

# 非线性四旋翼机姿态控制

Dario Brescianini, Markus Hehn and Raffaello D' Andrea

October 10, 2013

## 摘要

本文讨论了四旋翼机的非线性姿态控制问题。提出了一种基于单位四元数的全局稳定姿态控制器，并证明了其稳定性和鲁棒性。此外，本文还提出了一种在偏航角之上对关键的俯仰角和横滚角进行优先控制的方法。最后，对所提出的非线性控制器进行了实验验证。

## 1 简介

四旋翼机是一个热门的研究课题，关于四旋翼机姿态控制的文献很多。通常，用欧拉角来描述姿态，这是一种非常自然的描述姿态的方法，尤其是对于固定翼飞机。然后根据悬停条件下非线性姿态控制问题的线性化导出控制器。对于较小的俯仰角和滚转角，这会产生合理的结果。最近，这项研究的方向是高机动性。然而，对于攻击性机动，即姿态的极端变化，这些局部稳定控制器存在显著缺陷，导致性能较差，甚至更糟，无法稳定飞行器。

为了充分发挥四旋翼机的潜力，必须采用全局稳定的姿态控制器。此外，欧拉角会产生奇异，必须避免。由于纯数学原因，这限制了所有可能的运动，而这些运动与四旋翼机的物理约束无关，因此欧拉角不适用于全局姿态控制。对于全局姿态控制来说，选择一个既不具有几何奇异性，也不具有运动学奇异性的参数化是至关重要的。文 [2] 综述了姿态描述及其在刚体姿态控制中的适用性。通常，全局稳定的姿态控制器基于单位四元数 [14, 4, 13, 12]，但也存在一些使用旋转矩阵表示姿态的控制器 [2, 9, 10]。

本报告是 2011 年秋季进行的一个学期项目的结果，目的是为飞行器领域中使用的四旋翼机开发和实现一个全局稳定的姿态控制器<sup>1</sup>。现以技术报告的形式发表，为飞行器姿态控制器的应用提供参考。

本报告的其余部分组织如下：在第 2 节中，提供了有关姿态表示和四旋翼机设置的背景资料。第 3 节提出了一个全局渐近稳定的控制律。最后，第 4 节给出了所提出控制器的实验结果，第 5 节给出了结论。

## 2 预备工作

### 2.1 姿态表示

刚体的姿态可以用参考坐标系和固体坐标系之间的旋转来描述。存在几种旋转参数化，如欧拉角 (3 个参数)、单位四元数 (4 个参数) 和旋转矩阵 (9 个参数)。所有 3 个参数表示都有奇点，所有  $k$  参数表示 ( $k > 3$ ) 都有  $k - 3$  个约束 [11]。

---

<sup>1</sup><http://www.flyingmachinearena.org>

### 2.1.1 旋转矩阵

旋转  $R_{BI}$  是一种线性变换，它将线性空间  $\mathcal{I} = \mathbb{R}^3$  映射到线性空间  $\mathcal{B} = \mathbb{R}^3$ ，同时保持长度和右手习惯。根据这些性质，可以直接得出  $R_{BI} \in SO(3)$ 。考虑正交基  $\vec{e}^I \in \mathcal{I}$  和  $\vec{e}^B \in \mathcal{B}$ ，其中  $\vec{e}^I$  定义为

$$\vec{e}^I := (\vec{e}_x^I, \vec{e}_y^I, \vec{e}_z^I) \quad (1)$$

并且用坐标系  $\mathcal{I}$  和  $\mathcal{B}$  表示的向量  $\vec{r}$  为  ${}_I\vec{r}$  和  ${}_B\vec{r}$ 。然后是线性变换  $R_{BI}$ ，它将向量  ${}_I\vec{r}$  映射到  ${}_B\vec{r}$

$${}_B\vec{r} = R_{BI}{}_I\vec{r}, \quad (2)$$

这是一个  $3 \times 3$  矩阵

$$R_{BI} = ({}_B\vec{e}_x^I, {}_B\vec{e}_y^I, {}_B\vec{e}_z^I). \quad (3)$$

$R_{BI}$  的列向量是在坐标系  $\mathcal{B}$  中表示的坐标系  $\mathcal{I}$  的 3 个正交单位基向量。类似地，3 个行向量对应于在坐标系  $\mathcal{I}$  中表示的坐标系  $\mathcal{B}$  的基向量。

### 2.1.2 欧拉角

欧拉角是基于这样一个事实：任何旋转矩阵都可以通过连续应用 3 个初等旋转矩阵来构造。旋转矩阵的 9 个条目可以由 3 个基本旋转的旋转角度参数化。飞机应用中非常常见的旋转顺序是  $ZYX$  顺序 (图 1)：

1. 围绕初始  $z$  轴旋转偏航角  $\psi(\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{K})$ 。
2. 围绕新的 (旋转后的) $y$  轴旋转俯仰角  $\theta(\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L})$ 。
3. 围绕新的 (旋转后的) $x$  轴旋转滚动角  $\phi(\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{B})$ 。

$R_{BI}$  可以写为

$$R_{BI} = R_{BL}R_{LK}R_{KI} \quad (4)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$= \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ -c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\theta s_\psi & s_\phi c_\theta \\ s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi & -s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中  $c(\cdot)$  和  $s(\cdot)$  分别是  $\cos(\cdot)$  和  $\sin(\cdot)$  的缩写。然后是旋转矩阵到欧拉角的逆映射

$$\phi = \arctan2(R_{23}, R_{33}) \quad (7)$$

$$\theta = -\arcsin(R_{13}) \quad (8)$$

$$\psi = \arctan2(R_{12}, R_{11}) \quad (9)$$

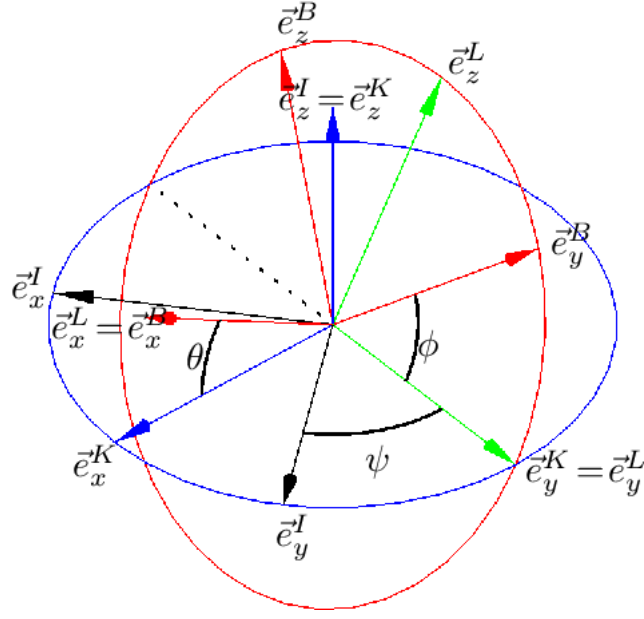


图 1: ZYX-Euler angles.

