

位姿估计问题应用李群的思路与直觉

Shuyong Chen

2022 年 6 月 13 日

—题记：简单的理论，应该用简单的直觉解释。

1 简介

将相关知识点都串起来，通过推导并理解公式，思考应用李群进行位姿估计的思路与直觉。是彩虹还是麻线团，各有所得。

Too Long ; Don't Read !

第一部分 数学知识与直觉

2 前置基础知识

竹篮打水把所涉及的数学知识捞一捞，捞不起月亮也捞几个碎片，以使用得上。

2.1 李群和流形的基本概念

对于李群的一个简短定义是：李群是一个群，也是一个光滑流形。李群以前又被称为 "连续变换群"。

群是代数结构概念。流形是几何拓扑概念。李群连接了两者，具有两者的特性。李群做为一个群，同样有“封闭么逆”的特性，就是：一个群 (group (\mathcal{G}, \circ)) 是一个集合， \mathcal{G} 具有组合运算， \circ ，这个算子，对于元素 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in \mathcal{G}$ ，满足下列公理，

$$\text{封闭于}'\circ' : \mathcal{X} \circ \mathcal{Y} \in \mathcal{G}$$

$$\text{么元}\mathcal{E} : \mathcal{E} \circ \mathcal{X} = \mathcal{X} \circ \mathcal{E} = \mathcal{X}$$

$$\text{逆元}\mathcal{X}^{-1} : \mathcal{X}^{-1} \circ \mathcal{X} = \mathcal{X} \circ \mathcal{X}^{-1} = \mathcal{E}$$

$$\text{结合性} : (\mathcal{X} \circ \mathcal{Y}) \circ \mathcal{Z} = \mathcal{X} \circ (\mathcal{Y} \circ \mathcal{Z})$$

在一个李群 (Lie group) 中，流形在每一点上看起来都是一样的 (例如在球面的表面上)，并且因此在任何点上的所有切空间都是相同的。群结构要求流形元素的组合保持在流形上，并且每个元素在流形中也有一个逆元。其中一个特别的元素是么元，并因此有一个特殊的切空间是么元处的正切空间，我们称之为李群的李代数。李群结合了光滑流形的局部性质，使我们能够利用群的全局性质进行微积分，从而实现远处对象的非线性组合。

很容易验证，单位四元数和旋转矩阵的集合与乘法构成群。另外，和运动相关的变换矩阵的乘法也构成群。这些都是李群的一种：

- 特殊正交群 $SO(n)$ ：也就是旋转群。
- 特殊欧氏群 $SE(n)$ ：也就是运动群。其中包含了旋转和平移运动。

在这里我们只关注在二维和三维空间中的旋转群 $SO(2)/SO(3)$ 和运动群 $SE(2)/SE(3)$ 。对于流形，有两个特性需要关注：

- 局部 (local)
- 收回 (retraction)

后面所要讨论的指数映射函数 $\exp()$ 就是收回 (retraction) 操作。它允许我们精确地将局部 (local) 的切空间的元素变换到群上。直观地说， $\exp()$ 将切空间的元素缠绕 (wrap) 在测地线 (geodesic) 所在的流形上 (就像将琴弦缠绕在球面上一样)。反向映射是 $\log()$ ，即展开 (unwrap) 操作。在我们的案例中，所谓流形就只局限在二维的圆和三维的球面上。相应的李群的特性见下图 (Rodrigues-02.pdf)

| Lie group \mathcal{M}, \circ | size | dim | $\mathcal{X} \in \mathcal{M}$ | Constraint | Tangent space | | Exponential map | Comp. | Action |
|--------------------------------|-------------------|-----|---|--|--|---|--|-------------------------------|--------------------------------------|
| | | | | | Lie algebra | Cartesian | | | |
| n -D vector | $\mathbb{R}^n, +$ | n | $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ | $\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$ | $\boldsymbol{\tau} \in \mathfrak{m}$ | $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^m$ | $\mathbf{v} = \exp(\boldsymbol{\tau})$ | $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ | $\mathbf{v} + \mathbf{x}$ |
| circle | S^1, \cdot | 2 | $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ | $\mathbf{z} * \mathbf{z} = 1$ | $i\theta \in i\mathbb{R}$ | $\theta \in \mathbb{R}$ | $\mathbf{z} = \exp(i\theta)$ | $\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2$ | $\mathbf{z} \mathbf{x}$ |
| Rotation | $SO(2), \cdot$ | 4 | \mathbf{R} | $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ | $[\theta]_{\times} \in \mathfrak{so}(2)$ | $\theta \in \mathbb{R}$ | $\mathbf{R} = \exp([\theta]_{\times})$ | $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$ | $\mathbf{R} \mathbf{x}$ |
| Rigid motion | $SE(2), \cdot$ | 9 | $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ | $\begin{bmatrix} [\theta]_{\times} & \boldsymbol{\rho} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{se}(2)$ | $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ | $\exp\left(\begin{bmatrix} [\theta]_{\times} & \boldsymbol{\rho} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$ | $\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$ | $\mathbf{R} \mathbf{x} + \mathbf{t}$ |
| 3-sphere | S^3, \cdot | 4 | $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ | $\mathbf{q}^* \mathbf{q} = 1$ | $\boldsymbol{\theta}/2 \in \mathbb{H}_p$ | $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$ | $\mathbf{q} = \exp(\mathbf{u}\boldsymbol{\theta}/2)$ | $\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2$ | $\mathbf{q} \mathbf{x} \mathbf{q}^*$ |
| Rotation | $SO(3), \cdot$ | 9 | \mathbf{R} | $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ | $[\boldsymbol{\theta}]_{\times} \in \mathfrak{so}(3)$ | $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$ | $\mathbf{R} = \exp([\boldsymbol{\theta}]_{\times})$ | $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$ | $\mathbf{R} \mathbf{x}$ |
| Rigid motion | $SE(3), \cdot$ | 16 | $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ | $\begin{bmatrix} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} & \boldsymbol{\rho} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{se}(3)$ | $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$ | $\exp\left(\begin{bmatrix} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} & \boldsymbol{\rho} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$ | $\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$ | $\mathbf{R} \mathbf{x} + \mathbf{t}$ |

2.2 问题的起因

一个很自然的直觉，三维空间的旋转用三维向量表示。常见的有欧拉角表示和轴角表示 (旋转向量, Rotation Vector, RV)。但是，不论哪种三维向量表示，都存在有奇点，并且插值不均匀，表示姿态有不连续的跳跃问题，这些问题大多与 $\tan()$ 函数相关。数学上已经证明，姿态估计的基本约束条件是姿态矩阵是旋转群或特殊正交群 $SO(3)$ 的成员。这就是说姿态矩阵必须是行列式为 +1 的正交矩阵的群理论方法。对三维空间旋转来说，最少需要 4 个参数的表示方法，也就是四元数表示法，才能无奇点的、连续的、采样均匀地表示三维旋转。

用 4 个以上的参数表示三维旋转，必然要引入约束。比如，四元数是 4 个参数，所以要引入单位范数这个约束，使得单位四元数可以表示三维旋转。而旋转矩阵是 9 个参数，所以要引入 6 个约束，即 $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}, \det(\mathbf{R}) = 1$ 。约束的本质就是降维。这也使得单位四元数和旋转矩阵不是向量而是群，也就是人们常说的旋转群或特殊正交群 $SO(3)$ 。

表示三维旋转的单位四元数和旋转矩阵不是向量而是群，因此和基于向量的优化方法产生冲突。因为最常用的姿态估计方法就是卡尔曼滤波器。但是卡尔曼滤波器最核心的概念是协方差矩阵，里面有一个重要的假设就是估计状态是向量，计算协方差采用的是减法 '-'。而三维旋转只能用群来表示，这就使得两者产生了冲突。

为从数学上解决这个问题，有必要引入李群。引入李群的动机主要有这几方面：

- 它是适当的：在旋转和运动的非线性空间上进行严格的微积分 (导数和积分) 演算。

- 它是强大的：在最小的空间里适当地处理不确定性、优化步骤、增量。
- 它是抽象的：在不同的方案中 (2D/3D、四元数与旋转矩阵、IMU 预积分与里程表)，实施统一的概念。
- 它是优美的！具有数学上的简洁统一的美感。

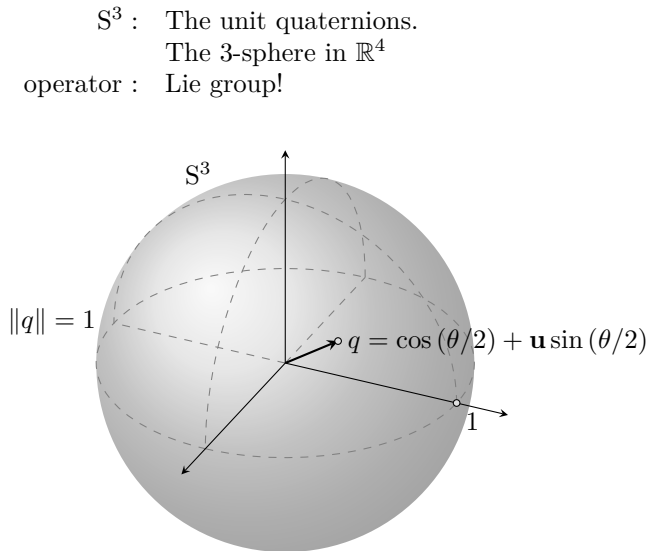
实际上最重要动机就是能对群元素能进行加减法运算，从而能复用向量空间中成熟的算法。因为群存在约束，非线性约束以及约束所定义的作用，使得有些算法直接在群元素上进行运算很困难，甚至违反了约束。因此在数学上引入李群是必须的。

2.3 图示表示说明

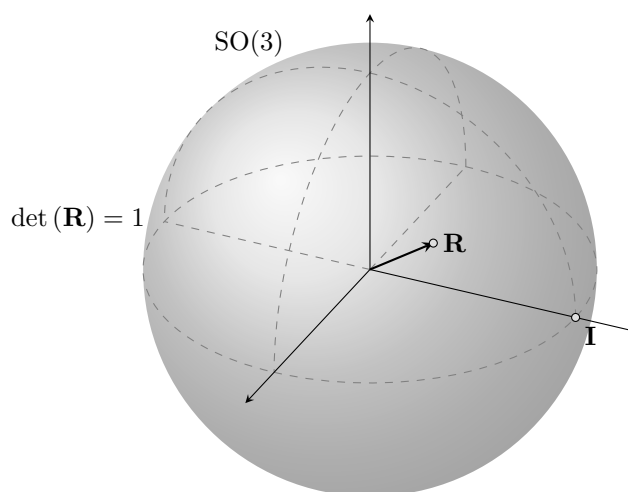
本文所采用的四元数为传统的 Hamilton 约定，但为方便软件操作，这里所采用的四元数的顺序和教科书上略有不同，虚部在前而实部在后，这样软件指针不需要改变就可以取出虚部做为向量使用。因此单位四元数 q

$$\begin{aligned} q &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + w \\ &= \mathbf{q} + w \end{aligned}$$

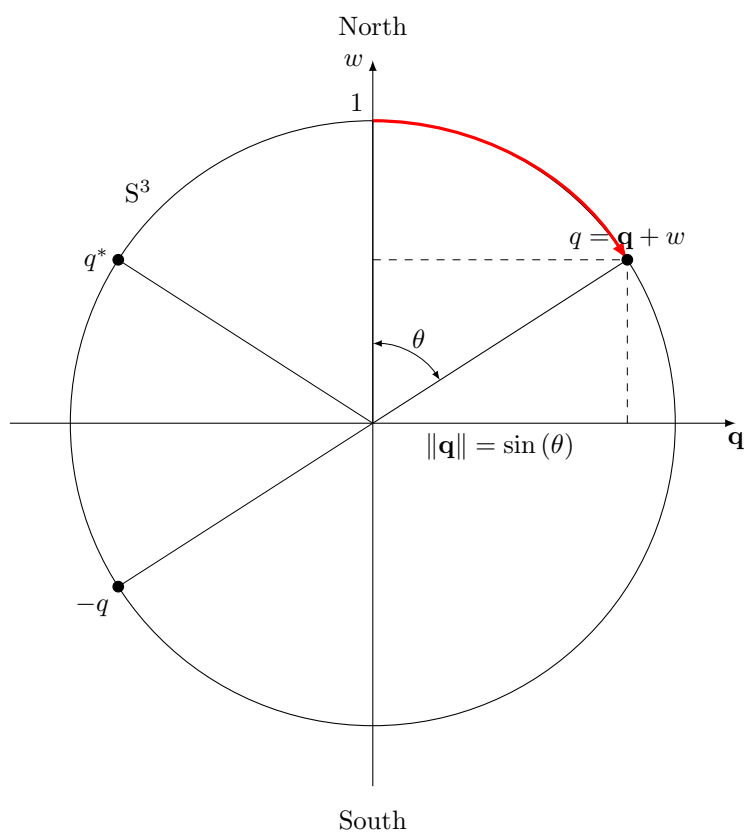
可以表示三维空间的姿态。但是单位四元数 q 要想用图形表示出来，也是一个困难的事情，因为单位四元数 q 所在的球面是嵌入 \mathbb{R}^4 空间中的 S^3 球面。因此只能用如下示意图 (fig3d-11.pdf)



如果用旋转矩阵 $SO(3)$ 则是如下示意图 (fig3d-13.pdf)

Rotation Group $SO(3)$ 

这两种表示的差异在于单位四元数 q 表示旋转是两倍覆盖，所以所表示的姿态点是在半个球面上移动。另外需要注意的是幺元，对于单位四元数 q 的幺元是 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，对于旋转矩阵 $SO(3)$ 是单位矩阵 I 。还有一种方法是用类似复平面的方式表示 (fig2d-32.pdf):

 S^3 : The unit quaternion numbers

其中，实数轴 w 做为南北轴。因为单位四元数 q 表示旋转是两倍覆盖，即 q 与 $-q$ 代表同一

个旋转，并且其共轭为其逆 $q^* = q^{-1}$ ，所以一般选择 $w \geq 0$ 的北半球表示一个三维旋转。图中的角度 θ 代表的是

$$\tan(\theta) = \frac{\|\mathbf{q}\|}{w}$$

2.4 切空间与李代数

刚体的姿态 \mathbf{R} 为李群流形 $\text{SO}(3)$ 上移动的点，其变化速度 $\dot{\mathbf{R}} = \partial \mathbf{R} / \partial t$ 属于在当前点 \mathbf{R} 处与 $\text{SO}(3)$ 正切的空间。假设球面上的向量以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 匀速旋转，根据约束条件

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$$

两边取导数

$$\frac{d}{dt} \{\mathbf{R}\mathbf{R}^T\} = \frac{d}{dt} \mathbf{I} \rightarrow \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = 0$$

这就是一个斜对称矩阵

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = -\left(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\right)^T$$

定义

$$[\boldsymbol{\omega} \times] = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$$

则旋转矩阵的导数 (旋转运动的基本方程) 为:

$$\dot{\mathbf{R}} = [\boldsymbol{\omega} \times] \mathbf{R}$$

当 $\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}$ 时的解为

$$\mathbf{R} = e^{[\boldsymbol{\omega} \times]t}$$

其中 $[\boldsymbol{\omega} \times]$ 表示在切空间中的角速度。

我们在笛卡尔空间测量得到的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 为向量

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

关连到 $[\boldsymbol{\omega} \times]$ 这个斜对称矩阵则为

$$[\boldsymbol{\omega} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

旋转在切空间中的导数，也就是在切空间中的角速度，对于三维空间为

$$\dot{\mathbf{R}} = \begin{cases} [\boldsymbol{\omega} \times] & \text{if } \mathbf{R} = \mathbf{I} \\ [\boldsymbol{\omega} \times] \mathbf{R} & \text{exp map} \end{cases}$$

这是在全局 (global) 坐标系中的表示。对于局部 (local) 坐标系的表示为

$$\dot{\mathbf{R}} = [\boldsymbol{\omega} \times] \mathbf{R} \in \text{SO}(3)$$

也就是，一个流形的所有切空间的结构都相同，都是在幺元处的结构。因此，在幺元处的切空间被称为流形的李代数 (Lie algebra)。对于三维空间的幺元，单位四元数表示为 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，旋转矩阵表示为 $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ 。

流形的切空间具有这样的性质：

- 一个李群的切空间的结构在任何地方都是相同的。
- 切空间是一个向量空间。
- 切空间的维度和所属的流形的自由度相同。
- 在起点或幺元处的切空间被称为李代数。

我们更熟悉的三维向量空间是笛卡尔空间 \mathbb{R}^3 。李代数空间和笛卡尔空间是同构的 (isomorphism)。也就是，流形局部的切空间的切点是一个很特殊的地方。它既属于流形又属于切空间，在此建立原点的切空间有向量空间性质，并且切空间的元素既可以变换到笛卡尔空间也可以变换到流形空间中。因此在切点处我们会涉及三种空间：

- 笛卡尔空间 \mathbb{R}^3 。这是我们最熟悉的三维向量空间。
- 切空间。这也是三维向量空间。笛卡尔空间的三维向量通过 3 个生成元进入这个空间，形成 3×3 的斜对称矩阵结构。
- 流形空间。在切空间的向量使用加减法进行各种最优估计之后，使用指数映射函数 $\exp()$ 就进入了流形空间，这就是流形的收回 (retraction) 操作。

具体到我们的例子，我们在运动物体中放置 IMU 传感器测量角速度。所获得的角速度向量 $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ 位于局部坐标系中的笛卡尔空间，经过 $\text{Hat}(\wedge)$ 算子的变换到切空间的角速度矩阵 $\boldsymbol{\omega}^\wedge = [\boldsymbol{\omega} \times]$ ，再通过指数映射函数 $\exp()$ 作用 (action) 到切点处的流形的元素上，于是在一定的时间 Δt 里，流形中的元素就发生了旋转 (对于旋转群来说)，或者伴随有位移 (对于运动群来说)。反之， $\text{Vee}(\vee)$ 算子则是逆向变换，将切空间的角速度向量变换回笛卡尔空间的向量， $\boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{\omega} \times]^\vee$ 。

2.5 指数映射与对数映射

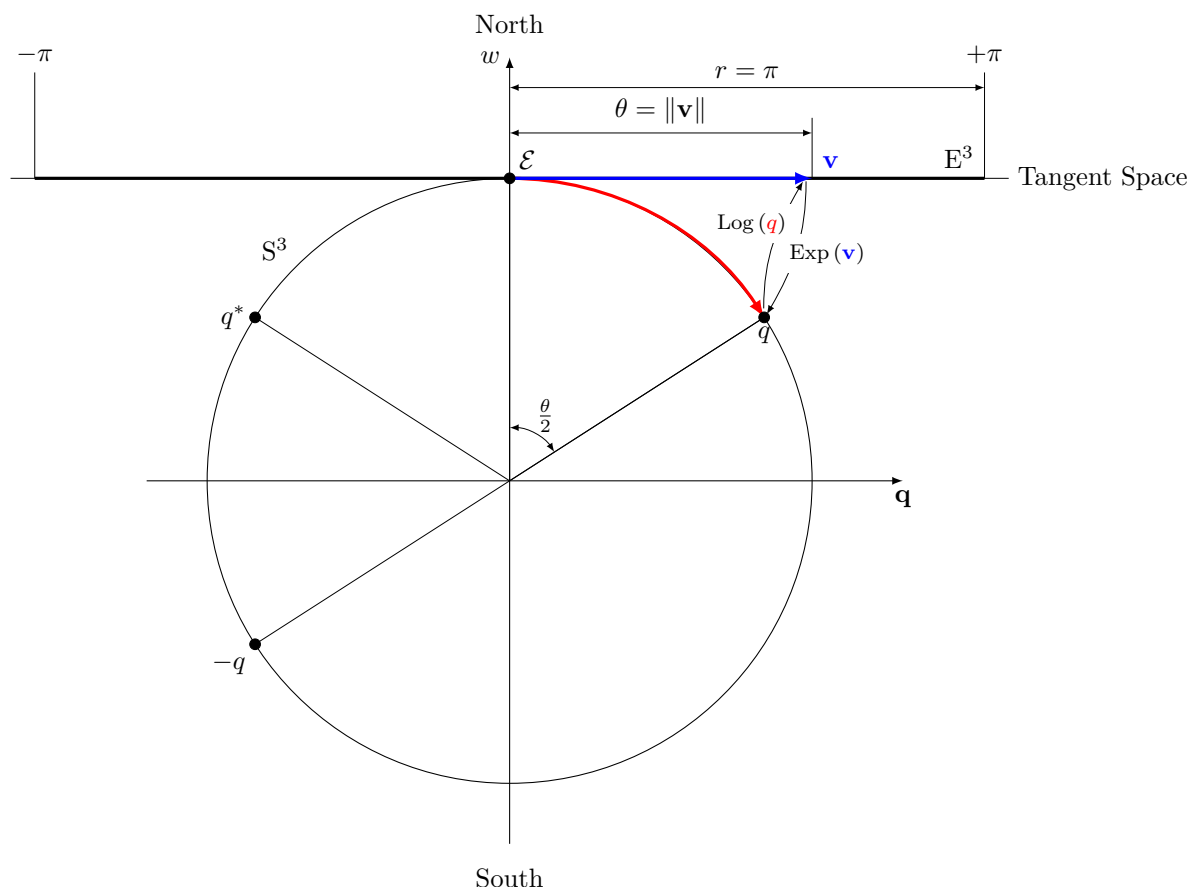
指数映射 $\exp()$ 与对数映射 $\log()$ 的精确定义可以参看参考资料。这里主要从几何上展示直观的概念。指数映射 $\exp()$ 允许我们精确地将李代数的元素变换到群上，一般称为收回 (retraction) 操作。直观地说， $\exp()$ 将切空间的元素缠绕在大圆弧 (great arc) 或测地线 (geodesic) 跟随的流形上 (就像将柔软的琴弦缠绕在球上一样，)。反向映射是 $\log()$ ，即展开操作。

因为从笛卡尔空间 \mathbb{R}^3 的向量通过生成元进入切空间，再通过指数映射 $\exp()$ 进入流形空间，公式写起来太麻烦，所以有必要定义一种快捷方式，就是大写的指数映射函数 $\text{Exp}()$ 和对数映射函数 $\text{Log}()$ ，其输入或输出为向量。结果见下表 (Rodrigues-01.pdf)

| | Vector (Cartesian space) | Lie algebra (Tangent space) | Lie group (Manifold space) |
|----------------|---|--|---|
| Rotation | \mathbb{R}^3 $\theta = \ \omega\ \cdot \Delta t$ $\mathbf{u} = \omega / \ \omega\ $ $\phi = \mathbf{u}\theta$ | <p>Exp() function</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> $\mathfrak{so}(3)$ $\phi^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_y & \phi_z \\ \phi_x & 0 & -\phi_z \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix}$ </div> <p>Generators</p> <p>Log() function</p> | <p>SO(3)</p> $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ $\det(\mathbf{R}) = 1$ |
| Transformation | \mathbb{R}^6 $\xi = \begin{bmatrix} \phi \\ \rho \end{bmatrix}$ | <p>Exp() function</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> $\mathfrak{se}(3)$ $\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ </div> <p>Generators</p> <p>Log() function</p> | <p>SE(3)</p> $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ |
| Similarity | \mathbb{R}^7 $\delta = \begin{bmatrix} \phi \\ \rho \\ \lambda \end{bmatrix}$ | <p>Exp() function</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> $\mathfrak{sim}(3)$ $\delta^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ \mathbf{0}^T & -\lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ </div> <p>Generators</p> <p>Log() function</p> | <p>Sim(3)</p> $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & s^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ |

将旋转向量 (Rotation Vector, RV) 代入指数映射函数 $\text{Exp}()$ 就将其收回 (retraction) 到流形中。这种映射属于等距投影 (Equidistant), E^3 空间位于幺元 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ 处。注意, 在四元数版本中使用的是半角 $\theta/2$, 但为了绘图方便, 下图将 E^3 空间半径缩小了 $1/2$ 的大小 (fig2d-31.pdf)

Equidistant projection : Rotation Vector (RV)



从上图可知，在三维笛卡尔向量空间中，向量是在一个半径 $r = \pi$ 的圆球内取值，并且当速度恒定的时候，由时间 Δt 决定向量的模长。

为方便且直观地进行群元素与向量之间的运算，有必要引入加号 \oplus 和减号 \ominus 算子。针对矩阵表示的李群，我们有：

Plus operator: $\mathcal{X} \oplus \boldsymbol{\theta} \triangleq \mathcal{X} \cdot \text{Exp}(\boldsymbol{\theta})$

Minus operator: $\mathcal{Y} \ominus \mathcal{X} \triangleq \text{Log}(\mathcal{X}^{-1} \cdot \mathcal{Y})$

针对四元数表示的李群，因为是操作半角 $\boldsymbol{\theta}/2$ ，区别于前面定义的面向旋转矩阵运算的加号 \oplus 和减号 \ominus 算子，另外定义有两个类似的面向四元数运算的半角加减操作算子： \boxplus 和 \boxminus 。通过指数映射函数 $\exp(\cdot)$ 可以将向量 $\boldsymbol{\theta}$ 做为纯虚四元数直接一步映射为单位四元数，也用算子 $\wedge: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}$ 表示，相应的逆映射用算子 $\vee: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 表示。旋转向量 (RV) 映射到单位四元数的方程为：

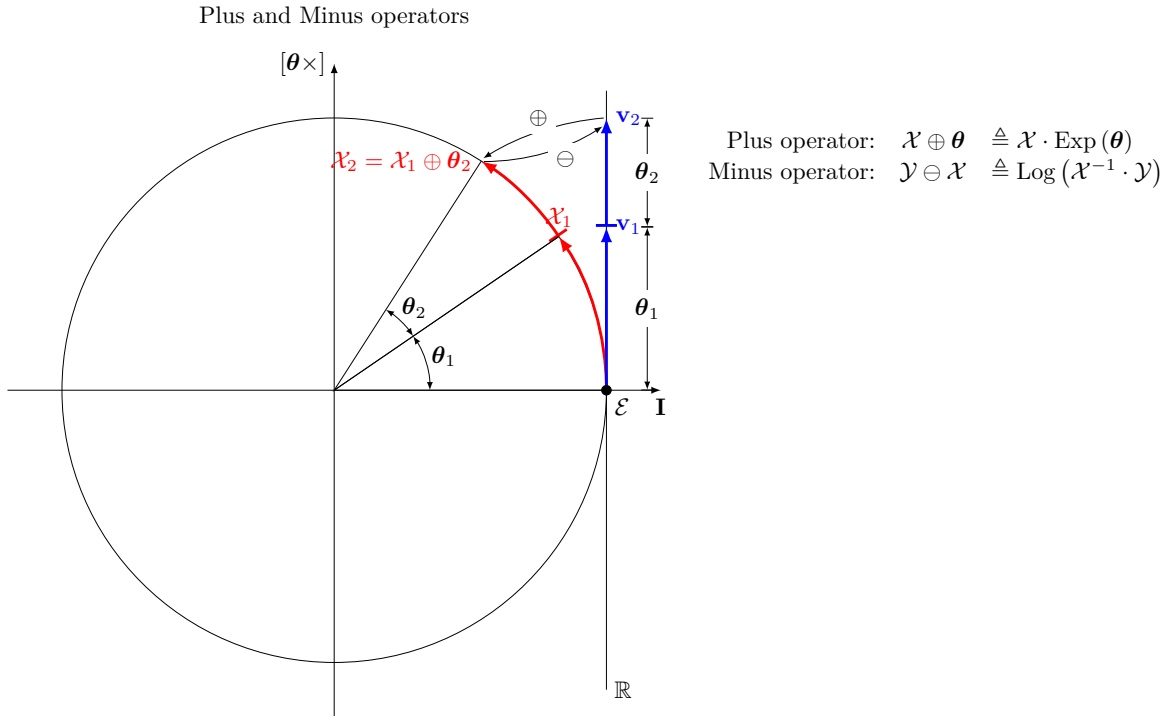
$$\boldsymbol{\theta}^\wedge \triangleq \exp(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\|\boldsymbol{\theta}\|}{2}\right) \\ \frac{\boldsymbol{\theta}}{\|\boldsymbol{\theta}\|} \sin\left(\frac{\|\boldsymbol{\theta}\|}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$q^\vee \triangleq \log(q) = 2\text{atan2}(\|\mathbf{q}\|, q_0) \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$$

因此半角加减操作算子 \boxplus 和 \boxminus 定义为：

$$\begin{aligned} q' &= q * \boldsymbol{\theta}^\wedge &= q * \exp(\boldsymbol{\theta}) &= q \boxplus \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\theta} &= (q^{-1} * q')^\vee &= \log(q^{-1} * q') &= q' \boxminus q \end{aligned}$$

我们试图直观地执行如下操作 (fig2d-16.pdf)：



具体执行的是：

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_2 &= \mathcal{E} \oplus \boldsymbol{\theta}_1 \oplus \boldsymbol{\theta}_2 \\ &= \mathcal{E} \cdot \text{Exp}(\boldsymbol{\theta}_1) \cdot \text{Exp}(\boldsymbol{\theta}_2) \end{aligned}$$

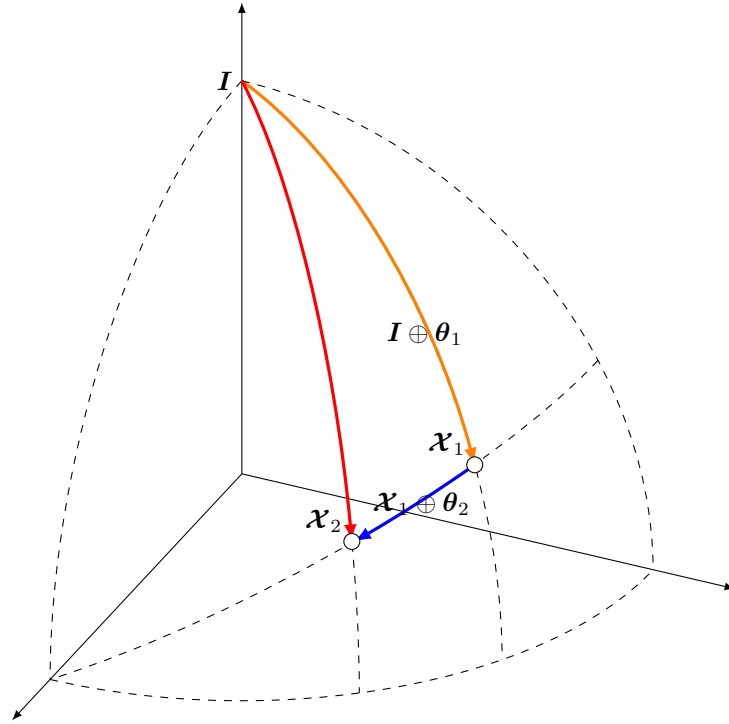
我们期望

$$\exp(\boldsymbol{\theta}_1^\wedge) \exp(\boldsymbol{\theta}_2^\wedge) = \exp((\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2)^\wedge),$$

