

经验总结 - F. Landis Markley

F. Landis Markley

January 2013

摘要

本文围绕着三个我对自己的职业生涯感兴趣的课题展开：协方差分析、约束估计和角动量。讨论了协方差分析的解析法和数值法。关于约束一节首先从旋转群的性质引起的一般考虑开始，然后转到 Wahba 问题和四元数卡尔曼滤波器。角动量的讨论包括角动量在姿态确定和控制以及航天器异常检测和诊断中的应用。包括相关的示例。

1 简介

计算的目的是洞察力，而不是数字。

R. W. Hamming, 《科学家和工程师的数值方法》(1962)

NASA 任务开发阶段的完成通常伴随着一份“经验教训”文件，以记录错误的步骤和正确的步骤。我在这篇论文中的意图是用一份类似的文件来标记我职业生涯的这个阶段，但通过关注正确的事情来行使我的权威。这篇论文与我的 Brouwer 讲座 [1] 有一些重叠，但不太个人化，而且是按主题而不是按时间顺序组织的。它围绕着我职业生涯的三大主题展开：协方差分析的实用性、约束的复杂性和角动量的重要性。我试图强调一般概念，而不是计算细节，并用相关示例来说明每个主题。然而，在某些地方，讨论不可避免地具有技术性。

协方差分析的讨论包括分析和数值方法 [2-10]。分析部分叙述了 Farrenkopf 关于单轴姿态估计器稳态姿态精度的表达式 [3] 及其结果 [7] 的扩展。数值讨论涉及姿态确定误差分析系统 (ADEAS)[8] 的开发，以及 ADEAS 在热带降雨测量任务 (TRMM) [11,12] 中通过迂回路径引入备用控制模式的作用。

约束 [4,5,13-40] 一节从旋转矩阵性质引起的一般考虑开始，并继续讨论 Wahba 对姿态估计问题 [18] 和四元数卡尔曼滤波器 [4,5,28,34-38] 的表述。这是论文中最长、技术性最强的部分，包括唯一的新材料，该材料被归入附录。

论文的最后部分介绍了角动量在旋转航天器姿态确定 [41-45] 和姿态控制 [46-53] 中的应用。讨论的控制应用是非常相似的太阳、反常和磁层粒子探测器 (SAMPEX) 的任务模式 [47-50] 和哈勃太空望远镜 (HST) 的无陀螺安全指向模式 [51]。本文最后讨论了如何利用角动量守恒来检测 HST 上的异常陀螺行为 [52]，并诊断 Wilkinson 微波各向异性探测器 (WMAP) 上的异常 [53]。

2 协方差分析的效用

我从我在航空领域最重要的导师 Gene Lefferts 那里学会了协方差分析的价值。在卡尔曼滤波中，第 i 次测量后的协方差矩阵 $P_i(+)$ ，本次测量前的协方差矩阵 $P_i(-)$ 和上一次测量后的协方差矩阵 $P_{i-1}(+)$ 满足众所周知的方程 [2]

$$P_i(-) = \Phi(t_i, t_{i-1}) P_{i-1}(+) \Phi^T(t_i, t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, t) Q(t) \Phi^T(t_i, t) dt \quad (1a)$$

$$K_i = P_i(-) H_i^T [H_i P_i(-) H_i^T + R_i]^{-1} \quad (1b)$$

$$P_i(+) = (I - K_i H_i) P_i(-) \quad (1c)$$

其中 Φ 为状态转换矩阵， Q 为过程噪声的功率谱密度， K_i 为卡尔曼增益， H_i 为测量灵敏度矩阵， R_i 为测量噪声协方差。这些方程一般都要用数值求解。当测量时间间隔均匀且 H 和 R 不变，过程噪声功率谱密度不变， $\Phi(t, t')$ 只依赖于 $t - t'$ ，协方差可以接近稳态值 $P_i(+) \Rightarrow P(+)$ 和 $P_i(-) \Rightarrow P(-)$ 。在所述假设下，通过求解 $P(+)$ 和 $P(-)$ 的耦合方程 (1)，可以用数值方法或有时候用代数方法求出稳态解。用代数方法求解这些方程对于除最简单情况外的所有情况都是一个棘手的问题，但在测量之间的时间间隔 Δt 远小于滤波器的时间常数的限制下，它们变得更易于管理。这是当 $R\Delta t$ 接近常量时更新间隔趋向 0 的限制。在这个极限中， $\Phi(\Delta t, 0) \approx I + F\Delta t$ ，任何一个测量值的更新都可以忽略不计，因此 $P(+)$ 和 $P(-)$ 相等。稳态协方差矩阵满足方程

$$0 = FP + PF^T + Q - PH^T (R\Delta t)^{-1} HP \quad (2)$$

这是连续时间卡尔曼滤波器的代数 Riccati 方程，它比耦合方程 (1) 更易于解析解。我通过找到一些简单情况的稳态协方差获得了非常有用的洞察力，比如偏航陀螺罗盘，但这些情况通常太不符合物理模型，无法实际应用。

2.1 Farrenkopf 方程

1978 年，Robert L. Farrenkopf 在一个非常有趣的案例中发现了有限更新间隔下稳态协方差的代数解：使用陀螺和角度传感器（如星体跟踪器）确定单轴姿态 [3]。状态向量包含角度 θ 和陀螺仪漂移偏置 b 。陀螺仪在模型替换模式下使用，这意味着陀螺仪数据在动态传播步骤中替换欧拉方程，而不是作为测量值处理。该模型已广泛应用于航天器姿态估计 [4,5]。Farrenkopf 模型中的耦合稳态协方差方程导致了一个四次方程，但他发现将四次方程分解为两个二次方程，从而对姿态估计系统的精度进行了非常有用的估计。

Farrenkopf 的模型包括三个误差源：陀螺仪角度随机游动 σ_v 、陀螺仪速率随机游动 σ_u 和角度传感器测量噪声 σ_n 。航天器通常使用速率积分陀螺仪，陀螺仪输出上的噪声称为角度白噪声，而 Farrenkopf 的模型 [6] 中不包括这些噪声。这种噪声源对许多陀螺仪并不重要，包括通常应用 Farrenkopf 方程的陀螺仪，但对一些较新的陀螺仪（如环形激光陀螺仪）可能很重要。Goddard 航天飞行中心的 Kong Ha 已经找到了一种将角度白噪声纳入陀螺处理的方法，但没有寻找稳态解决方案。2000 年，我发现包含角度白噪声会产生一个四次方程，可以像 Farrenkopf 的方程一样求解。我向 Reid Reynolds 展示了我对这些结果的原始推导，并且我们一起发现了一个更好的推导以供发表 [7]。

用 σ_e 表示角度白噪声的标准偏差, 稳态协方差矩阵的分量为

$$P_{\theta\theta}(\mp) = \kappa^{\pm 1} (\kappa - \kappa^{-1}) \sigma_n^2 \quad (3a)$$

$$P_{\theta b}(\mp) = -\kappa^{\pm 1} \sigma_n \sigma_u (\Delta t)^{1/2} \quad (3b)$$

$$P_{bb}(\mp) = \sigma_u \left[\sigma_v^2 + 2\tilde{\sigma} \sigma_u (\Delta t)^{1/2} + \frac{1}{3} \sigma_u^2 (\Delta t)^2 \right]^{1/2} \pm \frac{1}{2} \sigma_u^2 \Delta t \quad (3c)$$

其中

$$\kappa \equiv \sigma_n^{-1} \left\{ \tilde{\sigma} + \frac{1}{4} \sigma_u (\Delta t)^{3/2} + \frac{1}{2} \left[\sigma_v^2 \Delta t + 2\tilde{\sigma} \sigma_u (\Delta t)^{3/2} + \frac{1}{3} \sigma_u^2 (\Delta t)^3 \right]^{1/2} \right\} \quad (4a)$$

$$\tilde{\sigma} \equiv \left[\sigma_n^2 + \sigma_e^2 + \frac{1}{4} \sigma_v^2 \Delta t + \frac{1}{48} \sigma_u^2 (\Delta t)^3 \right]^{1/2} \quad (4b)$$

除了表示法, 这些结果与 Farrenkopf 的 if $\sigma_e = 0$ 相同。

例如, 考虑漂移非常小但角度白噪声显著的环形激光陀螺, 其中 $\sigma_v = 0.025 \text{deg}/\sqrt{\text{hour}}$ 并且 $\sigma_u = 3.7 \times 10^{-3} \text{deg}/\text{hour}^{3/2}$, 并假设星体跟踪器测量噪声为 $\sigma_n = 15 \mu\text{rad}$ 。图 1 显示了星体跟踪器更新时间 Δt 介于 0.01 sec 和 100 sec 之间的稳态更新前和更新后角度标准偏差, 即 $P_{\theta\theta}(\mp)$ 的平方根。实心曲线适用于 $\sigma_e = 15 \mu\text{rad}$, 适用于该陀螺仪, 虚线曲线适用于 $\sigma_e = 0$ 。对于每对曲线, 上曲线为测量前更新值, 下曲线为测量后更新值。

图 1 清楚地表明, 当存在陀螺输出白噪声时, 增加星体跟踪器更新频率对角度估计精度的影响较小。

随着更新间隔趋向零, 虚线显示 $P_{\theta\theta}(+)$ 和 $P_{\theta\theta}(-)$ 接近公共渐近线, 但实线曲线不显示此特性。其原因是, 在测量间隔期间, 陀螺过程噪声的贡献与 $(\Delta t)^{1/2}$ 和 $(\Delta t)^{3/2}$ 成正比, 但当 Δt 趋向零时, 角度白噪声的贡献有限。这是在模型替换模式下使用陀螺仪的一个缺点, 因为实际航天器无法在零时间内通过有限角度旋转。

2.2 姿态确定误差分析系统 (ADEAS)

1987 年, 我领导了一个团队, 开发了姿态确定误差分析系统 (ADEAS), 这是一个数字姿态误差协方差分析程序。ADEAS 在 Goddard 仍然被广泛用于预测不同传感器补充、不同观测计划和不同估计方法 (包括失谐估计器) 可达到的姿态估计精度。我在这方面的同事是 Ed Seidewitz, 他是麻省理工学院 (MIT) 的一名优秀毕业生。Ed 和我研究了批量估计器和 Kalman 滤波器的协方差分析方程, 并对参数进行了求解和考虑。Mark Nicholson 做了大部分编程工作, 还发现了方程式中的错误, 我给了他一些代码。我相信, 随着计算机科学家和控制工程师职能的日益分离, 已经失去了很多东西。Ed、Mark 和我无缝协作的结果记录在一篇会议论文 [8] 中, 但迄今为止从未在档案期刊上发表 [9]。

ADEAS 的创新之一是能够在批处理估计器中评估过程噪声的影响。图 2 是 Julie Thienel(当时的 Julie Deutschmann) 对 Compton 伽马射线天文台的姿态精度进行分析时得出的图 [8]。该问题不受动力学或观测几何的控制, 在批次中心附近误差最小, 在批次末端误差较大。过程噪声导致了这种在批量估计器中常见的特征形状。曲线图的左右不对称是由于假设了在时间零点时 27 弧秒的先验姿态知识。图 2 也很好展示了 1989 年计算机图形学的最新发展。