其中  $R_{ij}$  是  $R_{BI}$  的第  $i$  行和第  $j$  列中的条目。

### 2.1.3 单位四元数

每一个旋转都可以由一个关于单位向量  $\vec{k}$  和旋转角  $\alpha$  所描述的固定轴的单个旋转来参数化。这被称为特征轴旋转，体现了两个方向之间最短路径的旋转。基于此，单位四元数定义为

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_{1:3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \vec{k} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

四元数  $\mathbf{q}$  的共轭、范数和逆为

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q}_{1:3} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}, \quad (12)$$

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|}. \quad (13)$$

两个四元数  $\mathbf{q}$  和  $\mathbf{p}$  的乘积定义<sup>2</sup>为

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = Q(\mathbf{q}) \mathbf{p} \quad (14)$$

其中

<sup>2</sup>注：为便于解释，本报告中使用的四元数乘法与 [3] 中定义的不同。根据方程 (14) 中的定义，四元数乘法  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$  在新坐标系中首先对应  $\mathbf{q}$  的旋转，然后对应  $\mathbf{p}$  的旋转。

$$Q(\mathbf{q}) := \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

注意，对应于旋转矩阵  $\mathbf{I}$  的四元数给出为

$$\mathbf{q}_\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

用四元数  $\mathbf{q}$  旋转向量  $\vec{r}$  的计算公式为

$$\mathbf{p}(\vec{r}_r) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}(\vec{r}) \cdot \bar{\mathbf{q}} \quad (17)$$

其中  $\vec{r}_r$  是旋转后的向量， $\mathbf{p}(\cdot)$  是向量的四元数表示：

$$\mathbf{p}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{r} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

对于  $ZYX$  顺序的从欧拉角到单位四元数的映射为

$$\mathbf{q}(\psi, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} c_{\frac{\phi}{2}} c_{\frac{\theta}{2}} c_{\frac{\psi}{2}} + s_{\frac{\phi}{2}} s_{\frac{\theta}{2}} s_{\frac{\psi}{2}} \\ -c_{\frac{\phi}{2}} s_{\frac{\theta}{2}} s_{\frac{\psi}{2}} + c_{\frac{\theta}{2}} c_{\frac{\psi}{2}} s_{\frac{\phi}{2}} \\ c_{\frac{\phi}{2}} c_{\frac{\psi}{2}} s_{\frac{\theta}{2}} + s_{\frac{\phi}{2}} c_{\frac{\psi}{2}} s_{\frac{\theta}{2}} \\ c_{\frac{\phi}{2}} c_{\frac{\theta}{2}} s_{\frac{\psi}{2}} - s_{\frac{\phi}{2}} c_{\frac{\theta}{2}} s_{\frac{\psi}{2}} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

#### 2.1.4 姿态表示评述

旋转矩阵和单位四元数两者都提供了姿态的无奇异表示。但是请注意，单位四元数  $\mathbb{S}^3$  的空间覆盖了物理姿态  $SO(3)$  的空间。因此，单位四元数不是唯一的。实际上，每对正反对的单位四元数  $\pm \mathbf{q} \in \mathbb{S}^3$  对应于相同的物理姿态 [2]。对于  $\mathbb{S}^3$  中的姿态控制任务，这意味着必须设计一个控制器来稳定一组不连续的平衡点。然而，由于单位四元数是一种最小的全局非奇异参数化，因此在姿态控制的实践中（包括本报告）通常选择单位四元数作为参数化。此外，单位四元数提供了一个简单的洞察在几何水平发生了什么。

## 2.2 四旋翼无人机

在下文中，我们考虑具有如图 2 所示的机体固定坐标系  $\mathcal{B}$  和惯性坐标系  $\mathcal{I}$  的四旋翼机。四旋翼机的输入是四个发动机推力。输出是位置、速度和加速度以及姿态和角速度。由于模型的输出多于输入，很明显，并非所有的输出都可以独立控制。在 FMA 中，采用级联控制结构来控制四旋翼机，位置控制器作为最外层的控制回路（图 3）。这种控制方法被称为时标分离，只要内环明显快于外环，它就有效。本报告只考虑了姿态控制回路。假设机载控制回路和四旋翼机的动力学速度快得

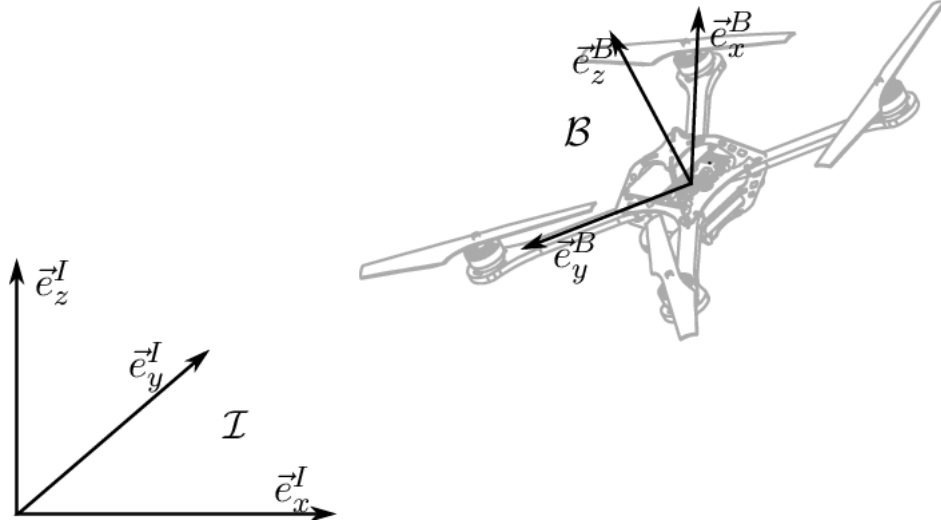
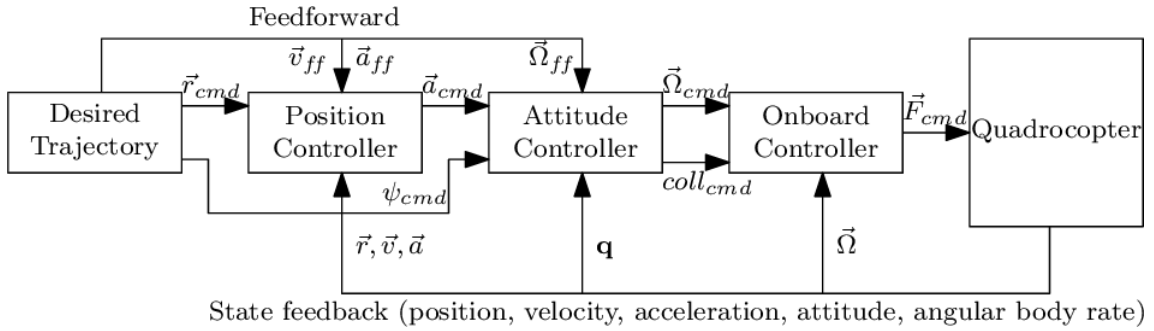
图 2: 具有固定坐标系  $\mathcal{B}$  和参考坐标系  $\mathcal{I}$  的四旋翼机。

