

# 使用对偶四元数代数的移动机械臂动力学

Frederico Fernandes Afonso Silva,<sup>†</sup> Juan José Quiroz-Omaña,<sup>‡</sup>

Graduate Program in Electrical Engineering  
Federal University of Minas Gerais (UFMG)

Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte-MG, Brazil  
Email: fredf.afonso@gmail.com,<sup>†</sup> juanjqogm@gmail.com<sup>‡</sup>

Bruno Vilhena Adorno

Department of Electrical and Electronic Engineering  
The University of Manchester

Sackville Street, Manchester M13 9PL, United Kingdom  
Email: bruno.adorno@manchester.ac.uk

## ABSTRACT

本文提出了两种使用对偶四元数代数求解移动机械臂动力学方程的方法。第一种是基于一般递归牛顿-欧拉公式, 并使用运动旋量和动力旋量, 通过高级代数运算传播, 适用于任意类型的关节和任意参数化。第二种方法是基于高斯最小约束原理 (Gauss's Principle of Least Constraint, GPLC), 包含任意等式约束。除了展示 GPLC 与 Gibbs-Appell 和 Kane 的方程的联系, 我们还使用它来建模非完整移动机械臂。我们当前的公式比现有技术中的同类公式更通用, 尽管 GPLC 在计算上更昂贵, 并且仿真结果表明它们与经典的递归牛顿-欧拉算法一样精确。

**Keywords:** Mobile Manipulator Dynamics, Dual Quaternion Algebra, Newton-Euler Model, Gauss's Principle of Least Constraint, Euler-Lagrange Equations, Gibbs-Appell Equations, Kane's Equations.

## 1 简介

在过去的三十年里, 已经有大量的论文涉及机器人建模的不同表示。在 Featherstone [1–3]、McCarthy [4–6]、Selig [7, 8], 以及 Bayro-Corrochano [9], 还有许多其他人的工作中都可以找到声名狼藉的例子。

进行这种调查的原因之一是机器人系统的复杂性远远超出了机械装置本身的复杂性。一个典型的机器人系统涉及运动/力/阻抗控制、路径规划、任务规划, 以及更多的更高级层面的东西。因此, 对于机器人建模非常有

用的表示方法, 例如齐次变换矩阵, 在执行位姿控制或阻抗控制时不一定容易使用, 例如文献 [10]。这正是为什么通常使用齐次变换矩阵获得机器人运动学, 然后间接找到几何雅可比矩阵, 最后使用四元数和位置向量在任务空间中执行位姿控制的原因 [11]。使用上述策略有几个缺点。不同表示方法的混合不必要地使整体表示复杂化, 并且这些不同表示方法之间的映射通常会引入数学伪影, 例如算法奇异性和不连续性。

相反, 对偶四元数代数的元素具有很强的几何意义, 如旋量理论中的元素, 并且也表示为单个元素中的耦合实体。在运动学中, 该表示方法已被广泛地探索, 以获得机器人的运动学和微分运动学 [6, 12–17]。此外, 在最近的工作中, 对偶四元数被用于执行导纳控制 [18], 这是物理上的人机交互的基础; 约束运动控制 [19, 20], 它考虑了工作空间施加的几何约束; 混合控制, 它考虑了刚性运动空间的拓扑结构 [21] 和最优控制, 其对于机器人机械臂使用线性二次型最优跟踪控制器 [22]; 分布式位姿形成控制 [23] 和协同操作 [24, 25], 包括涉及人-机器人协作的操作 [26]; 以及定义高级几何任务 [27]。

此外, 诸如单位对偶四元数和纯对偶四元数等元素, 当配备有标准的乘法和加法运算时, 形成具有相关李代数的李群。因此, 基于对偶四元数代数的阐述方式提供了旋量理论的几何直觉, 李代数的严格性以及如在空间代数中 [1] 的动力学模型的简单代数处理, 通常减少了对机械装置进行广泛几何分析的必要性, 这与基于旋量理论的矩阵表示 [28, 29] 的方法形成鲜明对比。

在过去的几十年里, 一些工作已经使用对偶四元数

代数来描述刚体动力学 [30–33]，尽管不一定能创建一个用于多体系统分析的一般形式。在寻求这种形式的工作中，大多数是基于三维对偶向量，并需要将其映射到更高维向量以获取系统动力学方程 [5, 34–36]，因此失去了仅基于对偶四元数代数的分析的优雅性和紧凑性，有时，会导致符号的滥用 [5]，或要求对向量进行人为交换 [37]，以处理表示的混合。其他工作侧重于对偶四元数的传播 [38] 或基于对偶四元数代数的算法的计算方面 [39]，而不是在处理更复杂的机器人（如非完整移动机械臂）和更一般类型的关节（如螺旋、圆柱、6 自由度等等）时提供代数的和几何的直觉。

综上所述，由于目前还没有基于对偶四元数代数的方法能够充分涵盖移动机械臂的动力学模型和一般类型的关节，因此在使用基于对偶四元数的高级算法以连接到低级动力学模型时，仍然存在理论鸿沟，造成不必要的中间映射。本文的目的是通过使用对偶四元数代数，提议一种适应具有任意关节的移动机械臂的动力学模型，以填补这一空白。

## 1.1 贡献声明

本文提出了两种使用对偶四元数代数求解串联机械臂动力学方程的方法。第一种方法基于牛顿-欧拉递归公式，而第二种方法应用高斯最小约束原理，以获得具有非完整约束的串联移动机械臂的动力学模型。本文对最新技术的贡献如下：

1. 对于动力学模型，使用对偶四元数代数和牛顿-欧拉形式，以获得移动机械臂的递归方程的一个系统过程，其具有与连杆数量相关的线性成本。这种方法简化了经典的计算过程，消除了详尽的几何分析的必要性，因为动力旋量和运动旋量是通过高级代数运算传播的。与以前的工作相比，我们的方法更通用，因为它适用于任意类型的关节，并且对于运动旋量的传播我们不强加任意特定的参数化约定；
2. 基于高斯最小约束原理 (Gauss's Principle of Least Constraint, GPLC) 和对偶四元数代数的串联机械臂动力学模型的一个封闭形式。我们在 GPLC 公式中施加附加的约束以建模非完整移动机械臂。我们应用 Udwadia-Kalaba [40] 提出的基本方程，其采用比拉格朗日乘子更简单的方法，尽管它们是等效的，以强制执行等式约束。此外，我们还提出了与惯量矩阵

和科里奥利矩阵相关的斜对称性质，这在设计基于无源性的控制器时至关重要。最后，我们使用基于对偶四元数代数的公式，展示了高斯最小约束原理与 Gibbs-Appell 和 Kane 方程的联系。

我们使用三种不同的机器人在模拟中验证了所提议的算法：一个固定基座 50 自由度串联机械臂、一个 9 自由度完整移动机械臂，以及一个 8 自由度非完整移动机械臂。此外，我们将我们的结果与真实的模拟器提供的结果进行了比较，并与最新技术的实现进行了比较。此外，我们给出了所提议方法的计算成本。

本文的组织结构如下：第 2 节简要介绍了对偶四元数代数的数学背景；第 3 节介绍了基于对偶四元数的一般牛顿-欧拉公式，而第 4 节介绍了基于高斯最小约束原理的对偶四元数公式；第 5 节通过模拟以及它们的计算成本展现了所提议的两种方法的可用性；最后，第 6 节给出了最后的结论，并指出了进一步的研究方向。

## 2 数学预备知识

对偶四元数 [8] 是以下集合的元素

$$\mathcal{H} \triangleq \{\mathbf{h}_P + \varepsilon \mathbf{h}_D : \mathbf{h}_P, \mathbf{h}_D \in \mathbb{H}, \varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0\}, \quad (1)$$

其中

$$\mathbb{H} \triangleq \{h_1 + \hat{i}h_2 + \hat{j}h_3 + \hat{k}h_4 : h_1, h_2, h_3, h_4 \in \mathbb{R}\} \quad (2)$$

是四元数的集合，其中  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  和  $\hat{k}$  是虚数单位，具有性质  $\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = \hat{i}\hat{j}\hat{k} = -1$  [41]。对偶四元数的加法和乘法类似于实数和复数的对应物。人们必须只遵从对偶单位  $\varepsilon$  和虚数单位  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  的性质。

给定  $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$  使得

$$\mathbf{h} = \underbrace{h_1 + \hat{i}h_2 + \hat{j}h_3 + \hat{k}h_4}_{\mathbf{h}_P} + \varepsilon \underbrace{(h_5 + \hat{i}h_6 + \hat{j}h_7 + \hat{k}h_8)}_{\mathbf{h}_D},$$

算子  $\mathcal{P}(\mathbf{h}) \triangleq \mathbf{h}_P$  和  $\mathcal{D}(\mathbf{h}) \triangleq \mathbf{h}_D$  分别提供  $\mathbf{h}$  的原生部分和对偶部分，而算子  $\text{Re}(\mathbf{h}) \triangleq h_1 + \varepsilon h_5$  和  $\text{Im}(\mathbf{h}) = \hat{i}h_2 + \hat{j}h_3 + \hat{k}h_4 + \varepsilon(\hat{i}h_6 + \hat{j}h_7 + \hat{k}h_8)$  分别提供  $\mathbf{h}$  的实数和虚数部分。 $\mathbf{h}$  的共轭被定义为  $\mathbf{h}^* \triangleq \text{Re}(\mathbf{h}) - \text{Im}(\mathbf{h})$ ，并且其范数给出为  $\|\mathbf{h}\| = \sqrt{\mathbf{h}\mathbf{h}^*} = \sqrt{\mathbf{h}^*\mathbf{h}}$ 。

单位对偶四元数的子集  $\mathcal{S} = \{\mathbf{h} \in \mathcal{H} : \|\mathbf{h}\| = 1\}$  用于表示三维空间中的位姿（位置和方向），并在乘法运算下形成群  $\text{Spin}(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ 。<sup>1</sup> 任意  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$  总是可以写为

$\underline{x} = \underline{r} + \varepsilon(1/2)\underline{p}\underline{r}$ , 其中  $\underline{p} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$  代表三维空间中的位置  $(x, y, z)$ , 并且  $\underline{r} = \cos(\phi/2) + \underline{n} \sin(\phi/2)$  代表一个旋转, 在其中  $\phi \in [0, 2\pi)$  是围绕旋转轴  $\underline{n} \in \mathbb{H}_p \cap \mathbb{S}^3$  的旋转角度, 其中  $\mathbb{H}_p \triangleq \{\underline{h} \in \mathbb{H} : \text{Re}(\underline{h}) = 0\}$  并且  $\mathbb{S}^3 = \{\underline{h} \in \mathbb{H} : \|\underline{h}\| = 1\}$  [8].

给定纯对偶四元数集合  $\mathcal{H}_p = \{\underline{h} \in \mathcal{H} : \text{Re}(\underline{h}) = 0\}$ , 其被用于表示运动旋量 (twist) 和动力旋量 (wrenche), 算子  $\text{Ad} : \mathcal{S} \times \mathcal{H}_p \rightarrow \mathcal{H}_p$  在这些实体上执行刚体运动。例如, 给定在帧  $\mathcal{F}_a$  中表达的运动旋量, 即  $\underline{\xi}^a \in \mathcal{H}_p$ , 以及单位对偶四元数  $\underline{x}_a^b$ , 其给出  $\mathcal{F}_a$  相对于  $\mathcal{F}_b$  的位姿, 同样的运动旋量在帧  $\mathcal{F}_b$  中表达为<sup>2</sup>

$$\underline{\xi}^b = \text{Ad}(\underline{x}_a^b) \underline{\xi}^a = \underline{x}_a^b \underline{\xi}^a (\underline{x}_a^b)^* . \quad (3)$$

$\underline{x}_a^b$  的时间导数由文献 [42] 给出为

$$\dot{\underline{x}}_a^b = \frac{1}{2} \underline{\xi}_{ab}^a \underline{x}_a^b = \frac{1}{2} \underline{x}_a^b \underline{\xi}_{ab}^b, \quad (4)$$

其中

$$\underline{\xi}_{ab}^a = \omega_{ab}^a + \varepsilon(\dot{\underline{p}}_{ab}^a + \underline{p}_{ab}^a \times \omega_{ab}^a) \quad (5)$$

是帧  $\mathcal{F}_b$  相对于帧  $\mathcal{F}_a$  的运动旋量, 在帧  $\mathcal{F}_a$  中表达,<sup>3</sup> 其中  $\omega_{ab}^a \in \mathbb{H}_p$  是角速度, 并且

$$\underline{\xi}_{ab}^b = \text{Ad}(\underline{x}_a^b) \underline{\xi}_{ab}^a = \omega_{ab}^b + \varepsilon \dot{\underline{p}}_{ab}^b \quad (6)$$

是在  $\mathcal{F}_b$  中表达的运动旋量。而且,  $\underline{\xi}_{ab}^a$  和  $\underline{\xi}_{ab}^b$  是与  $\text{Spin}(3) \ltimes \mathbb{R}^3$  相关联的李代数的元素。另外,

$$\underline{p} \times \omega \triangleq \frac{\underline{p}\omega - \omega\underline{p}}{2}, \quad (7)$$

$\underline{p}, \omega \in \mathbb{H}_p$ , 是纯四元数之间的交叉积, 类似于在  $\mathbb{R}^3$  中向量之间的交叉积 [42].

