

用于 GPS 缺失时可观测的导航相对乘性扩展卡尔曼滤波

Daniel P Koch, David O Wheeler, Randal W Beard, Timothy W McLain, Kevin M Brink

August 1, 2020

摘要

本文提出了一种乘性扩展 Kalman 滤波 (multiplicative extended Kalman filter, MEKF), 用于估计在 GPS 缺失环境下运行的多旋翼飞行器的相对状态。该滤波器将来自惯性测量单元和高度计的数据, 与相对位姿更新数据, 该数据来自基于关键帧的视觉里程计或激光扫描匹配算法, 进行融合。由于车辆的全局位置和航向状态在没有 GPS 等全局测量的情况下是不可观测的, 因此本文中的滤波器估计的是相对于与里程计关键帧共同定位的局部帧的状态。因此, 里程计更新提供了对于相对车辆位姿几乎是直接的测量, 使得这些状态可观测。最近的出版物严格记录了这种可观测参数化的理论优势, 包括改进的一致性、准确性和系统鲁棒性, 并在长时间的多旋翼飞行试验中证明了这种方法的有效性。本文通过提供一个完整的、自包含的、相关 MEKF 的教程式的推导来补充以前的工作, 这个推导已经得到了充分的激发, 但到目前为止只有简单的描述。本文介绍了对滤波器的一些改进和扩展, 同时清楚地定义了所使用的所有四元数约定和属性, 包括与误差四元数及其欧拉角分解有关的一些新的有用属性。最后, 本文推导的滤波器, 既可用于相对于惯性坐标系定义的传统动力学, 也可用于相对于机体坐标系定义的机器人中心动力学, 本文并对这两套公式之间产生的细微差异进行了深入的分析。

1 简介

小型无人机系统 (UAS) 在 GPS 缺失环境下导航是一个活跃而丰富的研究领域, 具有重要的实际应用, 如基础设施检查和安全。大多数无人机系统将 GPS 与加速计和速率陀螺数据融合, 以提供适合于反馈控制的精确全局状态估计。但是, 当 GPS 不可用时, 需要额外的传感器, 如照相机或激光雷达。由于尺寸、重量和功率限制以及与小无人机相关的快速车辆动力学, 许多此类系统采用基于滤波的估计技术来整合这些附加传感器, 而不是传统的完全的同步定位和建图 (SLAM) 算法。基于滤波器的方法在计算上是高效的, 并能确保控制所需的平滑、及时的状态估计。

在没有 GPS 更新的情况下, 许多滤波方法利用来自视觉里程计或激光扫描匹配的增量里程计测量。这些里程测量可以逐帧计算, 或者可以针对同一**关键帧** (*keyframe*) 图像或扫描计算多个测量。当与当前图像或扫描的重叠不足以计算可靠的里程测量值时, 关键帧图像或扫描将被更新。基于关键帧的方法具有减少里程测量中时间漂移的优势 (Leutenegger 等人, 2015[24])。

尽管只有增量测量可用, 大多数 GPS 缺失导航方法直接估计车辆相对于某些固定原点的全局位姿。然而, 如果没有全局位置测量, 车辆的全局位姿和航向是不可观测的 (Martinelli, 2012[26]; Weiss 等人, 2012[35]; Jones 等人, 2007[15])。因此, 全局滤波器可能会受到不一致和无界的状态不确定性、在应用相对测量时的不稳定状态跳跃的影响, 以及无法直接应用间歇性的全局信息而不引起大的状态跳跃 (Julier 和 Uhlmann, 2001[16]; Bailey 和 Durrant-Whyte, 2006[2]; Kottas 等人, 2013[18]; Wheeler 等人, 2018[38])。相比之下, 相对导航方法仅估计车辆相对于最新里程计关键帧定位的相对状态 (Leishman 等人, 2014b[23])。因此, 里程计提供了位置和航向状态的直接测

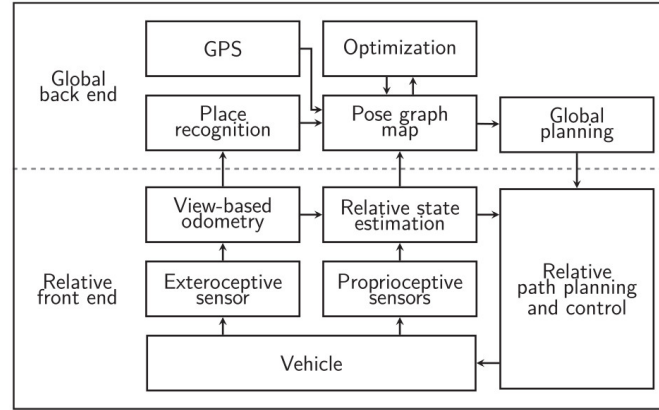


图 1: 通用相对导航系统结构框图。飞行临界估计和控制相对于一个局部坐标系进行。Wheeler 等人 (2020)[37] 对该框架进行了更详细的描述。

量，使它们在结构上可被观测，从而确保一致和有界的状态估计。每次声明一个新的关键帧时，当前状态和协方差估计都会传递给后端地图，后端地图将它们连接为位姿图中的边，以重建车辆的全局路径。然后将滤波器中的位置和航向状态重置为零并继续估计。相关的导航架构如图 1 所示，与 SLAM 文献中的观点相类似 (Chong 和 Kleeman, 1999[12]; Kim 等人, 2010[17])。

最近的模拟结果表明，使用相对导航框架来确保可观测性，在估计的相对和全局状态的一致性方面提供了显著的优势，并且在合并间歇性全局信息时，在精度和系统鲁棒性方面也有一些改进 (Wheeler 等人, 2018[38])。此外，最近的多旋翼硬件飞行试验结果已经证明了相对导航对于小型无人机长期 GPS 降级导航的有效性 (Wheeler 等人, 2020[37])。本文对 Wheeler 等人 (2018)[38] 和 Wheeler 等人 (2020)[37] 的工作进行了补充，提供了这些论文中使用的相对状态估计滤波器的完整、自包含的教程推导，以获得硬件结果。虽然这些论文为相对导航方法提供了充分的理论和实践依据，但到目前为止，核心的相对估计器组件本身仅在文献中作了简要描述。

本文旨在填补这一空白。Wheeler 等人 (2018)[38] 和 Wheeler 等人 (2020)[37] 提出的飞行试验成功地利用了本文提出的相对乘性扩展 Kalman 滤波器 (relative multiplicative extended Kalman filter, RMEKF)。虽然这项工作证明了相对导航框架的有效性，并对各个组成部分进行了概述，但它并没有详细描述 RMEKF。RMEKF 建立在乘性扩展 Kalman 滤波器 (multiplicative extended Kalman filter, MEKF) 的基础上，它使用四元数表示姿态，用四元数乘法来定义姿态误差。RMEKF 扩展了 MEKF，将 UAS 状态定义为相对于与当前关键帧图像相关联的局部坐标帧。为了适应这种相对状态，RMEKF 引入了一个额外的**关键帧重置** (*keyframe reset*) 步骤，该步骤在每次声明新关键帧时应用。

本文从三个方面对该文献做出了贡献。首先，本文提供了一个用于无人机系统状态估计的 MEKF 的教程推导，该推导给出了 Hamilton 四元数。其次，本文对多旋翼无人机的 RMEKF 进行了完整推导，包括对 Leishman 和 McLain(2014)[22] 最初陈述的几个重要扩展。第三，本文对惯性和机体固连 (机器人中心, robocentric) 的状态表示的 RMEKF 进行了全面推导，强调了这两种方法之间存在的细微但重要的差异。以下段落将进一步详细描述这些贡献，并将它们与现有文献进行比较。

MEKF 教程。 本文的重要部分都是教程性质的，清楚地说明了当用四元数表示姿态时，为什么需要一个间接或误差状态公式，并对推导滤波方程的每一步都提供了完整的解释。MEKF 最早由 Lefferts 等人 (1982)[20] 提出，并且 MEKF 实现的几个深入讨论和推导已经发表 (Markley, 2003[25]; Sola, 2016[32]; Trawny 和 Roumeliotis, 2005[34])。其中一些有价值的出版物的范围与当前的工作类似，但本文提供了几个有意义的扩展。首先，本文推导了无人机完全状态 (位置、速度、姿态、加速计偏差和陀螺仪偏差) 的估计器，而之前类似范围的大多数 MEKF 论文只关注姿态和偏差的估计。Sola(2016)[32] 确实推导出了一个完全的 MEKF 状态，但本文为一组独特的传播和测量模型提供了推导。其次，本文使用 Hamilton 四元数约定推导 MEKF，而不是在其它一些著作中使用 JPL 约定。虽然四元数约定的选择并不能从根本上改变问题，但是 Hamilton 四元数在机器人学文献中被普遍使用，并且这就出现了微妙但重要的差异。本文提供了一个对比性视角，以帮助加深对四元数的理解，并旨在澄清由于不同作品中使用的不同约定 (这些约定并不总是明确定义) 而可能产生的一些混淆。第三，本文的教程性质为推导与四元数、其四元数的误差表示和四元数的欧拉角分解有关的几个新特性提供了足够的背景。这些特性在 RMEKF 的推导中起着关键作用，以允许部分姿态更新。

RMEKF 推导。 本文的另一个目的是对 Wheeler 等人 (2020)[37] 成功使用的 RMEKF 估计器进行全面推导，该估计器用于 GPS 降级环境中的无人机长时间导航。本文介绍的 RMEKF 以几个重要的方式扩展了 Leishman 和 McLain(2014)[22] 最初的 RMEKF 推导，这些方式已被证明是长时间飞行所必需的。首先，本文提出了一种新的视觉里程测量模型，即激光扫描匹配测量模型和关键帧重置操作，它们一起确保了在 GPS 缺失的环境下，车辆的状态保持可观测。其次，推导了误差四元数的一些新性质，这些性质使得四元数状态及其协方差能够部分更新。第三，本文在状态向量中添加了新的项，以正确解释在声明关键帧时车辆的横滚、俯仰和高度的不确定性。最后，更小的差异包括求逆里程测量模型的方向，以避免不必要地将航向不确定性耦合到更新中，以及估计车辆距地全局高度，而不是将高度视为相对状态。

惯性和机体固连动力学。 本文的另一个独特贡献是，当状态是相对于惯性系或机体固连的机器人中心系来定义的时候，推导了 RMEKF。传统上，车辆动力学表达为惯性固连、重力对齐的坐标系 (参见 Leishman 等人 (2014b)[23] 以及 Leishman 和 McLain(2014)[22])。这是合理的，尤其是当传感器是惯性传感器，如 GPS。然而，当使用机器人中心传感器时，例如照相机和激光测距仪，在机器人中心系中表达动力学通常更自然，而且当只需要相对状态时，可以帮助解决 EKF-SLAM 的一些不一致问题 (Bloesch 等人, 2015[6]; Castellanos 等人, 2007[10])。本文的一个相关贡献是介绍了使用惯性参考系和机器人中心参考系之间的细微差异。这些差异可能会导致目前尚不存在的并列比较的文献出现混乱。例如，除了动力学的变化外，四元数积分、误差状态定义、测量模型和关键帧重置操作中也会出现细微的变化。通过并排介绍这两个公式，可以清楚地解释这些差异。

本文的最后贡献是对滤波器和所有相关四元数特性的完整、自包含的推导。四元数和误差状态的定义在当前的估计文献中有细微的不同。当这些定义没有被彻底记录下来时，就很难正确利用来自多个来源的特性。由于本文的教程性质和一步一步的解释，本文旨在提出一个完整的，自包含的推导，相对于一个一致的，明确的定义。这使得读者能够理解、实现并可能修改 RMEKF，以用于新的车辆或应用程序。请注意，虽然关键帧重置步骤和几个测量模型特定于相对导航，但传播方程和一般滤波器结构同样适用于其它应用，例如 GPS/惯性导航系统 (inertial navigation system, INS) 导航。

第 2 节总结了整篇文章中使用的符号。第 3 节概述了本文中使用的四元数定义。具体来说,第 3.8 节推导了误差四元数的几个相关的新性质。第 4 节概述了 MEKF 的结构。关键帧重置步骤在第 5 节中描述,并且给出了完整 RMEKF 算法的概述。第 6 节推导了惯性相对导航 (inertial relative navigation, iRN) 的具体滤波方程,第 7 节推导了机体固连的机器人中心相对导航 (robocentric relative navigation, bRN) 的滤波方程。最后,第 8 节和第 9 节分别给出了实验结果和结论。

2 术语表

下面的变量、算子和符号在本文中都有定义和动机,为了方便起见,在这里进行了总结。设 \mathcal{B} 表示车辆机体坐标系, \mathcal{I} 表示惯性坐标系。

状态变量

\mathbf{x}	状态
\mathbf{x}_v	状态的向量分量
\mathbf{x}_q	状态的四元数分量
${}^c\mathbf{p}_a^b$	b 相对于 a 的位置,用 c 表示
\mathbf{p}_a^b	b 相对于 a 的位置,用 a 表示
\mathbf{q}_a^b	从 a 到 b 旋转的四元数
\mathbf{v}	\mathcal{B} 相对于 \mathcal{I} 的速度,用 $\mathcal{B}(\mathbf{v} \triangleq {}^{\mathcal{B}}\mathbf{v}_{\mathcal{I}}^{\mathcal{B}})$ 表示
$\boldsymbol{\omega}$	\mathcal{B} 相对于 \mathcal{I} 的角速度,用 $\mathcal{B}(\boldsymbol{\omega} \triangleq {}^{\mathcal{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}}^{\mathcal{B}})$ 表示
\mathbf{a}	\mathcal{B} 相对于 \mathcal{I} 的加速度,用 $\mathcal{B}(\mathbf{a} \triangleq {}^{\mathcal{B}}\mathbf{a}_{\mathcal{I}}^{\mathcal{B}})$ 表示
β_{ω}	速率陀螺偏差,用 \mathcal{B} 表示
β_a	加速计偏压,用 \mathcal{B} 表示
μ	特定的线性阻力系数
$\boldsymbol{\eta}$	零均值高斯过程噪声
$\boldsymbol{\nu}$	零均值高斯输入噪声

误差状态变量

$\delta\mathbf{x}$	误差状态
$\delta\mathbf{x}_v$	误差状态的向量分量
$\delta\mathbf{x}_{\theta}$	误差状态的姿态分量
$\delta\mathbf{p}$	位置误差状态
$\delta\mathbf{q}$	四元数误差状态
$\delta\boldsymbol{\theta}$	姿态误差状态 (最小表示)

滤波器变量

\mathbf{u}	输入
\mathbf{z}	测量
\mathbf{r}	测量残差
\mathbf{P}	状态协方差矩阵

\mathbf{Q}	过程噪声协方差矩阵
\mathbf{R}	测量噪声协方差矩阵
\mathbf{S}	残差协方差矩阵
\mathbf{K}	Kalman 增益
\mathbf{F}, \mathbf{G}	传播 Jacobian 矩阵
\mathbf{H}	测量 Jacobian 矩阵
\mathbf{N}	关键帧重置 Jacobian 矩阵
\mathbf{N}_p	位置重置 Jacobian 矩阵
\mathbf{N}_θ	姿态重置 Jacobian 矩阵

算子

\otimes	四元数乘法 (Hamilton)
$[\cdot]$	斜对称矩阵
$(\cdot)^\wedge$	从向量到四元数的映射
$(\cdot)^\vee$	从四元数到向量的映射
$E[\cdot]$	期望值
$\mathbf{R}[\mathbf{q}]$	与 \mathbf{q} 相关的旋转矩阵

其它

$\hat{\mathbf{y}}$	\mathbf{y} 的估计值 (或期望值)
$\tilde{\mathbf{y}}$	\mathbf{y} 的测量值
$\dot{\mathbf{y}}$	\mathbf{y} 的时间导数
\mathbf{y}^+	\mathbf{y} 的后验 (<i>posteriori</i>) 值
\mathbf{k}	单位向量 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$
$\mathbf{I}_{a \times b}$	在 $\mathbb{R}^{a \times b}$ 中的单位矩阵
$\Pi_{\mathbf{k}}$	投影矩阵 $\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{k}\mathbf{k}^\top$
\mathbf{g}	重力向量 $g\mathbf{k}$

3 四元数特性

四元数是表示姿态的常用方法，因为与其它方法相比，四元数的计算效率和精度都有所提高 (Casey 等人, 2013[9])。四元数及其相关操作存在各种定义，导致了细微的差异和潜在的混淆。Sola(2016)[32] 更详细地描述了各种方法，包括左手与右手四元数乘法、主动与被动表示、局部到全局与全局到局部姿态方向以及四元数排序。本节明确地建立了本文中使用的定义和符号，并另外推导了滤波器推导所需的几个特性。本节不是对四元数的完整介绍，而是对相关要点的总结。

3.1 四元数约定

四元数 $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ 是由标量和向量部分组成的秩为 4 的超复数

$$\mathbf{q} = q_0 + q_x i + q_y j + q_z k.$$

我们使用 Hamilton 对四元数的定义，为

$$\begin{aligned} ij &= -ji = k, \\ jk &= -kj = i, \\ ki &= -ik = j, \\ i^2 &= j^2 = k^2 = ijk = -1. \end{aligned} \quad (1)$$

为便于记述，我们将四元数的向量部分定义为

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} q_x & q_y & q_z \end{bmatrix}^\top,$$

并将四元数写为

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ q_0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

四元数乘法用 \otimes 算子表示，并根据方程 (1) 中的规则和标准代数乘法进行。使用方程 (2) 中的符号，四元数乘法可以写成矩阵乘法，根据

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_0 \mathbf{I} + [\bar{\mathbf{p}}] & \bar{\mathbf{p}} \\ -\bar{\mathbf{p}}^\top & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ q_0 \end{bmatrix}, \quad (3a)$$

$$= \begin{bmatrix} q_0 \mathbf{I} - [\bar{\mathbf{q}}] & \bar{\mathbf{q}} \\ -\bar{\mathbf{q}}^\top & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}} \\ p_0 \end{bmatrix}, \quad (3b)$$

其中算子 $[\cdot]$ 是斜对称算子

$$[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

所以， $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}] \mathbf{b}$ 。斜对称算子的特性是

$$[\mathbf{a}] \mathbf{b} = -[\mathbf{b}] \mathbf{a}. \quad (4)$$

四元数 \mathbf{q} 的共轭值用 \mathbf{q}^* 表示，它等于 \mathbf{q} ，但向量部分的元素取反。四元数的逆值由下式给出

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|}.$$

本文中使用的四元数都表示旋转，也就是**单位四元数** (*unit quaternions*)，这意味着它们的范数是 1。因此，对于单位四元数，我们有

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{q}} \\ q_0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

将两个四元数的乘积求逆，则与每个四元数的其逆的乘积的顺序相反，如下所示：

$$(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q})^{-1} = \mathbf{q}^{-1} \otimes \mathbf{p}^{-1}.$$

3.2 向量旋转

在本文中，四元数是被动表示的，这意味着它们表示了在不同坐标系中表示向量所需的旋转。让四元数 \mathbf{q}_a^b 表示从帧 a 到帧 b 的旋转，让 ${}^a\mathbf{y}$ 表示在帧 a 中表示的向量。正如 Kuipers(1999)[19] 所描述的， ${}^a\mathbf{y}$ 可以用四元数共轭操作表示在 b 帧中的向量

$$\begin{bmatrix} {}^b\mathbf{y} \\ 0 \end{bmatrix} = (\mathbf{q}_a^b)^{-1} \otimes \begin{bmatrix} {}^a\mathbf{y} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_a^b. \quad (6)$$

项 $\begin{bmatrix} {}^a\mathbf{y}^\top & 0 \end{bmatrix}^\top$ 被称为由 ${}^a\mathbf{y}$ 构造的**纯虚四元数** (*pure quaternion*)。

定义一个等价的旋转矩阵 $\mathbf{R}(\mathbf{q})$ 是很方便的，如

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{q})\mathbf{y} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{q}^{-1} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}. \quad (7)$$

对于 $\mathbf{R}(\mathbf{q})$ 的表达式可以根据方程 (5)、(3a) 和 (3b) 展开方程 (7) 的右手侧推导出来，如下所示：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{q})\mathbf{y} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} q_0\mathbf{I} - [\bar{\mathbf{q}}] & -\bar{\mathbf{q}} \\ \bar{\mathbf{q}}^\top & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q} \\ &= \begin{bmatrix} q_0\mathbf{y} - [\bar{\mathbf{q}}]\mathbf{y} \\ \bar{\mathbf{q}}^\top\mathbf{y} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q} \\ &= \begin{bmatrix} q_0\mathbf{I} - [\bar{\mathbf{q}}] & \bar{\mathbf{q}} \\ -\bar{\mathbf{q}}^\top & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0\mathbf{y} - [\bar{\mathbf{q}}]\mathbf{y} \\ \bar{\mathbf{q}}^\top\mathbf{y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (q_0^2\mathbf{I} - 2q_0[\bar{\mathbf{q}}] + \bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}^\top + [\bar{\mathbf{q}}]^2)\mathbf{y} \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

这意味着

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = q_0^2\mathbf{I} - 2q_0[\bar{\mathbf{q}}] + \bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}^\top + [\bar{\mathbf{q}}]^2.$$

然而，可以证明

$$[\bar{\mathbf{q}}]^2 = \bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}^\top - (1 - q_0^2)\mathbf{I},$$

所以

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = (2q_0^2 - 1)\mathbf{I} - 2q_0[\bar{\mathbf{q}}] + 2\bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}^\top. \quad (9)$$

旋转矩阵具有以下特性：

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{q}_a^b) &= \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_a^b) = \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^a) \\
\mathbf{R}(\mathbf{q}_a^c) &= \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\mathbf{q}_a^b) \\
\det(\mathbf{R}(\mathbf{q})) &= 1.
\end{aligned} \tag{10}$$

方程 (6) 中的向量旋转公式可以用来推导出两个旋转的组合方式。如果 \mathbf{q}_a^b 定义了从帧 a 到帧 b 的旋转, \mathbf{q}_b^c 定义了从帧 b 到帧 c 的旋转, 那么要把一个在帧 a 中表示的向量在帧 c 中表示, 我们有

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} {}^c\mathbf{y} \\ 0 \end{bmatrix} &= (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes \begin{bmatrix} {}^b\mathbf{y} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_b^c \\
&= (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes \left((\mathbf{q}_a^b)^{-1} \otimes \begin{bmatrix} {}^a\mathbf{y} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_a^b \right) \otimes \mathbf{q}_b^c \\
&= (\mathbf{q}_a^b \otimes \mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes \begin{bmatrix} {}^a\mathbf{y} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes (\mathbf{q}_a^b \otimes \mathbf{q}_b^c).
\end{aligned}$$

因此, 我们的结论是

$$\mathbf{q}_a^c = \mathbf{q}_a^b \otimes \mathbf{q}_b^c. \tag{11}$$

比较方程 (10) 和 (11), 我们看到旋转矩阵和四元数的组合顺序相反。

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}_a^b \otimes \mathbf{q}_b^c) = \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\mathbf{q}_a^b). \tag{12}$$

当四元数共轭操作应用于不是纯虚四元数的四元数时, 可以重复方程 (8) 的分析过程以显示

$$\mathbf{q}^{-1} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{p}} \\ p_0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

对于由方程 (9) 定义的相同旋转矩阵 $\mathbf{R}(\mathbf{q})$ 。该操作的结果是 \mathbf{p} 的向量部分的基被 \mathbf{q} 定义的旋转矩阵所旋转。当根据四元数的轴角表示来解释四元数时, 此属性非常有用, 并且需要在不同的坐标系中表示轴向量。这出现在本文中的一些测量模型和 Jacobian 矩阵的推导中。

3.3 单位球面传播

姿态用单位长度的四元数表示。单位四元数并不构成一个向量空间, 而是在单位球面 $S^3 \subset \mathbb{H}$ 上形成一个群。群算子是四元数乘法, 单位四元数群给出了旋转群 $SO(3)$ 的双倍覆盖参数化。

将单位四元数乘以非单位四元数将使乘积四元数离开单位球面。将产生的四元数归一化, 根据

$$\mathbf{q} \leftarrow \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$$

将使乘积四元数返回到单位球面, 但会引入线性化误差。

要沿着流形正确地旋转一个四元数, 必须用一个单位四元数来表示该旋转。旋转可以用单位四元数表示为

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中, $\hat{\mathbf{e}}$ 是定义旋转轴的单位向量, θ 是绕该轴旋转的角度。令 $\boldsymbol{\theta} \triangleq \theta \hat{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^3$ 定义旋转的大小和方向。从这个 3 参数向量旋转参数化到四元数的映射用算子 $^\wedge: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}$ 表示, 逆映射用算子 $^\vee: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 表示。这个 $^\wedge$ 算子用方程 (14) 定义为

$$\boldsymbol{\theta}^\wedge \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{\theta}}{\|\boldsymbol{\theta}\|} \sin \frac{\|\boldsymbol{\theta}\|}{2} \\ \cos \frac{\|\boldsymbol{\theta}\|}{2} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

将一个四元数 \mathbf{q} 沿单位球面旋转 $\boldsymbol{\theta}$ 即为 $\mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\theta}^\wedge$ 。这类似于符号 $\mathbf{q} \boxplus \boldsymbol{\theta}$ 和 $\mathbf{q} \otimes \exp\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right)$, 参见估计文献 (Hertzberg 等人, 2013[14])。这个 $^\vee$ 算子定义为

$$\mathbf{q}^\vee \triangleq 2 \operatorname{atan2}(\|\bar{\mathbf{q}}\|, q_0) \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\bar{\mathbf{q}}\|}. \quad (16)$$

提取 \mathbf{q}_a 和 \mathbf{q}_b 之间的基本旋转是通过 $(\mathbf{q}_a \otimes (\mathbf{q}_b)^{-1})^\vee$ 完成的。这类似于符号 $\log(\mathbf{q}_a \boxminus \mathbf{q}_b)$, 参见估计文献 (Hertzberg 等人, 2013[14])。做为逆映射, 可以证明 $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}^\wedge)^\vee$ 和 $\mathbf{q} = (\mathbf{q}^\vee)^\wedge$ 。

当 $\|\boldsymbol{\theta}\|$ 等于零时, 方程 (15) 是未定义的, 并且在实践中, 当 $\|\boldsymbol{\theta}\|$ 接近零时, 该方程在数值上变得不稳定。对于小角度 $\delta\boldsymbol{\theta}$, 有一些常见的方程 (15) 的近似, 例如二阶 Gibbs 向量参数化 (Markley, 2003[25])

$$\delta\boldsymbol{\theta}^\wedge \approx \frac{1}{\sqrt{4 + \delta\boldsymbol{\theta}^\top \delta\boldsymbol{\theta}}} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\theta} \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

方程 (15) 和 (17) 两者的一阶近似为

$$\delta\boldsymbol{\theta}^\wedge \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

这在推导一阶 Jacobian 矩阵时很有用。方程 (16) 对于小的四元数 $\delta\mathbf{q}$ 同样可以近似为

$$\delta\mathbf{q}^\vee \approx 2 \operatorname{sign}(\delta q_0) \delta\bar{\mathbf{q}}. \quad (19)$$

3.4 时间积分

可以使用几种方法对表示刚体姿态的四元数进行数值积分。数值积分是在一个有限的时间步长 Δt 上进行的, 并受机体相对于惯性坐标系的角速度所支配, 在机体坐标系中表示为 $\boldsymbol{\omega} \triangleq {}^B\boldsymbol{\omega}_T^B$ 。设 $\mathbf{q}_{\Delta t}$ 为增量四元数, $\boldsymbol{\omega}_0$ 为标称角速度。零阶四元数积分假设角速度在时间步长上是恒定的, $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_t$, 而一阶积分使用线性插值, $\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{\omega}_{t-1})$ 。从方程 (15) 中, 我们把 $\mathbf{q}_{\Delta t}$ 写成

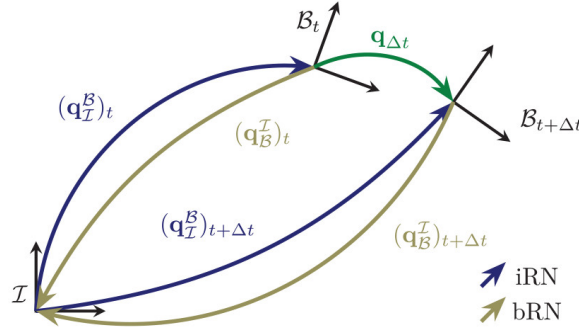


图 2: 四元数定义用于推导四元数的时间导数和积分。iRN 和 bRN 使用相同的 $\mathbf{q}_{\Delta t}$ ，因为它对应于速率陀螺仪测量得的机体固连角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 。

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{\Delta t} &= (\boldsymbol{\omega}_0 \Delta t)^\wedge \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{\|\boldsymbol{\omega}_0\|} \sin\left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}_0\| \Delta t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}_0\| \Delta t}{2}\right) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (20)$$