图 3: 级联控制结构。

多, 以便将要控制的系统建模为刚体, 以期望的机体角速度  $\vec{\Omega}$  作为直接输入。四翼机的动力学可以建模为

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}_{1:3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}(\vec{\Omega}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \mathbf{q}_{1:3}^T \vec{\Omega} \\ \frac{1}{2} (S(\mathbf{q}_{1:3}) + q_0 \mathbf{I}) \vec{\Omega} \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中  $S(\mathbf{q}_{1:3})$  表示  $\mathbf{q}_{1:3}$  的斜对称矩阵

$$S(\mathbf{q}_{1:3}) = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

### 3 姿态控制设计

作为第一步, 必须将来自位置回路的指令加速度和指令偏航角转换为所需的姿态  $\mathbf{q}_{\text{cmd}}$  (第 3.2 节)。目标是设计一个反馈律, 使四旋翼机稳定在任何期望的物理姿态。由于  $SO(3)$  中的任何物理姿态都对应于  $S^3$  中的两个正反对四元数, 这可以通过将姿态  $\mathbf{q}$  稳定在  $\pm \mathbf{q}_{\text{cmd}}$  来实现。如果忽略这

一事实，基于四元数的控制器可能会导致不必要的现象，如回绕，即刚体通过完全旋转进行不必要的旋转 [7,2]。为了解决回绕问题，控制器必须满足

$$\vec{\Omega}_{cmd}(\mathbf{q}) = \vec{\Omega}_{cmd}(-\mathbf{q}) \quad (22)$$

这很容易看出，因为  $\mathbf{q}$  和  $-\mathbf{q}$  表示相同的物理姿态，所以控制输出也应该相同。只要  $q_0 < 0$ ，就可以通过改变  $\mathbf{q}$  的符号来解决这个问题。但是，更改符号会导致控制器不连续。有趣的是，这并不是一个缺点，因为可以证明所有的连续状态反馈控制律差不多总是全局稳定的。

### 3.1 控制律

考虑以下控制律：

$$\vec{\Omega}_{cmd}(\mathbf{q}) = \frac{2}{\tau} \text{sgn}(q_{e,0}) \mathbf{q}_{e,1:3}, \quad \text{sgn}(q_{e,0}) = \begin{cases} 1, & q_{e,0} \geq 0 \\ -1, & q_{e,0} < 0 \end{cases} \quad (23)$$

其中

- $\tau$  等于一阶系统时间常数 [s]，
- $\mathbf{q}_e := \mathbf{q}^{-1} \cdot \mathbf{q}_{cmd}$  为误差测量，表示从  $\mathbf{q}$  到  $\mathbf{q}_{cmd}$  的旋转。

那么， $\pm \mathbf{q}_{cmd}$  就是方程 (20) 的全局渐近稳定平衡点。

**证明：** 在不丧失一般性的情况下，设置  $\mathbf{q}_{cmd} = \mathbf{q}_I$ 。定义一个自治的混合自动机 [6]  $H = (Z, Q, f, Init, Dom, E, G, R)$ ，其中

- $Z = \{z_1, z_2\}$ ，两个离散态，对应于  $\mathbb{S}^3$  的上下半球。
- $Q = \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ ，连续状态  $\mathbf{q}$ ，位于三维球体中，代表当前姿态。
- 向量场为

$$f(z, \mathbf{q}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}(\vec{\Omega}_{cmd}(z, \mathbf{q})), & \text{if } z = z_1 \\ -\frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}(\vec{\Omega}_{cmd}(z, \mathbf{q})), & \text{if } z = z_2 \end{cases} \quad (24)$$

其中

$$\vec{\Omega}_{cmd}(z, \mathbf{q}) = \begin{cases} \frac{2}{\tau} \mathbf{q}_{e,1:3} = -\frac{2}{\tau} \mathbf{q}_{1:3}, & \text{if } z = z_1 \\ -\frac{2}{\tau} \mathbf{q}_{e,1:3} = \frac{2}{\tau} \mathbf{q}_{1:3}, & \text{if } z = z_2 \end{cases} \quad (25)$$

描述四元数分别位于上半球  $z_1$  和下半球  $z_2$  时  $\mathbf{q}$  在时间上的演化。

- 域  $Dom(z_1) = Dom(z_2) = \mathbb{S}^3$ 。
- 边  $E = \{(z_1, z_2), (z_2, z_1)\}$ ，表示从  $z_1$  到  $z_2$  的可能性，反之亦然。
- 守护条件  $G(z_1, z_2) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{S}^3 | q_0 < 0\}$ ，并且  $G(z_2, z_1) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{S}^3 | q_0 < 0\}$ 。
- 重置映射  $R(z_1, z_2, \mathbf{q}) = R(z_2, z_1, \mathbf{q}) = -\mathbf{q}$ ，因为绕轴旋转  $180^\circ$  等于绕同一轴旋转  $-180^\circ$ 。

现在, 考虑以下 Lyapunovs 候选函数:

$$V(z, \mathbf{q}) = \mathbf{q}_{1:3}^T \mathbf{q}_{1:3} + (q_0 - 1)^2 \quad \forall z \in Z \quad (26)$$

方程 (26) 相对于时间求微分并且插入方程 (24) 和方程 (20) 得到

$$\dot{V}(z, \mathbf{q}) = \frac{\partial V(z, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} f(z, \mathbf{q}) \quad (27)$$

$$= \begin{bmatrix} 2(q_0 - 1) & 2\mathbf{q}_{1:3}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{q}_{1:3}^T \frac{2}{\tau}\mathbf{q}_{1:3} \\ -\frac{1}{2}(S(\mathbf{q}_{1:3}) + q_0 \mathbf{I}) \frac{2}{\tau}\mathbf{q}_{1:3} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$= \frac{2}{\tau}(q_0 - 1)\mathbf{q}_{1:3}^T \mathbf{q}_{1:3} - \frac{2}{\tau}\mathbf{q}_{1:3}^T (S(\mathbf{q}_{1:3}) + q_0 \mathbf{I}) \mathbf{q}_{1:3} \quad (29)$$

$$= -\frac{2}{\tau}\mathbf{q}_{1:3}^T (S(\mathbf{q}_{1:3}) + \mathbf{I}) \mathbf{q}_{1:3} \quad (30)$$

$$= -\frac{2}{\tau}\mathbf{q}_{1:3}^T \mathbf{q}_{1:3} \quad \forall z \in Z \quad (31)$$