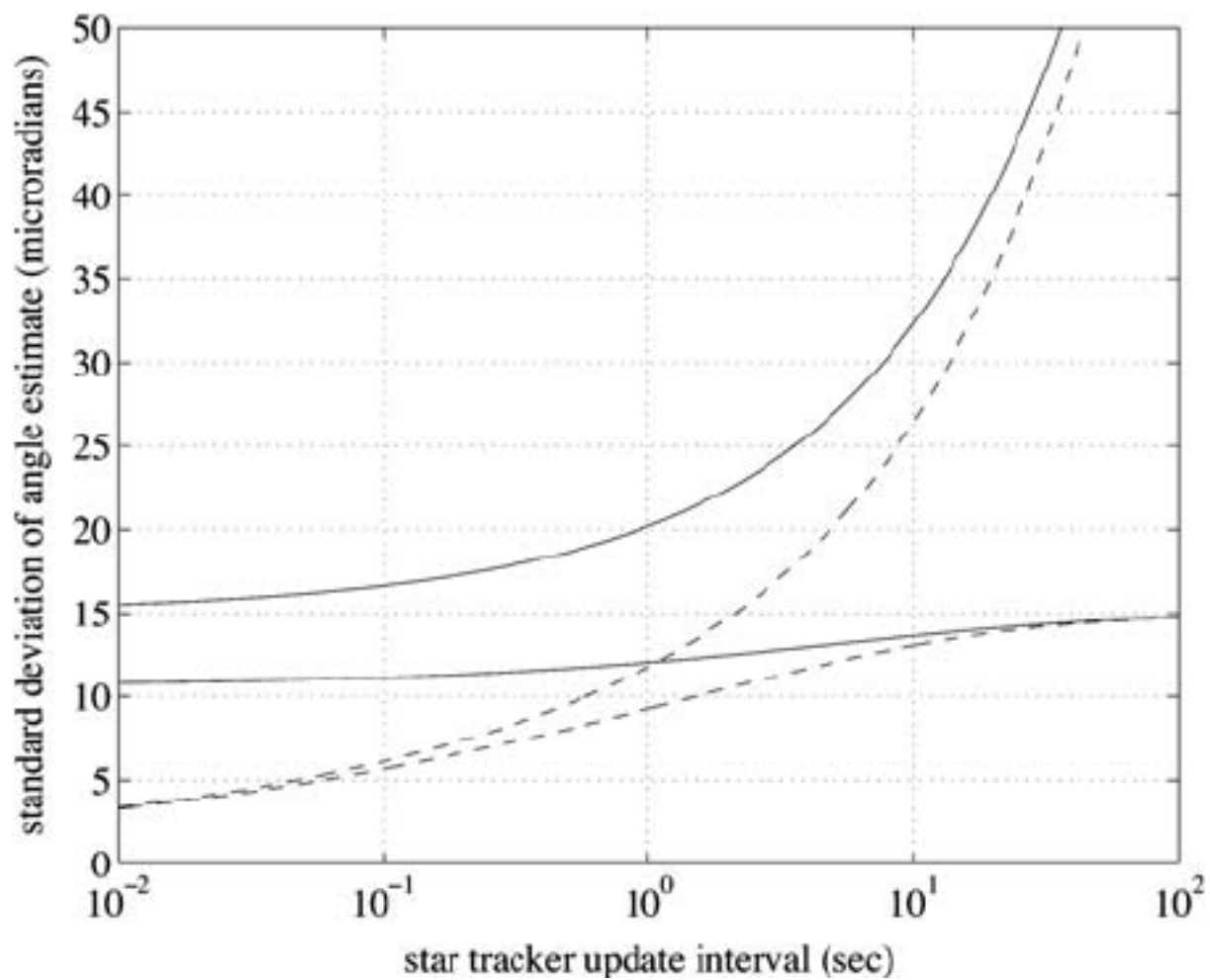


图 1: 稳态角度标准差。

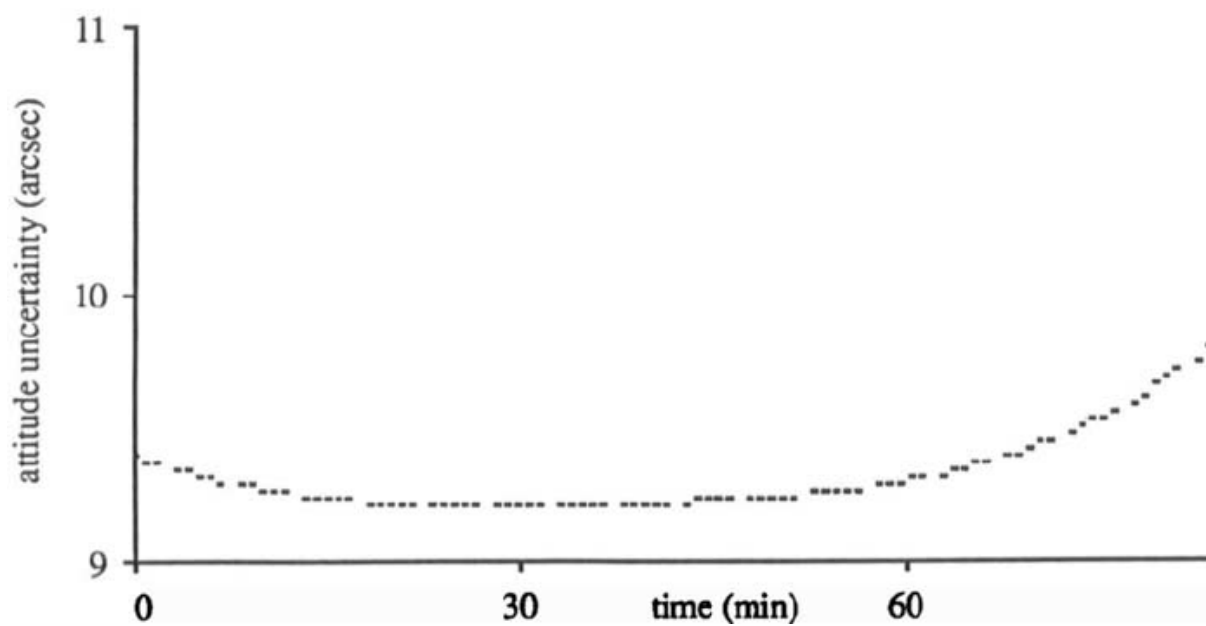


图 2: Compton 伽马射线天文台批量估算精度估算。

2.3 热带降雨测量任务 (TRMM)

1991 年, Goddard 开始在内部同时开发两个航天器: 热带降雨测量任务 (TRMM) 和 X 射线定时探测器 (XTE), 后来为纪念布 Bruno Rossi 更名为 RXTE。这两个航天器使用共同采购的反作用轮和陀螺仪, 但它们的姿态控制系统截然不同。XTE 选择恒星惯性姿态基准以满足其弧秒指向要求 [10], 而 TRMM 选择地球基准系统以满足其不太严格的 0.3° (3σ) 姿态知识要求。TRMM 使用了一个静态地球地平线传感器, 类似于 NOAA 和国防气象卫星计划 (DMSP) 低地球轨道航天器上使用的传感器。1994 年初, 在 TRMM ACS 的开发顺利进行之后, 我们意识到通过 DMSP 地平线传感器的一些窗口的光传输逐渐丢失。我们担心, 轨道高度低于 350 km 的 TRMM 可能会遇到更严重的问题, 甚至可能完全失去姿态基准。为了防止这种可能性, 我们考虑在 TRMM 中添加一个星体跟踪器, 这将招致严重的金钱和日程惩罚。

我知道 Joe Hashmall 利用高空大气研究卫星 (UARS) 的飞行陀螺仪和磁强计数据发现了一些非常令人鼓舞的批量姿态确定结果。Joe 在很久以后告诉我, 他第一次在 ADEAS 协方差分析中看到这些有希望的结果, 并认为它们太好而不可能是真的, 于是转向批量估计, 试图证明 ADEAS 包含错误, 但没有成功。我问赞助 Joe 的工作的 Eleanor Ketchum, 他的方法是否可以适用于在 TRMM 上进行姿态估计的卡尔曼滤波器。他们和 Joe Sedlak 对此反应热烈, 在一个月內, 他们开发了一个卡尔曼滤波器, 利用 UARS 数据获得了 0.3° 的姿态精度 [11]。卡尔曼滤波器需要大约一个轨道周期的动态记忆体, 以减少磁场建模误差的影响。这种记忆体是由精密陀螺仪在 TRMM 上提供的, 这些陀螺仪是 XTE 共同购买的一部分, 比基于地球传感器的 TRMM ACS 所需的性能要好得多。直到 2001 年, TRMM 的轨道高度从 350 km 提高到 402 km, 以保存补偿大气阻力所需的推进剂, TRMM 卡尔曼滤波器才投入使用。按照规范在较低高度运行的静态地球传感器停止提供 380 km 以上的有效数据, 这是意料之中的。卡尔曼滤波器已启用, 现在提供的姿态精度约为 0.2° , 与地平线传感器提供的精度大致相同 [12]。

3 约束的复杂性

3.1 姿态估计中的约束条件

姿态估计的基本约束条件是姿态矩阵 A 是旋转群或特殊正交群 $SO(3)$ 的成员。这就是说 A 必须是行列式为 +1 的正交矩阵的群理论方法。正交性约束

$$A^T A = I_{3 \times 3} \quad (5)$$

是非线性的, 这导致了复杂的问题, 使得姿态估计困难, 但也使得它有趣。事实上, 正交性约束非常有用, 因为它减少了要估计的自由度 [13]。姿态矩阵的运动学方程为 [14, 15]

$$dA/dt = -[\omega \times] A \quad (6)$$

其中

$$[\omega \times] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

是交叉积矩阵。这个运动学方程用精确的算法保持了 A 的正交性。

方程 (5) 相当于 6 个独立的标量约束，而不是 9 个，因为矩阵 $A^T A$ 是对称的。这意味着姿态矩阵有三个自由度。存在许多旋转的三维表示 [15, 16]，但众所周知，对于某些姿态，所有的 $SO(3)$ 的三个参数表示都是奇异的或不连续的 [17]。这导致了四元数的广泛使用，即具有最低维数的非奇异参数化 [15, 16]。四元数用三元向量部分 \mathbf{q} 和标量部分 q_4 写成

$$q = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

并且姿态矩阵参数化为

$$A(q) = (q_4^2 - \|\mathbf{q}\|^2)I_{3 \times 3} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - 2q_4[\mathbf{q} \times] \quad (9)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示欧氏向量范数。简单代数表明方程 (9) 给出了

$$A^T(q)A(q) = \|q\|^4 I_{3 \times 3} \quad (10)$$

其中

$$\|q\|^2 = q_4^2 + \|\mathbf{q}\|^2 \quad (11)$$

因此，当且仅当四元数满足规范化条件时，方程 (9) 表示正交矩阵

$$\|q\|^2 = 1 \quad (12)$$

这也是一个非线性约束。从方程 (9) 可以清楚地看出， q 和 $-q$ 表示相同的姿态。四元数表示的这种不唯一性是一个小麻烦，如果不引入像那些困扰三维姿态表示的不连续性，就无法消除。四元数的运动方程是 [14, 15]

$$dq/dt = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes q \quad (13)$$

在这里，我们使用四元数积，得到 $A(q \otimes q') = A(q)A(q')$ [5, 15]。方程 (13) 用精确的算术保持四元数规范化。

在讨论包含动力学的约束估计问题之前，我们首先考虑静态问题，即利用在单个时间点上进行的向量测量来找到最佳估计。

3.2 Wahba 的问题

1965 年，Grace Wahba 提出了静态姿态估计问题，即寻找适当的正交矩阵，使损失函数最小化 [18]

$$L(A) \equiv \frac{1}{2} \sum_i a_i \|\mathbf{b}_i - A\mathbf{r}_i\|^2 = \frac{1}{2} \sum_i a_i (\|\mathbf{b}_i\|^2 + \|A\mathbf{r}_i\|^2) - \sum_i a_i \mathbf{b}_i^T A\mathbf{r}_i \quad (14)$$

其中总和超过观测值， \mathbf{r}_i 是参考坐标系中观测对象的向量， \mathbf{b}_i 是航天器体坐标系中的对应向量， a_i 是分配给观测值的非负权重。方程 (14) 右侧的第一项与由于正交性约束而产生的姿态无关，第二项可根据矩阵 trace 重写为

$$\sum_i a_i \mathbf{b}_i^T A \mathbf{r}_i = \text{trace}(AB^T) \quad (15)$$

其中 B 是“姿态剖面矩阵”

$$B \equiv \sum_i a_i \mathbf{b}_i \mathbf{r}_i^T \quad (16)$$

因此, Wahba 的问题是最大化 $\text{trace}(AB^T)$ 的问题。使用 Frobenius 范数 (也称为 Euclidean, Schur, 或 Hilbert-Schmidt 范数) [19、20]

$$\|M\|_F^2 \equiv \sum_{i,j} M_{ij}^2 = \text{trace}(MM^T) \quad (17)$$

我们发现这个

$$\|A - B\|_F^2 = \|A\|_F^2 + \|B\|_F^2 - 2\text{trace}(AB^T) = 3 + \|B\|_F^2 - 2\text{trace}(AB^T) \quad (18)$$

这意味着 Wahba 问题等价于在 Frobenius 范数中找到最接近 B 的正交矩阵 A 。Wahba 问题是正交 Procrustes 问题 [19, 20] 的一个特例。我们发现, 在方程 (14) 和 (18) 中, 对姿态矩阵的正交性约束至关重要。