时间 $t + \Delta t$ 的四元数 $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$ 的值可以表示为时间 t 的四元数 \mathbf{q}_t 和增量四元数 $\mathbf{q}_{\Delta t}$ 的组合。这些四元数的组合方式取决于姿态四元数是表示机体相对于惯性系 (iRN) 的姿态，还是表示惯性系相对于机体 (bRN) 的姿态。如图 2 所示，在这些情况下，时间 $t + \Delta t$ 的姿态为

$$\begin{aligned}\text{iRN : } \mathbf{q}_{t+\Delta t} &= \mathbf{q}_t \otimes \mathbf{q}_{\Delta t}, \\ \text{bRN : } \mathbf{q}_{t+\Delta t} &= (\mathbf{q}_{\Delta t})^{-1} \otimes \mathbf{q}_t,\end{aligned}\quad (21)$$

其中，组合的阶遵循方程 (11)。

将方程 (20) 代入方程 (21) 得到

$$\text{iRN : } \mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{q}_t \otimes \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{\|\boldsymbol{\omega}_0\|} \sin\left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}_0\| \Delta t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}_0\| \Delta t}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (22a)$$

$$\text{bRN : } \mathbf{q}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} -\frac{\boldsymbol{\omega}_0}{\|\boldsymbol{\omega}_0\|} \sin\left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}_0\| \Delta t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\|\boldsymbol{\omega}_0\| \Delta t}{2}\right) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_t. \quad (22b)$$

根据方程 (22) 的积分保持单位范数，允许姿态在单位球面 $S^3 \subset \mathbb{H}$ 上传播。然而，在实践中，当 $\|\boldsymbol{\omega}_0\|$ 接近零时，这个定义在数值上变得不稳定。如 Trawny 和 Roumeliotis(2005)[34] 所述，将 L'Hospital 规则应用于 iRN 的方程 (22a) 表明

$$\lim_{\|\boldsymbol{\omega}_0\| \rightarrow 0} \mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{q}_t + \Delta t \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}_0) \mathbf{q}_t \right), \quad (23)$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} -[\boldsymbol{\omega}] & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega}^\top & 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

比较方程 (24) 和 (3b), 表明方程 (23) 可以写成

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{q}_t + \Delta t \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}_t \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

对于 bRN, 类似的分析可应用于方程 (22b) 以表明

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} \approx \mathbf{q}_t + \Delta t \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_t \right).$$

注意, 对于 bRN, 四元数乘法的顺序和 $\boldsymbol{\omega}_0$ 的符号都被颠倒了。

总之, 当 $\|\boldsymbol{\omega}_0\|$ 足够大时, 姿态四元数才根据方程 (22) 进行积分, 以避免数值问题。当 $\|\boldsymbol{\omega}_0\|$ 为小值时, 积分近似为

$$\text{iRN: } \mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{q}_t + \Delta t \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}_t \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad (25a)$$

$$\text{bRN: } \mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{q}_t + \Delta t \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_t \right). \quad (25b)$$

根据方程 (25) 积分使得四元数离开单位球面 S^3 ; 因此, 当使用此方法时, 跟有一个归一化的步骤。

3.5 姿态运动学

刚体的姿态运动学由姿态四元数的时间导数描述。一些作者 (Bloesch 等人, 2016[7]; Hertzberg 等人, 2013[14]) 通过将 $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^3$ 定义为相关李代数的成员来强调姿态动力学的流形结构, 而其他作者 (Markley, 2003[25]; Trawny 和 Roumeliotis, 2005[34]) 则假设一阶近似, 如 $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^4$ 。在本文中, 当我们使用方程 (22) 沿流形 S^3 传播时, 我们使用四元数动力学在有限时间步长 Δt 上的一阶近似, 以计算扩展 Kalman 滤波器 (extended Kalman filter, EKF) 所需的一阶 Jacobian 矩阵。

方程 (22) 的一阶泰勒级数近似, 假设 $\frac{1}{2} \|\boldsymbol{\omega}_0\| \Delta t$ 很小¹, 得到的结果与方程 (25) 相同。使用方程 (25a), iRN 的四元数时间导数计算为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{q}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_t) \\ \dot{\mathbf{q}} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\mathbf{q}_t + \Delta t \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}_t \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) - \mathbf{q}_t \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_t \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

使用方程 (25b) 对 bRN 进行类似的分析。总之, 姿态四元数运动学由下式表示

¹即使对于大的 $\|\boldsymbol{\omega}\| = 2\pi \text{ rad/s}$ 和中等的 $\Delta t = 0.01 \text{ s}$, 通过线性化积分引入的误差也只有 10^{-6} rad 的数量级。

$$\text{iRN} : \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\text{bRN} : \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}. \quad (27)$$

3.6 误差状态

因为单位四元数不构成向量空间，所以四元数误差不能用向量减法计算。相反，真实的四元数状态 \mathbf{q} 表示为估计的四元数 $\hat{\mathbf{q}}$ 和四元数姿态误差 $\delta\mathbf{q}$ 的四元数乘法。通过改变四元数乘法的顺序和方向，有四种可能的方法来定义姿态误差：

$$\text{Method1} : \mathbf{q} \triangleq \hat{\mathbf{q}} \otimes \delta\mathbf{q}, \quad (28a)$$

$$\text{Method2} : \mathbf{q} \triangleq \delta\mathbf{q} \otimes \hat{\mathbf{q}}, \quad (28b)$$

$$\text{Method3} : \mathbf{q} \triangleq \hat{\mathbf{q}} \otimes \delta\mathbf{q}^{-1},$$

$$\text{Method4} : \mathbf{q} \triangleq \delta\mathbf{q}^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}.$$

在本文中，我们使用方程 (28a) 表示第 6 节中描述的 iRN，使用方程 (28b) 表示第 7 节中描述的 bRN：

$$\text{iRN} : \mathbf{q} \triangleq \hat{\mathbf{q}} \otimes \delta\mathbf{q}, \quad (29a)$$

$$\text{bRN} : \mathbf{q} \triangleq \delta\mathbf{q} \otimes \hat{\mathbf{q}}. \quad (29b)$$

虽然使用不同的定义在推导滤波器时需要额外的小心，但最终这可以使 iRN 和 bRN 的动力学、测量模型和关键帧重置步骤之间的差异最小。图 3 说明了误差状态定义的选择，并显示了这种选择如何使两种方法保持相同的中间标称机体坐标系 \hat{b} 。重新排列方程 (29)，四元数的误差状态定义为

$$\text{iRN} : \delta\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}^{-1} \otimes \mathbf{q}, \quad (30a)$$

$$\text{bRN} : \delta\mathbf{q} = \mathbf{q} \otimes \hat{\mathbf{q}}^{-1}. \quad (30b)$$

使用方程 (12)，我们可以将方程 (29) 表示为

$$\text{iRN} : \mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}(\delta\mathbf{q}) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}), \quad (31a)$$

$$\text{bRN} : \mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}) \mathbf{R}(\delta\mathbf{q}). \quad (31b)$$

当表示与四元数误差相关的姿态不确定性时，需要一个最小的表示。一个四元数用 4 个数字参数化，但完全参数化方向只需要 3 个数字，因为方向与单位四元数 (三维群 S^3 的元素) 相关。因为群是三维的，所以么元处的切空间，或者说李代数，将同构于 \mathbb{R}^3 ，并且误差协方差可以在这个三维

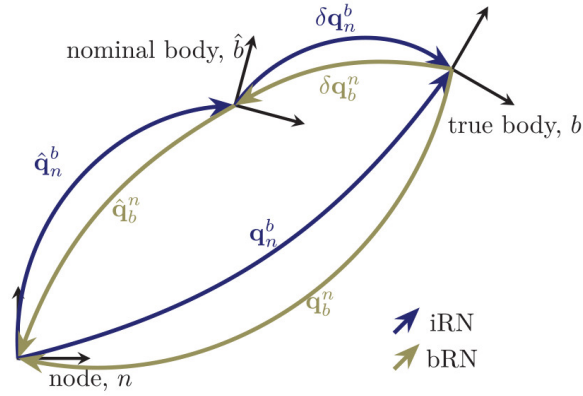


图 3: iRN 和 bRN 的误差状态定义。为了保持相同的中间标称机体坐标系, 并因此具有类似的误差动力学, 对误差状态定义进行了不同的定义。

向量空间中定义。因此, 我们将 $\delta \mathbf{q}$ 中的不确定性表示为向量 $\delta \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$ 的协方差。方程 (18) 和 (19) 的 \wedge 以及 \vee 算子将误差四元数 $\delta \mathbf{q}$ 与其最小表示 $\delta \boldsymbol{\theta}$ 之间的映射定义为

$$\begin{aligned}\delta \boldsymbol{\theta} &= \delta \mathbf{q}^\vee \approx 2 \text{sign}(q_0) \bar{\mathbf{q}}, \\ \delta \mathbf{q} &= \delta \boldsymbol{\theta}^\wedge \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta} \\ 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (32)$$

通过将方程 (32) 代入方程 (9) 并忽略二阶项, 可以得出

$$\mathbf{R}(\delta \mathbf{q}) \approx \mathbf{I} - [\delta \boldsymbol{\theta}] \quad (33)$$

并且

$$\mathbf{R}(\delta \mathbf{q}^{-1}) = \mathbf{R}^\top(\delta \mathbf{q}) \approx \mathbf{I} + [\delta \boldsymbol{\theta}]. \quad (34)$$

3.7 欧拉角分解

飞机姿态通常用三个角来表示: 横滚角 ϕ 、俯仰角 θ 和偏航角 ψ 。偏航角表示绕惯性 z 轴 (向下) 的旋转。俯仰角表示围绕生成的 y 轴旋转。横滚角表示在俯仰和偏航后形成的绕 x 轴的旋转。这一系列旋转称为 3-2-1 欧拉角, 将车辆的机体坐标系与惯性坐标系联系起来, 可以表示为三个旋转矩阵的乘积

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\psi, \quad (35)$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_\phi &\triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \\
\mathbf{R}_\theta &\triangleq \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \\
\mathbf{R}_\psi &\triangleq \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{36}$$

因为四元数通常不太直观，所以它们通常被映射到横滚角、俯仰角和偏航角，以便进行绘图、分析和控制。用方程 (9) 展开方程 (35) 并进行项的比较，我们得到

$$\begin{aligned}
\phi &= \text{atan} \left(\frac{2q_0q_x + 2q_yq_z}{q_z^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_0^2} \right), \\
\theta &= \text{asin} (2q_0q_y - 2q_xq_z), \\
\psi &= \text{atan} \left(\frac{2q_0q_z + 2q_xq_y}{q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 + q_0^2} \right).
\end{aligned} \tag{37}$$

为了将欧拉角映射到四元数中，我们使用方程 (11) 中得出的顺序，将横滚角、俯仰角和偏航角分量组合成姿态四元数，以便

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_\psi \otimes \mathbf{q}_\theta \otimes \mathbf{q}_\phi. \tag{38}$$

注意：组合顺序与方程 (12) 所描述的方程 (35) 相反。从方程 (14)，我们获得

$$\mathbf{q}_\phi \triangleq \begin{bmatrix} \sin \frac{\phi}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{q}_\theta \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \frac{\theta}{2} \\ 0 \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{q}_\psi \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin \frac{\psi}{2} \\ \cos \frac{\psi}{2} \end{bmatrix}. \tag{39}$$

为了用方程 (39) 中的定义证明方程 (38) 和 (35) 是一致的，我们只需要将方程 (9) 和三角函数倍角恒等式应用于方程 (39)。例如，设 $\mathbf{k} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ ，我们发现

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(\mathbf{q}_\psi) &= \left(2 \cos^2 \left(\frac{\psi}{2} \right) - 1 \right) \mathbf{I} - 2 \cos \left(\frac{\psi}{2} \right) \sin \left(\frac{\psi}{2} \right) [\mathbf{k}] \\
&\quad + 2 \sin^2 \left(\frac{\psi}{2} \right) \mathbf{k} \mathbf{k}^\top \\
&= \cos \psi \mathbf{I} - \sin \psi [\mathbf{k}] + (1 - \cos \psi) \mathbf{k} \mathbf{k}^\top \\
&= \mathbf{R}_\psi.
\end{aligned}$$

通过将方程 (39) 代入方程 (38)，一个单位四元数可以根据横滚角、俯仰角和偏航角构造为

$$\begin{aligned}
q_x &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2}, \\
q_y &= \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2}, \\
q_z &= \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} - \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2}, \\
q_0 &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2}.
\end{aligned}$$

附录 A 给出了 Jacobian 矩阵的推导, 该 Jacobian 矩阵将欧拉角分解中的误差与姿态误差状态相关联。定义

$$\Delta \triangleq \begin{bmatrix} \phi - \hat{\phi} \\ \theta - \hat{\theta} \\ \psi - \hat{\psi} \end{bmatrix}$$

该 Δ 的协方差与 $\delta\theta$ 的协方差的关系为

$$E[\Delta\Delta^\top] = \mathbf{N}_\Delta E[\delta\theta\delta\theta^\top] \mathbf{N}_\Delta^\top,$$

其中对于 iRN 的情况, 由附录 A 中的方程 (100) 给出 $\mathbf{N}_\Delta = \partial\Delta/\partial\delta\theta$ 。

3.8 误差四元数特性

本节介绍了误差四元数的几个特性, 在推导 Jacobian 矩阵时需要这些特性, 而该矩阵在 RMEKF 中被用到。这些特性中的第一个特性与两个误差四元数的乘积有关。使用方程 (32) 和 (3a), 通过去掉二阶项, 我们得到

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{q}_c &= \delta\mathbf{q}_a \otimes \delta\mathbf{q}_b \\
\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\delta\theta_c \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \frac{1}{2}[\delta\theta_a] & \frac{1}{2}\delta\theta_a \\ -\frac{1}{2}\delta\theta_a^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\delta\theta_b \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\delta\theta_a + \frac{1}{4}[\delta\theta_a]\delta\theta_b + \frac{1}{2}\delta\theta_b \\ -\frac{1}{4}\delta\theta_a^\top\delta\theta_b + 1 \end{bmatrix} \\
&\approx \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\delta\theta_a + \delta\theta_b) \\ 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

由此我们可以得出结论, 即

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{q}_c &= \delta\mathbf{q}_a \otimes \delta\mathbf{q}_b \\
\implies \delta\theta_c &\approx \delta\theta_a + \delta\theta_b.
\end{aligned} \tag{40}$$

同样可以证明

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{q}_c &= (\delta \mathbf{q}_a)^{-1} \otimes \delta \mathbf{q}_b \implies \delta \boldsymbol{\theta}_c \approx -\delta \boldsymbol{\theta}_a + \delta \boldsymbol{\theta}_b, \\ \delta \mathbf{q}_c &= \delta \mathbf{q}_a \otimes (\delta \mathbf{q}_b)^{-1} \implies \delta \boldsymbol{\theta}_c \approx \delta \boldsymbol{\theta}_a - \delta \boldsymbol{\theta}_b.\end{aligned}$$

对于下一个特性，我们回顾第 3.2 节，四元数共轭操作在任意四元数上旋转该四元数的向量部分的基。使用方程 (13) 和 (32)，我们可以发现

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{q}_b &= \mathbf{q}^{-1} \otimes \delta \mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q} \\ \implies \delta \boldsymbol{\theta}_b &\approx \mathbf{R}(\mathbf{q}) \delta \boldsymbol{\theta}_a.\end{aligned}\tag{41}$$

此外，方程 (40) 和 (41) 可组合以验证，例如，

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{q}_c &= \delta \mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}^{-1} \otimes \delta \mathbf{q}_b \otimes \mathbf{q} \\ \implies \delta \boldsymbol{\theta}_c &\approx \delta \boldsymbol{\theta}_a + \mathbf{R}(\mathbf{q}) \delta \boldsymbol{\theta}_b.\end{aligned}\tag{42}$$

4 MEKF

有了四元数的符号和特性，我们准备概述所提出的估计框架：一个连续-离散的、间接的、乘性扩展 Kalman 滤波器 (multiplicative extended Kalman filter, MEKF)。为了一般性，在本节中，我们推导 MEKF，并不定义特定的状态、输入和测量变量。这一推导将在第 6 节和第 7 节中更加具体化，在那里将给出具有特定变量定义的实际实现。本节主要是对文献中发现的技术的回顾，但引入了有助于澄清推导的符号。

Kalman 滤波器为高斯噪声下的线性系统提供了最佳的最大似然状态估计。它使用当前状态估计 $\hat{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}]$ 、输入 \mathbf{u} 和测量 \mathbf{z} 的函数，递归地估计系统状态的演化。Kalman 滤波器还保持状态不确定性的估计，由协方差矩阵 \mathbf{P} 表示，通常定义为

$$\mathbf{P} = E[(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])^\top]\tag{43}$$

EKF 是 Kalman 滤波的扩展，适用于具有非线性动力学和/或非线性测量模型的系统。EKF 将系统的当前最大似然状态估计线性化。与线性 Kalman 滤波器相比，EKF 的最优性和收敛性不再得到保证，但由于其鲁棒性和简单的实现，EKF 在实践中得到了广泛的应用。然而，如果状态 \mathbf{x} 包含一个四元数，那么方程 (43) 就有根本的缺陷。首先，四元数减法没有如第 3.6 节所描述的那样得到很好的定义，第二，方程 (43) 永远不是满秩，因为四元数不是旋转的最小表示。这些问题可以用 Kalman 滤波的误差状态或间接表述来解决。

间接 Kalman 滤波跟踪误差状态 $\delta \mathbf{x}$ 及其不确定性。与状态 \mathbf{x} 不同，误差状态通过使用最小姿态表示被定义为向量空间的一个元素。误差状态是真实状态 \mathbf{x} 和标称状态 \mathbf{x}_{nom} 之间差异的度量，其中 \mathbf{x}_{nom} 可以用多种不同的方式定义，如 Farrell(2008)[13] 所述。当系统动力学被特别好地建模时，例如对于在轨航天器， \mathbf{x}_{nom} 可以是一个预先确定的前馈状态估计。更常见的是，标称状态是最大似然状态估计 $\mathbf{x}_{\text{nom}} = E[\mathbf{x}]$ 。在这种情况下，测量提供反馈以更新标称状态，迫使误差状态的期望值为零。一些间接 Kalman 滤波实现区分快速和慢速测量，并且只更新慢速测量的标称状态 (Farrell, 2008[13]; Maybeck, 1979[27])。对于这样的系统，以较快速率工作时 $\mathbf{x}_{\text{nom}} \neq E[\mathbf{x}]$ ，因此

期望的误差状态是非零的，并且必须被传播。对于本文中的推导，每个测量的标称状态都是等价更新的，以确保在任何给定的时间里 $\mathbf{x}_{\text{nom}} = \hat{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}]$ 。

设 \mathbf{x}_v 和 \mathbf{x}_q 表示状态 \mathbf{x} 的向量和四元数部分， $\delta\mathbf{x}_v$ 和 $\delta\mathbf{x}_\theta$ 是误差状态 $\delta\mathbf{x}$ 的对应元素。我们将这些误差状态元素定义为

$$\delta\mathbf{x}_v \triangleq \mathbf{x}_v - \hat{\mathbf{x}}_v, \quad (44a)$$

$$\delta\mathbf{x}_\theta \triangleq \delta\mathbf{q}^\vee, \quad (44b)$$

其中 $\delta\mathbf{q}$ 由方程 (30) 使用 \mathbf{x}_q 和 $\hat{\mathbf{x}}_q$ 定义。该结果有一个特性

$$E[\delta\mathbf{x}] = \mathbf{0}, \quad (45)$$

其在附录 B.1 中推导。因为误差状态是向量空间的一部分，并且做为方程 (45) 的结果，间接 Kalman 滤波器使用定义良好的协方差表示状态不确定性

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= E[(\delta\mathbf{x} - E[\delta\mathbf{x}])(\delta\mathbf{x} - E[\delta\mathbf{x}])^\top] \\ &= E[\delta\mathbf{x}\delta\mathbf{x}^\top]. \end{aligned} \quad (46)$$

做为解释说明，在这个公式中，未知的真实状态被建模为以当前状态估计为中心的随机变量。更具体地说，真实状态的向量和四元数部分使用方程 (44) 的逆值被建模为随机变量，写为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_v &= \hat{\mathbf{x}}_v + \delta\mathbf{x}_v, \\ \text{iRN} : \mathbf{x}_q &= \hat{\mathbf{x}}_q \otimes (\delta\mathbf{x}_\theta)^\wedge, \\ \text{bRN} : \mathbf{x}_q &= (\delta\mathbf{x}_\theta)^\wedge \otimes \hat{\mathbf{x}}_q, \end{aligned}$$

其中 $\delta\mathbf{x}_v$ 和 $\delta\mathbf{x}_\theta$ 是高斯随机向量的元素

$$\delta\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{P}).$$

Kalman 滤波器被分解为两个步骤：传播步骤和更新步骤，这分别在第 4.1 节和第 4.2 节中描述。第 4.3 节讨论了处理延迟或乱序测量的方法。一般来说，MEKF 可以使用惯性坐标系或固体坐标系。然而，其中存在一些细微的差异，并被突出显示为特定于 iRN 或 bRN。

4.1 传播

考虑连续时间系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{\eta}, \quad (47)$$

其中 $\boldsymbol{\nu} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_u)$ 和 $\boldsymbol{\eta} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_x)$ 是零均值高斯随机变量。更具体地说，我们假设 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\nu}$ 是不相关的，

$$E[\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\nu}^\top] = \mathbf{0}, \quad (48)$$

并且输入和过程噪声在时间上不相关

$$\begin{aligned} E[\boldsymbol{\eta}(t)\boldsymbol{\eta}(\tau)^\top] &= \mathbf{Q}_x\delta(t-\tau), \\ E[\boldsymbol{\nu}(t)\boldsymbol{\nu}(\tau)^\top] &= \mathbf{Q}_u\delta(t-\tau), \end{aligned} \quad (49)$$

其中 $\delta(t)$ 是狄拉克 δ 函数。

在传播步骤中，滤波器根据标称传播动力学向前传播状态估计，即

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}). \quad (50)$$

当 \mathbf{x} 是向量空间的一部分时，传播协方差所需的 Jacobian 矩阵由误差状态动力学的一阶泰勒级数展开式中获得，即

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{\eta} - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \quad (51a)$$

$$\begin{aligned} &\approx \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}} \delta\mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}} \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\eta} - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \\ &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}} \delta\mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}} \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\eta}. \end{aligned} \quad (51b)$$

然而，当状态 \mathbf{x} 包括四元数项时，误差状态动力学不能像方程 (51a) 那样通过简单的减法形成。实际上，如第 3.6 节所述，误差状态 $\delta\mathbf{x}$ 的维数小于 \mathbf{x} 。注意，根据方程 (44)， \mathbf{x} 是 $\hat{\mathbf{x}}$ 和 $\delta\mathbf{x}$ 的函数，误差状态的动力学一般可以表示为单一函数

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}}(\delta\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\eta}, \quad (52)$$

其中只有 $\delta\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\nu}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 是随机变量²。函数 $\bar{\mathbf{f}}$ 然后适当地处理状态的四元数部分。在附录 B.2 中，我们证明了 $\bar{\mathbf{f}}(E[\delta\mathbf{x}], E[\boldsymbol{\nu}], \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ 。对于协方差传播的 Jacobian 矩阵由方程 (52) 关于 $(E[\delta\mathbf{x}], E[\boldsymbol{\nu}], \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ 的一阶泰勒级数展开式计算，如下所示：

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{x}} &\approx \bar{\mathbf{f}}(E[\delta\mathbf{x}], E[\boldsymbol{\nu}], \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\eta} \\ &\quad + \mathbf{F}(\delta\mathbf{x} - E[\delta\mathbf{x}]) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\nu} - E[\boldsymbol{\nu}]) \\ &= \mathbf{F}\delta\mathbf{x} + \mathbf{G}\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \quad (53)$$

其中有

$$\mathbf{F} = \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}(\delta\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})}{\partial \delta\mathbf{x}} \right|_{E[\delta\mathbf{x}], E[\boldsymbol{\nu}], \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}}$$

和

$$\mathbf{G} = \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}(\delta\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right|_{E[\delta\mathbf{x}], E[\boldsymbol{\nu}], \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}},$$

²注意我们对符号的轻微滥用，即方程 (52) 中的 $\boldsymbol{\eta}$ 与误差向量的维数相同，而方程 (47) 中的 $\boldsymbol{\eta}$ 与状态向量的维数相同。

并且 $E[\delta \mathbf{x}] = E[\boldsymbol{\nu}] = \mathbf{0}$ 。注意，方程 (53) 具有方程 (51b) 的形式，但是 Jacobian 矩阵项，是误差状态动力学相对于误差状态和输入噪声微分，而不是相对于状态和输入。

误差状态协方差传播是通过对方程 (46) 进行时间微分，并利用方程 (53) 的线性化误差动力学给出为

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{P}} &= E[\delta \dot{\mathbf{x}} \delta \mathbf{x}^\top + \delta \mathbf{x} \delta \dot{\mathbf{x}}^\top] \\
 &= E[\mathbf{F} \delta \mathbf{x} \delta \mathbf{x}^\top + \mathbf{G} \boldsymbol{\nu} \delta \mathbf{x}^\top + \boldsymbol{\eta} \delta \mathbf{x}^\top] \\
 &\quad + E[\delta \mathbf{x} \delta \mathbf{x}^\top \mathbf{F}^\top + \delta \mathbf{x} \boldsymbol{\nu}^\top \mathbf{G}^\top + \delta \mathbf{x} \boldsymbol{\eta}^\top] \\
 &= \mathbf{F} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{F}^\top + E[\mathbf{G} \boldsymbol{\nu} \delta \mathbf{x}^\top + \delta \mathbf{x} \boldsymbol{\nu}^\top \mathbf{G}^\top] \\
 &\quad + E[\boldsymbol{\eta} \delta \mathbf{x}^\top + \delta \mathbf{x} \boldsymbol{\eta}^\top].
 \end{aligned} \tag{54}$$

为简化各项，我们用初始条件 $\delta \mathbf{x}_0$ 解方程 (53) 中的微分方程得到

$$\delta \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}t} \delta \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{F}(t-\tau)} \mathbf{G} \boldsymbol{\nu}(\tau) d\tau + \int_0^t e^{\mathbf{F}(t-\tau)} \boldsymbol{\eta}(\tau) d\tau. \tag{55}$$

利用方程 (55) 和特性方程 (48) 和 (49)，我们看到

$$\begin{aligned}
 E[\delta \mathbf{x} \boldsymbol{\nu}^\top \mathbf{G}^\top] &= E[e^{\mathbf{F}t} \delta \mathbf{x}_0 \boldsymbol{\nu}^\top \mathbf{G}^\top] \\
 &\quad + E\left[\int_0^t e^{\mathbf{F}(t-\tau)} \mathbf{G} \boldsymbol{\nu}(\tau) \boldsymbol{\nu}^\top(t) \mathbf{G}^\top d\tau\right] \\
 &\quad + E\left[\int_0^t e^{\mathbf{F}(t-\tau)} \boldsymbol{\eta}(\tau) \boldsymbol{\nu}^\top(t) \mathbf{G}^\top d\tau\right] \\
 &= E\left[\int_0^t e^{\mathbf{F}(t-\tau)} \mathbf{G} \mathbf{Q}_u \delta(t-\tau) \mathbf{G}^\top d\tau\right] \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{G} \mathbf{Q}_u \mathbf{G}^\top
 \end{aligned} \tag{56}$$

其中 $\frac{1}{2}$ 是因为积分的边界只使用 δ 函数内部面积的一半。同样地，

$$E[\delta \mathbf{x} \boldsymbol{\eta}^\top] = \frac{1}{2} \mathbf{Q}_x. \tag{57}$$

因为 \mathbf{Q}_u 和 \mathbf{Q}_x 是对称的，组合方程 (54)，(56) 和 (57)，我们得到 \mathbf{P} 在测量之间演变为

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{F}^\top + \mathbf{G} \mathbf{Q}_u \mathbf{G}^\top + \mathbf{Q}_x \tag{58}$$

总之，在传播步骤期间，使用方程 (50) 向前传播 $\hat{\mathbf{x}}$ ，并且使用方程 (58) 向前传播误差协方差。此外，由于 $\delta \mathbf{x}$ 的演化由方程 (53) 和 $E[\delta \mathbf{x}](0) = \mathbf{0}$ 给出，因此在传播窗口上 $E[\delta \mathbf{x}](t) = \mathbf{0}$ 。

4.2 测量更新

对于更新 (*update*) 步骤，考虑测量

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_z), \tag{59}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}_z \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ 表示测量噪声。如果测量是向量量，则此测量噪声通常是加性的，但是如果测量量是四元数，则通过四元数乘法应用噪声。

