

由 Rodrigues 旋转公式想开去的随风飘

Shuyong Chen

2022 年 5 月 19 日

1 前言

走哪算哪，将所学的知识串一串，放在火上烤一烤，看看能不能滋滋冒油。考糊了拉倒。

2 符号说明

在三维世界里，表示刚体运动的位姿向量 $\xi \in \mathbb{R}^6$ 由姿态向量 $\phi \in \mathbb{R}^3$ 和平移向量 $\rho \in \mathbb{R}^3$ 组合而成

$$\xi = \begin{bmatrix} \phi \\ \rho \end{bmatrix}$$

姿态变化由角速度驱动，位置变化由速度驱动。附着在机体上的 IMU 测量得到的是局部坐标系的角速度 ω 和加速度 \mathbf{a} ，假定是匀速运动，通过时间的积分可以得到增量角度 $\theta = \|\omega\| \cdot \Delta t$ 和增量速度 $\mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot \Delta t$ 。在角度空间里，用单位向量 $\mathbf{u} = \omega / \|\omega\|$ 描述旋转轴，为方便起见，用一个旋转向量 $\phi = \mathbf{u}\theta$ 描述围绕旋转轴 \mathbf{u} ，旋转角度为 θ 的旋转。

3 公式分析

如果 \mathbf{v} 是 \mathbb{R}^3 向量，并且 \mathbf{u} 是描述旋转轴的单位向量，根据右手法则， \mathbf{v} 围绕旋转轴旋转角度 θ ，旋转向量 \mathbf{v}_{rot} 的罗德里格斯公式为

$$\mathbf{v}_{\text{rot}} = \mathbf{v} \cos \theta + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \sin \theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos \theta)$$

将向量 \mathbf{v} 相对于旋转轴 \mathbf{u} 投影，分解为平行 (投影 \parallel) 于 \mathbf{u} 以及正交 (垂直 \perp) 于 \mathbf{u} 的两个分量， \mathbf{v}_{\parallel} 和 \mathbf{v}_{\perp} 。旋转由垂直分量由 \mathbf{v}_{\perp} 做贡献。上述公式的直觉是，第一项将向量 \mathbf{v} 投影到旋转平面上，而根据叉乘定义， $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 在旋转平面上生成一个与两者都正交的向量，第二项对该向量再投影，通过前两项的向量相加，将向量向新的旋转位置倾斜。第三项重新添加第一项丢失的高度 (相对于 \mathbf{u})。相应的推导和几何演示，可以查看四元数与三维旋转这个文档。

旋转轴 \mathbf{u} 与旋转角度 θ 可以组合成旋转向量 $\phi \equiv \theta\mathbf{u}$ 。我们希望研究旋转向量 ϕ 关于旋转的一般规律。显然，上式里，向量 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 的运算纠缠在一起，不容易分离出旋转向量 ϕ 的特性。因此我们需要做变换。

将 \mathbf{v} 和 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 表示为列矩阵，叉积可以表示为矩阵积

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_x \\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_y \\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}.$$

让 $[\mathbf{u} \times]$ 表示单位向量 \mathbf{u} 的“叉积矩阵”，

$$[\mathbf{u} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix},$$

就是说，对于任何向量 \mathbf{v} 有

$$[\mathbf{u} \times] \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v},$$

实际上， $[\mathbf{u} \times]$ 是具有此性质的唯一矩阵。它具有 3 个特征值：0 和 $\pm i$ 。

所以根据WIKI上面的推导，我们有

$$\mathbf{v}_{\text{rot}} = \mathbf{v} + (\sin \theta) [\mathbf{u} \times] \mathbf{v} + (1 - \cos \theta) [\mathbf{u} \times]^2 \mathbf{v}$$

分解 \mathbf{v} 可以得到紧凑的表达式

$$\mathbf{v}_{\text{rot}} = \mathbf{R} \mathbf{v}$$

其中

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{I} + (\sin \theta) [\mathbf{u} \times] + (1 - \cos \theta) [\mathbf{u} \times]^2} \quad (1)$$

是绕 \mathbf{u} 轴逆时针旋转 θ 的旋转矩阵， \mathbf{I} 是 3×3 单位矩阵。该矩阵 \mathbf{R} 是 \mathbb{R}^3 的旋转群 $\text{SO}(3)$ 的一个元素， $[\mathbf{u} \times]$ 是生成该李群的李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 的一个元素。注意， $[\mathbf{u} \times]$ 是斜对称的，由其刻画 $\mathfrak{so}(3)$ ，三维向量 \mathbf{u} 用 3 个生成元进入该空间

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$$

$$u_x G_1 + u_y G_2 + u_z G_3 \in \mathfrak{so}(3)$$

在矩阵指数方面，

$$\mathbf{R} = \exp(\theta [\mathbf{u} \times]).$$

为了使得下式后面的么元成立，注意到

$$\mathbf{R}(\theta) \mathbf{R}(\phi) = \mathbf{R}(\theta + \phi), \mathbf{R}(0) = \mathbf{I},$$

是单参数子群的特征，即指数，公式匹配无穷小 θ 。

从 $\mathfrak{so}(3)$ 到 $\text{SO}(3)$ 是指数映射 $\exp(\cdot)$ 。从 $\text{SO}(3)$ 到 $\mathfrak{so}(3)$ 的反向映射为 $\log(\cdot)$ 映射。