因为函数 $\exp()$ 运算慢,我们期望在向量空间中将所有的向量一次加减完成而只算一次函数 $\exp()$ 。但是,这个等式成立的条件是 $\theta_1^\wedge \theta_2^\wedge = \theta_2^\wedge \theta_1^\wedge$ 。显然,对于矩阵乘法, $\theta_1^\wedge \theta_2^\wedge \neq \theta_2^\wedge \theta_1^\wedge$, 所以

$$\exp(\theta_1^\wedge) \exp(\theta_2^\wedge) \neq \exp((\theta_1 + \theta_2)^\wedge).$$

Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) 公式告诉我们,当处理两个矩阵之积时,它们会产生一些由李括号组成的余项。直观上的理解,我们在上式的两端同时乘上单位矩阵 I , 方程左边,旋转向量 θ_1 收回并作用到幺元上,于是姿态点从幺元出发,沿测地线到达新的姿态点,我们称之为 \mathbf{x}_1 ,接着旋转向量 θ_2 收回并作用到 \mathbf{x}_1 上,于是姿态点从 \mathbf{x}_1 出发,沿测地线到达新的姿态点,我们称之为 \mathbf{x}_2 ,前后两条测地线的方向并不相同。如果我们直接从幺元出发,沿测地线到达 \mathbf{x}_2 姿态点,那么在流形上我们将看到球面上的一个三角形。注意,我们不能用 $\log()$ 函数将前两条测地线展开 (unwrap) 到向量空间并相加, $\theta_1 + \theta_2$, 这个运算不可行,这是因为局部切空间发生了切换,第二次旋转是在 \mathbf{x}_1 姿态点上建立局部切空间进行计算,而第一次和第三次旋转是在幺元处的切空间进行计算,两处局部切空间产生的差异就是那些余项。(fig3d-05.pdf)



但是通过分析 BCH 公式,当 θ_1 或 θ_2 为小量时,公式可以做一些近似化简,从上面的直观理解也可以看出,当有一个向量为小量时,剩下两个向量就很相近。因为在工程中,增量向量通常是小量,而原有的状态通常是大的量,因此近似方程很常用。对于旋转矩阵 R 的化简,还会涉及到全局或局部坐标系选择的问题。因此通常约定是,小量在右边叫右乘,表示从机体坐标系变换到惯性坐标系的旋转,用 R_B^I 表示,所以有

$$R_B^I(\theta_1) R_B^I(\theta_2) \approx R_B^I(\theta_1) (I + [\theta_2 \times]),$$

小量在左边叫左乘,表示从惯性坐标系变换到机体坐标系的旋转,用 R_I^B 表示,所以有

$$R_I^B(\theta_1) R_I^B(\theta_2) \approx (I - [\theta_1 \times]) R_I^B(\theta_2),$$

这些都是应用旋转矩阵 R 当 $\theta \rightarrow 0$ 时的简化方程。

2.6 几种常见的映射方法

在很多参考文献里，流形的收回 (retraction) 操作所选择指数映射函数 $\exp()$ ，或大写指数映射函数 $\text{Exp}()$ 的运算和常见的四元数形式关联为

$$\begin{aligned}\text{Exp}(\boldsymbol{\theta}) &= \exp([\boldsymbol{\theta} \times]) \\ &= \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \mathbf{u}\end{aligned}$$

其实这个收回 (retraction) 操作，在不同的论文和项目里，有不同的版本。这个 $1/2$ 系数，是因为四元数 S^3 流形对 $SO(3)$ 是双倍覆盖。于是在旋转矩阵形式的版本中使用的是全角 $\boldsymbol{\theta}$ ，而在四元数版本中使用的是半角 $\boldsymbol{\theta}/2$ 。

此外，因为在工程中 IMU 的取样间隔时间 Δt 很小，所以一般增量角度 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega} \Delta t$ 都很小，所以都会应用三角函数小角度近似的方法。于是在不同的论文出现了下面几种映射方法，(正式的是前 4 种，后两种为近似值)：

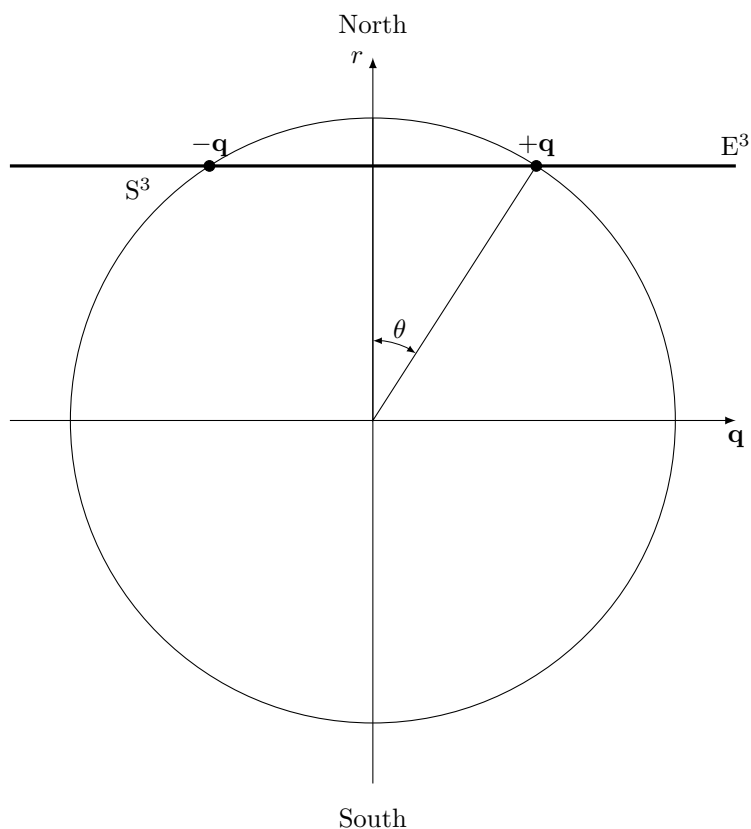
1. 正交投影 (Orthographic, O)
2. Rodrigues 参数 (Rodrigues Parameters, RP)
3. 改进型 Rodrigues 参数 (Modified Rodrigues Parameters, MRP)
4. 旋转向量 (Rotation Vector, RV)
5. 二阶近似值 (second-order approximation)。上述 4 种方法的二阶近似值。
6. 一阶近似值 (first-order approximation)。上述 4 种方法的一阶近似值。

| | | |
|---|-----|--|
| 1 | O | $\begin{pmatrix} \sqrt{1 - \ \boldsymbol{\theta}\ ^2/4} \\ \boldsymbol{\theta}/2 \end{pmatrix}$ |
| 2 | RP | $\frac{1}{\sqrt{4 + \ \boldsymbol{\theta}\ ^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ \boldsymbol{\theta} \end{pmatrix}$ |
| 3 | MRP | $\frac{1}{16 + \ \boldsymbol{\theta}\ ^2} \begin{pmatrix} 16 - \ \boldsymbol{\theta}\ ^2 \\ 8\boldsymbol{\theta} \end{pmatrix}$ |
| 4 | RV | $\begin{pmatrix} \cos(\boldsymbol{\theta}/2) \\ (\boldsymbol{\theta}/\ \boldsymbol{\theta}\) \sin(\boldsymbol{\theta}/2) \end{pmatrix}$ |
| 5 | 2nd | $\begin{pmatrix} 1 - \ \boldsymbol{\theta}\ ^2/8 \\ \boldsymbol{\theta}/2 \end{pmatrix}$ |
| 6 | 1st | $\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\theta}/2 \end{pmatrix}$ |

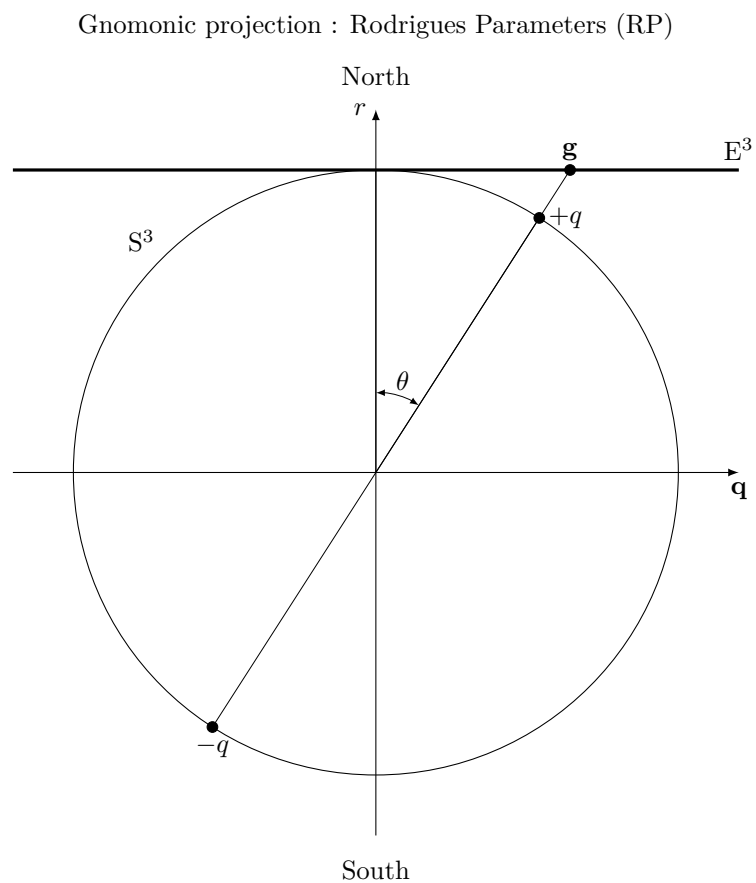
前三种是我们所知道的球极平面投影 (stereographic projection){这三种投影分别具体称为正交投影 (Orthographic)、日晷投影 (Gnomonic) 和球极平面投影 (Stereographic)}。最后是所谓的等距投影 (Equidistant)。下面我们通过图形理解这些映射。

第一种，正交投影 (Orthographic)，其中 E^3 空间在 $r \in [0, 1]$ 之间截取投影 (fig2d-21.pdf)

Orthographic projection : Orthographic (O)

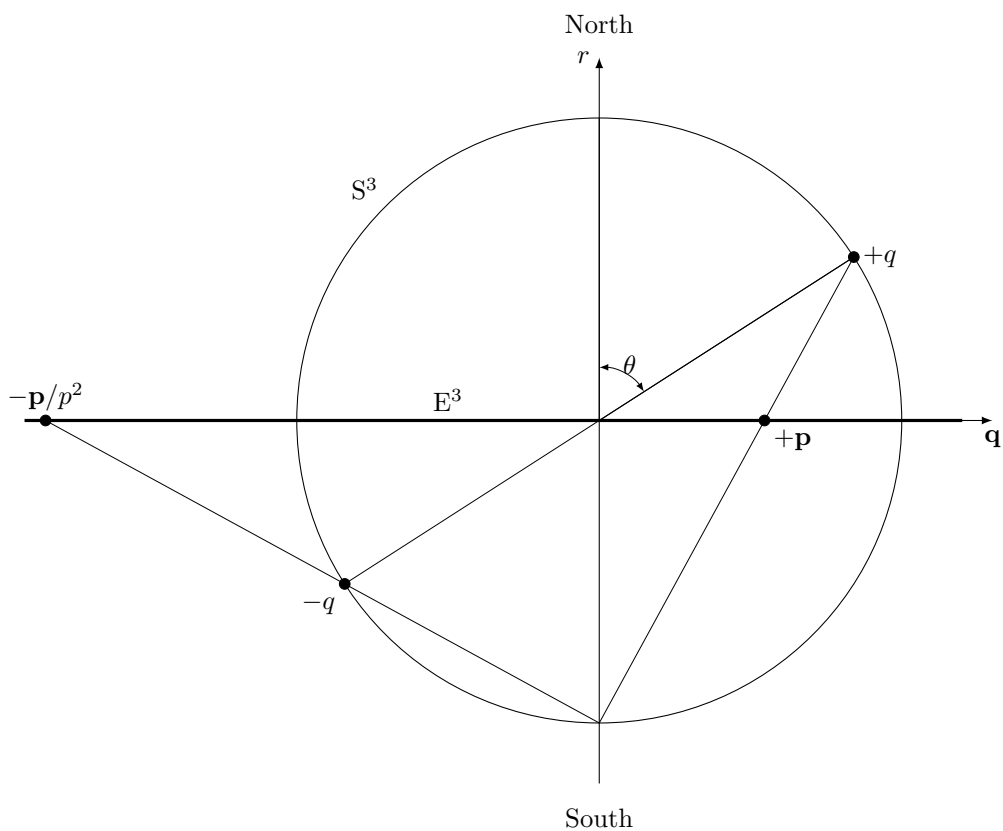


第二种, Rodrigues 参数 (Rodrigues Parameters, RP), 又称 Gibbs 向量。这是Dr. F. Landis Markley的最爱, 因为它是单映射, $+q$ 和 $-q$ 都映射到同一个 Gibbs 向量, 对于同一个旋转来说, 这是 $1:1$ 表示。并且因为 $\tan(\cdot)$ 函数和高斯分布有一点点相像, 就是两端有无限长尾。所以 (NASA) 大佬们的论文里更喜欢选择这个映射。在文献 [2] 里也偏向采用这种映射。这种映射属于日晷投影 (Gnomonic), E^3 空间位于 $r = 1$, 通过圆心的两个单位四元数投影到同一个 Gibbs 向量 (fig2d-22.pdf)



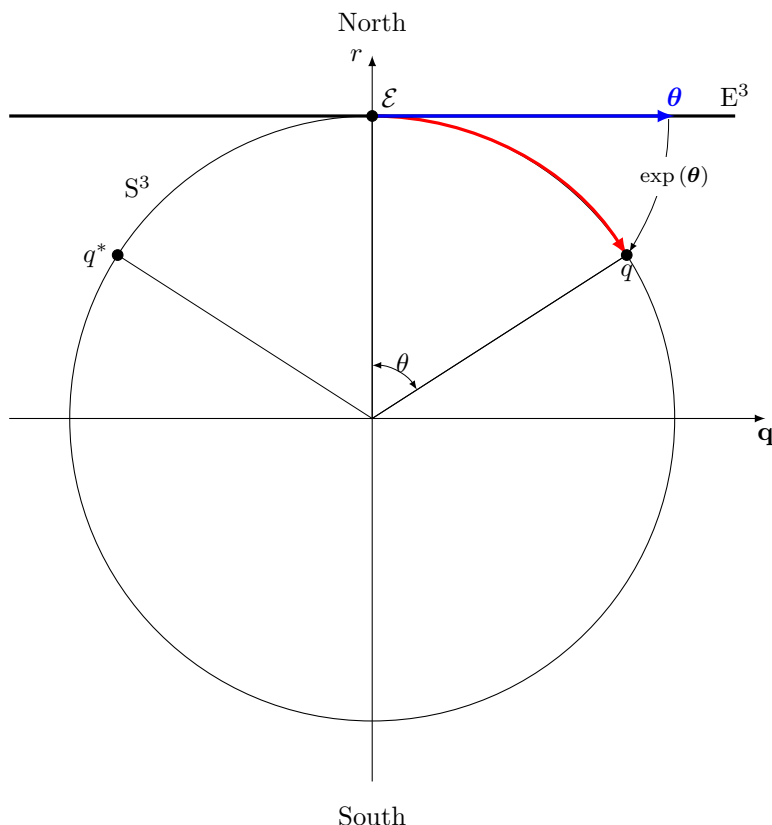
第三种，改进型 Rodrigues 参数 (Modified Rodrigues Parameters, MRP)。这种映射与旋转向量映射有许多共同的特点，包括离散跳跃的需求，但又避免了超越函数。这种映射属于球极平面投影 (Stereographic)， E^3 空间位于 $r = 0$ ， S^3 的一个半球在三维 \mathbf{p} 空间中投射到单位球体的内部，而 S^3 的另一个半球则投射到单位 \mathbf{p} -sphere 的外部。(fig2d-23.pdf)

Stereographic projection : Modified Rodrigues Parameters (MRP)



第四种, 旋转向量 (Rotation Vector, RV)。实际上就是指数映射函数 $\exp()$, 在旋转矩阵形式的版本中使用的是全角 θ , 而在四元数版本中使用的是半角 $\theta/2$ 。这种映射属于等距投影 (Equidistant), E^3 空间位于幺元处, 并且在矩阵版本中向量的模长和测地线 (geodesic) 的弧长是 1 : 1 关系 (fig2d-24.pdf)

Equidistant projection : Rotation Vector (RV) - 1 : 1



之所以同时存在这么多种映射关系，这往往体现了不同理论之间，还有理论和工程之间的差异。

如果说前三种映射关系是第四种的某种近似，因为这四种映射关系在零点附近的小角度情况下数值很接近，但大角度之后就明显不再是球面。如果球面是完美模型，选择前三种映射关系可能是因为某种原因，例如选择正交投影 (Orthographic) 是因为它可以简单地把单位四元数转换为轴-角向量，选择 Rodrigues 参数 (RP) 是因为它是单映射，选择改进型 Rodrigues 参数 (MRP) 是因为它避免了超越函数的运算。此外，因为在工程中 IMU 的采样间隔时间 Δt 很小，所以一般增量角度 $\theta = \omega \Delta t$ 都很小，所以都会应用三角函数小角度近似的方法。

2.7 伴随与伴随矩阵

位姿元素形成一个群，它们之间只有乘法操作。因为矩阵乘法不可交换，所以坐标系的选择会影响乘法的顺序。

旋转矩阵有 3 种用途：

1. 表示姿态；
2. 进行坐标系变换，通过向量或坐标系来表示；
3. 对向量或坐标系进行旋转变换。

位姿变换矩阵同样有 3 种用途：

1. 表示刚体的位姿 (位置和姿态)；

2. 进行坐标系变换，通过向量或坐标系来表示；
3. 表示向量或坐标系的位移。

在以上这些运算中，矩阵与向量的乘法比较容易理解，不会弄错。如果是两个矩阵相乘，哪个代表当前姿态或位姿，哪个代表运动变换，则容易搞混，所以有必要澄清一下。

如果有姿态矩阵 \mathbf{R}_{sb} 表示 $\{b\}$ 相对于 $\{s\}$ 的姿态，并有将 $\{b\}$ 围绕在 $\{s\}$ 中的单位旋转轴 $\hat{\omega}_s$ 旋转角度 θ 的运动，表示为 $\mathbf{R} = \text{Rot}(\hat{\omega}_s, \theta)$ 。新的姿态 \mathbf{R}'_{sb} 计算为

$$\mathbf{R}'_{sb} = \begin{cases} \mathbf{R}\mathbf{R}_{sb} & \text{premultiply, rotate by } \mathbf{R} \text{ in } \{s\} \text{ frame} \\ \mathbf{R}_{sb}\mathbf{R}^{-1} & \text{postmultiply, rotate by } \mathbf{R}^{-1} \text{ in } \{b\} \text{ frame} \end{cases}$$

$$\hat{\omega}_b = \mathbf{R}^{-1}\hat{\omega}_s$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \text{Rot}(\hat{\omega}_b, \theta)$$

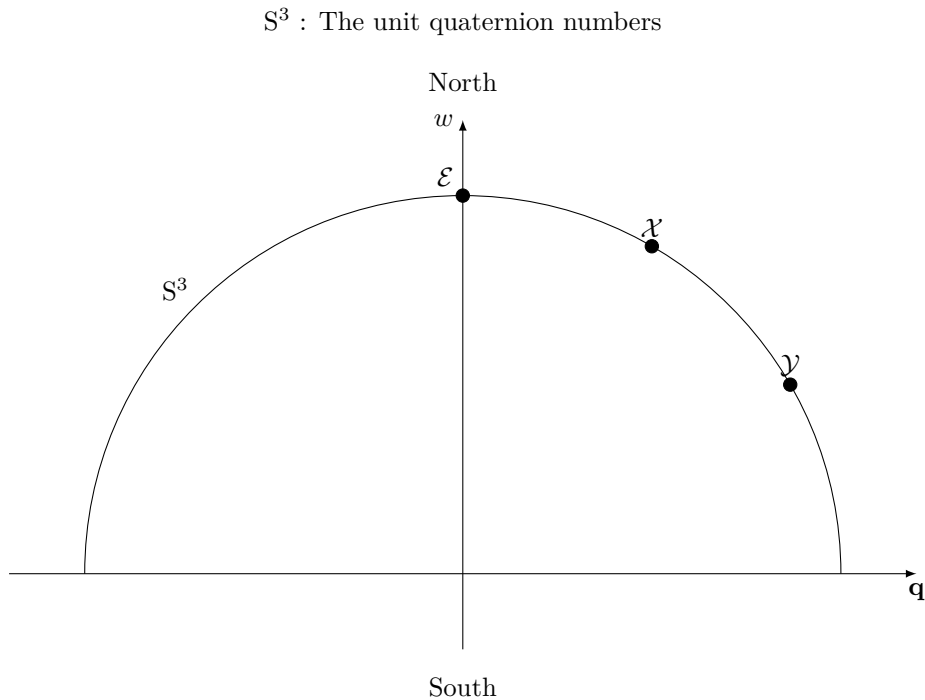
也就是，左乘 $\mathbf{R} = \text{Rot}(\hat{\omega}_s, \theta)$ 会得到绕参考坐标系中的转轴 $\hat{\omega}_s$ 的转动，右乘 $\mathbf{R}^{-1} = \text{Rot}(\hat{\omega}_b, \theta)$ 会得到绕机体坐标系中的转轴 $\hat{\omega}_b$ 的转动。两者可以表达空间中的同一个转动。

同样的，用位姿矩阵 \mathbf{T}_{sb} 表示 $\{b\}$ 相对于 $\{s\}$ 的位姿，并用位姿齐次变换矩阵 $\mathbf{T} = (\mathbf{R}, \mathbf{r})$ 表示对位姿 \mathbf{T}_{sb} 的作用。新的位姿 \mathbf{T}'_{sb} 计算为

$$\mathbf{T}'_{sb} = \begin{cases} \mathbf{T}\mathbf{T}_{sb} & \text{premultiply, transform by } \mathbf{T} \text{ in } \{s\} \text{ frame} \\ \mathbf{T}_{sb}\mathbf{T}^{-1} & \text{postmultiply, transform by } \mathbf{T}^{-1} \text{ in } \{b\} \text{ frame} \end{cases}$$

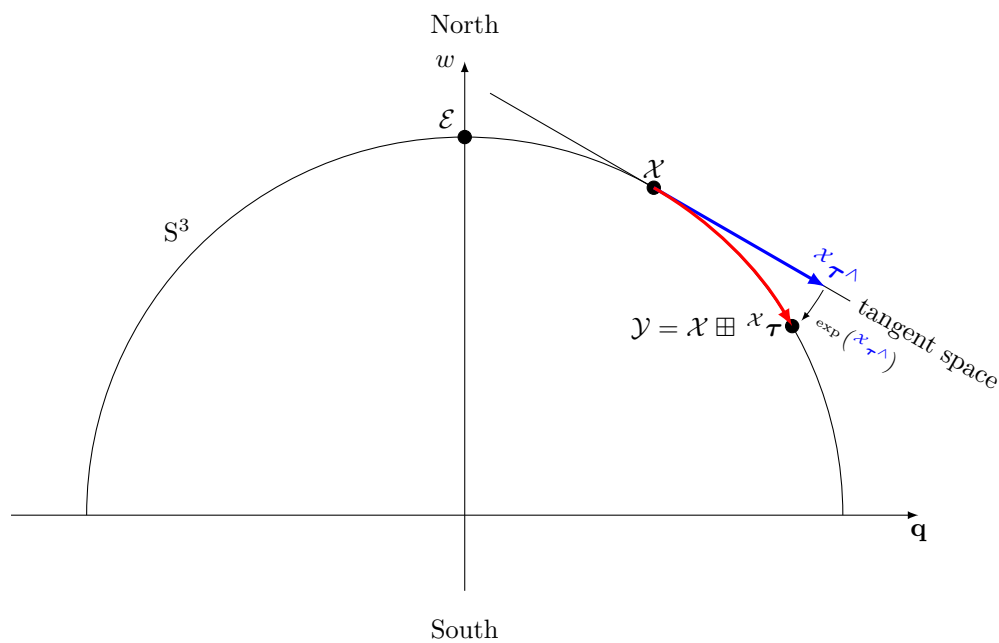
在这里的左乘和右乘与上面有相似的意义。因为从附着在机体中的传感器获得的测量值为机体坐标系中的数值， ω_b 和 \mathbf{v}_b ，这时计算出来的是 \mathbf{R}_b 和 \mathbf{T}_b ，所以在工程中右乘用得较多一些。

空间坐标系中的元素与机体坐标系中的元素要相互转换，就需要用到伴随矩阵 (adjoint matrix)。我们可以用下面的例子理解伴随矩阵的作用。在流形中的元素 \mathcal{X} 如何变换到 \mathcal{Y} ? (adj-01.pdf)



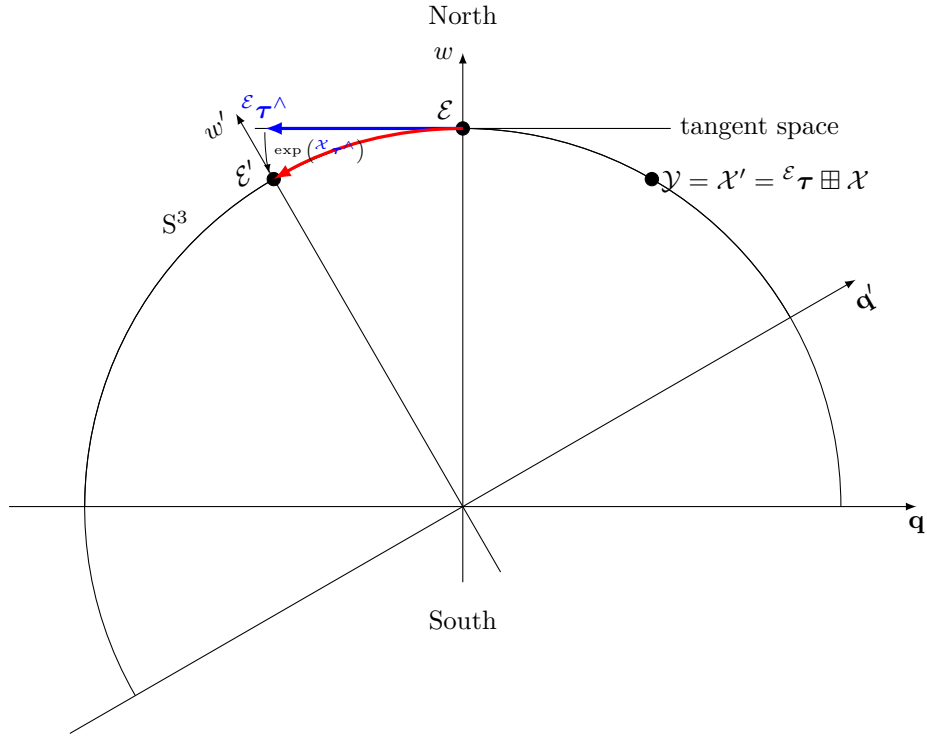
我们有两种路径实现这个变换，第一种是在 \mathcal{X} 点处建立局部切空间，并在其中计算增量，然后将增量用指数映射函数 $\exp(\cdot)$ 收回到流形中，并将其右乘到 \mathcal{X} 点上，则 \mathcal{X} 点的元素就沿着测地线移动到 \mathcal{Y} 点。因为局部切空间处处相同，所以增量是相对于参考坐标系定义的，但它们不需要指定结果坐标系。(adj-02.pdf)

S^3 : The unit quaternion numbers

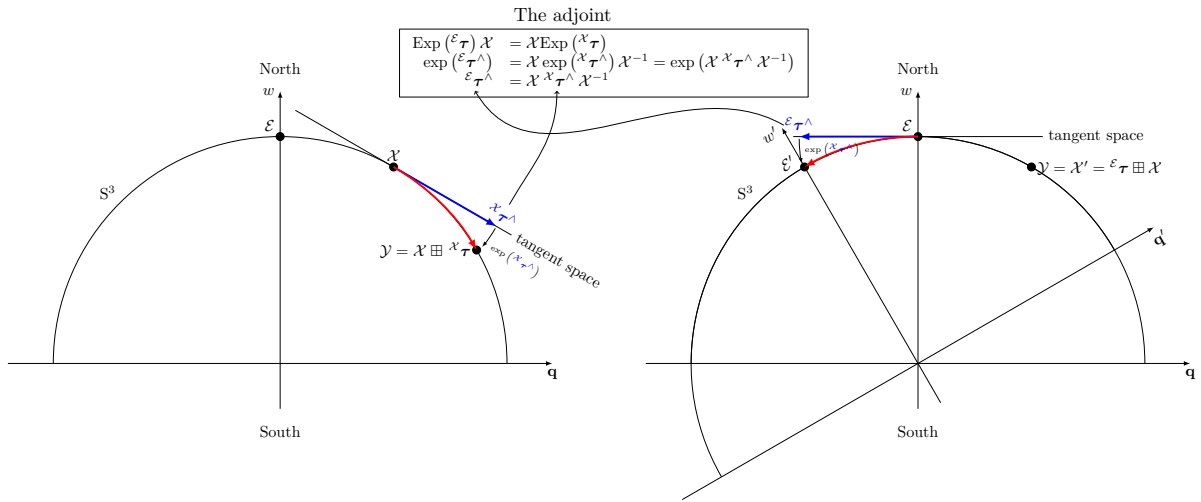


第二种是 \mathcal{X} 点不动，而移动全局坐标系，也就是移动么元 \mathcal{E} ，在新坐标系中 \mathcal{X} 点就描述为 \mathcal{Y} 点，这就是左乘。(adj-03.pdf)

S^3 : The unit quaternion numbers



这两者的关系就是伴随变换 (adj-04.pdf)