根据混合系统的 Lyapunovs 稳定性定理 [6], 姿态  $\mathbf{q}_I$  是一个稳定平衡点, 因为:

1.  $V(z, \cdot) = 0$  当且仅当  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_I$
2.  $V(z, \mathbf{q}) > 0 \quad \forall \mathbf{q}, (z, \mathbf{q}) \in \text{Dom}(z) \setminus \{\mathbf{q}_I\}$ , 并且
3.  $\dot{V}(z, \mathbf{q}) = \frac{\partial V(z, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} f(z, \mathbf{q}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{q}, (z, \mathbf{q}) \in \text{Dom}(z)$ .

此外,  $\dot{V}(z, \mathbf{q}) < 0 \quad \forall z \in Z, \quad \forall \mathbf{q} \in \text{Dom}(z) \setminus \{\mathbf{q}_I\}$ . 注意, 当  $z$  改变其状态时,  $V(z, \mathbf{q})$  不会跳跃, 因此  $V(z, \mathbf{q})$  是严格递减的, 这意味着  $\mathbf{q}_I$  是一个全局渐近稳定的平衡点。□

**备注 1:** 误差测量  $\mathbf{q}_e$  表示从当前姿态  $\mathbf{q}$  到所需姿态  $\mathbf{q}_{\text{cmd}}$  的旋转。通过采用  $\mathbf{q}_e$  正负符号, 可确保旋转角度始终小于或等于  $180^\circ$ 。这意味着控制器总是以最小的旋转角度旋转刚体。然而, 请注意, 最小旋转角度通常并不意味着时间最优旋转机动 [1,5]。这很容易看出, 如果机体角速度是有限的, 即  $|\Omega_i| \leq \Omega_{i,\max}$ ,  $i \in \{x, y, z\}$  并且  $\Omega_{i,\max} \neq \Omega_{j,\max}$  for  $i \neq j$ 。

**备注 2:** 对于  $\mathbf{q}_{\text{cmd}} = \mathbf{q}_I$  的控制律方程 (23) 的直观解释如图 4 所示。

**备注 3:** 根据定义,  $\|\mathbf{q}\| = 1 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{S}^3$ , 因此  $\|\mathbf{q}_{e,1:3}\| \leq 1$ 。因此, 最大可能的控制输出仅限于  $\|\vec{\Omega}_{\text{cmd}}\| \leq \frac{2}{\tau}$ 。这对于饱和系统尤其有利。

**备注 4:** 假定  $\mathbf{q}_{\text{cmd}} = \mathbf{q}_I$ , 但不失一般性。将控制律方程 (23) 插入到状态方程 (20) 中得到

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \\ -q_0 q_1 \\ -q_0 q_2 \\ -q_0 q_3 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

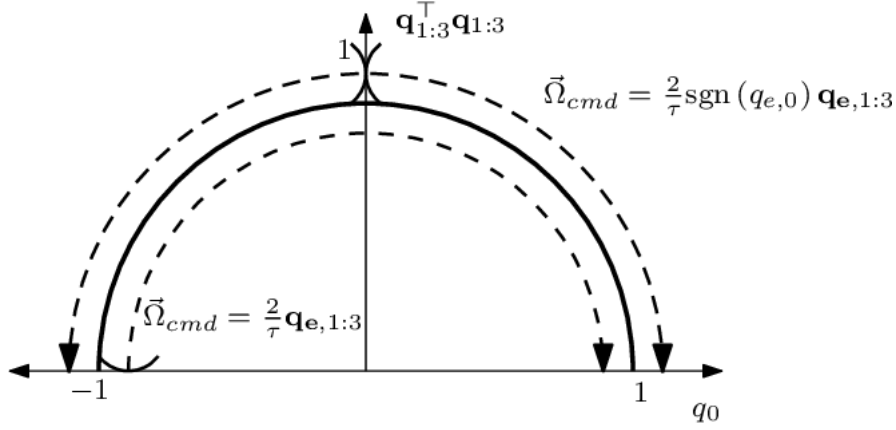


图 4: 本文所提出的控制律使姿态稳定在  $q_0 = 1$  或  $q_0 = -1$ 。然而, 在  $q_0 = 0$  时存在不连续性。如果不考虑  $q_{e,0}$  的正负符号, 控制器将仅在  $q_0 = -1$  作为不稳定平衡点时几乎全局渐近稳定 [8]。

对于平衡点  $\mathbf{q}_1$  ( $q_0 \approx 1, \mathbf{q}_{1:3} \ll 1$ ) 的小偏差, 方程 (32) 简化为

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} 0 \\ -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

这是一个时间常数为  $\tau^3$  的非耦合一阶系统。

### 3.1.1 鲁棒性

虽然所提出的控制器在任何期望姿态下都能达到全局渐近稳定, 但它对任意小的测量噪声都不具有鲁棒性。紧跟在文献 [8] 中的证明之后, 可以构造噪声信号  $\mathbf{q}_{\text{noise}}$ , 使得当开始任意接近不连续时,  $\mathbf{q}$  始终保持接近不连续。

设当前的姿态  $\mathbf{q}$  为

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \vec{k} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{bmatrix}. \quad (34)$$

定义  $\mathbf{q}_{\text{noise}}$  为

$$\mathbf{q}_{\text{noise}}(\mathbf{q}) := \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\beta(\mathbf{q})}{2}\right) \\ \vec{k} \sin\left(\frac{\beta(\mathbf{q})}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (35)$$

其中  $\vec{k}$  是姿态  $\mathbf{q}$  的特征轴, 并且

<sup>3</sup>注意,  $\tau$  表示四元数误差衰减到  $\frac{1}{e}$  的时间, 而不是欧拉角误差衰减到  $\frac{1}{e}$  的时间。



$$\beta(\mathbf{q}) = \begin{cases} \beta_0, & \text{if } 0 < \alpha \leq \pi \\ -\beta_0, & \text{if } \pi < \alpha < 2\pi \\ -\beta_0, & \text{if } 0 \geq \alpha > -\pi \\ \beta_0, & \text{if } -\pi \geq \alpha > -2\pi \end{cases}, \quad \text{with } 0 < \beta_0 < \pi. \quad (36)$$