因为 $[\mathbf{u} \times]^2 = \mathbf{u} \mathbf{u}^T - \mathbf{I}$ ，所以旋转矩阵 \mathbf{R} 又有另外一种形式

$$\boxed{\mathbf{R} = \cos \theta \mathbf{I} + (\sin \theta) [\mathbf{u} \times] + (1 - \cos \theta) \mathbf{u} \mathbf{u}^T} \quad (2)$$

注意这点

$$[\mathbf{u} \times] \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

因此有

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{u} &= (\cos \theta \mathbf{I} + (\sin \theta) [\mathbf{u} \times] + (1 - \cos \theta) \mathbf{u}\mathbf{u}^T) \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}, \end{aligned}$$

因此旋转轴 \mathbf{u} 是旋转矩阵 \mathbf{R} 的特征值 $\lambda = 1$ 所对应的特征向量。因此，将罗德里格斯公式给出的旋转矩阵应用于旋转轴上的任何点，都会返回相同的点。

根据旋转向量 $\phi \equiv \theta \mathbf{u}$ 的定义，将其代入上面旋转矩阵 \mathbf{R} 的公式，我们有类似的形式

$$\mathbf{R} = \begin{cases} \mathbf{I} + \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right) [\phi \times] + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}\right) [\phi \times]^2 \\ \cos \theta \mathbf{I} + \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right) [\phi \times] + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}\right) \phi \phi^T \end{cases}. \quad (3)$$

\mathbf{R}^T 与其很相似

$$\mathbf{R}^T = \begin{cases} \mathbf{I} - \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right) [\phi \times] + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}\right) [\phi \times]^2 \\ \cos \theta \mathbf{I} - \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right) [\phi \times] + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}\right) \phi \phi^T \end{cases}.$$

这是在软件中更常用的公式，因为从 IMU 中读取出来的角速度向量 ω ，其中 $\mathbf{u} = \omega / \|\omega\|$ 为旋转轴， $\theta = \|\omega\| \Delta t$ 为旋转角度。并由此计算出来的增量角度 $\phi = \omega \cdot \Delta t$ 就是旋转向量，将其代入上式就得到软件中常见的计算公式

$$\mathbf{R} = \begin{cases} \mathbf{I} + \sin(\|\omega\| \Delta t) \left[\frac{\omega}{\|\omega\|} \times \right] + (1 - \cos(\|\omega\| \Delta t)) \left[\frac{\omega}{\|\omega\|} \times \right]^2 \\ \cos(\|\omega\| \Delta t) \mathbf{I} + \sin(\|\omega\| \Delta t) \left[\frac{\omega}{\|\omega\|} \times \right] + (1 - \cos(\|\omega\| \Delta t)) \frac{\omega}{\|\omega\|} \frac{\omega}{\|\omega\|}^T \end{cases}. \quad (4)$$

因为 IMU 的采样率很高，通常 $\theta \rightarrow 0$ ，上式会出现数值不稳定的情况，所以 Indirect Kalman filter for 3D attitude estimation 这个文档给出了其极限形式。在工程中， ω 向量的数值可以通过传感器测量得到，因此在程序中 \mathbf{R} 矩阵的计算过程如下：

$$\begin{aligned} \phi &= \omega \Delta t \in \mathbb{R}^6 \\ \theta &= \sqrt{\phi^T \phi} \\ A &= \frac{\sin \theta}{\theta} \\ B &= \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{I} + A [\phi \times] + B [\phi \times]^2 \\ \text{Exp}(\phi) &= \mathbf{R}. \end{aligned}$$

出于实现的目的, 当 θ^2 为小值时应使用 A 、 B 的泰勒展开

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sin \theta}{\theta} \\
 &= 1 - \frac{\theta^2}{6} + \frac{\theta^4}{120} + O(\theta^6) \\
 \lim_{\theta \rightarrow 0} A &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \\
 &= 1 \\
 B &= \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{\theta^2}{24} + \frac{\theta^4}{720} + O(\theta^6) \\
 \lim_{\theta \rightarrow 0} B &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

4 四元数形式

方程 (3) 和旋转向量的运动学方程是超越方程并且具有病态行为, 尽管对零旋转角来说作用是有限的。在旋转向量空间中, 所有旋转都可以映射到半径为 π 的球体的内部和表面上的点, 其中直径两端的点表示相同的旋转; 虽然姿态在流形上是平滑变化, 但旋转向量可以从直径的一端跳到另一端。这些跳跃可以通过将表示扩展到半径为 2π 的球体来延迟问题的出现, 但不能完全避免, 因为旋转向量的运动学方程对于 $\theta = 2\pi$ 是奇异的。这些特性限制了旋转向量作为全局姿态表示的实用性。

因此在大多数软件中都采用四元数表示全局姿态。将旋转矩阵 \mathbf{R} 转换为姿态四元数的方程是

$$\mathbf{R}(\theta) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{\phi}{\|\phi\|} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

该方程可以从指数映射 $\exp(\cdot)$ 推导出来。当 $\theta \rightarrow 0$ 时, 姿态四元数有一个二阶近似方程

$$\delta q(\theta) = \begin{bmatrix} 1 - \|\phi\|^2/8 \\ \frac{\phi}{2} \end{bmatrix}.$$

该二阶近似方程可以避免三角函数运算。将其中的向量部分 $\frac{\phi}{2}$ 及 $\theta \rightarrow 0$ 代入得到小角度时的旋转矩阵 \mathbf{R} 的近似方程

$$\mathbf{R}(\theta) \approx \mathbf{I} - [\phi \times] + \frac{1}{2} (\phi \phi^T - \|\phi\|^2 \mathbf{I}). \quad (5)$$

