单的解决方案是规范化已校正的状态。

$$\mathbf{q}_t \leftarrow \frac{1}{\|\mathbf{q}_t\|}\mathbf{q}_t$$

尽管这种计算最终四元数的“蛮力”方法既不优雅也不最优，但事实证明，这种方法通常效果良好[Sabatini2011]。

2.3 初始值

EKF 状态向量表示四元数，我们必须提供对应于有效四元数的适当初始状态 $\mathbf{q}_0$。这意味着，初始状态必须有一个等于 1 的范数 ($\|\mathbf{q}_0\| = 1$)

为了估计初始方向，使用了一种简单的电子罗盘方法，该方法需要在静止状态下对三轴加速计和三轴磁强计进行单次观测。

与TRIAD类似，只需对两个传感器进行一次观测即可估计方向。这种估计的旋转矩阵 $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 的计算方法是：

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix}(\mathbf{a}_0 \times \mathbf{m}_0) \times \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_0 \times \mathbf{m}_0 & \mathbf{a}_0\end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{a}_0$ 和 $\mathbf{m}_0$ 为加速计和磁强计测量值。这个旋转矩阵的每一列都应该被归一化。然后，我们用[Chiaverini]得到初始四元数：

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix}
\frac{1}{2}\sqrt{c_{11}+c_{22}+c_{33}+1} \\
\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(c_{32}-c_{23})\sqrt{c_{11}-c_{22}-c_{33}+1} \\
\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(c_{13}-c_{31})\sqrt{c_{22}-c_{33}-c_{11}+1} \\
\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(c_{21}-c_{12})\sqrt{c_{33}-c_{11}-c_{22}+1}
\end{bmatrix}$$

初始状态协方差矩阵 $\mathbf{P}_0$ 被设置为等于 4×4 单位矩阵 $\mathbf{I}_4$。

还应提供适当的 $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\omega}}^2$、$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{a}}^2$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{m}}^2$ 值。这些值通常可以在每个传感器的数据表中找到。加速计和磁强计的测量噪声方差值增加，从而赋予滤波器预测更多的权重。对于我们的情况，默认值为：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\omega}}^2 &= 0.3^2 \\
\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{a}}^2 &= 0.5^2 \\
\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{m}}^2 &= 0.8^2
\end{aligned}
$$

3 最后说明

这里描述和实现的模型不考虑信号中的任何偏差，也可以添加到要动态计算的状态向量。但是，为了提供一个简单的 EKF，省略了这个额外的分析。因此，给定的传感器信号被认为已经校准。

也不考虑磁干扰的补偿。假设磁强计已在使用环境中校准，因此缩放和偏差误差也被忽略。

该类的模块化允许在估计中进行可伸缩性。例如，如果需要，可以通过简单地设置属性 q 来扩展状态向量 (及其协方差) 以包含偏差项。

4 参考文献

- [Kalman1960] Rudolf Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. 1960.
- [Hartikainen2011] J. Hartikainen, A. Solin and S. Särkkä. Optimal Filtering with Kalman Filters and Smoothers. 2011
- [Sabatini2011] Sabatini, A.M. Kalman-Filter-Based Orientation Determination Using Inertial/Magnetic Sensors: Observability Analysis and Performance Evaluation. Sensors 2011, 11, 9182-9206. (`https://www.mdpi.com/1424-8220/11/10/9182`)
- [Labbe2015] Roger R. Labbe Jr. Kalman and Bayesian Filters in Python. (`https://github.com/rlabbe/Kalman-and-Bayesian-Filters-in-Python`)
- [Lam2003] Lam, Quang & Stamatakos, Nick & Woodruff, Craig & Ashton, Sandy. Gyro Modeling and Estimation of Its Random Noise Sources. AAIA 2003. DOI: 10.2514/6.2003-5562. (`https://www.researchgate.net/publication/268554081`)