伴随变换大多应用于将一处切空间中的向量变换到另一处切空间中。

常见李群的伴随矩阵的作用关系见下表: (screw-table2.pdf)

| Space frame | | Transformation | | | Body frame | |
|---|--|---|---|---|--|--|
| Vector (Cartesian space) | Lie algebra (Tangent space) | from $\{b\}$ to $\{s\}$ | Adjoint matrix | from $\{s\}$ to $\{b\}$ | Lie algebra (Tangent space) | Vector (Cartesian space) |
| Spatial angular velocity ω_s | $\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = [\omega_s \times]$ $\dot{\mathbf{R}} = [\omega_s \times] \mathbf{R}$ $\mathbf{R} = \exp([\omega_s \times] \cdot \Delta t)$ | $[\omega_s \times] = \mathbf{R}[\omega_b \times] \mathbf{R}^{-1}$ $[\omega_s \times] = [(\mathbf{R}\omega_b) \times]$ $\omega_s = \mathbf{R}\omega_b$ | $[\text{Ad}_{\mathbf{R}}] = \mathbf{R}$ $\omega_s = \mathbf{R}\omega_b$ $[\text{Ad}_{\mathbf{R}^{-1}}] = \mathbf{R}^{-1}$ $\omega_b = \mathbf{R}^{-1}\omega_s$ | $[\omega_b \times] = \mathbf{R}^{-1}[\omega_s \times] \mathbf{R}$ $\mathbf{R} = \mathbf{R}[\omega_b \times]$ $\omega_b = \mathbf{R}^{-1}\omega_s$ | $\mathbf{R}^{-1}\dot{\mathbf{R}} = [\omega_b \times]$ $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}[\omega_b \times]$ $\mathbf{R}^{-1} = \exp([\omega_b \times] \cdot \Delta t)$ | Body angular velocity ω_b |
| Spatial velocity $\mathbf{V}_s = \begin{bmatrix} \omega_s \\ \mathbf{v}_s \end{bmatrix}$ | $\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s^\Lambda \\ [\omega_s \times] & \mathbf{v}_s \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}$ $\dot{\mathbf{T}} = [\mathbf{V}_s^\Lambda] \mathbf{T}$ $\mathbf{T} = \exp([\mathbf{V}_s^\Lambda] \cdot \Delta t)$ | $[\mathbf{V}_s^\Lambda] = \mathbf{T}[\mathbf{V}_b^\Lambda] \mathbf{T}^{-1}$ $\mathbf{V}_s = [\text{Ad}_{\mathbf{T}}] \mathbf{V}_b$ | $[\text{Ad}_{\mathbf{T}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ [\mathbf{r} \times] \mathbf{R} & \mathbf{R} \end{bmatrix}$ $\mathbf{V}_s = [\text{Ad}_{\mathbf{T}}] \mathbf{V}_b$ $[\text{Ad}_{\mathbf{T}^{-1}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{r} \times] & \mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix}$ $\mathbf{V}_b = [\text{Ad}_{\mathbf{T}^{-1}}] \mathbf{V}_s$ | $[\mathbf{V}_b^\Lambda] = \mathbf{T}^{-1}[\mathbf{V}_s^\Lambda] \mathbf{T}$ $\mathbf{V}_b = [\text{Ad}_{\mathbf{T}^{-1}}] \mathbf{V}_s$ | $\mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_b^\Lambda \\ [\omega_b \times] & \mathbf{v}_b \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}$ $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{T}[\mathbf{V}_b^\Lambda]$ $\mathbf{T}^{-1} = \exp([\mathbf{V}_b^\Lambda] \cdot \Delta t)$ | Body velocity $\mathbf{V}_b = \begin{bmatrix} \omega_b \\ \mathbf{v}_b \end{bmatrix}$ |

2.8 流形中的不确定性

收回 (retraction) 是定义流形不确定性的基本概念。因为直接在流形上定义不确定性比较麻烦，并且难以计算。一般的想法是，我们可以定义切空间上的分布，并使用收回将它们映射回流形上。例如，我们可以在以 \mathbf{p}_1 为中心的切空间中定义一个零均值的高斯变量 $\eta \sim \text{Gaussian}(\mathbf{0}_{n \times 1}, \Sigma)$ ，并使用收回：

$$\begin{aligned} \text{Gaussian}(\mathbf{p}_1, \eta) &:= \text{retract}_{\mathbf{p}_1}(\eta) \\ &= \mathbf{p}_1 \text{Exp}(\eta) \end{aligned}$$

通过收回，我们可以在以 \mathbf{p}_1 为中心的切空间上定义高斯分布，并将它们映射回流形上，从而在具有均值 \mathbf{p}_1 和协方差 $\text{Cov}(\eta) = \Sigma$ 的流形上构造高斯分布。通过这样的定义，我们可以重新获取当前线性化点的高斯分布。

与上面一致，我们选择在右侧的收回作用。也是为了统一使用右乘的形式，根据各个公式的特点，我们将使用李群伴随的概念，将应用在右侧的增量或校正，与左侧的增量或校正联系起来。这样的性质将允许我们用代数方法处理李群定义的不确定性，并获得不同协方差变换的表达式。我们将集中讨论 3D 位姿，即 $\text{SE}(3)$ ，因为它具有广泛的适用性，但是类似的定义也应该适用于其它李群，因为它们主要依赖于伴随的定义。

传播不确定性有位姿组合 (Pose Composition)、位姿求逆 (Pose Inverse) 和相对位姿 (Relative Pose) 这三种操作。假设位姿是独立的或是相关的，有两种类似的推导。对于位姿相关的公式的推导，需要用到 BCH 公式的四阶交叉项的展开式，复杂很多，精度会有提高，参见参考文献 [3,5]。最后可以根据精度和计算量的要求进行选择。(adj-table.pdf)

| | Pose Composition | Pose Inverse | Relative Pose |
|-------------|--|---|---|
| Independent | $\mathbf{T}_{ab} = \exp(\hat{\xi}_{ab}^\wedge) \bar{\mathbf{T}}_{ab} \quad \bar{\mathbf{T}}_{ab} \in \text{SE}(3), \hat{\xi}_{ab}^\wedge \in \mathfrak{se}(3)$ | | |
| | $\begin{aligned} \xi_{ij} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{ij}) \\ \xi_{jk} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{jk}) \end{aligned}$ | $\xi_{ij} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{ij})$ | $\begin{aligned} \xi_{ij} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{ij}) \\ \xi_{jk} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{jk}) \end{aligned}$ |
| | $\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{ik} &\triangleq \bar{\mathbf{T}}_{ij} \bar{\mathbf{T}}_{jk} \\ \Sigma_{ik} &\approx \Sigma_{ij} + \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}} \Sigma_{jk} \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}}^\top \end{aligned}$ | $\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{ji} &\triangleq \bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1} \\ \Sigma_{ji} &\approx \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1}} \Sigma_{ij} \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1}}^\top \end{aligned}$ | $\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{jk} &\triangleq \bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1} \bar{\mathbf{T}}_{ik} \\ \Sigma_{jk} &\approx \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1}} \Sigma_{ij} \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1}}^\top + \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1}} \Sigma_{ik} \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1}}^\top \end{aligned}$ |
| Relative | $\mathbf{T}_{ab} = \exp(\hat{\xi}_{ab}^\wedge) \bar{\mathbf{T}}_{ab} \quad \bar{\mathbf{T}}_{ab} \in \text{SE}(3), \hat{\xi}_{ab}^\wedge \in \mathfrak{se}(3)$ | | |
| | $\begin{aligned} \xi &= \begin{bmatrix} \xi_{ij}^\top, \xi_{jk}^\top \end{bmatrix}^\top \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma) \\ \Sigma &= \begin{bmatrix} \Sigma_{ij} & \Sigma_{ij,jk} \\ \Sigma_{ij,jk}^\top & \Sigma_{jk} \end{bmatrix} \end{aligned}$ | $\xi_{ij} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{ij})$ | $\begin{aligned} \xi &= \begin{bmatrix} \xi_{ij}^\top, \xi_{jk}^\top \end{bmatrix}^\top \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma) \\ \Sigma &= \begin{bmatrix} \Sigma_{ij} & \Sigma_{ij,jk} \\ \Sigma_{ij,jk}^\top & \Sigma_{jk} \end{bmatrix} \end{aligned}$ |
| | $\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{ik} &\triangleq \bar{\mathbf{T}}_{ij} \bar{\mathbf{T}}_{jk} \\ \Sigma_{ik} &\approx \Sigma_{ij} + \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}} \Sigma_{jk} \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}}^\top + \Sigma_{ij,jk} \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}}^\top + \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}} \Sigma_{ij,jk}^\top \end{aligned}$ | $\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{ji} &\triangleq \bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1} \\ \Sigma_{ji} &\approx \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1}} \Sigma_{ij} \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1}}^\top \end{aligned}$ | $\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{jk} &\triangleq \bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1} \bar{\mathbf{T}}_{ik} \\ \Sigma_{jk} &\approx \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1}} \Sigma_{ij} \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1}}^\top + \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1}} \Sigma_{ik} \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1}}^\top - \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1}} \Sigma_{ij,jk} \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1}}^\top - \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1}} \Sigma_{ij,jk}^\top \text{Ad}_{\bar{\mathbf{T}}_{ij}^{-1}}^\top \end{aligned}$ |

3 应用李群的基本思路

3.1 坐标系

表示姿态的单位四元数 q 是嵌入 \mathbb{R}^4 空间中的 S^3 球面，球面上的每一个点都可以构建三维空间。这种球面在我们的三维世界里看不到，虽然比喻和事实必然有差异，但我们可以用篮球比喻这种 S^3 球面。机体的任意姿态都是在这种球面上的点。姿态变化，则当前姿态点就在球面上移动。

要研究姿态，我们首先要建立坐标系。那么抛开外部定义的坐标系，我们能不能根据球面自身的特性研究机体的运动？答案是肯定的，我们可以用李群的方法分析和解决问题。我们首先在幺元上的切空间建立全局坐标系，又称原点坐标系，其它点的切空间为局部坐标系。因为李群是光滑流形，切空间是线性空间，并且其结构处处相同，都是幺元处的结构。

因为切空间是线性空间，所以可以复用各种成熟的线性优化算法，比如卡尔曼滤波算法。而附着在机体上的 IMU 传感器，其所获得的是局部的笛卡尔坐标系数据，这些数据用生成元变换到切空间中参与计算。最终计算所得的向量或矩阵，通过指数映射函数 $\exp()$ 的变换，就进入流形空间中。虽然该对象是相对于参考坐标系定义的，但因为切空间的结构处处相同，所以它们不需要指定结果坐标系就可以进行计算，它们只需要作用到当前姿态点上，则当前姿态点就移动到新的姿态上，所走的路径为测地线，这种运动就是旋转。

那么在幺元处这个原点坐标系和外部定义的全局坐标系有什么关系呢？

如果我们以重力向量做为观测向量进行递归校正，则在幺元处的原点坐标系的 z 轴就与重力向量平行，因而校正出以重力向量为法向量的当地水平面，但是因为没有其它校正数据，该水平面的 x/y 轴还可以绕重力向量旋转，因此不能校正出北/东方向。如果我们以磁力计或以 GPS 类的全局数据进行递归校正，则可以进一步校正出北/东方向。也就是通过递归校正，在幺元处的原点坐标系与当地的北/东/地的全局坐标系重合，因此附着在机体上的 IMU 测量得到的局部坐标系的数据，通过伴随矩阵变换到在幺元处的原点坐标系，就得到机体相对于当地的北/东/地的全局坐标系的姿态。

3.2 研究对象

目前应用李群的算法直接处理的对象，大多是扰动、增量、误差等等这种小量。因为要无奇点地表示三维空间中的刚体运动为旋转群 $SO(3)$ 和运动群 $SE(3)$ ，就有过度参数化的问题，需要施加约束，则只有乘法是封闭的。但是当数据采样频率足够快时，噪声扰动、增量或误差等等这些小量足够小，就在零点附近抖动，此时它们的性质近线性，并且远离奇点，所以可以用向量表示。并且我们假定位姿的变化是随机过程，是增量或误差这些小量的变化符合高斯分布。

借助于计算机的快速运算，我们是用递归方法求解问题。因此我们很自然地把所求解的状态量分为大的标称量和小的增量两个部分。对于线性系统，在 i 时刻的外推状态向量 $\bar{\mathbf{x}}_i$ 由上一时刻的最优估计的状态向量 $\hat{\mathbf{x}}_{i-1}$ 和当前时刻的真实增量 $\Delta \mathbf{x}_i$ ，以及测量噪声 \mathbf{N}_i 组合而成

$$\bar{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_{i-1} + \Delta \mathbf{x}_i + \mathbf{N}_i$$

但是旋转群和运动群不能用加法，只能用乘法，因此对于我们要估计的位于李群中的状态 \mathbf{x} ，上式变为

$$\bar{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_{i-1} \times \Delta \mathbf{x}_i \times \mathbf{N}_i$$

其中 N_i 是由噪声向量变换来的噪声矩阵。虽然在测量增量 $\Delta \bar{\mathbf{x}}_i = \Delta \mathbf{x}_i \times N_i$ 中的噪声无法分离，但我们可以根据传感器的噪声方差 η 估计出最优误差 $\delta \mathbf{x}_i = \text{Exp}(\text{function}(\eta))$ ，将其作用到外推状态 $\bar{\mathbf{x}}_i$ 上以消除误差，则当前状态 $\hat{\mathbf{x}}_i$ 为最优估计，也就是在现有条件下最接近真实值 \mathbf{x}_i 的值。用新的符号表示就是

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_{i-1} \oplus \Delta \bar{\mathbf{x}}_i \oplus \delta \mathbf{x}_i$$

我们是在局部切空间中计算 $\Delta \bar{\mathbf{x}}_i$ 和 $\delta \mathbf{x}_i$ 这些小量，因为 IMU 传感器的数值及其噪声是在局部笛卡尔坐标系中测量得到，所以这些数据需要用生成元变换到局部切空间中以计算 $\Delta \bar{\mathbf{x}}_i$ 和 $\delta \mathbf{x}_i$ 。因为当前状态 $\hat{\mathbf{x}}_i$ 已经最优估计，所以当前误差及其协方差需要重置操作。

3.3 研究方法

这些基于高斯分布的最优估计，大多是某种递归的非线性最小二乘法。根据我们所认为的系统非线性的程度不同，根据我们所要的精度和算力的平衡，我们可以选择标准卡尔曼滤波器，EKF，UKF，粒子滤波器或因子图等等最优算法估计机体的位姿状态。

对于最小二乘法的理解，它是对超定方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一个最优近似解 $\hat{\mathbf{x}}$ 。我们可以基于矩阵的 QR 分解去直观地理解最小二乘法：

- 矩阵 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $m > n$, 是满秩，瘦型矩阵。
- 将其进行 QR 分解， $A = QR$ ，其中 $Q^T Q = I$ ，并且 $R \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为上三角矩阵且可逆。
- 伪逆矩阵为

$$(A^T A)^{-1} A^T = (R^T Q^T Q R)^{-1} R^T Q^T = R^{-1} Q^T$$

所以

$$\hat{\mathbf{x}} = R^{-1} Q^T \mathbf{b}$$

- 投影到 A 的列空间 $C(A)$ 中的矩阵为

$$A (A^T A)^{-1} A^T = A R^{-1} Q^T = Q Q^T$$

- 矩阵 A 的完全 QR 因子分解为：

$$A = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中， $\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 且为正交矩阵， $R_1 \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为上三角矩阵且可逆。

- 与正交矩阵相乘不改变矩阵范数，所以

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{b} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}^T \mathbf{b} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} R_1 \mathbf{x} - Q_1^T \mathbf{b} \\ -Q_2^T \mathbf{b} \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \|R_1 \mathbf{x} - Q_1^T \mathbf{b}\|^2 + \|Q_2^T \mathbf{b}\|^2 \end{aligned}$$

- 这显然可以通过选择最小化 \hat{x} ，即上式左边第一项为 0：

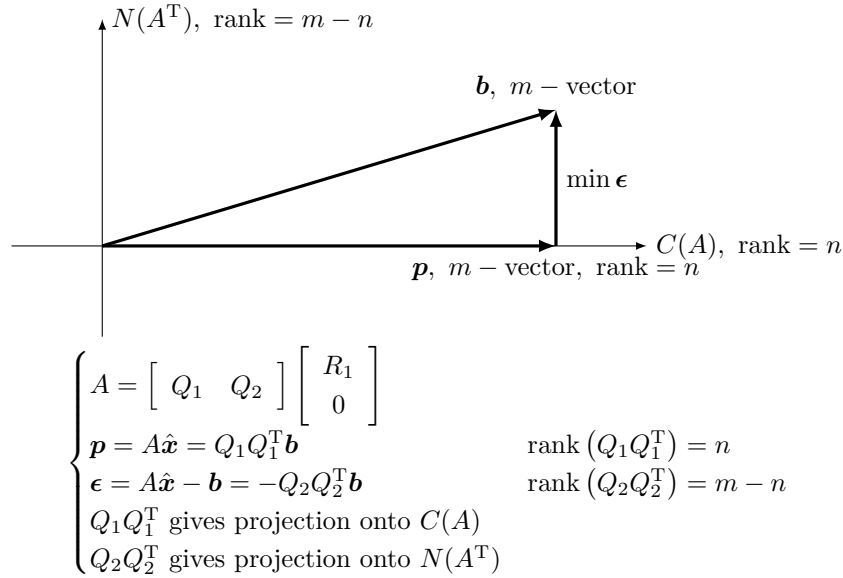
$$\hat{x} = R_1^{-1} Q_1^T b$$

- 则 x 的最优化的残差为

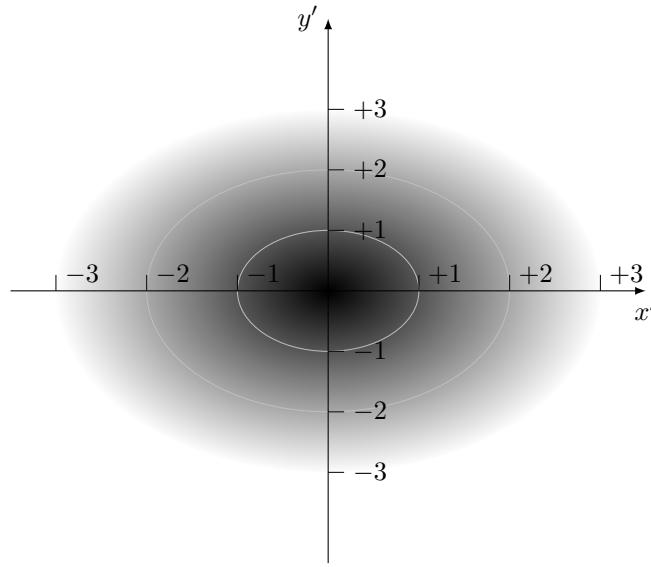
$$\epsilon = A\hat{x} - b = -Q_2 Q_2^T b$$

- 矩阵 $Q_1 Q_1^T$ 给出了到 A 的列空间 $C(A)$ 中的投影。
- 矩阵 $Q_2 Q_2^T$ 给出了到列空间的正交空间 $C(A)^\perp$ ，即 A^T 的零空间 $N(A^T)$ 的投影。
- 列空间 $C(A)$ 的满秩为 n ，则零空间 $N(A^T)$ 的秩为 $m - n$ ，两者的秩之和为 m 。

上述关系的示意图如下：



接着是对带权重的最小二乘法的理解。我们假定数据按照高斯分布，并且系统噪声为零均值的白高斯噪声。是测量传感器的噪声方差将白化数据变成了一个椭圆。噪声协方差矩阵中的特征向量指示了数据扩散的方向，特征值指示了扩散的程度。



因为各轴的方差不一样，因此各轴的数据扩散程度也不一样，体现在数据刻度不一样。这时直接在这样的数据集合上进行估计并不是最优估计。因此我们需要引入权重矩阵 W 以校正这种变形。经过推导，数据的误差的方差和系统噪声的方差正相关。根据矩阵施瓦兹不等式，我们有

$$Q^T Q \geq (P^T Q)^T (P^T P)^{-1} (P^T Q)$$

其中， $Q^T Q$ 为数据的误差协方差矩阵，因此 Q 为误差的标准差矩阵。矩阵 P 为原始量测矩阵 C 经过权重矩阵 W 校正过后新的量测矩阵，以抵消系统噪声的协方差矩阵 R 的影响。

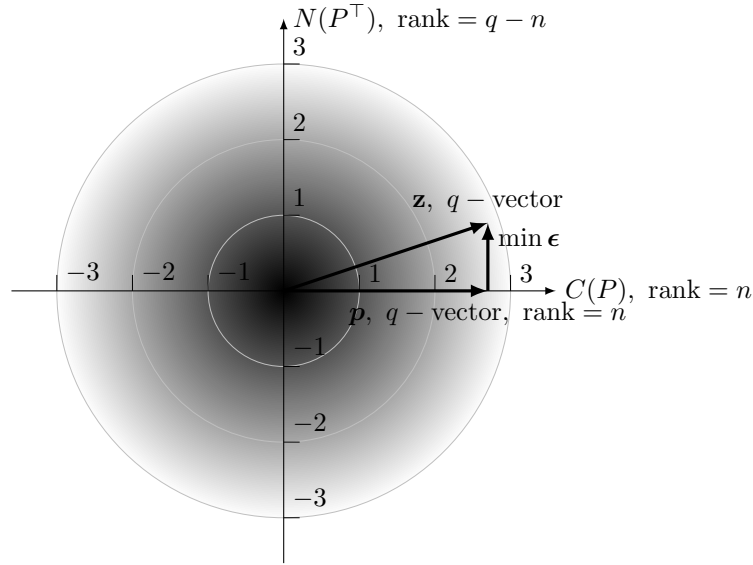
经过一些繁琐的矩阵代数运算，最终得到的最优权重矩阵为 $\hat{W} = R^{-1}$ ，因此对冲了系统噪声的影响，这很符合直觉。这时上述不等式的等号成立，数据的误差最小， $Q^T Q = (P^T P)^{-1}$ 。此时 $P = (R^{1/2})^{-1} C$ ，其中标准差的倒数 $(R^{1/2})^{-1}$ 又称精度矩阵，由此左乘校正了量测矩阵 C ，因此

$$\Sigma = (P^T P)^{-1} = (C^T R^{-1} C)^{-1}$$

被称为最小二乘解的协方差，并且这种二次型矩阵被称为 Fisher 信息矩阵或 Hessian 矩阵。并且 $(C^T R^{-1} C)^{-1} C^T R^{-1}$ 为矩阵 C 的最优权重伪逆矩阵，因为

$$\begin{aligned} (C^T R^{-1} C)^{-1} C^T R^{-1} C &= \left(\left((R^{1/2})^{-1} C \right)^T \left((R^{1/2})^{-1} C \right) \right)^{-1} \left((R^{1/2})^{-1} C \right)^T (R^{1/2})^{-1} C \\ &= (P^T P)^{-1} P^T P \\ &= I \end{aligned}$$

最终，我们是在校正后的白化数据集合上进行最小二乘估计，并且此时的估计为无偏估计。



至于如何计算递归权重，是那些非线性算法具体要考虑的事情。从另一方面理解，最小二乘的解，是将高维满秩空间的解降维到低维的列空间中的解，并且误差最小。降维以减少运算量也是我们追求的目标之一。而约束的引入又使得所要估计的状态不再是向量而是群，于是最终需要引入李群和李代数，在切空间中计算扰动、增量或误差，然后将其收回并作用到当前流形元素上，于是当前流形元素就是最优估计。

3.4 不确定性的表示

我们定义局部扰动 τ 为在切向量空间 $T_{\bar{\mathcal{X}}}\mathcal{M}$ 中围绕着点 $\bar{\mathcal{X}} \in \mathcal{M}$ 的扰动，使用右结合 (right-) 的 \oplus 和 \ominus ，

$$\mathcal{X} = \bar{\mathcal{X}} \oplus \tau, \quad \tau = \mathcal{X} \ominus \bar{\mathcal{X}} \in T_{\bar{\mathcal{X}}}\mathcal{M}.$$

协方差矩阵可以通过标准期望算子 $\mathbb{E}[\cdot]$ 在 $\bar{\mathcal{X}}$ 处的切空间上正确定义，

$$\Sigma_{\mathcal{X}} \triangleq \mathbb{E}[\tau\tau^\top] = \mathbb{E}[(\mathcal{X} \ominus \bar{\mathcal{X}})(\mathcal{X} \ominus \bar{\mathcal{X}})^\top] \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

这允许我们定义流形上的高斯变量， $\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(\bar{\mathcal{X}}, \Sigma_{\mathcal{X}})$ 。注意，虽然我们写 $\Sigma_{\mathcal{X}}$ ，但协方差还是正切扰动 τ 的协方差。由于 $T\mathcal{M}$ 的维度 m 与 \mathcal{M} 的自由度相匹配，因此这些协方差被很好地定义。

扰动也可以在全局参考中表示，即在原点 $T_{\mathcal{E}}\mathcal{M}$ 处的切空间中，使用左结合 (left-) 的 \oplus 和 \ominus ，

$$\mathcal{X} = \tau \oplus \bar{\mathcal{X}}, \quad \tau = \mathcal{X} \ominus \bar{\mathcal{X}} \in T_{\mathcal{E}}\mathcal{M}.$$

这允许使用在 $\Sigma_{\mathcal{X}}$ 方程中的左结合 (left-) 减号的协方差矩阵的全局规范。因为“水平 (horizontal)”是一个全局规范，因此必须在全局参考中指定 ${}^{\mathcal{E}}\Sigma$ 。

因为全局扰动和局部扰动由伴随方程联系起来，它们的协方差的变换可以用方程

$${}^{\mathcal{E}}\Sigma_{\mathcal{X}} = \mathbf{Ad}_{\mathcal{X}} \Sigma_{\mathcal{X}} \mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}^\top.$$

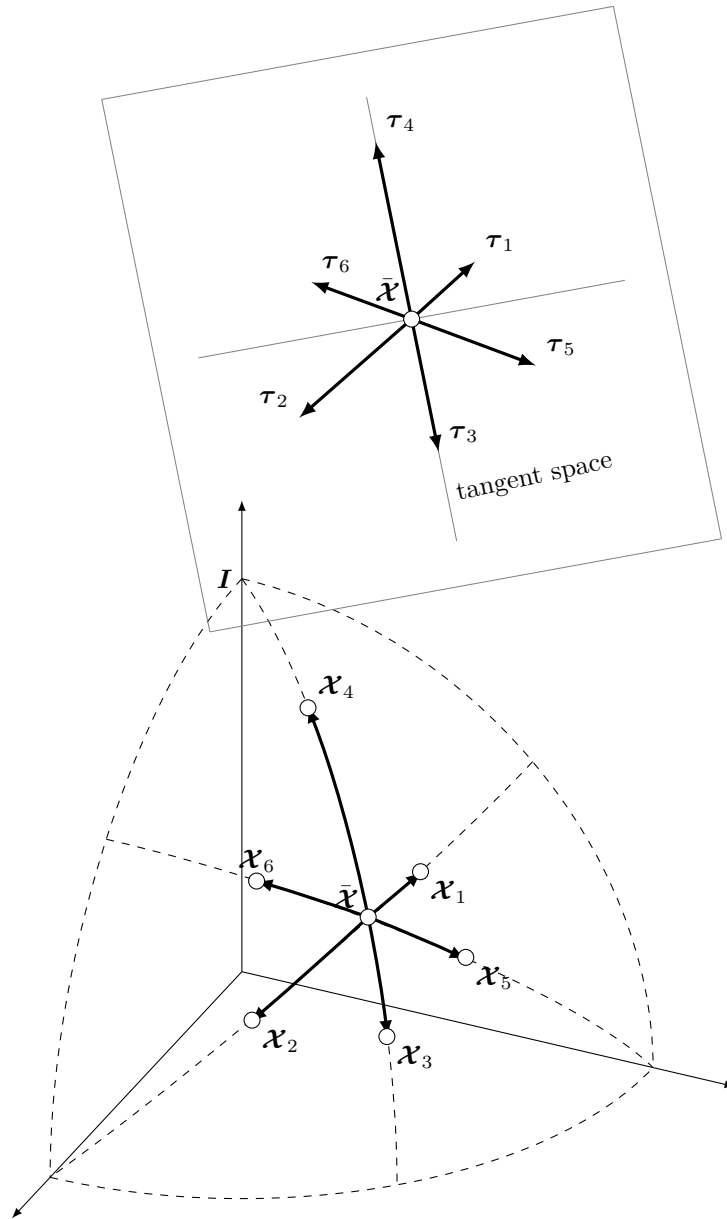
协方差的传播通过函数 $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}; \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$ 只需要用 Jacobian 矩阵方程来线性化点 $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$ 附近 τ 小值的近似方程 $f(\mathcal{X} \oplus {}^{\mathcal{X}}\tau) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(\mathcal{X}) \oplus \frac{{}^{\mathcal{X}}Df(\mathcal{X})}{D\mathcal{X}} {}^{\mathcal{X}}\tau$ 以获得熟悉的公式，

$$\Sigma_{\mathcal{Y}} \approx \frac{Df}{D\mathcal{X}} \Sigma_{\mathcal{X}} \frac{Df^\top}{D\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

那么我们该如何理解与获得这个流形上的均值元素 $\bar{\mathbf{x}}$ ？假设在某个时刻我们测量得到 n 个流形元素 \mathbf{x}_i ，则均值元素 $\bar{\mathbf{x}}$ 有特性

$$\arg \min \sum_{i=1}^n \|(\mathbf{x}_i \ominus \bar{\mathbf{x}})\|^2 = \arg \min \sum_{i=1}^n (\tau_i^\top \tau_i)$$

我们可以用 $SO(3)$ 的均值从几何上直观理解这个问题。找来一个篮球，用笔随便找一个地方均匀点几个点，这就是我们抽样得到的随机旋转。然后我们估摸着在这几个点的中心区域点一个点，这就是我们猜测的平均旋转。我们手上只有直尺，量不了球面上两点的距离。但我们手上还有一些柔软的琴弦 (string)，于是我们用琴弦从猜测点出发，到其中一个随机点的时候用手按住标记，然后拉直了琴弦在直尺上看数据，这就是从猜测点到随机点的距离。把所有的距离相加就是总距离。



刚才那个猜测点是随便猜的。我们按照某种梯度下降方法继续猜下一个点，直到找到总距离最小的那个点。在这期间，我们用琴弦量弧段，就是量测地线。琴弦拉直了用直尺量，就是 $\text{Log}()$ 操

作，或者说展开 (unwrap) 操作，将球面 (流形) 上的元素映射到了向量空间。在向量空间中，距离相加就得到了总距离。因为局部切空间不同，各个点映射到切空间中的向量也不同，所以总距离就有变化。而平均旋转，就是总距离最小的那个点，但我们没有解析解，因为各处局部切空间无法直接相互比较。所以要求全局最小总距离，就只能靠某种方法试探和逼近。

随着切点的不同，在以切点为原点建立的切空间中，各个映射点围成的多面体的体积/面积也不相同。我们需要在流形上试探找到一个点，在该点上建立的切空间中，切点/原点正好是多面体的几何中心，也就是平均向量最小，

$$\left\| \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i \ominus \bar{\mathbf{x}}) \right\|^2 = 0$$