该近似方程也可以避免三角函数运算。如果 θ 更小, 则上式第三项还可以消掉, 有

$$\mathbf{R}(\theta) \approx \mathbf{I} - [\phi \times]. \quad (6)$$

另外, 斜对称矩阵 $[\phi \times]$ 在和旋转相关的方程中随处可见, 例如四元数的乘积方程。有两个四

元数 p 和 q ，两者矩阵形式的乘积可以表示为

$$\begin{aligned} p * q &= \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p} \\ \mathbf{p} & p_0 \mathbf{I} + [\mathbf{p} \times] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q} \\ \mathbf{q} & q_0 \mathbf{I} - [\mathbf{q} \times] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5 SO(3) 指数映射运算

旋转群 SO(3) 的定义是

$$\text{SO}(3) = \{\mathbf{R} \mid \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \det(\mathbf{R}) = 1\} \quad (7)$$

相应的李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 的定义是

$$\mathfrak{so}(3) = \{\Phi \mid \Phi = [\phi \times] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \phi \in \mathbb{R}^3\} \quad (8)$$

旋转姿态位于嵌入四维空间 \mathbb{R}^4 的三维 S^3 球面上。当前姿态在流形上受到角速度向量 ω 的驱动，就移动到新的姿态点上。但是，向量不能直接作用到 S^3 的元素上，因此，在当前姿态点上就同时存在 3 个三维空间，第一个是角速度向量 ω 所在的局部笛卡尔空间；第二个是以当前姿态点为原点构建的局部切空间，三维向量 ω 用 3 个生成元进入该空间，该空间是一个三维线性空间；第三个是三维流形空间，对局部切空间中的元素使用收回 (retraction)，也就是指数映射函数 $\exp(\cdot)$ ，使其进入该空间。最后，进入流形空间的元素通过乘法作用到当前姿态点上，当前姿态点就移动到新的姿态点上，这种球面运动就是旋转，所经过的轨迹就是测地线 (geodesic)。

因此了解指数映射函数 $\exp(\cdot)$ 的推导十分重要。指数映射函数 $\exp(\cdot)$ 的泰勒级数展开是

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

推导三维旋转的指数映射函数 $\exp(\cdot)$ 有两个路径，一种是用 $\exp([\omega \times])$ 矩阵形式推导，关键点是用如下的降幂次方法

$$\begin{aligned} [\omega \times]^2 &= \omega \omega^T - \|\omega\|^2 \mathbf{I} \\ [\omega \times]^3 &= -\|\omega\|^2 [\omega \times] & [\omega \times]^4 &= -\|\omega\|^2 [\omega \times]^2 & [\omega \times]^5 &= \|\omega\|^4 [\omega \times] & [\omega \times]^6 &= \|\omega\|^4 [\omega \times]^2 \\ [\omega \times]^7 &= -\|\omega\|^6 [\omega \times] & [\omega \times]^8 &= -\|\omega\|^6 [\omega \times]^2 & [\omega \times]^9 &= \|\omega\|^8 [\omega \times] & [\omega \times]^{10} &= \|\omega\|^8 [\omega \times]^2 \end{aligned}$$

最后推导出旋转矩阵 \mathbf{R}

$$\exp([\omega \times]) = \mathbf{R}$$

另外一种方式是用纯虚四元数形式推导， $\exp(\omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k})$ ，关键点是用四元数乘法和换元法进行降幂次，最后同样得到

$$\exp(\omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{\omega}{\|\omega\|} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

在这里要注意在旋转矩阵 \mathbf{R} 中用全角 θ ，在四元数中用半角 $\theta/2$ 。

不过在工作中常用的还是矩阵形式推导，因为矩阵形式可以简单而一致性地扩展到 SE(3) 和 Sim(3) 等流形上面，而四元数很难做到。另外，符号 $[\omega \times]$ 虽然形象地表示斜对称矩阵来自于向量叉乘，但是不容易找到一个类似的表示反函数的符号，并且也不利于应用于流形的扩展概念，因此有必要引入新的符号， \wedge 和 \vee ，前者表示“从向量到矩阵”的变换，其实也就是从笛卡尔空间进入切空间， $\omega^\wedge = [\omega \times]$ ，后者表示“从矩阵到向量”的变换，也就是从切空间进入笛卡尔空间， $\omega = [\omega \times]^\vee$ 。

此外，在软件中一般会提供一个快捷函数，一步从笛卡尔空间到流形空间的相互变换，即所谓的大写指数映射函数 $\text{Exp}(\omega)$ ，就是将生成元操作和 \exp 操作一次性运算完成，方便调用者。同样也会有一个大写对数函数 $\text{Log}(\mathbf{R})$ 做为反函数。这时候又可以引入方便使用的加号 \oplus 和减号 \ominus 算子：

$$\begin{aligned} \text{Plus operator: } \mathcal{X} \oplus \theta &\triangleq \mathcal{X} \cdot \text{Exp}(\theta) \\ \text{Minus operator: } \mathcal{Y} \ominus \mathcal{X} &\triangleq \text{Log}(\mathcal{X}^{-1} \cdot \mathcal{Y}) \end{aligned}$$