残差 \mathbf{r} 是真实测量值和预测测量值之间的差异

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{0}).$$

传统上，假设在向量空间中测量，使得方程 (59) 简化为

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\eta}_z.$$

在这种情况下，通过减法找到残差，

$$\mathbf{r} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}),$$

并被建模为

$$\mathbf{r} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\eta}_z - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}).$$

然后使用一阶泰勒级数展开式计算 Jacobian 矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\approx \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}} \delta \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}_z - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) \\ &= \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}} \delta \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}_z. \end{aligned} \quad (60)$$

这些测量和残差模型与在方程 (51) 中提出的传统误差状态动力学具有相似的缺点，即它们不适用于四元数测量，并且方程 (60) 假设状态 \mathbf{x} 与 $\delta \mathbf{x}$ 具有相同的维数。

这些问题可以通过将残差模型表达为一个单一的函数来解决，与第 4.1 节中传播步骤所采用的方法相类似。再次注意， \mathbf{x} 是 $\hat{\mathbf{x}}$ 和 $\delta \mathbf{x}$ 的函数，残差被建模为函数

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{h}}(\delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_z, \hat{\mathbf{x}}),$$

其中只有前两个变量是随机的。对于向量值的测量 \mathbf{z}_v ，残差值通过减法计算为

$$\mathbf{r} = \mathbf{z}_v - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{0}), \quad (61)$$

并被建模为

$$\bar{\mathbf{h}}(\delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_z, \hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_z) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{0}), \quad (62)$$

其中 \mathbf{x} 可以根据方程 (29) 并通过重新排列方程 (44a) 以 $\delta \mathbf{x}$ 和 $\hat{\mathbf{x}}$ 的形式重写。对于四元数值的测量值 \mathbf{z}_q ，根据方程 (30)，残差值被计算为观测和预期四元数之间误差的 3 参数向量最小表示，即

$$\begin{aligned} \text{iRN} : \mathbf{r} &= \left(\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{0})^{-1} \otimes \mathbf{z}_q \right)^\vee, \\ \text{bRN} : \mathbf{r} &= \left(\mathbf{z}_q \otimes \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{0})^{-1} \right)^\vee, \end{aligned} \quad (63)$$

并被建模为

$$\begin{aligned}
\text{iRN} : \bar{\mathbf{h}}(\delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_z, \hat{\mathbf{x}}) &= \left(\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{0})^{-1} \otimes \mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_z) \right)^\vee, \\
\text{bRN} : \bar{\mathbf{h}}(\delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_z, \hat{\mathbf{x}}) &= \left(\mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_z) \otimes \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{0})^{-1} \right)^\vee,
\end{aligned} \tag{64}$$

其中 \mathbf{x} 又可以根据方程 (29) 和 (44a) 用 $\delta \mathbf{x}$ 和 $\hat{\mathbf{x}}$ 来重写。

由方程 (62) 和 (64) 可知，残差模型的特性为 $\bar{\mathbf{h}}(E[\delta \mathbf{x}], E[\boldsymbol{\eta}_z], \hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ 。本文中的测量模型的选择使噪声在残差空间中是加性的，这意味着 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\eta}_z} = \mathbf{I}$ 。测量 Jacobian 矩阵的计算使用 $\bar{\mathbf{h}}$ 关于 $(E[\delta \mathbf{x}], E[\boldsymbol{\eta}_z], \hat{\mathbf{x}})$ 的一阶泰勒级数展开式

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &\approx \bar{\mathbf{h}}(E[\delta \mathbf{x}], E[\boldsymbol{\eta}_z], \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{H}(\delta \mathbf{x} - E[\delta \mathbf{x}]) \\
&\quad + \mathbf{I}(\boldsymbol{\eta}_z - E[\boldsymbol{\eta}_z]) \\
&= \mathbf{H}\delta \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}_z,
\end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{H} = \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}(\delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}_z, \hat{\mathbf{x}})}{\partial \delta \mathbf{x}} \right|_{E[\delta \mathbf{x}], E[\boldsymbol{\eta}_z], \hat{\mathbf{x}}}$$

并且 $E[\delta \mathbf{x}] = E[\boldsymbol{\eta}_z] = \mathbf{0}$ 。

假设测量噪声、误差状态和输入噪声不相关，则残差不确定度为

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &\triangleq E[\mathbf{r}\mathbf{r}^\top] \\
&= E[\mathbf{H}\delta \mathbf{x}\delta \mathbf{x}^\top \mathbf{H}^\top + \boldsymbol{\eta}_z \boldsymbol{\eta}_z^\top] \\
&= \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^\top + \mathbf{R}.
\end{aligned} \tag{65}$$

Kalman 增益利用残差和状态不确定性来确定残差的可信程度和应用范围。利用残差协方差，Kalman 增益为

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{H}^\top \mathbf{S}^{-1}. \tag{66}$$

在融合由测量所提供的信息时，误差状态的后验 (*posteriori*) 估计，用 $^+$ 表示，为

$$\delta \mathbf{x}^+ = \delta \mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{r},$$

这意味着

$$E[\delta \mathbf{x}^+] = \mathbf{K}\mathbf{r}.$$

有了测量更新提供的附加信息，误差状态不再是零均值，这违反了方程 (45) 中的特性。让 \mathbf{x}_v 和 \mathbf{x}_q 再次成为在 \mathbf{x} 中的向量和四元数状态，并且让 $\Delta \mathbf{v}$ 和 $\Delta \boldsymbol{\theta}$ 成为 Kalman 更新 $\mathbf{K}\mathbf{r}$ 的对应部分。为了确保误差状态保持零均值，Kalman 更新 $\mathbf{K}\mathbf{r}$ 被用来调整 $\hat{\mathbf{x}}$ 为

$$\hat{\mathbf{x}}_v^+ = \hat{\mathbf{x}}_v + \Delta \mathbf{v}$$

$$\text{iRN} : \hat{\mathbf{x}}_q^+ = \hat{\mathbf{x}}_q \otimes \Delta \boldsymbol{\theta}^\wedge \tag{67a}$$

$$\text{bRN} : \hat{\mathbf{x}}_q^+ = \Delta \boldsymbol{\theta}^\wedge \otimes \hat{\mathbf{x}}_q. \tag{67b}$$

其中方程 (67a) 和 (67b) 特定于所使用的四元数误差状态定义。

最后，协方差按照惯例更新为

$$\mathbf{P}^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \mathbf{P}.$$

在实践中，我们使用约瑟夫形式 (Joseph-form) 的 Kalman 更新，

$$\mathbf{P}^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \mathbf{P} (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})^\top + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^\top, \quad (68)$$

因为它提高了数值稳定性并确保协方差矩阵保持对称 (Bar-Shalom 等人, 2002[3])。

总之，在更新步骤期间，测量残差方程 (61) 或 (63) 提供了额外的信息，导致 $E[\delta\mathbf{x}]$ 不为零。利用 Kalman 增益方程 (66)，根据方程 (67) 更新 $\hat{\mathbf{x}}$ ，以确保 $E[\delta\mathbf{x}]$ 保持零均值。根据方程 (68) 更新误差状态协方差。

4.3 延迟的乱序测量

Kalman 滤波器假设状态按照 Markov 过程演化。因此，状态对于以前所有时间步骤的估计都被边缘化了。这使得当延迟或乱序测量最终到达时，很难计算它们的残差。在实践中，延迟测量是常见的。例如，视觉里程计算法可能需要数百毫秒来执行计算测量值所需的计算机视觉操作。理想情况下，此测量用于在拍摄图像时约束车辆的状态，而不是在测量到达时约束车辆的状态。

为了解决延迟测量，我们使用优先级队列来保存按时间排序的最后 T 秒的输入、测量、状态和误差状态协方差。如果延迟测量到达时的时间戳超过 T 秒，我们就丢弃该测量。否则，我们就丢弃所有保存的时间戳晚于传入的延迟测量的时间戳的状态和误差状态协方差。在这一点上，在延迟测量应该到达的那一刻，我们只剩下状态和协方差估计。我们通常应用测量，然后使用输入和测量队列将 MEKF 重新传播到当前时间实例。这种方法提供了相同的状态估计，就好像所有测量都在正确的时间到达一样。以这种方式处理延迟消息可能不适用于所有处理器。Bopardikar 等人 (2013)[8] 和 Shen 等人 (2014)[30] 也描述了类似的方法。

5 相对导航

第 4 节概述了间接 MEKF。本节描述了 MEKF 如何适应相对导航框架。

传统的滤波方法直接估计车辆相对于一些惯性固定原点的全局状态，如 GPS 原点或车辆的起始位置；然而，当只有相对位置测量值可用时，例如通过视觉里程计或激光扫描匹配获得，车辆的全局位置和航向是不可观测的 (Jones 等人, 2007[15]; Martinelli, 2012[26]; Weiss 等人, 2012[35])。随着时间的推移，直接估计这些不可观测的状态会导致不一致和无界的状态不确定性，这会降低精度并导致滤波器中的不规则状态跳跃 (Bailey 和 Durrant-Whyte, 2006[2]; Julier 和 Uhlmann, 2001[16]; Kottas 等人, 2013[18])。有些人已经提出了缓解这些问题的方法 (Bailey 和 Durrant-Whyte, 2006[2]; Castellanos 等人, 2007[10]; Kottas 等人, 2013[18])，但不可观测状态的核心基础问题可以通过重新阐述相对状态的问题来完全避免 (Wheeler 等人, 2018[38])。

相对导航方法通过估计车辆相对于称为节点帧 (node frame) 的局部坐标帧的位姿来保持滤波器状态的可观测性。该节点帧位于零高度，直接位于最新里程计关键帧的下方，但与重力对齐 (即，当声明关键帧时，航向与车辆的航向对齐，但没有俯仰或横滚)。做为结果，里程计提供了车辆相对于当前节点帧的位置和航向的几乎直接的测量，使得这些状态可以通过构造来观测到。

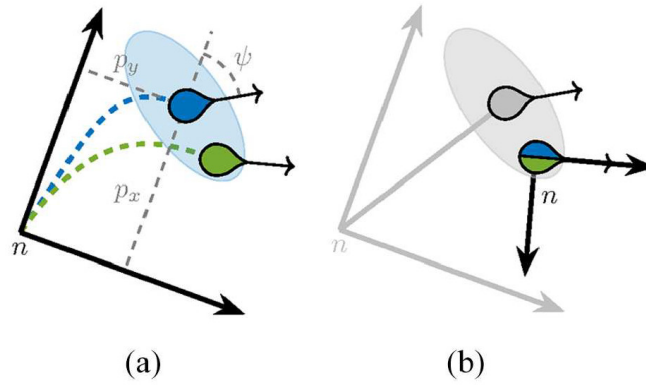


图 4: 从上面看的关键帧重置操作的图示。在重置之前 (a), 估计的位姿 (蓝色) 和真实位姿 (绿色) 之间存在一些误差, 估计的不确定性由蓝色协方差椭圆表示。重置发生时, 根据定义, 车辆位于关键帧的位置。做为结果, 在重置之后 (b), 协方差矩阵的相对状态和相应元素被相同地设置为零并且没有误差。

由于节点帧的定义方式, 车辆姿态 (ϕ, θ) 的横滚和俯仰分量以及车辆高度 p_z 的估计, 就好像它们是相对于全局原点定义的一样。这些状态在从一个节点帧转换到另一个节点帧时不受影响, 因此实际上独立于当前节点帧。另一方面, 水平位置和航向状态 $(p_x, p_y$ 和 $\psi)$ 定义了自最后一个节点帧以来车辆的移动方式, 并被称为**相对状态** (*relative states*)。每次声明一个新的关键帧时, 也会声明一个新的节点帧, 并将相对状态 $(p_x, p_y$ 和 $\psi)$ 重置为零。与相对状态相关联的协方差也被重置为零, 因为根据定义, 车辆位于节点帧的位置, 因此这些状态中没有不确定性。这如图 4 所示。非相对状态 (横滚、俯仰、高度、机体固连速度和机体固连惯性测量单元 (IMU) 偏差) 及其协方差通过关键帧重置操作保持不变。注意, 当姿态用四元数参数化时, 重置状态和协方差的航向分量是非平凡的。在重置之前, 车辆当前的相对位姿估计和协方差被传递到后端的位姿图地图, 该地图将相对位姿串联到车辆全局路径和当前全局位姿的估计中 (Wheeler 等人, 2018[38])。

我们对关键帧重置操作的数学描述如下。让 $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ 定义关键帧重置操作。估计状态重置为

$$\hat{\mathbf{x}}^+ = \mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}}). \quad (69)$$

重置后的误差状态 $\delta \mathbf{x}^+$, 是 \mathbf{x}^+ 和 $\hat{\mathbf{x}}^+$ 之间的差值, 如方程 (4) 所定义。再次回顾一下, 由于 \mathbf{x} 是 $\delta \mathbf{x}$ 和 $\hat{\mathbf{x}}$ 的函数, 我们可以将重置后的误差状态表示为一个单一函数

$$\delta \mathbf{x}^+ = \bar{\mathbf{n}}(\delta \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}).$$

这允许协方差更新为

$$\mathbf{P}^+ = \mathbf{N} \mathbf{P} \mathbf{N}^\top, \quad (70)$$

其中

$$\mathbf{N} = \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{n}}(\delta \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})}{\partial \delta \mathbf{x}} \right|_{E[\delta \mathbf{x}], \hat{\mathbf{x}}}.$$

重置操作 $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ 和 Jacobian 矩阵 \mathbf{N} 的详细信息在第 6.3 节中针对 iRN 给出, 并在第 7.3 节中针对 bRN 给出。

这个公式在估计器性能方面提供了几个优点。这些优点之一是，当与相对状态相关的协方差重置为零时，不确定性本质上从滤波器中移除，并委托给后端地图，这有助于保持滤波器的一致性 (Barfoot 和 Furgale, 2014[5])。做为结果，滤波器中的协方差也保持有界。此外，由于关键帧之间的距离相对较小，因此状态误差保持较小，从而避免了可能导致全局估计器不一致的显著的线性化误差 (Castellanos 等人, 2007[10])。

虽然重建全局位姿估计需要实现后端位姿图地图，但这种架构也被证明可以提高全局滤波方法的最终全局位姿估计的一致性和准确性，即使没有额外的位姿图地图约束，如回环闭合 (Wheeler 等人, 2018[38])。它还有一个优点是，当新的全局信息可用时，可以避免大的、潜在的破坏稳定的状态跳跃。实现这个位姿图地图的要求也不是一个特别繁重的要求，因为一些全局滤波器方法已经使用后端批处理地图来为他们的全局滤波器提供更新 (Shen 等人, 2014[31]; Weiss 和 Siegwart, 2011[36])。

算法 1 总结了实现 RMEKF 的各个步骤，以及对关键方程的引用。第 6 节推导了 iRN 的具体实现方程，第 7 节推导了机体固连的机器人中心相对导航的具体实现方程。

Algorithm 1. Relative multiplicative extended Kalman filter (RMEKF)

```

1: Initialize:  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0$ 
2: Initialize:  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ 
3: for Each new available input  $\mathbf{u}$  do
4:   Propagate nominal state  $\hat{\mathbf{x}}$  using (50)
5:   Propagate error-state covariance  $\mathbf{P}$  using (58)
6:   for  $i$  in sensors do
7:     if Measurement is available from sensor  $i$  then
8:       Compute residual  $\mathbf{r}$  using (61) or (63)
9:       Compute residual uncertainty  $\mathbf{S}$  using (65)
10:      Compute Kalman gain  $\mathbf{K}$  using (66)
11:      Use  $\mathbf{K}\mathbf{r}$  to update  $\hat{\mathbf{x}}$  using (67)
12:      Update error-state covariance  $\mathbf{P}$  using (68)
13:   if New keyframe is declared then
14:     Save  $\hat{\mathbf{x}}$  and  $\mathbf{P}$  as edge in pose-graph back end
15:     Reset state using (69)
16:     Reset uncertainty using (70)

```

6 惯性相对导航 (iRN)

惯性相对导航 (Inertial Relative Navigation, iRN) 估计车辆相对于当前节点帧的位置和姿态。当当前节点帧有规律地变化时，每个节点帧都是重力对齐和惯性定义的。由于这个原因，GPS/INS 文献中的典型无人机动力学是适用的。第 6.1 节概述了系统的输入、状态和动力学，包括误差状态的力学。第 6.2 节定义了测量模型，第 6.3 节概述了关键帧重置步骤。一般来说，本节中的推导改进了在先前工作中 (Leishman 和 McLain, 2014[22]) 推导的数学严谨性，并提供了一些更正。延伸这项工作的新贡献在各自的章节中都有说明。

6.1 状态动力学

本节导出滤波器中使用的状态传播模型。第 6.1.1 节定义了状态向量。第 6.1.2 节讨论了如何将来自 IMU 的测量纳入传播模型，第 6.1.3 节定义了状态传播模型并推导了相关的 Jacobian 矩阵。

6.1.1 状态向量

向量使用一个向前-向右-向下 (forward-right-down) 的坐标帧，坐标轴标记为 x 、 y 和 z 。在本文中，位置向量 ${}^c\mathbf{p}_a^b$ 表示帧 b 相对于帧 a 的位置，用帧 c 表示。除非另有说明，否则位置向量在起始帧中表示，即，帧 a 和帧 c 是相同的。在这种情况下，为了简洁起见，通常省略前标，因此 $\mathbf{p}_a^b \triangleq {}^a\mathbf{p}_a^b$ 。不过，为了清晰起见，有时也会包括前标。

iRN 估计车辆的机体帧 b 相对于当前节点帧 n 的位置和姿态，并用位姿 $(\mathbf{p}_n^b, \mathbf{q}_n^b)$ 表示。让帧 k 表示车辆在拍摄当前关键帧图像时的机体帧。估计器跟踪 k 相对于 n 的位姿，并用 n 表示，表示为 $(\mathbf{p}_n^k, \mathbf{q}_n^k)$ ，这是对先前工作的扩展 (Leishman 和 McLain, 2014[22])。如图 2 所示，关键帧状态 $(\mathbf{p}_n^k, \mathbf{q}_n^k)$ 包括声明关键帧时车辆的高度、横滚和俯仰。当车辆状态包含四元数元素时，它不是一个向量，因此我们将状态定义为元组

$$\mathbf{x} \triangleq (\mathbf{p}_n^b, \mathbf{q}_n^b, \mathbf{v}, \beta_\omega, \beta_a, \mathbf{p}_n^k, \mathbf{q}_n^k, \mu)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{H} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{H} \times \mathbb{R}$ ，其中 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ 是车辆在机体帧中表示的惯性速度 (即 $\mathbf{v} \triangleq {}^b\mathbf{v}_\mathcal{I}^b$ ，其中 \mathcal{I} 是一个惯性帧)， $\beta_\omega \in \mathbb{R}^3$ 和 $\beta_a \in \mathbb{R}^3$ 是陀螺仪和加速计的未知偏差， $\mu \in \mathbb{R}$ 是横向阻力系数。误差状态向量 $\delta\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{22}$ 被定义为

$$\delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{p}_n^b{}^\top & \delta\boldsymbol{\theta}_n^b{}^\top & \delta\mathbf{v}^\top & \delta\beta_\omega{}^\top & \delta\beta_a{}^\top & \delta\mathbf{p}_n^k{}^\top & \delta\boldsymbol{\theta}_n^k{}^\top & \delta\mu \end{bmatrix}^\top.$$

6.1.2 机械化

设 $\boldsymbol{\omega} \triangleq {}^b\boldsymbol{\omega}_\mathcal{I}^b$ 和 $\mathbf{a} \triangleq {}^b\mathbf{a}_\mathcal{I}^b$ 分别定义由理想 IMU 测量的真实机体固连角速度和加速度。为了简洁起见，我们省略了指定帧，并在整篇文章中使用 $\boldsymbol{\omega}$ 和 \mathbf{a} 。

一个 IMU 提供的测量值 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\tilde{\mathbf{a}}$ 被未知的偏差 β_ω 和 β_a 以及零均值高斯噪声过程 ν_ω 和 ν_a 所破坏，因此测量值可以建模为

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\omega} + \beta_\omega + \nu_\omega \\ \tilde{\mathbf{a}} &= \mathbf{a} + \beta_a + \nu_a. \end{aligned} \tag{71a}$$

认识到实际测量值 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\tilde{\mathbf{a}}$ 在给定的时间步长是固定的，并且噪声项在时间上被认为是不相关的，未知真值被建模为随机变量，如下所示：

$$\boldsymbol{\omega} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \beta_\omega - \nu_\omega \tag{72a}$$

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}} - \beta_a - \nu_a, \tag{72b}$$

其中， $\boldsymbol{\omega}$ 、 \mathbf{a} 、 β_ω 、 β_a 、 ν_ω 和 ν_a 为随机变量， $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\tilde{\mathbf{a}}$ 被认为是常数。用于传播的角速度的标称值就是真实角速度的期望值

$$\begin{aligned}
\hat{\omega} &\triangleq E[\omega] \\
&= E[\tilde{\omega} - \beta_{\omega} - \nu_{\omega}] \\
&= \tilde{\omega} - \hat{\beta}_{\omega},
\end{aligned} \tag{73}$$

并且用于传播的加速度的标称值就是真实加速度的期望值

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{a}} &\triangleq E[\mathbf{a}] \\
&= E[\tilde{\mathbf{a}} - \beta_{\mathbf{a}} - \nu_{\mathbf{a}}] \\
&= \tilde{\mathbf{a}} - \hat{\beta}_{\mathbf{a}}.
\end{aligned} \tag{74}$$

IMU 数据可以做为一个系统输入,也可以做为一个测量,这是基于 IMU 质量和模型精度的权衡。当一个可靠的车辆模型可用时,控制器的输出(例如,电机指令)可以做为观测器的输入,从而向前传播状态。在这种情况下,IMU 数据做为提供反馈的测量更新被纳入。这种方法利用的信息最多,但需要仔细描述车辆的动力学特性。另一种常见的方法称为**机械化** (*mechanization*),它将 IMU 测量值直接做为滤波器动力学的输入,用运动学方程代替车辆特定动力学。这简化了传播动力学并消除了对建模错误的敏感性,但没有使用关于车辆行为方式的任何信息。

在本文的滤波器设计中,将速率陀螺 $\tilde{\omega}$ 测得的角速度做为传播方程的输入。根据 Leishman 等人 (2014a) 的做法 [21], 加速计测量的 z 分量也被视为输入,而 x 和 y 分量被用作测量更新。以下段落解释了这种方法的推导和理由。

利用牛顿第二定律,可以将速度动力学建模为

$$\dot{\mathbf{v}} = [\mathbf{v}] \omega + \frac{1}{m} \sum \mathcal{B}\mathbf{F}, \tag{75}$$

其中 m 是车辆质量, $\mathcal{B}\mathbf{F}$ 是作用在车辆上的外力,以机体帧表示。如图 6 所示,作用在多旋翼飞行器上的主要外力为重力 $\mathcal{B}\mathbf{F}_G = m\mathbf{R}(\mathbf{q}_n^b)\mathbf{g}$ 、推力 $\mathcal{B}\mathbf{F}_T = T\mathbf{k}$ 和简化阻力 $\mathcal{B}\mathbf{F}_D = -\mu_0\mathbf{v}$, 其中 $\mathbf{k} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, T 是旋翼总推力, μ_0 是标称阻力系数,并且 $\mathbf{g} = g\mathbf{k}$, g 是重力引起的标准加速度。将这些力代入方程 (75), 得到

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}} &= [\mathbf{v}] \omega + \frac{1}{m} (\mathcal{B}\mathbf{F}_G + \mathcal{B}\mathbf{F}_T + \mathcal{B}\mathbf{F}_D) \\
&= [\mathbf{v}] \omega + \mathbf{R}(\mathbf{q}_n^b)\mathbf{g} + \frac{T}{m}\mathbf{k} - \frac{\mu_0}{m}\mathbf{v}.
\end{aligned} \tag{76}$$

虽然在技术上是正确的,但方程 (76) 中的动力学在实践中具有挑战性,因为推力 T 很难建模,因此通常是未知的。这个困难是通过机械化来解决的,即直接利用传播模型中的加速计测量值。正如 Leishman 等人 (2014a)[21] 所解释的,加速计测量是在机体帧中表达的比力(不包括重力),因此

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{1}{m} \sum \mathcal{B}\mathbf{F} - \mathcal{B}\mathbf{F}_G \\
&= \frac{1}{m} (\mathcal{B}\mathbf{F}_T + \mathcal{B}\mathbf{F}_D) \\
&= \frac{T}{m}\mathbf{k} - \frac{\mu_0}{m}\mathbf{v}.
\end{aligned} \tag{77}$$

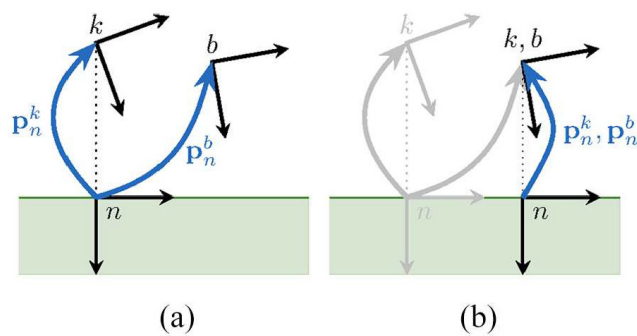


图 5: 从侧面看关键帧重置操作的图示: (a) 当声明关键帧时, p_n^k 和 q_n^k 对车辆的横滚、俯仰和高度进行编码; (b) 重置后, 关键帧和机体状态相同。

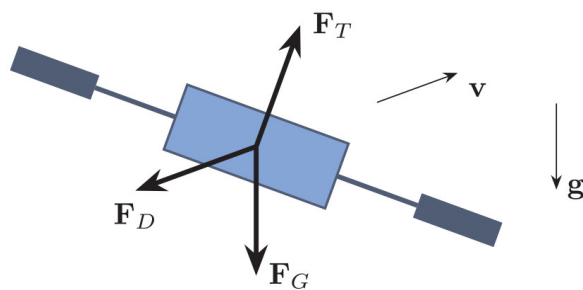


图 6: 描述作用在多旋翼上的外力的自由机体图。主要作用力为重力 F_G 、推力 F_T 和阻力 F_D 。向量 v 表示车辆的速度, g 表示重力向量。重力作用于重力方向, 推力作用于垂直于旋翼平面的方向, 简化阻力作用于与速度向量相反的方向。

将方程 (77) 代入方程 (76) 得到常见的机械化动力学

$$\dot{\mathbf{v}} = [\mathbf{v}] \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}(\mathbf{q}_n^b) \mathbf{g} + \mathbf{a}. \quad (78)$$

方程 (78) 消除了对复杂的车辆动力学建模的需要, 但忽略了动力学信息, 该信息可能通过在协方差矩阵 \mathbf{P} 中建立互相关项来提高估计器性能。

在实践中, 我们发现使用方程 (76) 和 (78) 的组合最为成功。注意到方程 (76) 中的未知推力项只出现在 z 分量中, 通过将方程 (77) 中的 z 分量代入方程 (76) 以获得混合传播模型

$$\dot{\mathbf{v}} = [\mathbf{v}] \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}(\mathbf{q}_n^b) \mathbf{g} + a_z \mathbf{k} - \mu \boldsymbol{\Pi}_k \mathbf{v}, \quad (79)$$

其中 $a_z = \mathbf{k}^\top \mathbf{a}$, $\mu \triangleq \mu_0/m$ 是比阻力系数, 并且

$$\boldsymbol{\Pi}_k \triangleq \mathbf{I} - \mathbf{k} \mathbf{k}^\top$$

是一个投影矩阵, 投射到 \mathbf{k} 轴法线的平面上。

做为这种混合方法的结果, 我们考虑将陀螺仪和 z 轴加速计测量做为系统输入, 同时使用水平加速计测量做为更新步骤中的反馈。因此, 系统输入和输入噪声定义为

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{a}_z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_\omega \\ \nu_{a_z} \end{bmatrix},$$

其中 $\tilde{a}_z = \mathbf{k}^\top \tilde{\mathbf{a}}$ 和 $\nu_{a_z} = \mathbf{k}^\top \nu_a$ 。

6.1.3 传播模型

系统动力学建模为

$$\dot{\mathbf{p}}_n^b = \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_n^b) \mathbf{v} \quad (80a)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_n^b = \frac{1}{2} \mathbf{q}_n^b \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (80b)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = [\mathbf{v}] \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}(\mathbf{q}_n^b) \mathbf{g} + a_z \mathbf{k} - \mu \boldsymbol{\Pi}_k \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}_v \quad (80c)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_\omega = \boldsymbol{\eta}_{\beta_\omega}$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_a = \boldsymbol{\eta}_{\beta_a}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_n^k = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_n^k = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mu} = 0,$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 由方程 (72a) 给出, a_z 由方程 (72b) 的 z 分量给出, $\boldsymbol{\eta}_v$ 、 $\boldsymbol{\eta}_{\beta_\omega}$ 和 $\boldsymbol{\eta}_{\beta_a}$ 是对应状态的零均值高斯噪声过程。状态 \mathbf{p}_n^b 根据标准运动学模型传播, \mathbf{q}_n^b 根据方程 (29) 和第 3.4 节的讨论传播, \mathbf{v} 根据方程 (79) 传播。偏差状态 $\boldsymbol{\beta}_\omega$ 和 $\boldsymbol{\beta}_a$ 的动力学模型为随机游走, 而关键帧状态 \mathbf{p}_n^k 和 \mathbf{q}_n^k 表示静态坐标帧的相对位姿, 因此不发生变化。阻力项 μ 是常数, 因此具有零动态性, 但这种状态下的不确定性通过赋予其非零初始协方差来考虑。