1977 年, Paul Davenport 通过将姿态矩阵的四元数表示代入方程 (15) 中, 找到了第一个真正有用的 Wahba 问题的解, 给出了 [21]

$$\text{trace}[A(q)B^T] = q^T K q \quad (19)$$

其中

$$K \equiv \begin{bmatrix} B + B^T - I_{3 \times 3} \text{trace} B & \sum_i a_i \mathbf{b}_i \times \mathbf{r}_i \\ (\sum_i a_i \mathbf{b}_i \times \mathbf{r}_i)^T & \text{trace} B \end{bmatrix} \quad (20)$$

因此, Wahba 的问题也相当于 $q^T K q$ 的最大化, 如果没有四元数规范化约束, 这是没有意义的。使用拉格朗日乘子将此约束附加到方程 (19) 中是一种推导 Davenport 的结果的方法, 即最佳四元数是具有最大特征值的 K 的特征向量, 即。

$$K q_{\text{opt}} = \lambda_{\max} q_{\text{opt}} \quad (21)$$

Davenport 的 q 方法吸引了那些喜欢使用特征向量和特征值的物理学家。

尽管非常健壮, Davenport 的 q 方法在当时可用的计算机上非常缓慢, 这导致 Malcolm Shuster 开发了 QUEST 算法 [22], 该算法已被用于自主决定其姿态的星体跟踪器中。自从 QUEST 被开发后, 许多其他算法也被开发出来, 包括 SVD 方法 [23], FOAM[24], 和 Daniele Mortari 的 ESOQ [25] 和 ESOQ2 [26] 算法。随着 1990 年的临近, Malcolm Shuster 建议我们写一篇题为“Wahba 问题 25 年”的调查论文, 但我们从未找到时间来做。1995 年, 我做了一个名为“Wahba 问题 30 年”的演讲, 毫不奇怪。Daniele Mortari 邀请我在罗马重复这个演讲, 这导致我们的论文调查了不同的方法, 并比较了它们的速度和准确性 [27]。

3.3 一般统计考虑

在讨论卡尔曼滤波之前，让我们先探讨一些一般的统计概念。考虑在 N 维欧几里得空间 \mathbb{R}^N 上定义的向量的概率分布。我们用顶线表示分布或期望的平均值，

$$\bar{\mathbf{x}} \equiv E[\mathbf{x}] \quad (22)$$

这通常是在没有约束的情况下 \mathbf{x} 的最佳估计。假设概率分布中的所有向量都满足一些非线性约束，例如四元数上的范数约束，我们将其表示为 $\mathbf{x} \in S$ ，其中 S 是约束向量的集合。通常，期望不会满足约束，即 $\bar{\mathbf{x}} \notin S$ 。这导致了错误的信念，即非欧几里得流形上的概率分布函数 (probability distribution function, pdf) 必然产生非物理估计 [28]。与此相反，Oshman 和 Carmi[29] 强调，最小均方误差 (MMSE) 估计或最大似然估计 (MLE) 可以提供满足非线性约束的完全有效的姿态估计。

用帽子符号 $\hat{\cdot}$ 表示的 MMSE 估计定义为

$$\hat{\mathbf{x}} \equiv \arg \min_{\mathbf{x}' \in S} E[\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2] \quad (23)$$

其中 \mathbf{x}' 在计算期望值时被视为常量向量。注意， $\hat{\mathbf{x}}$ 的定义要求它满足约束。将 $\mathbf{x}' - \mathbf{x} = (\mathbf{x}' - \bar{\mathbf{x}}) - (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$ 代入方程 (23)，我们看到

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &\equiv \arg \min_{\mathbf{x}' \in S} \left\{ E[\|\mathbf{x}' - \bar{\mathbf{x}}\|^2] + E[\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2] - 2E[(\mathbf{x}' - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})] \right\} \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}' \in S} \|\mathbf{x}' - \bar{\mathbf{x}}\|^2 \end{aligned} \quad (24)$$

第二个方程是因为 $\mathbf{x}' - \bar{\mathbf{x}}$ 不依赖于 \mathbf{x} ， $E[\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2]$ 不依赖于 \mathbf{x}' ，并且根据 $\bar{\mathbf{x}}$ 的定义， $E[\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}] = 0$ 。因此 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 S 中最接近 $\bar{\mathbf{x}}$ 的向量。我们注意到，如果没有约束，即如果 $S \equiv \mathbb{R}^N$ ，那么 MMSE 估计显然与预期相同。

MLE 简单地定义为分布中概率达到最大值的点，假设该点是唯一的。Shuster 已经表明，Wahba 的问题可以理解为最大似然估计问题 [30]。

在约束为范数约束 $\|\mathbf{x}\| = 1$ 的特殊情况下，稍微考虑一下，一般来说 $\|\bar{\mathbf{x}}\| < 1$ 是因为概率分布中的所有向量都假定服从约束。在这种情况下，方程 (24) 给出了 MMSE 估计值 $\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} / \|\bar{\mathbf{x}}\|$ 。

作为这些概念的具体示例，考虑图 3 所示平面中的向量分布。所有向量都必须位于单位圆上，并且沿圆弧的点的密度 (用粗线的宽度表示) 为

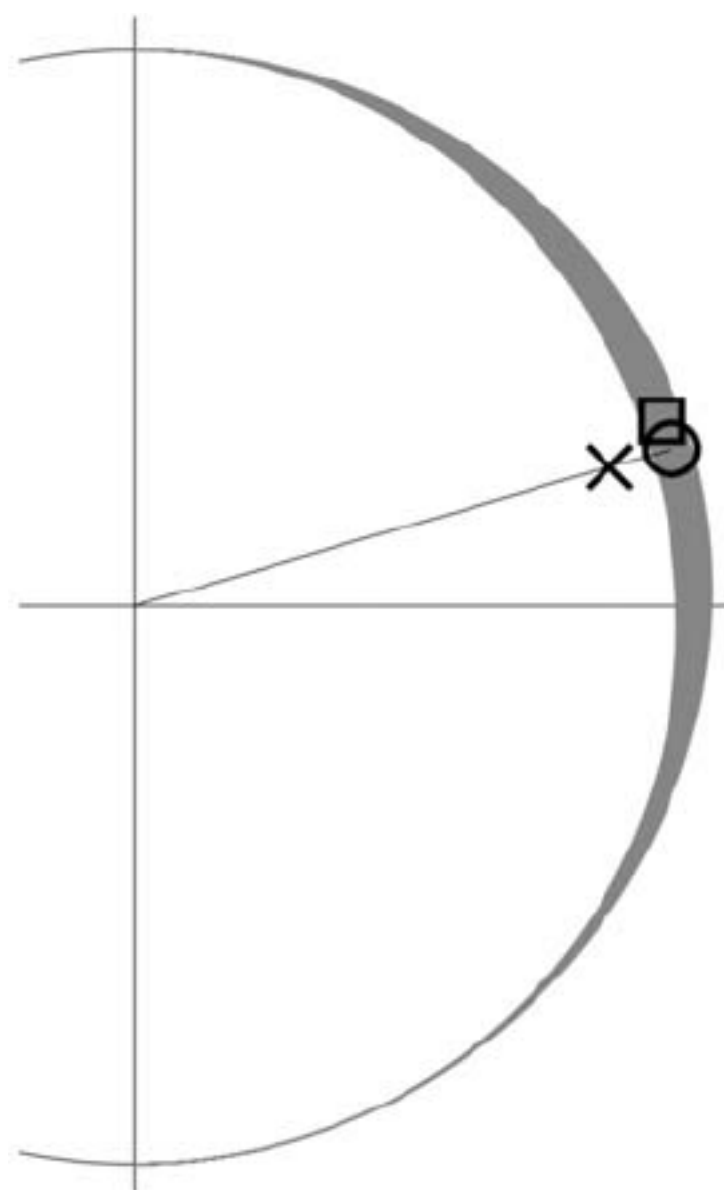
$$p(x, y) = (2/\pi)(1 + y)(1 - y^2) \quad \text{for } x \geq 0 \quad (25a)$$

$$p(x, y) = 0 \quad \text{for } x < 0 \quad (25b)$$

期望值 $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 8/3\pi & 1/4 \end{bmatrix}$ ，由叉号表示，显然违反了规范约束。由圆表示的 MMSE 估计值和 $\begin{bmatrix} \sqrt{8/3} & 1/3 \end{bmatrix}$ 处的平方表示的 MLE 服从约束。我们希望 \mathbf{x} 的“最佳估计”位于圆上，因为概率分布中的每个点都有这个性质。

对于姿态估计问题，并行结果是成立的。姿态矩阵的期望

$$\bar{A} \equiv E[A] \quad (26)$$



× denotes the expectation
○ denotes the MMSE estimate
□ denotes the MLE

图 3: 约束估计。

一般不会是正交矩阵，即它不属于旋转群 $SO(3)$ 。姿态矩阵的 MMSE 估计由以下公式给出：

$$\hat{A} \equiv \arg \min_{A' \in SO(3)} E \left[\|A' - A\|_F^2 \right] \quad (27)$$

在向量的情况下，我们可以操纵这个方程

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \arg \min_{A' \in SO(3)} \left\{ E \left[\|A'\|_F^2 \right] - 2E \left[\text{trace} (A' A^T) \right] + E \left[\|A\|_F^2 \right] \right\} \\ &= \arg \min_{A' \in SO(3)} \text{trace} (A' \bar{A}^T) \end{aligned} \quad (28)$$

最后的方程成立是因为 A 和 A' 都是正交的，所以它们的 Frobenius 范数等于常数 3，也因为 $\text{trace} (A' A^T)$ 是 A^T 的线性函数。这个方程与方程 (15) 的相似性意味着我们可以用任何一种方法来解 Wahba 问题，从 \bar{A} 中找出 \hat{A} 。Oshman 和 Carmi 在他们的粒子滤波器开发中使用了这些概念 [29]，我设计了一个基于它们的正交姿态滤波器 (Orthogonal Attitude Filter, OAF) [31]。然而，事实证明，后者是一个非常笨拙的 OAF。

对于实际应用中遇到的概率分布，期望值、MMSE 估计值和 MLE 值都非常接近，在分布的传播上只有二阶差分。一般来说，我们希望我们的估计满足约束条件，所以我们希望 MMSE 估计或 MLE 而不是期望。目前还不清楚，如果这些估计中的任何一个扩展卡尔曼滤波器 (EKF) 产生非线性问题，我们将相当不小心区分它们。

3.4 四元数和卡尔曼滤波器

在 Farrenkopf 的笔记 [3] 发表后不久，我开始尝试将他的稳态协方差解扩展到三轴情况，但这是徒劳的。很快就很明显，没有封闭形式的稳态解，但我坚持发展一般方程。经过大量的努力，我得出了一个公式，与 Jim Murrell 为陆地卫星 4 号和 5 号使用的模块化姿态控制系统开发的卡尔曼滤波器完全相同 [4]。我非常失望，我问 Gene Lefferts，他是否认为我的分析有任何价值。他说 Malcolm Shuster 开发了一个平行分析，我们的结合工作将值得出版。这篇论文是 Malcolm 或我写过的被引用最多的论文之一 [5]。最后一个版本是在周末在 Gene 家写的。他提供了向量测量模型，这是此文中唯一真正的创新，同时也起到了缓冲作用，以防止 Malcolm 和我在演讲中因意见分歧而受到抨击。

自从参考文献 [5] 发表以来，关于如何正确估计四元数的问题已经耗费很多墨水了 [28, 32-38]。我们注意到卡尔曼滤波器处理状态估计及其协方差。假定适当规范化的 MMSE 或 MLE 四元数估计服从传播方程。

$$d\hat{q}/dt = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \hat{q} \quad (29)$$

对于一些 $\hat{\omega}$ 。这保留了四元数的规范化，因此没有问题。但是，测量更新通常违反规范化条件，因此在更新时必须小心。传统的 EKF，我们有时称之为加性 EKF(AEKF)，它将四元数误差定义为

$$\Delta q = q - \bar{q} \quad (30)$$

其有 4×4 的协方差矩阵

$$P = E \left[(\Delta q) (\Delta q)^T \right] \quad (31)$$

方程 (12) 的约束意味着

$$\|q\|^2 = \|\bar{q} + \Delta q\|^2 = \|\bar{q}\|^2 + 2(\Delta q)^T \bar{q} + \|\Delta q\|^2 = 1 \quad (32)$$