这样从原点出发到各个映射点的总距离最小，这时各个映射点围成的多面体的体积/面积也最小。这实际上也是施瓦兹不等式的一个应用。但是该点没有解析解，只能靠搜索找到。

在卡尔曼滤波器这样的递归算法中，协方差 $\Sigma_{\mathbf{x}}$ 的传播通过时间更新和测量更新步骤中在局部坐标系中计算，而最优估计值 $\hat{\mathbf{x}}_i$ 可以认为是由多种传感器的测量值以其噪声为权重进行校正后再进行计算的均值元素。

3.5 不确定性与概率分布

如果我们在局部切空间中有协方差矩阵 $\Sigma_{\mathbf{x}}$ ，在卡尔曼滤波器中称为 \mathbf{P} 矩阵，表示最小二乘法的解的不确定性。我们知道协方差矩阵 \mathbf{P} 所代表的概率分布在空间中张成一个椭球，其中矩阵的特征向量指示数据扩散方向，而特征值，即方差，指示扩散程度，矩阵中的协方差项指示椭球在原点坐标系中的旋转角度。协方差矩阵 \mathbf{P} 的概率分布的中心就位于局部切空间中的原点上。我们要表示流形上位姿点 \mathbf{x} 周围的概率分布，或者说均值位姿的不确定性，就用公式

$$\begin{aligned} \text{Gaussian}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) &:= \text{retract}_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\eta}) \\ &= \mathbf{x} \text{Exp}(\boldsymbol{\eta}) \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}$ 为协方差矩阵 \mathbf{P} 对角线上的方差向量，因为非对角线上的协方差项只影响旋转，不会影响扩散程度。用位姿点上的概率分布，根据位姿组合 (Pose Composition)、位姿求逆 (Pose Inverse) 和相对位姿 (Relative Pose) 这三种操作，我们就可以求出相关位姿点周围的概率分布。

位姿点会随着时间变化，或受到噪声的扰动。我们是在局部切空间中计算运动旋量，再将其收回到流形上并作用到当前位姿点上，则位姿点就沿测地线前进移动到新的位姿点上。相对应的，协方差矩阵 \mathbf{P} 也是在局部切空间中传播。但是我们希望新的协方差矩阵 \mathbf{P} 所代表的概率分布的中心也是新的位姿点，所以在切换局部切空间时，也需要对协方差矩阵 \mathbf{P} 做一次变换。虽然因为现在传感器的采样周期很快，这个变换矩阵 $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}$ ，所以大多数实现算法都忽略这个步骤，但是理解这一步骤的几何意义对于理解局部切空间的切换与伴随矩阵，理解协方差矩阵和概率中心等概念很有帮助。

4 参考文献

1. Lie Groups for 2D and 3D Transformations - 2017
2. Orientation Estimation by Means of Extended Kalman Filter, Quaternions, and Charts - 2017

3. Characterizing the Uncertainty of Jointly Distributed Poses in the Lie Algebra - 2019
4. A micro Lie theory for state estimation in robotics - 2020
5. Reducing the uncertainty about the uncertainties - 2021

第二部分 ESKF 系统的设计与推导

在这里根据文献 [4] 设计一个简化版本的 ESKF 系统，演示 ESKF 系统的设计与推导。

5 ESKF 简单回顾

5.1 标准 KF 系统

对于一个在状态空间描述的线性或者准线性系统，状态 k 从 $k-1$ 的状态演变而来，根据

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k$$

在这里，

- \mathbf{F}_k 是状态转换矩阵。对于简单的问题，这个矩阵可以是一个常数，但是对于大多数实际应用程序，转换矩阵依赖于状态向量的值并每次迭代改变。
- \mathbf{G}_k 是应用于控制向量 \mathbf{u} 的控制输入模型。这可用于为系统的已知控制输入建模，例如应用于机器人电机的电流、汽车方向盘的位置等。
- \mathbf{w}_k 是过程噪声，假定从零均值多元正态分布 \mathcal{N} 中提取，利用协方差矩阵 $\mathbf{Q}_k : \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_k)$ 。为这个矩阵确定一个合适的值是很棘手的，并且在卡尔曼滤波器的文献中经常被忽视。

在时间“ k ”时刻，一个真实状态的观测（或测量） \mathbf{z}_k 根据

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

其中

- \mathbf{H}_k 是将状态空间映射到观测空间的观测模型。
- \mathbf{v}_k 是假设为零均值高斯协方差的观测噪声 $\mathbf{R}_k : \mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_k)$

注意， \mathbf{H}_k 将状态向量映射到观测值，而不是相反。这是因为 \mathbf{H}_k 通常是不可逆的，也就是说，它不提供对状态的直接可见性。

滤波器的状态由两个变量表示：

- $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ ，时间 k 的后验状态估计，给出时间 k 之前（包括该时间）的观测值；
- $\mathbf{P}_{k|k}$ ，后验误差协方差矩阵（状态估计精度的度量）。

滤波器分两步工作：

- 一个时间更新（预测）步骤，其中状态和协方差矩阵根据我们对系统动力学和误差特征的了解进行更新，这些特征由 \mathbf{F} 和 \mathbf{Q} 矩阵建模。预测步骤不包括观察结果的影响。
- 一个测量更新（校正）步骤，其中包括观测的影响，以完善状态估计和协方差矩阵。这一步需要确定测量矩阵 \mathbf{H} 和 \mathbf{R} 矩阵。

预测和校正步骤的相应方程式如下：其中符号 $\hat{\mathbf{x}}_{n|m}$ 表示在给定 n 时刻观测直至并包括 $m \leq n$ 时刻的 \mathbf{x} 的估计值。

| 预测 | | |
|----|---------------|--|
| 1 | 预测 (先验) 状态估计 | $\hat{\mathbf{x}}_{k k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1 k-1}$ |
| 2 | 预测 (先验) 估计协方差 | $\mathbf{P}_{k k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1 k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k$ |

| 校正 | | |
|----|---------------|---|
| | 新息或测量残差 | $\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k k-1}$ |
| | 新息 (或残差) 协方差 | $\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$ |
| 3 | 最佳卡尔曼增益 | $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1}$ |
| 4 | 更新 (后验) 的状态估计 | $\hat{\mathbf{x}}_{k k} = \hat{\mathbf{x}}_{k k-1} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k$ |
| 5 | 更新 (后验) 的协方差 | $\mathbf{P}_{k k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k k-1}$ |

卡尔曼滤波实现的主要任务是利用系统动力学模型和测量模型，提出状态转换矩阵 \mathbf{F} 、测量矩阵 \mathbf{H} 和系统噪声特性，设计过程和测量噪声协方差矩阵。

5.2 KF 系统的设计

虽然我们不一定要亲自去设计一个 KF 系统，但是了解一个 KF 系统设计过程中所要考虑的问题，对我们把握一个新的 KF 系统很有帮助。这里有两篇很有用的教材值得一读：

- 07-Kalman-Filter-Math
- 08-Designing-Kalman-Filters

KF 系统的运行大致分为三个步骤：

- 初始化
 1. 初始化滤波器的状态
 2. 初始化我们对状态的信念
- 预测
 1. 使用过程模型预测下一个时间步骤的状态
 2. 调整信念以解释预测中的不确定性
- 更新
 1. 获得测量结果，并对其准确性关联信念
 2. 计算估计状态和测量之间的残差
 3. 根据测量或预测是否更准确计算比例因子
 4. 根据比例因子设置预测和测量之间的状态

5. 根据我们在测量中的确定度更新对状态的信念

我们要处理这些变量：

- \mathbf{x} , \mathbf{P} 是状态均值和协方差。
- \mathbf{F} 是状态转换函数。当乘以 \mathbf{x} 时，它计算先验值。
- \mathbf{Q} 是过程协方差。
- \mathbf{G} 和 \mathbf{u} 让我们对系统的输入进行建模控制。
- \mathbf{H} 是测量函数。
- \mathbf{z} , \mathbf{R} 是测量平均值和噪声协方差。
- \mathbf{y} 和 \mathbf{K} 是残差和卡尔曼增益。

我们要应用这些概念：

- 使用高斯分布表示我们对状态和误差的估计
- 使用高斯分布表示测量及其误差
- 使用高斯分布表示过程模型
- 使用过程模型预测下一个状态 (先验)
- 在测量和先验测量之间形成一个部分估计
- 作为一名设计师，我们的工作将是设计状态 (\mathbf{x} , \mathbf{P})、过程 (\mathbf{F} , \mathbf{Q})、测量 (\mathbf{z} , \mathbf{R}) 和测量函数 \mathbf{H} 。如果系统有控制输入，例如机器人，我们还将设计 \mathbf{G} 和 \mathbf{u} 。

5.3 微分方程的求解

我们需要确定如下形式的状态外推方程：

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{k-1,k-1} + \mathbf{G}\hat{\mathbf{u}}_{k-1,k-1} + \mathbf{w}_{k-1}$$

为了达到这一点，我们将求解描述状态空间表示的微分方程。

5.3.1 无输入变量的动态系统

无外部输入的线性时不变 (Linear Time-Invariant, LTI) 动态系统可用一阶微分方程描述：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

其中 \mathbf{A} 是系统动力学矩阵。

我们的目标是找到状态转移矩阵 \mathbf{F} 。我们需要解微分方程，才能找到 \mathbf{F} 。

对于一维系统，微分方程如下所示：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= kx \\ \frac{dx}{x} &= kdt\end{aligned}$$

两边积分得到:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{x} dx = \int_0^{\Delta t} k dt$$

求解积分:

$$\begin{aligned} \ln(x_1) - \ln(x_0) &= k\Delta t \\ \ln(x_1) &= \ln(x_0) + k\Delta t \\ x_1 &= e^{\ln(x_0) + k\Delta t} \\ x_1 &= e^{\ln(x_0)} e^{k\Delta t} \\ x_1 &= x_0 e^{k\Delta t} \end{aligned}$$

扩展到多维动态系统的方程, 其解为:

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{x}_k$$

其中, $e^{\mathbf{A}t}$ 是矩阵指数。

矩阵指数可通过泰勒级数展开计算:

$$e^{\mathbf{X}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{X}^k$$

因此:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}\Delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t + \frac{(\mathbf{A}\Delta t)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}\Delta t)^3}{3!} + \frac{(\mathbf{A}\Delta t)^4}{4!} + \dots$$

5.3.2 带输入变量的动态系统

对于零阶保持采样, 假设输入为分段常数, 状态空间方程为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

其通解形式由下式给出:

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}\Delta t}}_{\mathbf{F}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}t} dt \mathbf{B} \mathbf{u}(t)}_{\mathbf{G}}$$

其中控制输入矩阵 \mathbf{G} 同样可以通过泰勒级数展开计算:

$$\mathbf{G} = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}t} dt \mathbf{B} = \Delta t \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}\Delta t}{2!} + \frac{(\mathbf{A}\Delta t)^2}{3!} + \frac{(\mathbf{A}\Delta t)^3}{4!} + \dots \right) \mathbf{B}$$

5.3.3 观测矩阵 \mathbf{H} 的作用

在许多情况下, 测量值不是所需的系统状态。例如, 数字电子温度计测量电流, 而系统状态是温度。需要将系统状态 (输入) 转换为测量 (输出)。观测矩阵 \mathbf{H} 的目的是利用线性变换将系统状态转换为输出。

观测矩阵 \mathbf{H} 比较容易计算, 它的用法有:

- 状态缩放
- 状态选择
- 状态组合

5.4 EKF 系统

在扩展卡尔曼滤波中，状态转移和观测模型不需要是状态的线性函数，而可以是可微函数。我们考虑非加性噪声的更一般形式的构想及方程

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) \\ \mathbf{z}_k &= h(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)\end{aligned}$$

其中， \mathbf{w}_k 和 \mathbf{v}_k 是过程噪声和观测噪声，它们分别被假定为协方差为 \mathbf{Q}_k 和 \mathbf{R}_k 的零均值多元高斯噪声。 \mathbf{u}_k 是控制向量。

函数 $f()$ 可用于根据先前估计计算预测状态，类似地，函数 $h()$ 可用于根据预测状态计算预测测量。然而， $f()$ 和 $h()$ 不能直接应用于协方差。而是计算偏导数矩阵 (雅可比矩阵)。

在每个时间步骤，用当前预测状态来评估雅可比矩阵。这些雅可比矩阵可用于卡尔曼滤波方程。该过程基本上是将非线性函数在当前估计值周围使其线性化。

对于标准 KF 系统，EKF 的方程则增加了本地线性化的处理，变化后的预测和校正步骤的相应方程式如下：

- 预测

- 预测 (先验) 状态估计

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)$$

- 预测 (先验) 估计协方差

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^T$$

其中，状态转移矩阵 \mathbf{F}_k 为 Jacobian 矩阵

$$\mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_k}$$

控制输入矩阵 \mathbf{G}_k 为 Jacobian 矩阵

$$\mathbf{G}_k = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_k}$$

- 校正

- 新息或测量残差

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{z}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$$

- 新息 (或残差) 协方差

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$$

其中，观测矩阵 \mathbf{H}_k 为 Jacobian 矩阵

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}$$

- 最佳卡尔曼增益

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1}$$

– 更新 (后验) 的状态估计

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k$$

– 更新 (后验) 的协方差

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}$$

对于 EKF, 新增的任务就是计算状态转换矩阵 \mathbf{F} 、控制输入矩阵 \mathbf{G} 和测量矩阵 \mathbf{H} 的 Jacobian 矩阵。

5.5 ESKF 系统

ESKF 系统其实是 EKF 系统针对位姿估计的具体应用。它将要估计的状态量分为量部分, 一部份为标称状态量, 为大数值量, 另一部份为扰动或误差, 为小数值量。它将扰动或误差这种小量以向量形式采用 EKF 系统进行最优估计, 然后再将其转换为李群形式作用到标称状态量。此时标称状态量就为最优估计, 已没有误差, 则系统需要进行重置操作。ESKF 系统简述如下。

我们要估计的是一个流形上的元素 \mathcal{X} , 它在软件中用向量形式 \mathbf{x} 存储, 两者关系为

$$\mathcal{X} = \text{Exp}(\mathbf{x})$$

在符号表示上, 我们用帽子符号 $\hat{\cdot}$ 代表估计值, 用下标 $i|i-1$ 代表用 $i-1$ 时刻的数据外推 i 时刻的估计值, 用下标 $i|i$ 代表 i 时刻的最优估计值, 因此, \mathcal{X} 、 $\hat{\mathcal{X}}_{i|i-1}$ 、 $\hat{\mathcal{X}}_{i|i}$ 分别代表状态的真值、外推估计值、最优估计值。流形元素 \mathcal{X} 的变化由控制信号向量 \mathbf{u} 所驱动, 例如 IMU 的输出在采样时间 Δt 内的积分。该控制信号已被加性高斯噪声 $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$ 损坏。因此当 k 时刻到达时我们得到一个控制信号 \mathbf{u}_k , 如果已知上一时刻最优估计值 $\hat{\mathcal{X}}_{k-1|k-1}$, 则新的外推估计值为

$$\hat{\mathcal{X}}_{k|k-1} = \hat{\mathcal{X}}_{k-1|k-1} \oplus \mathbf{u}_k \triangleq \hat{\mathcal{X}}_{k-1|k-1} \text{Exp}(\mathbf{u}_k)$$

因为控制信号 \mathbf{u} 的噪声引入的累积误差是无界的 (unbounded), 所以我们需要对外推估计值 $\hat{\mathcal{X}}$ 做最优估计, 以使其有界 (bounded)。因为只擅长处理向量的卡尔曼滤波器不好直接估计流形元素 \mathcal{X} , 因此我们需要间接的方法对其进行最优估计。

我们假定外推估计值和真值之间存在一个误差 $\delta \mathbf{x}$,

$$\delta \mathbf{x} \triangleq \mathcal{X} \ominus \hat{\mathcal{X}}$$

并且因 $\delta \mathbf{x}$ 数量小, 可以用向量形式表示而无过度参数化的问题, 并且其协方差 \mathbf{P} 在 $\hat{\mathcal{X}}$ 处切空间中表示为

$$\mathbf{P} \triangleq \mathbb{E} \left[(\mathcal{X} \ominus \hat{\mathcal{X}}) (\mathcal{X} \ominus \hat{\mathcal{X}})^\top \right]$$

因此 $\delta \mathbf{x}$ 可用卡尔曼滤波器进行最优估计。为此我们还需要其它传感器的测量值 \mathbf{z} 对其进行校正, 该测量值同样被加性高斯噪声 $\mathbf{v} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ 损坏。根据 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 这两种由噪声构建的协方差矩阵, 我们就可以对 $\delta \mathbf{x}$ 进行最优估计。再将其作用到外推估计值 $\hat{\mathcal{X}}_{k|k-1}$ 上,

$$\hat{\mathcal{X}}_{k|k} = \hat{\mathcal{X}}_{k|k-1} \oplus \delta \mathbf{x}_k$$

这就间接得到了当前 k 时刻的流形元素的最优估计值。因此我们把估计值 $\hat{\mathcal{X}}$ 称为标称状态量, 外推状态和最优状态是其自身的两种状态, 它们和误差状态量 $\delta \mathbf{x}$ 的关系是

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{X}}_{k|k-1} & \text{if } \delta \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \hat{\mathcal{X}}_{k|k} & \text{if } \delta \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

既当误差 $\delta \mathbf{x}$ 作用到标称状态量后，我们认为标称状态量已经是最接近真实值的量，已无误差，所以 ESKF 算法在循环迭代结束时必须执行重置步骤。

ESKF 计算步骤如下：

- 预测

- 预测 (先验) 状态估计

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \oplus \mathbf{u}_k \\ \delta \mathbf{x}_{k|k-1} &= f\left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{u}_k\right) \delta \mathbf{x}_{k-1|k-1}\end{aligned}\quad (1)$$

其中， \mathbf{u} 是系统的控制向量，也是流形元素的增量向量，由其引入了误差。因为上一次迭代都会执行重置操作 $\delta \mathbf{x}_{k-1|k-1} = \mathbf{0}$ ，所以大多数情况下都会省略方程 (1)，代表着误差直到测量更新时才会显现出来，时间更新阶段则关注推导误差状态转换矩阵 \mathbf{F} 和控制矩阵 \mathbf{G} 。

- 预测 (先验) 估计协方差

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^\top + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^\top \quad (2)$$

其中，误差状态转移矩阵 \mathbf{F}_k 为 Jacobian 矩阵

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_k &= \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}} \\ &= \frac{\partial \left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \oplus \mathbf{u}_k \right)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}} \\ &= \mathbf{Ad}_{\text{Exp}(\mathbf{u}_k)}^{-1}\end{aligned}$$

误差控制输入矩阵 \mathbf{G}_k 为 Jacobian 矩阵

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_k &= \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}{\partial \mathbf{u}_k} \\ &= \frac{\partial \left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \oplus \mathbf{u}_k \right)}{\partial \mathbf{u}_k} \\ &= \mathbf{J}_r(\mathbf{u}_k)\end{aligned}$$

- 协方差重置

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{u}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{u}_k)^\top$$

- 校正

- 新息或测量残差

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{-1} \cdot \mathbf{v}_I$$

其中 \mathbf{v}_I 为全局坐标系下的观测向量。

- 新息 (或残差) 协方差

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$$

其中, 观测矩阵 \mathbf{H}_k 为 Jacobian 矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_k &= \frac{\partial \left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{-1} \cdot \mathbf{v}_I \right)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}} \\ &= \frac{\partial \left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{-1} \cdot \mathbf{v}_I \right)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{-1}} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{-1}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}} \end{aligned}$$

- 最佳卡尔曼增益

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \quad (3)$$

- 更新 (后验) 的状态估计

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_{k|k} &= \begin{cases} \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k & \delta \mathbf{x}_{k|k-1} = \mathbf{0} \\ \delta \mathbf{x}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k & \delta \mathbf{x}_{k|k-1} \neq \mathbf{0} \end{cases} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \oplus \delta \mathbf{x}_{k|k} \end{aligned} \quad (4)$$

- 更新 (后验) 的协方差

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} \quad (5)$$

- 协方差矩阵重置

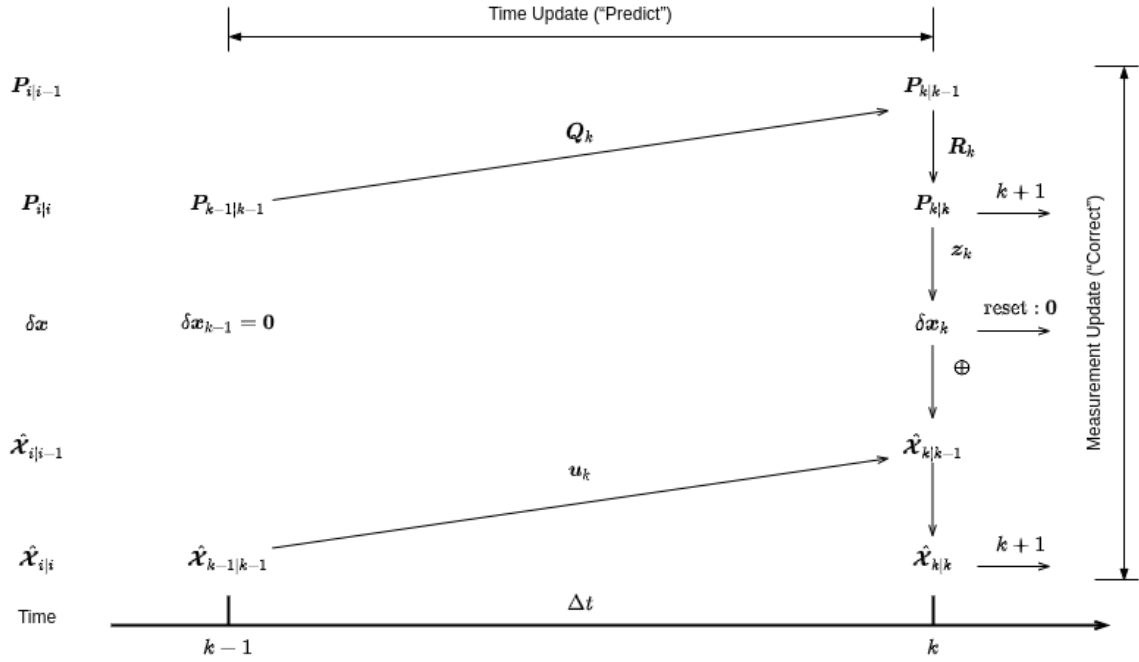
$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{\Gamma}(\delta \mathbf{x}_{k|k}) \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{\Gamma}(\delta \mathbf{x}_{k|k})^T$$

- 误差重置

$$\delta \mathbf{x}_{k|k} = \mathbf{0}$$

相对于常规 EKF, ESKF 的更改地方, 当流形元素与向量运算时, 将常规的 $+$ 算子替换为 \oplus 算子, 并且 Jacobian 矩阵都用李理论计算。它们的用法和标准的 EKF 中的用法相同, 这就是李理论提供的抽象层次带来的好处。因为是间接估计, 所以 ESKF 新增的任务就是重置步骤。其中协方差重置步骤因为改变很小, 在大多数实现算法中都忽略, 但是理解这一步骤的含意对于理解李群的概念十分有帮助。

ESKF 系统的计算过程及输入输出的示意图如下:



从图中可以看出，对于传感器数据有一个并行采样的假设。如果不满足这个假设，并且在现今复杂系统上大多不满足这个假设，所以在实现中，我们需要对传感器输入流做预处理，或对估计系统的输出流做校正处理。这又是另外的话题。

6 旋转表示与约定

三维旋转有两种常用的表示方法：单位四元数和旋转矩阵。旋转矩阵比较统一，都是右手坐标系，不容易出错。但单位四元数因为数学上的原因，并行有两种约定，很容易出错，所以有必要澄清一下。

单位四元数表示旋转，有两种常见的约定 (convention)，或者说两种符号 (notation) 系统。一种是 Hamilton 约定，一种是 JPL 约定。前者是右手坐标系，后者是左手坐标系。两种约定都流行，而两者推导出来的方程有差异，于是造成了很大的混乱。稍不留神就会掉进沟里。

6.1 Hamilton 约定

四元数由 Hamilton 先生发明，由一个实数和三个复数构成：

$$q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$$

其中， $\mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{k}$ ，所以有 $\mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -1$ 。一般为方便书写，也可写成这样：

$$\begin{aligned} q &= \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} q_0 & \mathbf{q}_v \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

其中， \mathbf{q}_v 表示由三个复数构成的三维向量。

我们对四元数乘法感兴趣：

$$p * q = \begin{bmatrix} p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \\ p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \end{bmatrix}$$

其中，“ \cdot ”和“ \times ”符号分别是向量的点乘和叉乘。

对于四元数乘法，还有矩阵形式的表示，在很多分析中经常用到：

$$\begin{aligned} p * q &= \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & p_0 \mathbf{I} + [\mathbf{p} \times] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0 \mathbf{I} - [\mathbf{q} \times] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

四元数的左边是一个 4×4 矩阵，其中符号 $[\mathbf{p} \times]$ 表示一个很常用的三维向量转变为 3×3 的斜对称矩阵的运算：

$$[\mathbf{p} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix}$$

并且有这样的性质：

$$[\mathbf{p} \times] \mathbf{q} = -[\mathbf{q} \times] \mathbf{p}$$

同时请注意 p 和 q 交换后，矩阵右下角 3×3 矩阵中正负符号的变化。

单位四元数

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

用于表示旋转：

$$q = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{u}^R \right]^T$$

其中， \mathbf{u}^R 表示旋转轴是参考系 \mathbf{R} 下的单位向量， $\frac{\theta}{2}$ 表示绕 \mathbf{u}^R 轴旋转 θ 角度，因为有个著名的向量旋转公式 $\mathbf{v}' = q\mathbf{v}q^{-1}$ 。上式表明，如果我们想要用轴-角 (Axis-Angle) 方式构造四元数，应当将旋转轴放在参考系下描述。 \mathbf{R} 一般会选择水平地理导航系 (Navigation frame)、世界坐标系 (World frame)、全局坐标系 (Global frame) 或惯性坐标系 (Inertial frame) 作为参考系。相对应的就是机体坐标系 (Body frame)。后面为简化符号，一般直接用 \mathbf{u} 表示旋转轴，省略参考系 \mathbf{R} 的表示。

轴-角 (Axis-Angle) 方式指的是在一个向量中同时表示旋转轴和旋转角度：

$$\boldsymbol{\theta} \triangleq \mathbf{u}\theta \in \mathbb{R}^3$$

可以通过欧拉公式将其映射为四元数，一般用算子 $\wedge : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}$ 表示，相应的逆映射用算子 $\vee : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 表示。两者定义为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}^\wedge &\triangleq \exp\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\|\boldsymbol{\theta}\|}{2}\right) \\ \frac{\boldsymbol{\theta}}{\|\boldsymbol{\theta}\|} \sin\left(\frac{\|\boldsymbol{\theta}\|}{2}\right) \end{bmatrix} \\ q^\vee &\triangleq \log(q) = 2\text{atan2}(\|\mathbf{q}\|, q_0) \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \end{aligned}$$

在引入李群和流形 (manifold) 后多了两个类似的算子：田 和 曰。这些符号的关系为：

$$\begin{aligned} q' &= q * \boldsymbol{\theta}^\wedge &= q * \exp\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right) &= q \text{ 田 } \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\theta} &= (q^{-1} * q')^\vee &= \log(q^{-1} * q') &= q' \text{ 曰 } q \end{aligned}$$

其中对于 曰 算子请注意四元数乘法的顺序。

当 $\boldsymbol{\theta}$ 的角度很小时，一般用 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 表示，上述方程有数值稳定的问题。于是用二阶 Gibbs 向量参数化：

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\theta}^\wedge &\approx \frac{1}{\sqrt{4 + \delta\boldsymbol{\theta}^\text{T} \delta\boldsymbol{\theta}}} \begin{bmatrix} 2 \\ \delta\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} 1 - \delta\boldsymbol{\theta}^\text{T} \delta\boldsymbol{\theta} / 8 \\ \frac{\delta\boldsymbol{\theta}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

如果用一阶近似就更简单：

$$\delta\boldsymbol{\theta}^\wedge \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\delta\boldsymbol{\theta}}{2} \end{bmatrix}$$

并且

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \delta q^\vee \approx 2\text{sign}(\delta q_0) \delta \mathbf{q}$$

物体的旋转可以用旋转矩阵 \mathbf{R} 表示。使用 \mathbf{R}_B^I 表示从机体坐标系变换到惯性坐标系的旋转，从李群的角度说，就是从局部坐标系变换到原点坐标系，因此对于机体坐标系中的向量 \mathbf{v}^B ， $\mathbf{R}_B^I \mathbf{v}^B = \mathbf{v}^I$ ，通俗地说就是站在大地上看无人机的姿态。 \mathbf{R}_I^B 则表示从惯性坐标系变换到机体坐标系的旋转。因此两者关系为 $\mathbf{R}_I^B = (\mathbf{R}_B^I)^\text{T}$ 。很自然的，单位四元数 q 可以转换为旋转矩阵，两者的转换关系为：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_B^I(q) &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 \cdot q_2 - q_0 \cdot q_3) & 2(q_1 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_2) \\ 2(q_1 \cdot q_2 + q_0 \cdot q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_1) \\ 2(q_1 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_2) & 2(q_2 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_I^B(q) &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

如果用罗德里格斯旋转方程 (Rodrigues Rotation Formula) 表示，则为：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_B^I(q) &= \left(q_0^2 - |\mathbf{q}_v|^2\right) \mathbf{I}_{3 \times 3} + 2q_0 [\mathbf{q}_v \times] + 2\mathbf{q}_v \mathbf{q}_v^\text{T} \\ \mathbf{R}_I^B(q) &= \left(q_0^2 - |\mathbf{q}_v|^2\right) \mathbf{I}_{3 \times 3} - 2q_0 [\mathbf{q}_v \times] + 2\mathbf{q}_v \mathbf{q}_v^\text{T} \end{aligned}$$

在这里还请注意在 $[\mathbf{q}_v \times]$ 前面的正负符号，在这里经常出现抄写错误而造成软件出错。

此外，物体的旋转和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的关系可以用单位四元数的微分方程表示：

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} q$$

其中，式中的 ω 为角速度对惯性坐标系投影。而现在常用的 IMU 得到的测量结果是角速度对机体坐标系的投影。于是上式在工程应用中应该这样计算：

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{2}q \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix} \quad (6)$$

习惯上，物体的 k 时刻的姿态用单位四元数 q_k 表示，物体 $k+1$ 时刻的旋转用增量四元数 Δq 表示，则新的姿态用四元数乘法表示。根据上式就是用四元数右乘表示物体向前旋转，也就是教材里所说的：Right-to-left products mean Local-to-Global。因为 IMU 采样频率很高，间隔时间内的增量角度 $\Delta\theta = \omega\Delta t$ 很小，所以其所表示的单位四元数可以简化计算为：

$$\Delta q = \delta\theta^\wedge \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\Delta\theta}{2} \end{bmatrix}$$