$\underline{l}, \underline{s} \in \mathcal{H}_p$  之间的叉积, 其中  $\underline{l} = \underline{l} + \varepsilon \underline{l}'$  和  $\underline{s} = \underline{s} + \varepsilon \underline{s}'$ , 类似于方程 (7) 并给出为

$$\underline{l} \times \underline{s} \triangleq \frac{\underline{l}\underline{s} - \underline{s}\underline{l}}{2} = \underline{l} \times \underline{s} + \varepsilon(\underline{l} \times \underline{s}' + \underline{l}' \times \underline{s}). \quad (8)$$

**引理 2.1.** 如果  $\underline{x} \in \mathcal{S}$ , 使得  $\dot{\underline{x}} = (1/2)\underline{\xi}\underline{x}$  并且  $\underline{\xi}' \in \mathcal{H}_p$ , 则

$$\frac{d}{dt} (\text{Ad}(\underline{x}) \underline{\xi}') = \text{Ad}(\underline{x}) \dot{\underline{\xi}}' + \underline{\xi} \times (\text{Ad}(\underline{x}) \underline{\xi}'). \quad (9)$$

<sup>2</sup>注意, 上标表示原始帧, 而下标表示已修改的帧。本文始终保持下标和上标的约定。如果没有使用上标, 我们就假定是全局惯性帧。

<sup>3</sup>在这里使用三个索引很重要, 因为从第三帧可以看到两个帧之间的运动旋量。因此, 例如,  $\underline{\xi}_{a,b}^c$  是帧  $\mathcal{F}_b$  相对于帧  $\mathcal{F}_a$  的运动旋量, 在帧  $\mathcal{F}_c$  中表达。同样的解释也被用于动力旋量, 这将在第 3.2 节中适当介绍。

*Proof.* 使用方程 (3), 方程 (4), 以及以下事实  $(\underline{\xi}\underline{x})^* = -\underline{x}^* \underline{\xi}$ , 我们获得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\text{Ad}(\underline{x}) \underline{\xi}') &= \dot{\underline{x}} \underline{\xi}' \underline{x}^* + \underline{x} \dot{\underline{\xi}}' \underline{x}^* + \underline{x} \underline{\xi}' \dot{\underline{x}}^* \\ &= \frac{1}{2} \underline{\xi} (\underline{x} \underline{\xi}' \underline{x}^*) + \underline{x} \dot{\underline{\xi}}' \underline{x}^* - \frac{1}{2} (\underline{x} \underline{\xi}' \underline{x}^*) \underline{\xi}. \end{aligned} \quad (10)$$

最后, 在方程 (10) 中使用方程 (8) 得到方程 (9)。

四元数惯性张量被定义为

$$\mathbb{I} \triangleq (\underline{i}_x, \underline{i}_y, \underline{i}_z) \in \mathbb{H}_p^3 \subset \mathcal{H}^n, \quad (11)$$

其中  $\underline{i}_x = I_{xx}\hat{i} + I_{xy}\hat{j} + I_{xz}\hat{k}$ ,  $\underline{i}_y = I_{yx}\hat{i} + I_{yy}\hat{j} + I_{yz}\hat{k}$ , 以及  $\underline{i}_z = I_{zx}\hat{i} + I_{zy}\hat{j} + I_{zz}\hat{k}$ , 这其中  $I_{nn}$ , 其中  $n \in \{x, y, z\}$ , 是刚体的惯性张量的元素。

**定义 2.2.** 给定  $\underline{A} = (\underline{a}_x, \underline{a}_y, \underline{a}_z) \in \mathbb{H}_p^3$  和  $\underline{b} \in \mathbb{H}_p$ , 算子  $\mathcal{L}_3 : \mathbb{H}_p^3 \times \mathbb{H}_p \rightarrow \mathbb{H}_p$ , 被定义为

$$\mathcal{L}_3(\underline{A}) \underline{b} = \hat{i}\langle \underline{a}_x, \underline{b} \rangle + \hat{j}\langle \underline{a}_y, \underline{b} \rangle + \hat{k}\langle \underline{a}_z, \underline{b} \rangle, \quad (12)$$

其中  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{H}_p \rightarrow \mathbb{R}$  是四元数之间的内积;<sup>4</sup> 也就是, 给定  $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{H}_p$ , 则  $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle \triangleq -(\underline{a}\underline{b} + \underline{b}\underline{a})/2$ .

根据定义 2.2, 可以得出在 (对偶) 四元数代数中的角动量  $\underline{\ell}$ , 给出为

$$\underline{\ell} = \mathcal{L}_3(\mathbb{I}) \omega, \quad (13)$$

其中  $\omega \in \mathbb{H}_p$  是角速度。直接计算表明方程 (13) 等价于向量代数中的对应项。

给定刚体的四元数惯性张量  $\mathbb{I}' \in \mathbb{H}_p^3$ , 在帧  $\mathcal{F}'$  中表达, 并且刚体的角速度  $\omega \in \mathbb{H}_p$  在  $\mathcal{F}$  帧中表达, 在  $\mathcal{F}$  帧中表达的角动量给出为

$$\underline{\ell} = \text{Ad}(\underline{r}^*) \mathcal{L}_3(\mathbb{I}') \text{Ad}(\underline{r}) \omega, \quad (14)$$

其中  $\underline{r}$  是从  $\mathcal{F}'$  到  $\mathcal{F}$  的旋转四元数。方程 (14) 类似于当在  $\mathbb{R}^3$  中使用旋转矩阵和向量的相似性变换时获得的方程。

<sup>4</sup>在  $\mathbb{H}_p$  中的内积等同于在  $\mathbb{R}^3$  中的内积。

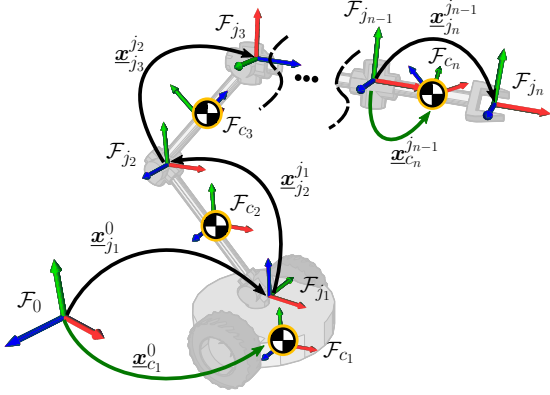


FIGURE 1: 一个  $n_\ell$  自由度的串联机械臂的移动机械臂组合，附着到一个 3 自由度的移动基座上。

### 3 对偶四元数牛顿-欧拉模型

本节对于具有任意关节的移动机械臂，介绍使用对偶四元数代数的牛顿-欧拉模型的递归关系，假设使用对偶四元数表示的完整运动学模型是可用的 [12]。

为了说明目的，在不丧失一般性的情况下，考虑图 1 所示的移动机械臂，其由一个  $n_\ell$  自由度的串联机械臂组成，附着到一个 3 自由度的移动基座。目标是在给定相应的机器人位形、广义速度和广义加速度的情况下，找到作用于机器人移动基座和  $n_\ell$  连杆的  $n = n_\ell + 1$  质心 (centers of mass, CoM) 上的动力旋量  $\underline{\Gamma} \in \mathcal{H}_p^n$ 。这可以看作是一个函数  $\mathcal{N} : \mathbb{R}^{n_\ell+3} \times \mathbb{R}^{n_\ell+3} \times \mathbb{R}^{n_\ell+3} \rightarrow \mathcal{H}_p^n$ ，其中  $n_\ell + 3$  是位形空间的维度，并且  $n$  是运动链中刚体的数量 (例如，移动基座和连杆)，使得

$$\underline{\Gamma} = \mathcal{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}). \quad (15)$$

#### 3.1 正向递归

该算法的第一个过程包括机器人运动学结构的串行扫描，以计算每个质心的运动旋量。<sup>5</sup> 其目标是找到正向递归关系，然后使用该关系迭代地获得作用于机器人移动基座和关节的动力旋量。

**3.1.1 运动旋量** 移动基座的质心 (即，串联运动链中的第一个质心) 相对于惯性帧  $\mathcal{F}_0$  的运动旋量，在帧

<sup>5</sup> 此后，我们将使用“质心的运动旋量”这一表达作为“附着到质心的帧的运动旋量”的简写。

$\mathcal{F}_{c_1}$  中表达，由纯对偶四元数给出为

$$\underline{\xi}_{0,c_1}^{c_1} = \omega_{0,c_1}^{c_1} + \varepsilon \mathbf{v}_{0,c_1}^{c_1}, \quad (16)$$

其中  $\omega_{0,c_1}^{c_1} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$  和  $\mathbf{v}_{0,c_1}^{c_1} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$  分别是角速度和线速度。一个完整移动基座的运动旋量在运动学上等效于一个平面关节的运动旋量，如表 1 所示。

第一个连杆质心 (即串联运动链中的第二个刚体的质心) 相对于惯性帧的运动旋量不仅取决于其关节产生的运动旋量，还取决于移动基座的运动旋量，因为它们物理附着的。因此，

$$\begin{aligned} \underline{\xi}_{0,c_2}^{c_2} &= \underline{\xi}_{0,j_1}^{c_2} + \underline{\xi}_{j_1,c_2}^{c_2}, \\ &= \text{Ad}(\underline{\mathbf{x}}_{c_1}^{c_2}) \underline{\xi}_{0,j_1}^{c_1} + \text{Ad}(\underline{\mathbf{x}}_{j_1}^{c_2}) \underline{\xi}_{j_1,c_2}^{j_1}, \\ &= \text{Ad}(\underline{\mathbf{x}}_{c_1}^{c_2}) (\underline{\xi}_{0,c_1}^{c_1} + \underline{\xi}_{c_1,j_1}^{c_1}) + \text{Ad}(\underline{\mathbf{x}}_{j_1}^{c_2}) \underline{\xi}_{j_1,c_2}^{j_1}, \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $\underline{\xi}_{j_1,c_2}^{j_1} = \omega_{j_1,c_2}^{j_1} + \varepsilon \mathbf{v}_{j_1,c_2}^{j_1}$  是在  $\mathcal{F}_{c_2}$  上由第一个关节产生的运动旋量，并且  $\underline{\xi}_{0,j_1}^{c_2}$  是在  $\mathcal{F}_{j_1}$  上由移动基座产生的运动旋量，但使用合适的变换，如方程 (3)，在  $\mathcal{F}_{c_2}$  中表达。表 1 对于不同类型的关节列出了它们的运动旋量，其中  $\mathbf{l} \in \mathbb{H}_p \cap \mathbb{S}^3$  是一个常量 (constant) 单位范数纯四元数，其等价于  $\mathbb{R}^3$  中的一个向量，用于定义一个任意轴。例如，当使用 Denavit-Hartenberg (DH) 约定时， $\mathbf{l} = \hat{k}$ ，这等价于  $z$  轴。此外， $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_z \in \mathbb{R}$  和  $v, v_x, v_y, v_z \in \mathbb{R}$  分别是角速度和线速度的标量分量。同样，当使用 DH 约定时，对于旋转关节  $\omega = \dot{\theta}$ ，并且对于棱柱状关节  $v = \dot{d}$ 。对于螺旋关节，常量  $h \in \mathbb{R}$  被称为旋距 (pitch)。

此外， $\underline{\xi}_{c_1,j_1}^{c_1} = 0$ ，因为  $\dot{\underline{\mathbf{x}}}_{j_1}^{c_1} = 0$ 。因此，

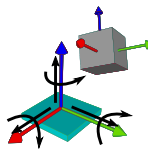
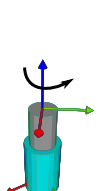
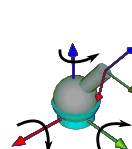
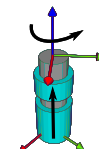
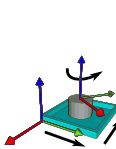
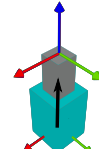
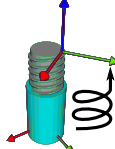
$$\underline{\xi}_{0,c_2}^{c_2} = \text{Ad}(\underline{\mathbf{x}}_{c_1}^{c_2}) \underline{\xi}_{0,c_1}^{c_1} + \text{Ad}(\underline{\mathbf{x}}_{j_1}^{c_2}) \underline{\xi}_{j_1,c_2}^{j_1}.$$