并且

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -[\hat{\mathbf{v}}] & -\mathbf{k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

6.2 测量模型

加速计、高度计和视觉里程计或激光扫描匹配算法提供测量值以约束状态估计。对于每个传感器，定义了测量模型、残差模型和残差 Jacobian 矩阵。

6.2.1 加速计

因为加速计测量的 z 部分被用作传播的输入，所以更新步骤仅使用 $\tilde{\mathbf{a}}$ 的 x 和 y 分量，因此

$$\mathbf{z}_{\text{acc}} = \mathbf{I}_{2 \times 3} \tilde{\mathbf{a}}.$$

加速计测量模型可由方程 (71a) 和 (77) 导出，即

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{acc}}(\mathbf{x}, \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) &= \mathbf{I}_{2 \times 3} (\mathbf{a} + \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{a}}) \\ &= \mathbf{I}_{2 \times 3} \left(\frac{T}{m} \mathbf{k} - \frac{\mu_0}{m} \mathbf{v} + \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{a}} \right) \\ &= \mathbf{I}_{2 \times 3} (-\mu \mathbf{v} + \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{a}}), \end{aligned} \quad (82)$$

其中推力项 $\frac{T}{m} \mathbf{k}$ 因 $\mathbf{I}_{2 \times 3} \frac{T}{m} \mathbf{k} = 0$ 而消掉，我们可以根据方程 (44) 用 $\delta \mathbf{x}$ 和 $\hat{\mathbf{x}}$ 展开该模型，并消掉二阶项³，得到

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{acc}}(\mathbf{x}, \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) &= \mathbf{I}_{2 \times 3} \left(-(\hat{\mu} + \delta\mu)(\hat{\mathbf{v}} + \delta\mathbf{v}) + \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{a}} + \delta\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{a}} \right) \\ &\approx \mathbf{I}_{2 \times 3} \left(-\hat{\mu}\hat{\mathbf{v}} - \hat{\mu}\delta\mathbf{v} - \delta\mu\hat{\mathbf{v}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{a}} + \delta\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{a}} \right). \end{aligned}$$

从方程 (82)，估计测量值为

$$\mathbf{h}_{\text{acc}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \mathbf{I}_{2 \times 3} \left(-\hat{\mu}\hat{\mathbf{v}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{a}} \right).$$

对于给定的加速度测量值 \mathbf{z}_{acc} ，残差为

$$\mathbf{r}_{\text{acc}} = \mathbf{z}_{\text{acc}} - \mathbf{h}_{\text{acc}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}),$$

³因为 Jacobian 矩阵是在 $\delta \mathbf{x} = \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$ 时评估的，所以这些变量中的任何二阶项都将消失。我们利用这一事实来简化推导，在前面消掉这些二阶项。

并被建模为

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\text{acc}} &= \mathbf{h}_{\text{acc}}(\mathbf{x}, \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) - \mathbf{h}_{\text{acc}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{I}_{2 \times 3}(-\hat{\mu}\delta\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}\delta\mu + \delta\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{a}}).\end{aligned}$$

因此, 测量 Jacobian 矩阵为

$$\mathbf{H}_{\text{acc}} = \mathbf{I}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\hat{\mu}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix}.$$

测量噪声是加速计噪声的 x 和 y 分量,

$$\mathbf{R}_{\text{acc}} = \mathbf{I}_{2 \times 3} E[\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{a}} \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{a}}^T] \mathbf{I}_{2 \times 3}^T.$$

6.2.2 高度计

高度计模型适用于超声波测距仪, 它报告的是其圆锥视场中最近的回波。因此, 只要横滚角和俯仰角适中, 无论车辆当前的姿态如何, 传感器都会报告距地高度。测量模型和它的估计是

$$\begin{aligned}h_{\text{alt}}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{k}^T \mathbf{p}_n^b + \eta_{\text{alt}} \\ h_{\text{alt}}(\hat{\mathbf{x}}) &= -\mathbf{k}^T \hat{\mathbf{p}}_n^b.\end{aligned}\tag{83}$$

对于给定的高度计测量值 z_{alt} , 残差为

$$r_{\text{alt}} = z_{\text{alt}} - h_{\text{alt}}(\hat{\mathbf{x}}),$$

其被建模为

$$\begin{aligned}r_{\text{alt}} &= h_{\text{alt}}(\mathbf{x}) - h_{\text{alt}}(\hat{\mathbf{x}}) \\ &= -\mathbf{k}^T \mathbf{p}_n^b + \eta_{\text{alt}} + \mathbf{k}^T \hat{\mathbf{p}}_n^b \\ &= -\mathbf{k}^T \delta \mathbf{p}_n^b + \eta_{\text{alt}}\end{aligned}$$

导致测量 Jacobian 矩阵为

$$\mathbf{H}_{\text{alt}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

6.2.3 视觉里程计变换

与以前的测量模型相比, 纳入视觉里程算法的测量要复杂得多。图 7 概述了视觉里程计输出和状态之间的关系。视觉里程计输出 $(\mathbf{p}_{kc}^c, \mathbf{q}_{kc}^c)$ 将当前相机帧与关键帧的相机帧相关联。变换 $(\mathbf{p}_b^c, \mathbf{q}_b^c)$ 表示相机帧相对于车辆质心的位姿。通常, 视觉里程算法中使用的相机帧是从图像平面导出的, 这样相机帧的 z 轴参考向前运动 (深度)。在这种情况下, \mathbf{q}_b^c 对从机体帧的向前-向右-向下 (forward-right-down) 坐标帧到相机使用的坐标帧的映射进行编码。如 Leishman 和 McLain(2014)[22] 所述, 变换 $(\mathbf{p}_b^c, \mathbf{q}_b^c)$ 可以通过离线校准或在线校准找到。在本文中, 我们假设相机是刚性地安装在机体上, 并且 $(\mathbf{p}_b^c, \mathbf{q}_b^c)$ 是静态的和已知的。另外, 因为 $(\mathbf{p}_k^{kc}, \mathbf{q}_k^{kc})$ 也表示机体和相机之间的变换, 但是在关键帧时刻, $\mathbf{p}_k^{kc} = \mathbf{p}_b^c$ 并且 $\mathbf{q}_k^{kc} = \mathbf{q}_b^c$ 。

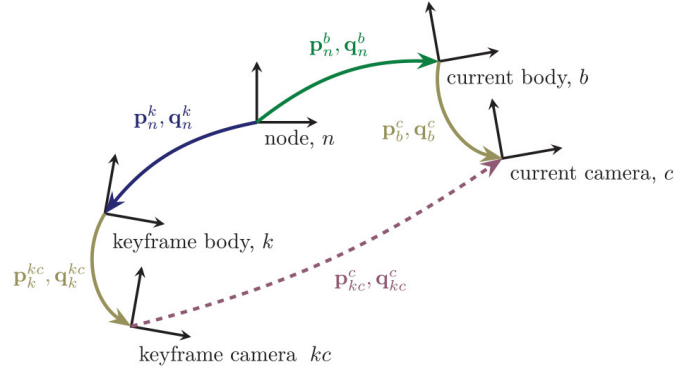


图 7: 与 iRN 视觉里程测量模型相关的变换。变换 $(\mathbf{p}_{kc}^c, \mathbf{q}_{kc}^c)$ 是视觉里程算法的输出。变换 $(\mathbf{p}_b^c, \mathbf{q}_b^c)$ 定义了相机帧相对于车辆质心的位姿, 并假定是固定的和已知的。帧 k 表示关键帧时刻机体的位姿, 帧 kc 表示相机当时的位姿。因此, $\mathbf{p}_k^{kc} = \mathbf{p}_b^c$ 并且 $\mathbf{q}_k^{kc} = \mathbf{q}_b^c$ 。

图 7 可以用来非正式地理解定义相对状态如何提高可观测性。位姿 $(\mathbf{p}_n^k, \mathbf{q}_n^k)$ 编码关键帧声明时车辆的横滚、俯仰和高度, 所有这些都可以通过高度计和 IMU 观测到。这一事实, 与假设 $(\mathbf{p}_b^c, \mathbf{q}_b^c)$ 是已知的相关, 确保了测量 $(\mathbf{p}_{kc}^c, \mathbf{q}_{kc}^c)$ 约束车辆的当前位姿 $(\mathbf{p}_n^b, \mathbf{q}_n^b)$ 。

使用图 7, 相对变换测量被建模为

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{vot}}(\mathbf{x}) &= {}^{kc}\mathbf{p}_{kc}^c + \boldsymbol{\eta}_{\text{vot}} \\ &= -{}^{kc}\mathbf{p}_k^{kc} - {}^{kc}\mathbf{p}_n^k + {}^{kc}\mathbf{p}_n^b + {}^{kc}\mathbf{p}_b^c + \boldsymbol{\eta}_{\text{vot}} \\ &= -\mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{kc}) {}^k\mathbf{p}_k^{kc} \\ &\quad - \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{kc}) \mathbf{R}(\mathbf{q}_n^k) {}^n\mathbf{p}_n^k + \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{kc}) \mathbf{R}(\mathbf{q}_n^k) {}^n\mathbf{p}_n^b \\ &\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^{kc}) \mathbf{R}(\mathbf{q}_n^k) \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_n^b) {}^b\mathbf{p}_b^c + \boldsymbol{\eta}_{\text{vot}}. \end{aligned}$$

抛开标号, 回顾一下 $\mathbf{p}_k^{kc} = \mathbf{p}_b^c$ 和 $\mathbf{q}_k^{kc} = \mathbf{q}_b^c$, 这就变成了

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{vot}}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{p}_b^c \\ &\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\mathbf{q}_n^k) (\mathbf{p}_n^b - \mathbf{p}_n^k) \\ &\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\mathbf{q}_n^k) \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_n^b) \mathbf{p}_b^c + \boldsymbol{\eta}_{\text{vot}}. \end{aligned} \tag{84}$$

我们根据方程 (44) 和 (31a) 展开这个模型, 然后用方程 (33) 和 (34) 获得

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{vot}}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{p}_b^c \\ &\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\delta \mathbf{q}_n^k) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) (\hat{\mathbf{p}}_n^b + \delta \mathbf{p}_n^b - \hat{\mathbf{p}}_n^k - \delta \mathbf{p}_n^k) \\ &\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\delta \mathbf{q}_n^k) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{R}^\top(\delta \mathbf{q}_n^b) \mathbf{p}_b^c + \boldsymbol{\eta}_{\text{vot}} \\ &\approx -\mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{p}_b^c \\ &\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \left(\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\theta}_n^k \end{bmatrix} \right) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) (\hat{\mathbf{p}}_n^b + \delta \mathbf{p}_n^b - \hat{\mathbf{p}}_n^k - \delta \mathbf{p}_n^k) \\ &\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \left(\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\theta}_n^k \end{bmatrix} \right) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \left(\mathbf{I} + \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\theta}_n^b \end{bmatrix} \right) \mathbf{p}_b^c \\ &\quad + \boldsymbol{\eta}_{\text{vot}}. \end{aligned}$$

展开并删除二阶项,

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_{\text{vot}}(\mathbf{x}) \approx & -\mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{p}_b^c \\
& + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) (\hat{\mathbf{p}}_n^b + \delta \mathbf{p}_n^b - \hat{\mathbf{p}}_n^k - \delta \mathbf{p}_n^k) \\
& - \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \left[\delta \boldsymbol{\theta}_n^k \right] \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) (\hat{\mathbf{p}}_n^b - \hat{\mathbf{p}}_n^k) \\
& + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{p}_b^c \\
& - \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \left[\delta \boldsymbol{\theta}_n^k \right] \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{p}_b^c \\
& + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \left[\delta \boldsymbol{\theta}_n^b \right] \mathbf{p}_b^c + \boldsymbol{\eta}_{\text{vot}}.
\end{aligned}$$

估计的测量模型是

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_{\text{vot}}(\hat{\mathbf{x}}) = & -\mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{p}_b^c + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) (\hat{\mathbf{p}}_n^b - \hat{\mathbf{p}}_n^k) \\
& + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{p}_b^c.
\end{aligned}$$

对于给定的相对位置测量 \mathbf{z}_{vot} , 残差为

$$\mathbf{r}_{\text{vot}} = \mathbf{z}_{\text{vot}} - \mathbf{h}_{\text{vot}}(\hat{\mathbf{x}}),$$

其被建模为

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\text{vot}} = & \mathbf{h}_{\text{vot}}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}_{\text{vot}}(\hat{\mathbf{x}}) \\
= & \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) (\delta \mathbf{p}_n^b - \delta \mathbf{p}_n^k) \\
& - \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \left[\delta \boldsymbol{\theta}_n^k \right] \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) (\hat{\mathbf{p}}_n^b - \hat{\mathbf{p}}_n^k) \\
& - \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \left[\delta \boldsymbol{\theta}_n^k \right] \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{p}_b^c \\
& + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \left[\delta \boldsymbol{\theta}_n^b \right] \mathbf{p}_b^c + \boldsymbol{\eta}_{\text{vot}} \\
= & \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) (\delta \mathbf{p}_n^b - \delta \mathbf{p}_n^k) \\
& + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \left[\mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) (\hat{\mathbf{p}}_n^b - \hat{\mathbf{p}}_n^k) \right] \delta \boldsymbol{\theta}_n^k \\
& + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \left[\mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{p}_b^c \right] \delta \boldsymbol{\theta}_n^k \\
& - \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \left[\mathbf{p}_b^c \right] \delta \boldsymbol{\theta}_n^b + \boldsymbol{\eta}_{\text{vot}}.
\end{aligned}$$

通过微分, 我们获得了残差 Jacobian 矩阵

$$\mathbf{H}_{\text{vot}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_3 & \mathbf{H}_4 & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_1 &= \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k), \\
\mathbf{H}_2 &= -\mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \left[\mathbf{p}_b^c \right], \\
\mathbf{H}_3 &= -\mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k), \\
\mathbf{H}_4 &= \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \left[\mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^k) (\hat{\mathbf{p}}_n^b - \hat{\mathbf{p}}_n^k + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{p}_b^c) \right].
\end{aligned}$$

6.2.4 视觉里程表旋转

相对旋转测量模型也由图 7 得出。具体来说,

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_{\text{vor}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{q}_{kc}^c \\ &= (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes (\mathbf{q}_n^k)^{-1} \otimes \mathbf{q}_n^b \otimes \mathbf{q}_b^c \otimes (\boldsymbol{\eta}_{\text{vor}})^\wedge.\end{aligned}\quad (85)$$

我们根据方程 (31a) 将其扩展为

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_{\text{vor}}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes (\hat{\mathbf{q}}_n^k \otimes \delta \mathbf{q}_n^k)^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_n^b \otimes \delta \mathbf{q}_n^b \otimes \mathbf{q}_b^c \otimes (\boldsymbol{\eta}_{\text{vor}})^\wedge \\ &= (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes (\delta \mathbf{q}_n^k)^{-1} \otimes (\hat{\mathbf{q}}_n^k)^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_n^b \otimes \delta \mathbf{q}_n^b \otimes \mathbf{q}_b^c \otimes (\boldsymbol{\eta}_{\text{vor}})^\wedge.\end{aligned}$$

估计的测量模型是

$$\mathbf{h}_{\text{vor}}(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes (\hat{\mathbf{q}}_n^k)^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_n^b \otimes \mathbf{q}_b^c.$$

对于 \mathbf{z}_{vor} , 从方程 (64), 残差被建模为

$$\mathbf{r}_{\text{vor}} = \left(\mathbf{h}_{\text{vor}}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} \otimes \mathbf{z}_{\text{vor}} \right)^\vee,$$

其已被建模, 然后用方程 (41) 和 (42) 简化为

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\text{vor}} &= \left(\mathbf{h}_{\text{vor}}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} \otimes \mathbf{h}_{\text{vor}}(\mathbf{x}) \right)^\vee \\ &= \left((\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes (\hat{\mathbf{q}}_n^b)^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_n^k \otimes \mathbf{q}_b^c \otimes (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes (\delta \mathbf{q}_n^k)^{-1} \otimes \right. \\ &\quad \left. \otimes (\hat{\mathbf{q}}_n^k)^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_n^b \otimes \delta \mathbf{q}_n^b \otimes \mathbf{q}_b^c \otimes (\boldsymbol{\eta}_{\text{vor}})^\wedge \right)^\vee \\ &= \left((\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes \left((\hat{\mathbf{q}}_n^b)^{-1} \otimes \left(\hat{\mathbf{q}}_n^k \otimes (\delta \mathbf{q}_n^k)^{-1} \otimes (\hat{\mathbf{q}}_n^k)^{-1} \right) \otimes \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \otimes \hat{\mathbf{q}}_n^b \otimes \delta \mathbf{q}_n^b \right) \otimes \mathbf{q}_b^c \right)^\vee + \boldsymbol{\eta}_{\text{vor}} \\ &= \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \left(-\mathbf{R}(\mathbf{q}_n^b) \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_n^k) \delta \boldsymbol{\theta}_n^k + \delta \boldsymbol{\theta}_n^b \right) + \boldsymbol{\eta}_{\text{vor}}.\end{aligned}$$

测量 Jacobian 矩阵是

$$\mathbf{H}_{\text{vor}} = [\mathbf{0}, \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c), \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, -\mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\mathbf{q}_n^b) \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_n^k), \mathbf{0}].$$

与以前的工作相比 (Leishman 和 McLain, 2014[22]), 这个 Jacobian 矩阵的推导是一个新的贡献。

6.2.5 激光扫描匹配器

激光扫描匹配器测量模型是这项工作的一个新贡献。激光扫描匹配算法, 如迭代最近点 (iterative closest point, ICP) 算法 (Censi, 2008[11]), 计算激光扫描仪在关键帧和当前扫描之间的平面平移和航向变化。由于无人机的平面外运动 (横滚和俯仰) 引入了扫描匹配算法无法模拟的畸变, 因此在实践中, 激光扫描通常在传递给扫描匹配器之前进行倾斜补偿 (Shen 等人, 2011[30]; Tomic 等人, 2012[33])。倾斜补偿通过将激光扫描投影到一层水平面上来矫正激光扫描, 使用 2.5D 世界假设, 即所有扫描表面垂直均匀。在这个过程中, 地板或天花板的扫描返回也经常被删除。2.5D 假设

在现实世界中通常被违反,但在城市环境中,这种方法已被证明提供了可接受的性能 (Shen 等人, 2011[30])。

为了对激光扫描进行倾斜补偿,我们首先计算四元数 \mathbf{q}_c^o , 它将已横滚的和已俯仰的激光帧 c (包括机体到传感器变换中的任何横滚或俯仰) 中表示的点旋转到正射校正帧 o , 为

$$\mathbf{q}_c^o = (\mathbf{q}_b^c)^{-1} (\mathbf{q}_{\theta_n^b} \otimes \mathbf{q}_{\phi_n^b})^{-1},$$

其中 $\mathbf{q}_{\theta_n^b}$ 和 $\mathbf{q}_{\phi_n^b}$ 是用方程 (37) 和 (39) 从 \mathbf{q}_n^b 计算出来的。然后, 对于一个激光扫描 $\mathcal{S} = \{(r, \theta)\}$ 表示为一组距离 (range)/方位 (bearing) 元组 (r, θ) , 倾斜补偿扫描 \mathcal{S}' 被计算为

$$\mathcal{S}' = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} = \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\mathbf{q}_c^o) \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \forall (r, \theta) \in \mathcal{S} \right\}.$$

对于关键帧扫描的正射校正, 我们注意到因为 $\mathbf{q}_n^k = \mathbf{q}_{\theta_n^b} \otimes \mathbf{q}_{\phi_n^b}$ (如第 6.3 节所示) 和 $\mathbf{q}_k^{kc} = \mathbf{q}_b^c \mathbf{q}_c^o$, 旋转 \mathbf{q}_c^o 等于

$$\mathbf{q}_c^o = (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes (\mathbf{q}_n^k)^{-1}.$$

相关旋转矩阵由下式给出

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{q}_c^o) &= \mathbf{R}((\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes (\mathbf{q}_n^k)^{-1}) \\ &= \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_n^k) \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_b^c). \end{aligned}$$

在下面的讨论中, 我们独立地推导测量模型的平移和航向部分, 但是它们可以通过叠加两个测量模型向量和 Jacobian 矩阵组合成一个更新。

通过在与关键帧相关联的正射校正帧中表达方程 (84) 的视觉里程测量模型, 然后提取 x 和 y 分量来构造平移测量模型:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{lt}(\mathbf{x}) &= \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\mathbf{q}_c^o) \mathbf{h}_{vot}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\eta}_{lt} \\ &= \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_n^k) \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{h}_{vot}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\eta}_{lt} \\ &= \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_n^k) \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_b^c) (-\mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{p}_b^c \\ &\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\mathbf{q}_n^k) (\mathbf{p}_n^b - \mathbf{p}_n^k) \\ &\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}(\mathbf{q}_n^k) \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_n^b) \mathbf{p}_b^c) + \boldsymbol{\eta}_{lt} \\ &= \mathbf{I}_{2 \times 3} (-\mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_n^k) \mathbf{p}_b^c \\ &\quad + \mathbf{p}_n^b - \mathbf{p}_n^k + \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_n^b) \mathbf{p}_b^c) + \boldsymbol{\eta}_{lt}. \end{aligned}$$

我们用方程 (44)、(31a) 和 (34) 展开, 然后去掉二阶项, 得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_{lt}(\mathbf{x}) &= \mathbf{I}_{2 \times 3} \left(-\mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_n^k) \mathbf{R}^\top (\delta \mathbf{q}_n^k) \mathbf{p}_b^c + \hat{\mathbf{p}}_n^b + \delta \mathbf{p}_n^b \right. \\
&\quad \left. - \hat{\mathbf{p}}_n^k - \delta \mathbf{p}_n^b + \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{R}^\top (\mathbf{q}_n^b) \mathbf{p}_b^c \right) + \boldsymbol{\eta}_{lt} \\
&\approx \mathbf{I}_{2 \times 3} \left(-\mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_n^k) \left(\mathbf{I} + \left[\delta \boldsymbol{\theta}_n^k \right] \right) \mathbf{p}_b^c + \hat{\mathbf{p}}_n^b + \delta \mathbf{p}_n^b \right. \\
&\quad \left. - \hat{\mathbf{p}}_n^k - \delta \mathbf{p}_n^b + \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_n^b) \left(\mathbf{I} + \left[\delta \boldsymbol{\theta}_n^b \right] \right) \mathbf{p}_b^c \right) + \boldsymbol{\eta}_{lt} \\
&= \mathbf{I}_{2 \times 3} \left(-\mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_n^k) \mathbf{p}_b^c + \hat{\mathbf{p}}_n^b - \hat{\mathbf{p}}_n^k + \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{p}_b^c \right) \\
&\quad + \mathbf{I}_{2 \times 3} \left(\mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_n^k) \left[\mathbf{p}_b^c \right] \delta \boldsymbol{\theta}_n^k + \delta \mathbf{p}_n^b - \delta \mathbf{p}_n^k \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_n^b) \left[\mathbf{p}_b^c \right] \delta \boldsymbol{\theta}_n^b \right) + \boldsymbol{\eta}_{lt}.
\end{aligned}$$

估计的测量模型是

$$\mathbf{h}_{lt}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{I}_{2 \times 3} \left(-\mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_n^k) \mathbf{p}_b^c + \hat{\mathbf{p}}_n^b - \hat{\mathbf{p}}_n^k + \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{p}_b^c \right),$$

并且残差为

$$\mathbf{r}_{lt} = \mathbf{z}_{lt} - \mathbf{h}_{lt}(\hat{\mathbf{x}}),$$

其被建模为

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{lt} &= \mathbf{h}_{lt}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}_{lt}(\hat{\mathbf{x}}) \\
&= \mathbf{I}_{2 \times 3} \left(\mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_n^k) \left[\mathbf{p}_b^c \right] \delta \boldsymbol{\theta}_n^k + \delta \mathbf{p}_n^b - \delta \mathbf{p}_n^k \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_n^b) \left[\mathbf{p}_b^c \right] \delta \boldsymbol{\theta}_n^b \right) + \boldsymbol{\eta}_{lt}.
\end{aligned}$$

测量 Jacobian 矩阵是

$$\mathbf{H}_{lt} = \mathbf{I}_{2 \times 3} \left[\mathbf{I}, -\mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_n^b) \left[\mathbf{p}_b^c \right], \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, -\mathbf{I}, \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_n^k) \left[\mathbf{p}_b^c \right], \mathbf{0} \right].$$

测量模型的航向部分的推导遵循类似的策略。回顾第 3.2 节，四元数共轭操作可用于表达在另一坐标系中四元数的向量部分，我们首先将视觉里程计旋转模型从方程 (98) 旋转到正射校正帧中，从而构建航向测量模型：

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{lr} &= (\mathbf{q}_c^o)^{-1} \otimes \mathbf{h}_{vor}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{q}_c^o \\
&= \mathbf{q}_n^k \otimes \mathbf{q}_b^c \otimes \mathbf{h}_{vor}(\mathbf{x}) \otimes (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes (\mathbf{q}_n^k)^{-1} \\
&= \mathbf{q}_n^k \otimes \mathbf{q}_b^c \otimes (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes (\mathbf{q}_n^k)^{-1} \\
&\quad \otimes \mathbf{q}_n^b \otimes \mathbf{q}_b^c \otimes (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes (\mathbf{q}_n^k)^{-1} \\
&= \mathbf{q}_n^b \otimes (\mathbf{q}_n^k)^{-1}.
\end{aligned}$$

然后，航向测量模型是 \mathbf{q}_{lr} 的偏航分量：

$$\begin{aligned}
h_{lr}(\mathbf{x}) &= \psi(\mathbf{q}_{lr}) + \eta_{lr} \\
&\triangleq \psi_{lr} + \eta_{lr}.
\end{aligned}$$

估计的测量模型是

$$\begin{aligned} h_{\text{lr}}(\hat{\mathbf{x}}) &= \psi(\hat{\mathbf{q}}_{\text{lr}}) \\ &\triangleq \hat{\psi}_{\text{lr}}, \end{aligned}$$

其中

$$\hat{\mathbf{q}}_{\text{lr}} = \hat{\mathbf{q}}_n^b \otimes (\hat{\mathbf{q}}_n^k)^{-1}.$$

残差由下式给出

$$r_{\text{lr}} = z_{\text{lr}} - h_{\text{lr}}(\hat{\mathbf{x}}),$$

其被建模为

$$\begin{aligned} r_{\text{lr}} &= h_{\text{lr}}(\mathbf{x}) - h_{\text{lr}}(\hat{\mathbf{x}}) \\ &= \psi_{\text{lr}} + \eta_{\text{lr}} - \hat{\psi}_{\text{lr}} \\ &= \mathbf{k}^\top \Delta_{\text{lr}} + \eta_{\text{lr}}, \end{aligned}$$

其中

$$\Delta_{\text{lr}} = \begin{bmatrix} \phi_{\text{lr}} - \hat{\phi}_{\text{lr}} \\ \theta_{\text{lr}} - \hat{\theta}_{\text{lr}} \\ \psi_{\text{lr}} - \hat{\psi}_{\text{lr}} \end{bmatrix}$$

如附录 A 所示。然后我们可以用链式法则计算残差的 Jacobian 矩阵，即

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{lr}} &= \frac{\partial r_{\text{lr}}}{\partial \delta \mathbf{x}} \\ &= \frac{\partial r_{\text{lr}}}{\partial \Delta_{\text{lr}}} \frac{\partial \Delta_{\text{lr}}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{\text{lr}}} \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{\text{lr}}}{\partial \delta \mathbf{x}} \\ &= \mathbf{k}^\top \mathbf{N}_{\Delta_{\text{lr}}} \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{\text{lr}}}{\partial \delta \mathbf{x}}, \end{aligned} \tag{86}$$

其中 $\mathbf{N}_{\Delta_{\text{lr}}}$ 由附录 A 中的方程 (100) 给出。我们使用方程 (30a)、(29a)、(40) 和 (41) 计算 $\delta \boldsymbol{\theta}_{\text{lr}}$ ，即