于是对于精度不高的快速运算，机体的新姿态计算为：

$$\begin{aligned} q_{k+1} &= q_k \cdot \Delta q \\ &= q_k \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\Delta\theta}{2} \end{bmatrix} \\ &= q_k + \frac{1}{2}q_k \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

上式就是在论文和教材中很常见的欧拉积分法，或称一阶积分法。

相应方程用算子 \boxplus 和 \boxminus 表示则为：

$$\begin{aligned} q_{k+1} &= q_k \boxplus (\Delta\theta) \\ \Delta\theta &= q_{k+1} \boxminus q_k \end{aligned}$$

相应的用四元数左乘表示物体向后旋转：

$$q_t = \delta q \cdot \hat{q}$$

在习惯上，认为上面两个方程计算出来的姿态四元数代表的是全局的姿态 ${}^I_B q$ ，于是选择定义：

$$\mathbf{R}(q) = \mathbf{R}_B^I ({}^I_B q)$$

根据 Hamilton 约定的乘法规则，四元数乘法与旋转矩阵的乘法的映射为：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_B^I(q) &= \mathbf{R}_B^I(\hat{q} \cdot \delta q) \\ &= \mathbf{R}_B^I(\delta q) \cdot \mathbf{R}_B^I(\hat{q}) \end{aligned}$$

请注意四元数乘法拆分为矩阵乘法后位置的翻转。因为上式的数学表现形式不够完美，不是数学上的同构的 (isomorphic) 或同态 (homomorphism)，于是有人发明了 JPL 约定的四元数。

6.2 JPL 约定

JPL 约定是由 Shuster 先生发明的，所以称为 Shuster Notation。因为他在 NASA 工作，使用这种约定的人和软件也主要和航天有关，如参考文献 [1,2]，因为有名的 NASA Jet Propulsion Laboratory (JPL)，于是又称为 JPL 约定。

发明 JPL 约定的目的, 可能是出于科学家对于数学完美追求, 解决前面的同构问题。于是把前面的 $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, 改变为 $\mathbf{ij} = -\mathbf{k}$, 所以有 $\mathbf{ijk} = 1$ 。乘法从右手系变成了左手系, 并且有:

$$\mathbf{R}(\delta q \cdot \hat{q}) = \mathbf{R}(\delta q) \cdot \mathbf{R}(\hat{q})$$

这形式在数学上就是同构。

为区分 Hamilton 约定, JPL 约定定义的四元数存储顺序相反:

$$\begin{aligned} q &= \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v & q_4 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

并且用叉乘符号 \otimes 代表 JPL 约定的乘法符号, 用点乘符号 \odot 代表 Hamilton 约定的乘法符号。

相应的, JPL 约定定义的乘法相关的方程和 Hamilton 约定顺序相反。首先是单位四元数的微分方程:

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} q \quad (7)$$

其中, 式中的 $\boldsymbol{\omega}$ 为角速度对机体坐标系的投影, 也就是用四元数左乘表示物体向前旋转, 也就是教材里所说的: Right-to-left products means Global-to-Local。但是用罗德里格斯旋转方程 (Rodrigues Rotation Formula) 表示的含义相同:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_I^B(q) &= \left(q_4^2 - |\mathbf{q}_v|^2 \right) \mathbf{I}_{3 \times 3} - 2q_4 [\mathbf{q}_v \times] + 2\mathbf{q}_v \mathbf{q}_v^T \\ \mathbf{R}_B^I(q) &= \left(q_4^2 - |\mathbf{q}_v|^2 \right) \mathbf{I}_{3 \times 3} + 2q_4 [\mathbf{q}_v \times] + 2\mathbf{q}_v \mathbf{q}_v^T \end{aligned}$$

注意上式排列顺序和 Hamilton 约定相反的地方。也就是用 JPL 约定的方程计算出来的姿态四元数 q , 表示的是从惯性坐标系变换到机体坐标系的旋转 ${}^B_I q$ 。于是有定义:

$$\mathbf{R}(q) = \mathbf{R}_I^B({}^B_I q)$$

并且有:

$$\mathbf{R}_I^B(\delta q \cdot \hat{q}) = \mathbf{R}_I^B(\delta q) \cdot \mathbf{R}_I^B(\hat{q})$$

采用 JPL 约定可能有一个现实的好处, 可能和 “Right-to-left products mean” 有关。Local 和 Global 是相对的概念。以相机的视角举例, 假设初始状态机体坐标系 (相机) 和固定坐标系 (大地) 是重合的, 经过一段时间的运动之后:

- Local-to-Global 意味着是将相机在新的视角看到的空间某个固定点的坐标转成初始相机视角下的坐标。
- Global-to-Local 意味着是将相机在初始视角看到的空间某个固定点坐标转成相机在新的视角下的坐标。

载人航天器自然要以宇航员优先。假如宇航员在太空飞船里, 看到的景象就是飞船不动, 而外面的世界围绕着飞船旋转。JPL 约定就是宇航员视角看到的坐标, 同时根据上面的方程式, 姿态矩阵也容易理解一点。同样的, 相机坐标系用 JPL 约定也会自然一些, 因为这就是人眼看到的物体的倾斜方向。

6.3 不同约定造成的迷惑

对于两种约定，因为所有和乘法相关的方程的顺序或正负符号都相反，两者又都流行，于是给大家都带来了大麻烦。看资料的时候都要留个心：这到底是哪家的门派。下面举一个后面会遇到的例子，看看我们会碰倒怎样的迷惑。

我们先对罗德里格斯旋转方程做简化。因为间隔时间 Δt 内增量角度 $\Delta\theta = \omega\Delta t$ 很小，所以其误差角度 $\delta\theta$ 更小，将误差表示的方程 $\delta q = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\delta\theta}{2} \end{bmatrix}^T$ 代入旋转方程，并忽略二阶项得到：

$$\mathbf{R}_I^B(\delta q) \approx \mathbf{I}_{3 \times 3} - [\delta\theta \times]$$

$$\mathbf{R}_B^I(\delta q) \approx \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\delta\theta \times]$$

IMU 传感器定时采样，采样间隔时间为 Δt ，获得测量角速度 ω_m 和加速度 \mathbf{a}_m 数据。然后 IMU 测量值去除测量偏差得到角速度 ω_B 和加速度 \mathbf{a}_B 数据做后面的运算，其中下标 B 代表机体坐标系。首先，我们定义机体的真实姿态为 q_t ，使用 ω 根据前面的积分方程外推得到姿态为 \hat{q} ，它和真实姿态之间有一个误差，定义为 δq 。因为旋转运算只对乘法封闭，于是 δq 和 \hat{q} 之间只能有乘法运算。但是四元数或矩阵乘法不支持交换律，这时出现第一个问题，当 δq 要注入到 \hat{q} 中，使得 \hat{q} 是最优估计，那么 δq 乘在 \hat{q} 的左边还是右边？

对于 JPL 约定，他们选择 δq 是局部的角度误差，也就是文献 [4] 第 5.3 节“连续时间的系统动力学”中提到的“角度误差 $\delta\theta$ 同样是相对于标称方向的局部 (locally) 定义”，就是和动力学微分方程 (7) 的方向一致，在这里是左乘：

$$q_t = \delta q \otimes \hat{q}$$

于是有

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_I^B(q_t) &= \mathbf{R}_I^B(\delta q \otimes \hat{q}) \\ &= \mathbf{R}_I^B(\delta q) \cdot \mathbf{R}_I^B(\hat{q}) \\ &\approx (\mathbf{I}_{3 \times 3} - [\delta\theta \times]) \cdot \mathbf{R}_I^B(\hat{q}) \end{aligned}$$

对于 Hamilton 约定，如果我们同样选择 δq 是局部的角度误差，和动力学微分方程 (6) 的顺序一致，也就是右乘 $\hat{q} = \hat{q} \odot \delta q$ ，为了使得后面的推导结果和 JPL 约定的一致，这时选择四元数乘法与旋转矩阵的乘法的映射为：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_I^B(q) &= \mathbf{R}_I^B(\hat{q} \odot \delta q) \\ &= \mathbf{R}_I^B(\delta q) \cdot \mathbf{R}_I^B(\hat{q}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_B^I(q) &= (\mathbf{R}_I^B(q))^T \\ \mathbf{R}_B^I(\hat{q} \odot \delta q) &= (\mathbf{R}_I^B(\hat{q} \odot \delta q))^T \\ &= (\mathbf{R}_I^B(\delta q) \cdot \mathbf{R}_I^B(\hat{q}))^T \\ &= \mathbf{R}_B^I(\hat{q}) \cdot \mathbf{R}_B^I(\delta q) \end{aligned}$$

于是有：

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_B^I(q) &= \mathbf{R}_B^I(\hat{q} \odot \delta q) \\ &= \mathbf{R}_B^I(\hat{q}) \cdot \mathbf{R}_B^I(\delta q) \\ &\approx \mathbf{R}_B^I(\hat{q}) \cdot (\mathbf{I}_{3 \times 3} + [\delta \boldsymbol{\theta} \times])\end{aligned}$$

这两种矩阵不同，但在后面的计算 Jacobian 矩阵时得到一样的结果，也就是不管使用什么约定，物理模型只有一个结果。但是对于 Hamilton 约定，我们需要时刻注意 \mathbf{R} 的上下标，因为稍微不注意，就得到不同的结果。

这是文献 [7] 的提议：

$$\mathbf{C}_H({}_B^I q) = \mathbf{R}_I^B$$

该提议能保持同构：

$$\mathbf{C}_H(\hat{q} \otimes \delta q) = \mathbf{C}_H(\hat{q}) \mathbf{C}_H(\delta q)$$

文献 [7] 的提议很好，但是这里还是有一次上下标的坐标系的翻转，不符合抄写的直觉。对于 Hamilton 约定，不管乘法顺序还是上下标顺序，始终有一次翻转。

事情就是这么无奈。因为 Malcolm D. Shuster 最先发现 Hamilton 约定的反同态问题并提出了 JPL 约定。并且误差状态卡尔曼滤波器是在 NASA 中被发明出来。而他和 F. Landis Markley，既是研究 ESKF 的主力，也是推广 JPL 约定的主力。出现得最早又把最好的地方给占住了，在这个领域不管你怎么走都会碰倒他们。后来的人有再多的解释，始终要容纳 Hamilton 约定有一次翻转的不完美事实。

不管怎么样，如果要学习卡尔曼滤波器和姿态估计，了解 JPL 约定是少不了的工作，因为 NASA / JPL 这群聪明人同样也是这方面的研究主力。于是 JPL 约定就像泥石流一样，肆虐着四元数的应用领域。

本文后面的方程推导，采用的是 Hamilton 约定，因为采用 Hamilton 约定的开源软件是最多的，容易验证对错。并且用开源的 Eigen 库是最方便快捷计算四元数和矩阵的旋转。本文采用文献 [4] 的方程编排和推导结果，因为文献 [3] 也有同样的结果，所以照着推导，无论过程还是结果都容易得到验证。

7 预测步骤

7.1 状态量的设计

这里设计的状态量，是文献 [4] 里的简化版本，为演示用，如果用在工程中，还需要做很多工程上的考量。

位姿 SE(3) 属于李群中的运动群。全状态量 \mathbf{x} 是组合流形 \mathcal{M} 中的一个元素，它是以状态向量 \mathbf{x} 形式存储：

$$\mathbf{x} = \left[q^T \quad \mathbf{V}_I^T \quad \mathbf{P}_I^T \quad \boldsymbol{\omega}_b^T \quad \mathbf{a}_b^T \quad \mathbf{M}_b^T \right]^T$$

其中，姿态四元数 q ，用于定义 XYZ 机体坐标系相对于 NED 导航坐标系的姿态，

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ w \end{bmatrix}$$

\mathbf{V}_I 表示在 NED 坐标系的机体速度,

$$\mathbf{V}_I = \begin{bmatrix} V_{I_x} \\ V_{I_y} \\ V_{I_z} \end{bmatrix}$$

\mathbf{P}_I 表示在 NED 坐标系的机体位置,

$$\mathbf{P}_I = \begin{bmatrix} P_{I_x} \\ P_{I_y} \\ P_{I_z} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\omega}_b$ 表示在 XYZ 机体坐标系的角速度偏差 (bias),

$$\boldsymbol{\omega}_b = \begin{bmatrix} \omega_{b_x} \\ \omega_{b_y} \\ \omega_{b_z} \end{bmatrix}$$

\mathbf{a}_b 表示在 XYZ 机体坐标系的加速度偏差 (bias),

$$\mathbf{a}_b = \begin{bmatrix} a_{b_x} \\ a_{b_y} \\ a_{b_z} \end{bmatrix}$$

\mathbf{M}_b 表示在 XYZ 机体坐标系的磁场偏差 (bias)

$$\mathbf{M}_b = \begin{bmatrix} M_{b_x} \\ M_{b_y} \\ M_{b_z} \end{bmatrix}$$

所使用的传感器与用途列表:

| 测量值 | 符号 | 单位 | 来源 | 最小频率 | 用途 |
|------|-----------------------|------------------|-----|-------|----|
| 角速度 | $\boldsymbol{\omega}$ | rad/s | IMU | 100Hz | 预测 |
| 加速度 | \mathbf{a} | m/s ² | IMU | 100Hz | 预测 |
| 地球磁场 | \mathbf{M}_{meas} | gauss | 磁力计 | 5Hz | 校正 |
| 速度测量 | \mathbf{V}_{meas} | m/s | GPS | 5Hz | 校正 |
| 位置测量 | \mathbf{P}_{meas} | m | GPS | 5Hz | 校正 |

这是一种常见的设计, 其中姿态四元数 q 与表示在 NED 坐标系的 \mathbf{P}_I 构成位姿矩阵 \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(q) & \mathbf{P} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

而角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的积分构成增量角度 $\Delta\boldsymbol{\theta}$, 加速度 \mathbf{a} 的积分构成增量速度 $\Delta\mathbf{V}$, 两者构成速度旋量 $\boldsymbol{\xi}$

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\theta} \\ \Delta\mathbf{V} \end{bmatrix}$$

速度旋量 $\boldsymbol{\xi}$ 通过指数映射函数 $\text{Exp}(\cdot)$ 进入到流形以后再作用到位姿矩阵 \mathbf{T} 上, 则位姿矩阵沿测地线移动到新的位姿点上, 这是旋量理论的内容。

这是基于运动学方程的设计。之所以不采用动力学方程的设计，是因为外部环境多变，并且质量分布也变化，因此无法根据动力学方程精确建模。但是 IMU 是系统内部的部件，我们可以精确了解它的特性，并且在这种设计里，IMU 的噪声就是系统的过程噪声，能精确测量就能精确建模，因此基于运动学方程设计的系统更好设计。

另外，估计下标为 b 的传感器偏差值，是一种传感器自校正的算法。

7.2 标称状态量建模

物体的运动有两种基本方式：旋转和位移。旋转由角速度所驱动，位移由速度所驱动。惯性是物体的内赋秉性，惯性测量单元（Inertial measurement unit, IMU）利用惯性测量出物体在机体坐标系中的角速度 ω 和加速度 a 数据，一般比较精确也很难被外界干扰。所以将 IMU 数据用于旋转和位移的状态预测，角速度 ω 和加速度 a 两者构成标称状态量的转移方程中的控制向量 u 。

IMU 传感器定时采样，采样间隔时间为 Δt ，获得测量角速度 ω_m 和加速度 a_m 数据。所以我们得到增量角度的测量值为

$$\Delta\theta_m = \omega_m \Delta t \quad (8)$$

还有增量速度的测量值为

$$\Delta V_m = a_m \Delta t \quad (9)$$

已知陀螺仪的测量方差为 σ_{gyro}^2 ，加速计的测量方差为 σ_{accel}^2 。所以我们有增量角度的测量方差为

$$\sigma_{\Delta\theta}^2 = \sigma_{gyro}^2 \Delta t^2 \quad (10)$$

还有增量速度的测量方差为

$$\sigma_{\Delta V}^2 = \sigma_{accel}^2 \Delta t^2 \quad (11)$$

根据 IMU 测量值 $\Delta\theta_m$ 和增量角度偏差 $\Delta\theta_b = \omega_b \Delta t$ 计算出真增量角度 $\Delta\theta_t$ ：

$$\Delta\theta_t = \Delta\theta_m - \Delta\theta_b \quad (12)$$

增量四元数 Δq 定义了从第 k 时刻到第 $k+1$ 时刻四元数的旋转，使用小角度近似从真增量角度 $\Delta\theta_t$ 计算：

$$\Delta q = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\Delta\theta_t}{2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

从 k 时刻到 $k+1$ 时刻，四元数乘积规则用于将姿态四元数 q 的状态向前旋转增量四元数 Δq ：

$$\begin{aligned} q_{k+1} &= q_k \cdot \Delta q \\ &= q_k + q_k \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Delta\theta_t}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

根据 IMU 测量值 ΔV_m 和增量速度偏差 $\Delta V_b = a_b \Delta t$ 计算出机体坐标系的真增量速度 ΔV_t ：

$$\Delta V_t = \Delta V_m - \Delta V_b \quad (15)$$

已知 k 时刻的机体速度为 \mathbf{V}_I ，从 k 时刻到 $k+1$ 时刻，将真增量速度向量 $\Delta \mathbf{V}_t$ 从机体坐标系转到惯性坐标系，并减去重力，计算速度状态变化：

$$(\mathbf{V}_I)_{k+1} = (\mathbf{V}_I)_k + \mathbf{R}_B^I(q_k) \cdot \Delta \mathbf{V}_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \cdot \Delta t \quad (16)$$

对于机体位置 \mathbf{P}_I 则使用欧拉积分更新位置状态：

$$(\mathbf{P}_I)_{k+1} = (\mathbf{P}_I)_k + (\mathbf{V}_I)_k \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \left(\mathbf{R}_B^I(q_k) (\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \right) \Delta t^2 \quad (17)$$

IMU 传感器的偏差、磁场偏差均采用静态过程模型：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_b \\ \mathbf{a}_b \\ \mathbf{M}_b \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_b \\ \mathbf{a}_b \\ \mathbf{M}_b \end{bmatrix}_k \quad (18)$$

将上述方程整理成矩阵形式，就是预测（先验）状态估计

$$\hat{\boldsymbol{\chi}}_{k+1|k} = \hat{\boldsymbol{\chi}}_{k|k} \oplus \mathbf{u}_{k+1}$$

我们关心位姿 \mathbf{T} 的算子 \oplus 。简化的表示，对于校正后的角速度 $\boldsymbol{\omega}_t$ 和线性加速度 \mathbf{a}_t 得到

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\theta}_t &= \boldsymbol{\omega}_t \Delta t \\ \Delta \mathbf{V}_t &= \mathbf{a}_t \Delta t \end{aligned}$$

根据旋量理论，得到增量位姿 $\Delta \mathbf{T}$ 为

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{T} &= \exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge) \\ &= \exp \left(\begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\theta}_t \\ \Delta \mathbf{V}_t \end{bmatrix}^\wedge \right) \\ &= \exp \left(\begin{bmatrix} (\Delta \boldsymbol{\theta}_t)^\wedge & \Delta \mathbf{V}_t \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{R} & \mathbf{V} \Delta \mathbf{V}_t \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

则新的位姿 \mathbf{T}_{k+1} 为

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{k+1} &= \mathbf{T}_k \oplus \Delta \mathbf{T} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k & \mathbf{P}_k \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{R} & \mathbf{V} \Delta \mathbf{V}_t \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k \Delta \mathbf{R} & \mathbf{P}_k + \mathbf{R}_k \mathbf{V} \Delta \mathbf{V}_t \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

从位姿矩阵的组合方程可以看出, $k+1$ 时刻的平移是增量旋转和增量平移的交错, 计算量很大。而前面的工程式则做了很多假设, 简化了计算, 提高了速度。所以这里的方程符合 SE(3) 组合算子 \oplus 的定义。

上述方程已经完成预测 (先验) 状态估计的计算, 剩下的事情似乎很简单, 将这些状态值交给卡尔曼滤波器去做最优估计。可惜这种想法是有问题的。因为旋转不是向量, 而是群, 它只对乘法封闭。卡尔曼滤波器假定所有的状态变量都是向量, 同时, 它的核心概念, 协方差矩阵, 其所使用的算子是减法 '-', 就不能用于旋转中。因为这种数学上的冲突, 一群 NASA 的聪明人想出了一个解决方案: 误差状态卡尔曼滤波器。

7.3 误差状态量建模

误差状态卡尔曼滤波器的优点与解释见文献 [4] 中第 5 章的内容, 这里不再重复。

上一节所估计的状态被称为标称状态。相对应的真实值被称为真实状态。真实状态和标称状态之间的差异被称为误差状态。标称状态因为包含旋转所以不能直接使用卡尔曼滤波器进行最优估计。但是精心设计的误差状态都是向量值, 所以可以直接使用卡尔曼滤波器进行最优估计。最终将误差状态注入到标称状态, 则标称状态也成了最优估计。

在此选择的误差状态向量为:

$$\delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\theta}^T & \delta \mathbf{V}^T & \delta \mathbf{P}^T & \delta \boldsymbol{\omega}_b^T & \delta \mathbf{a}_b^T & \delta \mathbf{M}_b^T \end{bmatrix}^T$$

其中, $\delta \boldsymbol{\theta}$ 是姿态误差的三维向量化表示, 速度误差 $\delta \mathbf{V}$ 和位置误差 $\delta \mathbf{P}$ 位于 NED 坐标系中, 角速度偏差 $\boldsymbol{\omega}_b$, 加速度偏差 \mathbf{a}_b , 磁力计偏差 \mathbf{M}_b 位于机体坐标系中。

真实状态、标称状态和误差状态之间的关系见下表:

| 向量 | 真实 | 标称 | 误差 | 组合 | 测量 | 噪声 |
|-------|----------------------------|-------------------------------|--------------------------------|--|-------------------------|-------------------------|
| 全状态 | \mathbf{x}_t | $\hat{\mathbf{x}}$ | $\delta \mathbf{x}$ | $\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}} \oplus \delta \mathbf{x}$ | | |
| 位置 | \mathbf{P}_t | $\hat{\mathbf{P}}$ | $\delta \mathbf{P}$ | $\mathbf{P}_t = \hat{\mathbf{P}} + \delta \mathbf{P}$ | | |
| 速度 | \mathbf{V}_t | $\hat{\mathbf{V}}$ | $\delta \mathbf{V}$ | $\mathbf{V}_t = \hat{\mathbf{V}} + \delta \mathbf{V}$ | | |
| 四元数 | q_t | \hat{q} | δq | $q_t = \hat{q} \otimes \delta q$ | | |
| 旋转矩阵 | \mathbf{R}_t | \mathbf{R} | $\delta \mathbf{R}$ | $\mathbf{R}_t = \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{R}$ | | |
| 角度向量 | | | $\delta \boldsymbol{\theta}$ | $\delta q = e^{\delta \boldsymbol{\theta}/2}$ | | |
| | | | | $\delta \mathbf{R} = e^{[\delta \boldsymbol{\theta} \times]}$ | | |
| 陀螺仪偏差 | $\boldsymbol{\omega}_{bt}$ | $\hat{\boldsymbol{\omega}}_b$ | $\delta \boldsymbol{\omega}_b$ | $\boldsymbol{\omega}_{bt} = \hat{\boldsymbol{\omega}}_b + \delta \boldsymbol{\omega}_b$ | | $\boldsymbol{\omega}_w$ |
| 加速计偏差 | \mathbf{a}_{bt} | $\hat{\mathbf{a}}_b$ | $\delta \mathbf{a}_b$ | $\mathbf{a}_{bt} = \hat{\mathbf{a}}_b + \delta \mathbf{a}_b$ | | \mathbf{a}_w |
| 磁力计偏差 | \mathbf{M}_{bt} | $\hat{\mathbf{M}}_b$ | $\delta \mathbf{M}_b$ | $\mathbf{M}_{bt} = \hat{\mathbf{M}}_b + \delta \mathbf{M}_b$ | | \mathbf{M}_w |
| 角速度 | $\boldsymbol{\omega}_t$ | | | $\boldsymbol{\omega}_m = \boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{\omega}_{bt} + \boldsymbol{\omega}_n$ | $\boldsymbol{\omega}_m$ | $\boldsymbol{\omega}_n$ |
| 加速度 | \mathbf{a}_t | | | $\mathbf{a}_m = \mathbf{R}_t^T \cdot (\mathbf{a}_t - \mathbf{g}_t) + \mathbf{a}_{bt} + \mathbf{a}_n$ | \mathbf{a}_m | \mathbf{a}_n |
| 地磁 | \mathbf{M}_t | | | $\mathbf{M}_m = \mathbf{R}_t^T \cdot \mathbf{M}_t + \mathbf{M}_{bt} + \mathbf{M}_n$ | \mathbf{M}_m | \mathbf{M}_n |
| 重力向量 | \mathbf{g}_t | \mathbf{g} | | | | |

其中, 旋转矩阵 \mathbf{R} 为 \mathbf{R}_B^I 的简化, 表示从机体坐标系变换到惯性坐标系的旋转。相应的 \mathbf{R}^T

为 \mathbf{R}_I^B 的简化。注意四元数和旋转矩阵的组合方程，根据前面的讨论，我们选择

$$\begin{aligned} q_t &= \hat{q} \otimes \delta q \\ \mathbf{R}_B^I(q_t) &= \mathbf{R}_B^I(\hat{q} \otimes \delta q) \\ &= \mathbf{R}_B^I(\hat{q}) \cdot \mathbf{R}_B^I(\delta q) \\ &\approx \mathbf{R}_B^I(\hat{q}) \cdot (\mathbf{I}_{3 \times 3} + [\delta \boldsymbol{\theta} \times]) \end{aligned}$$

这是文献 [4] 第 5.3.3 节方程 (238) 的选择，是其推导方程 (237b) 的基础。如果选择常规的旋转矩阵翻转，则推导出另外的结果。

误差状态建模一个很重要的假设就是：系统的误差由噪声所驱动。因此误差状态向量的转移方程中的控制向量 \mathbf{u} 由传感器的噪声构成，因此误差状态向量的控制输入矩阵 \mathbf{G} 又称为干扰矩阵。

7.4 连续时间的系统动力学

7.4.1 真实状态动力学

真实状态动力学是

$$\begin{aligned} \dot{q}_t &= \frac{1}{2} q_t \cdot \boldsymbol{\omega}_t \\ \dot{\mathbf{V}}_t &= \mathbf{a}_t \\ \dot{\mathbf{P}}_t &= \mathbf{V}_t \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{bt} &= \boldsymbol{\omega}_w \\ \dot{\mathbf{a}}_{bt} &= \mathbf{a}_w \\ \dot{\mathbf{M}}_{bt} &= \mathbf{M}_w \end{aligned}$$

在这里，根据传感器动力学误差模型，在机体坐标系中，从 IMU 中以带噪声的传感器读数 $\boldsymbol{\omega}_m$ 和 \mathbf{a}_m 的形式获得真实的角速度 $\boldsymbol{\omega}_t$ 和加速度 \mathbf{a}_t ，从磁力计中以带噪声的传感器读数 \mathbf{M}_m 的形式获得真实的地磁数据 \mathbf{M}_t ，即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_m &= \boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{\omega}_{bt} + \boldsymbol{\omega}_n \\ \mathbf{a}_m &= \mathbf{R}_t^\top \cdot (\mathbf{a}_t - \mathbf{g}_t) + \mathbf{a}_{bt} + \mathbf{a}_n \\ \mathbf{M}_m &= \mathbf{R}_t^\top \cdot \mathbf{M}_t + \mathbf{M}_{bt} + \mathbf{M}_n \end{aligned}$$

其中， $\mathbf{R}_t \triangleq \mathbf{R}_B^I(q_t)$ 。这样，真实值就可以被分离出来（这意味着我们已经将测量方程颠倒了），

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_t &= \boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_{bt} - \boldsymbol{\omega}_n \\ \mathbf{a}_t &= \mathbf{R}_t \cdot (\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_{bt} - \mathbf{a}_n) + \mathbf{g}_t \\ \mathbf{M}_t &= \mathbf{R}_t \cdot (\mathbf{M}_m - \mathbf{M}_{bt} - \mathbf{M}_n) \end{aligned}$$

代入上面的结果得到真实状态的动力学系统

$$\begin{aligned}\dot{q}_t &= \frac{1}{2}q_t \cdot (\omega_m - \omega_{bt} - \omega_n) \\ \dot{\mathbf{V}}_t &= \mathbf{R}_t \cdot (\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_{bt} - \mathbf{a}_n) + \mathbf{g}_t \\ \dot{\mathbf{P}}_t &= \mathbf{V}_t \\ \dot{\omega}_{bt} &= \omega_w \\ \dot{\mathbf{a}}_{bt} &= \mathbf{a}_w \\ \dot{\mathbf{M}}_{bt} &= \mathbf{M}_w\end{aligned}$$

我们可以把它命名为 $\mathbf{x}_t = f_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ 。这个系统具有状态 \mathbf{x}_t ，由 IMU 带噪声的读数 \mathbf{u} 控制，并受白高斯噪声 \mathbf{w} 干扰，所有这些都定义为

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} q_t^T & \mathbf{V}_t^T & \mathbf{P}_t^T & \omega_{bt}^T & \mathbf{a}_{bt}^T & \mathbf{M}_{bt}^T \end{bmatrix}^T, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \omega_m - \omega_n \\ \mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n \\ \mathbf{M}_m - \mathbf{M}_n \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \omega_w \\ \mathbf{a}_w \\ \mathbf{M}_w \end{bmatrix}$$

其中 \mathbf{M}_w 为磁强计的过程噪声。磁强计将在最终的 Kalman 滤波实现中用作测量。磁强计不是惯性传感器，其误差动态与惯性导航状态不耦合，但由于 Kalman 滤波测量更新方程会引入一定的相关性，因此仍会在总误差状态向量中增加偏差项。这里的磁强计偏差向量 $\mathbf{M}_m - \mathbf{M}_n$ 被视为一个缓慢发散的随机游走过程，由噪声过程 \mathbf{M}_w 驱动，具有互相关。

7.4.2 标称状态动力学

我们要做最优估计的目标，标称状态向量为：

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{q}^T & \hat{\mathbf{V}}^T & \hat{\mathbf{P}}^T & \hat{\omega}_b^T & \hat{\mathbf{a}}_b^T & \hat{\mathbf{M}}_b^T \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