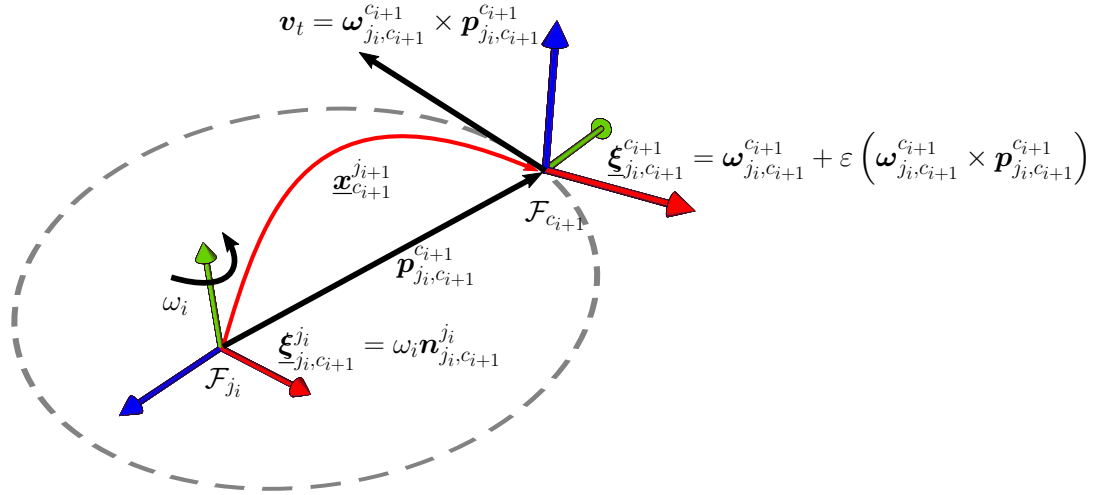
而且，展开  $\text{Ad}(\underline{\mathbf{x}}_{j_1}^{c_2}) \underline{\xi}_{j_1,c_2}^{j_1}$ ，我们获得

$$\text{Ad}(\underline{\mathbf{x}}_{j_1}^{c_2}) \underline{\xi}_{j_1,c_2}^{j_1} = \omega_{j_1,c_2}^{c_2} + \varepsilon (\mathbf{v}_{j_1,c_2}^{c_2} + \omega_{j_1,c_2}^{c_2} \times \mathbf{p}_{j_1,c_2}^{c_2}),$$

其中因为在从质心处 (即从  $\mathcal{F}_{j_1}$  处) 移位的一个点中应用角速度而产生的线速度以代数方式产生。图 2 说明了使用纯旋转关节时的这种现象 (即  $\underline{\xi}_{j_i,c_{i+1}}^{j_i} = \omega_{j_i,c_{i+1}}^{j_i} = \omega_i \mathbf{n}_{j_i,c_{i+1}}^{j_i}$ ，其中  $\mathbf{n}_{j_i,c_{i+1}}^{j_i} \in \mathbb{H}_p \cap \mathbb{S}^3$  是一个任意的单位范数旋转轴)。

**TABLE 1:** 在机器人中一些最常用的关节的扭曲, 其中  $\mathbf{l} \in \mathbb{H}_p \cap \mathbb{S}^3$  并且  $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_z, v, v_x, v_y, v_z, h \in \mathbb{R}$ 。

6 自由度关节	旋转关节	球面关节	圆柱关节	平面关节	棱柱关节	螺旋关节
						
$\underline{\xi} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k} + \varepsilon (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k})$	$\underline{\xi} = \omega \mathbf{l}$	$\underline{\xi} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$	$\underline{\xi} = (\omega + \varepsilon v) \mathbf{l}$	$\underline{\xi} = \omega \mathbf{l} + \varepsilon (v_x \hat{i} + v_y \hat{j})$	$\underline{\xi} = \varepsilon v \mathbf{l}$	$\underline{\xi} = (\omega + \varepsilon h \omega) \mathbf{l}$



**FIGURE 2:** 运动旋量  $\xi_{j_i, c_{i+1}}^{j_{i+1}}$  由于围绕参考帧  $\mathcal{F}_{j_i}$  的一个任意轴施加角速度  $\omega_i$  而产生。 $\mathcal{F}_{c_{i+1}}$  所遵循的圆形轨迹由灰色虚线表示。 $\omega_i$  的应用导致的线速度通过伴随变换以代数方式出现。因此, 参考帧  $\mathcal{F}_{c_{i+1}}$  的切向速度, 以黑色实线箭头表示, 由运动旋量  $\xi_{j_i, c_{i+1}}^{c_{i+1}}$  的对偶部分给出。

更一般地, 在  $\mathcal{F}_{c_i}$  中的运动旋量, 其提供  $\mathcal{F}_{c_i}$  相对于  $\mathcal{F}_0$  的运动, 产生于运动链中的前  $i$  个刚体的运动, 给出为

$$\underline{\xi}_{0, c_i}^{c_i} = \underline{\xi}_{0, j_{i-1}}^{c_i} + \underline{\xi}_{j_{i-1}, c_i}^{c_i} \quad (18)$$

其中  $\underline{\xi}_{0, j_{i-1}}^{c_i}$  是与前  $i-1$  个刚体的运动相关的运动旋量, 并且  $\underline{\xi}_{j_{i-1}, c_i}^{c_i}$  是与第  $i$  个刚体的运动相关的运动旋量。另外, 对于任意  $a$ ,  $\underline{\xi}_{0,0}^a = 0$ 。

分析方程 (16), (17) 和 (18), 通过归纳, 我们发现, 第  $i$  个质心总的运动旋量的递归关系, 其具有直到第  $i$

个刚体的所有刚体的贡献, 在  $\mathcal{F}_{c_i}$  中表达, 为

$$\underline{\xi}_{0, c_i}^{c_i} = \text{Ad} \left( \underline{x}_{c_{i-1}}^{c_i} \right) \left( \underline{\xi}_{0, c_{i-1}}^{c_{i-1}} + \underline{\xi}_{c_{i-1}, j_{i-1}}^{c_{i-1}} \right) + \text{Ad} \left( \underline{x}_{j_{i-1}}^{c_i} \right) \underline{\xi}_{j_{i-1}, c_i}^{j_{i-1}},$$

其中  $c_0 = j_0 = 0$ , 并且  $\underline{\xi}_{c_{i-1}, j_{i-1}}^{c_{i-1}} = 0$ , 因为对于所有的  $i$ ,  $\underline{x}_{j_{i-1}}^{c_{i-1}} = 0$ 。因此,

$$\underline{\xi}_{0, c_i}^{c_i} = \text{Ad} \left( \underline{x}_{c_{i-1}}^{c_i} \right) \underline{\xi}_{0, c_{i-1}}^{c_{i-1}} + \text{Ad} \left( \underline{x}_{j_{i-1}}^{c_i} \right) \underline{\xi}_{j_{i-1}, c_i}^{j_{i-1}}. \quad (19)$$

由于运动旋量  $\underline{\xi}_{j_{i-1}, c_i}^{j_{i-1}}$  是由第  $i$  个关节产生的, 其表达式取决于第  $i$  个关节是哪种类型 (参见表 1)。类似地, 运

动旋量  $\xi_{0,c_1}^{c_1}$  取决于移动基座是哪一种类型 (例如, 对于完整移动基座, 它等效于平面关节给出的运动旋量)。变换  $\underline{x}_{c_i-1}^{c_i}$  被计算为  $\underline{x}_{c_i-1}^{c_i} = (\underline{x}_{c_i}^0)^* \underline{x}_{c_i-1}^0$ , 其中当  $\underline{x}_0^0 = 1$  时,  $\underline{x}_{c_i}^0 = \underline{x}_{c_i-1}^0 \underline{x}_{j_{i-1}}^{c_{i-1}} \underline{x}_{c_i}^{j_{i-1}}$ , 变换  $\underline{x}_{j_{i-1}}^{c_{i-1}}$  为常量, 并且  $\underline{x}_{c_i}^{j_{i-1}}$  是第  $(i-1)$  个关节 (或  $i=1$  时的移动基座) 的参数的函数。

**3.1.2 运动旋量的时间导数** 方程 (19) 的时间导数, 我们使用方程 (9) 来获得

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\xi}}_{0,c_i}^{c_i} &= \text{Ad} \left( \underline{x}_{c_{i-1}}^{c_i} \right) \dot{\underline{\xi}}_{0,c_{i-1}}^{c_{i-1}} \\ &+ \underline{\xi}_{0,c_{i-1}}^{c_i} \times \left( \text{Ad} \left( \underline{x}_{c_{i-1}}^{c_i} \right) \dot{\underline{\xi}}_{0,c_{i-1}}^{c_{i-1}} \right) + \text{Ad} \left( \underline{x}_{j_{i-1}}^{c_i} \right) \dot{\underline{\xi}}_{j_{i-1},c_i}^{j_{i-1}} \\ &+ \underline{\xi}_{c_i,j_{i-1}}^{c_i} \times \left( \text{Ad} \left( \underline{x}_{j_{i-1}}^{c_i} \right) \dot{\underline{\xi}}_{j_{i-1},c_i}^{j_{i-1}} \right). \end{aligned}$$

由于  $\underline{\xi}_{j_{i-1},c_i}^{c_i} = -\underline{\xi}_{c_i,j_{i-1}}^{c_i}$  则

$$\underline{\xi}_{c_i,j_{i-1}}^{c_i} \times \left( \text{Ad} \left( \underline{x}_{j_{i-1}}^{c_i} \right) \dot{\underline{\xi}}_{j_{i-1},c_i}^{j_{i-1}} \right) = -\underline{\xi}_{c_i,j_{i-1}}^{c_i} \times \underline{\xi}_{c_i,j_{i-1}}^{c_i} = 0.$$

因此,

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\xi}}_{0,c_i}^{c_i} &= \text{Ad} \left( \underline{x}_{c_{i-1}}^{c_i} \right) \dot{\underline{\xi}}_{0,c_{i-1}}^{c_{i-1}} + \text{Ad} \left( \underline{x}_{j_{i-1}}^{c_i} \right) \dot{\underline{\xi}}_{j_{i-1},c_i}^{j_{i-1}} \\ &+ \underline{\xi}_{c_i,c_{i-1}}^{c_i} \times \left[ \text{Ad} \left( \underline{x}_{c_{i-1}}^{c_i} \right) \dot{\underline{\xi}}_{0,c_{i-1}}^{c_{i-1}} \right], \quad (20) \end{aligned}$$

其中  $\dot{\underline{\xi}}_{0,c_0}^{c_0} \triangleq 0$ 。另外, 由于  $\underline{\xi}_{c_i,c_{i-1}}^{j_{i-1}} = \underline{\xi}_{c_i,j_{i-1}}^{j_{i-1}} + \underline{\xi}_{j_{i-1},c_{i-1}}^{j_{i-1}}$  并且  $\underline{\xi}_{j_{i-1},c_{i-1}}^{j_{i-1}} = 0$ , 则

$$\underline{\xi}_{c_i,c_{i-1}}^{c_i} = \text{Ad} \left( \underline{x}_{j_{i-1}}^{c_i} \right) \underline{\xi}_{c_i,j_{i-1}}^{j_{i-1}} = -\text{Ad} \left( \underline{x}_{j_{i-1}}^{c_i} \right) \underline{\xi}_{j_{i-1},c_i}^{j_{i-1}}. \quad (21)$$

如第 3.1.1 节所示, 运动旋量  $\underline{\xi}_{j_{i-1},c_i}^{j_{i-1}}$  取决于第  $i$  个关节的类型, 并因此, 这个项  $\underline{\xi}_{j_{i-1},c_i}^{j_{i-1}}$  也是如此。例如, 如果第  $i$  个关节是旋转的, 则  $\underline{\xi}_{j_{i-1},c_i}^{j_{i-1}} = \dot{\omega}_i \underline{l}_{j_i}^{j_i}$ 。如果它是棱形的, 则  $\underline{\xi}_{j_{i-1},c_i}^{j_{i-1}} = \varepsilon \dot{v}_i \underline{l}_{j_i}^{j_i}$ 。类似地, 如果它是螺旋形的, 则  $\underline{\xi}_{j_{i-1},c_i}^{j_{i-1}} = (\dot{\omega}_i + \varepsilon h \dot{\omega}_i) \underline{l}_{j_i}^{j_i}$ , 如此等等。同样的推理适用于移动基座的运动旋量  $\dot{\underline{\xi}}_{0,c_1}^{c_1}$ 。

**备注 1.** 尽管方程 (20) 是以递归形式编写的, 但我们始终可以如在方程 (5) 和 (6) 中的那样将运动旋量写

出来。因此, 由于  $\underline{\xi}_{0,c_i}^{c_i} = \text{Ad} \left( \underline{x}_0^{c_i} \right) \underline{\xi}_{0,c_i}^0$ , 其中  $\underline{\xi}_{0,c_i}^0 = \omega_{0,c_i}^0 + \varepsilon (\dot{p}_{0,c_i}^0 + p_{0,c_i}^0 \times \omega_{0,c_i}^0)$ , 我们使用方程 (9) 以获得

$$\dot{\underline{\xi}}_{0,c_i}^{c_i} = \text{Ad} \left( \underline{x}_0^{c_i} \right) \dot{\underline{\xi}}_{0,c_i}^0 = \dot{\omega}_{0,c_i}^{c_i} + \varepsilon (\ddot{p}_{0,c_i}^{c_i} + \dot{p}_{0,c_i}^{c_i} \times \omega_{0,c_i}^{c_i}) \quad (22)$$

因为  $\underline{\xi}_{c_i,0}^{c_i} \times \text{Ad} \left( \underline{x}_0^{c_i} \right) \underline{\xi}_{0,c_i}^0 = -\underline{\xi}_{0,c_i}^{c_i} \times \underline{\xi}_{0,c_i}^{c_i} = 0$ 。由于  $\mathcal{D} \left( \dot{\underline{\xi}}_{0,c_i}^{c_i} \right) = \ddot{p}_{0,c_i}^{c_i} + \dot{p}_{0,c_i}^{c_i} \times \omega_{0,c_i}^{c_i}$  则

$$\ddot{p}_{0,c_i}^{c_i} = \mathcal{D} \left( \dot{\underline{\xi}}_{0,c_i}^{c_i} \right) - \mathcal{D} \left( \underline{\xi}_{0,c_i}^{c_i} \right) \times \mathcal{P} \left( \underline{\xi}_{0,c_i}^{c_i} \right). \quad (23)$$