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}_{\text{lr}} &= (\hat{\mathbf{q}}_{\text{lr}})^{-1} \otimes \mathbf{q}_{\text{lr}} \\ &= \left(\hat{\mathbf{q}}_n^b \otimes (\hat{\mathbf{q}}_n^k)^{-1} \right)^{-1} \otimes \mathbf{q}_n^b \otimes (\mathbf{q}_n^k)^{-1} \\ &= \hat{\mathbf{q}}_n^k \otimes (\hat{\mathbf{q}}_n^b)^{-1} \\ &\quad \otimes \hat{\mathbf{q}}_n^b \otimes \delta \mathbf{q}_n^b \otimes (\delta \mathbf{q}_n^k)^{-1} \otimes (\hat{\mathbf{q}}_n^k)^{-1} \\ &= \hat{\mathbf{q}}_n^k \otimes \delta \mathbf{q}_n^b \otimes (\delta \mathbf{q}_n^k)^{-1} \otimes (\hat{\mathbf{q}}_n^k)^{-1} \\ &\implies \delta \boldsymbol{\theta}_{\text{lr}} = \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_n^k) \left(\delta \boldsymbol{\theta}_n^b - \delta \boldsymbol{\theta}_n^k \right), \end{aligned}$$

我们取其偏导数并代入方程 (86)，得到

$$\mathbf{H}_{\text{lr}} = \mathbf{k}^\top \mathbf{N}_{\Delta_{\text{lr}}} \left[\mathbf{0}, \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_n^k), \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, -\mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_n^k), \mathbf{0} \right].$$

6.3 关键帧重置

当建立一个新的关键帧时，状态的相对部分被重置，如第 5 节所述。如图 5(b) 所示，新的节点帧被定位在车辆当前真实位置正下方的零高度，这样状态的位置部分被重置为

$$\mathbf{p}_n^{b+} = \mathbf{p}_n^{k+} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{nz}^b \end{bmatrix}$$

并被估计为

$$\hat{\mathbf{p}}_n^{b+} = \hat{\mathbf{p}}_n^{k+} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{p}_{nz}^b \end{bmatrix}. \quad (87)$$

因此，误差状态重置为

$$\delta \mathbf{p}_n^{b+} = \delta \mathbf{p}_n^{k+} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta p_{nz}^b \end{bmatrix}$$

并且

$$\frac{\partial \delta \mathbf{p}_n^{b+}}{\partial \delta \mathbf{p}_n^b} = \frac{\partial \delta \mathbf{p}_n^{k+}}{\partial \delta \mathbf{p}_n^b} = \mathbf{k} \mathbf{k}^\top.$$

状态的其它向量部分，包括 \mathbf{v} 、 β_ω 、 β_a 和 μ ，都不改变。

重置姿态状态的偏航部分稍微复杂一些。每一个新的节点帧的建立都要使车辆的偏航相等为零。在方程 (39) 中设置 $\psi = 0$ ，我们看到

$$\hat{\mathbf{q}}_n^{b+} = \hat{\mathbf{q}}_n^{k+} = \mathbf{q}_{\hat{\theta}} \otimes \mathbf{q}_{\hat{\phi}} \quad (88)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \frac{\hat{\theta}}{2} \sin \frac{\hat{\phi}}{2} \\ \sin \frac{\hat{\theta}}{2} \cos \frac{\hat{\phi}}{2} \\ -\sin \frac{\hat{\theta}}{2} \sin \frac{\hat{\phi}}{2} \\ \cos \frac{\hat{\theta}}{2} \cos \frac{\hat{\phi}}{2} \end{bmatrix}, \quad (89)$$

其中 $\hat{\phi}$ 和 $\hat{\theta}$ 是用方程 (37) 从 $\hat{\mathbf{q}}_n^b$ 计算出来的。姿态误差状态的协方差更新受制于

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_\theta &= \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_n^{b+}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_n^b} = \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_n^{k+}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_n^b} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \sin \hat{\phi} \tan \hat{\theta} & \cos \hat{\phi} \tan \hat{\theta} \\ 0 & \cos^2 \hat{\phi} & -\cos \hat{\phi} \sin \hat{\phi} \\ 0 & -\cos \hat{\phi} \sin \hat{\phi} & \sin^2 \hat{\phi} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其在附录 E 中推导出来。当横滚和俯仰近似为零时，我们注意到

$$\mathbf{N}_\theta \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

总之，关键帧重置需要根据方程 (87) 和 (89) 更新状态估计，并且根据方程 (70) 更新协方差，其中

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}\mathbf{k}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}\mathbf{k}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

7 机体固连相对导航 (bRN)

虽然当定义车辆相对于惯性定义原点的位姿时，使用更传统的动力学方程，并导致更直观的状态估计，但越来越多的估计器使用机体固连或机器人中心的状态定义。在机体固连的情况下，根据当前车辆的位姿估计惯性固定原点的位置和姿态。机体固连状态定义已被证明可以提高滤波器的一致性 (Castellanos 等人, 2007[10])，并促进局部制导和控制算法 (Owen 和 Montano, 2006[28]; Yu 和 Beard, 2013[39])。例如，避障和视觉伺服问题要求车辆在估计对象相对于当前位姿的位姿后做出导航决策。当需要状态的惯性表示时，机体固连状态及其协方差可以容易地变换为惯性系，如附录 G 中所述。

相对导航体系结构中的相对估计器可以用一个机体固连的状态定义来表示。在这种情况下，机体固连相对导航 (body-fixed Relative Navigation, bRN) 估计节点帧相对于当前机体的状态。与之前一样，当声明新的关键帧时，水平位置和方向状态将重置。其主要区别在于采用了机体固连动力学，并且姿态误差的定义也不同。

除非明确规定，第 6 节中的方程和定义也适用于 bRN。本节遵循与第 6 节相同的大纲，首先在第 7.1 节中描述系统的输入、状态和动力学，然后在第 7.2 节和第 7.3 节中分别定义测量模型和关键帧重置。本节中的推导代表了先前工作中未包含的新贡献。

7.1 状态动力学

bRN 估计节点帧 n 相对于并且是在当前机体帧 b 中表达的位姿，表示为 $({}^b\mathbf{p}_b^n, \mathbf{q}_b^n)$ 。状态 ${}^b\mathbf{p}_b^n$ 和 ${}^n\mathbf{p}_b^b$ 表示相同的位移，但指向相反的方向，并在不同的帧中表达。具体地说，

$${}^b\mathbf{p}_b^n = -\mathbf{R}(\mathbf{q}_b^n) {}^n\mathbf{p}_b^b. \quad (90)$$

状态 \mathbf{q}_b^n 和 \mathbf{q}_n^b 彼此互逆：

$$\mathbf{q}_b^n = (\mathbf{q}_n^b)^{-1}. \quad (91)$$

该估计器还跟踪第 n 帧相对于第 k 帧的位姿, 表示为 $({}^k\mathbf{p}_k^n, \mathbf{q}_k^n)$, 如图 8 所示。对于 bRN, 车辆的状态是元组

$$\mathbf{x} \triangleq (\mathbf{p}_b^n, \mathbf{q}_b^n, \mathbf{v}, \beta_\omega, \beta_a, \mathbf{p}_k^n, \mathbf{q}_k^n, \mu),$$

并且输入与第 6.1 节保持不变。状态动力学是

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_b^n &= -[\boldsymbol{\omega}] \mathbf{p}_b^n - \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{q}}_b^n &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_b^n \end{aligned} \quad (92a)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = [\mathbf{v}] \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}^\top (\mathbf{q}_b^n) \mathbf{g} + a_z \mathbf{k} - \mu \boldsymbol{\Pi}_k \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}_v \quad (92b)$$

$$\dot{\beta}_\omega = \boldsymbol{\eta}_{\beta_\omega}$$

$$\dot{\beta}_a = \boldsymbol{\eta}_{\beta_a}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_k^n = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_k^n = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mu} = 0,$$

其中位置和姿态动力学的推导见附录 D, 并且其中 $\boldsymbol{\omega}$ 由方程 (72a) 给出, a_z 由方程 (72b) 的 z 分量给出。注意方程 (92b) 与方程 (80c) 只有一个矩阵转置的区别。

对于 bRN, 误差状态向量 $\delta \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{22}$ 定义为

$$\delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p}_b^{n\top} & \delta \boldsymbol{\theta}_b^{n\top} & \delta \mathbf{v}^\top & \delta \beta_\omega^\top & \delta \beta_a^\top & \delta \mathbf{p}_k^{n\top} & \delta \boldsymbol{\theta}_k^{n\top} & \delta \mu \end{bmatrix}^\top.$$

误差状态动力学的一阶近似, 也在附录 D 中推导, 为

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{p}}_b^n &\approx - \left[\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\beta}_\omega \right] \delta \mathbf{p}_b^n - \delta \mathbf{v} - [\hat{\mathbf{p}}_b^n] \delta \beta_\omega - [\hat{\mathbf{p}}_b^n] \boldsymbol{\nu}_\omega \\ \delta \dot{\boldsymbol{\theta}}_b^n &\approx - \left[\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\beta}_\omega \right] \delta \boldsymbol{\theta}_b^n + \delta \beta_\omega + \boldsymbol{\nu}_\omega \\ \delta \dot{\mathbf{v}} &\approx - [\mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{g}] \delta \boldsymbol{\theta}_b^n + \left(- \left[\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\beta}_\omega \right] - \hat{\mu} \boldsymbol{\Pi}_k \right) \delta \mathbf{v} \\ &\quad - [\hat{\mathbf{v}}] \delta \beta_\omega - \mathbf{k} \mathbf{k}^\top \delta \beta_a - \boldsymbol{\Pi}_k \hat{\mathbf{v}} \delta \mu - [\hat{\mathbf{v}}] \boldsymbol{\nu}_\omega \\ &\quad - \mathbf{k} \eta_{a_z} + \boldsymbol{\eta}_v \\ \delta \dot{\beta}_\omega &= \boldsymbol{\eta}_{\beta_\omega} \\ \delta \dot{\beta}_a &= \boldsymbol{\eta}_{\beta_a} \\ \delta \dot{\mathbf{p}}_k^n &= \mathbf{0} \\ \delta \dot{\boldsymbol{\theta}}_k^n &= \mathbf{0} \\ \delta \dot{\mu} &= 0. \end{aligned}$$

误差状态动力学相对于误差状态和输入噪声微分, 得到以下传播 Jacobian 矩阵:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\omega}}] & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & -[\hat{\mathbf{p}}_b^n] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -[\hat{\boldsymbol{\omega}}] & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -[\mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n)\mathbf{g}] & -[\hat{\boldsymbol{\omega}}] - \hat{\mu}\mathbf{\Pi}_k & -[\hat{\mathbf{v}}] & -\mathbf{k}\mathbf{k}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{\Pi}_k\hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

并且

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -[\hat{\mathbf{p}}_b^n] & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -[\hat{\mathbf{v}}] & -\mathbf{k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 定义于方程 (73)。

7.2 测量模型

当使用机体固连参数化时, 测量模型有所不同, 如下所述。

7.2.1 加速计

由于加速计模型与姿态和位置无关, 因此 bRN 模型保持不变。参见第 6.2.1 节。

7.2.2 高度计

如第 6.2.2 节所述, 声纳高度计测量距地高度。通过关联方程 (90) 和 (83), 车辆的高度为

$$h_{\text{alt}}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^n) \mathbf{p}_b^n + \eta_{\text{alt}},$$

其中旋转表示在惯性系中的高度。估计的测量模型是

$$h_{\text{alt}}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \hat{\mathbf{p}}_b^n.$$

对于给定的高度计测量值 z_{alt} , 残差为

$$r_{\text{alt}} = z_{\text{alt}} - h_{\text{alt}}(\hat{\mathbf{x}})$$

其使用方程 (31b)、(44a)、(33) 和 (4) 近似表示为

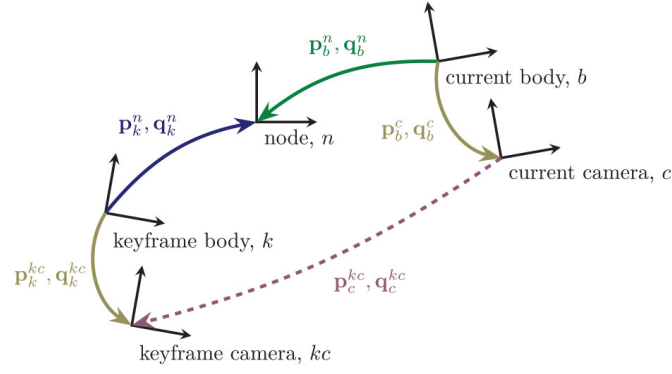


图 8: 与 bRN 视觉里程测量模型相关的变换。注意, $(\mathbf{p}_b^n, \mathbf{q}_b^n)$, $(\mathbf{p}_k^n, \mathbf{q}_k^n)$ 和 $(\mathbf{p}_{kc}^k, \mathbf{q}_{kc}^k)$ 与图 7 相反。同样的, $\mathbf{p}_k^{kc} = \mathbf{p}_b^c$ 和 $\mathbf{q}_k^{kc} = \mathbf{q}_b^c$ 。

$$\begin{aligned}
 r_{\text{alt}} &= h_{\text{alt}}(\mathbf{x}) - h_{\text{alt}}(\hat{\mathbf{x}}) \\
 &= \mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{p}_b^n + \eta_{\text{alt}} - \mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \hat{\mathbf{p}}_b^n \\
 &= \mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\delta \mathbf{q}_b^n) (\hat{\mathbf{p}}_b^n + \delta \mathbf{p}_b^n) + \eta_{\text{alt}} - \mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \hat{\mathbf{p}}_b^n \\
 &\approx \mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) (\mathbf{I} - [\delta \boldsymbol{\theta}_b^n]) (\hat{\mathbf{p}}_b^n + \delta \mathbf{p}_b^n) + \eta_{\text{alt}} - \mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \hat{\mathbf{p}}_b^n \\
 &\approx \mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \delta \mathbf{p}_b^n - \mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) [\delta \boldsymbol{\theta}_b^n] \hat{\mathbf{p}}_b^n + \eta_{\text{alt}} \\
 &= \mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \delta \mathbf{p}_b^n + \mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) [\hat{\mathbf{p}}_b^n] \delta \boldsymbol{\theta}_b^n + \eta_{\text{alt}},
 \end{aligned}$$

这导致测量 Jacobian 矩阵为

$$\mathbf{H}_{\text{alt}} = [\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n), \mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) [\hat{\mathbf{p}}_b^n], \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}].$$

7.2.3 视觉里程表平移

图 8 显示了 bRN 的相对位置和姿态测量模型。注意, $(\mathbf{p}_b^n, \mathbf{q}_b^n)$, $(\mathbf{p}_k^n, \mathbf{q}_k^n)$ 和 $(\mathbf{p}_{kc}^k, \mathbf{q}_{kc}^k)$ 的方向与图 7 相反。相对测量通常可以在任一方向进行测量。将测量定义为指向与状态估计相同的方向, 可以避免将航向估计不必要地耦合到平移测量模型中, 这在实践中证明可以提高性能。

从图 8 中, 相对位置更新为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}_{\text{vot}}(\mathbf{x}) &= {}^c \mathbf{p}_c^{kc} + \boldsymbol{\eta}_{\text{vot}} \\
 &= - {}^c \mathbf{p}_b^c + {}^c \mathbf{p}_b^n - {}^c \mathbf{p}_k^n + {}^c \mathbf{p}_k^{kc} + \boldsymbol{\eta}_{\text{vot}} \\
 &= - \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) {}^b \mathbf{p}_b^c + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) {}^b \mathbf{p}_b^n \\
 &\quad - \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_b^n) \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^n) {}^k \mathbf{p}_k^n \\
 &\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_b^n) \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^n) {}^k \mathbf{p}_k^{kc} + \boldsymbol{\eta}_{\text{vot}}.
 \end{aligned}$$

抛开标号, 回顾一下 $\mathbf{p}_k^{kc} = \mathbf{p}_b^c$ 和 $\mathbf{q}_k^{kc} = \mathbf{q}_b^c$, 这就变成

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}_{\text{vot}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) (\mathbf{p}_b^n - \mathbf{p}_b^c) \\
 &\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_b^n) \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \mathbf{p}_k^n) + \boldsymbol{\eta}_{\text{vot}}.
 \end{aligned}$$

根据方程 (44), (31b), (33) 和 (34) 的展开给出

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_{\text{vot}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) (\hat{\mathbf{p}}_b^n + \delta \mathbf{p}_b^n - \mathbf{p}_b^c) \\
&\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}^\top (\delta \mathbf{q}_b^n) \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) \mathbf{R}(\delta \mathbf{q}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n - \delta \mathbf{p}_k^n) \\
&\quad + \boldsymbol{\eta}_{\text{vot}} \\
&= \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) (\hat{\mathbf{p}}_b^n + \delta \mathbf{p}_b^n - \mathbf{p}_b^c) \\
&\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) (\mathbf{I} + [\delta \boldsymbol{\theta}_b^n]) \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{I} - [\delta \boldsymbol{\theta}_k^n]) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n - \delta \mathbf{p}_k^n) \\
&\quad + \boldsymbol{\eta}_{\text{vot}}.
\end{aligned}$$

展开并删除高阶项,

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_{\text{vot}}(\mathbf{x}) &\approx \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) (\hat{\mathbf{p}}_b^n + \delta \mathbf{p}_b^n - \mathbf{p}_b^c) \\
&\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n - \delta \mathbf{p}_k^n) \\
&\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) [\delta \boldsymbol{\theta}_b^n] \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n) \\
&\quad - \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) [\delta \boldsymbol{\theta}_k^n] (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n) + \boldsymbol{\eta}_{\text{vot}}.
\end{aligned}$$

估计的测量模型是

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_{\text{vot}}(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) (\hat{\mathbf{p}}_b^n - \mathbf{p}_b^c) \\
&\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n).
\end{aligned}$$

我们然后根据方程 (62) 对残差进行建模, 即

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\text{vot}} &= \mathbf{h}_{\text{vot}}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}_{\text{vot}}(\hat{\mathbf{x}}) \\
&= \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \delta \mathbf{p}_b^n - \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) \delta \mathbf{p}_k^n \\
&\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) [\delta \boldsymbol{\theta}_b^n] \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n) \\
&\quad - \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) [\delta \boldsymbol{\theta}_k^n] (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n) + \boldsymbol{\eta}_{\text{vot}} \\
&= \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \delta \mathbf{p}_b^n - \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) [\mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n)] \delta \boldsymbol{\theta}_b^n \\
&\quad - \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) \delta \mathbf{p}_k^n \\
&\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) [\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n] \delta \boldsymbol{\theta}_k^n + \boldsymbol{\eta}_{\text{vot}},
\end{aligned}$$

这导致残差 Jacobian 矩阵

$$\mathbf{H}_{\text{vot}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_3 & \mathbf{H}_4 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_1 &= \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c), \\
\mathbf{H}_2 &= -\mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) [\mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n)], \\
\mathbf{H}_3 &= -\mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n), \\
\mathbf{H}_4 &= \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) [\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n].
\end{aligned}$$

7.2.4 视觉里程表旋转

相对旋转测量模型也如图 8 所示。具体来说,

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_{\text{vor}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{q}_c^{kc} \\ &= (\boldsymbol{\eta}_{\text{vor}})^\vee \otimes (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes \mathbf{q}_b^n \otimes (\mathbf{q}_k^n)^{-1} \otimes \mathbf{q}_b^c \\ &= (\boldsymbol{\eta}_{\text{vor}})^\vee \otimes (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes \delta \mathbf{q}_b^n \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes \\ &\quad \otimes (\hat{\mathbf{q}}_k^n)^{-1} \otimes (\delta \mathbf{q}_k^n)^{-1} \otimes \mathbf{q}_b^c.\end{aligned}$$

估计的测量模型是

$$\mathbf{h}_{\text{vor}}(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes (\hat{\mathbf{q}}_k^n)^{-1} \otimes \mathbf{q}_b^c.$$

对于给定的相对姿态测量 \mathbf{z}_{vor} , 残差是

$$\mathbf{r}_{\text{vor}} = \left(\mathbf{z}_{\text{vor}} \otimes \mathbf{h}_{\text{vor}}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} \right)^\vee,$$

这样的模型, 然后用方程 (41) 和 (42) 简化为

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\text{vor}} &= \left(\mathbf{h}_{\text{vor}}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{h}_{\text{vor}}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} \right)^\vee \\ &= \left((\boldsymbol{\eta}_{\text{vor}})^\vee \otimes (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes \delta \mathbf{q}_b^n \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes (\hat{\mathbf{q}}_k^n)^{-1} \otimes \right. \\ &\quad \left. \otimes (\delta \mathbf{q}_k^n)^{-1} \otimes \mathbf{q}_b^c \otimes (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_k^n \otimes (\hat{\mathbf{q}}_b^n)^{-1} \otimes \mathbf{q}_b^c \right)^\vee \\ &= \left((\boldsymbol{\eta}_{\text{vor}})^\vee \otimes (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes \delta \mathbf{q}_b^n \otimes (\hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes \right. \\ &\quad \left. \otimes \left((\hat{\mathbf{q}}_k^n)^{-1} \otimes (\delta \mathbf{q}_k^n)^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_k^n \right) \otimes (\hat{\mathbf{q}}_b^n)^{-1} \right) \otimes \mathbf{q}_b^c \right)^\vee \\ &= \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) (\delta \boldsymbol{\theta}_b^n - \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_b^n) \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^n) \delta \boldsymbol{\theta}_k^n) + \boldsymbol{\eta}_{\text{vor}} \\ &= \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \delta \boldsymbol{\theta}_b^n - \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_b^n) \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^n) \delta \boldsymbol{\theta}_k^n + \boldsymbol{\eta}_{\text{vor}},\end{aligned}$$

导致测量 Jacobian 矩阵为

$$\mathbf{H}_{\text{vor}} = [\mathbf{0}, \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c), \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, -\mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_b^n) \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^n), \mathbf{0}].$$

7.2.5 激光扫描匹配器

与 iRN 的情况一样, 激光扫描在传递给扫描匹配器之前是正射校正的。描述从激光帧 c 到正射校正帧 o 的旋转的四元数 \mathbf{q}_c^o 由下式给出

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_c^o &= (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes (\mathbf{q}_{\theta_n^b} \otimes \mathbf{q}_{\phi_n^b})^{-1} \\ &= (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes \mathbf{q}_b^o,\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{q}_n^b = (\mathbf{q}_b^n)^{-1}$, $\mathbf{q}_{\theta_n^b}$ 和 $\mathbf{q}_{\phi_n^b}$ 由 \mathbf{q}_n^b 用方程 (37) 计算得出, \mathbf{q}_b^o 定义为

$$\mathbf{q}_b^o \triangleq (\mathbf{q}_{\theta_n^b} \otimes \mathbf{q}_{\phi_n^b})^{-1}.$$

然后从原始激光扫描 $\mathcal{S} = \{(r, \theta)\}$ 中计算出正射校正激光扫描 \mathcal{S}' , 即

$$\mathcal{S}' = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} = \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\mathbf{q}_c^o) \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \forall (r, \theta) \in \mathcal{S} \right\}.$$

我们注意到, 与 \mathbf{q}_c^o 相关的旋转矩阵可以写为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{q}_c^o) &= \mathbf{R}((\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes \mathbf{q}_b^o) \\ &= \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^o) \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_b^c). \end{aligned}$$

将测量的平移部分旋转到正射校正帧后, 将其建模为第 7.2.3 节中视觉里程计平移模型的 x 和 y 分量:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{lt}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\mathbf{q}_c^o) \mathbf{h}_{\text{vot}}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\eta}_{\text{lt}} \\ &= \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^o) \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_b^c) (\mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) (\mathbf{p}_b^n - \mathbf{p}_b^c) \\ &\quad + \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^c) \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_b^n) \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \mathbf{p}_k^n)) + \boldsymbol{\eta}_{\text{lt}} \\ &= \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^o) (\mathbf{p}_b^n - \mathbf{p}_b^c \\ &\quad + \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_b^n) \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \mathbf{p}_k^n)) + \boldsymbol{\eta}_{\text{lt}}. \end{aligned} \tag{93}$$

估计的测量模型是

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{lt}}(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) (\hat{\mathbf{p}}_b^n - \mathbf{p}_b^c \\ &\quad + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n)). \end{aligned}$$

残差 Jacobian 矩阵在附录 F 中推导, 由下式给出

$$\mathbf{H}_{\text{lt}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_3 & \mathbf{H}_4 & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o), \\ \mathbf{H}_2 &= -\mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) [\mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n)] \\ &\quad + \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) [\hat{\mathbf{p}}_b^n - \mathbf{p}_b^c + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n)] \\ &\quad \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \hat{\phi}_n^b & 0 \\ 0 & -\sin \hat{\phi}_n^b & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}_{\Delta_n^b}, \\ \mathbf{H}_3 &= -\mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n), \\ \mathbf{H}_4 &= \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) [\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n]. \end{aligned}$$

对于测量模型的旋转部分, 我们首先在正射校正帧中表示视觉里程计旋转模型:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{lr} &= (\mathbf{q}_c^o)^{-1} \otimes \mathbf{h}_{\text{vor}}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{q}_c^o \\
&= \left((\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes \mathbf{q}_b^o \right)^{-1} \\
&\quad \otimes (\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes \mathbf{q}_b^n \otimes (\mathbf{q}_k^n)^{-1} \otimes \mathbf{q}_b^c \otimes \left((\mathbf{q}_b^c)^{-1} \otimes \mathbf{q}_b^o \right) \\
&= (\mathbf{q}_b^o)^{-1} \otimes \mathbf{q}_b^n \otimes (\mathbf{q}_k^n)^{-1} \otimes \mathbf{q}_b^o,
\end{aligned}$$

其估计为

$$\hat{\mathbf{q}}_{lr} = (\hat{\mathbf{q}}_b^o)^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes (\hat{\mathbf{q}}_k^n)^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^o.$$

然后, 测量模型是 \mathbf{q}_{lr} 的偏航部分,

$$\mathbf{h}_{lr}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{q}_{lr}) + \eta_{lr},$$

其估计为

$$\mathbf{h}_{lr}(\hat{\mathbf{x}}) = \psi(\hat{\mathbf{q}}_{lr}).$$

残差 Jacobian 矩阵在附录 F 中推导, 由下式给出

$$\mathbf{H}_{lr} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_1 &= \mathbf{k}^\top \mathbf{N}_{\Delta_{lr}} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) \\
&\quad \times \left(\mathbf{I} + (\mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) - \mathbf{I}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \hat{\phi}_n^b & 0 \\ 0 & \sin \hat{\phi}_n^b & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}_{\Delta_n^b} \right), \\
\mathbf{H}_2 &= -\mathbf{k}^\top \mathbf{N}_{\Delta_{lr}} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n).
\end{aligned}$$

7.3 关键帧重置

由于位置和方向状态以机体为中心表示, bRN 的关键帧重置步骤有些不直观, 但是可以通过遵循 iRN 重置步骤来推导。在方程 (91) 和 (88) 之后,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{q}}_b^{n+} &= (\hat{\mathbf{q}}_n^{b+})^{-1} \\
&= (\hat{\mathbf{q}}_{\hat{\theta}} \otimes \hat{\mathbf{q}}_{\hat{\phi}})^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -\cos \frac{\hat{\theta}}{2} \sin \frac{\hat{\phi}}{2} \\ -\sin \frac{\hat{\theta}}{2} \cos \frac{\hat{\phi}}{2} \\ \sin \frac{\hat{\theta}}{2} \sin \frac{\hat{\phi}}{2} \\ \cos \frac{\hat{\theta}}{2} \cos \frac{\hat{\phi}}{2} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

其中, ϕ 和 θ 使用方程 (37) 从 $\hat{\mathbf{q}}_n^b = (\hat{\mathbf{q}}_n^n)^{-1}$ 计算出来。请注意, 即使 bRN 在机体坐标系中表达的姿态, 但角度 ϕ 、 θ 和 ψ 仍然代表传统的横滚、俯仰和偏航欧拉角, 表达了机体相对于惯性坐标系的方向。姿态重置的 Jacobian 矩阵在附录 E 中推导, 恰好与 iRN 姿态重置的 Jacobian 矩阵相同:

$$\frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_b^{n+}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_b^n} = \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_n^{b+}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_n^b} = \mathbf{N}_\theta.$$

位置重置的推导更为复杂, 在附录 E 中给出。由此产生的重置操作是

$$\hat{\mathbf{p}}_b^{n+} = \mathbf{N}_p \hat{\mathbf{p}}_b^n,$$

其中

$$\mathbf{N}_p = \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k} \mathbf{k}^\top \mathbf{R} (\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}).$$

因为重置发生时帧 b 和帧 k 在同一位置, 所以我们还有

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}_k^{n+} &= \hat{\mathbf{p}}_b^{n+}, \\ \hat{\mathbf{q}}_k^{n+} &= \hat{\mathbf{q}}_b^{n+}. \end{aligned}$$