接下来理解 Baker-Campbell-Hausdorff 公式，简称 BCH 公式。我们期望

$$\exp(\phi_1^\wedge) \exp(\phi_2^\wedge) = \exp((\phi_1 + \phi_2)^\wedge),$$

因为函数 $\exp()$ 运算慢，我们期望在向量空间中所有的向量一次加减完成而只算一次函数 $\exp()$ 。但是，这个等式成立的条件是 $\phi_1^\wedge \phi_2^\wedge = \phi_2^\wedge \phi_1^\wedge$ ，Matrix exponential properties 这个视频有简短的证明。显然，对于矩阵乘法， $\phi_1^\wedge \phi_2^\wedge \neq \phi_2^\wedge \phi_1^\wedge$ ，所以

$$\exp(\phi_1^\wedge) \exp(\phi_2^\wedge) \neq \exp((\phi_1 + \phi_2)^\wedge).$$

BCH 公式告诉我们，当处理两个矩阵之积时，它们会产生一些由李括号组成的余项。直观上的理解，我们在上式的两端同时乘上单位矩阵 \mathbf{I} ，方程左边，旋转向量 ϕ_1 收回并作用到幺元上，于是姿态点从幺元出发，沿测地线到达新的姿态点，我们称之为 q_1 ，接着旋转向量 ϕ_2 收回并作用到 q_1 上，于是姿态点从 q_1 出发，沿测地线到达新的姿态点，我们称之为 q_2 ，前后两条测地线的方向并不相同。如果我们直接从幺元出发，沿测地线到达 q_2 姿态点，那么在流形上我们将看到一个三角形。注意，我们不能用 $\log()$ 函数将前两条测地线展开 (unwrap) 到向量空间并相加， $\phi_1 + \phi_2$ ，这个运算不可行，这是因为局部切空间发生了切换，第二次旋转是在 q_1 姿态点上建立局部切空间进行计算，而第一次和第三次旋转是在幺元处的切空间进行计算，两处局部切空间产生的差异就是那些余项。

但是通过分析 BCH 公式，当 ϕ_1 或 ϕ_2 为小量时，公式可以做一些近似化简，从上面的直观理解也可以看出，当有一个向量为小量时，剩下两个向量就很相近。因为在工程中，增量向量通常是小量，而原有的状态通常是大的量，因此近似方程很常用。对于旋转矩阵 \mathbf{R} 的化简，还会涉及到全局或局部坐标系选择的问题。因此通常约定是，小量在右边叫右乘，表示从机体坐标系变换到惯性坐标系的旋转，用 \mathbf{R}_B^I 表示，所以有

$$\mathbf{R}_B^I(\phi_1) \mathbf{R}_B^I(\phi_2) \approx \mathbf{R}_B^I(\phi_1) (\mathbf{I} + [\phi_2 \times]),$$

小量在左边叫左乘，表示从惯性坐标系变换到机体坐标系的旋转，用 \mathbf{R}_I^B 表示，所以有

$$\mathbf{R}_I^B(\phi_1) \mathbf{R}_I^B(\phi_2) \approx (\mathbf{I} - [\phi_1 \times]) \mathbf{R}_I^B(\phi_2),$$

这些都是应用旋转矩阵 \mathbf{R} 当 $\phi \rightarrow 0$ 时的简化方程 (6)。

6 SE(3) 指数映射运算

刚体位姿包括姿态和平移，刚体运动群 SE(3) 由旋转群 SO(3) 和平移向量这两种数学对象组合而成。

$$\text{SE}(3) = \left\{ \mathbf{T} \mid \mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \mathbf{R} \in \text{SO}(3), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3 \right\} \quad (9)$$

相应的李代数 $\mathfrak{se}(3)$ 的定义是

$$\mathfrak{se}(3) = \left\{ \xi^\wedge \mid \xi = \begin{bmatrix} \phi \\ \rho \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \phi \in \mathbb{R}^3, \rho \in \mathbb{R}^3, \xi^\wedge = \left[\begin{array}{c|c} \phi^\wedge & \rho \\ \hline \mathbf{0}^T & 0 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \right\} \quad (10)$$

因此和 $\mathfrak{so}(3)$ 相仿，6 参数向量 ξ 用 6 个生成元进入 $\mathfrak{se}(3)$ 空间

$$\begin{aligned} G_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & G_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & G_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ G_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & G_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & G_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\xi = \begin{bmatrix} \phi \\ \rho \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

$$\phi_x G_1 + \phi_y G_2 + \phi_z G_3 + \rho_x G_4 + \rho_y G_5 + \rho_z G_6 \in \mathfrak{se}(3)$$

将 ξ^\wedge 代入指数映射函数 $\exp(\cdot)$ 就得到位姿矩阵 \mathbf{T} ，切空间中的元素就进入 SE(3) 流形中

$$\begin{aligned} \exp(\xi^\wedge) &= \exp\left(\left[\begin{array}{c|c} \phi^\wedge & \rho \\ \hline \mathbf{0}^T & 0 \end{array} \right]\right) \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \exp(\phi^\wedge) & \mathbf{V}\rho \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \\ &= \mathbf{T} \end{aligned}$$

其中， \mathbf{V} 矩阵，有些文档又称为 \mathbf{J} 系数矩阵，经过泰勒级数展开并推导得到

$$\mathbf{V} = \left\{ \mathbf{I} + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\phi \times] + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\phi \times]^2 \right. \\ \left. \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{I} + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\phi \times] + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) \phi \phi^T \right\}. \quad (11)$$

可以看到 \mathbf{V} 矩阵和 \mathbf{R} 矩阵十分相像。我们可以对 \mathbf{V} 矩阵的方程进行一些变换，以便查看其与 \mathbf{R} 矩阵的关系