Δq 的期望值为零, 因此方程 (32) 的期望值为

$$\|\bar{q}\|^2 + \text{trace}P = 1 \quad (33)$$

因此

$$\|\bar{q}\| = (1 - \text{trace}P)^{1/2} \quad (34)$$

并且 MMSE 的四元数估计是

$$\hat{q} = (1 - \text{trace}P)^{1/2} \bar{q} \quad (35)$$

通过对四元数卡尔曼滤波的考虑, 给出了四元数卡尔曼滤波的主要问题。

$$P\bar{q} = E \left[(\Delta q) (\Delta q)^T \bar{q} \right] = \frac{1}{2} E \left[(\Delta q) (\text{trace}P - \|\Delta q\|^2) \right] = -\frac{1}{2} E \left[\|\Delta q\|^2 (\Delta q) \right] \quad (36)$$

如果 \bar{q} 的概率分布是对称的, 那么这个方程的右边是 0, P 是奇异的。然而, 范数约束意味着概率分布不对称, 所以 P 是病态的, 而不是奇异的。在玩具模型 [28] 和数值研究 [38] 中被观察到了这一点, 分析表明方程 (36) 的右侧为 P^2 阶 [34]。值得注意的是, 如果范数约束是线性的, P 就真的是奇异的。

在卡尔曼滤波中, 一个条件不好的协方差矩阵会导致数值问题, 如果可能的话, 我们希望避免这种问题。旋转群 $SO(3)$ 只有三个自由度, 如上所述, 因此可以在一个条件良好的 3×3 矩阵中表示所有有用的四元数协方差信息。这种尺寸缩减的概念优势, 作为更真实地代表系统实际自由度的概念优势, 已被详细讨论过 [28, 32-38], 但计算优势是无可争辩的。

通过将姿态矩阵参数化为

$$A(q/\|q\|) = \|q\|^{-2} \left\{ (q_4^2 - \|q\|^2) I_{3 \times 3} - 2q_4 [\mathbf{q} \times] + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T \right\} \quad (37)$$

这是一个正交矩阵, 不管四元数是否规范化 [28]。我们称之为射线表示, 因为沿射线穿过原点的任何四元数都对应于相同的姿态矩阵。这种方法避免了强制范数约束的复杂性, 但引入了不可观测的自由度四元数范数。结果是, P 的一个特征值不受测量值的影响, 因此保持其初始值, 如果姿态估计变得非常精确, 则可能导致数值精度损失 [34]。在本文中, 我们不会进一步考虑这种方法。

接下来的两小节将考虑参考文献 [5] 中提出的四元数卡尔曼滤波的两种具体方法。在参考文献中分析的 EKF 包括用于模型替换模式的陀螺仪, 这些陀螺仪具有漂移偏差, 需要与四元数一起估计。我们将遵循这个例子并考虑七分量状态向量

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (38)$$

其中 \mathbf{b} 是陀螺漂移偏差向量。如果我们用欧拉方程来建模动力学，而不是在模型替换模式中使用陀螺仪，那么状态向量中的 \mathbf{b} 将被角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 或角动量向量 \mathbf{L} 替换。对状态向量中其他分量情况的推广也很简单，因此我们只讨论七维情况。那么方程 (36) 意味着有一个零向量

$$\mathbf{x}_{null} = \begin{bmatrix} \hat{q} \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (39)$$

其中， $P\mathbf{x}_{null}$ 的阶是 P^2 。这不是协方差矩阵的一个零向量，而是沿着特征值方向的一个向量，它比其他向量小得多，从而导致病态条件反射，如上所述。

3.5 乘性 EKF 方法

乘性 EKF (multiplicative EKF, MEKF) 表示作为四元数积的真实姿态。

$$q = \delta q(\mathbf{a}) \otimes \hat{q} \quad (40)$$

其中 \hat{q} 是规范化四元数估计， $\delta q(\mathbf{a})$ 是表示四元数误差的单位四元数，由误差的三分量表示 \mathbf{a} 参数化。如前所述，三分量表示都具有奇点或不连续性，但是 MEKF 从未遇到过它们，因为它只使用 \mathbf{a} 来处理较小的姿态误差。MEKF 假设选择 \mathbf{a} ，以便

$$\delta q(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}/2 \\ 1 \end{bmatrix} + \text{order}(\|\mathbf{a}\|^2) \quad (41a)$$

$$A(\delta q(\mathbf{a})) = I_{3 \times 3} - [\mathbf{a} \times] + \text{order}(\|\mathbf{a}\|^2) \quad (41b)$$

对于接近单位矩阵 $I_{3 \times 3}$ 的旋转矩阵。 \mathbf{a} 的具体选择如下所述。MEKF 的基本思想是计算三分量 \mathbf{a} 的无约束估计，同时使用正确规范化的四分量 \hat{q} 提供全局非奇异姿态表示 [35]。

MEKF 包含六分量状态的传统加性 EKF。

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (42)$$

离散测量更新将有限的更新后的值 $\hat{\mathbf{a}}(+)$ 分配给 \mathbf{a} 。在测量更新后， \hat{q} 仍保留其更新前的值 $\hat{q}(-)$ ，但方程 (40) 表示姿态四元数的最佳估计值为 $\delta q(\hat{\mathbf{a}}(+)) \otimes \hat{q}(-)$ 。MEKF 中的重置过程通过将更新信息从 $\hat{\mathbf{a}}(+)$ 移动到更新后估计值 $\hat{q}(+)$ 并将 $\hat{\mathbf{a}}$ 重置为 0 来纠正这种明显的不一致。重置不会改变整体姿态估计，因此方程 (40) 和 (41) 要求

$$\hat{q}(+) = \delta q(\hat{\mathbf{a}}(+)) \otimes \hat{q}(-) \quad (43)$$

\mathbf{b} 的更新是常规的。如果 q 和 \hat{q} 分别遵守方程 (13) 和 (29)，适当选择 $\boldsymbol{\omega}$ ，则在测量之间 $\hat{\mathbf{a}}(t)$ 继续为 0，因此无需传播。Reynolds[40] 和 Zanetti 等人 [36] 都指出，重置修改了协方差矩阵，与参考文献 [35] 中的断言相反。然而，忽略附录中提到的这种小修改，并没有导致应用程序中出现任何问题。

方程 (40) 和 (41b) 表明

$$A(q) = A(\delta q(\mathbf{a})) A(\hat{q}) \approx (I_{3 \times 3} - [\mathbf{a} \times]) A(\hat{q}) \quad (44)$$

这对于计算测量灵敏度矩阵非常方便。选择 \mathbf{a} 作为旋转角向量，四元数向量部分的 2 倍，Rodrigues 参数向量的 2 倍，或改进型 Rodrigues 参数向量的 4 倍 [15]，给出比方程 (41b) 更强的关系，即

$$A(\delta q(\mathbf{a})) = I - [\mathbf{a} \times] + \frac{1}{2} [\mathbf{a} \times]^2 + \text{order}(\|\mathbf{a}\|^3) \quad (45)$$

不对称 (例如 1-2-3) 欧拉角的向量满足方程 (41b) 但不满足方程 (45)，对称 (例如 3-1-3) 欧拉角的向量也不满足方程 (35)。我们更喜欢罗德里格斯 (Rodrigues) 参数 (也称为吉布斯向量 (Gibbs vector))，因为

$$\delta q(\mathbf{a}) = \left(1 + \|\mathbf{a}\|^2/4\right)^{-1/2} \begin{bmatrix} \mathbf{a}/2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

这同时具有计算和概念上的优势。其计算优势在于，通过首先定义非规范化四元数，重置可以避免舍入误差的累积

$$\hat{q}_{unnorm} \equiv \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}(+)/2 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \hat{q}(-) \quad (47)$$

并且接着更新单位四元数

$$\hat{q}(+) = \hat{q}_{unnorm} / \|\hat{q}_{unnorm}\| \quad (48)$$

罗德里格斯参数的概念优势在于，它们将旋转群映射为三维欧几里得空间，最大可能的 180° 姿态误差映射到无穷远处的点。因此，具有无限长尾的概率分布，如高斯分布，在罗德里格斯参数空间中是有意义的。Shuster 更倾向于将 \mathbf{a} 作为旋转角向量的 2 倍或 δq 向量部分的 2 倍，而后者 (除了 2 的因数) 是参考文献 [5] 的第 11 节中找到的方法。

在二阶卡尔曼滤波器 [35] 和无迹姿态估计器 [39] 中，采用了 MEKF 的乘性误差模型。

3.6 协方差投影法

与 MEKF 相比，参考文献 [5] 第 9 节中提出的协方差投影法是一种估计方程 (38) 七分量状态向量的 EKF。它基于隐式假设，即估计误差与方程 (39) 定义的非零向量正交，即

$$(\Delta \mathbf{x})^T \mathbf{x}_{null} = (\Delta q)^T \hat{q} = 0 \quad (49)$$

这意味着，我们不假设四元数概率分布在四维四元数空间中的单位球体 S^3 上，而是假设它位于 \hat{q} 上与 S^3 相切的三维超平面上。方程 (32) 和 (49) 表明 \bar{q} 满足一阶四元数规范化条件，这是一个可接受的近似值，因为 EKF 基于一阶线性化。从方程 (49) 可以得出， $P\mathbf{x}_{null} = 0_{7 \times 1}$ 完全正确，这意味着在 EKF 的上下文中，我们将 7×7 协方差矩阵 P 视为奇异矩阵，即使它实际上只是病态的。

协方差投影方法没有六维状态向量，但它有一个六维状态误差向量，定义为

$$\Delta \tilde{\mathbf{x}} = S^+ \Delta \mathbf{x} \quad (50)$$

其中 6×7 矩阵 S^+ 及其 7×6 Moore-Penrose 伪逆矩阵 S 满足关系 [19, 20]

$$S^+ S = I_{6 \times 6} \quad (51a)$$

$$S S^+ = I_{7 \times 7} - \mathbf{x}_{null} \mathbf{x}_{null}^T \quad (51b)$$

$$S^+ \mathbf{x}_{null} = 0_{6 \times 1} \quad (51c)$$

由方程 (49) 得出的与 \mathbf{x}_{null} 正交的七分量误差向量，可通过以下方法恢复：

$$\Delta \mathbf{x} = S \Delta \tilde{\mathbf{x}} \quad (52)$$

这说明 $\Delta \tilde{\mathbf{x}}$ 包含了所有的状态误差信息，所有的协方差信息都包含在六维误差状态的条件良好的 6×6 协方差矩阵中。

$$\tilde{P} \equiv E \left[(\Delta \tilde{\mathbf{x}}) (\Delta \tilde{\mathbf{x}})^T \right] = S^+ P (S^+)^T \quad (53)$$

由于方程 (49) 和 (51b)， 7×7 的误差协方差可以通过下式得到

$$P = S \tilde{P} S^T \quad (54)$$

对于四元数估计问题，可以用 4×3 矩阵显式地给出 S^+ 和 S

$$\Xi(q) = \begin{bmatrix} q_4 I_{3 \times 3} + [\mathbf{q} \times] \\ -\mathbf{q}^T \end{bmatrix} \quad (55)$$

作为

$$S = \begin{bmatrix} (1/2) \Xi(\hat{q}) & 0_{4 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (56a)$$

$$S^+ = \begin{bmatrix} 2\Xi^T(\hat{q}) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (56b)$$

这些形式与参考文献 [5] 中的形式不同，在 S 和 S^+ 的左上角分别有 $1/2$ 和 2 的系数。这种改变使得姿态误差用全角度表示，以符合 MEKF 的公式，而不是参考文献 [5] 中的一半角度。

用方程 (1b) 给出卡尔曼增益的预更新量，用方程 (1c) 更新协方差。为了避免使用病态协方差矩阵，我们将方程 (54) 与预先更新的 S 矩阵替换为方程 (1b)，给出

$$K = S(-) \tilde{K} \quad (57)$$

其中下标 i 被省略以简化符号，其中 \tilde{K} 由

$$\tilde{K} = \tilde{P}(-) \tilde{H}^T \left[\tilde{H} \tilde{P}(-) \tilde{H}^T + R \right]^{-1} \quad (58)$$

其中

$$\tilde{H} \equiv H S(-) \quad (59)$$

七分量状态通过其非线性动力学传播，就像在任何 EKF 中一样，并通过以下方式更新：

$$\hat{\mathbf{x}}(+)=\hat{\mathbf{x}}(-)+K\Delta y=\hat{\mathbf{x}}(-)+S(-)\tilde{K}\Delta y \quad (60)$$