如果测得的姿态  $\tilde{\mathbf{q}}$  是被噪声信号旋转的当前姿态, 即

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}_{\text{noise}}(\mathbf{q}) := \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha + \beta(\mathbf{q})}{2}\right) \\ \vec{k} \sin\left(\frac{\alpha + \beta(\mathbf{q})}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (37)$$

那么,  $\mathbf{q}_{\text{cmd}} = \mathbf{q}_I$  的运动方程是

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{cases} \frac{1}{\tau} \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}(\text{sgn}(q_0) \tilde{\mathbf{q}}_{1:3}), & \text{if } |\pi - \alpha| \leq \beta_0 \\ -\frac{1}{\tau} \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}(\text{sgn}(q_0) \tilde{\mathbf{q}}_{1:3}), & \text{if } |\pi - \alpha| > \beta_0. \end{cases} \quad (38)$$

定义所有不连续的集合  $\mathcal{M} := \{\mathbf{q} \in \mathbb{S}^3 : q_0 = 0\}$ , 它对应于从  $\mathbf{q}_{\text{cmd}}$  旋转  $180^\circ$  的所有姿态。现在考虑 Lyapunov 候选函数  $V_{\mathcal{M}}(\mathbf{q}) = q_0^2$ , 其中  $V_{\mathcal{M}}(\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{M}) > 0$ , 并且  $V_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}) = 0$ 。那么, 对于  $|\pi - \alpha| \leq \beta_0$ ,

$$\dot{V}_{\mathcal{M}}(\mathbf{q}) = 2q_0 \dot{q}_0 \quad (39)$$

$$= -\frac{1}{\tau} |q_0| \mathbf{q}_{1:3}^T \tilde{\mathbf{q}}_{1:3} \quad (40)$$

$$= -\frac{1}{\tau} |q_0| \vec{k}^T \vec{k} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta(\mathbf{q})}{2}\right) \quad (41)$$

$$\leq 0. \quad (42)$$

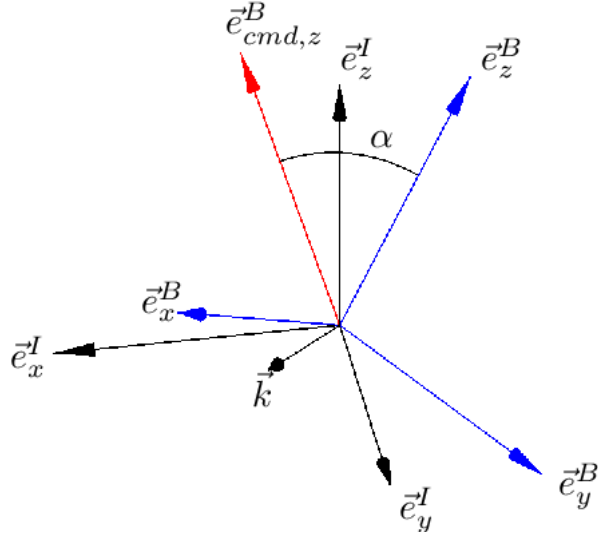
因此, 从  $|\pi - \alpha| \leq \beta_0$  的任何姿态开始, 系统不会收敛到期望姿态。

在文献 [8] 中, 提出了一种具有滞后记忆状态的不连续控制器来避免这种不必要的平衡。滞后记忆状态定义了旋转方向, 并且总是选择使机体以最短转换的方向旋转。如果  $|\pi - \alpha| \leq \beta_0$ , 则滞后记忆状态不会得到更新, 并且旋转方向保持不变, 从而任意小的噪声信号可以使控制器离开不稳定的区域。在实际中, 如果控制律是在离散时间控制器上实现的, 则不需要滞后记忆状态。由于离散时间控制器的输出在两次更新之间是恒定的, 因此在该时间段内旋转方向不会改变, 因此, 离散时间控制器的行为类似于具有滞后的连续时间控制器。

### 3.2 期望姿态

考虑到图 2 中四旋翼机设置的机体固连坐标系  $\mathcal{B}$ , 很明显四旋翼机只能在  $\vec{e}_z^{\mathcal{B}}$  的方向加速。因此, 必须将指令加速度  $\vec{a}_{\text{cmd}}$  转换为目标方向  $\mathbf{q}_{\text{cmd}}$ , 以便相应的  $z$  轴与期望加速度对齐。与每一个定点应用一样, 围绕定点方向的旋转是不相关的, 即围绕推力方向  $\vec{e}_z^{\mathcal{B}}$  的旋转对四旋翼机的平动性能没有影响。因此, 将控制任务分为两部分是有意义的:

- **简化姿态控制:** 只控制推力的关键指向方向。不直接控制偏航角, 但始终选择  $\mathbf{q}_{\text{cmd}}$ , 这样就不会引起绕偏航轴的旋转。

图 5:  $\mathbf{q}_{e,\text{red}}$  的几何解释。

- **完全姿态控制:** 控制推力向量的指向方向和偏航角。选择  $\mathbf{q}_{\text{cmd}}$ , 使相应的  $z$  轴与  $\vec{e}_{\text{cmd},z}^B$  和  $\psi = \psi_{\text{cmd}}$  对齐。

### 3.2.1 简化姿态控制

给定任意所需加速度  $\vec{a}_{\text{cmd}}$ , 所需推力和方向可由以下公式计算:

$${}_I\vec{e}_{\text{cmd},z}^B = \frac{{}_I\vec{a}_{\text{cmd}}}{\|{}_I\vec{a}_{\text{cmd}}\|}, \quad (43)$$

$$\text{coll}_{\text{cmd}} = \|{}_I\vec{a}_{\text{cmd}}\|. \quad (44)$$

然后使用简化误差的四元数  $\mathbf{q}_{e,\text{red}}$  (图 5), 将四角机从当前姿态旋转到所需姿态

$$\mathbf{q}_{e,\text{red}} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \vec{k} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left( \frac{{}_I\vec{e}_z^B \times \vec{e}_{\text{cmd},z}^B}{\|{}_I\vec{e}_z^B \times \vec{e}_{\text{cmd},z}^B\|} \right) \end{bmatrix}, \quad (45)$$