### 3.2 逆向递归

迭代算法的第二个过程是将串联机器人从最后一个刚体扫描到第一个刚体, 以计算施加在每个刚体上的动力旋量。对于机器人手臂, 我们对每个关节的动力旋量感兴趣, 而对于移动基座, 我们想找到其质心处的动力旋量。为了这个目的, 我们使用在第 3.1 节中获得的运动旋量及其时间导数。

在获得逆向递归的一般表达式之前, 让我们考虑图 1 中所示的移动机械臂。在第  $n_\ell$  个连杆的质心处的动力旋量 (即, 在运动链中的第  $n$  个质心, 其中  $n = n_\ell + 1$ ), 在  $\mathcal{F}_{c_n}$  中表达, 由纯对偶四元数给出为

$$\underline{\zeta}_{0,c_n}^{c_n} = \underline{\zeta}_{0,c_n}^{c_n} - m_n \underline{g}^{c_n}, \quad (24)$$

其中  $m_n \underline{g}^{c_n}$  是重力分量, 其中  $\underline{g}^{c_n} \in \mathbb{H}_p$  是在  $\mathcal{F}_{c_n}$  中表达的重力向量, 并且  $\underline{\zeta}_{0,c_n}^{c_n} = \underline{f}_{0,c_n}^{c_n} + \varepsilon \underline{\tau}_{0,c_n}^{c_n}$ , 其中  $\underline{f}_{0,c_n}^{c_n} = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k}$  是在第  $n$  个刚体 (即第  $n_\ell$  个连杆) 的质心处的力, 由牛顿第二定律  $\underline{f}_{0,c_n}^{c_n} = m_n \ddot{\underline{p}}_{0,c_n}^{c_n}$  给出。

因此, 我们使用方程 (23) 以获得

$$\underline{f}_{0,c_n}^{c_n} = m_n \left( \mathcal{D} \left( \dot{\underline{\xi}}_{0,c_n}^{c_n} \right) + \mathcal{P} \left( \underline{\xi}_{0,c_n}^{c_n} \right) \times \mathcal{D} \left( \underline{\xi}_{0,c_n}^{c_n} \right) \right). \quad (25)$$

此外, 由于其角动量的变化,  $\underline{\tau}_{0,c_n}^{c_n}$  是围绕第  $n$  个刚体的质心的扭矩, 由欧拉旋转方程给出为

$$\begin{aligned} \underline{\tau}_{0,c_n}^{c_n} &= \mathcal{L}_3 \left( \mathbb{I}_n^{c_n} \right) \mathcal{P} \left( \dot{\underline{\xi}}_{0,c_n}^{c_n} \right) \\ &+ \mathcal{P} \left( \underline{\xi}_{0,c_n}^{c_n} \right) \times \left( \mathcal{L}_3 \left( \mathbb{I}_n^{c_n} \right) \mathcal{P} \left( \underline{\xi}_{0,c_n}^{c_n} \right) \right), \quad (26) \end{aligned}$$

其中  $\mathcal{L}_3$  由方程 (12) 给出, 并且  $\mathbb{I}_n^{c_n}$  是第  $n$  个刚体的四元数惯性张量, 在其质心处表达, 由方程 (11) 给出。因

为方程 (26) 是相对于质心计算的, 所以重力加速度对扭矩没有贡献。

在方程 (24) 中如在方程 (3) 中那样使用的伴随变换, 在第  $n_\ell$  个关节处的动力旋量, 其由第  $n$  个刚体的质心处的动力旋量产生, 给出为:

$$\underline{\zeta}_{0,j_n}^{j_{n-1}} = \text{Ad}(\underline{x}_{c_n}^{j_{n-1}}) \underline{\zeta}_{0,c_n}^{c_n}. \quad (27)$$

在第  $(n-1)$  个刚体 (即, 在  $\mathcal{F}_{c_{n-1}}$  处) 的合成动力旋量还包括来自第  $n$  个刚体的动力旋量的影响, 因为它们彼此刚性附着。因此, 在第  $(n_\ell-1)$  关节处 (即, 在  $\mathcal{F}_{c_{n-2}}$  处) 的合成动力旋量给出为

$$\underline{\zeta}_{0,j_{n-1}}^{j_{n-2}} = \text{Ad}(\underline{x}_{c_{n-1}}^{j_{n-2}}) \underline{\zeta}_{0,c_{n-1}}^{c_{n-1}} + \text{Ad}(\underline{x}_{j_{n-1}}^{j_{n-2}}) \underline{\zeta}_{0,j_n}^{j_{n-1}}, \quad (28)$$

其中  $\underline{\zeta}_{0,c_{n-1}}^{c_{n-1}} = \underline{\zeta}_{0,c_{n-1}}^{c_{n-1}} - m_{n-1} \mathbf{g}^{c_{n-1}}$ , 在其中  $\underline{\zeta}_{0,c_{n-1}}^{c_{n-1}} = \mathbf{f}_{0,c_{n-1}}^{c_{n-1}} + \varepsilon \boldsymbol{\tau}_{0,c_{n-1}}^{c_{n-1}}$ , 是在第  $(n-1)$  个刚体的质心处的动力旋量, 在  $\mathcal{F}_{c_{n-1}}$  中表达。

因此, 分析方程 (24)、(27) 以及 (28), 我们可以发现, 逆向递归关系, 对于在第  $i$  个刚体处总的动力旋量, 其包括从第  $i$  个刚体的质心的动力旋量开始, 直到最后一个的质心的动力旋量, 它们所有的贡献, 在  $\mathcal{F}_{j_{i-1}}$  中表达, 为

$$\underline{\zeta}_{0,j_i}^{j_{i-1}} = \text{Ad}(\underline{x}_{c_i}^{j_{i-1}}) \underline{\zeta}_{0,c_i}^{c_i} + \text{Ad}(\underline{x}_{j_i}^{j_{i-1}}) \underline{\zeta}_{0,j_{i+1}}^{j_i}, \quad (29)$$

其中  $i \in \{1, \dots, n\}$  并且  $c_0 = j_0 = 0$ , 这里  $\underline{\zeta}_{0,j_{n_\ell+2}}^{j_{n_\ell+1}} = \underline{\zeta}_{0,j_{n+1}}^{j_n} = 0$  (回想这个  $n = n_\ell + 1$ ) 并且  $\underline{\zeta}_{0,c_i}^{c_i} = \underline{\zeta}_{0,c_i}^{c_i} - m_i \mathbf{g}^{c_i}$ , 其中  $\underline{\zeta}_{0,c_i}^{c_i} = \mathbf{f}_{0,c_i}^{c_i} + \varepsilon \boldsymbol{\tau}_{0,c_i}^{c_i}$ , 是在第  $i$  个质心处的动力旋量,<sup>6</sup>  $\mathbf{f}_{0,c_i}^{c_i} = m_i \ddot{\mathbf{p}}_{0,c_i}^{c_i}$ , 并且  $\boldsymbol{\tau}_{0,c_i}^{c_i} = \mathcal{L}_3(\mathbb{I}_i^{c_i}) \mathcal{P}(\dot{\underline{\xi}}_{0,c_i}^{c_i}) + \mathcal{P}(\underline{\xi}_{0,c_i}^{c_i}) \times (\mathcal{L}_3(\mathbb{I}_i^{c_i}) \mathcal{P}(\underline{\xi}_{0,c_i}^{c_i}))$ 。对于移动基座 (即, 在串联运动学链中的第一个质心; 因此,  $i=1$ ), 注意方程 (29) 的结果为  $\underline{\zeta}_{0,j_1}^{j_0} = \text{Ad}(\underline{x}_{c_1}^{j_0}) \underline{\zeta}_{0,c_1}^{c_1} + \text{Ad}(\underline{x}_{j_1}^{j_0}) \underline{\zeta}_{0,j_2}^{j_1}$ , 这意味着  $\underline{\zeta}_{0,j_1}^{j_0} = \text{Ad}(\underline{x}_{c_1}^{j_0}) \underline{\zeta}_{0,c_1}^{c_1} + \text{Ad}(\underline{x}_{j_1}^{j_0}) \underline{\zeta}_{0,j_2}^{j_1}$ 。

此外, 变换  $\underline{x}_{c_i}^{j_{i-1}}$  是关节或移动基座的坐标的函数。例如, 移动基座的变换,  $\underline{x}_{c_1}^{j_0} = \underline{x}_{c_1}^0$ , 取决于其坐标和旋转角度, 即  $(x_{\text{base}}, y_{\text{base}}, \phi_{\text{base}})$ , 因此  $\underline{x}_{c_1}^0 \triangleq \underline{x}_{c_1}^0(x_{\text{base}}, y_{\text{base}}, \phi_{\text{base}})$  并且  $q_1 = x_{\text{base}}, q_2 = y_{\text{base}}, q_3 = \phi_{\text{base}}$ 。对于具有旋转关节、棱柱关节或螺旋关节的机械臂, 变换  $\underline{x}_{c_i}^{j_{i-1}}$ , 其中  $i \geq 2$ , 是一个仅有一个参数的函数, 即  $\underline{x}_{c_i}^{j_{i-1}} \triangleq \underline{x}_{c_i}^{j_{i-1}}(q_{j_{i-1}})$ 。在这种情况下,  $q_{j_{i-1}} = q_{i+2}$ 。

类似地, 球面和平面关节取决于三个参数, 而螺旋关节取决于六个参数。因此, 对于在位形向量  $\mathbf{q}$  中的每一个参数, 当定义索引时必须小心。

**3.2.1 特殊情况: 棱柱关节与旋转关节** 在具有旋转和/或棱柱关节的机械臂的机器人中, 这是最常见的情况, 由方程 (29) 给出的动力旋量必须投影到关节运动轴上, 通过

$$\langle \underline{\zeta}_{0,j_i}^{j_{i-1}}, \mathbf{l}_{j_{i-1}} \rangle = f_{l_i} + \varepsilon \tau_{l_i}, \quad (30)$$

其中  $f_{l_i}, \tau_{l_i} \in \mathbb{R}$ , 并且  $\langle \underline{\zeta}_{0,j_i}^{j_{i-1}}, \mathbf{l}_{j_{i-1}} \rangle$  是运动旋量  $\underline{\zeta}_{0,j_i}^{j_{i-1}} = \mathbf{f}_{0,j_i}^{j_{i-1}} + \varepsilon \boldsymbol{\tau}_{0,j_i}^{j_{i-1}}$  与第  $i$  个关节的运动轴  $\mathbf{l}_{j_{i-1}} \in \mathbb{H}_p \cap \mathbb{S}^3$  之间的内积, 给出为 [42]

$$\begin{aligned} \langle \underline{\zeta}_{0,j_i}^{j_{i-1}}, \mathbf{l}_{j_{i-1}} \rangle &= -\frac{(\underline{\zeta}_{0,j_i}^{j_{i-1}} \mathbf{l}_{j_{i-1}} + \mathbf{l}_{j_{i-1}} \underline{\zeta}_{0,j_i}^{j_{i-1}})}{2} \\ &= \langle \mathbf{f}_{0,j_i}^{j_{i-1}}, \mathbf{l}_{j_{i-1}} \rangle + \varepsilon \langle \boldsymbol{\tau}_{0,j_i}^{j_{i-1}}, \mathbf{l}_{j_{i-1}} \rangle = f_{l_i} + \varepsilon \tau_{l_i}. \end{aligned}$$

因此, 如果第  $i$  个关节是旋转关节, 则相应的扭矩给出为  $\tau_{l_i} = \mathcal{D}(\langle \underline{\zeta}_{0,j_i}^{j_{i-1}}, \mathbf{l}_{j_{i-1}} \rangle)$ 。如果它是棱形关节, 则沿着轴线  $\mathbf{l}_{j_{i-1}}$  的相应的力给出为  $f_{l_i} = \mathcal{P}(\langle \underline{\zeta}_{0,j_i}^{j_{i-1}}, \mathbf{l}_{j_{i-1}} \rangle)$ 。

**3.2.2 特殊情况: 平面关节/完整基座** 对于具有完整移动基座和/或平面关节 (运动学等效) 的机器人, 我们必须将动力旋量投射到关节/移动基座的所有三个运动轴上。<sup>7</sup>也就是说, 沿着关节/移动基座的  $x$  轴和  $y$  轴的相应的力给出为

$$\begin{aligned} f_{l_x} &= \mathcal{P}(\langle \underline{\zeta}_{0,j_i}^{j_{i-1}}, \text{Ad}(\mathbf{r}_0^{j_{i-1}}) \hat{i} \rangle), \\ f_{l_y} &= \mathcal{P}(\langle \underline{\zeta}_{0,j_i}^{j_{i-1}}, \text{Ad}(\mathbf{r}_0^{j_{i-1}}) \hat{j} \rangle), \end{aligned}$$

而围绕关节/移动基座的  $z$  轴的相应扭矩给出为

$$\tau_z = \mathcal{D}(\langle \underline{\zeta}_{0,j_i}^{j_{i-1}}, \text{Ad}(\mathbf{r}_0^{j_{i-1}}) \hat{k} \rangle).$$

## 4 高斯最小约束原理

GPLC [43] 是一个微分变分原理, 相当于达朗贝尔原理, 它基于加速度的变化。对于一个由  $n$  个机体组成

<sup>6</sup> 如果一个外部的动力旋量被应用于末端操纵器, 则  $\underline{\zeta}_{0,j_{n+1}}^{j_n} \neq 0$ 。