其中 Δy 是测量残差。

通过将方程 (54) 和 (57) 代入方程 (1c) 并使用方程 (59) 得出协方差更新。

$$S(+)\tilde{P}(+)S^T(+)=S(-)\left(I_{6\times 6}-\tilde{K}\tilde{H}\right)\tilde{P}(-)S^T(-) \quad (61)$$

该方程左侧的 $S(+)$ 和右侧的 $S(-)$ 的出现反映了方程 (49) 的假设, 即预更新四元数概率分布位于 $\hat{q}(-)$ 处与 S3 相切的三维超平面上, 而后更新概率分布位于 $\hat{q}(+)$ 处的超平面相切上。方程 (61) 的两边有不同的零向量, 因此该方程不可能精确。附录显示了如何通过重置协方差矩阵来治疗这种疾病。两个零向量之间的差分, 并且因此 $S(+)$ 和 $S(-)$ 之间的差分, 是按照状态更新的顺序进行的, 因此, 按照线性化 EKF 的精神, 通常忽略这个小的差分并写入 [5]

$$\tilde{P}(+)=\left(I_{6\times 6}-\tilde{K}\tilde{H}\right)\tilde{P}(-) \quad (62)$$

在这种近似下, 最终 EKF 公式中没有矩阵 $S^+(\pm)$ 和 $S(+)$, 而 $S(-)$ 只出现在状态更新方程中。协方差传播和更新方程、测量灵敏度和卡尔曼增益都可以用六维表示法计算。

四元数更新违反四元数规范化, 因此使用方程 (48) 来规范化更新的四元数。这会改变估计值, 但只会在状态更新中更改为二阶, 这是可以接受的, 因为 EKF 不知道二阶效应。整体算法在数学上与使用状态更新方程 (47) 和 (48) 的 MEKF 相同, 即使它基于一个非常不同的基础。协方差投影思想在概念上不如 MEKF 满意, 但更容易推广到其他约束估计问题。

4 角动量的重要性

这确实是前一个主题的副主题, 因为角动量守恒是一个约束条件; 但是角动量在航天器姿态分析中的重要性值得一节。

4.1 姿态角动量参数化

我的第一次航空航天研究是在 Goddard 和 Mel Velez 一起进行的。他正在研究自旋稳定同步气象卫星 (Synchronous Meteorological Satellite SMS) 的同步轨道/姿态估计, 以便使用地平仪数据中包含的轨道信息。轨道和姿态动力学的不同时间尺度阻碍了进展; 轨道运动方程可以与几十分钟的时间步相结合, 而刚体姿态动力学则需要旋转周期分数的时间步。这导致 Velez 所追求的参数变化方法的刚体动力学。Harold Morton、John Junkins 和他们的学生在这方面做了有趣的工作 [41,42], 但我尝试了另一种方法。

通常的方法是将机体坐标系中角动量的运动方程进行积分,

$$d\mathbf{L}_B/dt=\mathbf{N}_B-\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{L}_B \quad (63)$$

以及四元数的方程 (13), 其中 \mathbf{N} 表示外部扭矩,

$$\boldsymbol{\omega}=J^{-1}(\mathbf{L}_B-\mathbf{L}_{internal}) \quad (64)$$

是角速度, J 是航天器的转动惯量张量, $\mathbf{L}_{internal}$ 是任何内部运动部件 (如反作用轮) 的角动量。可以将航天器角动量的惯性分量的运动方程积分, 而不是方程 (63)

$$d\mathbf{L}_I/dt = \mathbf{N}_I \quad (65)$$

并将机体坐标系组件计算为 $\mathbf{L}_B = A_{BI}\mathbf{L}_I$ 。这两个过程中的一个问题是四元数的分量都是快速变量。我的想法是同时使用方程 (63) 和 (65), 而不是方程 (13)。姿态矩阵可以参数化为

$$A_{BI} = R_{BI}R(\mathbf{L}_I/L, \zeta) = R(\mathbf{L}_B/L, \zeta) R_{BI} \quad (66)$$

其中, R_{BI} 是表示将 \mathbf{L}_I 带入 \mathbf{L}_B 的最小角度旋转的矩阵, 这是 \mathbf{L}_I 和 \mathbf{L}_B 的已知函数, 并且 $R(\mathbf{e}/L, \zeta)$ 表示单位向量 \mathbf{e} 的旋转, 用角度 ζ 表示, 角度变量 ζ 服从快速方程。

$$d\zeta/dt = L(L^2 + \mathbf{L}_B \cdot \mathbf{L}_I)^{-1} [(\mathbf{L}_B + \mathbf{L}_I) \cdot \boldsymbol{\omega} + L^{-2}(\mathbf{L}_B \times \mathbf{L}_I) \cdot (\mathbf{N}_B + \mathbf{N}_I)] \quad (67)$$

这比方程 (13) 要复杂得多, 但它的优点是它是一个标量方程。姿态动力学的参数变化方法永远不会产生影响, 这些方程 (以更粗糙的形式) 被放在抽屉里, 直到它们在 John Junkins 和 Malcolm Shuster 编辑的《宇宙航行科学杂志》的姿态表示专题中找到了地方为止 [43]。

4.2 SpinKF

角动量参数化在 Joe Sdelak 于 2004 年开发了一个 EKF 来利用这些变量旋转航天器之前从未得到广泛应用 [44]。状态向量

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_B \\ \mathbf{L}_I \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (68)$$

受非线性约束, 即在惯性和物体参考系中角动量的大小相同, 即

$$\|\mathbf{L}_B\| = \|\mathbf{L}_I\| = L \quad (69)$$

这个约束可以表示为一阶 $(\Delta\mathbf{L}_B)^T \hat{\mathbf{L}}_B = (\Delta\mathbf{L}_I)^T \hat{\mathbf{L}}_I$, 帽子 $\hat{\cdot}$ 符号表示估计, 而不是单位向量。它由协方差投影技术处理, 零向量

$$\mathbf{x}_{null} = \frac{1}{\sqrt{2}\hat{L}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}}_B \\ -\hat{\mathbf{L}}_I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

Joe 和我在这个类型中开发了几个滤波器, 通常称为 SpinKF, 使用不同的六分量误差状态 [45]。最佳 SpinKF 变种的误差状态包括微小姿态误差角向量和惯性系中的角动量向量。

4.3 太阳、异常和磁层粒子探测器 (SAMPEX)

SAMPEX 于 1992 年 7 月 3 日发射, 是 Small Explorer(SMEX) 系列的第一个, 也是我加入在 Goddard 的 “Satellite Saviors” 的 Henry Hoffman 分支 [46] 后研制的第一个航天器。在我进入场景之前, 它的姿态控制系统主要由 Tom Flatley 定义, 它使用一个反作用轮来提供沿航天器指向

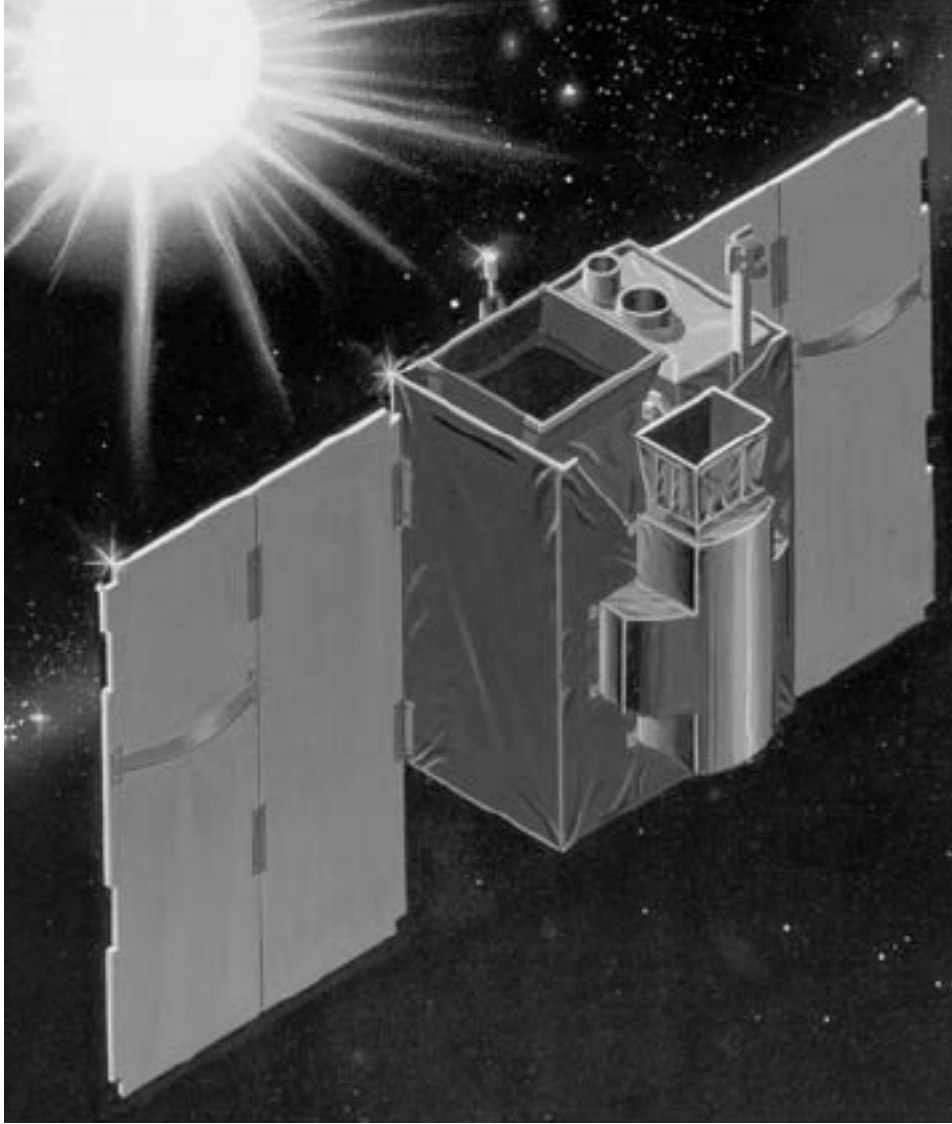


图 4: SAMPEX.

太阳的 y 轴的角动量偏差, 以及控制科学仪器瞄准镜指向 z 轴的扭矩 (图 4 中的向上方向) [47,48]。即使太阳被地球遮挡, 动量偏差也会使 SAMPEX 指向太阳。TRIAD 算法或代数方法 [21,22] 使用来自三轴磁强计、两轴数字太阳传感器、机载航天器和太阳星历及磁场模型的数据计算姿态矩阵。SAMPEX 利用磁力矩来阻尼章动, 并在航天器处于阳光下时保持 y 轴指向太阳。这是通过要求整个系统的角动量具有规定的大小 L_0 , 并沿航天器 y 轴 \mathbf{e}_y 和机体坐标系 \mathbf{s}_B 中的太阳向量同时指向来实现的。机体坐标系中的总系统角动量由下式给出:

$$\mathbf{L}_B = J\boldsymbol{\omega} + \mathbf{L}_{wheel} \quad (71)$$

其中 \mathbf{L}_{wheel} 根据反作用轮转速表数据计算 L 轮, 通过微分姿态矩阵并使用方程 (6) 计算航天器角速度。

多余的角动量

$$\Delta\mathbf{L} = (\mathbf{L}_B - L_0\mathbf{e}_y) + (\mathbf{L}_B - L_0\mathbf{s}_B) \quad (72)$$

被磁偶极子驱动向零

$$\mathbf{m} = k_{\text{mag}} \Delta \mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (73)$$

其中 \mathbf{B} 是机体坐标系中的磁场。

SAMPEX 的寿命远远超过了其最初的两年寿命要求和三年目标，其 z 轴指向定律在过去几年中多次被重新编程，以满足不断变化的观测目标 [49]。2007 年 8 月 17 日，经过 15 年的完美运行后，反作用轮出现异常，并被关闭。SAMPEX 现在是自旋稳定的，使用方程 (71)-(73) 的磁控定律，没有任何修改，并且仍在产生有用的科学数据 [50]。

4.4 哈勃太空望远镜 (HST)