总的键帧重置 Jacobian 矩阵, 也在附录 E 中推导, 由下式给出

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_p & (-[\mathbf{N}_p \mathbf{p}_b^n] + \mathbf{N}_p [\mathbf{p}_b^n]) \mathbf{N}_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{N}_p & (-[\mathbf{N}_p \mathbf{p}_b^n] + \mathbf{N}_p [\mathbf{p}_b^n]) \mathbf{N}_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8 结果

RMKF 是用 ROS(Quigley 等人, 2009[29]) 框架在 C++ 中实现的。以下各节给出了 RMEKF 在多旋翼飞行器上的性能的仿真和硬件结果。第 8.1 节中的仿真结果说明了在理想条件下估计器的性能, 其中所有噪声都是具有已知协方差的高斯噪声, 所有偏差都是已知的。第 8.2 节中的硬件结果证明了估计器在实际条件下的性能, 其中高斯噪声假设不一定满足, 协方差和偏差未知。

本节中的结果说明了 RMEKF 产生的相对状态估计的典型精度。由于相对状态估计是一种独特的方法, 除非本文中的估计器与一个简单的全局后端相结合, 否则无法直接与文献中的相关全局估计技术进行比较。对于这些比较, 读者可以参考 Wheeler 等人 (2018)[38] 的相关工作。Wheeler 等人 (2020)[37] 更广泛的飞行试验结果进一步证明了 RMEKF 在多旋翼平台的几次扩展飞行中的实际性能, 包括闭合估计值周围的控制回路。

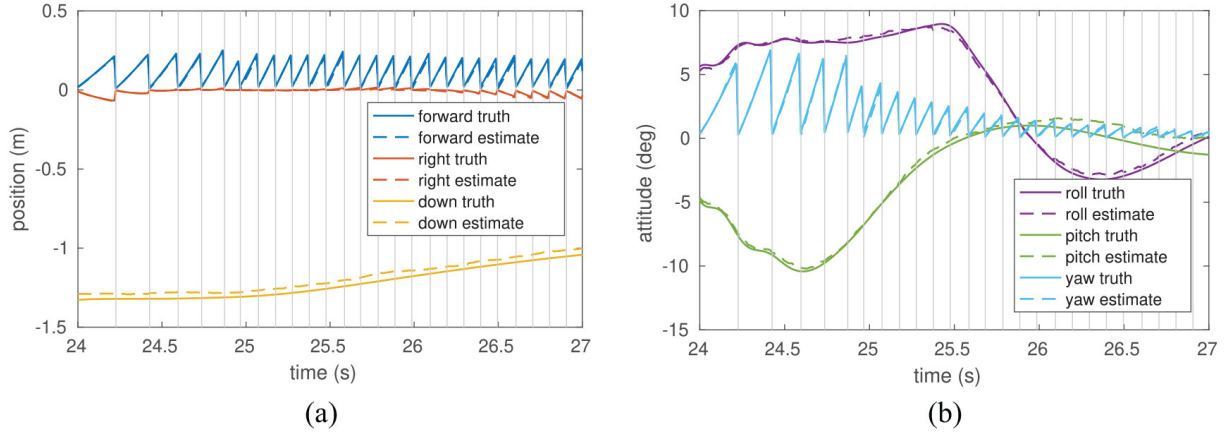


图 9: iRN 的 RMEKF 估计性能仿真: (a) 位置; (b) 姿态。垂直灰线表示何时声明新的关键帧。

8.1 模拟结果

模拟提供了加速计、陀螺仪、高度计和视觉里程表测量数据，这些数据被正态分布的噪声所破坏。模拟的 IMU 数据中还加入了缓慢漂移的偏差。传感器噪声 (ν_ω 、 ν_a 、 η_{vot} 、 η_{vor} 和 η_{alt}) 从正态分布中取样，其标准偏差为低成本硬件传感器的典型值: $\sigma_\omega = 0.13 \text{ rad/s}$, $\sigma_a = 1.15 \text{ m/s}^2$, $\sigma_{\text{vot}} = 0.02 \text{ m}$, $\sigma_{\text{vor}} = 0.01 \text{ rad}$, $\sigma_{\text{alt}} = 0.01 \text{ m}$ 。当车辆移动超过 0.2 m 或偏航超过 20° 时，建立了新的关键帧。估算器在从温和到激进的各种机动中进行了评估，在激进的机动中，车辆的速度超过 25 m/s，倾斜角超过 45° 。

图 9 和图 10 显示了 iRN 和 bRN 估计器在跟踪车辆位姿时的 3 秒钟的性能快照，其中选择了小时间窗口以使相对状态重置可见。在这 3 秒钟内，车辆以几乎恒定的速度向前移动，同时保持地面上 1.25 m 的标称高度，同时逐渐减缓其顺时针偏航运动。垂直灰线表示声明新关键帧的时间。当使用四元数定义状态时，图 9(b) 使用方程 (37) 绘制横滚、俯仰和偏航角。

图 9 突出显示了相对导航的几个有趣的实用性。正如第 5 节所讨论的，图 9 说明了如何在每个新声明的关键帧中将前向、右向和偏航状态重置为零，同时高度、横滚和俯仰状态保持连续。应该注意的是，虽然横滚和俯仰是连续的，但四个四元数状态中的每一个都会出现不连续。因为相对状态的不连续性发生在已知的时间，它们很容易被解释，所以在实践中，不会引起控制稳定性的问题。图 9 还说明了关键帧不会以固定的间隔重置，而是根据车辆自上一个关键帧以来行驶的距离重置。某些传感器，例如具有长距离和宽视野的激光扫描仪，有助于延长关键帧之间的距离。

RMEKF 在使用第 7 节中介绍的机体固连动力学时的性能非常相似。图 10 显示了 bRN 估计器在与图 9 相同的时间窗口内对于位置状态的性能。bRN(未显示) 的姿态性能与 iRN 的姿态性能几乎相同，只是对于角度符号发生了变化。注意，在图 10 中，每个位置状态在关键帧重置时都会经历轻微的不连续性，并且位置估计值不会重置为零。这是因为关键帧重置步骤将从状态中删除所有水平平移，但会继续跟踪车辆的距地高度。由于 bRN 位置状态是相对于已横滚的和已倾斜的机体坐标系表示的，因此一些距地高度被映射到前向和右向分量中。当使用方程 (90) 和 (91) 表达关于当前节点帧的 bRN 状态估计时，它们与图 9 所示的估计几乎相同。

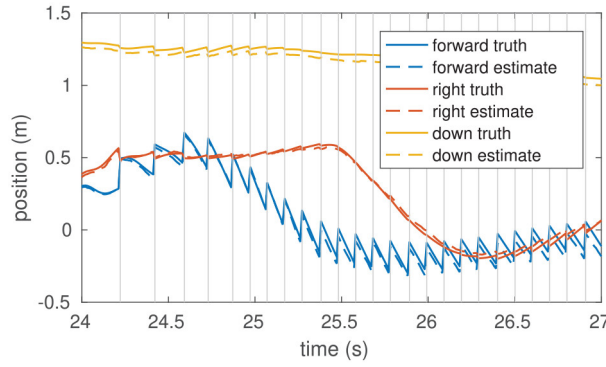


图 10: bRN 的 RMEKF 位置估计性能仿真。bRN 的姿态性能与 iRN 的姿态性能几乎相同，但符号相反。



图 11: 用于硬件结果飞行测试的飞行器。

8.2 硬件结果

硬件结果所用的飞行器，Y6 配置的六轴飞行器，如图 11 所示。姿态控制由运行 ROSflight⁴ 固件的 Naze32 自动驾驶仪执行。IMU 数据从自动驾驶仪上的低成本 MEMS IMU(InvenSense MPU-6050) 以 500 Hz 的频率传输。高度计数据从 MaxBotix LV-MaxSonar-EZ3 超声波测距仪获得。

所有的估计都是在带英特尔 i7 处理器的板载计算机上实时执行的。视觉里程表也在车载计算机上以 15 Hz 的频率计算，它来自一个前向 Asus Xtion Pro Live RGB-D 相机，使用深度增强的单目里程表算法 (Zhang 等人, 2014[40])，该算法被修改为输出相对测量。当车辆移动超过 0.5 m 或偏航超过 20° 时，建立新的关键帧，尽管可以实现更复杂的关键帧选择算法。为视觉里程计测量协方差选择了一个恒定的典型值，但是未来的实现可以利用从帧到帧估计协方差的算法 (例如，Anderson 等人, 2019[1])。

在本文中，运动捕捉系统提供了真值参考。运动捕捉系统的定位精度约为 0.5 cm 或更高，姿态精度约为 0.1°。使用校准程序将四旋翼机体帧注册到运动捕捉帧。为了将相对状态估计与全局运动捕捉数据进行比较，每次视觉里程计关键帧重置发生时，通过对运动捕捉数据应用第 6.3 节和第 7.3 节中描述的相同位置和方向重置步骤，同步参考帧。虽然这种方法有很小的时间延迟和其它固有的误差源，但我们认为这种 "真实" 参考高度代表了真实运动，是系统评估的适当参考源。

图 12 显示了使用惯性动力学 (iRN) 的 RMEKF 的估计器性能。图中显示了一个典型的 10 秒的飞行窗口，使得相对状态重置清晰可见。这些估计很好地追踪了真实情况。再次注意，图 12(a)

⁴参见<http://rosflight.org>

表 6: RMS error for the hardware results

State	Axis	RMS error	
		iRN	bRN
Position	forward	0.0306 m	0.0318 m
	right	0.0439 m	0.0436 m
	down	0.0648 m	0.0414 m
Attitude	roll	0.7983 deg	1.6259 deg
	pitch	0.3785 deg	0.5714 deg
	yaw	0.2933 deg	0.3422 deg
Velocity	forward	0.1313 m/s	0.1481 m/s
	right	0.1483 m/s	0.1784 m/s
	down	0.0702 m/s	0.0806 m/s

中的前向和右向位置估计随着每个新关键帧而重置，而向下位置估计是连续的。类似地，图 12(b) 中的偏航估计会随着每个关键帧而重置，但是横滚和俯仰是连续的。图 12(c) 中的速度估计是连续的。表 6 总结了 90 s 飞行期间每个状态估计值的均方根误差。

采用机体固连动力学 (bRN) 的估计器的性能与惯性动力学非常相似。图中未显示 bRN 结果，但表 6 总结了可比飞行试验的 RMS 误差。

更仔细地看图 12(a) 和 (b)，似乎相对状态并没有完全重置为零。其原因是视觉里程计处理的延迟，如图 13 所示。从捕获图像 (图 13 中的垂直虚线) 到发布视觉里程计信息 (垂直实线) 平均需要约 115 ms。然而，估计器在应用里程计测量时使用图像捕获时间戳，如第 4.3 节所述。当捕捉到新的关键帧图像时，在图像捕捉和里程计消息之间的时间窗口内，估计器继续相对于先前的关键帧操作。一旦新的关键帧里程计消息到达，估计器返回到图像捕获的时间，将状态重置为零，然后重新传播在视觉里程计消息时间之前排队的 IMU 和高度计消息。结果，估计器发布的关于新关键帧的第一个消息包括 IMU 重传的 115 ms 并且是非零的。然而，在图像捕获时，相对状态实际上被重置为零。

9 结论

虽然在 GPS 缺失的环境中导航时，UAS 的全局状态是不可观测的，但通过使用相对导航框架巧妙地重构问题，有可能保持可观测性。先前的模拟研究表明，相对导航框架具有强大的理论动机，包括改进的一致性、有界协方差，以及改进的精度 (Wheeler 等人, 2018[38])。此外，重要的硬件结果证明了在使用相对 MEKF 进行状态估计时，小型无人机相对导航的有效性和实用性 (Wheeler 等人, 2020[37])。本文严格推导了在 Wheeler 等人 (2018)[38] 和 Wheeler 等人 (2020)[37] 的文章中使用的 RMEKF，提出了将相对导航应用于 UAS 状态估计问题所要数学知识。它的教程性质和逐步推导使本文成为一个自包含的资源，可用于将该方法扩展到其它应用。

通过定义相对于局部坐标系的状态，本文演示了如何利用视觉里程算法的相对测量来确保可观测状态。本文提出了新的视觉里程计和激光扫描匹配测量模型，并提出了一个独特的关键帧重置步骤，以确保即使在全局信息不可用的情况下，滤波器状态也是完全可观测的。

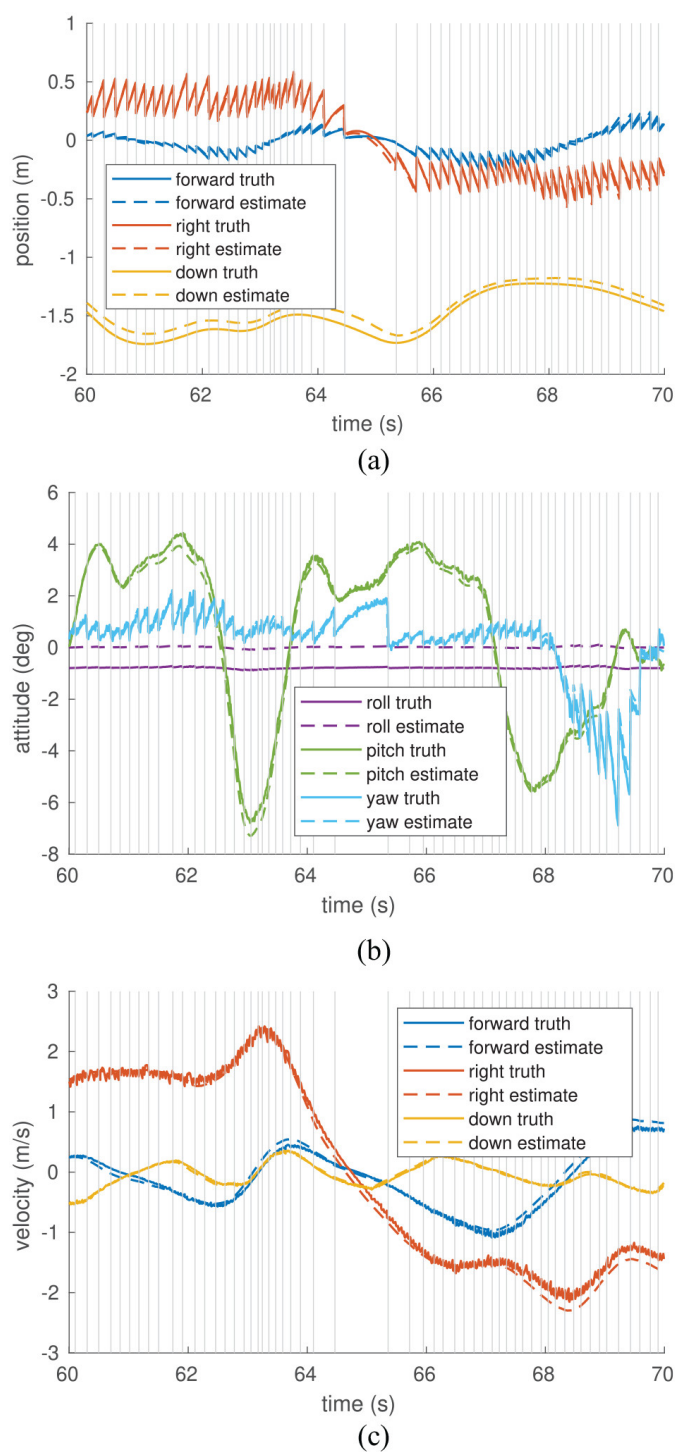


图 12: iRN 的硬件 RMEKF 估计性能: (a) 位置; (b) 姿态; (c) 速度。垂直灰线表示何时声明新的关键帧。

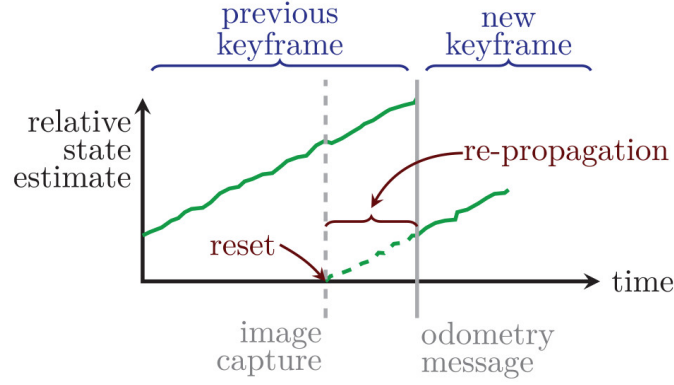


图 13: 关键帧重置与延迟视觉里程测量。由于处理第 4.3 节中所述的延迟测量, 相对状态可能不会一直重置为零。只有估计线的实心部分被发布。

在仿真和硬件上证明了 RMEKF 在惯性定义的和在机体固连的车辆动力学中都能有效地产生精确的有界的不确定性状态估计。虽然惯性和机体固连的定义产生了类似的结果, 但本文明确地概述了状态估计器中出现的差异, 包括误差状态定义、测量模型、四元数积分过程和关键帧重置步骤的差异。本文的其它贡献包括间接 MEKF 的教程介绍、Hamilton 四元数的阐述以及部分更新四元数及其协方差所需的误差四元数的几个新特性的推导。

附录 A 欧拉角分解的 Jacobian 矩阵

在本附录中, 我们探讨了四元数的欧拉角分解误差, $(\psi - \hat{\psi}, \theta - \hat{\theta}$ 和 $\phi - \hat{\phi})$, 与该四元数中误差的最小表示, $\delta\theta$, 它们之间的关系。具体来说, 定义

$$\Delta \triangleq \begin{bmatrix} \phi - \hat{\phi} \\ \theta - \hat{\theta} \\ \psi - \hat{\psi} \end{bmatrix},$$

我们希望推导出 Jacobian 矩阵的表达式

$$\mathbf{N}_\Delta \triangleq \frac{\partial \Delta}{\partial \delta\theta}.$$

下面的推导和表达式与 Barfoot 等人 (2011)[4] 给出的推导和表达式有些相似, 但都是在误差状态公式的上下文中推导出来的。

我们首先推导方程 (38) 和 (39) 的偏航、俯仰和横滚四元数的误差四元数表达式。例如, 利用误差四元数的 iRN 定义, 我们可以从方程 (30a) 和 (39) 计算 $\delta\mathbf{q}_\psi$, 为

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{q}_\psi &= \hat{\mathbf{q}}_\psi^{-1} \otimes \mathbf{q}_\psi \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin\left(\frac{1}{2}\hat{\psi}\right) \\ \cos\left(\frac{1}{2}\hat{\psi}\right) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{1}{2}\psi\right) \\ \cos\left(\frac{1}{2}\psi\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{1}{2}\psi\right)\cos\left(\frac{1}{2}\hat{\psi}\right) - \cos\left(\frac{1}{2}\psi\right)\sin\left(\frac{1}{2}\hat{\psi}\right) \\ \cos\left(\frac{1}{2}\psi\right)\cos\left(\frac{1}{2}\hat{\psi}\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\psi\right)\sin\left(\frac{1}{2}\hat{\psi}\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{1}{2}(\psi - \hat{\psi})\right) \\ \cos\left(\frac{1}{2}(\psi - \hat{\psi})\right) \end{bmatrix}, \tag{94}
\end{aligned}$$

其中最后一步使用标准角差三角恒等式。通过类似的分析，我们发现方程 (94) 在使用方程 (30b) 时对 bRN 也成立。我们同样可以发现

$$\delta \mathbf{q}_\phi = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{1}{2}(\phi - \hat{\phi})\right) \\ 0 \\ 0 \\ \cos\left(\frac{1}{2}(\phi - \hat{\phi})\right) \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{q}_\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\left(\frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta})\right) \\ 0 \\ \cos\left(\frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta})\right) \end{bmatrix} \tag{95}$$

对于 iRN 和 bRN 姿态误差定义都成立。因为这些误差都在欧拉旋转序列的不同中间帧中表示，一般来说， $\delta \mathbf{q} \neq \delta \mathbf{q}_\psi \otimes \delta \mathbf{q}_\theta \otimes \delta \mathbf{q}_\phi$ 。

假设姿态误差很小，我们用一阶泰勒级数近似方程 (94) 和 (95) 为

$$\delta \mathbf{q}_\phi \approx \begin{bmatrix} \frac{\phi - \hat{\phi}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{q}_\theta \approx \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\theta - \hat{\theta}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{q}_\psi \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\psi - \hat{\psi}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

这些误差状态根据方程 (19) 最小化表示为

$$\delta \boldsymbol{\theta}_\phi = \begin{bmatrix} \phi - \hat{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta \boldsymbol{\theta}_\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta - \hat{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta \boldsymbol{\theta}_\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi - \hat{\psi} \end{bmatrix}. \tag{96}$$

然后我们定义

$$\begin{aligned}\Delta &\triangleq \delta\theta_\phi + \delta\theta_\theta + \delta\theta_\psi \\ &= \begin{bmatrix} \phi - \hat{\phi} \\ \theta - \hat{\theta} \\ \psi - \hat{\psi} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

再一次需要注意的是，在一般情况下 $\delta\theta \neq \Delta$ 。

我们现在希望用 $\delta\theta_\psi$ 、 $\delta\theta_\theta$ 和 $\delta\theta_\phi$ 来解 $\delta\theta$ 。对于 iRN 的情况，从方程 (30a) 开始，利用方程 (38)，我们发现

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{q} &= \hat{\mathbf{q}}^{-1} \otimes \mathbf{q} \\ &= \hat{\mathbf{q}}_\phi^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_\theta^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_\psi^{-1} \otimes \\ &\quad \otimes \hat{\mathbf{q}}_\psi \otimes \delta\mathbf{q}_\psi \otimes \hat{\mathbf{q}}_\theta \otimes \delta\mathbf{q}_\theta \otimes \hat{\mathbf{q}}_\phi \otimes \delta\mathbf{q}_\phi \\ &= (\hat{\mathbf{q}}_\phi^{-1} \otimes (\hat{\mathbf{q}}_\theta^{-1} \otimes \delta\mathbf{q}_\psi \otimes \hat{\mathbf{q}}_\theta)) \otimes \delta\mathbf{q}_\theta \otimes \hat{\mathbf{q}}_\phi) \otimes \delta\mathbf{q}_\phi,\end{aligned}$$

从方程 (42) 来看，这意味着

$$\delta\theta = \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\theta \delta\theta_\psi + \mathbf{R}_\phi \delta\theta_\theta + \delta\theta_\phi. \quad (97)$$

我们可以用方程 (36) 和 (96) 展开方程 (97)，用 Δ 的项表示 $\delta\theta$ 为

$$\begin{aligned}\delta\theta &= \begin{bmatrix} (\phi - \hat{\phi}) - (\psi - \hat{\psi}) \sin \hat{\theta} \\ (\theta - \hat{\theta}) \cos \hat{\phi} + (\psi - \hat{\psi}) \sin \hat{\phi} \cos \hat{\theta} \\ -(\theta - \hat{\theta}) \sin \hat{\phi} + (\psi - \hat{\psi}) \cos \hat{\phi} \cos \hat{\theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \hat{\theta} \\ 0 & \cos \hat{\phi} & \sin \hat{\phi} \cos \hat{\theta} \\ 0 & -\sin \hat{\phi} & \cos \hat{\phi} \cos \hat{\theta} \end{bmatrix} \Delta. \quad (98)\end{aligned}$$

方程 (98) 中矩阵的行列式等于 $\cos \hat{\theta}$ 。因此，假设 $\hat{\theta} \neq \pm \frac{\pi}{2}$ ，我们对 Δ 求解方程 (98) 为

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \sin \hat{\phi} \tan \hat{\theta} & \cos \hat{\phi} \tan \hat{\theta} \\ 0 & \cos \hat{\phi} & -\sin \hat{\phi} \\ 0 & \sin \hat{\phi} \sec \hat{\theta} & \cos \hat{\phi} \sec \hat{\theta} \end{bmatrix} \delta\theta, \quad (99)$$

我们从中获得

$$\mathbf{N}_\Delta \triangleq \frac{\partial \Delta}{\partial \delta\theta} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \hat{\phi} \tan \hat{\theta} & \cos \hat{\phi} \tan \hat{\theta} \\ 0 & \cos \hat{\phi} & -\sin \hat{\phi} \\ 0 & \sin \hat{\phi} \sec \hat{\theta} & \cos \hat{\phi} \sec \hat{\theta} \end{bmatrix}. \quad (100)$$

类似的程序可用于推导 bRN 情况下的 Jacobian 矩阵 \mathbf{N}_Δ 。然而，对于 bRN 情况，横滚、俯仰和偏航的定义和解释不太明显，因此我们将省略 \mathbf{N}_Δ 的推导，而是在文中推导相关表达式。

附录 B 零均值误差状态

在本附录中，我们证明了期望的误差状态仍然是零均值。具体地说，我们证明了误差状态的期望值为零，如方程 (45) 所示，并且当估计误差和输入噪声都为零时，误差状态动力学是平凡的。

B.1 误差状态期望值

特性方程 (45) 源于期望和四元数乘法、求逆和 \vee 操作。对于下面的推导，回想一下， \mathbf{x} 被建模为一个随机变量，而 $\hat{\mathbf{x}}$ 是给定时间步长的一个常量值。给定方程 (44a) 和 $\hat{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}]$ ，对于状态的向量部分，我们有

$$\begin{aligned} E[\delta \mathbf{x}_v] &= E[\mathbf{x}_v - \hat{\mathbf{x}}_v] \\ &= E[\mathbf{x}_v] - \hat{\mathbf{x}}_v \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

使用方程 (30a) 做为方程 (44b) 的姿态误差定义，对于状态的四元数部分，我们有

$$\begin{aligned} E[\delta \mathbf{x}_\theta] &= E\left[(\hat{\mathbf{x}}_q \otimes \mathbf{x}_q^{-1})^\vee\right] \\ &= \left(\hat{\mathbf{x}}_q \otimes E[\mathbf{x}_q]^{-1}\right)^\vee \\ &= \left(\hat{\mathbf{x}}_q \otimes \hat{\mathbf{x}}_q^{-1}\right)^\vee \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}^\vee \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

对于方程 (30b) 中的姿态误差定义，也可以进行类似的推导。

B.2 误差状态动力学

对于状态的向量部分，从方程 (44a)，(47)，(50) 中，我们有

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{x}}_v &= \dot{\mathbf{x}}_v - \dot{\hat{\mathbf{x}}}_v \\ &= \mathbf{f}_v(\mathbf{x}, \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{\eta}_v - \mathbf{f}_v(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \\ &\triangleq \bar{\mathbf{f}}_v(\delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\eta}_v. \end{aligned}$$

我们注意到，使用方程 (29) 并重新排列方程 (44a)，可以用 $\delta \mathbf{x}$ 和 $\hat{\mathbf{x}}$ 重写 \mathbf{x} ，并且当 $\delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 时， $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ 。在 $(E[\delta \mathbf{x}], E[\boldsymbol{\nu}], \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ 处评估 $\bar{\mathbf{f}}_v$ ，其中 $E[\delta \mathbf{x}] = E[\boldsymbol{\nu}] = \mathbf{0}$ ，然后给出

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_v(E[\delta \mathbf{x}], E[\boldsymbol{\nu}], \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) &= \mathbf{f}_v(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \mathbf{f}_v(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

对于状态的四元数部分，对于 iRN，我们从方程 (29a) 开始：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_q &= \hat{\mathbf{x}}_q \otimes (\delta \mathbf{x}_\theta)^\wedge \\ \implies \dot{\mathbf{x}}_q &= \dot{\hat{\mathbf{x}}}_q \otimes (\delta \mathbf{x}_\theta)^\wedge + \hat{\mathbf{x}}_q \otimes (\delta \dot{\mathbf{x}}_\theta)^\wedge. \end{aligned}$$

左乘 $(\hat{\mathbf{x}}_q)^{-1}$ 给出

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{x}}_q)^{-1} \otimes \dot{\mathbf{x}}_q &= (\hat{\mathbf{x}}_q)^{-1} \otimes \dot{\hat{\mathbf{x}}}_q \otimes (\delta \mathbf{x}_\theta)^\wedge + (\delta \dot{\mathbf{x}}_\theta)^\wedge \\
\implies \delta \dot{\mathbf{x}}_\theta &= \left((\hat{\mathbf{x}}_q)^{-1} \otimes \dot{\mathbf{x}}_q - (\hat{\mathbf{x}}_q)^{-1} \otimes \dot{\hat{\mathbf{x}}}_q \otimes (\delta \mathbf{x}_\theta)^\wedge \right)^\vee \\
&= \left((\hat{\mathbf{x}}_q)^{-1} \otimes \mathbf{f}_q(\mathbf{x}, \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \right. \\
&\quad \left. - (\hat{\mathbf{x}}_q)^{-1} \otimes \mathbf{f}_q(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \otimes (\delta \mathbf{x}_\theta)^\wedge \right)^\vee \\
&\triangleq \bar{\mathbf{f}}_q(\delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}),
\end{aligned}$$