<sup>7</sup> 注意, 本过程适用于所有具有一个以上运动轴的关节 (例如球面关节、平面关节等等)。

的系统，它可以被表述为最小二乘的最小化问题

$$\min \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (\mathbf{a}_{c_i} - \bar{\mathbf{a}}_{c_i})^T \Psi_{c_i} (\mathbf{a}_{c_i} - \bar{\mathbf{a}}_{c_i}) \quad , \quad (31)$$

其中  $\mathbf{a}_{c_i}$  和  $\bar{\mathbf{a}}_{c_i}$  分别是第  $i$  个刚体在受约束和无约束条件下的质心加速度。此外， $\Psi_{c_i} \triangleq \Psi_{c_i}(\bar{\mathbb{I}}_i, m_i)$  封装了第  $i$  个刚体的惯性参数，例如惯性张量  $\bar{\mathbb{I}}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  和质量  $m_i$ 。

该原理已在机器人学中用于描述机器人操纵器的动力学 [44] 和刚体模拟 [45]。Wieber [46] 使用 GPLC 推导出仿人机器人的拉格朗日动力学的解析表达式。Bouyarmane 和 Kheddar [47] 通过处理自由浮动基座机械装置的任意参数化扩展了 Wieber 的工作。这允许使用旋转矩阵或单位四元数来表示自由浮动基座方向。在本节中，我们为铰接体重写了 GPLC，类似于 Wieber 的公式 [46]，但使用对偶四元数代数。与 Bouyarmane 和 Kheddar [47] 的表述相比，这允许更紧凑和统一的表述。

首先，我们将受约束加速度方程 (20) 重写为关节速度和关节加速度向量的线性函数。这允许求解方程 (31) 的关节加速度，并因此，附加约束可被包括在优化公式中。然后，我们定义约束来建模非完整移动机械臂。与文献 [47] 不同，我们不使用拉格朗日乘子。相反，我们应用了 Udwadia-Kalaba 的基本方程 [40]，这是一种求解二次优化问题的更简单的方法，如方程 (31)。

#### 4.1 受约束加速度 $\mathbf{a}_{c_i}$

考虑在图 1 中的机器人系统。该机器人是由几个刚体组成，它们之间通过关节相互制约<sup>8</sup>。为了将第  $i$  个质心的运动旋量明确地表达为其雅可比矩阵  $\mathbf{J}_{\xi_{0,c_i}^{c_i}}$  与关节速度向量  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  之间的线性组合，我们使用算子  $\text{vec}_8 : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^8$ ，它将一个对偶四元数的系数映射为八维向量，<sup>9</sup>并且  $\bar{\mathbf{H}}_8 : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^{8 \times 8}$ ，使得  $\text{vec}_8(\bar{\mathbf{h}}_1 \bar{\mathbf{h}}_2) = \bar{\mathbf{H}}_8(\bar{\mathbf{h}}_1) \text{vec}_8 \bar{\mathbf{h}}_2$  [12]。因此，从方程 (4) 中我们获得  $\xi_{0,c_i}^{c_i} = 2(\bar{\mathbf{x}}_{c_i}^0)^* \bar{\mathbf{x}}_{c_i}^0$ ，这意味着  $\text{vec}_8 \xi_{0,c_i}^{c_i} = 2\bar{\mathbf{H}}_8(\bar{\mathbf{x}}_{c_i}^0) \text{vec}_8 \bar{\mathbf{x}}_{c_i}^0$ 。

因为  $\xi_{0,c_i}^{c_i} \in \mathcal{H}_p$ ， $\text{vec}_8 \xi_{0,c_i}^{c_i}$  的第一个和第五个元素等于零，因此我们也使用算子  $\text{vec}_6 : \mathcal{H}_p \rightarrow \mathbb{R}^6$  使得

<sup>8</sup>在这种情况下，既有完整约束，也有非完整约束。前者是运动链中相邻连杆之间的约束。后者是移动基座的约束。

<sup>9</sup>给定  $\bar{\mathbf{h}} = h_1 + i h_2 + j h_3 + k h_4 + \varepsilon(h_5 + i h_6 + j h_7 + k h_8)$ ， $\text{vec}_8 \bar{\mathbf{h}} = [h_1 \cdots h_8]^T$ 。

$\text{vec}_6 \xi_{0,c_i}^{c_i} \triangleq \bar{\mathbf{I}} \text{vec}_8 \xi_{0,c_i}^{c_i}$ ，这里

$$\bar{\mathbf{I}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix},$$

其中  $\mathbf{I}_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  是特征向量，并且  $\mathbf{0}_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是一个零矩阵。此外， $\text{vec}_8 \bar{\mathbf{x}}_{c_i}^0 = \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{x}}_{c_i}^0} \dot{\mathbf{q}}_i$ ，其中  $\dot{\mathbf{q}}_i = [\dot{q}_1 \cdots \dot{q}_i]^T$ ，并且  $\mathbf{J}_{\bar{\mathbf{x}}_{c_i}^0} \in \mathbb{R}^{8 \times i}$  是以代数方式获得的雅可比矩阵 [12]。因此，

$$\nu_{c_i} \triangleq \text{vec}_6 \xi_{0,c_i}^{c_i} = \underbrace{\left[ \bar{\mathbf{J}}_{\xi_{0,c_i}^{c_i}} \quad \mathbf{0}_{6 \times (n-i)} \right]}_{\mathbf{J}_{\xi_{0,c_i}^{c_i}}^c} \dot{\mathbf{q}}, \quad (32)$$

其中  $\bar{\mathbf{J}}_{\xi_{0,c_i}^{c_i}} = 2\bar{\mathbf{I}}\bar{\mathbf{H}}_8(\bar{\mathbf{x}}_{c_i}^0) \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{x}}_{c_i}^0} \in \mathbb{R}^{6 \times i}$ 。

最后，第  $i$  个质心的受约束加速度给出为

$$\mathbf{a}_{c_i} \triangleq \text{vec}_6 \dot{\xi}_{0,c_i}^{c_i} = \mathbf{J}_{\xi_{0,c_i}^{c_i}} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_{\xi_{0,c_i}^{c_i}} \dot{\mathbf{q}}. \quad (33)$$

我们回想方程 (33) 等价于方程 (20)，因为牛顿-欧拉公式隐含地考虑了机体之间的连杆约束。

#### 4.2 无约束加速度 $\bar{\mathbf{a}}_{c_i}$

考虑  $\bar{\mathbf{x}}_{c_i}^0 = \mathbf{r}_{c_i}^0 + (1/2)\varepsilon \mathbf{p}_{0,c_i}^0 \mathbf{r}_{c_i}^0$ ，其表示从  $\mathcal{F}_0$  到  $\mathcal{F}_{c_i}$  的刚性运动，以及在无约束条件下第  $i$  个机体在  $\mathcal{F}_{c_i}$  处的运动旋量  $\bar{\xi}_{0,c_i}^{c_i}$ 。从方程 (22)，无约束加速度明确地给出为

$$\bar{\mathbf{a}}_{c_i} \triangleq \text{vec}_6 \dot{\bar{\xi}}_{0,c_i}^{c_i} = \begin{bmatrix} \text{vec}_3 \dot{\omega}_{0,c_i}^{c_i} \\ \text{vec}_3 (\ddot{\mathbf{p}}_{0,c_i} + \dot{\mathbf{p}}_{0,c_i} \times \omega_{0,c_i}^{c_i}) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

其中  $\text{vec}_3 : \mathbb{H}_p \rightarrow \mathbb{R}^3$  使得  $\text{vec}_3(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}) = [a \ b \ c]^T$ 。尽管方程 (33) 取决于  $\mathbf{q}$ ， $\dot{\mathbf{q}}$ ，以及  $\ddot{\mathbf{q}}$ ，但方程 (34) 不取决于它们，因为它无约束的。

#### 4.3 欧拉-拉格朗日方程

设  $\mathcal{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (\mathbf{a}_{c_i} - \bar{\mathbf{a}}_{c_i})^T \Psi_{c_i} (\mathbf{a}_{c_i} - \bar{\mathbf{a}}_{c_i})$ ，在其中  $\mathbf{a}_{c_i}$  和  $\bar{\mathbf{a}}_{c_i}$  由方程 (33) 和 (34) 给出，其中  $\Psi_{c_i} \triangleq \text{blkdiag}(\bar{\mathbb{I}}_i^{c_i}, m_i \mathbf{I}_3)$ 。

展开  $\mathcal{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ ，我们获得

$$\mathcal{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^n (\mathcal{G}_{a_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) + \mathcal{G}_{b_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})), \quad (35)$$



其中<sup>10</sup>  $\mathcal{G}_{a_i}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \triangleq \frac{1}{2} \ddot{q}^T J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \Psi_{c_i} J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \ddot{q} + \dot{q}^T J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \Psi_{c_i} J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \ddot{q} - \ddot{q}^T J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \Psi_{c_i} \bar{a}_{c_i}$  并且  $\mathcal{G}_{b_i}(q, \dot{q}) \triangleq \frac{1}{2} \bar{a}_{c_i}^T \Psi_{c_i} \bar{a}_{c_i} + \frac{1}{2} \dot{q}^T J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \Psi_{c_i} J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \dot{q} - \dot{q}^T J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \Psi_{c_i} \bar{a}_{c_i} \circ$   
 从最优性条件, 方程 (31) 的解被计算为 [46]

$$\frac{\partial \mathcal{G}(q, \dot{q}, \ddot{q})}{\partial \ddot{q}} = \frac{\partial}{\partial \ddot{q}} \left( \sum_{i=1}^n \mathcal{G}_{a_i}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \right) = \mathbf{0}_{1 \times n}. \quad (36)$$

在方程 (36) 中使用方程 (35), 我们获得

$$\mathbf{0}_{n \times 1} = \sum_{i=1}^n \left( J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \Psi_{c_i} J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \ddot{q} + J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \Psi_{c_i} J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \dot{q} + \Phi \right), \quad (37)$$

其中  $\Phi \triangleq -J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \Psi_{c_i} \bar{a}_{c_i} \circ$

由于  $J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} = \left[ J_{\mathcal{P}(\underline{\xi}_{0,c_i})}^T J_{\mathcal{D}(\underline{\xi}_{0,c_i})}^T \right]^T$ , 使用方程 (34) 以及  $\Psi_{c_i}$  的元素,  $\bar{\mathbb{I}}_i^{c_i}$  和  $m_i$ , 从方程 (37) 来的项  $\Phi$  可被重写为

$$\Phi = -J_{\mathcal{P}(\underline{\xi}_{0,c_i})}^T \bar{\mathbb{I}}_i^{c_i} \text{vec}_3 \dot{\omega}_{0,c_i}^{c_i} - J_{\mathcal{D}(\underline{\xi}_{0,c_i})}^T \text{vec}_3 f_{0,c_i}^{c_i} - m_i J_{\mathcal{D}(\underline{\xi}_{0,c_i})}^T \text{vec}_3 (\dot{p}_{0,c_i}^{c_i} \times \omega_{0,c_i}^{c_i}), \quad (38)$$

其中  $\text{vec}_3 (\dot{p}_{0,c_i}^{c_i} \times \omega_{0,c_i}^{c_i}) = -S(\omega_{0,c_i}^{c_i}) \text{vec}_3 \dot{p}_{0,c_i}^{c_i}$ , 其中  $\text{vec}_3 \dot{p}_{0,c_i}^{c_i} = J_{\mathcal{D}(\underline{\xi}_{0,c_i})}^T \dot{q}$ ,  $f_{0,c_i}^{c_i} = m_i \ddot{p}_{0,c_i}^{c_i}$ , 并且  $S(\cdot) \in \text{so}(3)$  是斜对称矩阵, 做为一个算子执行交叉乘积 [48].