HST 在 1990 年 4 月 STS-31 发布后几乎立即出现了两个问题。第一个是主镜的畸变，第二个是在进入和离开地球阴影时出现了最严重的姿态扰动，但这种扰动在轨道的整个白天都会持续。Henry Hoffman 立即将这些扰动归因于柔性太阳能阵列的热致扭曲，如图 5 所示。Goddard 的工程师、Marshall 航天飞行中心，以及 Lockheed (HST 的总承包商)，开发了一种太阳能阵列增益增强算法，成功地减弱了这些干扰，直到 2002 年太阳能阵列被刚性阵列取代。

HST 的下一个问题是其六个精密空气轴承陀螺仪中的两个出现故障。如果再多出两个陀螺仪出现故障，就会使用寿命有限的滚珠轴承陀螺仪启动一个不受欢迎的固件控制器，因此 HST 项目在 1991 年决定开发一种软件安全指向模式，该模式需要不到三个陀螺仪。为了应对这一挑战，我们在四个月内开发了零陀螺太阳点 (ZGSP) 模式，从最初的概念到飞行准备就绪 [51]。该模式在轨道的日光部分将首选轴指向太阳，并在反作用轮中沿太阳指向轴建立动量偏差，以在日食期间保持姿态，方式类似于 SAMPEX 的科学模式。然而，ZGSP 模式并不假设星载星历或磁场模型的知识，而是试图通过将身体锁定在感测到的磁场中来限制围绕太阳线的旋转。通过磁场的轨道运动使物体以一种取决于轨道平面、太阳线和磁赤道方向的速度旋转。这可以产生一个物体的角动量，抵消一个相当大的偏差动量。在日食期间，ZGSP 模式因这种效应而出现了一些较大的姿态偏移，但在 1999 年 11 月第四个陀螺仪故障和更换所有六个陀螺仪的维修任务之间，它连续 38 天将 HST 保持在功率和热安全状态。

Henry Hoffman 总是强调角动量守恒，并且很快就否定了任何忽略这一原理的分析，这让我在接受过物理训练的时候感到温暖，我曾亲身经历过这一点，但我感到非常尴尬。我很高兴发现角动量守恒在航天器故障探测中的应用 [52]。HST 的机载计算机通过方程 (71) 计算系统总角动量，陀螺仪感测角速度。反作用轮的高扭矩会导致车轮角动量和车身角动量迅速变化，但它们的向量和变化缓慢。减去易于计算的陀螺力矩和外部力矩后，一个明显的干扰力矩计算如下：

$$\mathbf{T}_{\text{disturbance}} = d\mathbf{L}_B/dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_B - \mathbf{m} \times \mathbf{B} - \mathbf{T}_{\text{gravity-gradient}} \quad (74)$$

该干扰扭矩的较大值表明反作用轮转速表或陀螺仪出现故障。转速表故障可以通过独立测试来识别，因此我们实施了该系统动量测试来识别陀螺仪故障。它在 2002 年底和 2003 年初三次启动进入 ZGSP 模式。

4.5 Wilkinson 微波各向异性探针 (WMAP)

1994 年成立的一个 GSFC-Princeton 大学合作计划将 MAP 作为一个中型探测器 (MIDEX) 任务，以比 Goddard 宇宙背景探测器 (COBE) 航天器上的差分微波辐射计 (DMR) 仪器更高的分辨

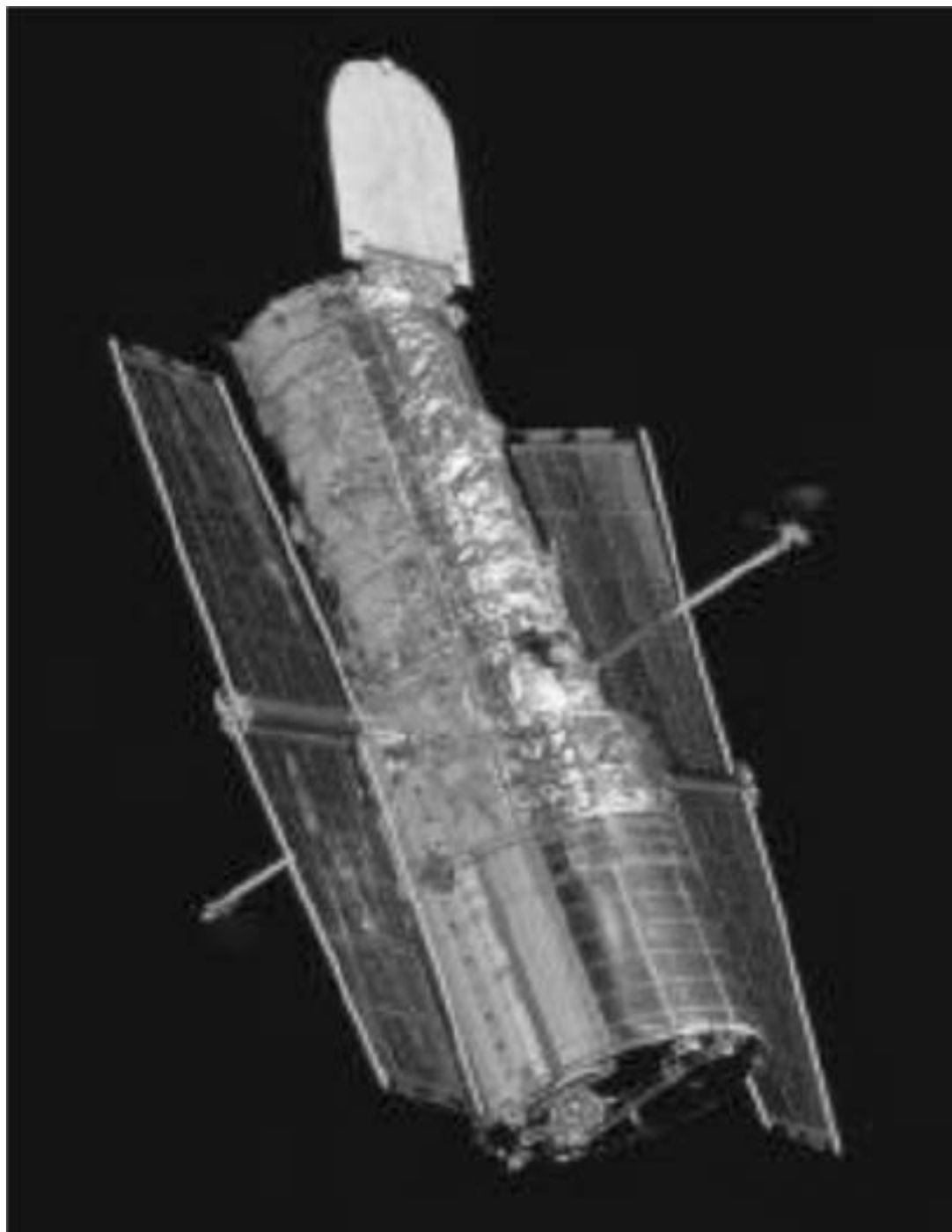


图 5: 哈勃太空望远镜。

率和精度测量宇宙微波背景辐射的各向异性。MAP 的首席调查员 (PI) 是 GSFC 的 Chuck Bennett, 他曾是 DMR 的副调查员。Princeton 大学的团队包括宇宙微波背景研究主任 David Wilkinson, 他的荣誉 MAP 在 2002 年被重新命名为 WMAP。

由于需要在距离太阳线 45° 和 90° 之间的环形空间上进行一组高度互连的测量, WMAP 需要以大约 0.5 rpm 的速度快速旋转, 并以每小时一圈的速度缓慢进动其旋转轴, 与太阳线成 22.5° 的恒定角度。正如 Ed Seidewitz 和我在 ADEAS 开发过程中注意到的那样, 这种扫描模式类似于 COBE, 可以很容易地用 3-1-3 个欧拉角来表示。John Crassidis 是美国国家研究委员会 (National Research Council) 常驻研究助理, 他与我一起工作, 他使用 MATLAB 在图 6 所示的“呼吸图”中显示了这种模式。Tom Flatley 试图找到一种能够被动提供这种扫描模式的双自旋动力学配置, 但没有成功。我相信, 如果他做不到, 没有人能做到。因此, 我们将 WMAP 设计为一种主动控制的零动量航天器。Midex 是单弦航天器, 因此 WMAP 上的三个反作用轮具有平衡物体旋转角动量以保持零系统动量 and 应用控制力矩以提供所需姿态的双重功能。选择轮轴方向可使所有车轮速度偏离零, 以避免出现不需要的零速交叉。如图 7 所示, WMAP 于 2001 年作为第二次 MIDEX 任务发射 [53]。

WMAP 的扫描运动使其机体坐标系中的太阳向量描述一个半径在 22.44° 和 22.54° 之间变化的圆。我将这张由飞行数字太阳传感器数据生成的圆圈照片描述为任何论文中最不有趣的数字 [53]。这张照片在 2005 年 2 月 17 日变得更加有趣, 当时每日遥测联系人显示 WMAP 处于安全模式, 一个反作用轮关闭, 并且有标志表明检测到了多个故障, 包括系统动量测试故障。对粗略的太阳传感器数据的回放显示, 太阳沿着图 8 所示的路径运行, 偏离自转轴 45° , 15 分钟后到达自转轴。请注意, 锯齿状路径是数据稀疏的伪影, 不能反映真实运动, 粗略的太阳传感器输出不只是单位向量的横向分量。图 8 显示了安全持有模式的设计行为, 使用两个轮子将太阳驱动到自转轴, 同时放弃对自转速率的控制。

有两个问题。首先, 反作用轮发生了机械故障, 这将阻止 WMAP 成功地继续其任务。图 9 显示了 WMAP 总系统角动量的时间历程, 这一点通过对陀螺仪感测的角速度使用方程 (71) 在板上计算得到, 从而消除了这一担忧。大约 10 分钟的突然跳跃不可能是系统角动量的真正变化, 因此它必须反映车轮转速表数据或陀螺数据的丢失。观察到 40 分钟后的系统动量等于跳跃前的系统动量, 也得出结论, 这是真实的、几乎恒定的系统动量。怀疑集中在转速表上, 因为 15 Nms 是存储在一个飞轮中用来抵消旋转动量的量, 如果断电, 30 分钟是飞轮减速的典型时间。对遥测技术的进一步检查也证明转速表是正确的。事实证明, 宇宙射线的扰动导致电源电子设备意外关闭了反应轮。

第二个担忧是, 太阳从自转轴的大偏移可能会对反射器造成损坏, 反射器被被动冷却到约 90°K , 并受到图 7 所示的遮光罩的保护, 偏移不超过 25° 。然而, 从安全舱模式成功恢复表明, 反射器没有受到损坏, WMAP 继续提供数据, 使科学家能够回答有关早期宇宙结构起源和宇宙命运的关键问题。

5 总结

我的航天事业非常令人满意, 但我最大的回报是有机会与天资非凡的同事共事。回顾我的职业生涯, 我发现我在很大程度上是偶然的 —— 一个在正确的时间在正确的地点的问题 —— 同时也抓住了提供给我的机会。我仍然认为 WMAP 是它的最高点。它让我有机会用一张干净的纸开始一个姿态控制系统的设计, 并且在决定宇宙的年龄方面扮演一个小角色。