其中 \mathbf{x} 又可以用方程 (29a) 和 (44a) 重写为 $\delta \mathbf{x}$ 和 $\hat{\mathbf{x}}$ 。注意，我们省略了过程噪声 $\boldsymbol{\eta}$ ，因为本文中的四元数传播动力学是精确的运动学表达式。在 $(E[\delta \mathbf{x}], E[\boldsymbol{\nu}], \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ 处评估 $\bar{\mathbf{f}}_q$ ，给出

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{f}}_q(E[\delta \mathbf{x}], E[\boldsymbol{\nu}], \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) &= \left((\hat{\mathbf{x}}_q)^{-1} \otimes \mathbf{f}_q(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \right. \\
&\quad \left. - (\hat{\mathbf{x}}_q)^{-1} \otimes \mathbf{f}_q(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \otimes \mathbf{0}^\wedge \right)^\vee \\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

类似的分析可以用方程 (29b) 中的 bRN 姿态误差定义进行。

附录 C 惯性动力学

本附录推导了惯性定义状态的误差状态动力学。

C.1 位置

我们从方程 (44a) 开始：

$$\begin{aligned}
\delta \dot{\mathbf{p}}_n^b &= \dot{\mathbf{p}}_n^b - \dot{\hat{\mathbf{p}}}_n^b \\
&= \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_n^b) \mathbf{v} - \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \hat{\mathbf{v}}.
\end{aligned}$$

然后我们使用方程 (31a)、(34)、(44a) 和 (4) 以获得

$$\begin{aligned}
\delta \dot{\mathbf{p}}_n^b &= \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{R}^\top(\delta \mathbf{q}_n^b) (\hat{\mathbf{v}} + \delta \mathbf{v}) - \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \hat{\mathbf{v}} \\
&\approx \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \left(\mathbf{I} + \left[\delta \boldsymbol{\theta}_n^b \right] \right) (\hat{\mathbf{v}} + \delta \mathbf{v}) - \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \hat{\mathbf{v}} \\
&= \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \left[\delta \boldsymbol{\theta}_n^b \right] \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \delta \mathbf{v} \\
&\quad + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \left[\delta \boldsymbol{\theta}_n^b \right] \delta \mathbf{v} - \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \hat{\mathbf{v}} \\
&= \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \left[\delta \boldsymbol{\theta}_n^b \right] \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \delta \mathbf{v} + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \left[\delta \boldsymbol{\theta}_n^b \right] \delta \mathbf{v} \\
&= -\mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) [\hat{\mathbf{v}}] \delta \boldsymbol{\theta}_n^b + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \delta \mathbf{v} + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \left[\delta \boldsymbol{\theta}_n^b \right] \delta \mathbf{v} \\
&\approx -\mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) [\hat{\mathbf{v}}] \delta \boldsymbol{\theta}_n^b + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \delta \mathbf{v},
\end{aligned}$$

其中二阶项已被删除。

C.2 姿态

我们从方程 (29a) 开始, 相对于时间进行微分:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_n^b &= \hat{\mathbf{q}}_n^b \otimes \delta \mathbf{q}_n^b \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{q}}_n^b &= \dot{\hat{\mathbf{q}}}_n^b \otimes \delta \mathbf{q}_n^b + \hat{\mathbf{q}}_n^b \otimes \delta \dot{\mathbf{q}}_n^b.\end{aligned}$$

左乘 $(\hat{\mathbf{q}}_n^b)^{-1}$ 给出

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{q}}_n^b)^{-1} \otimes \dot{\mathbf{q}}_n^b &= (\hat{\mathbf{q}}_n^b)^{-1} \otimes \dot{\hat{\mathbf{q}}}_n^b \otimes \delta \mathbf{q}_n^b + \delta \dot{\mathbf{q}}_n^b \\ \Rightarrow \delta \dot{\mathbf{q}}_n^b &= (\hat{\mathbf{q}}_n^b)^{-1} \otimes \dot{\mathbf{q}}_n^b - (\hat{\mathbf{q}}_n^b)^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_n^b \otimes \delta \mathbf{q}_n^b.\end{aligned}$$

使用方程 (80b), (81a), (30a), 并简化所得

$$\begin{aligned}\delta \dot{\mathbf{q}}_n^b &= \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{q}}_n^b)^{-1} \otimes \mathbf{q}_n^b \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{q}}_n^b)^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_n^b \otimes \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta \mathbf{q}_n^b \\ &= \frac{1}{2} \delta \mathbf{q}_n^b \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta \mathbf{q}_n^b.\end{aligned}\tag{101}$$

使用方程 (72a) 和 (73), 设

$$\delta \boldsymbol{\omega} \triangleq \boldsymbol{\omega} - \hat{\boldsymbol{\omega}}\tag{102a}$$

$$\begin{aligned}&= (\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\beta}_\omega - \boldsymbol{\nu}_\omega) - (\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega) \\ &= -(\hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega + \delta \boldsymbol{\beta}_\omega) - \boldsymbol{\nu}_\omega + \hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega \\ &= -\delta \boldsymbol{\beta}_\omega - \boldsymbol{\nu}_\omega.\end{aligned}\tag{102b}$$

将方程 (3) 和 (102a) 应用于方程 (101) 得到

$$\begin{aligned}\delta \dot{\mathbf{q}}_n^b &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -[\boldsymbol{\omega}] & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega}^\top & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{q}_n^b - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [\hat{\boldsymbol{\omega}}] & \hat{\boldsymbol{\omega}} \\ -\hat{\boldsymbol{\omega}}^\top & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{q}_n^b \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [-2\hat{\boldsymbol{\omega}} + \delta \boldsymbol{\omega}] & \delta \boldsymbol{\omega} \\ -\delta \boldsymbol{\omega}^\top & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{q}_n^b,\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \delta \dot{\boldsymbol{\theta}}_n^b \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [-2\hat{\boldsymbol{\omega}} + \delta \boldsymbol{\omega}] & \delta \boldsymbol{\omega} \\ -\delta \boldsymbol{\omega}^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_n^b \\ 1 \end{bmatrix}.$$

抛弃标量方程和二阶项, 得到

$$\begin{aligned}\delta \dot{\boldsymbol{\theta}}_n^b &= \frac{1}{2} [-2\hat{\boldsymbol{\omega}} + \delta \boldsymbol{\omega}] \delta \boldsymbol{\theta}_n^b + \delta \boldsymbol{\omega} \\ &\approx -[\hat{\boldsymbol{\omega}}] \delta \boldsymbol{\theta}_n^b + \delta \boldsymbol{\omega} \\ &\approx -[\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega] \delta \boldsymbol{\theta}_n^b - \delta \boldsymbol{\beta}_\omega - \boldsymbol{\nu}_\omega.\end{aligned}$$

C.3 速度

我们首先将方程 (44a) 应用于动力学:

$$\begin{aligned}\delta \dot{\mathbf{v}} &= [\mathbf{v}] \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}(\mathbf{q}_n^b) \mathbf{g} + a_z \mathbf{k} - \mu \mathbf{\Pi}_k \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}_v \\ &\quad - ([\hat{\mathbf{v}}] \hat{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{g} + \hat{a}_z \mathbf{k} - \hat{\mu} \mathbf{\Pi}_k \hat{\mathbf{v}}) \\ &= [\mathbf{v}] \boldsymbol{\omega} - [\hat{\mathbf{v}}] \hat{\boldsymbol{\omega}}\end{aligned}\tag{103a}$$

$$+ \mathbf{R}(\mathbf{q}_n^b) \mathbf{g} - \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{g}\tag{103b}$$

$$- \mu \mathbf{\Pi}_k \mathbf{v} + \hat{\mu} \mathbf{\Pi}_k \hat{\mathbf{v}}\tag{103c}$$

$$+ a_z \mathbf{k} - \hat{a}_z \mathbf{k} + \boldsymbol{\eta}_v.\tag{103d}$$

我们逐项简化方程 (103)。我们用方程 (44a) 和 (102a) 展开方程项 (103a)，去掉二阶项，然后用方程 (4)、(73) 和 (102b) 获得

$$\begin{aligned}[\mathbf{v}] \boldsymbol{\omega} - [\hat{\mathbf{v}}] \hat{\boldsymbol{\omega}} &\approx [\hat{\mathbf{v}} + \delta \mathbf{v}] (\hat{\boldsymbol{\omega}} + \delta \boldsymbol{\omega}) - [\hat{\mathbf{v}}] (\hat{\boldsymbol{\omega}}) \\ &= [\delta \mathbf{v}] \hat{\boldsymbol{\omega}} + [\hat{\mathbf{v}}] \delta \boldsymbol{\omega} \\ &= -[\hat{\boldsymbol{\omega}}] \delta \mathbf{v} + [\hat{\mathbf{v}}] \delta \boldsymbol{\omega} \\ &= -\left[\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega\right] \delta \mathbf{v} + [\hat{\mathbf{v}}] (-\delta \boldsymbol{\beta}_\omega - \boldsymbol{\nu}_\omega) \\ &= -\left[\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega\right] \delta \mathbf{v} - [\hat{\mathbf{v}}] \delta \boldsymbol{\beta}_\omega - [\hat{\mathbf{v}}] \boldsymbol{\nu}_\omega.\end{aligned}$$

对于方程项 (103b)，我们使用方程 (31a) 和 (33) 以获得

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\mathbf{q}_n^b) \mathbf{g} - \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{g} &= \mathbf{R}(\delta \mathbf{q}_n^b) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{g} - \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{g} \\ &\approx \left(\mathbf{I} - \left[\delta \boldsymbol{\theta}_n^b\right]\right) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{g} - \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{g} \\ &= -\left[\delta \boldsymbol{\theta}_n^b\right] \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{g} \\ &= [\mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{g}] \delta \boldsymbol{\theta}_n^b.\end{aligned}$$

我们使用方程 (44a) 并去掉二阶项，将方程项 (103c) 简化为

$$\begin{aligned}-\mu \mathbf{\Pi}_k \mathbf{v} + \hat{\mu} \mathbf{\Pi}_k \hat{\mathbf{v}} &= -(\hat{\mu} + \delta \mu) \mathbf{\Pi}_k (\hat{\mathbf{v}} + \delta \mathbf{v}) + \hat{\mu} \mathbf{\Pi}_k \hat{\mathbf{v}} \\ &= -\hat{\mu} \mathbf{\Pi}_k \delta \mathbf{v} - \delta \mu \mathbf{\Pi}_k \hat{\mathbf{v}} - \delta \mu \mathbf{\Pi}_k \delta \mathbf{v} \\ &= -\hat{\mu} \mathbf{\Pi}_k \delta \mathbf{v} - \delta \mu \mathbf{\Pi}_k \hat{\mathbf{v}}.\end{aligned}$$

最后，使用方程 (72b)、(74) 和 (44a) 将方程项 (103d) 简化为

$$\begin{aligned}a_z \mathbf{k} - \hat{a}_z \mathbf{k} &= (\tilde{a}_z - \beta_{a_z} - \eta_{a_z}) \mathbf{k} - (\tilde{a}_z - \hat{\beta}_{a_z}) \mathbf{k} \\ &= (-\delta \beta_{a_z} - \eta_{a_z}) \mathbf{k} \\ &= -\mathbf{k} \mathbf{k}^\top \delta \beta_a - \mathbf{k} \eta_{a_z}.\end{aligned}$$

将所有这些结果代入方程 (103) 并收集各项给出

$$\begin{aligned}\delta \dot{\mathbf{v}} = & [\mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_n^b) \mathbf{g}] \delta \boldsymbol{\theta}_n^b + \left(-[\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega] - \hat{\mu} \boldsymbol{\Pi}_k \right) \delta \mathbf{v} - \mathbf{k} \mathbf{k}^\top \delta \boldsymbol{\beta}_a \\ & - [\hat{\mathbf{v}}] \delta \boldsymbol{\beta}_\omega - \boldsymbol{\Pi}_k \hat{\mathbf{v}} \delta \mu - [\hat{\mathbf{v}}] \boldsymbol{\nu}_\omega - \mathbf{k} \eta_{a_z} + \boldsymbol{\eta}_v.\end{aligned}$$

附录 D 机体固连动力学

本附录从惯性对应物中推导出机体固连状态动力学，然后推导出机体固连误差状态动力学。

D.1 位置

我们将方程 (90) 表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_b^n \\ 0 \end{bmatrix} = -(\mathbf{q}_n^b)^{-1} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{p}_n^b \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_n^b.$$

左乘 \mathbf{q}_n^b ，取时间导数，再左乘 $(\mathbf{q}_n^b)^{-1}$ 得出以下方程式序列：

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_n^b \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{p}_b^n \\ 0 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \mathbf{p}_n^b \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_n^b \\ \dot{\mathbf{q}}_n^b \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{p}_b^n \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{q}_n^b \otimes \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_b^n \\ 0 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_n^b \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_n^b - \begin{bmatrix} \mathbf{p}_n^b \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \dot{\mathbf{q}}_n^b \\ \frac{1}{2} \mathbf{q}_n^b \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{p}_b^n \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{q}_n^b \otimes \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_b^n \\ 0 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_n^b \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_n^b - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_n^b \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_n^b \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{p}_b^n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_b^n \\ 0 \end{bmatrix} &= - (\mathbf{q}_n^b)^{-1} \otimes \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_n^b \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_n^b \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mathbf{q}_n^b)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_n^b \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_n^b \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

重新排列并使用方程 (90)、(7)、(80a)、(3) 和 (4) 给出

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_b^n \\ 0 \end{bmatrix} &= - (\mathbf{q}_n^b)^{-1} \otimes \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_n^b \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_n^b - \frac{1}{2} (\mathbf{q}_n^b)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_n^b \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_n^b \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{p}_b^n \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{q}_n^b) \mathbf{p}_n^b \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_b^n \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{p}_b^n \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [\mathbf{p}_b^n] \boldsymbol{\omega} \\ -\mathbf{p}_b^{n\top} \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}] \mathbf{p}_b^n \\ -\boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{p}_b^n \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}] \mathbf{p}_b^n \\ \mathbf{p}_b^{n\top} \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}] \mathbf{p}_b^n \\ -\boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{p}_b^n \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

抛开标量方程，我们发现

$$\dot{\mathbf{p}}_b^n = -\mathbf{v} - [\boldsymbol{\omega}] \mathbf{p}_b^n.$$

设 $\delta\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \hat{\boldsymbol{\omega}}$ ，当使用机体帧时的误差状态位置动力学为

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{p}}_b^n &= \dot{\mathbf{p}}_b^n - \dot{\hat{\mathbf{p}}}_b^n \\ &= (-\mathbf{v} - [\boldsymbol{\omega}] \mathbf{p}_b^n) - (-\hat{\mathbf{v}} - [\hat{\boldsymbol{\omega}}] \hat{\mathbf{p}}_b^n) \\ &= -\hat{\mathbf{v}} - \delta\mathbf{v} - [\hat{\boldsymbol{\omega}} + \delta\boldsymbol{\omega}] \hat{\mathbf{p}}_b^n - [\hat{\boldsymbol{\omega}} + \delta\boldsymbol{\omega}] \delta\mathbf{p}_b^n \\ &\quad + \hat{\mathbf{v}} + [\hat{\boldsymbol{\omega}}] \hat{\mathbf{p}}_b^n \\ &= -\delta\mathbf{v} - [\delta\boldsymbol{\omega}] \hat{\mathbf{p}}_b^n - [\hat{\boldsymbol{\omega}}] \delta\mathbf{p}_b^n \\ &= -\delta\mathbf{v} + [\hat{\mathbf{p}}_b^n] \delta\boldsymbol{\omega} - [\hat{\boldsymbol{\omega}}] \delta\mathbf{p}_b^n \\ &= -\delta\mathbf{v} + [\hat{\mathbf{p}}_b^n] (-\delta\boldsymbol{\beta}_\omega - \boldsymbol{\nu}_\omega) - [\hat{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega] \delta\mathbf{p}_b^n \\ &= -[\hat{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega] \delta\mathbf{p}_b^n - \delta\mathbf{v} - [\hat{\mathbf{p}}_b^n] \delta\boldsymbol{\beta}_\omega - [\hat{\mathbf{p}}_b^n] \boldsymbol{\nu}_\omega. \end{aligned}$$

D.2 姿态

机体固连姿态动力学由方程 (27) 定义。它们可以交替地从方程 (91) 和 (26) 中推导出，如下所示

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_b^n &= (\dot{\mathbf{q}}_n^b)^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{q}_n^b \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes (\mathbf{q}_n^b)^{-1} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_b^n. \end{aligned}$$

利用方程 (29b)，将机体固连姿态分解为一个估计和一个误差状态，即

$$\mathbf{q}_b^n = \delta\mathbf{q}_b^n \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n.$$

相对于时间进行微分，给出

$$\dot{\mathbf{q}}_b^n = \delta\dot{\mathbf{q}}_b^n \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n + \delta\mathbf{q}_b^n \otimes \dot{\hat{\mathbf{q}}}_b^n.$$

求解姿态误差动力学方程，并使用方程 (92a)(29b) 和 (3)，结果为

$$\begin{aligned}
\delta \dot{\mathbf{q}}_b^n &= \left(\dot{\mathbf{q}}_b^n - \delta \mathbf{q}_b^n \otimes \dot{\mathbf{q}}_b^n \right) \otimes (\hat{\mathbf{q}}_b^n)^{-1} \\
&= -\frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{q}_b^n - \delta \mathbf{q}_b^n \otimes \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n \right) \otimes (\hat{\mathbf{q}}_b^n)^{-1} \\
&= -\frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta \mathbf{q}_b^n - \delta \mathbf{q}_b^n \otimes \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}] & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega}^\top & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{q}_b^n - \begin{bmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\omega}}] & \hat{\boldsymbol{\omega}} \\ -\hat{\boldsymbol{\omega}}^\top & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{q}_b^n \right) \\
&= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} [2\hat{\boldsymbol{\omega}} + \delta\boldsymbol{\omega}] & \delta\boldsymbol{\omega} \\ -\delta\boldsymbol{\omega}^\top & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{q}_b^n,
\end{aligned}$$

其中鉴于方程 (32)，这意味着

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}_b^n \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} [2\hat{\boldsymbol{\omega}} + \delta\boldsymbol{\omega}] & \delta\boldsymbol{\omega} \\ -\delta\boldsymbol{\omega}^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_b^n \\ 1 \end{bmatrix}.$$

将两边乘以 2，去掉标量项，忽略高阶项，得到

$$\begin{aligned}
\delta \dot{\boldsymbol{\theta}}_b^n &= - \begin{bmatrix} [2\hat{\boldsymbol{\omega}} + \delta\boldsymbol{\omega}] & \delta\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_b^n \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2} [2\hat{\boldsymbol{\omega}} + \delta\boldsymbol{\omega}] \delta \boldsymbol{\theta}_b^n - \delta\boldsymbol{\omega} \\
&\approx -[\hat{\boldsymbol{\omega}}] \delta \boldsymbol{\theta}_b^n - \delta\boldsymbol{\omega} \\
&= -[\hat{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_\omega] \delta \boldsymbol{\theta}_b^n + \delta \boldsymbol{\beta}_\omega + \boldsymbol{\nu}_\omega.
\end{aligned}$$

D.3 速度

速度误差动力学中唯一的变化是重力项，所以

$$\begin{aligned}
\delta \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{R}^\top (\mathbf{q}_b^n) \mathbf{g} - \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{g} \\
&= \mathbf{R}^\top (\delta \mathbf{q}_b^n) \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{g} - \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{g} \\
&\approx (\mathbf{I} + [\delta \boldsymbol{\theta}_b^n]) \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{g} - \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{g} \\
&= [\delta \boldsymbol{\theta}_b^n] \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{g} \\
&= -[\mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{g}] \delta \boldsymbol{\theta}_b^n.
\end{aligned}$$

附录 E 关键帧重置推导

在关键帧重置步骤期间，第 5 节介绍，第 6.3 节和第 7.3 节详述，相对状态及其相关协方差重置为零。对于位置状态，仅保持车辆的高度，而对于姿态状态，与偏航相关的不确定性从滤波器中去除，而与横滚和俯仰相关的不确定性保持不变。附录 E.1 和 E.2 表明

$$\mathbf{N}_\theta \triangleq \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}^+}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \hat{\phi} \tan \hat{\theta} & \cos \hat{\phi} \tan \hat{\theta} \\ 0 & \cos^2 \hat{\phi} & -\cos \hat{\phi} \sin \hat{\phi} \\ 0 & -\cos \hat{\phi} \sin \hat{\phi} & \sin^2 \hat{\phi} \end{bmatrix} \quad (104)$$

对于 iRN 和 bRN 姿态定义都成立。附录 E.3 推导了 bRN 的位置重置及其 Jacobian 矩阵。

E.1 iRN 姿态重置

回想一下附录 A 中的方程 (99)，欧拉角误差 Δ 与姿态误差状态 $\delta \boldsymbol{\theta}$ 的关系为

$$\Delta_n^b = \begin{bmatrix} 1 & \sin \hat{\phi} \tan \hat{\theta} & \cos \hat{\phi} \tan \hat{\theta} \\ 0 & \cos \hat{\phi} & -\sin \hat{\phi} \\ 0 & \sin \hat{\phi} \sec \hat{\theta} & \cos \hat{\phi} \sec \hat{\theta} \end{bmatrix} \delta \boldsymbol{\theta}_n^b. \quad (105)$$

关键帧重置步骤后真实的和估计的姿态状态包括重置前姿态的横滚和俯仰分量，

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_n^{b+} &= \mathbf{q}_\theta \otimes \mathbf{q}_\phi, \\ \hat{\mathbf{q}}_n^{b+} &= \hat{\mathbf{q}}_\theta \otimes \hat{\mathbf{q}}_\phi. \end{aligned}$$

由此产生的姿态误差由方程 (30a) 和 (29a) 得出，为

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}_n^{b+} &= (\hat{\mathbf{q}}_n^{b+})^{-1} \otimes \mathbf{q}_n^{b+} \\ &= \hat{\mathbf{q}}_\phi^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_\theta^{-1} \otimes \mathbf{q}_\theta \otimes \mathbf{q}_\phi \\ &= \hat{\mathbf{q}}_\phi^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_\theta^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_\theta \otimes \delta \mathbf{q}_\theta \otimes \hat{\mathbf{q}}_\phi \otimes \delta \mathbf{q}_\phi \\ &= (\hat{\mathbf{q}}_\phi^{-1} \otimes \delta \mathbf{q}_\theta \otimes \hat{\mathbf{q}}_\phi) \otimes \delta \mathbf{q}_\phi, \end{aligned}$$

这与方程 (42) 相似，这意味着

$$\delta \boldsymbol{\theta}_n^{b+} = \mathbf{R}_\phi \delta \boldsymbol{\theta}_\theta + \delta \boldsymbol{\theta}_\phi.$$

展开并分解出欧拉角误差，这就变成

$$\delta \boldsymbol{\theta}_n^{b+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \hat{\phi} & 0 \\ 0 & -\sin \hat{\phi} & 0 \end{bmatrix} \Delta_n^b, \quad (106)$$

这与方程 (98) 的不同之处在于它消除了偏航及其不确定性。将方程 (105) 代入方程 (106) 我们发现

$$\delta \boldsymbol{\theta}_n^{b+} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \hat{\phi} \tan \hat{\theta} & \cos \hat{\phi} \tan \hat{\theta} \\ 0 & \cos^2 \hat{\phi} & -\cos \hat{\phi} \sin \hat{\phi} \\ 0 & -\cos \hat{\phi} \sin \hat{\phi} & \sin^2 \hat{\phi} \end{bmatrix} \delta \boldsymbol{\theta}_n^b, \quad (107)$$

对于 iRN 验证了方程 (104)。

E.2 bRN 姿态重置

延续第 7 节中给出的符号，我们用 $\delta \mathbf{q}_b^n$ 和 $\delta \boldsymbol{\theta}_b^n$ 来描述 bRN 的姿态误差。典型的 3-2-1 欧拉角假设惯性姿态。要在保持直观的横滚、俯仰和偏航旋转的同时表示机体固连的姿态，必须将旋转序列的顺序和符号翻转为

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_b^n &= (\mathbf{q}_n^b)^{-1} \\ &= (\mathbf{q}_\psi \otimes \mathbf{q}_\theta \otimes \mathbf{q}_\phi)^{-1} \\ &= \mathbf{q}_\phi^{-1} \otimes \mathbf{q}_\theta^{-1} \otimes \mathbf{q}_\psi^{-1}.\end{aligned}$$

使用误差状态定义方程 (30b) 进行扩展，

$$\mathbf{q}_b^n = \hat{\mathbf{q}}_\phi^{-1} \otimes \delta \mathbf{q}_\phi^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_\theta^{-1} \otimes \delta \mathbf{q}_\theta^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_\psi^{-1} \otimes \delta \mathbf{q}_\psi^{-1}, \quad (108)$$

其近似为

$$\hat{\mathbf{q}}_b^n = \hat{\mathbf{q}}_\phi^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_\theta^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_\psi^{-1}. \quad (109)$$

使用方程 (30b) 组合方程 (108) 和 (109)，给出

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{q}_b^n &= \mathbf{q}_b^n \otimes (\hat{\mathbf{q}}_b^n)^{-1} \\ &= \hat{\mathbf{q}}_\phi^{-1} \otimes \delta \mathbf{q}_\phi^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_\theta^{-1} \otimes \delta \mathbf{q}_\theta^{-1} \otimes \\ &\quad \otimes \hat{\mathbf{q}}_\psi^{-1} \otimes \delta \mathbf{q}_\psi^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_\psi \otimes \hat{\mathbf{q}}_\theta \otimes \hat{\mathbf{q}}_\phi \\ &= \hat{\mathbf{q}}_\phi^{-1} \otimes (\delta \mathbf{q}_\phi^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_\theta^{-1} \otimes (\delta \mathbf{q}_\theta^{-1} \otimes \\ &\quad \otimes \hat{\mathbf{q}}_\psi^{-1} \otimes \delta \mathbf{q}_\psi^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_\psi) \otimes \hat{\mathbf{q}}_\theta) \otimes \hat{\mathbf{q}}_\phi,\end{aligned}$$

这意味着

$$\delta \boldsymbol{\theta}_b^n = -\mathbf{R}_\phi \delta \boldsymbol{\theta}_\phi - \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\theta \delta \boldsymbol{\theta}_\theta - \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\psi \delta \boldsymbol{\theta}_\psi. \quad (110)$$

注意这个

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\phi \delta \boldsymbol{\theta}_\phi &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi - \hat{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \delta \boldsymbol{\theta}_\phi.\end{aligned}$$

类似地， $\mathbf{R}_\theta \delta \boldsymbol{\theta}_\theta = \delta \boldsymbol{\theta}_\theta$ 和 $\mathbf{R}_\psi \delta \boldsymbol{\theta}_\psi = \delta \boldsymbol{\theta}_\psi$ 。利用这些结果简化方程 (110)，并将所得方程与 iRN 的方程 (97) 进行比较，我们得到

$$\begin{aligned}\delta \boldsymbol{\theta}_b^n &= -\delta \boldsymbol{\theta}_\phi - \mathbf{R}_\phi \delta \boldsymbol{\theta}_\theta - \mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\theta \delta \boldsymbol{\theta}_\psi \\ &= -\delta \boldsymbol{\theta}_n^b.\end{aligned} \quad (111)$$

再一次，重置步骤只保留横滚和俯仰，给出

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\theta}_b^{n+} &= -\delta\boldsymbol{\theta}_\phi - \mathbf{R}_\phi\delta\boldsymbol{\theta}_\theta \\ &= -\delta\boldsymbol{\theta}_n^{b+}.\end{aligned}\tag{112}$$

将方程 (112) 和 (111) 代入方程 (107), 我们发现

$$\begin{aligned}(-\delta\boldsymbol{\theta}_b^{n+}) &= \begin{bmatrix} 1 & \sin\hat{\phi}\tan\hat{\theta} & \cos\hat{\phi}\tan\hat{\theta} \\ 0 & \cos^2\hat{\phi} & -\cos\hat{\phi}\sin\hat{\phi} \\ 0 & -\cos\hat{\phi}\sin\hat{\phi} & \sin^2\hat{\phi} \end{bmatrix} (-\delta\boldsymbol{\theta}_b^n) \\ \implies \delta\boldsymbol{\theta}_b^{n+} &= \mathbf{N}_\theta\delta\boldsymbol{\theta}_b^n,\end{aligned}\tag{113}$$

这证实了 bRN 的方程 (104)。注意, 用于评估 \mathbf{N}_θ 的 $\hat{\phi}$ 和 $\hat{\theta}$ 的值由 $(\hat{\mathbf{q}}_b^n)^{-1}$ 的欧拉分解得到。