此外, 由于  $\text{vec}_3 \omega_{0,c_i}^{c_i} = J_{\mathcal{P}(\underline{\xi}_{0,c_i})}^T \dot{q}$ , 为了方便起见, 我们使用  $\text{vec}_3$  算子将方程 (26) 重写为

$$\bar{\mathbb{I}}_i^{c_i} \text{vec}_3 \dot{\omega}_{0,c_i}^{c_i} = \text{vec}_3 \tau_{0,c_i}^{c_i} + S(s_{c_i}) J_{\mathcal{P}(\underline{\xi}_{0,c_i})}^T \dot{q}, \quad (39)$$

其中  $s_{c_i} \triangleq \bar{\mathbb{I}}_i^{c_i} \text{vec}_3 \omega_{0,c_i}^{c_i}$ , 并在方程 (38) 中使用该方程以获得

$$\Phi = -J_{\mathcal{P}(\underline{\xi}_{0,c_i})}^T \text{vec}_3 \tau_{0,c_i}^{c_i} - J_{\mathcal{D}(\underline{\xi}_{0,c_i})}^T \text{vec}_3 f_{0,c_i}^{c_i} + J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \bar{S}(\omega_{0,c_i}^{c_i}, \Psi_{c_i}) J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \dot{q}, \quad (40)$$

其中

$$\bar{S}(\omega_{0,c_i}^{c_i}, \Psi_{c_i}) \triangleq \text{blkdiag}(-S(s_{c_i}), m_i S(\omega_{0,c_i}^{c_i})). \quad (41)$$

<sup>10</sup>注意  $\ddot{q}^T J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \Psi_{c_i} J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \ddot{q} = \ddot{q}^T J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \Psi_{c_i} J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \ddot{q}$  并且  $\ddot{q}^T J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \Psi_{c_i} \bar{a}_{c_i} = \bar{a}_{c_i}^T \Psi_{c_i} J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \ddot{q} \circ$

最后, 在方程 (37) 中使用方程 (40) 以获得

$$M_{\text{GP}} \ddot{q} + C_{\text{GP}} \dot{q} = \bar{\tau}_{\text{GP}}, \quad (42)$$

其中  $M_{\text{GP}} \triangleq M_{\text{GP}}(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是惯量矩阵,  $C_{\text{GP}} \triangleq C_{\text{GP}}(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  标志非线性动态效应 (包括科里奥利项), 并且  $\bar{\tau}_{\text{GP}} \triangleq \bar{\tau}_{\text{GP}}(q) \in \mathbb{R}^n$  表示作用在系统上的广义力; 而且,

$$M_{\text{GP}} \triangleq \sum_{i=1}^n J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \Psi_{c_i} J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i}, \quad (43)$$

$$C_{\text{GP}} \triangleq \sum_{i=1}^n J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \left( \bar{S}(\omega_{0,c_i}^{c_i}, \Psi_{c_i}) J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} + \Psi_{c_i} J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \right), \quad (44)$$

$$\bar{\tau}_{\text{GP}} \triangleq \sum_{i=1}^n J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \bar{\varsigma}_{c_i}, \quad (45)$$

其中  $\bar{\varsigma}_{c_i}$  是第  $i$  个质心的动力旋量, 被定义为

$$\bar{\varsigma}_{c_i} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \text{vec}_6 \zeta_{0,c_i}^{c_i}, \quad (46)$$

其中  $\zeta_{0,c_i}^{c_i} = f_{0,c_i}^{c_i} + \varepsilon \tau_{0,c_i}^{c_i} \circ$

此外, 由于重力不会在连杆的质心处产生任何合成力矩, 因此来自  $\bar{\tau}_{\text{GP}}$  的重力向量  $\tau_g \triangleq \tau_g(q)$  通过设置  $\tau_{0,c_i}^{c_i} = 0$  以及  $f_{0,c_i}^{c_i} = \text{Ad}(\mathbf{r}_0^{c_i}) f_{g_i}$  获得, 其中  $f_{g_i} = m_i g$  和  $g \in \mathbb{R}_p$  分别是重力和重力加速度, 都在惯性帧中表达。因此,

$$\tau_g = \sum_{i=1}^n J_{\mathcal{D}(\underline{\xi}_{0,c_i})}^T \text{vec}_3 (\text{Ad}(\mathbf{r}_0^{c_i}) f_{g_i}). \quad (47)$$

通过考虑施加在关节处的广义力  $\tau_{\text{GP}}$  和重力  $\tau_g$ , 作用在系统上的合力为  $\bar{\tau}_{\text{GP}} = \tau_{\text{GP}} + \tau_g \circ$  设  $g_{\text{GP}} \triangleq -\tau_g$ , 则方程 (42) 以规范形式改写为

$$M_{\text{GP}} \ddot{q} + C_{\text{GP}} \dot{q} + g_{\text{GP}} = \tau_{\text{GP}}. \quad (48)$$

以这种方式, 依靠对偶四元数代数求解方程 (31), 导致一个机械系统的欧拉-拉格朗日动力学描述。再一次, 我们假设机器人正向运动学和微分运动学在对偶四元数空间中是可用的 [12].

**备注 2.** 设  $A \triangleq (1/2) \dot{M}_{\text{GP}} - C_{\text{GP}}$ , 则

$$A = -\sum_{i=1}^n J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i} \bar{S}(\omega_{0,c_i}^{c_i}, \Psi_{c_i}) J_{\underline{\xi}_{0,c_i}}^{c_i}.$$

由于  $\bar{S}(\omega_{0,c_i}^{c_i}, \Psi_{c_i})$  通过构造是斜对称的, 则  $A^T = -A$ , 这意味着

$$\mathbf{u}^T \left( \frac{1}{2} \dot{M}_{GP}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}_{GP}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) \mathbf{u} = 0 \quad (49)$$

对于所有的  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  成立。性质方程 (49) 对于使用基于 *Lyapunov* 函数的策略, 在机器人动态控制中显示形式的闭环稳定性很有用 [49]。

#### 4.4 与 Gibbs-Appell 和 Kane 方程的联系

Gibbs-Appell 和 Kane 方程已被证明是一种强大的数学工具, 用以在不使用拉格朗日乘子的情况下描述无约束和受约束的机械系统 [50, 51]。两者都是获得运动方程的不同方法, 但一组方程意味着与另一组方程在意义上是等价的。[52–54]

Gibbs-Appell 方法与高斯最小约束原理密切相关, 因为这两种方法都使用在加速度方面的标量二次函数。前者可以被视为后者的一般化 [55, 56]。然而, 它们是等价的, 并且两者都可以从另一种方法中推导出来 [55, 57, 58]。尽管如此, 与 Gibbs-Appell 和 Kane 方程不同, 高斯原理的策略不需要设置准速度 (quasi-velocities), 并允许在优化公式中直接考虑附加的约束。

现在, 我们使用第 4.1–4.3 节中推导出的方程重写 Gibbs-Appell 和 Kane 方程。此外, 我们还表明, 机械系统的欧拉-拉格朗日动力学描述可以被证明是 Gibbs-Appell 和 Kane 方程的一个特例。这是通过选择与广义速度相同的准速度来实现的。

对于  $n$  个刚体, Gibbs-Appell 方程由文献 [51] 给出为

$$\frac{\partial S(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \nu_{c_i} \right)^T}_{\bar{\tau}_{GA}} \bar{\varsigma}_{c_i}, \quad (50)$$

其中

$$S(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \triangleq \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} \mathbf{a}_{c_i}^T \Psi_{c_i} \mathbf{a}_{c_i} + \mathbf{a}_{c_i}^T \bar{S}(\omega_{0,c_i}^{c_i}, \Psi_{c_i}) \nu_{c_i} \right) \quad (51)$$

是位形  $\mathbf{q}$ 、位形速度  $\dot{\mathbf{q}}$  和位形加速度  $\ddot{\mathbf{q}}$  的一个标量函数。向量  $\bar{\tau}_{GA}$  包含与准速度  $\mathbf{u}$  相关的广义力。此外,  $\nu_{c_i}$  和  $\bar{\varsigma}_{c_i}$  分别是第  $i$  个机体的运动旋量和广义力, 分别由方程 (32) 和 (46) 给出。

我们设  $\mathbf{u} \triangleq \dot{\mathbf{q}}$ , 并在方程 (51) 中使用方程 (33)。我们取其结果并应用偏导数  $\partial S / \partial \ddot{\mathbf{q}}$ , 并然后与方程 (43) 和 (44) 进行比较, 以获得

$$\frac{\partial S(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} = \mathbf{M}_{GP} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{GP} \dot{\mathbf{q}}. \quad (52)$$

使用方程 (32), 我们获得

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \nu_{c_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left( \mathbf{J}_{\xi_{0,c_i}^{c_i}} \dot{\mathbf{q}} \right) = \mathbf{J}_{\xi_{0,c_i}^{c_i}}. \quad (53)$$

因此, 我们将广义力计算为  $\bar{\tau}_{GA} = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_{\xi_{0,c_i}^{c_i}}^T \bar{\varsigma}_{c_i} = \bar{\tau}_{GP}$  (参见方程 (45))。以这种方式, 求解方程 (50) 导致欧拉-拉格朗日方程, 其与使用高斯原理方程 (42) 获得的方程相同。

另一方面, 运动的 Kane 方程由文献 [59] 给出为

$$\boldsymbol{\varphi} - \bar{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{0}, \quad (54)$$

其中  $\boldsymbol{\varphi}$  包含广义主动力, 并且  $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$  包括广义惯性力。

对于  $n$  个刚体, 我们通过对牛顿方程和欧拉方程进行分组, 使用 Kane 方法获得运动方程, 如下所示<sup>11</sup>

$$\sum_{i=1}^n \left[ \begin{array}{c} (\bar{\mathbb{I}}_i^{c_i} \text{vec}_3 \dot{\omega}_{0,c_i}^{c_i} - \mathbf{S}(\mathbf{s}_{c_i}) \text{vec}_3 \omega_{0,c_i}^{c_i}) \\ m_i \text{vec}_3 \ddot{\mathbf{p}}_{0,c_i}^{c_i} \end{array} \right] = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \text{vec}_3 \tau_{0,c_i}^{c_i} \\ \text{vec}_3 \mathbf{f}_{0,c_i}^{c_i} \end{array} \right]}_{\bar{\varsigma}_{c_i}}. \quad (55)$$

使用方程 (41), 以及后面的事实,  $\nu_{c_i} = \text{vec}_6 \xi_{0,c_i}^{c_i}$ , 其中由在方程 (6) 中给出的  $\xi_{0,c_i}^{c_i} \triangleq \xi_{0,c_i}^{c_i}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{a}_{c_i} = \text{vec}_6 \dot{\xi}_{0,c_i}^{c_i}$ , 其中由在方程 (34) 中给出的  $\dot{\xi}_{0,c_i}^{c_i} \triangleq \dot{\xi}_{0,c_i}^{c_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , <sup>12</sup> 还有  $\text{vec}_3 (\dot{\mathbf{p}}_{0,c_i}^{c_i} \times \omega_{0,c_i}^{c_i}) = -\mathbf{S}(\omega_{0,c_i}^{c_i}) \text{vec}_3 \dot{\mathbf{p}}_{0,c_i}^{c_i}$ , 我们重写方程 (55) 为

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{(\Psi_{c_i} \mathbf{a}_{c_i} + \bar{S}(\omega_{0,c_i}^{c_i}, \Psi_{c_i}) \nu_{c_i})}_{\kappa_i} = \sum_{i=1}^n \bar{\varsigma}_{c_i}. \quad (56)$$

因为对于  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\kappa_i = \bar{\varsigma}_{c_i}$ , 我们将方程 (56) 的  $n$  个项中的每一个  $\kappa_i$  和  $\bar{\varsigma}_{c_i}$  都乘以  $(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \nu_{c_i})^T = \mathbf{J}_{\xi_{0,c_i}^{c_i}}^T$ ,

<sup>11</sup> 牛顿方程由  $m_i \text{vec}_3 \ddot{\mathbf{p}}_{0,c_i}^{c_i} = \text{vec}_3 \mathbf{f}_{0,c_i}^{c_i}$  给出, 并且欧拉方程由方程 (39) 给出。

<sup>12</sup> 注意, 尽管  $\mathbf{a}_{c_i}$  类似于方程 (34), 但它指的是实际加速度, 并因此也指受约束的加速度。因此,  $\mathbf{a}_{c_i}$  取决于  $\mathbf{q}$  和  $\dot{\mathbf{q}}$ , 而方程 (34) 不取决于它们。

以获得 Kane 方程 [59], 从而得到

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n J_{\xi_{0,c_i}}^T (\Psi_{c_i} a_{c_i} + \bar{S}(\omega_{0,c_i}^{c_i}, \Psi_{c_i}) \nu_{c_i})}_{\varphi} = \underbrace{\sum_{i=1}^n J_{\xi_{0,c_i}}^T \bar{\varsigma}_{c_i}}_{\bar{\varphi}}. \quad (57)$$

最后, 在方程 (57) 中使用方程 (32)、(33)、(43)、(44) 和 (45), 我们获得  $\varphi = M_{GP}\ddot{q} + C_{GP}\dot{q}$  和  $\bar{\varphi} = \bar{\tau}_{GP}$ , 这与由高斯原理方程 (42) 获得的动力学方程相同, 正如预期的那样。

因此, 当考虑准速度与广义速度 (即,  $u \triangleq \dot{q}$ ) 相同时, 高斯原理、Gibbs-Appell 方程和 Kane 方法之间的关系给出为

$$\frac{\partial \mathcal{G}(q, \dot{q}, \ddot{q})}{\partial \ddot{q}} = \frac{\partial S(q, \dot{q}, \ddot{q})}{\partial \ddot{q}} - \bar{\tau}_{GA} = \varphi - \bar{\varphi} = \mathbf{0}_{n \times 1}. \quad (58)$$

#### 4.5 使用高斯最小约束原理的受约束机器人系统

在 GPLC 公式中可以施加附加的约束。这可以通过拉格朗日乘子 [47] 或使用 Udwadia-Kalaba 公式 [40] 来实现。前者需要计算拉格朗日乘子, 而后者采用了一种更简单的方法, 尽管是等效的, 其基于广义逆作为约束二次规划的解。

使用 Udwadia-Kalaba 公式 [40], 附加的约束形式为  $A\ddot{q} = b$ , 其中  $A \triangleq A(q, \dot{q})$  和  $b \triangleq b(q, \dot{q})$ , 在方程 (42) 中被考虑如下

$$M_{GP}\ddot{q} = Q(q, \dot{q}) + Q_c(q, \dot{q}), \quad (59)$$

其中  $Q(q, \dot{q}) \triangleq \bar{\tau}_{GP} - C_{GP}\dot{q}$ , 并且附加的项  $Q_c(q, \dot{q}) \triangleq M_{GP}^{1/2} D^+ (b - A M_{GP}^{-1} Q(q, \dot{q}))$  表示由于附加约束而产生的约束力。此外,  $D^+$  是  $D$  的 Moore-Penrose 广义逆 [48], 其中  $D \triangleq A M_{GP}^{-1/2}$ 。