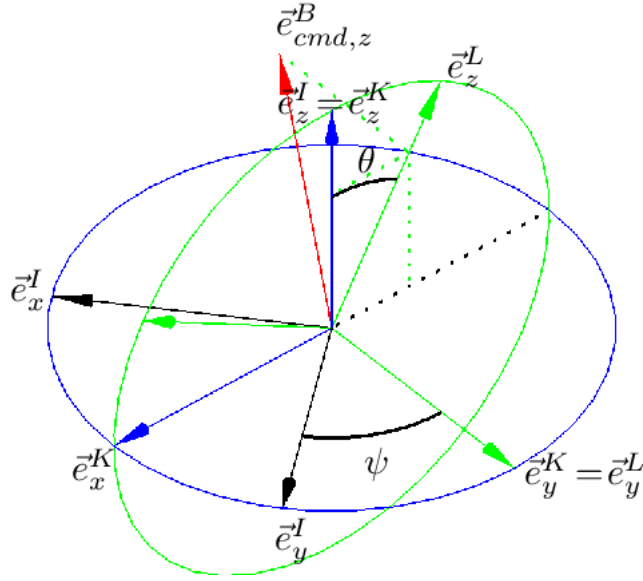
其中  ${}_I\vec{e}_z^B$  是当前姿态  $\mathbf{q}$  的对应  $z$  轴,  $\alpha$  是当前推力方向和期望推力方向之间的角度:

$$\alpha = \arccos\left(\left({}_I\vec{e}_z^B\right)^T {}_I\vec{e}_{\text{cmd},z}^B\right). \quad (46)$$

最后, 期望的姿态可以从以下方程得到

$$\mathbf{q}_{\text{cmd},\text{red}} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}_{e,\text{red}}. \quad (47)$$

请注意,  $\mathbf{q}_{e,\text{red}}$  的最后一个条目始终为零, 因为  $\vec{k} \perp \vec{e}_z^B$  表示  $\Omega_{\text{cmd},z} = 0$ 。由于欧拉角的结构, 这并不意味着偏航角  $\psi$  是恒定的。

图 6: 投射到  $\vec{e}_x^K, \vec{e}_z^K$  平面上。

### 3.2.2 完全姿态控制

期望的偏航角  $\psi_{cmd}$  和推力方向  $\vec{e}_{cmd,z}^B$  完全决定了姿态。因此, 利用  $\vec{e}_{cmd,z}^B$  在中间坐标系  $\mathcal{K}$  和  $\mathcal{L}$  上的投影, 可以从  $\psi_{cmd}$  和  $\vec{e}_{cmd,z}^B$  中恢复俯仰角  $\theta_{cmd}$  和横滚角  $\phi_{cmd}$ 。

首先, 所需的指向方向  $\vec{e}_{cmd,z}^B$  用坐标系  $\mathcal{K}$  表示, 其绕初始  $z$  轴旋转  $\psi_{cmd}$ :

$${}_K \vec{e}_{cmd,z}^B = R_{KII} \vec{e}_{cmd,z}^B = \begin{bmatrix} \cos(\psi_{cmd}) & \sin(\psi_{cmd}) & 0 \\ -\sin(\psi_{cmd}) & \cos(\psi_{cmd}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}_I \vec{e}_{cmd,z}^B. \quad (48)$$

然后, 通过将指向向量投影到  $\vec{e}_x^K, \vec{e}_z^K$  平面上, 可以很容易地重建俯仰角  $\theta_{cmd}$  (图 6):

$$\theta_{cmd} = \arctan \left( \frac{{}_K \vec{e}_{cmd,z,1}^B}{{}_K \vec{e}_{cmd,z,3}^B} \right). \quad (49)$$

在坐标系  $\mathcal{L}$  中表示  $\vec{e}_{cmd,z}^B$ , 通过新计算的俯仰角  $\theta_{cmd}$  围绕  $\vec{e}_y^K$  旋转, 得到

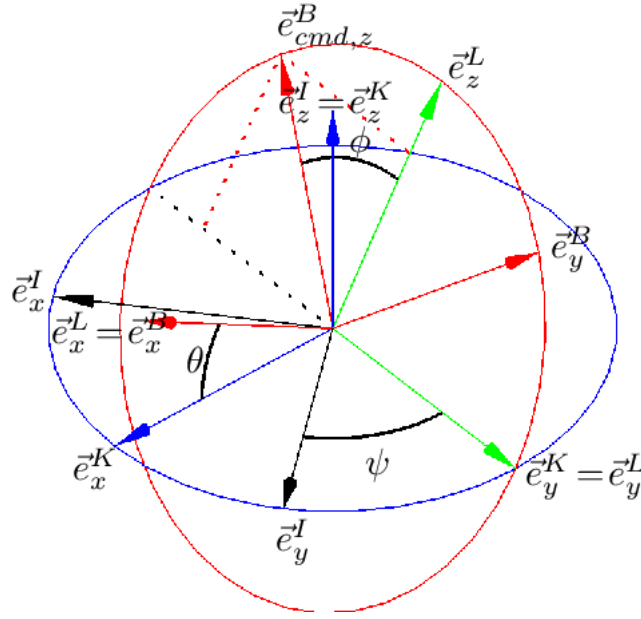
$${}_L \vec{e}_{cmd,z}^B = R_{LKK} \vec{e}_{cmd,z}^B = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{cmd}) & 0 & -\sin(\theta_{cmd}) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta_{cmd}) & 0 & \cos(\theta_{cmd}) \end{bmatrix} {}_K \vec{e}_{cmd,z}^B. \quad (50)$$

同样, 将  $\vec{e}_{cmd,z}^B$  投影到  $\vec{e}_y^K, \vec{e}_z^K$  平面上, 从图 7 可以看出, 横滚角  $\phi_{cmd}$  由以下方程得到

$$\phi_{cmd} = \arctan2(-{}_L \vec{e}_{cmd,z,2}^B, {}_L \vec{e}_{cmd,z,3}^B). \quad (51)$$

最后, 可以使用方程 (19) 来构造所需的姿态:

$$\mathbf{q}_{cmd,full} = \mathbf{q}(\psi_{cmd}, \theta_{cmd}, \phi_{cmd}). \quad (52)$$

图 7: 投射到  $\vec{e}_y^K, \vec{e}_z^K$  平面上。

### 3.2.3 混合完全和简化姿态控制

虽然没有必要为了跟随任何期望的轨迹而控制偏航，但是有时仍然是期望的。在实践中，使用完全姿态控制 ( $\mathbf{q}_{\text{cmd}} = \mathbf{q}_{\text{cmd,full}}$ ) 并不能产生很好的效果。 $\Omega_z$  的动力学比  $\Omega_x$  和  $\Omega_y$  慢得多。其原因是  $\Omega_z$  不能通过施加差动推力来控制，而只能通过利用螺旋桨的空气阻力来控制。当以相同的增益  $\frac{1}{\tau}$  控制所有角速度时，要么控制器对俯仰角和滚转角的速度非常慢，要么在偏航中存在大量的超调。此外，由于控制结构  $\|\vec{\Omega}_{\text{cmd}}\|$  是有限的，许多控制工作可能会浪费在控制偏航，虽然它不是至关重要的四旋翼机的运动。但这对于非常激进的机动非常重要。克服这些问题的一种可能性是混合减少和完全的姿态控制。定义  $\mathbf{q}_{\text{mix}} := \mathbf{q}_{\text{cmd,red}}^{-1} \cdot \mathbf{q}_{\text{cmd,full}}$  是  $\mathbf{q}_{\text{cmd,red}}$  和  $\mathbf{q}_{\text{cmd,full}}$  之间的旋转。根据定义， $\mathbf{q}_{\text{mix}}$  总是有

$$\mathbf{q}_{\text{mix}} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_{\text{mix}}}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{\alpha_{\text{mix}}}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (53)$$