E.3 bRN 位置重置

根据方程 (90), 我们可以写

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_b^{n+} &= -\mathbf{R}(\mathbf{q}_b^n)\mathbf{p}_n^{b+} \\ &= -\mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_b^{n+})\mathbf{p}_n^{b+},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_n^{b+} &= \mathbf{k}\mathbf{k}^\top\mathbf{p}_n^b \\ &= -\mathbf{k}\mathbf{k}^\top\mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_b^n)\mathbf{p}_b^n \\ &= -\mathbf{k}\mathbf{k}^\top\mathbf{R}(\mathbf{q}_b^n)\mathbf{p}_b^n\end{aligned}\tag{114}$$

由重新排列方程 (90) 得到。我们从方程 (91) 和 (38) 中注意到

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_b^n &= \mathbf{q}_\phi^{-1} \otimes \mathbf{q}_\theta^{-1} \otimes \mathbf{q}_\psi^{-1} \\ \implies \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^n) &= \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_\psi)\mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_\theta)\mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_\phi),\end{aligned}$$

所以方程 (114) 变成

$$\mathbf{p}_n^{b+} = -\mathbf{k}\mathbf{k}^\top\mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_\psi)\mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_\theta)\mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_\phi)\mathbf{p}_b^n.$$

我们接下来观察到

$$\begin{aligned}\mathbf{k}\mathbf{k}^\top\mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_\psi) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{k}\mathbf{k}^\top,\end{aligned}$$

以致于

$$\mathbf{p}_n^{b+} = -\mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_\theta) \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_\phi) \mathbf{p}_b^n.$$

注意到

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_b^{n+} &= \mathbf{q}_\phi^{-1} \otimes \mathbf{q}_\theta^{-1} \\ \implies \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^{n+}) &= \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_\theta) \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_\phi), \end{aligned}$$

我们有

$$\mathbf{p}_n^{b+} = -\mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^{n+}) \mathbf{p}_b^n$$

并因此

$$\mathbf{p}_b^{n+} = \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_b^{n+}) \mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^{n+}) \mathbf{p}_b^n. \quad (115)$$

然后我们根据方程 (31b), (33) 和 (34) 进行展开和简化, 同时删除二阶项, 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_b^{n+} &= \mathbf{R}^\top(\delta\mathbf{q}_b^{n+}) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{R}(\delta\mathbf{q}_b^{n+}) \mathbf{p}_b^n \\ &\approx (\mathbf{I} + \lfloor \delta\boldsymbol{\theta}_b^{n+} \rfloor) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) (\mathbf{I} - \lfloor \delta\boldsymbol{\theta}_b^{n+} \rfloor) (\hat{\mathbf{p}}_b^n + \delta\mathbf{p}_b^n) \\ &\approx \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \hat{\mathbf{p}}_b^n \\ &\quad + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \delta\mathbf{p}_b^n \\ &\quad + \lfloor \delta\boldsymbol{\theta}_b^{n+} \rfloor \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \hat{\mathbf{p}}_b^n \\ &\quad - \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \lfloor \delta\boldsymbol{\theta}_b^{n+} \rfloor \hat{\mathbf{p}}_b^n. \end{aligned}$$

从方程 (115), 估计重置为

$$\hat{\mathbf{p}}_b^{n+} = \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \hat{\mathbf{p}}_b^n.$$

使用方程 (4) 和 (113), 然后将误差状态重置为

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{p}_b^{n+} &= \mathbf{p}_b^{n+} - \hat{\mathbf{p}}_b^{n+} \\ &= \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \delta\mathbf{p}_b^n \\ &\quad + \lfloor \delta\boldsymbol{\theta}_b^{n+} \rfloor \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \hat{\mathbf{p}}_b^n \\ &\quad - \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \lfloor \delta\boldsymbol{\theta}_b^{n+} \rfloor \hat{\mathbf{p}}_b^n \\ &= \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \delta\mathbf{p}_b^n \\ &\quad - \lfloor \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \hat{\mathbf{p}}_b^n \rfloor \delta\boldsymbol{\theta}_b^{n+} \\ &\quad + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \lfloor \hat{\mathbf{p}}_b^n \rfloor \delta\boldsymbol{\theta}_b^{n+} \\ &= \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \delta\mathbf{p}_b^n \\ &\quad - \lfloor \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \hat{\mathbf{p}}_b^n \rfloor \mathbf{N}_\theta \delta\boldsymbol{\theta}_b^n \\ &\quad + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k}\mathbf{k}^\top \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \lfloor \hat{\mathbf{p}}_b^n \rfloor \mathbf{N}_\theta \delta\boldsymbol{\theta}_b^n, \end{aligned}$$

并且非零 Jacobian 项是

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta \mathbf{p}_b^{n+}}{\partial \delta \mathbf{p}_b^n} &= \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k} \mathbf{k}^\top \mathbf{R} (\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \\
\frac{\partial \delta \mathbf{p}_b^{n+}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_b^n} &= (-[\mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k} \mathbf{k}^\top \mathbf{R} (\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \hat{\mathbf{p}}_b^n] \\
&\quad + \mathbf{R}^\top (\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) \mathbf{k} \mathbf{k}^\top \mathbf{R} (\hat{\mathbf{q}}_b^{n+}) [\hat{\mathbf{p}}_b^n]) \mathbf{N}_\theta.
\end{aligned}$$

附录 F 机体固连的激光扫描测量模型

在本节中，我们推导了第 7.2.5 节中提出的机体固连的激光扫描测量模型的残差 Jacobian 矩阵。对于测量模型的平移部分，我们首先根据方程 (31b)、(33) 和 (34) 展开方程 (93)，然后去掉二阶项并使用方程 (4) 得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_{lt}(\mathbf{x}) &= \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\mathbf{q}_b^o) (\mathbf{p}_b^n - \mathbf{p}_b^c + \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_b^n) \mathbf{R}(\mathbf{q}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \mathbf{p}_k^n)) + \boldsymbol{\eta}_{lt} \\
&= \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) \mathbf{R}(\delta \mathbf{q}_b^o) (\hat{\mathbf{p}}_b^n + \delta \mathbf{p}_b^n - \mathbf{p}_b^c \\
&\quad + \mathbf{R}^\top(\delta \mathbf{q}_b^n) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) \mathbf{R}(\delta \mathbf{q}_k^n) \\
&\quad \times (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n - \delta \mathbf{p}_k^n)) + \boldsymbol{\eta}_{lt} \\
&= \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) (\mathbf{I} - [\delta \boldsymbol{\theta}_b^o]) (\hat{\mathbf{p}}_b^n + \delta \mathbf{p}_b^n - \mathbf{p}_b^c \\
&\quad + (\mathbf{I} + [\delta \boldsymbol{\theta}_b^n]) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{I} - [\delta \boldsymbol{\theta}_k^n]) \\
&\quad \times (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n - \delta \mathbf{p}_k^n)) + \boldsymbol{\eta}_{lt} \\
&= \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) (\hat{\mathbf{p}}_b^n - \mathbf{p}_b^c + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n)) \\
&\quad + \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) \delta \mathbf{p}_b^n - \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) \delta \mathbf{p}_k^n \\
&\quad - \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) [\mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n)] \delta \boldsymbol{\theta}_b^n \\
&\quad + \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) [\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n] \delta \boldsymbol{\theta}_k^n \\
&\quad + \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) [\hat{\mathbf{p}}_b^n - \mathbf{p}_b^c + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n)] \delta \boldsymbol{\theta}_b^o.
\end{aligned}$$

回顾这个

$$\mathbf{h}_{lt}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) (\hat{\mathbf{p}}_b^n - \mathbf{p}_b^c + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n)),$$

残差由下式给出为

$$\mathbf{h}_{lt} = \mathbf{z}_{lt} - \mathbf{h}_{lt}(\hat{\mathbf{x}}),$$

其被建模为

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{lt} &= \mathbf{h}_{lt}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}_{lt}(\hat{\mathbf{x}}) \\
&= \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) \delta \mathbf{p}_b^n - \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) \delta \mathbf{p}_k^n \\
&\quad - \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) [\mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n)] \delta \boldsymbol{\theta}_b^n \\
&\quad + \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) [\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n] \delta \boldsymbol{\theta}_k^n \\
&\quad + \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) [\hat{\mathbf{p}}_b^n - \mathbf{p}_b^c + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n)] \delta \boldsymbol{\theta}_b^o.
\end{aligned}$$

注意到 \mathbf{q}_b^o 仅是 \mathbf{q}_b^n 的函数，我们采用偏导数并应用链式规则来获得以下非零 Jacobian 项：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_{lt}}{\partial \delta \mathbf{p}_b^n} &= \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o), \\
\frac{\partial \mathbf{r}_{lt}}{\partial \delta \theta_b^n} &= -\mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) [\mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n)] \\
&\quad + \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) [\hat{\mathbf{p}}_b^n - \mathbf{p}_b^c + \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n)] \frac{\partial \delta \theta_b^o}{\partial \delta \theta_b^n}, \\
\frac{\partial \mathbf{r}_{lt}}{\partial \delta \mathbf{p}_k^n} &= -\mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n), \\
\frac{\partial \mathbf{r}_{lt}}{\partial \delta \theta_k^n} &= \mathbf{I}_{2 \times 3} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) [\mathbf{p}_b^c - \hat{\mathbf{p}}_k^n].
\end{aligned}$$

为推导出对于 $\partial \delta \theta_b^o / \partial \delta \theta_b^n$ 的表达式，我们遵循类似于附录 E.1 和 E.2 中用于推导姿态重置的过程。我们根据方程 (29b) 将 \mathbf{q}_b^o 的定义扩展为

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_b^o &= (\mathbf{q}_{\theta_n^b} \otimes \mathbf{q}_{\phi_n^b})^{-1} \\
&= (\hat{\mathbf{q}}_{\phi_n^b})^{-1} \otimes (\delta \mathbf{q}_{\phi_n^b})^{-1} \otimes (\hat{\mathbf{q}}_{\theta_n^b})^{-1} \otimes (\delta \mathbf{q}_{\theta_n^b})^{-1}.
\end{aligned}$$

注意到 $\hat{\mathbf{q}}_b^o = (\hat{\mathbf{q}}_{\theta_n^b} \otimes \hat{\mathbf{q}}_{\phi_n^b})^{-1}$ ，根据方程 (36) 计算误差四元数为

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{q}_b^o &= \mathbf{q}_b^o \otimes (\hat{\mathbf{q}}_b^o)^{-1} \\
&= (\hat{\mathbf{q}}_{\phi_n^b})^{-1} \otimes (\delta \mathbf{q}_{\phi_n^b})^{-1} \\
&\quad \otimes (\hat{\mathbf{q}}_{\theta_n^b})^{-1} \otimes (\delta \mathbf{q}_{\theta_n^b})^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_{\theta_n^b} \otimes \hat{\mathbf{q}}_{\phi_n^b},
\end{aligned}$$

由此，我们用方程 (42) 以获得

$$\delta \theta_b^o = \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_{\phi_n^b}) (-\delta \theta_{\phi_n^b} - \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_{\theta_n^b}) \delta \theta_{\theta_n^b}).$$

注意，如附录 E.2 所示， $\mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_{\phi_n^b}) \delta \theta_{\phi_n^b} = \delta \theta_{\phi_n^b}$ 并且 $\mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_{\theta_n^b}) \delta \theta_{\theta_n^b} = \delta \theta_{\theta_n^b}$ ，这就变成

$$\delta \theta_b^o = -\delta \theta_{\phi_n^b} - \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_{\phi_n^b}) \delta \theta_{\theta_n^b}.$$

根据方程 (36) 展开 $\mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_{\phi_n^b})$ 并合并各项，这可写为

$$\delta \theta_b^o = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \hat{\phi}_n^b & 0 \\ 0 & \sin \hat{\phi}_n^b & 0 \end{bmatrix} \Delta_n^b,$$

其中

$$\Delta = \begin{bmatrix} \phi_n^b - \hat{\phi}_n^b \\ \theta_n^b - \hat{\theta}_n^b \\ \psi_n^b - \hat{\psi}_n^b \end{bmatrix}$$

如附录 A 所示。然后我们使用链式法则来获得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_b^o}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_b^n} &= \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_b^o}{\partial \boldsymbol{\Delta}_b^n} \frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_b^n}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_n^b} \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_n^b}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_b^n} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \hat{\phi}_n^b & 0 \\ 0 & \sin \hat{\phi}_n^b & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}_{\boldsymbol{\Delta}_b^n} (-\mathbf{I}) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \hat{\phi}_n^b & 0 \\ 0 & -\sin \hat{\phi}_n^b & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N}_{\boldsymbol{\Delta}_b^n},
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{N}_{\boldsymbol{\Delta}_b^n}$ 由附录 A 中的方程 (100) 给出。然后将这一结果代入上面，得到对于 $\partial \mathbf{r}_{\text{lt}} / \partial \delta \boldsymbol{\theta}_b^n$ 的完整表达。

对于测量模型的旋转部分，我们首先根据 (29b) 将 \mathbf{q}_{lr} 的表达式展开为

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{\text{lr}} &= (\mathbf{q}_b^o)^{-1} \otimes \mathbf{q}_b^n \otimes (\mathbf{q}_k^n)^{-1} \otimes \mathbf{q}_b^o \\
&= (\hat{\mathbf{q}}_b^o)^{-1} \otimes (\delta \mathbf{q}_b^o)^{-1} \otimes \delta \mathbf{q}_b^n \\
&\quad \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes (\hat{\mathbf{q}}_k^n)^{-1} \otimes (\delta \mathbf{q}_k^n)^{-1} \otimes \delta \mathbf{q}_b^o \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^o.
\end{aligned}$$

回顾 $\hat{\mathbf{q}}_{\text{lr}} = (\hat{\mathbf{q}}_b^o)^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes (\hat{\mathbf{q}}_k^n)^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^o$ ，根据方程 (30b) 计算出误差四元数为

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{q}_{\text{lr}} &= \mathbf{q}_{\text{lr}} \otimes (\hat{\mathbf{q}}_{\text{lr}})^{-1} \\
&= (\hat{\mathbf{q}}_b^o)^{-1} \otimes (\delta \mathbf{q}_b^o)^{-1} \otimes \delta \mathbf{q}_b^n \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes (\hat{\mathbf{q}}_k^n)^{-1} \\
&\quad \otimes (\delta \mathbf{q}_k^n)^{-1} \otimes \delta \mathbf{q}_b^o \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n \otimes (\hat{\mathbf{q}}_k^n)^{-1} \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^o,
\end{aligned}$$

从中我们使用方程 (42) 以获得

$$\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{\theta}_{\text{lr}} &= \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) (-\delta \boldsymbol{\theta}_b^o + \delta \boldsymbol{\theta}_b^n + \\
&\quad \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) (-\delta \boldsymbol{\theta}_k^n + \delta \boldsymbol{\theta}_b^o)) \\
&= \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) \delta \boldsymbol{\theta}_b^n - \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) \delta \boldsymbol{\theta}_k^n \\
&\quad + \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) (\mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) - \mathbf{I}) \delta \boldsymbol{\theta}_b^o.
\end{aligned}$$

测量模型是 \mathbf{q}_{lr} 的偏航部分，

$$\begin{aligned}
h_{\text{lr}}(\mathbf{x}) &= \psi(\mathbf{q}_{\text{lr}}) + \eta_{\text{lr}} \\
&\triangleq \psi_{\text{lr}} + \eta_{\text{lr}},
\end{aligned}$$

并且估计的测量结果是

$$\begin{aligned}
h_{\text{lr}}(\hat{\mathbf{x}}) &= \psi(\mathbf{q}_{\text{lr}}) \\
&\triangleq \hat{\psi}_{\text{lr}}.
\end{aligned}$$

残差由下式给出为

$$r_{\text{lr}} = z_{\text{lr}} - h_{\text{lr}}(\hat{\mathbf{x}}),$$

其被建模为

$$\begin{aligned}
r_{lr} &= h_{lr}(\mathbf{x}) - h_{lr}(\hat{\mathbf{x}}) \\
&= \psi_{lr} - \hat{\psi}_{lr} \\
&= \mathbf{k}^\top \boldsymbol{\Delta}_{lr}.
\end{aligned}$$

我们然后利用链式法则计算 r_{lr} 的 Jacobian 矩阵为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_{lr}}{\partial \delta \mathbf{x}} &= \frac{\partial r_{lr}}{\partial \boldsymbol{\Delta}_{lr}} \frac{\partial \boldsymbol{\Delta}_{lr}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{lr}} \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{lr}}{\partial \delta \mathbf{x}} \\
&= (\mathbf{k}^\top) (\mathbf{N}_{\boldsymbol{\Delta}_{lr}}) \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{lr}}{\partial \delta \mathbf{x}},
\end{aligned}$$

其中有非零项

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_{lr}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_b^n} &= \mathbf{k}^\top \mathbf{N}_{\boldsymbol{\Delta}_{lr}} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) \\
&\quad \times \left(\mathbf{I} + (\mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) - \mathbf{I}) \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_b^o}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_b^n} \right), \\
\frac{\partial r_{lr}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_k^n} &= -\mathbf{k}^\top \mathbf{N}_{\boldsymbol{\Delta}_{lr}} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^o) \mathbf{R}^\top(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n),
\end{aligned}$$

由我们代入在上面推导出的表达式 $\partial \delta \boldsymbol{\theta}_b^o / \partial \delta \boldsymbol{\theta}_b^n$ 获得。

附录 G 从 bRN 转换为 iRN

在机体坐标系 (bRN) 中进行估计时, 将估计的状态转化为惯性坐标系 (iRN) 中往往是有用的, 这便于可视化或路径规划与控制。本附录描述了如何完成这种变换, 并推导出了将 bRN 协方差转换为 iRN 帧的 Jacobians 矩阵。

iRN 和 bRN 的速度和偏差状态 (\mathbf{v} 、 β_ω 和 β_a) 都在机体坐标系中表示, 因此不需要变换。阻力系数项 μ 同样不需要变换, 因为它是标量项。需要变换的状态是车辆的相对位姿 ($\mathbf{p}_b^n, \mathbf{q}_b^n$) 和关键帧位姿 ($\mathbf{p}_k^n, \mathbf{q}_k^n$)。

车辆位置 \mathbf{p}_b^n 使用方程 (90) 变换为

$$\mathbf{p}_n^b = -\mathbf{R}(\mathbf{q}_b^n) \mathbf{p}_b^n.$$

根据方程 (31b)、(44a) 和 (33) 展开, 然后使用方程 (4), 这就变为

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_n^b &= \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \mathbf{R}(\delta \mathbf{q}_b^n) (\hat{\mathbf{p}}_b^n + \delta \mathbf{p}_b^n) \\
&\approx \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) (\mathbf{I} - [\delta \boldsymbol{\theta}_b^n]) (\hat{\mathbf{p}}_b^n + \delta \mathbf{p}_b^n) \\
&\approx \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \hat{\mathbf{p}}_b^n + \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \delta \mathbf{p}_b^n - \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) [\delta \boldsymbol{\theta}_b^n] \hat{\mathbf{p}}_b^n \\
&= \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \hat{\mathbf{p}}_b^n + \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \delta \mathbf{p}_b^n + \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) [\hat{\mathbf{p}}_b^n] \delta \boldsymbol{\theta}_b^n.
\end{aligned}$$

估计状态变换为

$$\hat{\mathbf{p}}_n^b = -\mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \hat{\mathbf{p}}_b^n,$$

并且产生的误差状态是

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{p}_n^b &= \mathbf{p}_n^b - \hat{\mathbf{p}}_n^b \\ &= \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) \delta \mathbf{p}_b^n + \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) [\hat{\mathbf{p}}_b^n] \delta \boldsymbol{\theta}_b^n.\end{aligned}$$

然后得到的非零 Jacobian 项是

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta \mathbf{p}_n^b}{\partial \delta \mathbf{p}_b^n} &= \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n), \\ \frac{\partial \delta \mathbf{p}_n^b}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_b^n} &= \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) [\hat{\mathbf{p}}_b^n].\end{aligned}$$

将车辆姿态 \mathbf{q}_b^n 变换为

$$\mathbf{q}_n^b = (\mathbf{q}_b^n)^{-1},$$

根据方程 (29b) 其被展开为

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_n^b &= (\delta \mathbf{q}_b^n \otimes \hat{\mathbf{q}}_b^n)^{-1} \\ &= (\hat{\mathbf{q}}_b^n)^{-1} \otimes (\delta \mathbf{q}_b^n)^{-1}.\end{aligned}$$

估计姿态变换为

$$\hat{\mathbf{q}}_n^b = (\hat{\mathbf{q}}_b^n)^{-1},$$

并且从方程 (30a) 得到的误差状态是

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{q}_n^b &= (\hat{\mathbf{q}}_n^b)^{-1} \otimes \mathbf{q}_n^b \\ &= \left((\hat{\mathbf{q}}_b^n)^{-1} \right)^{-1} \otimes (\hat{\mathbf{q}}_b^n)^{-1} \otimes (\delta \mathbf{q}_b^n)^{-1} \\ &= (\delta \mathbf{q}_b^n)^{-1},\end{aligned}$$

这意味着

$$\delta \boldsymbol{\theta}_n^b = -\delta \boldsymbol{\theta}_b^n.$$

非零 Jacobian 项是

$$\frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_n^b}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_b^n} = -\mathbf{I}.$$

关键帧位姿 $(\mathbf{p}_k^n, \mathbf{q}_k^n)$ 也会进行类似的变换, 产生

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}}_n^k &= -\mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) \hat{\mathbf{p}}_k^n \\ \hat{\mathbf{q}}_n^k &= (\hat{\mathbf{q}}_k^n)^{-1},\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta \mathbf{p}_n^k}{\partial \delta \mathbf{p}_k^n} &= \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n), \\ \frac{\partial \delta \mathbf{p}_n^k}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_k^n} &= \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) [\hat{\mathbf{p}}_k^n], \\ \frac{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_n^k}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_k^n} &= -\mathbf{I}.\end{aligned}$$

协方差变换为

$$\mathbf{P}_{\text{iRN}} = \mathbf{J} \mathbf{P}_{\text{bRN}} \mathbf{J}^\top,$$

其中

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \delta \mathbf{x}_{\text{iRN}}}{\partial \delta \mathbf{x}_{\text{bRN}}},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) & \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_b^n) [\hat{\mathbf{p}}_b^n] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) & \mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}_k^n) \hat{\mathbf{p}}_k^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

References

1. Anderson, ML, Brink, KM, Willis, AR (2019) Real-time visual odometry covariance estimation for unmanned air vehicle navigation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 42(6): 1272–1288.
2. Bailey, T, Durrant-Whyte, H (2006) Simultaneous localization and mapping (SLAM): Part II. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 13(3): 108–117.
3. Bar-Shalom, Y, Kirubarajan, T, Li, XR (2002) *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
4. Barfoot, T, Forbes, JR, Furgale, PT (2011) Pose estimation using linearized rotations and quaternion algebra. *Acta Astronautica* 68(1–2): 101–112.
5. Barfoot, TD, Furgale, PT (2014) Associating uncertainty with three-dimensional poses for use in estimation problems. *IEEE Transactions on Robotics* 30(3): 679–693.
6. Bloesch, M, Omari, S, Hutter, M, Siegwart, R (2015) Robust visual inertial odometry using a direct EKF-based approach. In: *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 298–304.

7. Bloesch, M, Sommer, H, Laidlow, T, et al. (2016) A primer on the differential calculus of 3D orientations. ArXiv e-prints. Available at <https://arxiv.org/abs/1606.05285>.
8. Bopardikar, SD, Zhang, S, Speranzon, A (2013) A robust and adaptive framework for localization under varying sensor modalities. In: AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference.
9. Casey, RT, Karpenko, M, Curry, R, Elkaim, G (2013) Attitude representation and kinematic propagation for low-cost UAVs. In: AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, pp. 1-15.
10. Castellanos, JA, Martinez-Cantin, R, Tardós, JD, Neira, J (2007) Robocentric map joining: Improving the consistency of EKF-SLAM. *Robotics and Autonomous Systems* 55(1): 21-29.
11. Censi, A (2008) An ICP variant using a point-to-line metric. In: IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 19-25.
12. Chong, KS, Kleeman, L (1999) Feature-based mapping in real, large scale environments using an ultrasonic array. *International Journal of Robotics Research* 18(1): 3-19.
13. Farrell, J (2008) Aided Navigation: GPS with High Rate Sensors. 1st Ed. New York: McGraw-Hill, Inc.
14. Hertzberg, C, Wagner, R, Frese, U, Schröder, L (2013) Integrating generic sensor fusion algorithms with sound state representations through encapsulation of manifolds. *Information Fusion* 14(1): 57-77.
15. Jones, E, Vedaldi, A, Soatto, S (2007) Inertial structure from motion with autocalibration. In: ICCV Workshop on Dynamical Vision.
16. Julier, SJ, Uhlmann, JK (2001) A counter example to the theory of simultaneous localization and map building. In: IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol. 4, pp. 4238-4243.
17. Kim, B, Kaess, M, Fletcher, L, et al. (2010) Multiple relative pose graphs for robust cooperative mapping. In: IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 3185-3192.
18. Kottas, DG, Hesch, JA, Bowman, SL, Roumeliotis, SI (2013) On the consistency of vision-aided inertial navigation. In: *Experimental Robotics* (Springer Tracts in Advanced Robotics, Vol. 88). Berlin: Springer, pp. 303-317.
19. Kuipers, JB (1999) Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality. Princeton, NJ: Princeton University Press.
20. Lefferts, E, Markley, F, Shuster, M (1982) Kalman filtering for spacecraft attitude estimation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 5(5): 417-429.

21. Leishman, RC, Macdonald, JC, Beard, RW, McLain, TW (2014a) Quadrotors and accelerometers: State estimation with an improved dynamic model. *IEEE Control Systems Magazine* 34(1): 28–41.
22. Leishman, RC, McLain, TW (2014) Multiplicative extended Kalman filter for relative rotorcraft navigation. *Journal of Aerospace Information Systems* 12(12): 728–744.
23. Leishman, RC, McLain, TW, Beard, RW (2014b) Relative navigation approach for vision-based aerial GPS-denied navigation. *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 74(1): 97–111.
24. Leutenegger, S, Lynen, S, Bosse, M, Siegwart, R, Furgale, P (2015) Keyframe-based visual-inertial odometry using nonlinear optimization. *International Journal of Robotics Research* 34(3): 314–334.
25. Markley, FL (2003) Attitude error representations for Kalman filtering. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 26(2): 311–317.
26. Martinelli, A (2012) Vision and IMU data fusion: Closed-form solutions for attitude, speed, absolute scale, and bias determination. *IEEE Transactions on Robotics* 28(1): 44–60.
27. Maybeck, PS (1979) Stochastic models, estimation, and control (Mathematics in Science and Engineering, Vol. 141). New York: Academic Press.
28. Owen, E, Montano, L (2006) A robocentric motion planner for dynamic environments using the velocity space. In: *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 4368–4374.
29. Quigley, M, Conley, K, Gerkey, B, et al. (2009) ROS: An open-source robot operating system. In: *ICRA Workshop on Open Source Software*.
30. Shen, S, Michael, N, Kumar, V (2011) Autonomous multi-floor indoor navigation with a computationally constrained MAV. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 20–25.
31. Shen, S, Mulgaonkar, Y, Michael, N, Kumar, V (2014) Multi-sensor fusion for robust autonomous flight in indoor and outdoor environments with a rotorcraft MAV. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 4974–4981.
32. Sola, J (2016) Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter. Technical Report IRI-TR-16-02, Institut de Robòtica i Informàtica Industrial, CSIC-UPC.
33. Tomic, T, Schmid, K, Lutz, P, et al. (2012) Toward a fully autonomous UAV: Research platform for indoor and outdoor urban search and rescue. *IEEE Robotics and Automation Magazine* 19(3): 46–56.
34. Trawny, N, Roumeliotis, SI (2005) Indirect Kalman filter for 3D attitude estimation: A tutorial for quaternion algebra. Technical Report 2005-002, Rev. 57, University of Minnesota, Department of Computer Science and Engineering, Minneapolis.

35. Weiss, S, Achtelik, MW, Lynen, S, Chli, M, Siegwart, R (2012) Real-time onboard visual-inertial state estimation and self-calibration of MAVs in unknown environments. In: IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 957–964.
36. Weiss, S, Siegwart, R (2011) Real-time metric state estimation for modular vision-inertial systems. In: IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 4531–4537.
37. Wheeler, DO, Koch, DP, Jackson, JS, et al. (2020) Relative navigation of autonomous GPS-degraded micro air vehicles. *Autonomous Robots*. Available at: <https://doi.org/10.1007/s10514-019-09899-4>.
38. Wheeler, DO, Koch, DP, Jackson, JS, McLain, TW, Beard, RW (2018) Relative navigation: A keyframe-based approach for observable GPS-degraded navigation. *IEEE Control Systems Magazine* 38(4): 30–48.
39. Yu, H, Beard, RW (2013) Vision-based local-level frame mapping and planning in spherical coordinates for miniature air vehicles. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 21(3): 695–703.
40. Zhang, J, Kaess, M, Singh, S (2014) Real-time depth enhanced monocular odometry. In: IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 4973–4980.