最后, 设  $\Omega \triangleq (I - M_{GP}^{1/2} D^+ A M_{GP}^{-1})$ , 我们重写方程 (59) 为

$$M_{GP}\ddot{q} + \Omega C_{GP}\dot{q} - M_{GP}^{1/2} D^+ b = \Omega \bar{\tau}_{GP}. \quad (60)$$

例如, 考虑众所周知的差动驱动的移动机器人, 其中非完整约束确保了纯滚动和非滑动运动的条件 [60]。机器人位形由向量  $q = [x \ y \ \phi]^T$  指定, 其中  $x, y$  是位置坐标, 而  $\phi$  是机器人在平面上的方向。该非完整约束给

出为

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix}}_A \dot{q} = 0, \quad (61)$$

通过取方程 (61) 的时间导数, 使得  $\dot{A}\dot{q} + A\ddot{q} = 0$ , 这可在方程 (60) 中被强制执行。因此,  $b = -\dot{A}\dot{q}$ 。

## 5 结果

为了评估对偶四元数牛顿-欧拉形式 (dual quaternion Newton-Euler, dqNE) 和使用对偶四元数高斯最小约束原理 (dual quaternion Gauss's Principle, dqGP) 得到的欧拉-拉格朗日模型, 我们使用三个不同的机器人进行了仿真; 即一个固定基座 50 自由度串联机械手、一个 9 自由度完整移动机械臂和一个 8 自由度非完整移动机械臂。

我们在机器人模拟器 V-REP PRO EDU V3.6.2 上<sup>13</sup>进行了模拟, 其使用 Matlab 2020a 接口和对偶四元数代数计算库 DQ Robotics [61], 运行在 Ubuntu 18.04 LTS 64 位 (配备 Intel Core i7 6500U 和 8GB RAM) 的计算机上。

此外, 我们给出了所提议方法的计算成本, 并将其与各自的经典方法进行了比较。

### 5.1 模拟设置

考虑到波形之间的多重相关系数 (coefficient of multiple correlation, CMC) [62], 通过我们提出的模型获得的广义加速度与来自 V-REP 的值之间进行了比较。CMC 提供介于 0 和 1 之间的系数, 指示两个给定波形的相似程度。相同波形的 CMC 等于 1, 而完全不同的波形的 CMC 等于 0。

模拟器不允许直接读取加速度。因此, 为了获得位形加速度向量  $\ddot{q}$ , 我们首先读取速度向量  $\dot{q} \in \mathbb{R}^{n_\ell+3}$ , 然后使用离散低通 Butterworth 滤波器过滤所有元素  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n_\ell+3}$ , 并使用这些值通过数值微分方法以获得加速度, 该方法基于一个第二次正向有限差分近似的算法。然后, 我们计算了广义加速度波形的每个元素  $\ddot{q}_i$ , 其中  $i \in \{1, \dots, n_\ell+3\}$ , 并计算与 V-REP 的对应元素之间的 CMC。之后, 我们使用这些 CMC 获得模型的平均值、最小值和最大值以及它们的标准偏差。

<sup>13</sup>可在以下网址获得: <https://www.coppeliarobotics.com/>

此外，对于固定基座 50 自由度串联机械臂的模拟，我们还使用了 Robotics Toolbox [63] 以实现的经典的递归牛顿-欧拉算法 (recursive Newton-Euler, rtNE)，并计算了它产生的关节加速度波形与 V-REP 产生的关节加速度波形之间的 CMC。<sup>14</sup> 机器人工具箱是一个广泛使用的软件库，其准确性多年来一直得到验证。因此，它是评估通过使用我们的模型获得的 CMC 的适当基准。

## 5.2 结果

表 2 显示了通过不同动力学模型策略 (dqNE, dqGP, and rtNE) 获得的广义加速度波形与从 V-REP 获得的值之间的 CMC。

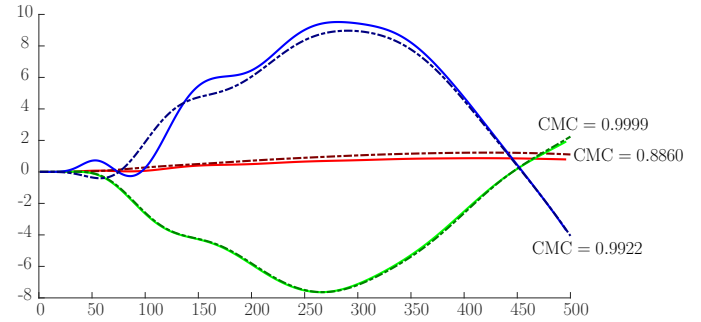
所提议的对偶四元数牛顿-欧拉形式不允许在模型中包含等式约束；因此，它不适用于非完整移动机械臂的动力学建模。同样，当前版本的 Robotics Toolbox 仅支持固定基座机器人的动力学建模，仅适用于 50 自由度串联机械臂。使用所列策略无法获得模型的情况如表 2 所示，用 N/A 表示，(即，不可用) 即不可用。对于所有其他情况，所有模型的平均值 (mean) 和最小值 (min) 的 CMC 接近 1，具有小的标准偏差 (std) 和高的最大值 (max) 的 CMC；由此表明，由它们得到的广义加速度波形与来自 V-REP 的值具有高度的相似性。

对于 50 自由度串联机械臂，dqNE 和 dqGP 均等效于 rtNE，这证明了与经典的牛顿-欧拉方法相比，我们所提议的策略的准确性。

对于定性分析，图 3 显示了在模拟过程中发现的最小、最大和中间的 CMC 时，使用 dqGP 获得的广义加速度，以及 V-REP 的值。即使对于 CMC 的最小值 (即 0.8860)，使用我们的公式获得的加速度也与 V-REP 的值非常匹配。小的差异产生于两个原因，一是离散化效应，二是因为 V-REP 中的加速度从有噪声的速度值估计。

## 5.3 计算成本

在这里，我们将所提议的方法与经典方法在每种技术中涉及的乘法和加法的数量方面进行比较。其结果，考虑了  $n$  自由度的串行机器人，汇总在表 3 中。对于经典的牛顿-欧拉算法，我们考虑 Luh 等人 [64] 提出的基于三维向量的版本，其数学成本由 Balafoutis [65] 计算，并且



**FIGURE 3:** 8 自由度非完整移动机械臂产生的广义加速度波形。实线曲线对应于 V-REP 值，而点划线曲线对应于使用 dqGP 分别获得的第一个 (CMC = 0.8860)、第九个 (CMC = 0.9999) 和第五个 (CMC = 0.9922) 关节的广义加速度波形值。

据我们所知，这是文献中最有效的实现之一。此外，对于经典的欧拉-拉格朗日算法，我们考虑的是由 Hollerbach [66] 所提出的版本。

Luh 等人 [64] 提出的算法比我们的对偶四元数牛顿-欧拉算法成本更低。然而，我们提出的方法的成本是相当保守的，并且是作为一个上限给出的。例如，我们的计算可以通过探索一些事实来进一步优化，其中有几个运算涉及纯对偶四元数，可由八个元素改为六个元素。此外，Balafoutis [65] 提出的成本不包括获取机器人运动学模型的成本。另外，我们的方法适用于任意类型的关节，并且我们没有优化任意特定类型关节的计算，这与 Luh 等人 [64] 不同，他们只考虑了棱柱关节和旋转关节，这被利用以优化计算成本。尽管如此，我们的算法和 Luh 等人的算法都在自由度数量上具有线性成本，其系数的数量级都相同。

基于高斯最小约束原则的欧拉-拉格朗日方法，与基于牛顿-欧拉和经典欧拉-拉格朗日的方法相比，成本更高，正如预期的那样，因为它不是基于递归策略的。然而，这种策略允许考虑加速度中的附加约束，例如，在非完整机器人系统中可以利用。对于这些情况，欧拉-拉格朗日动力学方程由方程 (60) 给出。

## 6 结论

本项工作对于基于对偶四元数代数的移动机械臂动力学模型的表示方法，提出了两种策略。第一种是基于递归牛顿-欧拉公式，并使用运动旋量和动力旋量代替自由

<sup>14</sup>在本例中，我们使用 Vortex Studio 引擎 (www.cm-labs.com)，因为它为 50 自由度机械臂提供了更好的数值稳定性。

**TABLE 2:** 通过不同动力学模型策略获得的关节加速度波形与通过 V-REP 获得的值之间的 CMC。越接近 1，波形越相似。

50 自由度串联机械臂					9 自由度完整移动机械臂				8 自由度非完整移动机械臂			
Method	min	mean	std	max	min	mean	std	max	min	mean	std	max
dqGP	0.9044	0.9893	0.0182	0.9993	0.9934	0.9973	0.0026	0.9999	0.8860	0.9839	0.0368	0.9999
dqNE	0.9044	0.9893	0.0182	0.9993	0.9938	0.9977	0.0022	0.9999	N/A	N/A	N/A	N/A
rtNE	0.9044	0.9893	0.0182	0.9993	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A

**TABLE 3:** 对于  $n$  自由度串联机器人，对于所获得的动力学模型，所提议的方法与经典方法的成本比较。

方法	乘法数量	加法数量
对偶四元数牛顿-欧拉算法 (对于任意关节的成本)	$882n - 48$	$724n - 40$
经典牛顿-欧拉算法 [65]	$150n - 48$	$131n - 48$
对偶四元数欧拉-拉格朗日算法 使用高斯最小约束原理	$4n^3 + 386n^2 + 401n$	$\frac{16}{3}n^3 + 326n^2 + \frac{908}{3}n$
经典欧拉-拉格朗日算法 [66]	$412n - 277$	$320n - 201$

向量。这种表示方法消除了对运动链进行详尽几何分析的必要性，因为动力旋量和运动旋量是通过高级代数运算传播的。此外，我们的公式适用于任意类型的关节，因为它考虑了任意运动旋量。因此，我们的策略比 Miranda 等人 [67] 的工作更一般，他们只考虑具有旋转关节的机械臂。

第二种方法基于高斯最小约束原理，并且它也被制定基于对偶四元数代数所表示的运动旋量和动力旋量的矩阵形式，该策略允许在优化公式中直接加入等式约束。

所提议方法与经典方法的成本比较表明，在乘法和加法次数方面，对偶四元数的使用不会显著增加牛顿-欧拉形式的成本，因为该算法对运动链中的刚体数量具有线性复杂度。然而，使用高斯最小约束原理和对偶四元数代数得到欧拉-拉格朗日模型的成本高于在文献中发现的最佳经典欧拉-拉格朗日递推解。尽管如此，我们的方法远比这些经典的方法更通用。另外，我们没有做出任何努力来优化我们的实现 (如果有的话)，因为我们目前更感兴趣的是使用对偶四元数代数进行动态建模的理论方面，而不是确保计算效率。在我们目前的 MATLAB

实现中，dqNE 和 dqGP 平均分别需要 23.17s 和 8.73s 以产生 50 自由度机械臂机器人的关节加速度。在 C++ 实现中，这些值预计将分别减少到 99 ms 和 37 ms 左右 [61]。

通过牛顿-欧拉形式获得欧拉-拉格朗日模型需要多次执行该算法。一次执行以获得重力向量，一次执行以获得科里奥利项和离心项的向量，并且对于惯量矩阵  $\mathbf{M}$  的每一行都执行一次。对于一个 50 自由度机械臂的机器人，每个模拟步骤执行 52 次 dqNE。然而，对于控制应用，我们通常是对寻找关节扭矩感兴趣，它只需要执行一次 dqNE 以产生每个控制输入。因此，使用 dqNE 计算 50 自由度机械臂机器人的关节扭矩，在 C++ 实现中，执行时间预计将减少 52 倍，从大约 99 ms 减少到 1.9 ms。

最后，对于三种不同机器人，我们通过提议的策略获取的关节加速度，与从 V-REP PRO EDU V3.6.2 (一个真实的模拟器) 中获取的值进行了比较。结果表明，我们所有的方法对于固定基座串联机械臂和移动机械臂都是精确的。

未来的工作重点是将对偶四元数牛顿-欧拉算法推广到非串联多体系统 (如仿人系统), 以及动力旋量控制策略中。对于使用高斯最小约束原理和对偶四元数代数获得的欧拉-拉格朗日模型, 未来的工作将集中于在优化表示方法中运用不等式约束。

## ACKNOWLEDGMENT

This work was supported by the Brazilian agencies CAPES, CNPq (424011/2016-6 and 303901/2018-7), and by the INCT (National Institute of Science and Technology) under the grant CNPq (Brazilian National Research Council) 465755/2014-3.

We would like to thank our colleague Ana Christine de Oliveira for providing us with the MATLAB implementation of the CMC used in Section 5.