其中  $\alpha_{\text{mix}}$  是  $\mathbf{q}_{\text{cmd,red}}$  和  $\mathbf{q}_{\text{cmd,full}}$  之间关于  ${}_B\vec{e}_z^B$  的旋转角。选择  $\mathbf{q}_{\text{cmd}}$  位于两种姿态  $\mathbf{q}_{\text{cmd,red}}$  和  $\mathbf{q}_{\text{cmd,full}}$  之间，即：

$$\mathbf{q}_{\text{cmd}} = \mathbf{q}_{\text{cmd,red}} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{p\alpha_{\text{mix}}}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{p\alpha_{\text{mix}}}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad \text{with } p \in [0, 1], \quad (54)$$

然后，可以保证由此产生的旋转产生正确的俯仰角和横滚角。尽管控制器只校正实际偏航误差的  $p$  分数，但它仍然收敛到期望的偏航角  $t \rightarrow \infty$ 。 $\Omega_{\text{cmd},z}$  现在限制为

$$\Omega_{cmd,z} \leq \frac{2 \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}{\tau}. \quad (55)$$

### 3.2.4 限制最大倾斜角度

对于某些应用，例如承载负载，可能需要四翼机只能倾斜到某个最大倾斜角度  $\alpha_{max}$ 。这可以在方程 (43) 之后的步骤立即实现。首先，倾角  $\alpha_{tilt}$  定义为  $\vec{e}_z^I$  和  $\vec{e}_{cmd,z}^B$  之间的角度：

$$\alpha_{tilt} = \arccos\left(\left({}_I\vec{e}_z^I\right)^T {}_I\vec{e}_{cmd,z}^B\right) \quad (56)$$

如果  $|\alpha_{tilt}| > \alpha_{max}$ ，则角度可以使用方程 (17) 来限制。首先计算旋转轴，

$$\vec{k} = \frac{{}_I\vec{e}_z^I \times {}_I\vec{e}_{cmd,z}^B}{\left\|({}_I\vec{e}_z^I)^T {}_I\vec{e}_{cmd,z}^B\right\|}, \quad (57)$$

并且倾斜旋转定义为：

$$\mathbf{q}_{tilt} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_{tilt}}{2}\right) \\ \vec{k} \sin\left(\frac{\alpha_{tilt}}{2}\right) \end{bmatrix}. \quad (58)$$

新的目标推力方向位于孔径为  $2\alpha_{max}$  的圆锥内，然后

$$\mathbf{p}({}_I\vec{e}_{new\,cmd,z}^B) = \mathbf{q}_{tilt} \cdot \mathbf{p}({}_I\vec{e}_{cmd,z}^B) \cdot \bar{\mathbf{q}}_{tilt}. \quad (59)$$

值得一提的是，这并不能阻止四旋翼机翻转。尽管可到达的姿态集合现在受到限制，但是四翼机可能会被一些外部动量旋转到一个极端的姿态。恢复到指令姿态的最小角度旋转仍然需要执行翻转。

## 3.3 启发式

本文所提出的控制律方程 (23) 总是以尽可能小的旋转使四旋翼机稳定到所需的方向。这是一个非常理想的结果，然而，这是假设  $\vec{\Omega}$  可以被直接和无限快地控制，这在实践中是不正确的。想象一下，四旋翼机的偏航误差几乎为  $180^\circ$ 。如果四旋翼机绕  $\vec{k}$  或  $-\vec{k}$  旋转，时间上不会有很大差别。但是，如果  $|\Omega_z|$  较大，则与  $\Omega_z$  相同方向旋转明显快于加速从相反方向旋转。问题是，是否更快地进行较大的旋转，不是简单的事。实际上， $\vec{\Omega}$  的上升时间取决于许多参数，例如推力大小和  $\vec{\Omega}$  本身的值，不存在任何代数表达式来回答这个问题。为了保持较小的计算工作量，本文使用了一个简单的启发式算法。

这里只介绍偏航误差的启发式算法，然而，对于俯仰角和横滚角，它的工作方式是相同的。假设四翼机的机体角速度为  $\vec{\Omega}$ 。 $\mathbf{q}_{mix}$  的旋转轴为  $\vec{k} = (0, 0, 1)^T$  或  $\vec{k} = (0, 0, -1)^T$ 。如果四旋翼机已经按照命令的方向旋转，即  $\vec{k}^T \vec{\Omega} \geq 0$ ，那么显然没有什么需要改变的。否则，如果  $\vec{k}^T \vec{\Omega} < 0$ ，根据偏航误差，进行较长的旋转可能更快。决策标准是

$$\vec{k}^T \vec{\Omega} < 0 \quad \text{AND} \quad \left| \vec{k}^T \vec{\Omega} \right| \geq \text{threshold}(\alpha_{mix}). \quad (60)$$

对于偏航误差接近  $180^\circ$  时，阈值应接近 0，并且应严格增加，以减小误差角。实验发现，一个好的阈值是

$$\text{threshold}(\alpha_{mix}) = \frac{\pi - \alpha_{mix}}{\pi} \Omega_{z,min}. \quad (61)$$

每当  $|\vec{k}^T \vec{\Omega}|$  高于阈值时, 最好继续朝这个方向旋转。为了获得尽可能多的时间, 应全速旋转直到误差角为  $180^\circ$ , 即:

$$\mathbf{q}_{e,full} = \mathbf{q}_{e,red} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \\ -\vec{k} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \end{bmatrix}. \quad (62)$$

注意, 必须确保旋转方向一旦确定, 就不会再改变。因此, 指令转速应远高于阈值, 这意味着

$$\Omega_{z,min} < \frac{2 \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}{\tau}. \quad (63)$$

由于单位四元数是归一化的, 在俯仰和横滚中的大误差会降低  $\Omega_{cmd,z}$ , 因此当  $\Omega_{z,min} = 2 \sin(p\pi/2)/\tau$  时, 结果是不确定的。