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} &= \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{I} + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\phi \times] + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) \phi \phi^T \\
 &= \frac{1}{\theta^2} \phi \phi^T + \frac{\sin \theta}{\theta^3} (-\phi \phi^T + \theta^2 \mathbf{I}) + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\phi \times] \\
 &\because [\phi \times]^2 = \phi \phi^T - \theta^2 \mathbf{I}, \quad [\phi \times]^3 = -\theta^2 [\phi \times] \\
 &= \frac{1}{\theta^2} \phi \phi^T + \frac{\sin \theta}{\theta^3} (-[\phi \times]^2) - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^4} \right) [\phi \times]^3 \\
 &= \frac{1}{\theta^2} \phi \phi^T - \frac{1}{\theta^2} [\phi \times] \left(\frac{\sin \theta}{\theta} [\phi \times] + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\phi \times]^2 \right) \\
 &= \frac{1}{\theta^2} \phi \phi^T - \frac{1}{\theta^2} [\phi \times] (\mathbf{R} - \mathbf{I})
 \end{aligned}$$

\mathbf{V}^T 矩阵与 \mathbf{V} 矩阵很相似

$$\mathbf{V} = \begin{cases} \mathbf{I} - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\phi \times] + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) [\phi \times]^2 \\ \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{I} - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\phi \times] + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) \phi \phi^T \end{cases} .$$

我们同样可以对 \mathbf{V}^T 矩阵的方程进行一些变换，以便查看其与 \mathbf{R}^T 矩阵的关系

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}^T &= \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{I} - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\phi \times] + \left(\frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \right) \phi \phi^T \\
 &= \frac{1}{\theta^2} \phi \phi^T + \frac{\sin \theta}{\theta^3} (-\phi \phi^T + \theta^2 \mathbf{I}) - \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\phi \times] \\
 &\because [\phi \times]^2 = \phi \phi^T - \theta^2 \mathbf{I}, \quad [\phi \times]^3 = -\theta^2 [\phi \times] \\
 &= \frac{1}{\theta^2} \phi \phi^T + \frac{\sin \theta}{\theta^3} (-[\phi \times]^2) + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^4} \right) [\phi \times]^3 \\
 &= \frac{1}{\theta^2} \phi \phi^T + \frac{1}{\theta^2} [\phi \times] \left(-\frac{\sin \theta}{\theta} [\phi \times] + \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \right) [\phi \times]^2 \right) \\
 &= \frac{1}{\theta^2} \phi \phi^T + \frac{1}{\theta^2} [\phi \times] (\mathbf{R}^T - \mathbf{I})
 \end{aligned}$$

在一些资料里，又把 \mathbf{V}^T 矩阵称为 $\mathbf{\Gamma}$ 矩阵， $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{V}^T$ ，将其做为伴随矩阵用于 $\text{SO}(3)$ 的协方差矩阵 $\mathbf{\Sigma}$ 的坐标系的变换

$$\mathbf{\Sigma}_y = \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Sigma}_x \mathbf{\Gamma}^T$$

在工程中， ξ 向量的数值可以通过传感器测量得到，因此在程序中 \mathbf{T} 矩阵的计算过程如下：

$$\begin{aligned}
 \xi &= \begin{bmatrix} \phi \\ \rho \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \\
 \theta &= \sqrt{\phi^T \phi} \\
 A &= \frac{\sin \theta}{\theta} \\
 B &= \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \\
 C &= \frac{1 - A}{\theta^2} \\
 \mathbf{R} &= \mathbf{I} + A [\phi \times] + B [\phi \times]^2 \\
 \mathbf{V} &= \mathbf{I} + B [\phi \times] + C [\phi \times]^2 \\
 \text{Exp} \left(\begin{bmatrix} \phi \\ \rho \end{bmatrix} \right) &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{V}\mathbf{u} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

出于实现的目的，当 θ^2 为小值时应使用 A 、 B 和 C 的泰勒展开

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sin \theta}{\theta} \\
 &= 1 - \frac{\theta^2}{6} + \frac{\theta^4}{120} + O(\theta^6) \\
 \lim_{\theta \rightarrow 0} A &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \\
 &= 1 \\
 B &= \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{\theta^2}{24} + \frac{\theta^4}{720} + O(\theta^6) \\
 \lim_{\theta \rightarrow 0} B &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \\
 &= \frac{1}{2} \\
 C &= \frac{1 - A}{\theta^2} \\
 &= \frac{1}{6} - \frac{\theta^2}{120} + \frac{\theta^4}{720} + O(\theta^6) \\
 \lim_{\theta \rightarrow 0} C &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - A}{\theta^2} \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

矩阵 \mathbf{V} 有一个封闭形式的逆矩阵。

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{I} - \frac{1}{2} [\phi \times] + \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{A}{2B} \right) [\phi \times]^2 \quad (12)$$

位姿矩阵 \mathbf{T} 的么元同样为单位矩阵 \mathbf{I} ，由此计算逆矩阵为

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right]$$

这在机体坐标系中的位姿和惯性坐标系中的位姿相互变换时用到。

位姿矩阵 \mathbf{T} 通过乘法组合

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_1 & \mathbf{t}_1 \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_2 & \mathbf{t}_2 \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_1 \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1 \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right]$$

矩阵表示法还使得对于三维上的点和向量的群作用清晰可见：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ w \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ w \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{R}\boldsymbol{\rho} + w\mathbf{t} \\ w \end{bmatrix}$$