## REFERENCES

- [1] Featherstone, R., 2008. *Rigid body dynamics algorithms*. Springer.
- [2] Featherstone, R., 2010. “A Beginner’s Guide to 6-D Vectors (Part 1)”. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, **17**(3), sep, pp. 83–94.
- [3] Featherstone, R., 2010. “A Beginner’s Guide to 6-D Vectors (Part 2)”. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, **17**(4), dec, pp. 88–99.
- [4] McCarthy, J., 1990. *Introduction to Theoretical Kinematics*, first edit ed. The MIT Press.
- [5] Dooley, J., and McCarthy, J., 1991. “Spatial rigid body dynamics using dual quaternion components”. In *Proceedings. 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, no. April, IEEE Comput. Soc. Press, pp. 90–95.
- [6] Perez, A., and McCarthy, J., 2004. “Dual Quaternion Synthesis of Constrained Robotic Systems”. *Journal of Mechanical Design*, **126**(3), p. 425.
- [7] Selig, J. M., 2004. “Lie Groups and Lie Algebras in Robotics”. In *Computational Noncommutative Algebra and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 101–125.
- [8] Selig, J. M., 2005. *Geometric Fundamentals of Robotics*, 2nd ed. Monographs in Computer Science. Springer New York, New York, NY.
- [9] Selig, J. M., and Bayro-Corrochano, E., 2010. “Rigid Body Dynamics Using Clifford Algebra”. *Advances in Applied Clifford Algebras*, **20**(1), mar, pp. 141–154.
- [10] Yuan, J., 1988. “Closed-loop manipulator control using quaternion feedback”. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, **4**(4), pp. 434–440.
- [11] Xian, B., DeQueiroz, M., Dawson, D., and Walker, I., 2004. “Task-Space Tracking Control of Robot Manipulators via Quaternion Feedback”. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **20**(1), feb, pp. 160–167.
- [12] Adorno, B. V., 2011. “Two-arm Manipulation: From Manipulators to Enhanced Human-Robot Collaboration [Contribution à la manipulation à deux bras : des manipulateurs à la collaboration homme-robot]”. PhD thesis.
- [13] Gouasmi, M., 2012. “Robot Kinematics using Dual Quaternions”. *IAES International Journal of Robotics and Automation (IJRA)*, **1**(1), mar.
- [14] Cohen, A., and Shoham, M., 2016. “Application of Hyper-Dual Numbers to Multibody Kinematics”. *Journal of Mechanisms and Robotics*, **8**(1), feb, pp. 2–5.
- [15] Özgür, E., and Mezouar, Y., 2016. “Kinematic modeling and control of a robot arm using unit dual quaternions”. *Robotics and Autonomous Systems*, **77**, mar, pp. 66–73.
- [16] Kong, X., 2017. “Reconfiguration Analysis of Multi-mode Single-Loop Spatial Mechanisms Using Dual Quaternions”. *Journal of Mechanisms and Robotics*, **9**(5), oct, pp. 1–8.
- [17] Dantam, N. T., 2020. “Robust and efficient forward, differential, and inverse kinematics using dual quaternions”. *The International Journal of Robotics Research*, jul, p. 027836492093194.
- [18] Fonseca, M. d. P. A., Adorno, B. V., and Fraisse, P., 2020. “Coupled Task-Space Admittance Controller Using Dual Quaternion Logarithmic Map-

- ping”. *IEEE Robotics and Automation Letters*, **5**(4), oct, pp. 6057–6064.
- [19] Marinho, M. M., Adorno, B. V., Harada, K., and Mitsuishi, M., 2019. “Dynamic Active Constraints for Surgical Robots Using Vector-Field Inequalities”. *IEEE Transactions on Robotics*, **35**(5), oct, pp. 1166–1185.
- [20] Quiroz-Omana, J. J., and Adorno, B. V., 2019. “Whole-Body Control With (Self) Collision Avoidance Using Vector Field Inequalities”. *IEEE Robotics and Automation Letters*, **4**(4), oct, pp. 4048–4053.
- [21] Kussaba, H. T., Figueredo, L. F., Ishihara, J. Y., and Adorno, B. V., 2017. “Hybrid kinematic control for rigid body pose stabilization using dual quaternions”. *Journal of the Franklin Institute*, **354**(7), may, pp. 2769–2787.
- [22] Marinho, M. M., Figueredo, L. F. C., and Adorno, B. V., 2015. “A dual quaternion linear-quadratic optimal controller for trajectory tracking”. In 2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), Vol. 2015-Decem, IEEE, pp. 4047–4052.
- [23] Savino, H. J., Pimenta, L. C., Shah, J. A., and Adorno, B. V., 2020. “Pose consensus based on dual quaternion algebra with application to decentralized formation control of mobile manipulators”. *Journal of the Franklin Institute*, **357**(1), jan, pp. 142–178.
- [24] Adorno, B. V., Fraisse, P., and Druon, S., 2010. “Dual position control strategies using the cooperative dual task-space framework”. In 2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IEEE, pp. 3955–3960.
- [25] Figueredo, L., Adorno, B., Ishihara, J., and Borges, G., 2014. “Switching strategy for flexible task execution using the cooperative dual task-space framework”. In 2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IEEE, pp. 1703–1709.
- [26] Adorno, B. V., Bó, A. P., and Fraisse, P., 2015. “Kinematic modeling and control for human-robot cooperation considering different interaction roles”. *Robotica*, **33**(2), pp. 314–331.
- [27] Lana, E. P., Adorno, B. V., and Maia, C. A., 2015. “A new algebraic approach for the description of robotic manipulation tasks”. In 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Vol. 2015-June, IEEE, pp. 3083–3088.
- [28] Huang, T., Yang, S., Wang, M., Sun, T., and Chetwynd, D. G., 2015. “An Approach to Determining the Unknown Twist/Wrench Subspaces of Lower Mobility Serial Kinematic Chains”. *Journal of Mechanisms and Robotics*, **7**(3), aug, pp. 1–9.
- [29] Renda, F., Cianchetti, M., Abidi, H., Dias, J., and Seneviratne, L., 2017. “Screw-Based Modeling of Soft Manipulators With Tendon and Fluidic Actuation”. *Journal of Mechanisms and Robotics*, **9**(4), aug.
- [30] Yang, A. T., and Freudenstein, F., 1964. “Application of Dual-Number Quaternion Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms”. *Journal of Applied Mechanics*, **31**(2), p. 300.
- [31] Yang, A. T., 1966. “Acceleration Analysis of Spatial Four-Link Mechanisms”. *Journal of Engineering for Industry*, **88**(3), p. 296.
- [32] Yang, A. T., 1967. “Application of Dual Quaternions to the Study of Gyrodynamics”. *Journal of Engineering for Industry*, **89**(1), p. 137.
- [33] Yang, A. T., 1971. “Inertia Force Analysis of Spatial Mechanisms”. *Journal of Engineering for Industry*, **93**(1), p. 27.
- [34] Pennock, G. R., and Yang, A. T., 1983. “Dynamic Analysis of a Multi-Rigid-Body Open-Chain System”. *Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design*, **105**(1), p. 28.
- [35] Shoham, M., and Brodsky, V., 1993. “Analysis of Mechanisms by the Dual Inertia Operator”. In *Computational Kinematics*, J. Angeles, G. Hommel, and P. Kovács, eds., Vol. 28 of *Solid Mechanics and Its Applications*. Springer Netherlands, Dordrecht, pp. 129–138.
- [36] Valverde, A., and Tsiotras, P., 2018. “Dual

- Quaternion Framework for Modeling of Spacecraft-Mounted Multibody Robotic Systems”. *Frontiers in Robotics and AI*, **5**(November), nov.
- [37] Valverde, A., and Tsiotras, P., 2018. “Modeling of Spacecraft-Mounted Robot Dynamics and Control Using Dual Quaternions”. In 2018 Annual American Control Conference (ACC), IEEE, pp. 670–675.
- [38] Hachicho, O., and Eldin, H. N., 2000. “Dual Hypercomplex Quaternions Based Recursions for Generalized Velocities, Accelerations and Forces in Robot Dynamics”. *System and Control: Theory and Applications*, pp. 85–89.
- [39] Miranda de Farias, C., da Cruz Figueredo, L. F., and Yoshiyuki Ishihara, J., 2019. “Performance Study on dqRNEA - A Novel Dual Quaternion Based Recursive Newton-Euler Inverse Dynamics Algorithms”. *2019 Third IEEE International Conference on Robotic Computing (IRC)*, pp. 94–101.
- [40] Kalaba, F. E. U., and E., R., 1992. “A new perspective on constrained motion”. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, **439**(1906), nov, pp. 407–410.
- [41] Hamilton, W. R., 1844. “II. On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra”. *Philosophical Magazine Series 3*, **25**(163), jul, pp. 10–13.
- [42] Adorno, B. V., 2017. Robot Kinematic Modeling and Control Based on Dual Quaternion Algebra – Part I: Fundamentals.
- [43] Kalaba, R. E., and Udwadia, F. E., 1993. “Equations of Motion for Nonholonomic, Constrained Dynamical Systems via Gauss’s Principle”. *Journal of Applied Mechanics*, **60**(3), sep, pp. 662–668.
- [44] Bruyninckx, H., and Khatib, O., 2000. “Gauss’ principle and the dynamics of redundant and constrained manipulators”. In Proceedings 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Symposia Proceedings (Cat. No.00CH37065), Vol. 3, IEEE, pp. 2563–2568.
- [45] Redon, S., Kheddar, A., and Coquillart, S., 2002. “Gauss’ least constraints principle and rigid body simulations”. In Proceedings 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.02CH37292), Vol. 1, IEEE, pp. 517–522.
- [46] Wieber, P.-B., 2006. “Holonomy and Nonholonomy in the Dynamics of Articulated Motion”. In *Fast Motions in Biomechanics and Robotics*, Vol. 340. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp. 411–425.
- [47] Bouyarmane, K., and Kheddar, A., 2012. “On the dynamics modeling of free-floating-base articulated mechanisms and applications to humanoid whole-body dynamics and control”. In 2012 12th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots (Humanoids 2012), IEEE, pp. 36–42.
- [48] Spong, M. W., Hutchinson, S., and Vidyasagar, M., 2006. *Robot Modeling and Control*. Wiley, New York.
- [49] Kelly, R., Santibanez, V., and Loria, A., 2005. *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer-Verlag, London.
- [50] Storch, J., and Gates, S., 1989. “Motivating Kane’s method for obtaining equations of motion for dynamic systems”. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **12**(4), jul, pp. 593–595.
- [51] Honein, T. E., and O’Reilly, O. M., 2021. “On the Gibbs-Appell Equations for the Dynamics of Rigid Bodies”. *Journal of Applied Mechanics*, **88**(7), jul, pp. 1–8.
- [52] Townsend, M. A., 1992. “Equivalence of Kane’s, Gibbs-Appell’s, and Lagrange’s equations”. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **15**(5), sep, pp. 1289–1292.
- [53] Desloge, E. A., 1987. “Relationship between Kane’s equations and the Gibbs-Appell equations”. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **10**(1), jan, pp. 120–122.
- [54] Levinson, D. A., 1987. “Comment on ‘Relationship between Kane’s equations and the Gibbs-Appell equations’”. *Journal of Guidance, Control, and Dy-*



- namics*, **10**(6), nov, pp. 593–593.
- [55] Ray, J. R., 1972. “Nonholonomic Constraints and Gauss’s Principle of Least Constraint”. *American Journal of Physics*, **40**(1), jan, pp. 179–183.
  - [56] Ray, J. R., 1992. “Geometry of constraints and the Gauss-Appell principle of least constraint”. *Kuwait Journal of Science*, **19**(1), aug, pp. 11–15.
  - [57] Lewis, A. D., 1996. “The geometry of the Gibbs-Appell equations and Gauss’ principle of least constraint”. *Reports on Mathematical Physics*, **38**(1), aug, pp. 11–28.
  - [58] Udwadia, F. E., and Kalaba, R. E., 1998. “The explicit Gibbs-Appell equation and generalized inverse forms”. *Quarterly of Applied Mathematics*, **56**(2), jun, pp. 277–288.
  - [59] Kane, T. R., 1983. “Formulation of dynamical equations of motion”. *American Journal of Physics*, **51**(11), nov, pp. 974–977.
  - [60] Fierro, R., and Lewis, F. L., 1997. “Control of a nonholomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynamics”. *Journal of Robotic Systems*, **14**(3), mar, pp. 149–163.
  - [61] Adorno, B. V., and Marques Marinho, M., 2020. “DQ Robotics: A Library for Robot Modeling and Control”. *IEEE Robotics & Automation Magazine*.
  - [62] Ferrari, A., Cutti, A. G., and Cappello, A., 2010. “A new formulation of the coefficient of multiple correlation to assess the similarity of waveforms measured synchronously by different motion analysis protocols”. *Gait & Posture*, **31**(4), apr, pp. 540–542.
  - [63] Corke, P. I., 2017. *Robotics, Vision & Control*. Springer.
  - [64] Luh, J. Y. S., Walker, M. W., and Paul, R. P. C., 1980. “On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators”. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **102**(2), jun, pp. 69–76.
  - [65] Balafoutis, C. A., 1994. “A survey of efficient computational methods for manipulator inverse dynamics”. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, **9**(1-2), feb, pp. 45–71.
  - [66] Hollerbach, J. M., 1980. “A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity”. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **10**(11), pp. 730–736.
  - [67] Miranda de Farias, C., da Cruz Figueredo, L. F., and Yoshiyuki Ishihara, J., 2019. “A Novel Dual Quaternion Based Cost Efficient Recursive Newton-Euler Inverse Dynamics Algorithm”. *International Journal of Robotic Computing*, **1**(2), pp. 144–168.