当然, 我的职业生涯并没有以 WMAP 结束。我可以提到 Swift, 一个 2004 年发射的 MIDEX

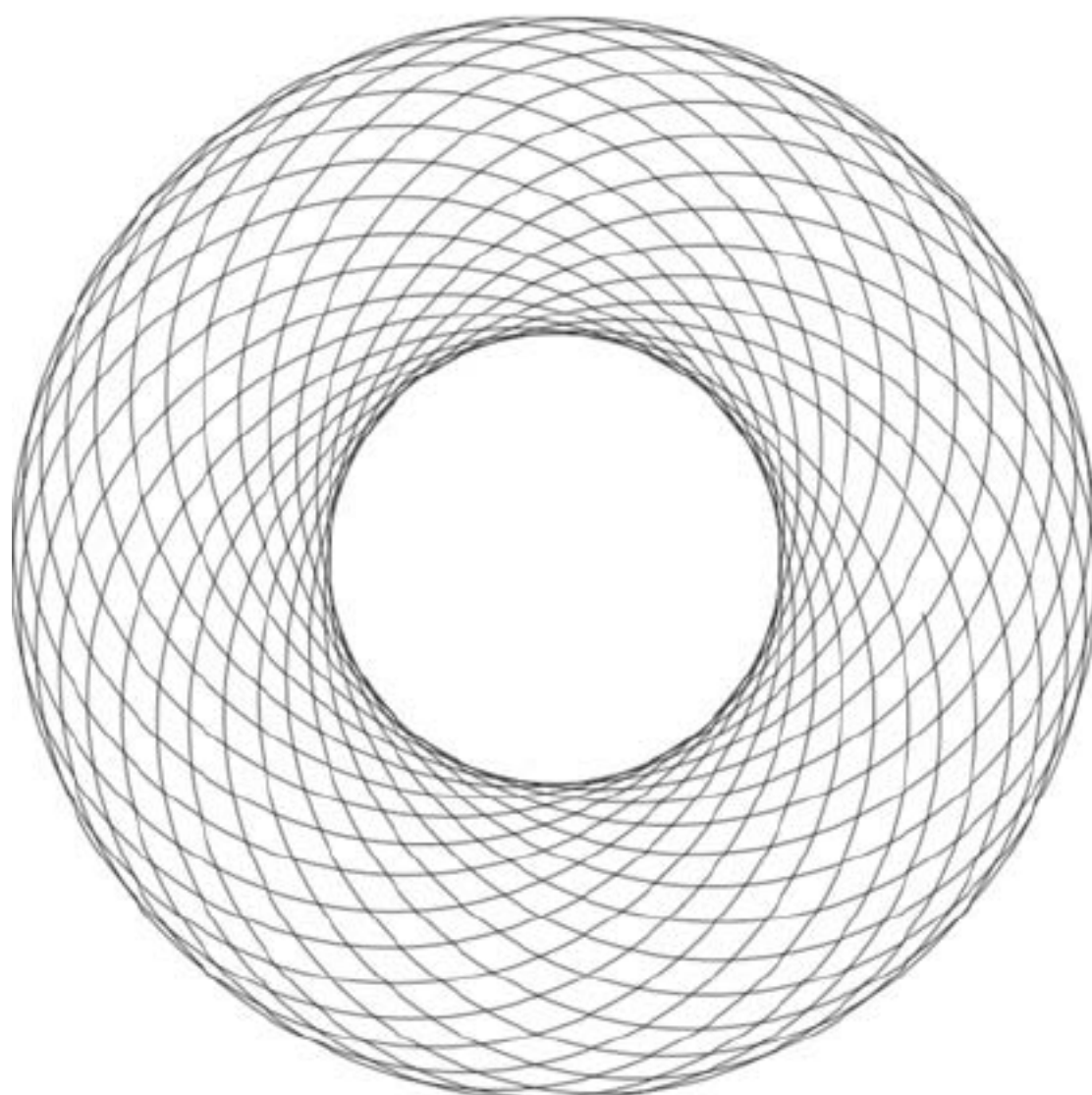


图 6: WMAP Scan Pattern.



图 7: WMAP.

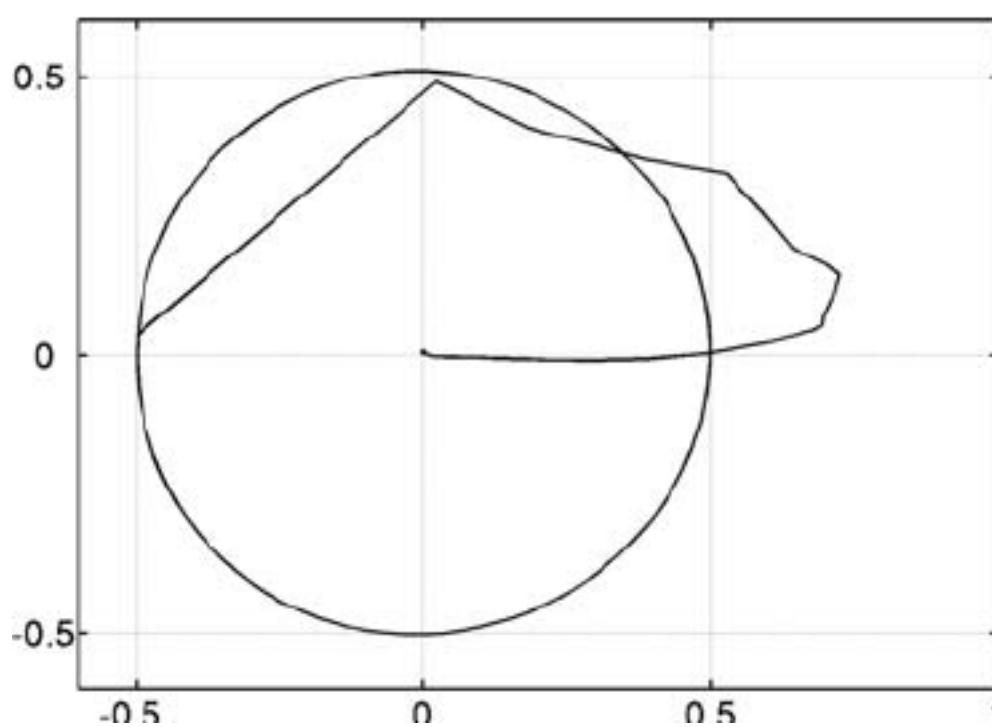


图 8: Sun Unit Vector in WMAP Body Frame (Coarse Sun Sensor Units).

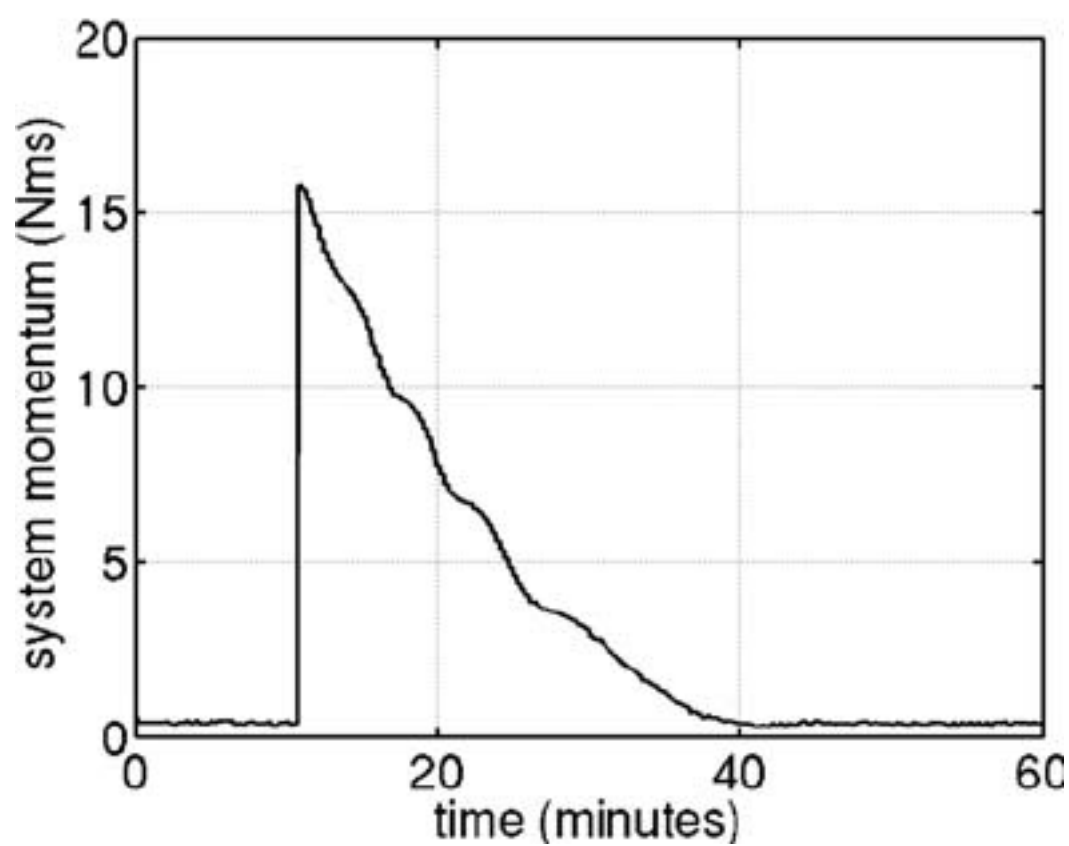


图 9: WMAP System Angular Momentum.

航天器，它使用 6 个反作用轮在 60 秒内旋转 60° ，以捕捉飞行中难以捕捉的短期伽马射线爆发。我继续跟踪 HST，它使用了双陀螺精确指向模式，在继续执行任务的同时，保存了其他剩余的可操作陀螺。在未来需要的情况下，可以采用一种性能相当的单陀螺精对准方式。我一直致力于詹姆斯·韦伯太空望远镜的开发，特别是在处理网球场大小的遮阳板上太阳辐射压力扭矩引起的复杂问题上。然而，我在很大程度上是一个对这些发展感兴趣的观察者和友好的批评者。火炬传递给了新一代。

6 References

1. MARKLEY, F. L. "Humble Problems," presented as paper AAS 06-238 at the 2006 AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, San Diego, CA, 2006; *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 124, Part II, 2006, pp. 2205-2222.
2. CRASSIDIS, J. L. and JUNKINS, J. L. *Optimal Estimation of Dynamic Systems*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004, Chapter 5.
3. FARRENKOPF, R. L. "Analytic Steady-State Accuracy Solutions for Two Common Spacecraft Attitude Estimators," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 1, No. 4, 1978, pp. 282 - 284.
4. MURRELL, J. W. "Precision Attitude Determination for Multimission Spacecraft," presented as paper AIAA 78-1248 at the 1978 AIAA Guidance and Control Conference, Palo Alto, CA, August 1978, pp. 70-87.
5. LEFFERTS, E. J., MARKLEY, F. L., and SHUSTER, M. D. "Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 5, No. 5, 1982, pp. 417-429.
6. FALLON, III, L. "Gyroscope Models," in *Spacecraft Attitude Determination and Control*, J. R. Wertz, ed., D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1978, pp. 266-270.
7. MARKLEY, F. L. and REYNOLDS, R. R. "Analytic Steady-State Accuracy of a Spacecraft Attitude Estimator," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 23, No. 6, 2000, pp. 1065-1067.
8. MARKLEY, F. L., SEIDEWITZ, E., and DEUTSCHMANN, J. "Attitude Determination Error Analysis: General Model and Specific Application," *Mécanique Spatiale: Space Dynamics*, Cepadues-Editions, Toulouse, France, 1989, pp. 251-266.
9. MARKLEY, F. L. and CARPENTER, J. R. "Generalized Linear Covariance Analysis," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 57, Nos. 1 & 2, 2009. (this issue) pp. 236-250.
10. BAUER, F. H., FEMIANO, M. D., and MOSIER, G. E. "Attitude Control System Conceptual Design for the X-Ray Timing Explorer," presented as paper AIAA 92-4334 at the 1992 AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Hilton Head Island, SC, August 1992,

11. SEDLAK, J. and HASHMALL, J. "Accurate Magnetometer/Gyroscope Attitudes Using a Filter with Correlated Sensor Noise," Proceedings of the 1997 Flight Mechanics Symposium, NASA Conference Publication 3345, Greenbelt, MD, 1976, pp. 83-87.
12. ANDREWS, S. F. and BILANOW, S. "Recent Flight Results of the TRMM Kalman Filter," presented as paper AIAA 2002-5047 at the 2002 AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Monterey, CA, August 2002.
13. MARKLEY, F. L. and BAR-ITZHACK, I. Y. "Unconstrained Optimal Transformation Matrix," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 34, No. 1, 1998, pp. 338-340.
14. MARKLEY, F. L. "Equations of Motion," in Spacecraft Attitude Determination and Control, J. R. Wertz, ed., D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1978, pp. 510-523.
15. SHUSTER, M. D. "A Survey of Attitude Representations," The Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 41, No. 4, 1993, pp. 439-517.
16. MARKLEY, F. L. "Parameterization of the Attitude," in Spacecraft Attitude Determination and Control, J. R. Wertz, ed., D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1978, pp. 410-420.
17. STUELPNAGEL, J. "On the Parameterization of the Three-Dimensional Rotation Group," SIAM Review, Vol. 6, No. 4, 1964, pp. 422-430.
18. WAHBA, G. "A Least Squares Estimate of Spacecraft Attitude," SIAM Review, Vol. 7, No. 3, 1965, p. 409.
19. HORN, R. A. and JOHNSON, C. R. Matrix Analysis, Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1985.
20. GOLUB, G. H. and VAN LOAN, C. F. Matrix Computations, Baltimore, MD, The Johns Hopkins University Press, 1983.
21. LERNER, G. M. "Three-Axis Attitude Determination," in Spacecraft Attitude Determination and Control, J. R. Wertz, ed., D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1978, pp. 420-428.
22. SHUSTER, M. D. and OH, S. D. "Three-Axis Attitude Determination from Vector Observations," Journal of Guidance and Control, Vol. 4, No. 1, 1981, pp. 70-77.
23. MARKLEY, F. L. "Attitude Determination Using Vector Observations and the Singular Value Decomposition," The Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 36, No. 3, 1988, pp. 245-258.
24. MARKLEY, F. L. "Attitude Determination Using Vector Observations: a Fast Optimal Matrix Algorithm," The Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 41, No. 2, 1993, pp. 261-280.
25. MORTARI, D. "ESOQ: A Closed-Form Solution to the Wahba Problem," The Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 45, No. 2, 1997, pp. 195-204.