通常， $w = 1$ ，因此 \mathbf{x} 是笛卡尔空间中的点。矩阵向量相乘的作用相当于先旋转 \mathbf{x} ，然后平移它。对于方向向量，用 $w = 0$ 编码，将忽略平移变换。如果 $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ ，则矩阵 \mathbf{T} 为平移矩阵，只有平移变换。

7 Sim(3) 指数映射运算

Sim(3) 为三维空间中的相似性变换，是刚性变换和缩放的组合。三维空间中的相似变换群 Sim(3) 与 SE(3) 具有几乎相同的表示，且有增加的缩放因子：

$$\mathbf{R} \in \text{SO}(3), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3, s \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{T} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & s^{-1} \end{array} \right) \in \text{Sim}(3)$$

其李代数 $\mathfrak{sim}(3)$ 的生成元与 $\mathfrak{se}(3)$ 的生成元相似，只增加了一个对应于缩放变化的生成元：

$$G_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

在 $\mathfrak{sim}(3)$ 中的一个元素由生成元的倍数表示：

$$\delta = \begin{bmatrix} \phi \\ \rho \\ \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^7$$

$$\phi_x G_1 + \phi_y G_2 + \phi_z G_3 + \rho_x G_4 + \rho_y G_5 + \rho_z G_6 + \lambda G_7 \in \mathfrak{sim}(3)$$

将 δ^\wedge 代入指数映射函数 $\exp(\cdot)$ 就得到相似性变换矩阵 \mathbf{T} ，切空间中的元素就进入 $\text{Sim}(3)$ 流形中

$$\begin{aligned} \exp(\delta^\wedge) &= \exp\left(\left[\begin{array}{c|c} \phi^\wedge & \rho \\ \hline \mathbf{0}^\text{T} & -\lambda \end{array}\right]\right) \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \exp(\phi^\wedge) & \mathbf{V}\rho \\ \hline \mathbf{0}^\text{T} & \exp(-\lambda) \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^\text{T} & s^{-1} \end{array}\right] \\ &= \mathbf{T} \end{aligned}$$

其中 \mathbf{V} 矩阵和 $\text{Sim}(3)$ 的版本有些相似，但现在旋转、平移和缩放被无限交错。指数的旋转分量和缩放分量很明显，但平移分量包含了这三者的混合。这个 \mathbf{V} 矩阵太复杂，这里就不抄书了。可以查看参考文献 [2] 了解推导过程及结果。

相似性变换矩阵 \mathbf{T} 的么元同样为单位矩阵 \mathbf{I} ，由此计算逆矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^\text{T} & s^{-1} \end{array}\right] \\ \mathbf{T}^{-1} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}^\text{T} & -s\mathbf{R}^\text{T}\mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^\text{T} & s \end{array}\right] \end{aligned}$$

相似性变换矩阵 \mathbf{T} 通过乘法组合

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_1 & \mathbf{t}_1 \\ \hline \mathbf{0}^\text{T} & s_1^{-1} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_2 & \mathbf{t}_2 \\ \hline \mathbf{0}^\text{T} & s_2^{-1} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_1\mathbf{t}_2 + s_2^{-1}\mathbf{t}_1 \\ \hline \mathbf{0}^\text{T} & (s_1 \cdot s_2)^{-1} \end{array}\right] \end{aligned}$$

在三维上的点的群操作也通过 s 编码缩放:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ w \end{bmatrix}, \quad (\lambda \mathbf{x} \simeq \mathbf{x} \forall \lambda \in \mathbb{R}) \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^T & s^{-1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}\boldsymbol{\rho} + w\mathbf{t} \\ s^{-1}w \end{bmatrix} \\ &\simeq \begin{bmatrix} s(\mathbf{R}\boldsymbol{\rho} + w\mathbf{t}) \\ w \end{bmatrix}\end{aligned}$$

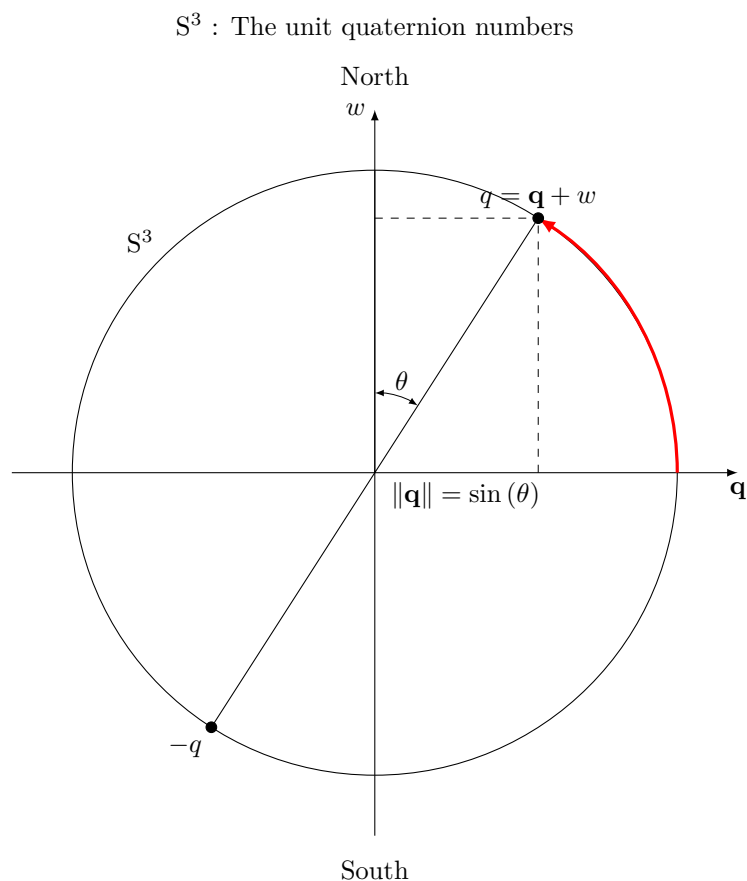
在 $w = 1$ 的典型情况下, 这对应于刚性变换, 跟随有缩放。

8 小结

单位四元数 q

$$\begin{aligned}q &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + w \\ &= \mathbf{q} + w\end{aligned}$$