标称状态动力学对应于无噪声或扰动的建模系统，也就是最终估计出来的结果去除了噪声或扰动，

$$\begin{aligned}\dot{\hat{q}} &= \frac{1}{2}\hat{q} \cdot (\omega_m - \hat{\omega}_b) \\ \dot{\hat{\mathbf{V}}} &= \mathbf{R} \cdot (\mathbf{a}_m - \hat{\mathbf{a}}_b) + \mathbf{g} \\ \dot{\hat{\mathbf{P}}} &= \hat{\mathbf{V}} \\ \dot{\hat{\omega}}_b &= 0 \\ \dot{\hat{\mathbf{a}}}_b &= 0 \\ \dot{\hat{\mathbf{M}}}_b &= 0\end{aligned}$$

其中， $\mathbf{R} \triangleq \mathbf{R}_B^I(\hat{q})$ 。

7.4.3 误差状态动力学

目标是确定误差状态的线性化动力学。有误差状态向量：

$$\delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta \theta^T & \delta \mathbf{V}^T & \delta \mathbf{P}^T & \delta \omega_b^T & \delta \mathbf{a}_b^T & \delta \mathbf{M}_b^T \end{bmatrix}^T \quad (20)$$

对于每个状态方程，我们在上表中显示了它和标称状态的组合方程，在此求解误差状态并简化所有二阶无穷小。我们在此给出全误差状态动力学系统，并进行证明。

$$\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = -[(\boldsymbol{\omega}_m - \hat{\boldsymbol{\omega}}_b) \times] \delta\boldsymbol{\theta} - \delta\boldsymbol{\omega}_b - \boldsymbol{\omega}_n \quad (21)$$

$$\delta\dot{\mathbf{V}} = -\mathbf{R} \cdot [(\mathbf{a}_m - \hat{\mathbf{a}}_b) \times] \delta\boldsymbol{\theta} - \mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{a}_b - \mathbf{R} \cdot \mathbf{a}_n \quad (22)$$

$$\delta\dot{\mathbf{P}} = \delta\mathbf{V} \quad (23)$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = \boldsymbol{\omega}_w \quad (24)$$

$$\delta\dot{\mathbf{a}}_b = \mathbf{a}_w \quad (25)$$

$$\delta\dot{\mathbf{M}}_b = \mathbf{M}_w \quad (26)$$

方程 (23), (24), (25) 和 (26), 分别是位置和 3 个偏差, 从线性方程组导出, 并且它们的误差状态动力学是平凡的。

姿态误差方程 (21) 和速度方程 (22), 需要对非线性方程 (21) 和 (22) 进行一些非平凡的操作, 以获得线性化动力学。它们的证明在以下两个部分中展开。

姿态误差动力学 我们想确定 $\delta\boldsymbol{\theta}$, 角度误差的动力学。我们从以下关系开始

$$\begin{aligned} \dot{q}_t &= \frac{1}{2} q_t \cdot \boldsymbol{\omega}_t \\ \dot{\hat{q}} &= \frac{1}{2} \hat{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

这是四元数导数的真实定义和标称定义。其中, q 为估计的相对于惯性坐标系的机体当前姿态。

为了清晰起见, 我们把角速度按大信号和小信号项分组,

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\omega}} &\triangleq \boldsymbol{\omega}_m - \hat{\boldsymbol{\omega}}_b \\ \delta\boldsymbol{\omega} &\triangleq -(\boldsymbol{\omega}_{bt} - \hat{\boldsymbol{\omega}}_b) - \boldsymbol{\omega}_n \\ &= -\delta\boldsymbol{\omega}_b - \boldsymbol{\omega}_n \end{aligned}$$

其中, $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 即为机体坐标系中估计的角速度。则真实角速度 $\boldsymbol{\omega}_t$ 可以分为一个标称部分和一个误差部分,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_t &= \boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_{bt} - \boldsymbol{\omega}_n \\ &= \boldsymbol{\omega}_m - \hat{\boldsymbol{\omega}}_b - (\boldsymbol{\omega}_{bt} - \hat{\boldsymbol{\omega}}_b) - \boldsymbol{\omega}_n \\ &= \hat{\boldsymbol{\omega}} + \delta\boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

根据上一小节的说明, 由此看出, $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 去除了噪声或扰动, 而将噪声或扰动集中于 $\delta\boldsymbol{\omega}$ 中。后面的误差动力系统也就是要对 $\delta\boldsymbol{\omega}$ 的变化进行分析。

对于 $\delta\theta$ ，我们先根据方程 $q_t = \delta q \cdot \hat{q}$ ，得到 $\delta q = q_t \cdot \hat{q}^{-1}$ ，然后对此方程求微分

$$\begin{aligned}
\delta q(\delta\theta) &= q \cdot \hat{q}^{-1} \\
\dot{\delta q}(\delta\theta) &= \dot{q} \cdot \hat{q}^{-1} + q \cdot \dot{\hat{q}}^{-1} \\
&\because \hat{q}^{-1} \cdot \hat{q} = 1 \quad \therefore \frac{d(\hat{q}^{-1} \cdot \hat{q})}{dt} = 0 \\
&\therefore \frac{d(\hat{q}^{-1} \cdot \hat{q})}{dt} = \dot{\hat{q}}^{-1} \cdot \hat{q} + \hat{q}^{-1} \cdot \dot{\hat{q}} \\
&\therefore \dot{\hat{q}}^{-1} = -\hat{q}^{-1} \cdot \dot{\hat{q}} \cdot \hat{q}^{-1} = -\hat{q}^{-1} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} \hat{q} \cdot \hat{q}^{-1} = -\frac{1}{2} \hat{q}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} \\
\dot{\delta q}(\delta\theta) &= \dot{q} \hat{q}^{-1} + q \cdot \dot{\hat{q}}^{-1} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_t \end{bmatrix} q \cdot \hat{q}^{-1} - \frac{1}{2} q \cdot \hat{q}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_t \end{bmatrix} \delta q(\delta\theta) - \frac{1}{2} \delta q(\delta\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta\omega \end{bmatrix} \delta q(\delta\theta) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} \delta q(\delta\theta) - \frac{1}{2} \delta q(\delta\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} \\
2\dot{\delta q}(\delta\theta) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \delta\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\delta\theta}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\delta\theta}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\delta\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} \\
2 \begin{bmatrix} \dot{\delta\theta} \\ \frac{\delta\dot{\theta}}{2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\delta\omega \cdot \frac{\delta\theta}{2} \\ \delta\omega + \delta\omega \times \frac{\delta\theta}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{\omega} \cdot \frac{\delta\theta}{2} \\ \hat{\omega} + \hat{\omega} \times \frac{\delta\theta}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{\delta\theta}{2} \cdot \hat{\omega} \\ \hat{\omega} + \frac{\delta\theta}{2} \times \hat{\omega} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \dot{\delta\theta} \\ \delta\dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\delta\omega \cdot \frac{\delta\theta}{2} \\ \delta\omega + \delta\omega \times \frac{\delta\theta}{2} - \hat{\omega} \times \delta\theta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

忽略 $\delta\theta$ 中高于一阶的项和与角速度误差的乘积，给出线性 EKF 近似值

$$\begin{aligned}
\dot{\delta\theta} &= \delta\omega - \hat{\omega} \times \delta\theta \\
&= -\delta\omega_b - \omega_n - [(\omega_m - \hat{\omega}_b) \times] \delta\theta \\
&= -[(\omega_m - \hat{\omega}_b) \times] \delta\theta - \delta\omega_b - \omega_n
\end{aligned}$$

在早期的论文中， $\delta\omega$ 会被展开，则该方程变为

$$\dot{\delta\theta} = -[(\omega_m - \hat{\omega}_b) \times] \delta\theta + \hat{\omega}_b - \omega_{bt} - \omega_n$$

线速度误差动力学 根据方程 $\dot{V} = R \cdot (a_m - \hat{a}_b) + g$ ，我们重写方程引入机体坐标系中的估计加速度 \hat{a}_B 和加速度偏差 δa_B ，定义为机体坐标系中的大信号和小信号加速度，

$$\begin{aligned}
\hat{a}_B &\triangleq a_m - \hat{a}_b \\
\delta a_B &\triangleq -(a_{bt} - \hat{a}_b) - a_n \\
&= -\delta a_b - a_n
\end{aligned}$$

其中, $\hat{\mathbf{a}}_B$ 即为机体坐标系中估计的加速度。所以我们可以把惯性系中的真实加速度 \mathbf{a}_t 分成大、小信号项的组合,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{V}} &= \mathbf{a}_t \\ &= \mathbf{R}_t \cdot (\hat{\mathbf{a}}_B + \delta \mathbf{a}_B) + \mathbf{g}\end{aligned}$$

估计速度的动力学方程为,

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{a}}_B + \mathbf{g}$$

将四元数变换为旋转矩阵的公式为Rodrigues 的旋转公式:

$$\mathbf{R}(q) = 2\mathbf{q}_v \mathbf{q}_v^T + \mathbf{I}_{3 \times 3} (q_r^2 - \mathbf{q}_v^T \mathbf{q}_v) + 2q_r [\mathbf{q}_v \times]$$

因为误差 $\delta \boldsymbol{\theta}$ 很小, 所以 $q_r \rightarrow 1, \|\mathbf{q}_v\| \rightarrow 0$, 所以上式忽略二阶误差项:

$$\mathbf{R}(\delta q) = \mathbf{I} + [\delta \boldsymbol{\theta} \times]$$

并且

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(q_t) &= \mathbf{R}(\hat{q} \otimes \delta q) \\ &= \mathbf{R}(\hat{q}) \mathbf{R}(\delta q) \\ &= \mathbf{R}(\hat{q}) (\mathbf{I} + [\delta \boldsymbol{\theta} \times])\end{aligned}$$

我们希望确定的 $\delta \dot{\mathbf{V}}$, 速度误差的动力学方程为:

$$\begin{aligned}\delta \dot{\mathbf{V}} &= \dot{\mathbf{V}} - \dot{\hat{\mathbf{V}}} \\ &= \mathbf{R}_t \cdot (\hat{\mathbf{a}}_B + \delta \mathbf{a}_B) + \mathbf{g} - (\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{a}}_B + \mathbf{g}) \\ &= \mathbf{R}_t \cdot \hat{\mathbf{a}}_B + \mathbf{R}_t \cdot \delta \mathbf{a}_B - \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{a}}_B \\ &= \mathbf{R}(\hat{q}) (\mathbf{I} + [\delta \boldsymbol{\theta} \times]) \cdot \hat{\mathbf{a}}_B + \mathbf{R}(\hat{q}) (\mathbf{I} + [\delta \boldsymbol{\theta} \times]) \cdot \delta \mathbf{a}_B - \mathbf{R}(\hat{q}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_B \\ &= \mathbf{R}(\hat{q}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_B + \mathbf{R}(\hat{q}) [\delta \boldsymbol{\theta} \times] \cdot \hat{\mathbf{a}}_B + \mathbf{R}(\hat{q}) \cdot \delta \mathbf{a}_B + \mathbf{R}(\hat{q}) [\delta \boldsymbol{\theta} \times] \cdot \delta \mathbf{a}_B - \mathbf{R}(\hat{q}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_B \\ &= \mathbf{R}(\hat{q}) [\delta \boldsymbol{\theta} \times] \cdot \hat{\mathbf{a}}_B + \mathbf{R}(\hat{q}) \cdot \delta \mathbf{a}_B + \mathbf{R}(\hat{q}) [\delta \boldsymbol{\theta} \times] \cdot \delta \mathbf{a}_B\end{aligned}$$

去掉二阶项, 重新组织一些交叉积 (用 $[\mathbf{a} \times] \mathbf{b} = -[\mathbf{b} \times] \mathbf{a}$), 我们得到

$$\begin{aligned}\delta \dot{\mathbf{V}} &= -\mathbf{R}(\hat{q}) [(\mathbf{a}_m - \hat{\mathbf{a}}_b) \times] \delta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{R}(\hat{q}) (-\delta \mathbf{a}_b - \mathbf{a}_n) \\ &= -\mathbf{R}(\hat{q}) [(\mathbf{a}_m - \hat{\mathbf{a}}_b) \times] \delta \boldsymbol{\theta} - \mathbf{R}(\hat{q}) \delta \mathbf{a}_b - \mathbf{R}(\hat{q}) \mathbf{a}_n\end{aligned}$$

为简化方程减少运算量, 文献 [4] 第 5.3.3 节的方程 (247)-(248) 进一步证明, 在假设加速度计噪声是白色的、不相关的、各向同性的情况下, $\mathbf{R}(\hat{q}) \mathbf{a}_n \rightarrow \mathbf{a}_n$, 所以上式可以写为

$$\delta \dot{\mathbf{V}} = -\mathbf{R}(\hat{q}) [(\mathbf{a}_m - \hat{\mathbf{a}}_b) \times] \delta \boldsymbol{\theta} - \mathbf{R}(\hat{q}) \delta \mathbf{a}_b - \mathbf{a}_n$$

7.4.4 状态空间形式的误差状态动力学

根据前面的推导，我们为 Kalman 滤波器需要将误差状态动力学方程整理为状态空间形式：

$$\dot{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{x} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{w}$$

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\theta} \\ \delta \dot{\mathbf{V}} \\ \delta \dot{\mathbf{P}} \\ \delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_b \\ \delta \dot{\mathbf{a}}_b \\ \delta \dot{\mathbf{M}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\omega}} \times] & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{R}(\hat{q})[\hat{\mathbf{a}}_B \times] & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}(\hat{q}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \theta \\ \delta \mathbf{V} \\ \delta \mathbf{P} \\ \delta \boldsymbol{\omega}_b \\ \delta \mathbf{a}_b \\ \delta \mathbf{M}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega}_n \\ -\mathbf{a}_n \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \boldsymbol{\omega}_w \\ \mathbf{a}_w \\ \mathbf{M}_w \end{bmatrix}$$

因此动力学矩阵 \mathbf{A} 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\omega}} \times] & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{R}(\hat{q})[\hat{\mathbf{a}}_B \times] & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}(\hat{q}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

这个 18×18 项的误差状态空间模型将用于 Kalman 滤波。一个重要的结果是，该模型是线性与时变的误差状态。这种方法的优点是，在实现实时 Kalman 滤波时，可以根据 IMU 积分得到的信息构造状态转移矩阵，而不必知道最后测量时刻的误差状态。这种形式的另一个优点是它的计算不涉及三角运算。第三个优点是，该模型是一个真正的随机系统，由白噪声序列驱动，白噪声序列具有可测量或易于逼近的谱密度。

因为向量 \mathbf{w} 是一个单位方差零均值的白噪声序列。矩阵 \mathbf{G} 将白噪声序列转化为干扰 (disturbance) 向量，因此矩阵 \mathbf{G} 为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \text{diag}(-\boldsymbol{\sigma}_\omega) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \text{diag}(-\boldsymbol{\sigma}_a) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}_{\omega_b}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}_{a_b}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}_{M_b}) \end{bmatrix}$$

因此，干扰向量的不确定性可以表示为：

$$E[(\mathbf{G}\mathbf{w}(t))(\mathbf{G}\mathbf{w}(\tau))^T] = \mathbf{Q}_c \delta(t - \tau),$$

其中 \mathbf{Q}_c 为连续时间的过程噪声协方差矩阵，其可简化为：

$$\mathbf{Q}_c \delta(t - \tau) = \mathbf{G}\mathbf{G}^T \delta(t - \tau) = \begin{bmatrix} \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}_\omega^2) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}_a^2) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}_{\omega_b}^2) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}_{a_b}^2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}_{M_b}^2) \end{bmatrix} \delta(t - \tau).$$

7.5 离散时间系统动力学

对于离散系统，上面的微分方程需要积分到差分方程中，以考虑离散时间间隔 $\Delta t > 0$ 。积分方法可能有所不同。在某些情况下，可以使用精确的闭式解。在其它情况下，可采用不同精度的数值积分。

需要对以下子系统进行积分：

1. 标称状态。
2. 误差状态。
 - (a) 确定性部分：状态动力学和控制。
 - (b) 随机部分：噪声和扰动。

此外，后面的方程里使用的 $\hat{\omega}$ 和 \hat{a}_B 为机体坐标系中估计的角速度和加速度，其值可以为当前的估计值，也可以是采用梯形积分法计算的平均值。计算四元数的平均值的方法见文献 [2] 第 1.6.2 节、文献 [3] 附录 B、文献 [4] 第 4.6.2 节，各自都从不同角度计算四元数的平均值。

7.5.1 标称状态动力学

根据标称状态向量的定义：

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{q}^T & \hat{V}^T & \hat{P}^T & \hat{\omega}_b^T & \hat{a}_b^T & \hat{M}_b^T \end{bmatrix}^T$$

我们可以把标称状态的差分方程，也就是注入误差方程，写为

$$\begin{aligned} \hat{q} &\leftarrow \hat{q} \otimes \delta q \{\hat{\omega} \Delta t\} \\ \hat{V} &\leftarrow \hat{V} + (\mathbf{R} \cdot \hat{a}_B + \mathbf{g}) \Delta t \\ \hat{P} &\leftarrow \hat{P} + \hat{V} \Delta t + \frac{1}{2} (\mathbf{R} \cdot \hat{a}_B + \mathbf{g}) \Delta t^2 \\ \hat{\omega}_b &\leftarrow \hat{\omega}_b \\ \hat{a}_b &\leftarrow \hat{a}_b \\ \hat{M}_b &\leftarrow \hat{M}_b \end{aligned}$$

其中， $\mathbf{x} \leftarrow f(\mathbf{x}, \bullet)$ 表示类型为 $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \bullet_k)$ ， $\mathbf{R} \triangleq \mathbf{R}(\hat{q})$ 的时间更新是与当前标称方向 \hat{q} 相关联的旋转矩阵，并且 $\delta q\{\mathbf{v}\}$ 是与旋转向量 \mathbf{v} 相关联的四元数。

7.5.2 误差状态动力学

根据前面所推导的误差状态动力学方程，我们可以写出误差状态的差分方程。因为所有的不确定性都归于误差，所以差分方程会分为确定性和随机性两个部分。确定性部分是正常积分的，同时

随机部分的积分产生随机脉冲 (impulse)，参见文献 [3] 附录 E，因此，

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\theta} &\leftarrow \mathbf{R}_I^B(\hat{\boldsymbol{\omega}}\Delta t)\delta\boldsymbol{\theta} - \delta\boldsymbol{\omega}_b\Delta t + \boldsymbol{\theta}_i \\
\delta\mathbf{V} &\leftarrow \delta\mathbf{V} + (\mathbf{R}(\hat{q})[\hat{\mathbf{a}}_B \times] \delta\boldsymbol{\theta} - \mathbf{R}(\hat{q})\delta\mathbf{a}_b)\Delta t + \mathbf{v}_i \\
\delta\mathbf{P} &\leftarrow \delta\mathbf{P} + \delta\mathbf{V}\Delta t \\
\delta\boldsymbol{\omega}_b &\leftarrow \delta\boldsymbol{\omega}_b + \boldsymbol{\omega}_i \\
\delta\mathbf{a}_b &\leftarrow \delta\mathbf{a}_b + \mathbf{a}_i \\
\delta\mathbf{M}_b &\leftarrow \delta\mathbf{M}_b + \mathbf{m}_i
\end{aligned}$$

这里的 $\boldsymbol{\theta}_i$, \mathbf{V}_i , $\boldsymbol{\omega}_i$, \mathbf{a}_i 和 \mathbf{m}_i 是应用于方向、速度、和几个偏差估计的随机脉冲，由白色高斯过程建模。它们的均值为零，并且它们的协方差矩阵由在时间步 Δt 内的 $\boldsymbol{\omega}_n$, \mathbf{a}_n , $\boldsymbol{\omega}_w$, \mathbf{a}_w 和 \mathbf{M}_w 的协方差的积分获得的 (参见文献 [3] 附录 E)，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Theta}_i &= \sigma_{\omega}^2 \Delta t^2 \mathbf{I} \\
\mathbf{V}_i &= \sigma_a \Delta t^2 \mathbf{I} \\
\boldsymbol{\Omega}_i &= \sigma_{\omega_b} \Delta t \mathbf{I} \\
\mathbf{A}_i &= \sigma_{a_b} \Delta t \mathbf{I} \\
\mathbf{M}_i &= \sigma_{M_b} \Delta t \mathbf{I}
\end{aligned}$$

这些 σ 应根据 IMU 数据表中的信息或通过实验测量确定。

值得注意的是，因为 ESKF 在每一次循环迭代结束的时候都会有一次重置操作，因为误差已经注入到标称状态中，所以 $\delta\mathbf{x} = 0$ ，所以上述确定性部分都为零。又因为误差的 σ 已经很小，误差的误差的 σ 会更小，并且 IMU 都是高频采样， Δt 也很小，所以随机脉冲部分也会趋向于零。所以在很多 ESKF 的实现中，基本上都是假设 $\delta\mathbf{x}$ 不变化，从而跳过计算 $\delta\mathbf{x}$ 的时间更新步骤。这一阶段的主要目的是要计算误差协方差 \mathbf{P} 的时间更新，也就是下一节的内容。

7.5.3 误差状态 Jacobian 矩阵

误差状态的 Jacobians 矩阵是通过简单检查前面章节中的误差状态差分方程得到的。

状态转换矩阵 \mathbf{F} 为

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{x}_k \\
&= e^{\mathbf{A}\Delta t} \cdot \delta\mathbf{x}_k
\end{aligned}$$

其中 \mathbf{F} 称为状态转移矩阵。这个转移矩阵的泰勒展开式是

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}\Delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t + \frac{(\mathbf{A}\Delta t)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}\Delta t)^3}{3!} + \frac{(\mathbf{A}\Delta t)^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{A}\Delta t)^k$$

因为误差状态一般都很小，为简化计算，离散状态转移模型可以采用一阶形式，该模型由误差状态向量的动力学以明显的形式确定：

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t$$

或者是二阶形式，

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\Delta t^2$$

如果需要更高精度的封闭积分形式的解, 在文献 [2] 第 2.5 节和文献 [4] 附录 B 中有推导方法。在下一章中我们将采用文献 [2,3] 的方法推导封闭积分形式的解。

连续时间的过程噪声协方差矩阵 \mathbf{Q}_c 在前面的章节以及推导除了。离散时间的过程噪声协方差矩阵 \mathbf{Q}_d , 在此被称为状态误差矩阵:

$$\mathbf{Q}_d = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t - \tau)} \mathbf{Q}_c e^{\mathbf{A}^T(\Delta t - \tau)} d\tau$$

参考文献 [3] 的第 2.5.2 节, 我们可以在 $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{R}(\hat{q}) = \mathbf{I}$ 周围线性化 \mathbf{A} , 推导得到文献 [3] 的方程 (97):

$$\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} \wedge(\sigma_{\omega}^2)\Delta t + \wedge(\sigma_{\omega_b}^2)\frac{\Delta t^3}{3} & 0 & 0 & -\wedge(\sigma_{\omega_b}^2)\frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \wedge(\sigma_a^2)\Delta t + \wedge(\sigma_{a_b}^2)\frac{\Delta t^3}{3} & \wedge(\sigma_{a_b}^2)\frac{\Delta t^4}{8} + \wedge(\sigma_a^2)\frac{\Delta t^2}{2} & 0 & -\wedge(\sigma_{a_b}^2)\frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ 0 & \wedge(\sigma_a^2)\frac{\Delta t^2}{2} + \wedge(\sigma_{a_b}^2)\frac{\Delta t^4}{8} & \wedge(\sigma_a^2)\frac{\Delta t^3}{3} + \wedge(\sigma_{a_b}^2)\frac{\Delta t^5}{20} & 0 & -\wedge(\sigma_{a_b}^2)\frac{\Delta t^3}{6} & 0 \\ -\wedge(\sigma_{\omega_b}^2)\frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & \wedge(\sigma_{\omega_b}^2)\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & -\wedge(\sigma_{a_b}^2)\frac{\Delta t^2}{2} & -\wedge(\sigma_{a_b}^2)\frac{\Delta t^3}{6} & 0 & \wedge(\sigma_{a_b}^2)\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \wedge(\sigma_{M_b}^2)\Delta t \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } \wedge(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix}。$$

8 先验协方差传播的高阶解

我们已知误差状态动力学方程的状态空间形式为:

$$\dot{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{x} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{w}$$

其中, 动力学矩阵 \mathbf{A} 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\omega}} \times] & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{R}(\hat{q})[\hat{\mathbf{a}}_B \times] & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}(\hat{q}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

其中, $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\hat{\mathbf{a}}_B$ 为机体坐标系中估计的角速度和加速度, 其值可以为当前的估计值, 也可以是采用梯形积分法计算的平均值。计算四元数的平均值的方法见文献 [2] 第 1.6.2 节、文献 [3] 附录 B、文献 [4] 第 4.6.2 节, 各自都从不同角度计算四元数的平均值。并且 \mathbf{w} 为单位方差, 零均值白噪声向量。干扰矩阵 \mathbf{G} 为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \text{diag}(-\sigma_{\omega}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \text{diag}(-\sigma_a) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \text{diag}(\sigma_{\omega_b}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \text{diag}(\sigma_{a_b}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \text{diag}(\sigma_{M_b}) \end{bmatrix}$$

因此，干扰向量的不确定性可以表示为：

$$E \left[(\mathbf{G}\mathbf{w}(t)) (\mathbf{G}\mathbf{w}(\tau))^T \right] = \mathbf{Q}_c \delta(t - \tau),$$

其中 \mathbf{Q}_c 为连续时间的过程噪声协方差矩阵，其可简化为：

$$\mathbf{Q}_c \delta(t - \tau) = \mathbf{G}\mathbf{G}^T \delta(t - \tau) = \begin{bmatrix} \text{diag}(\sigma_\omega^2) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}(\sigma_a^2) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \text{diag}(\sigma_{\omega_b}^2) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \text{diag}(\sigma_{a_b}^2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \text{diag}(\sigma_{M_b}^2) \end{bmatrix} \delta(t - \tau).$$

状态空间微分方程的解是众所周知的结果：

$$\delta\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \delta\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{G}\mathbf{w}(\tau) d\tau$$

我们感兴趣的是 $t = t_k$ 和 $t_0 = t_{k-1}$ ，因此 $t_k - t_{k-1} = \Delta t$ ，并在 $\tau' = \tau - t_{k-1}$ 的积分中进行替换

$$\delta\mathbf{x}(t_k) = e^{\mathbf{A}\Delta t} \delta\mathbf{x}(t_{k-1}) + \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t - \tau')} \mathbf{G}\mathbf{w}(\tau' + t_{k-1}) d\tau'$$

$\delta\mathbf{x}(t_k)$ 的协方差由以下公式给出：

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k-1} &= E [\delta\mathbf{x}(t_k) \delta\mathbf{x}(t_k)^T] \\ &= E \left[\left(e^{\mathbf{A}\Delta t} \delta\mathbf{x}(t_{k-1}) + \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t - \tau')} \mathbf{G}\mathbf{w}(\tau' + t_{k-1}) d\tau' \right) \left(e^{\mathbf{A}\Delta t} \delta\mathbf{x}(t_{k-1}) + \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t - \tau'')} \mathbf{G}\mathbf{w}(\tau'' + t_{k-1}) d\tau'' \right)^T \right] \end{aligned}$$

在此基础上，我们删除了 $\delta\mathbf{x}$ 和 \mathbf{w} 的乘积，因为它们是不相关的，并且都有 0 的期望值：

$$\begin{aligned} E [\delta\mathbf{x}(t_k) \delta\mathbf{x}(t_k)^T] &= e^{\mathbf{A}\Delta t} E [\delta\mathbf{x}(t_{k-1}) \delta\mathbf{x}(t_{k-1})^T] e^{\mathbf{A}^T \Delta t} \\ &\quad + \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t - \tau')} E [\mathbf{G}\mathbf{w}(\tau' + t_{k-1}) \mathbf{w}(\tau'' + t_{k-1})^T \mathbf{G}^T] e^{\mathbf{A}^T (\Delta t - \tau'')} d\tau' d\tau'' \\ E [\delta\mathbf{x}(t_k) \delta\mathbf{x}(t_k)^T] &= e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{P}_{(k-1|k-1)} e^{\mathbf{A}^T \Delta t} + \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t - \tau')} \mathbf{Q}_c \delta(\tau' - \tau'') e^{\mathbf{A}^T (\Delta t - \tau'')} d\tau' d\tau'' \\ E [\delta\mathbf{x}(t_k) \delta\mathbf{x}(t_k)^T] &= \mathbf{F} \mathbf{P}_{(k-1|k-1)} \mathbf{F}^T + \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t - \tau'')} \mathbf{Q}_c e^{\mathbf{A}^T (\Delta t - \tau'')} d\tau'' \end{aligned}$$

因此， $\mathbf{Q}_d = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t - \tau)} \mathbf{Q}_c e^{\mathbf{A}^T (\Delta t - \tau)} d\tau$ ，这是所需的结果。

8.1 转移矩阵 \mathbf{F} 的闭式解

在许多情况下，可以为积分步骤得到一个封闭形式的表达式。我们考虑相对于时间 t 的一阶线性微分方程的情况，

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_t$$

也就是说，这个关系是线性的，并且在区间上是常数。在这种情况下，在区间 $[t_n, t_n + \Delta t]$ 上的积分导致

$$\mathbf{x}_{n+1} = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{x}_n = \mathbf{F} \mathbf{x}_n$$

我们可以观察到 \mathbf{A} 的幂增长项有一个固定的部分和一个幂增长项部分。这些幂次项可以导致封闭形式的解。我们观察到以下情况，

- 这个幂增长项部分来源于旋转项 $[\hat{\omega} \times]$ ，这是 \mathbf{A} 中对角线中的唯一项，按 \mathbf{A}^k 幂次的顺序向右和向下传播。所有不受此传播影响的项都将消失。
- 在第 3 次幂之后， \mathbf{A} 的幂的稀疏性是稳定的。也就是说，在 \mathbf{A} 中对于大于 3 的幂，没有更多的非零块出现或消失。

我们将 \mathbf{A}^k 代回状态转移矩阵 \mathbf{F} 的方程里，得到一个稀疏矩阵，下面列出所有非零值的位置：

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\theta\theta} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \mathbf{F}_{\theta\omega b} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \mathbf{F}_{v\theta} & \mathbf{I} & 0_{3 \times 3} & \mathbf{F}_{v\omega b} & \mathbf{F}_{vab} & 0_{3 \times 3} \\ \mathbf{F}_{p\theta} & \mathbf{F}_{pv} & \mathbf{I} & \mathbf{F}_{p\omega b} & \mathbf{F}_{pab} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \mathbf{I} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \mathbf{I} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