26. MORTARI, D. "Second Estimator of the Optimal Quaternion," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 23, No. 5, 2000, pp. 885 –888.
27. MARKLEY, F. L. and MORTARI, D. "Quaternion Attitude Estimation Using Vector Observations," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 48, No. 2/3, 2000, pp. 359 – 380.
28. MARKLEY, F. L. "Attitude Estimation or Quaternion Estimation?" *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 52, No. 1/2, 2004, pp. 221 –238.
29. OSHMAN, Y. and CARMI, A. "Attitude Estimation from Vector Observations Using a Genetic-Algorithm-Embedded Quaternion Particle Filter," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 4, 2006, pp. 879–891.
30. SHUSTER, M. D. "Maximum Likelihood Estimate of Spacecraft Attitude," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 37, No. 1, 1989, pp. 79 –88.
31. MARKLEY, F. L. "Attitude Filtering on $SO(3)$," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 54, No. 3/4, 2006, pp. 391 –413.
32. SHUSTER, M. D. "Constraint in Attitude Estimation Part I: Constrained Estimation," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 51, No. 1, 2003, pp. 51 –74.
33. SHUSTER, M. D. "Constraint in Attitude Estimation Part II: Unconstrained Estimation," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 51, No. 1, 2003, pp. 75 –101.
34. PITTELKAU, M. E. "An Analysis of the Quaternion Attitude Determination Filter," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 51, No. 1, 2003, pp. 103 –120.
35. MARKLEY, F. L. "Attitude Error Representations for Kalman Filtering," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No. 2, 2003, pp. 311 –317.
36. ZANETTI, R., MAJJI, M., BISHOP, R. H., and MORTARI, D. "Norm Constrained Kalman Filtering," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 5, 2009, pp. 1458 – 1465.
37. CALISE, A. J. "Enforcing an Algebraic Constraint in Extended Kalman Filter Design," presented as paper AIAA 2007-6515 at the 2007 AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Hilton Head, SC, August 2007.
38. CARMI, A. and OSHMAN, Y. "Asymptotic Behavior of the Estimation Error Covariance of Quaternion Estimators," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 6, 2008, pp. 1665–1676.
39. CRASSIDIS, J. L. and MARKLEY, F. L. "Unscented Filtering for Spacecraft Attitude Estimation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No. 4, 2003, pp. 536 – 542.

40. REYNOLDS, R. G. "Asymptotically Optimal Attitude Filtering with Guaranteed Convergence," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 1, 2008, pp. 114 - 122.
41. MORTON, H. S., Jr., JUNKINS, J. L., and BLANTON, J. N. "Analytical Solutions for Euler Parameters," *Celestial Mechanics*, Vol. 10, 1974, pp. 287 -301.
42. KRAIGE, L. G. and JUNKINS, J. L. "Perturbation Formulations for Satellite Attitude Dynamics," *Celestial Mechanics*, Vol. 13, 1976, pp. 39 -64.
43. MARKLEY, F. L. "New Dynamic Variables for Momentum-Bias Spacecraft," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 41, No. 4, 1993, pp. 557 -567.
44. SEDLAK, J. E. "Spinning Spacecraft Attitude Estimation Using Markley Variables: Filter Implementation and Results," *Proceedings of the 2005 Flight Mechanics Symposium*, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, NASA Conference Publication NASA/CP-2005-212789, October 2005.
45. MARKLEY, F. L. and SEDLAK, J. E. "Kalman Filter for Spinning Spacecraft Attitude Estimation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 6, 2008, pp. 1750 - 1760.
46. KUZNIK, F. "Satellite Saviors," *AIR & SPACE/Smithsonian*, Vol. 6, No. 3, 1991, pp. 66 - 70.
47. FLATLEY, T. W., FORDEN, J. K., HENRETTY, D. A., LIGHTSEY, E. G., and MARKLEY, F. L. "Onboard Attitude Determination and Control Algorithms for SAMPEX," *Proceedings of the 1990 Flight Mechanics/ Estimation Theory Symposium*, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, NASA Conference Publication 3102, May 1990, pp. 379-398.
48. MCCULLOUGH, J. D., FLATLEY, T. W., HENRETTY, D. A., MARKLEY, F. L., and SAN, J. K. "Testing of the Onboard Attitude Determination and Control Algorithms for SAMPEX," *Proceedings of the 1992 Flight Mechanics/ Estimation Theory Symposium*, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, May 1992, NASA Conference Publication 3186, pp. 55-68.
49. MARKLEY, F. L., FLATLEY, T. W. and LEOUTSAKOS, T. "SAMPEX Special Pointing Mode," *Proceedings of the 1995 Flight Mechanics/Estimation Theory Symposium*, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, May 1995, NASA Conference Publication 3299, pp. 201-215.
50. TSAI, D. C., MARKLEY, F. L., and WATSON, T. P. "SAMPEX Recovery to Spin Stabilized Mode," *SpaceOps 2008*, Heidelberg, Germany, May 12-16, 2008.
51. MARKLEY, F. L. and NELSON, J. D. "Zero-Gyro Safemode Controller for the Hubble Space Telescope," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 17, No. 4, 1994, pp. 815 -822.

52. MARKLEY, F. L., KENNEDY, K. R., NELSON, J. D., and MOY, E. W. “Autonomous Spacecraft Gyro Failure Detection Based on Conservation of Angular Momentum,” Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 17, No. 6, 1994, pp. 1385–1387.
53. MARKLEY, F. L., ANDREWS, S. F., O’DONNELL, J. R., Jr., and WARD, D. K. “Attitude Control System of the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe,” Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 28, No. 3, 2005, pp. 385–397.

A 四元数协方差矩阵的重置

A.1 乘性 EKF

重置后，MEKF 中的四元数协方差应为参考 $\hat{q}(+)$ 的重置姿态误差向量的协方差，我们将其表示为 $\mathbf{a}(++)$ 。我们用一个 $\mathbf{a}(+)$ 表示与 $\hat{q}(-)$ 相关的预复位姿态误差向量。真正的四元数不关心参考帧，因此方程 (40) 和 (43) 给出

$$\begin{aligned} q &= \delta q(\mathbf{a}(+)) \otimes \hat{q}(-) = \delta q(\mathbf{a}(++)) \otimes \hat{q}(+) \\ &= \delta q(\mathbf{a}(++)) \otimes \delta q(\hat{\mathbf{a}}(+)) \otimes \hat{q}(-) \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

这意味着这个 $\delta q(\mathbf{a}(+)) = \delta q(\mathbf{a}(++)) \otimes \delta q(\hat{\mathbf{a}}(+))$ ，或

$$\delta q(\mathbf{a}(++)) = \delta q(\mathbf{a}(+)) \otimes \delta q(-\hat{\mathbf{a}}(+)) \quad (\text{A2})$$

所有遵守方程 (41a) 的三个参数误差表示将给予相同的协方差重置为 $\|\hat{\mathbf{a}}(+)\|$ 中的一阶，但在更高阶上有所不同。不过，目前还不清楚更高的阶有多大意义。如果我们使用方程 (46) 给出的首选 Rodrigues 参数表示，方程 (A2) 等于 Rodrigues 参数的乘积规则 [15, 16]

$$\rho'' = (1 - \rho' \cdot \rho)^{-1} (\rho' + \rho - \rho' \times \rho) \quad (\text{A3})$$

其中 $\rho'' = \mathbf{a}(++)/2$, $\rho' = \mathbf{a}(+)/2$ ，并且 $\rho = -\hat{\mathbf{a}}(+)/2$ 。这给出

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(++) &= [1 + (1/4)\mathbf{a}(+) \cdot \hat{\mathbf{a}}(+)]^{-1} [\mathbf{a}(+) - \hat{\mathbf{a}}(+) + (1/2)\mathbf{a}(+) \times \hat{\mathbf{a}}(+)] \\ &= \left\{ 1 - [4 + \mathbf{a}(+) \cdot \hat{\mathbf{a}}(+)]^{-1} [\hat{\mathbf{a}}(+) \cdot \Delta \mathbf{a}(+)] \right\} M \Delta \mathbf{a}(+) \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

其中 $\Delta \mathbf{a}(+) \equiv \mathbf{a}(+) - \hat{\mathbf{a}}(+)$ 并且

$$M \equiv \left(1 + \|\hat{\mathbf{a}}(+)\|^2 / 4 \right)^{-1} \{ I_{3 \times 3} - [\hat{\mathbf{a}}(+) \times] / 2 \} \quad (\text{A5})$$

忽略方程 (A4) 中 $\Delta \mathbf{a}(+)$ 中的二阶和更高阶项，这与 EKF 中的通常假设一致，并记住，根据重置的定义， $\hat{\mathbf{a}}(++) \equiv 0$ 给出

$$\Delta \mathbf{a}(++) \equiv \mathbf{a}(++) - \hat{\mathbf{a}}(++) = M \Delta \mathbf{a}(+) \quad (\text{A6})$$

向量 \mathbf{b} 不受重置的影响，因此方程 (42) 的六维状态的协方差必须重置为

$$\tilde{P}(++) = \begin{bmatrix} M & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \tilde{P}(+) \begin{bmatrix} M & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A7})$$

A.2 协方差投影法

如果方程 (61) 为真, 则方程 (51a) 将给出

$$\tilde{P}(+) = [S^+(+) S(-)] \left(I_{6 \times 6} - \tilde{K} \tilde{H} \right) \tilde{P}(-) [S^+(+) S(-)]^T \quad (\text{A8})$$

与方程 (61) 不同, 该方程没有病态。我们使用它来定义重置协方差 $\tilde{P}(++)$ 为左侧的数量, 并保留 $\tilde{P}(+)$ 的符号表示由出现在右侧的方程 (62) 定义的更新协方差。然后利用方程 (56a) 和 (56b), 我们得到

$$\tilde{P}(++) = \begin{bmatrix} \Xi^T(+) \Xi(-) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \tilde{P}(+) \begin{bmatrix} \Xi^T(+) \Xi(-) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A9})$$

方程 (55) 和一些四元数代数 [15] 给出

$$\Xi^T(+) \Xi(-) = (\delta \hat{q}_4) I_{3 \times 3} - [\delta \hat{\mathbf{q}} \times] \quad (\text{A10})$$

其中应用方程 (46)

$$\delta \hat{q} = \begin{bmatrix} \delta \hat{\mathbf{q}} \\ \delta \hat{q}_4 \end{bmatrix} = \hat{q}(+) \otimes \hat{q}^{-1}(-) = \left(1 + \|\hat{\mathbf{a}}(+)\|^2 / 4 \right)^{-1/2} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}(+)/2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A11})$$

结合这些方程得出

$$\Xi^T(+) \Xi(-) = \left(1 + \|\hat{\mathbf{a}}(+)\|^2 / 4 \right)^{-1/2} \{ I_{3 \times 3} - [\hat{\mathbf{a}}(+)\times] / 2 \} \quad (\text{A12})$$

方程 (62) 下面讨论的更新四元数的规范化提供了 $\left(1 + \|\hat{\mathbf{a}}(+)\|^2 / 4 \right)^{-1/2}$ 的另一个校正系数, 并将该系数和方程 (A12) 插入方程 (A9) 中可精确地恢复方程 (A7)。因此, 对协方差矩阵的重置校正 MEKF 和协方差投影法中是相同的, 至少在 $\|\hat{\mathbf{a}}(+)\|$ 中是二阶的。