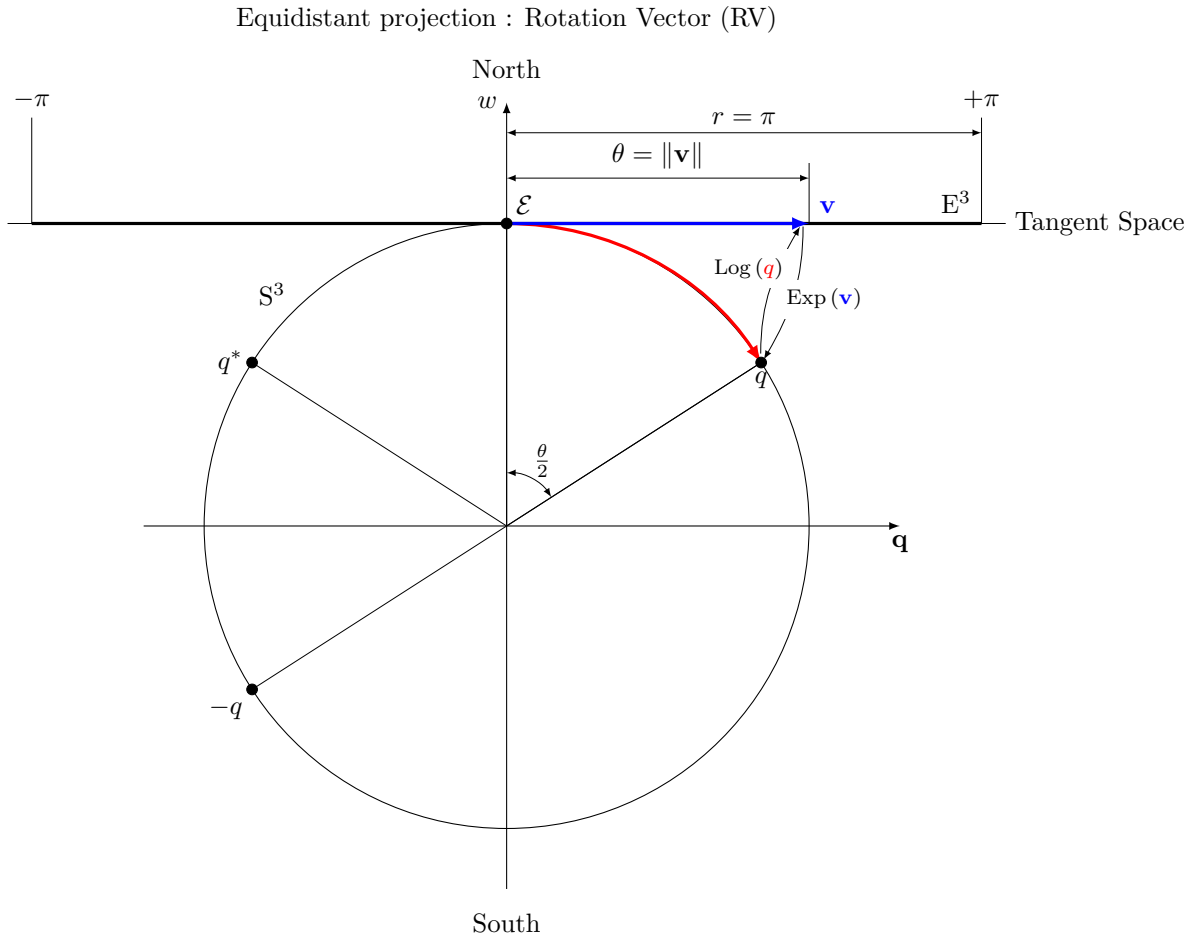
可以表示三维空间的姿态。但是单位四元数 q 要想用图形表示出来, 也是一个困难的事情, 因为单位四元数 q 所在的球面是嵌入 \mathbb{R}^4 空间中的 S^3 球面。所以有一种方法是用类似复平面的方式表示 (fig2d-30.pdf):



其中，实数轴 w 做为南北轴。因为单位四元数 q 表示旋转是两倍覆盖，所以一般选择 $w \geq 0$ 的北半球表示一个三维旋转。另外，图中的角度 θ 代表的是

$$\tan(\theta) = \frac{\|\mathbf{q}\|}{w}$$

将旋转向量 (Rotation Vector, RV) 代入指数映射函数 $\text{Exp}()$ 就将其收回 (retraction) 到流形中。这种映射属于等距投影 (Equidistant), E^3 空间位于么元 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ 处。注意，在四元数版本中使用的是半角 $\theta/2$ ，但为了绘图方便，下图将 E^3 空间缩小了 $1/2$ 的大小 (fig2d-31.pdf)