其中，

| 符号 | 描述 | 方程 |
|-------------------------------|--------------|---|
| $\mathbf{F}_{\theta\theta}$ | 角度误差的积分项 | $\mathbf{F}_{\theta\theta} = \Sigma_0$ |
| $\mathbf{F}_{\theta\omega b}$ | 角度误差对比陀螺仪偏差项 | $\mathbf{F}_{\theta\omega b} = \Sigma_1$ |
| $\mathbf{F}_{v\theta}$ | 速度对比角度项 | $\mathbf{F}_{v\theta} = \mathbf{R}(\hat{q}) [\hat{\mathbf{a}}_B \times] \Sigma_1$ |
| $\mathbf{F}_{v\omega b}$ | 速度对比陀螺仪偏差项 | $\mathbf{F}_{v\omega b} = \mathbf{R}(\hat{q}) [\hat{\mathbf{a}}_B \times] \Sigma_2$ |
| \mathbf{F}_{vab} | 速度对比加速计偏差项 | $\mathbf{F}_{vab} = -\mathbf{R}(\hat{q}) \Delta t$ |
| $\mathbf{F}_{p\theta}$ | 位置对比角度项 | $\mathbf{F}_{p\theta} = -\mathbf{F}_{v\omega b}$ |
| \mathbf{F}_{pv} | 位置对比速度项 | $\mathbf{F}_{pv} = \frac{1}{2} \Delta t^2 \mathbf{I}$ |
| $\mathbf{F}_{p\omega b}$ | 位置对比陀螺仪偏差项 | $\mathbf{F}_{p\omega b} = \mathbf{R}(\hat{q}) [\hat{\mathbf{a}}_B \times] \Sigma_3$ |
| \mathbf{F}_{pab} | 位置对比加速计偏差项 | $\mathbf{F}_{pab} = -\frac{1}{2} \Delta t^2 \mathbf{R}(\hat{q})$ |

其中简单的方程已经在上表中直接列出。和旋转项 $[\hat{\omega} \times]$ 相关的级数的方程， $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ ，将

在下面推导。在此之前，我们先总结后面计算所需 $[\hat{\omega} \times]$ 的幂次的变化规律：

$$\begin{aligned}
[\hat{\omega} \times]^2 &= \hat{\omega} \hat{\omega}^T - |\hat{\omega}|^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} = |\hat{\omega}|^2 \left(\frac{\hat{\omega} \hat{\omega}^T}{|\hat{\omega}| |\hat{\omega}|} - \mathbf{I}_{3 \times 3} \right) \\
[\hat{\omega} \times]^3 &= -|\hat{\omega}|^2 \cdot [\hat{\omega} \times] \rightarrow -\frac{[\hat{\omega} \times]^3}{|\hat{\omega}|^3} = \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|} \\
[\hat{\omega} \times]^4 &= -|\hat{\omega}|^2 \cdot [\hat{\omega} \times]^2 \\
[\hat{\omega} \times]^5 &= +|\hat{\omega}|^4 \cdot [\hat{\omega} \times] \\
[\hat{\omega} \times]^6 &= +|\hat{\omega}|^4 \cdot [\hat{\omega} \times]^2 \\
[\hat{\omega} \times]^7 &= -|\hat{\omega}|^6 \cdot [\hat{\omega} \times] \\
[\hat{\omega} \times]^8 &= -|\hat{\omega}|^6 \cdot [\hat{\omega} \times]^2 \\
[\hat{\omega} \times]^9 &= +|\hat{\omega}|^8 \cdot [\hat{\omega} \times] \\
[\hat{\omega} \times]^{10} &= +|\hat{\omega}|^8 \cdot [\hat{\omega} \times]^2
\end{aligned}$$

8.1.1 角度误差的积分项

对于角度误差的积分 $\mathbf{F}_{\theta\theta}$ ，是研究得最多的项。在文献 [1-4] 中都有推导。在此标记为 Σ_0 ，我们使用斜对称矩阵 $[\hat{\omega} \times]$ 的幂次的性质（参见文献 [2] 第 1.3.2 节）并重新排序条目，得出

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\theta\theta} &= \mathbf{I}_{3 \times 3} - [\hat{\omega} \times] \Delta t + \frac{1}{2!} [\hat{\omega} \times]^2 \Delta t^2 - \frac{1}{3!} [\hat{\omega} \times]^3 \Delta t^3 + \frac{1}{4!} [\hat{\omega} \times]^4 \Delta t^4 + \dots \\
&= \mathbf{I}_{3 \times 3} + \left(-\Delta t + \frac{1}{3!} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^3 - \dots \right) [\hat{\omega} \times] + \left(\frac{1}{2!} \Delta t^2 - \frac{1}{4!} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^4 + \dots \right) [\hat{\omega} \times]^2 \\
&= \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|} \left(|\hat{\omega}| \Delta t - \frac{1}{3!} |\hat{\omega}|^3 \Delta t^3 + \dots \right) + \frac{[\hat{\omega} \times]^2}{|\hat{\omega}|^2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2!} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^2 + \frac{1}{4!} |\hat{\omega}|^4 \Delta t^4 - \dots \right) \right) \\
&= \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|} \sin(|\hat{\omega}| \Delta t) + \frac{[\hat{\omega} \times]^2}{|\hat{\omega}|^2} (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) \\
&= \cos(|\hat{\omega}| \Delta t) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} - \sin(|\hat{\omega}| \Delta t) \cdot \left[\frac{\hat{\omega}}{|\hat{\omega}|} \times \right] + (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) \cdot \frac{\hat{\omega} \hat{\omega}^T}{|\hat{\omega}| |\hat{\omega}|} \\
&= \mathbf{R}_I^B(\hat{\omega} \Delta t)
\end{aligned}$$

因此， $\mathbf{F}_{\theta\theta}$ 实际上是 \mathbf{R}_I^B 的旋转矩阵，其中 $\hat{\omega}/|\hat{\omega}|$ 为旋转轴， $|\hat{\omega}| \Delta t$ 为旋转角度。对于 $|\hat{\omega}|$ 的小值，上述任何一个表达式都将导致数值不稳定。通过极限和应用 L'Hôpital 法则，我们得出

$$\lim_{|\hat{\omega}| \rightarrow 0} \mathbf{F}_{\theta\theta} = \mathbf{I}_{3 \times 3} - \Delta t [\hat{\omega} \times] + \frac{\Delta t^2}{2} [\hat{\omega} \times]^2$$

8.1.2 角度误差对比陀螺仪偏差项

角度误差对比陀螺仪偏差的积分项 $\mathbf{F}_{\theta\omega b}$ 也是研究得最多的项, 在此标记为 Σ_1 ,

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\theta\omega b} &= -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{1}{2!} [\hat{\omega} \times] \Delta t^2 - \frac{1}{3!} [\hat{\omega} \times]^2 \Delta t^3 + \frac{1}{4!} [\hat{\omega} \times]^3 \Delta t^4 - \dots \\
&= -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \left(\frac{1}{2!} \Delta t^2 - \frac{1}{4!} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^4 + \dots \right) [\hat{\omega} \times] + \left(-\frac{1}{3!} \Delta t^3 + \frac{1}{5!} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^5 - \dots \right) [\hat{\omega} \times]^2 \\
&= -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|^2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2!} \Delta t^2 + \frac{1}{4!} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^4 - \dots \right) \right) \\
&\quad + \left(-\frac{|\hat{\omega}| \Delta t}{|\hat{\omega}|^3} + \left(\frac{|\hat{\omega}| \Delta t}{|\hat{\omega}|^3} - \frac{1}{3!} \Delta t^3 + \frac{1}{5!} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^5 - \dots \right) \right) [\hat{\omega} \times]^2 \\
&= -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|^2} (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) \\
&\quad + \left(-\frac{|\hat{\omega}| \Delta t}{|\hat{\omega}|^3} + \frac{1}{|\hat{\omega}|^3} \left(|\hat{\omega}| \Delta t - \frac{1}{3!} |\hat{\omega}|^3 \Delta t^3 + \frac{1}{5!} |\hat{\omega}|^5 \Delta t^5 - \dots \right) \right) [\hat{\omega} \times]^2 \\
&= -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|^2} (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) - \frac{[\hat{\omega} \times]^2}{|\hat{\omega}|^3} (|\hat{\omega}| \Delta t - \sin(|\hat{\omega}| \Delta t)) \\
&= -\mathbf{\Gamma}(\hat{\omega} \Delta t)
\end{aligned}$$

对于 $|\hat{\omega}|$ 的小值, 我们可以再次取其极限, 应用 L'Hôpital 法则, 得到

$$\begin{aligned}
\lim_{|\hat{\omega}| \rightarrow 0} \mathbf{F}_{\theta\omega b} &= -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \lim_{|\hat{\omega}| \rightarrow 0} \frac{\sin(|\hat{\omega}| \Delta t) \Delta t}{2 |\hat{\omega}|} [\hat{\omega} \times] - \lim_{|\hat{\omega}| \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) \Delta t}{3 |\hat{\omega}|^2} [\hat{\omega} \times]^2 \\
&= -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \lim_{|\hat{\omega}| \rightarrow 0} \frac{\cos(|\hat{\omega}| \Delta t) \Delta t^2}{2} [\hat{\omega} \times] - \lim_{|\hat{\omega}| \rightarrow 0} \frac{\sin(|\hat{\omega}| \Delta t) \Delta t^2}{6 |\hat{\omega}|} [\hat{\omega} \times]^2 \\
&= -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} [\hat{\omega} \times] - \lim_{|\hat{\omega}| \rightarrow 0} \frac{\cos(|\hat{\omega}| \Delta t) \Delta t^3}{6} [\hat{\omega} \times]^2 \\
&= -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} [\hat{\omega} \times] - \frac{\Delta t^3}{6} [\hat{\omega} \times]^2
\end{aligned}$$

实际上 $\mathbf{F}_{\theta\omega b}$ 是一个起始缺一次项的旋转矩阵, 并且 $[\hat{\omega} \times]$ 的幂次比 Δt 少一次。我们使用 $[\hat{\omega} \times]$ 的幂次这个工具可以对其变形, 以了解其中的几何意义:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\theta\omega b} &= -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|^2} (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) - \frac{[\hat{\omega} \times]^2}{|\hat{\omega}|^3} (|\hat{\omega}| \Delta t - \sin(|\hat{\omega}| \Delta t)) \\
&= -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|} \cdot \frac{1}{|\hat{\omega}|} (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) - \frac{[\hat{\omega} \times]^2}{|\hat{\omega}|^3} (|\hat{\omega}| \Delta t - \sin(|\hat{\omega}| \Delta t)) \\
&= -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t - \frac{[\hat{\omega} \times]^3}{|\hat{\omega}|^3} \cdot \frac{1}{|\hat{\omega}|} (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) - \frac{[\hat{\omega} \times]^2}{|\hat{\omega}|^3} (|\hat{\omega}| \Delta t - \sin(|\hat{\omega}| \Delta t)) \\
&= - \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|^2} \left(\frac{[\hat{\omega} \times]^2}{|\hat{\omega}|^2} (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) + \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|} (|\hat{\omega}| \Delta t - \sin(|\hat{\omega}| \Delta t)) \right) \right) \\
&= - \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|^2} \left(\frac{[\hat{\omega} \times]^2}{|\hat{\omega}|^2} (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) - \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|} \sin(|\hat{\omega}| \Delta t) + \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\hat{\omega} \times] \Delta t \right) \right) \\
&= - \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|^2} (\mathbf{R}_I^B(\hat{\omega} \Delta t) - \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\hat{\omega} \times] \Delta t) \right) \\
&= -\mathbf{\Gamma}(\hat{\omega} \Delta t)
\end{aligned}$$

这样就可以看到旋转矩阵 \mathbf{R} 所在的位置, 及其与 $\mathbf{\Gamma}$ 矩阵的关系。这与文献 [4] 推导的方程 (368b) 的结果类似。

8.1.3 三次起始项

Σ_2 是一个起始缺二次项的旋转矩阵, 并且 $[\dot{\omega} \times]$ 的幂次比 Δt 少两次。参照文献 [4] 的推导

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2 &= \frac{1}{2!} \Delta t^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} - [\dot{\omega} \times] \frac{1}{3!} \Delta t^3 + [\dot{\omega} \times]^2 \frac{1}{4!} \Delta t^4 - [\dot{\omega} \times]^3 \frac{1}{5!} \Delta t^5 + \dots \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t^2 - \frac{1}{|\dot{\omega}|^2} \left(|\dot{\omega}|^2 [\dot{\omega} \times] \frac{1}{3!} \Delta t^3 - |\dot{\omega}|^2 [\dot{\omega} \times]^2 \frac{1}{4!} \Delta t^4 + |\dot{\omega}|^2 [\dot{\omega} \times]^3 \frac{1}{5!} \Delta t^5 - \dots \right) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t^2 - \frac{1}{|\dot{\omega}|^2} \left(-[\dot{\omega} \times]^3 \frac{1}{3!} \Delta t^3 + [\dot{\omega} \times]^4 \frac{1}{4!} \Delta t^4 - [\dot{\omega} \times]^5 \frac{1}{5!} \Delta t^5 + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t^2 - \frac{1}{|\dot{\omega}|^2} \left(-\mathbf{I}_{3 \times 3} + [\dot{\omega} \times] \Delta t - \frac{1}{2!} [\dot{\omega} \times]^2 \Delta t^2 + \mathbf{I}_{3 \times 3} - [\dot{\omega} \times] \Delta t + \frac{1}{2!} [\dot{\omega} \times]^2 \Delta t^2 - [\dot{\omega} \times]^3 \frac{1}{3!} \Delta t^3 + [\dot{\omega} \times]^4 \frac{1}{4!} \Delta t^4 - [\dot{\omega} \times]^5 \frac{1}{5!} \Delta t^5 + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t^2 - \frac{1}{|\dot{\omega}|^2} \left(-\mathbf{I}_{3 \times 3} + [\dot{\omega} \times] \Delta t - \frac{1}{2!} [\dot{\omega} \times]^2 \Delta t^2 + \mathbf{R}_I^B (\dot{\omega} \Delta t) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t^2 - \frac{1}{|\dot{\omega}|^2} \left(\mathbf{R}_I^B (\dot{\omega} \Delta t) - \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\dot{\omega} \times] \Delta t - \frac{1}{2} [\dot{\omega} \times]^2 \Delta t^2 \right)
 \end{aligned}$$

从中可以看到旋转矩阵所在的位置。并且对比上一小节的 Σ_1 , 可以看到缺项对旋转矩阵的影响。因为 Σ_2 在 \mathbf{A}^2 之后才出现, 影响已经相当小, 所以对于 $|\dot{\omega}|$ 的小值, 可取截断级数的值为

$$\Sigma_2 \approx \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3}$$

如果需要对 Σ_2 求极限, 前一方程并不方便求极限, 所以需要另外的变形

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t^2 - \frac{1}{|\dot{\omega}|^2} \left(\mathbf{R}_I^B (\dot{\omega} \Delta t) - \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\dot{\omega} \times] \Delta t - \frac{1}{2} [\dot{\omega} \times]^2 \Delta t^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t^2 - \frac{1}{|\dot{\omega}|^2} \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{[\dot{\omega} \times]}{|\dot{\omega}|} \sin(|\dot{\omega}| \Delta t) + \frac{[\dot{\omega} \times]^2}{|\dot{\omega}|^2} (1 - \cos(|\dot{\omega}| \Delta t)) - \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\dot{\omega} \times] \Delta t - \frac{1}{2} [\dot{\omega} \times]^2 \Delta t^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t^2 - \frac{1}{|\dot{\omega}|^2} \left(-\frac{[\dot{\omega} \times]}{|\dot{\omega}|} \sin(|\dot{\omega}| \Delta t) + \frac{[\dot{\omega} \times]^2}{|\dot{\omega}|^2} (1 - \cos(|\dot{\omega}| \Delta t)) + \frac{|\dot{\omega}| [\dot{\omega} \times] \Delta t}{|\dot{\omega}|} - \frac{\frac{1}{2} |\dot{\omega}|^2 [\dot{\omega} \times]^2 \Delta t^2}{|\dot{\omega}|^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t^2 - \frac{1}{|\dot{\omega}|^2} \left(\frac{|\dot{\omega}| \Delta t - \sin(|\dot{\omega}| \Delta t)}{|\dot{\omega}|} [\dot{\omega} \times] - \frac{\frac{1}{2} |\dot{\omega}|^2 \Delta t^2 - (1 - \cos(|\dot{\omega}| \Delta t))}{|\dot{\omega}|^2} [\dot{\omega} \times]^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t^2 - \frac{|\dot{\omega}| \Delta t - \sin(|\dot{\omega}| \Delta t)}{|\dot{\omega}|^3} [\dot{\omega} \times] + \frac{\frac{1}{2} |\dot{\omega}|^2 \Delta t^2 - (1 - \cos(|\dot{\omega}| \Delta t))}{|\dot{\omega}|^4} [\dot{\omega} \times]^2 \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t^2 - \frac{|\dot{\omega}| \Delta t - \sin(|\dot{\omega}| \Delta t)}{(|\dot{\omega}| \Delta t)^3} [\dot{\omega} \times] \Delta t^3 + \frac{\frac{1}{2} |\dot{\omega}|^2 \Delta t^2 - (1 - \cos(|\dot{\omega}| \Delta t))}{(|\dot{\omega}| \Delta t)^4} [\dot{\omega} \times]^2 \Delta t^4
 \end{aligned}$$

对于 $|\dot{\omega}|$ 的小值, 采用文献 [2] 第 2.5.1 节的方法求极限可得

$$\Sigma_2 = \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{\Delta t^3}{6} [\dot{\omega} \times] + \frac{\Delta t^4}{24} [\dot{\omega} \times]^2$$

8.1.4 四次起始项

Σ_3 是一个起始缺三次项的旋转矩阵, 并且 $[\hat{\omega} \times]$ 的幂次比 Δt 少三次。参照文献 [4] 的推导

$$\begin{aligned}
\Sigma_3 &= \frac{1}{3!} \Delta t^3 \mathbf{I}_{3 \times 3} - [\hat{\omega} \times] \frac{1}{4!} \Delta t^4 + [\hat{\omega} \times]^2 \frac{1}{5!} \Delta t^5 - \dots \\
&= \frac{1}{3!} \Delta t^3 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|^4} \left(|\hat{\omega}|^4 \frac{1}{4!} \Delta t^4 - |\hat{\omega}|^4 [\hat{\omega} \times] \frac{1}{5!} \Delta t^5 + \dots \right) \\
&= \frac{1}{3!} \Delta t^3 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|^4} \left([\hat{\omega} \times]^4 \frac{1}{4!} \Delta t^4 - [\hat{\omega} \times]^5 \frac{1}{5!} \Delta t^5 + \dots \right) \\
&= \frac{1}{3!} \Delta t^3 \mathbf{I}_{3 \times 3} \\
&\quad - \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|^4} \left(-\mathbf{I}_{3 \times 3} + [\hat{\omega} \times] \Delta t - \frac{1}{2!} [\hat{\omega} \times]^2 \Delta t^2 + [\hat{\omega} \times]^3 \frac{1}{3!} \Delta t^3 \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{I}_{3 \times 3} - [\hat{\omega} \times] \Delta t + \frac{1}{2!} [\hat{\omega} \times]^2 \Delta t^2 - [\hat{\omega} \times]^3 \frac{1}{3!} \Delta t^3 + [\hat{\omega} \times]^4 \frac{1}{4!} \Delta t^4 - [\hat{\omega} \times]^5 \frac{1}{5!} \Delta t^5 + \dots \right) \\
&= \frac{1}{3!} \Delta t^3 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|^4} \left(-\mathbf{I}_{3 \times 3} + [\hat{\omega} \times] \Delta t - \frac{1}{2!} [\hat{\omega} \times]^2 \Delta t^2 + [\hat{\omega} \times]^3 \frac{1}{3!} \Delta t^3 + \mathbf{R}_I^B(\hat{\omega} \Delta t) \right) \\
&= \frac{1}{6} \Delta t^3 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|^4} \left(\mathbf{R}_I^B(\hat{\omega} \Delta t) - \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\hat{\omega} \times] \Delta t - \frac{1}{2} [\hat{\omega} \times]^2 \Delta t^2 + \frac{1}{6} [\hat{\omega} \times]^3 \Delta t^3 \right)
\end{aligned}$$

从中可以看到旋转矩阵所在的位置。并且对比上一小节的 Σ_2 , 可以看到缺项对旋转矩阵的影响。因为 Σ_3 在 \mathbf{A}^3 之后才出现, 影响已经很小, 所以对于 $|\hat{\omega}|$ 的小值, 可取截断级数的值为

$$\Sigma_3 \approx \frac{\Delta t^3}{6} \mathbf{I}_{3 \times 3}$$

如果需要对 Σ_3 求极限, 前一方程并不方便求极限, 所以需要另外的变形

$$\begin{aligned}
\Sigma_3 &= \frac{1}{6} \Delta t^3 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|^4} \left(\mathbf{R}_I^B(\hat{\omega} \Delta t) - \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\hat{\omega} \times] \Delta t - \frac{1}{2} [\hat{\omega} \times]^2 \Delta t^2 + \frac{1}{6} [\hat{\omega} \times]^3 \Delta t^3 \right) \\
&= \frac{1}{6} \Delta t^3 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|^4} \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|} \sin(|\hat{\omega}| \Delta t) + \frac{[\hat{\omega} \times]^2}{|\hat{\omega}|^2} (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) - \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\hat{\omega} \times] \Delta t - \frac{1}{2} [\hat{\omega} \times]^2 \Delta t^2 + \frac{1}{6} [\hat{\omega} \times]^3 \Delta t^3 \right) \\
&= \frac{1}{6} \Delta t^3 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|^4} \left(-\frac{[\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|} \sin(|\hat{\omega}| \Delta t) + \frac{[\hat{\omega} \times]^2}{|\hat{\omega}|^2} (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) + [\hat{\omega} \times] \Delta t - \frac{1}{2} [\hat{\omega} \times]^2 \Delta t^2 + \frac{1}{6} [\hat{\omega} \times]^3 \Delta t^3 \right) \\
&= \frac{1}{6} \Delta t^3 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{1}{|\hat{\omega}|^4} \left(-\frac{[\hat{\omega} \times]^2}{|\hat{\omega}|} \sin(|\hat{\omega}| \Delta t) + \frac{[\hat{\omega} \times]^3}{|\hat{\omega}|^2} (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) + [\hat{\omega} \times]^2 \Delta t - \frac{1}{2} [\hat{\omega} \times]^3 \Delta t^2 + \frac{1}{6} [\hat{\omega} \times]^4 \Delta t^3 \right) \\
&= \frac{1}{6} \Delta t^3 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{1}{|\hat{\omega}|^4} \left(-\frac{[\hat{\omega} \times]^2}{|\hat{\omega}|} \sin(|\hat{\omega}| \Delta t) + \frac{|\hat{\omega}|^2 [\hat{\omega} \times]}{|\hat{\omega}|^2} (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) + [\hat{\omega} \times]^2 \Delta t + \frac{1}{2} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^2 [\hat{\omega} \times] - \frac{1}{6} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^3 [\hat{\omega} \times]^2 \right) \\
&= \frac{1}{6} \Delta t^3 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{1}{|\hat{\omega}|^4} \left(-\frac{[\hat{\omega} \times]^2}{|\hat{\omega}|} \sin(|\hat{\omega}| \Delta t) - [\hat{\omega} \times] (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) + \frac{[\hat{\omega} \times]^2 |\hat{\omega}| \Delta t}{|\hat{\omega}|} + \frac{1}{2} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^2 [\hat{\omega} \times] - \frac{1}{6} \frac{|\hat{\omega}|^3 \Delta t^3 [\hat{\omega} \times]^2}{|\hat{\omega}|} \right) \\
&= \frac{1}{6} \Delta t^3 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{1}{|\hat{\omega}|^4} \left(\frac{-\sin(|\hat{\omega}| \Delta t) + |\hat{\omega}| \Delta t - \frac{1}{6} |\hat{\omega}|^3 \Delta t^3}{|\hat{\omega}|} [\hat{\omega} \times]^2 + \left(-(1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) + \frac{1}{2} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^2 \right) [\hat{\omega} \times] \right) \\
&= \frac{1}{6} \Delta t^3 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{\frac{1}{2} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^2 - (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t))}{|\hat{\omega}|^4} [\hat{\omega} \times] + \frac{\sin(|\hat{\omega}| \Delta t) - |\hat{\omega}| \Delta t + \frac{1}{6} |\hat{\omega}|^3 \Delta t^3}{|\hat{\omega}|^5} [\hat{\omega} \times]^2 \\
&= \frac{1}{6} \Delta t^3 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{\frac{1}{2} |\hat{\omega}|^2 \Delta t^2 - (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t))}{|\hat{\omega}|^4 \Delta t^4} [\hat{\omega} \times] \Delta t^4 + \frac{\sin(|\hat{\omega}| \Delta t) - |\hat{\omega}| \Delta t + \frac{1}{6} |\hat{\omega}|^3 \Delta t^3}{|\hat{\omega}|^5 \Delta t^5} [\hat{\omega} \times]^2 \Delta t^5
\end{aligned}$$

对于 $|\hat{\omega}|$ 的小值, 采用文献 [2] 第 2.5.1 节的方法求极限可得

$$\Sigma_3 = \frac{\Delta t^3}{6} \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{\Delta t^4}{24} [\hat{\omega} \times] + \frac{\Delta t^5}{120} [\hat{\omega} \times]^2$$

8.2 过程噪声协方差矩阵 \mathbf{Q}_d 的高阶解

在 $\hat{\omega} = \hat{a}_B = 0$ 和 $\mathbf{R}(\hat{q}) = \mathbf{I}$ 周围线性化 \mathbf{A} , 使得

$$\mathbf{A} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

并且

$$\mathbf{I} + \mathbf{A}(\Delta t - \tau) + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2(\Delta t - \tau)^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & -\mathbf{I}(\Delta t - \tau) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & -\mathbf{I}(\Delta t - \tau) & 0 \\ 0 & \mathbf{I}(\Delta t - \tau) & \mathbf{I} & 0 & -\frac{\mathbf{I}}{2}(\Delta t - \tau)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

在 $e^{\mathbf{A}(\Delta t - \tau)}\mathbf{Q}_ce^{\mathbf{A}^T(\Delta t - \tau)}$ 中使用这个近似值可以得到:

$$\mathbf{Q}_d = \int_0^{\Delta t} \begin{bmatrix} \wedge(\sigma_\omega^2) + \wedge(\sigma_{\omega_b}^2)(\Delta t - \tau)^2 & 0 & 0 & -\wedge(\sigma_{\omega_b}^2)(\Delta t - \tau) & 0 \\ 0 & \wedge(\sigma_a^2) + \wedge(\sigma_{a_b}^2)(\Delta t - \tau)^2 & \wedge(\sigma_{a_b}^2)\frac{(\Delta t - \tau)^3}{2} + \wedge(\sigma_a^2)(\Delta t - \tau) & 0 & -\wedge(\sigma_{a_b}^2)(\Delta t - \tau) \\ 0 & \wedge(\sigma_a^2)(\Delta t - \tau) + \wedge(\sigma_{a_b}^2)\frac{(\Delta t - \tau)^3}{2} & \wedge(\sigma_a^2)(\Delta t - \tau)^2 + \wedge(\sigma_{a_b}^2)\frac{(\Delta t - \tau)^4}{4} & 0 & -\wedge(\sigma_{a_b}^2)\frac{(\Delta t - \tau)^2}{2} \\ -\wedge(\sigma_{\omega_b}^2)(\Delta t - \tau) & 0 & 0 & \wedge(\sigma_{\omega_b}^2) & 0 \\ 0 & -\wedge(\sigma_{a_b}^2)(\Delta t - \tau) & -\wedge(\sigma_{a_b}^2)\frac{(\Delta t - \tau)^2}{2} & 0 & \wedge(\sigma_{a_b}^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

计算这个积分可以得到 \mathbf{Q}_d 过程噪声近似的期望结果。

8.3 小结

在 EKF 中, 状态转移矩阵 \mathbf{F} 为 Jacobian 矩阵。根据参考文献 [4,6] 里的推导, 该 Jacobian 矩阵实际为控制向量 \mathbf{u} 的流形的伴随矩阵的逆矩阵。为简化分析, 我们采用参考文献 [1,2] 的成果进行分析。对于误差向量

$$\delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\theta} \\ \delta \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

其中 $\delta \boldsymbol{\theta}$ 为角度误差向量, $\delta \mathbf{b}$ 为角度偏差的误差向量。其动力学矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -[\hat{\omega} \times] & -\mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

对此积分并用泰勒级数计算得到封闭形式的状态转移矩阵

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_B^I(\hat{\omega}\Delta t) & -\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\omega}\Delta t) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

从左上角的增量角度 $\hat{\omega}\Delta t$ 的矩阵块就可以明显看出, 旋转矩阵 $\mathbf{R}_B^I(\hat{\omega}\Delta t)$ 的伴随矩阵是其自身, 其逆为 $\mathbf{R}_I^B(\hat{\omega}\Delta t)$, 其直觉就是增量角度误差好像是某种“惯性”, 滞后于旋转方向。其它矩阵

块和旋量理论中的 SE(3) 的 \mathbf{V} 矩阵的转置矩阵 $\mathbf{\Gamma}(\hat{\omega}\Delta t)$ 相关, 距离增量角度 $\hat{\omega}\Delta t$ 越远则幂次缺项越高, 代表着增量角度误差的传播方向。

从误差状态转移矩阵 \mathbf{F} 的封闭形式可以看出我们关注的误差的来源。注意到增量角度和增量速度的测量方差由 IMU 方差乘以时间的平方。所以要减小位姿估计误差, 就有两个途径, 一个是选择更好的、有更小方差的 IMU, 二是提高采样率, 让时间间隔更小。此外还有一个推论, 如果机体运转越快, 也就是单位时间内的增量角度和增量速度越大, 那么误差就越大, 这时候就越应该提高采样率以减小误差。

不过在实际项目中, 因为采样率很高, 很多项, 特别是高于 2 次幂的项都趋向于零, 所以 \mathbf{F} 矩阵和 \mathbf{Q} 矩阵可以大大化简, 删除很多不必要的高阶项, 以提高运算速度。

9 前重置操作

在 ESKF 的预测步骤结束时, 应该有一次前重置操作, 需要对协方差矩阵 \mathbf{P} 进行校正处理。在参考文献 [4,6] 里的有详细推导, 因为太复杂, 这里不再重复。校正矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 实际上是旋量理论中的 SE(3) 的 \mathbf{V} 矩阵的转置矩阵, 其输入为增量角度 $\boldsymbol{\theta} = \hat{\omega}\Delta t$, 其影响范围是协方差矩阵 \mathbf{P} 的左上角的增量角度的矩阵块 \mathbf{P}_θ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^\top \\ &= \mathbf{I}_{3\times 3} - \frac{1 - \cos(\|\boldsymbol{\theta}\|)}{\|\boldsymbol{\theta}\|^2} [\boldsymbol{\theta}\times] + \frac{\|\boldsymbol{\theta}\| - \sin(\|\boldsymbol{\theta}\|)}{\|\boldsymbol{\theta}\|^3} [\boldsymbol{\theta}\times]^2 \\ \mathbf{P}_\theta &= \mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{P}_\theta \mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})^\top\end{aligned}$$

对于 $\mathbf{\Gamma}\mathbf{P}\mathbf{\Gamma}^\top$ 这种形式的矩阵, 因为 \mathbf{P} 为正定的对称矩阵, 所以我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}\mathbf{P}\mathbf{\Gamma}^\top &= \mathbf{\Gamma}\mathbf{P}^{1/2} \left(\mathbf{P}^{1/2}\right)^\top \mathbf{\Gamma}^\top \\ &= \left(\mathbf{\Gamma}\mathbf{P}^{1/2}\right) \left(\mathbf{\Gamma}\mathbf{P}^{1/2}\right)^\top\end{aligned}$$

其中是校正矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 左乘了标准差矩阵 $\mathbf{P}^{1/2}$, 这意味着全局坐标系发生了变化, 使得新的协方差矩阵 \mathbf{P} 是以新的姿态点为概率中心。

对于 MEKF 中常用的 Gibbs 向量映射, 校正矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 为

$$\mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{1 + \|\boldsymbol{\theta}\|^2/4} (\mathbf{I}_{3\times 3} - [\boldsymbol{\theta}\times]/2)$$

因为 $\boldsymbol{\theta}$ 通常都很小, 所以校正矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 的一阶近似为

$$\mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}) \approx \mathbf{I}_{3\times 3} - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}\times]$$

由此也可以看出, 当 $\boldsymbol{\theta} \rightarrow \mathbf{0}$ 时, 校正矩阵 $\mathbf{\Gamma} \rightarrow \mathbf{I}_{3\times 3}$ 。所以大多数 ESKF 的实现都忽略协方差矩阵 \mathbf{P} 校正这一步。

10 更新步骤

10.1 磁力计融合方程

最常见的测量校正方法是向量观测, 又称向量测量, 其中向量的坐标是先验已知的, 或者是在惯性系和物体固定系中测量的。由于磁强计可能是业界最常用的向量测量, 地球磁场向量 \mathbf{M} 将用

于说明误差状态到向量测量残差的映射。假设比例因子和未对准项已知，由磁强计测量的磁场向量由下式给出：

$$\tilde{\mathbf{M}}_m = \mathbf{R}_I^B(q_t) \mathbf{M}_I + \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_n$$

也就是说，测量的 $\tilde{\mathbf{M}}_m$ 是惯性坐标 \mathbf{M}_I 中的已知向量，转换成机体坐标，加上将机体固定偏差向量 \mathbf{M}_b 和加性零平均白噪声项 $\boldsymbol{\eta}_m$ 。残差 $\delta\tilde{\mathbf{M}}_m$ 由实际测量值减去预测测量值 $\hat{\tilde{\mathbf{M}}}_m$ 得到。

预测的测量值是当前估计四元数的函数：

$$\hat{\tilde{\mathbf{M}}}_m = \mathbf{R}_I^B(\hat{q}) \mathbf{M}_I$$

将罗德里格斯旋转方程简化式代入前一个方程可得：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_m &= \mathbf{R}_I^B(q_t) \mathbf{M}_I + \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_n \\ &\approx (\mathbf{I}_{3 \times 3} - [\delta\boldsymbol{\theta} \times]) \mathbf{R}_I^B(\hat{q}) \tilde{\mathbf{M}}_m + \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_n \end{aligned}$$

然后测量残差为：

$$\tilde{\mathbf{M}}_m - \hat{\tilde{\mathbf{M}}}_m = (\mathbf{I}_{3 \times 3} - [\delta\boldsymbol{\theta} \times]) \mathbf{R}_I^B(\hat{q}) \tilde{\mathbf{M}}_m + \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_n - \mathbf{R}_I^B(\hat{q}) \tilde{\mathbf{M}}_m$$

其可简化为误差状态的线性映射：

$$\delta\tilde{\mathbf{M}}_m = \begin{bmatrix} [(\mathbf{R}_I^B(\hat{q}) \mathbf{M}_I) \times] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\theta} \\ \vdots \\ \mathbf{M}_b \end{bmatrix}$$

所以对于磁强计测量的观测矩阵 \mathbf{H}_m 为

$$\mathbf{H}_m = \begin{bmatrix} [(\mathbf{R}_I^B(\hat{q}) \mathbf{M}_I) \times] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

10.2 速度与位置融合方程

GPS 提供的是直接的位置和速度。所以从误差状态到直接位置或速度残差的映射很简单：

$$\tilde{\mathbf{P}} - \hat{\tilde{\mathbf{P}}} = [\mathbf{I}] \delta\mathbf{P} + \boldsymbol{\eta}_p$$

$$\tilde{\mathbf{V}} - \hat{\tilde{\mathbf{V}}} = [\mathbf{I}] \delta\mathbf{V} + \boldsymbol{\eta}_v$$

则观测矩阵在相对应的项为 $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ 。

10.3 后重置操作

在 ESKF 算法中，有一个显式的重置操作要求。在误差注入标称状态后，误差状态 $\delta\mathbf{x}$ 被重置。这与方向部分特别相关，因为新的方向误差将是相对于新标称状态的方向坐标系的局部表示，如前面的前重置章节里讨论的那样。为了使 ESKF 更新完成，需要根据此项修改更新误差的协方差。

ESKF 误差重置操作 $g()$ 是

$$\delta\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{0}$$

$$\mathbf{P} \leftarrow \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{P} \boldsymbol{\Gamma}^T$$

其中 \mathbf{I} 是 Jacobian 矩阵，定义为

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &\triangleq \left. \frac{\partial g}{\partial \delta \mathbf{x}} \right|_{\delta \mathbf{x}} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} - \left[\left(\frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta} \right) \times \right] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{15 \times 15} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

在大多数情况下，误差项 $\delta \boldsymbol{\theta}$ 很小以至于可以被忽略，直接导出 Jacobian 矩阵 $\mathbf{I} = \mathbf{I}_{18 \times 18}$ ，从而导致一个平凡的误差重置。这就是 ESKF 的大多数实现所做的。这里提供的表达式应该产生更精确的结果，这可能有助于减少里程计系统中的长期误差漂移。

这个方程的推导过程参见文献 [4] 第 6.3.1 的内容，以及文献 [6] 里的讨论。

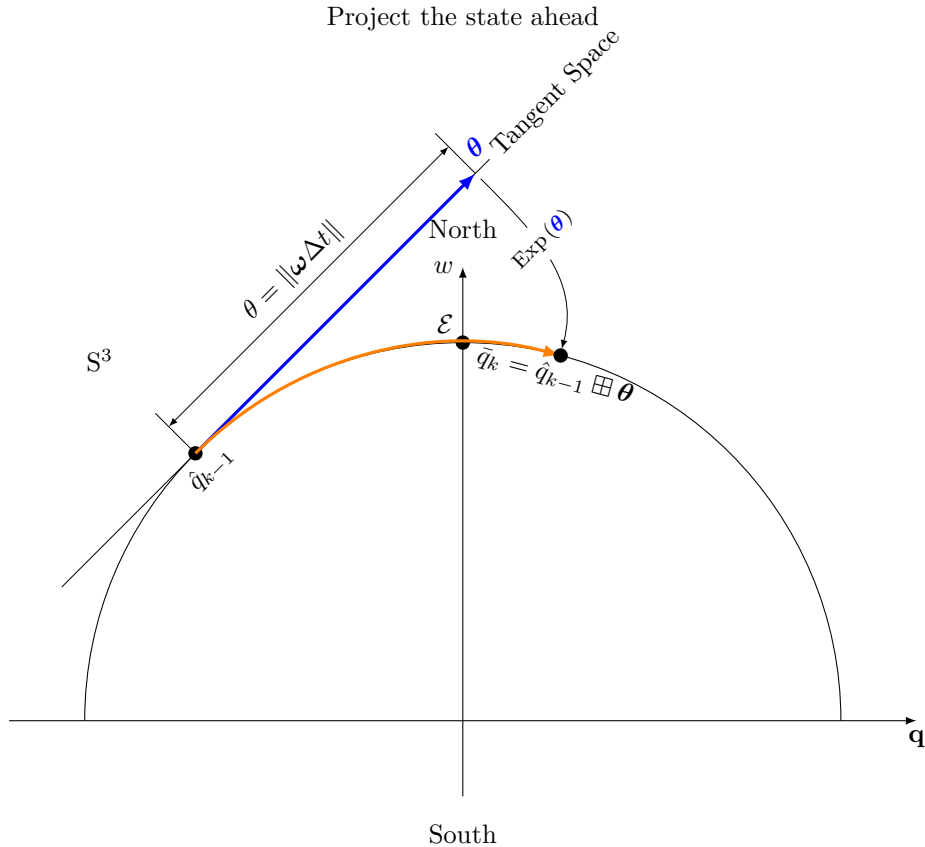
11 运行步骤的直觉

我们用姿态变化的图示，直观演示 ESKF 每个运行步骤的目的。为简化显示，在后面的图示中，我们用 \bar{q}_i 代表 i 时刻的外推估计 $\hat{q}_{i|i-1}$ ，用 \hat{q}_i 代表 i 时刻的最优估计 $\hat{q}_{i|i}$ 。

我们有上一时刻的姿态的最优估计值 \hat{q}_{k-1} ，其已经没有误差， $\delta \mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0}$ 。当 IMU 数据到达，增量角度为 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega} \Delta t$ ，则机体新的姿态为

$$\bar{q}_k = \hat{q}_{k-1} \boxplus \boldsymbol{\theta}$$

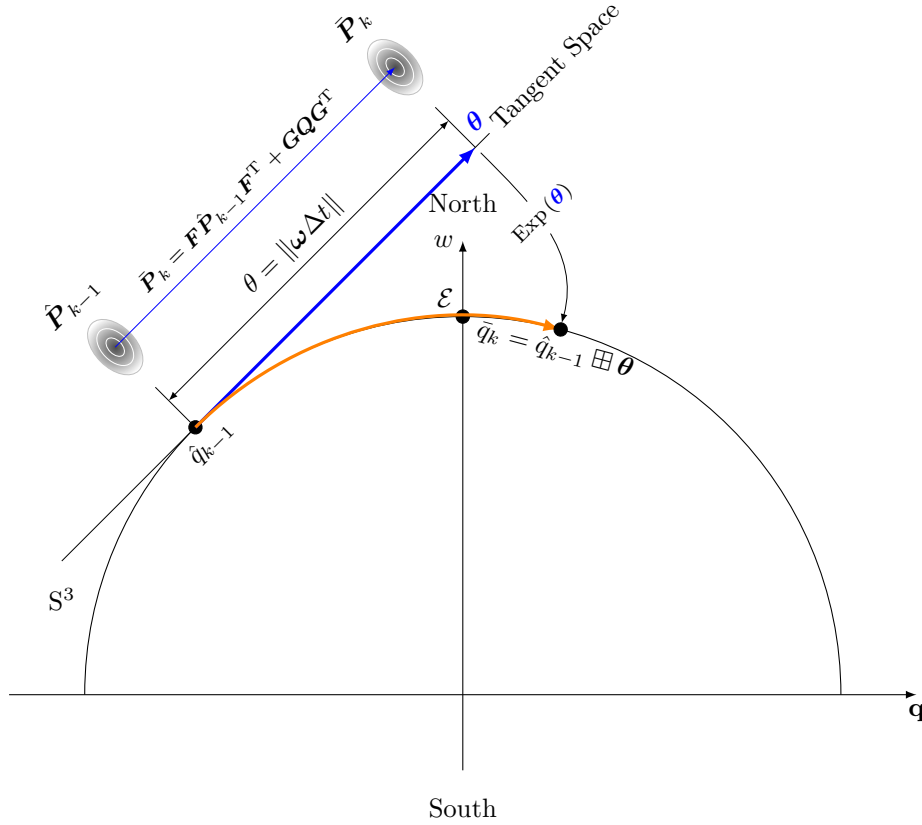
增量向量是在 \hat{q}_{k-1} 的局部切空间中计算，在假定匀速旋转的条件下，由时间 Δt 控制向量的模长，然后将其收回并作用到当前姿态点上，则当前姿态点沿测地线移动到新的位置。



因为每次迭代结束都执行重置操作，误差向量 $\delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ，所以接下来只需要推导其动力学矩阵 \mathbf{A} ，并推导出状态转移矩阵 \mathbf{F} ，然后是输入控制矩阵 \mathbf{G} 。我们是在 \hat{q}_{k-1} 的局部切空间中计算协方差的传播

$$\bar{\mathbf{P}}_k = \mathbf{F} \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \mathbf{F}^T + \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T$$

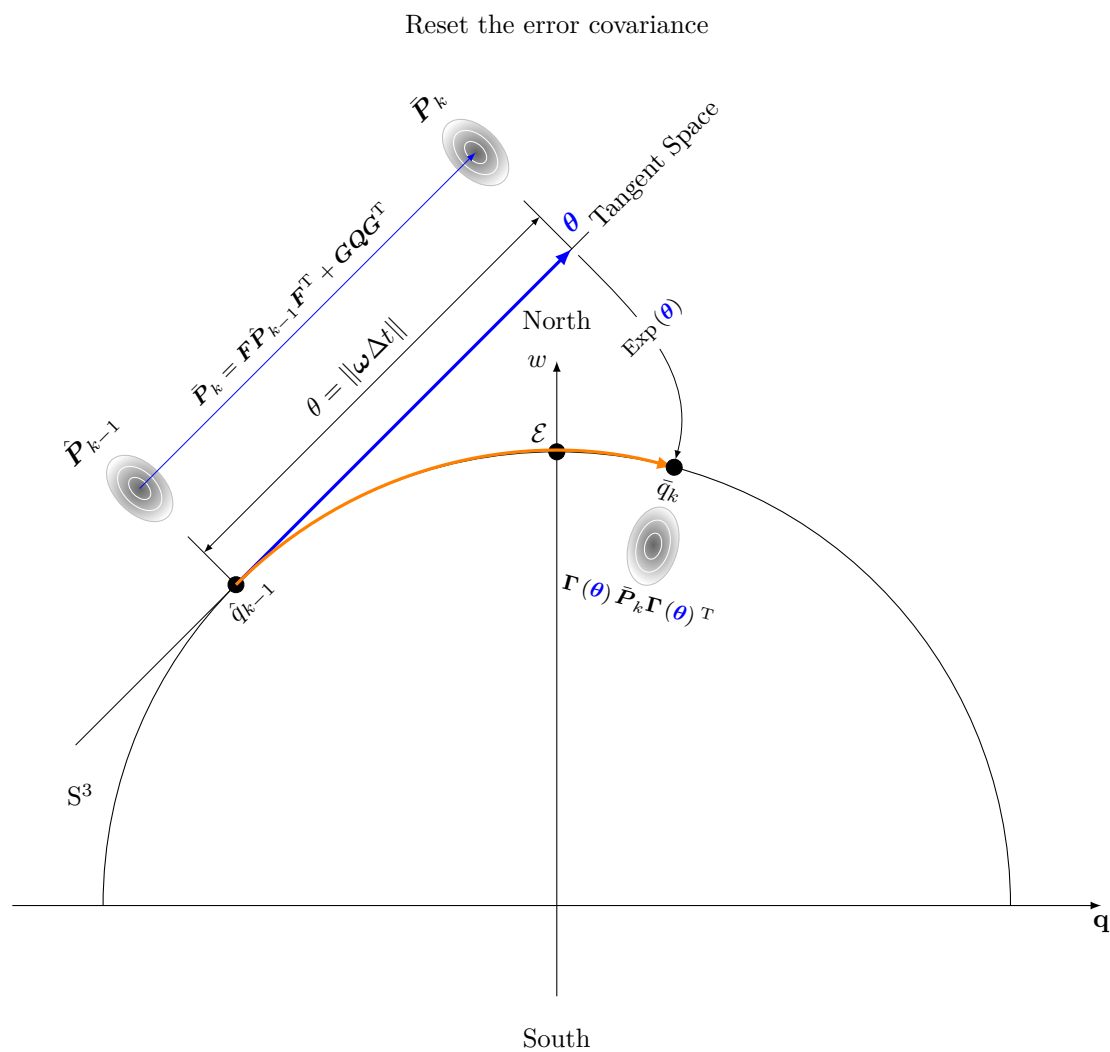
Project the error covariance ahead



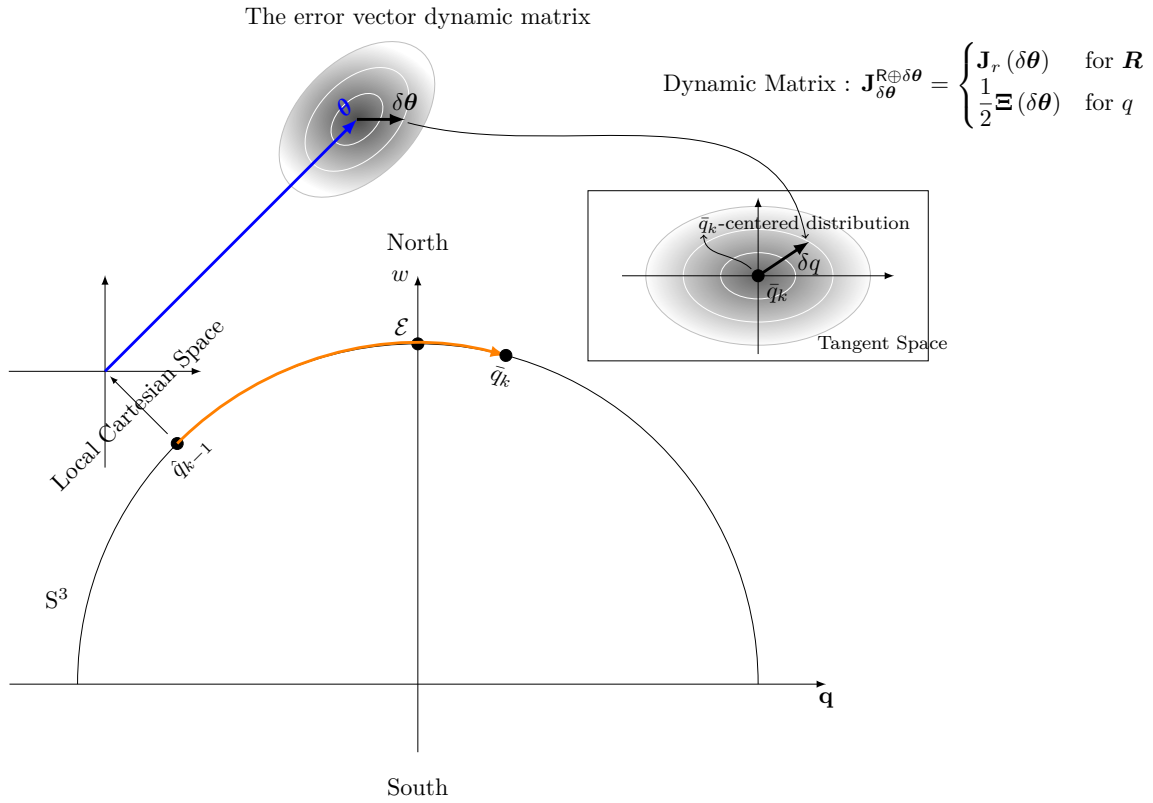
但是这是在以 \hat{q}_{k-1} 为切点建立的局部切空间中计算协方差的传播，并且 $\hat{\mathbf{P}}_{k-1}$ 是以切点 \hat{q}_{k-1} 为中心的概率分布。我们同样期望 $\bar{\mathbf{P}}_k$ 的概率中心位于切点 \bar{q}_k 处，因为后续的协方差的计算将在以 \bar{q}_k 为切点建立的局部切空间中进行，所以这里需要对协方差矩阵进行一次重置操作

$$\bar{\mathbf{P}}_k = \mathbf{\Gamma}(\theta) \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{\Gamma}(\theta)^T$$

在这里我们有一个重要的假设：误差向量 $\delta \mathbf{x}$ 是一个零均值的向量， $\mathbb{E}(\delta \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 。因此 $\delta \mathbf{x}$ 此时的协方差就是在 \bar{q}_k 的局部切空间中的协方差 $\bar{\mathbf{P}}_k$ 。



这个问题需要从 $SO(3)$ 的导数方程，以及不确定性的协方差表示这两方面共同理解。



我们在局部笛卡尔空间中获取了增量角度 θ ，从而驱动了 $\text{SO}(3)$ 的姿态从 \hat{q}_{k-1} 变化到了 \bar{q}_k 。我们还知道增量角度 θ 的不确定度是一个零均值的高斯分布，当其受到一个误差向量 $\delta\theta$ 的扰动时，姿态 \bar{q}_k 会有什么样的变化规律？也就是增量角度的误差向量的动力学矩阵是什么？从李群的角度看，这实际上就是在求右结合的加号 \oplus 的 Jacobian 矩阵

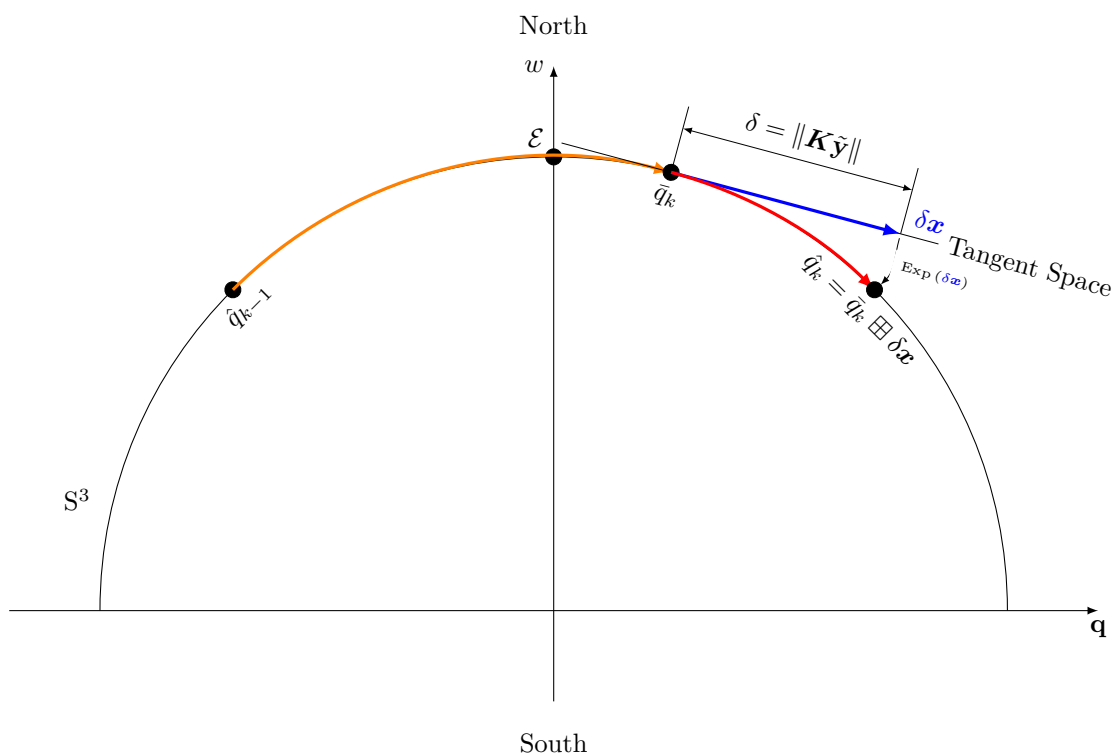
$$\mathbf{J}_{\delta\theta}^{\mathbf{R} \oplus \delta\theta} = \begin{cases} \mathbf{J}_r(\delta\theta) & \text{for } \mathbf{R} \\ \frac{1}{2}\Xi(\delta\theta) & \text{for } q \end{cases}$$

对于 $\text{SO}(3)$ 的导数方程， $\mathbf{J}_{\delta\theta}^{\mathbf{R} \oplus \delta\theta} = \mathbf{J}_r(\delta\theta)$ ，有着十分重要的几何意义。我们是用局部笛卡尔空间中的误差向量 $\delta\theta$ 的微小扰动，表达了旋转流形 $\text{SO}(3)$ 上的元素 \mathbf{R} 的变化率。这也是我们在时间更新步骤最重要的目的：在 ESKF 算法中，误差状态转换矩阵 \mathbf{F} 是一个 Jacobian 矩阵，我们用流形的导数进行求解。

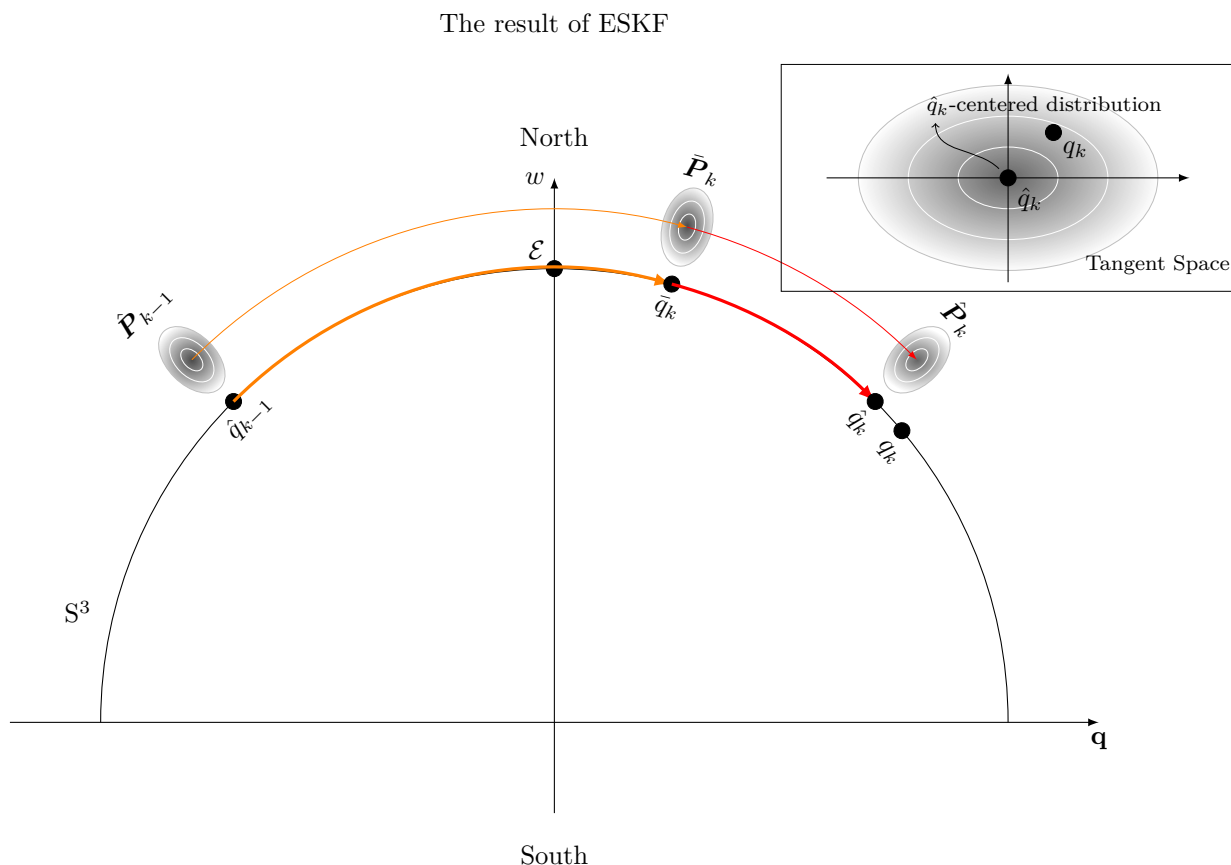
接下来是测量更新步骤，也称校正步骤。在全局切空间中存在一个固定向量，例如地磁向量 \mathbf{M}_I ，我们在 \bar{q}_k 的局部切空间中观测它，所以需要伴随矩阵将其变换到局部切空间中，并与我们的测量值相减形成残差。因为旋转矩阵 \mathbf{R} 的伴随矩阵是其自身，则从全局到局部切空间的伴随矩阵为 $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ ，因此测量残差为

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{M}_m - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}_I$$

Update estimate with measurement



接着更新协方差为最优估计协方差 $\hat{\mathbf{P}}_k$ 。误差向量 $\delta \mathbf{x}$ 之所以是最优估计是因为它指向的是协方差 $\hat{\mathbf{P}}_k$ 所代表的概率中心。



我们永远不能知道真实值 q_k 在哪里。但是概率中心是真实值最有可能存在的地方，不过真实值不一定存在于这个地方，这是概率问题，就是高斯曲线的积分，在 ± 3 倍标准差范围内，真实值的存在概率为 99.7%。因为我们不知道真实值 q_k 在哪里，所以我们只有选择最优估计值 \hat{q}_k ，距离真实值 q_k 最近的点，只要传感器方差越小，椭圆就越小，真实值变化的范围就越小，估计值就越精确。

对于协方差 \hat{P}_k 的用途，一是评估当前姿态点 \hat{q}_k 的估计质量，二是表示线性化点周围的不确定性。当前线性化点周围的高斯分布可以用下式表示

$$Gaussian(\mathbf{R}(\hat{q}_k), \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{R}(\hat{q}_k) \text{Exp}(\boldsymbol{\eta})$$

其中 $\boldsymbol{\eta}$ 是从协方差 \hat{P}_k 对角线上取出来的方差向量。

12 总结

PX4 ECL/EKF2 的算法总体和这里类似，都是对位姿进行最优估计，同样采用 IMU 数据进行位姿预测，用磁力计和 GPS 等传感器数据进行位姿校正。只不过 PX4 ECL/EKF2 的算法直接对位姿进行最优估计，简单直接得多，没有估计误差向量的误差以及偏差向量的误差这种弯弯绕，只要你能接受表示旋转的单位四元数是个四元向量并且可以进行向量减法操作这个假设即可，并且事实证明，天下武功唯快不破，当传感器采样率足够快增量足够小的时候，这个假设也无不可，估计精度也足够。

不过对比 PX4 ECL/EKF2 里面的 Jacobians 矩阵，从数学上来说，ESKF 中的 Jacobians 矩

阵更简单也更可解释，并且理论上其估计精度应该更高。但是位姿估计是一个工程问题，不是单单靠数学解决问题的。这领域最终还是调参侠的天下。

13 参考文献

1. Attitude Error Representations for Kalman Filtering - 2003
2. Indirect Kalman filter for 3D attitude estimation - 2007
3. Multiplicative Quaternion Extended Kalman Filtering for Nonspinning Guided Projectiles - 2013
4. Quaternion kinematics for the error-state KF - 2017
5. The Multiplicative Extended Kalman Filter - 2020
6. Full-Order Solution to the Attitude Reset Problem for Kalman Filtering of Attitudes - 2020
7. Why and How to Avoid the Flipped Quaternion Multiplication