相应的，将流形中的元素代入对数映射函数 $\text{Log}()$ 就将其展开 (unwrap) 到 E^3 空间中。注意，这个在幺元 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ 处建立的局部切空间是一个三维空间，在旋转向量空间中，所有旋转都可以映射到半径为 π 的球体的内部和表面上的点，其中直径两端的点表示相同的旋转；虽然姿态在流形上是平滑变化，但旋转向量可以从直径的一端跳到另一端。

在实现指数映射函数 $\text{Exp}()$ 时，要注意，当旋转角度 $\theta = \|\phi\| \rightarrow 0$ 时，在上图的幺元附近，会有数值不稳定的情况，当 $\theta = \|\phi\| \rightarrow 2\pi$ 时，在上图的赤道附近，会有姿态跳跃的情况，表现为无人机在 yaw 的抖动中突然旋转 360° 。

在流形上的当前位姿点上可以同时存在 3 个三维空间，第一个局部笛卡尔空间，第二个是局部切空间，第三个是三维流形空间。各空间中的元素之间的变换算法见下图 (Rodrigues-01.pdf)：

	Vector (Cartesian space)	Lie algebra (Tangent space)	Lie group (Manifold space)
Rotation	\mathbb{R}^3 $\theta = \ \omega\ \cdot \Delta t$ $\mathbf{u} = \omega / \ \omega\ $ $\phi = \mathbf{u}\theta$	Exp() function $\phi_x G_1 + \phi_y G_2 + \phi_z G_3$ Generators $\theta = \arccos((\text{tr}(\mathbf{R}) - 1)/2), \mathbf{R}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ $\phi^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix}$ Log() function	$\text{SO}(3)$ $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ $\det(\mathbf{R}) = 1$
Transformation	\mathbb{R}^6 $\xi = \begin{bmatrix} \phi \\ \rho \end{bmatrix}$	Exp() function $\phi_x G_1 + \phi_y G_2 + \phi_z G_3 + \rho_x G_4 + \rho_y G_5 + \rho_z G_6$ Generators $\theta = \arccos((\text{tr}(\mathbf{R}) - 1)/2), \mathbf{R}\mathbf{u} = \mathbf{u}, \mathbf{t} = \mathbf{V}\rho$ $\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ Log() function	$\text{SE}(3)$ $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$
Similarity	\mathbb{R}^7 $\delta = \begin{bmatrix} \phi \\ \rho \\ \lambda \end{bmatrix}$	Exp() function $\phi_x G_1 + \phi_y G_2 + \phi_z G_3 + \rho_x G_4 + \rho_y G_5 + \rho_z G_6 + \lambda G_7$ Generators $\delta^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ \mathbf{0}^T & -\lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ Log() function	$\text{Sim}(3)$ $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & s^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

更多的信息，参见参考文献 [3] 中总结的表格 (Rodrigues-02.pdf):

					Tangent space		Exponential map		
Lie group \mathcal{M}, \circ	size	dim	$\mathcal{X} \in \mathcal{M}$	Constraint	Lie algebra	Cartesian	Exp(τ)	Comp.	Action
n -D vector	$\mathbb{R}^n, +$	n	$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$	$\tau^\wedge \in \mathfrak{m}$	$\tau \in \mathbb{R}^m$	$\mathbf{v} = \exp(\mathbf{v})$	$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$	$\mathbf{v} + \mathbf{x}$
circle	S^1, \cdot	2	$\mathbf{z} \in \mathbb{C}$	$\mathbf{z} * \mathbf{z} = 1$	$i\theta \in i\mathbb{R}$	$\theta \in \mathbb{R}$	$\mathbf{z} = \exp(i\theta)$	$\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2$	$\mathbf{z} \mathbf{x}$
Rotation	$\text{SO}(2), \cdot$	4	\mathbf{R}	$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$	$[\theta]_\times \in \mathfrak{so}(2)$	$\theta \in \mathbb{R}$	$\mathbf{R} = \exp([\theta]_\times)$	$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$	$\mathbf{R} \mathbf{x}$
Rigid motion	$\text{SE}(2), \cdot$	9	$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$	$\begin{bmatrix} [\theta]_\times & \rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{se}(2)$	$\begin{bmatrix} \rho \\ \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$	$\exp\left(\begin{bmatrix} [\theta]_\times & \rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$	$\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$	$\mathbf{R} \mathbf{x} + \mathbf{t}$
3-sphere	S^3, \cdot	4	$\mathbf{q} \in \mathbb{H}$	$\mathbf{q}^* \mathbf{q} = 1$	$\theta/2 \in \mathbb{H}_p$	$\theta \in \mathbb{R}^3$	$\mathbf{q} = \exp(\mathbf{u}\theta/2)$	$\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2$	$\mathbf{q} \mathbf{x} \mathbf{q}^*$
Rotation	$\text{SO}(3), \cdot$	9	\mathbf{R}	$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$	$[\theta]_\times \in \mathfrak{so}(3)$	$\theta \in \mathbb{R}^3$	$\mathbf{R} = \exp([\theta]_\times)$	$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$	$\mathbf{R} \mathbf{x}$
Rigid motion	$\text{SE}(3), \cdot$	16	$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$	$\begin{bmatrix} [\theta]_\times & \rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{se}(3)$	$\begin{bmatrix} \rho \\ \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$	$\exp\left(\begin{bmatrix} [\theta]_\times & \rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$	$\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$	$\mathbf{R} \mathbf{x} + \mathbf{t}$

9 参考文献列表

1. Rodrigues' rotation formula
2. Lie Groups for 2D and 3D Transformations
3. A micro Lie theory for state estimation in robotics
4. 《视觉 SLAM 十四讲》—第 3/4 讲