**备注 1:** 上述启发式也适用于  $\Omega_{x,y}$ 。但是,  $\Omega_{x,y}$  可以控制得更快, 因此时间收益不再那么大。实验表明, 该方法只对俯仰和横滚中的极大角速度有利, 而这两种速度几乎超出了陀螺传感器的测量范围。此外, 该启发式算法是针对四旋翼机的主轴进行单次旋转设计的。目前还不清楚 3D 案例中会发生什么。因此, 建议仅将启发式应用于偏航轴, 因为偏航轴只能缓慢控制, 因此时间收益最高。

**备注 2:** 作为启发式方程 (60) 的替换, 它还试图通过模拟状态方程 (20) 来解决问题, 一次在较小的方向上旋转, 一次在相反的方向上旋转。然而, 结果并不比上述启发式方法更好。此外, 模拟计算非常昂贵, 这使得它无法用于实时应用。

**备注 3:** 如果使用上述启发式, 那么控制器的稳定性和鲁棒性将不得不再次得到证明。虽然结果很直观, 但这里没有证明。

## 4 结果

### 4.1 时间常数

本文所提出的控制器方程 (23) 基于  $\vec{\Omega}$  可以被直接控制的假设。对于大  $\tau$ , 这个假设当然成立。为了确定  $\tau$  的取值范围, 使得上述假设仍然成立, 本节将分析姿态的一系列阶跃响应。

#### 4.1.1 阶跃俯仰角

从悬停开始, 指令俯仰角  $\phi$  为  $45^\circ$ 。由于该问题在俯仰和横滚上是对称的, 所以只分析了俯仰的阶跃响应。图 8 显示了方程 (64) 各种  $\tau$  和  $p$  的结果, 使得  $\tau_{yaw} = 0.02 s$ 。

对于  $\tau \geq 0.1 s$  时,  $q_2$  表现为一阶系统。对于  $\tau < 0.1 s$ ,  $\vec{\Omega}$  可以直接控制的假设不再成立。在时间  $t = 0.2 s$  时, 指令的俯仰角速度  $\Omega_{cmd,y}$  等于零, 但  $\Omega_y(t = 0.2 s) \gg 0 \text{ rad/s}$ , 因此, 系统表现出均匀的超调。因此,  $\tau \in [0.08 s, 0.15 s]$  可以实现几乎没有超调的快速响应。

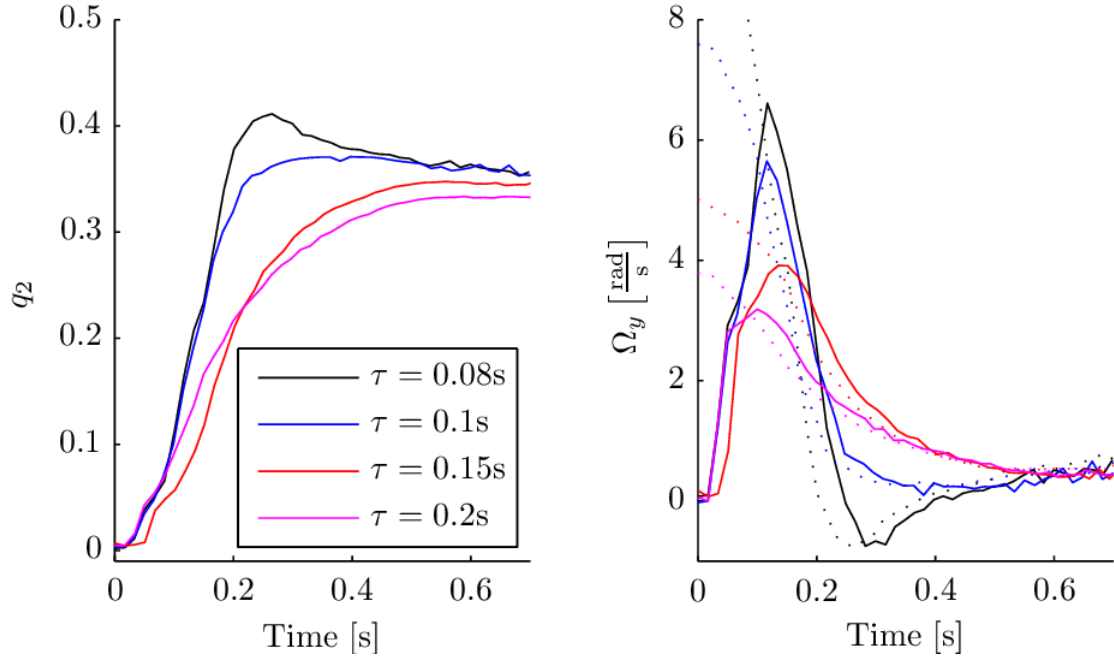


图 8:  $q_2$  和  $\Omega_y$  的阶跃响应。虚线是对应  $\Omega_{cmd,y}$ 。

#### 4.1.2 阶跃偏航角

从  $\psi = 0^\circ$  悬停开始，在  $t = 0\text{ s}$  时向姿态控制器提供  $180^\circ$  的偏航阶跃输入。不同  $\tau(p = 1)$  的结果如图 9 所示。

当  $\tau \geq 0.2\text{ s}$  时， $q_3$  的行为与一阶系统非常相似。对于较小的  $\tau$ ，由于基本假设受到损害，系统开始出现超调。这也可以在图 9 中看到，其中  $\Omega_z$  在  $\tau = 0.1\text{ s}$  时达到饱和，即使在减速时也是如此。因此，为了控制偏航， $\tau$  应在  $[0.2\text{ s}, 0.4\text{ s}]$  的范围内。

**备注 1：** 在图 9 中， $q_3$  对于  $\tau = 0.5\text{ s}$  的响应实际在轻微振荡。这是由于在这个时间常数上小的控制增益不能阻止四旋翼机在其俯仰和横滚轴上摆动。

**备注 2：** 上述结果强烈依赖于总推力。对于这两个实验， $\tau$  被分析为一个允许保持高度的集体推力。

#### 4.2 混合完全和简化姿态控制

第 4.1 节中的实验表明，对于偏航轴的良好控制器增益对于横滚和俯仰轴明显要小。实现这一点的一种方法是将完全姿态控制和简化姿态控制相结合，并选择方程 (54) 的优先化因子  $p$  为

$$p = \frac{\tau}{\tau_{yaw}}, \quad (64)$$

其中  $\tau$  偏航是一个时间常数，它在偏航中获得良好的响应， $\tau$  是整个控制器（俯仰和横滚）的期望时间常数。方程 (64) 源于针对偏航小误差的混合姿态控制的控制律线性化。如果根据方程 (64) 选择  $p$ ，那么对于偏航中的小误差，控制器的行为就像一个时间常数为  $\tau_{yaw}$  而不是  $\tau$  的控制器。对于  $\tau = 0.08\text{ s}$  和  $\tau_{yaw} = 0.2\text{ s}$  的非常激进的控制器， $p$  是

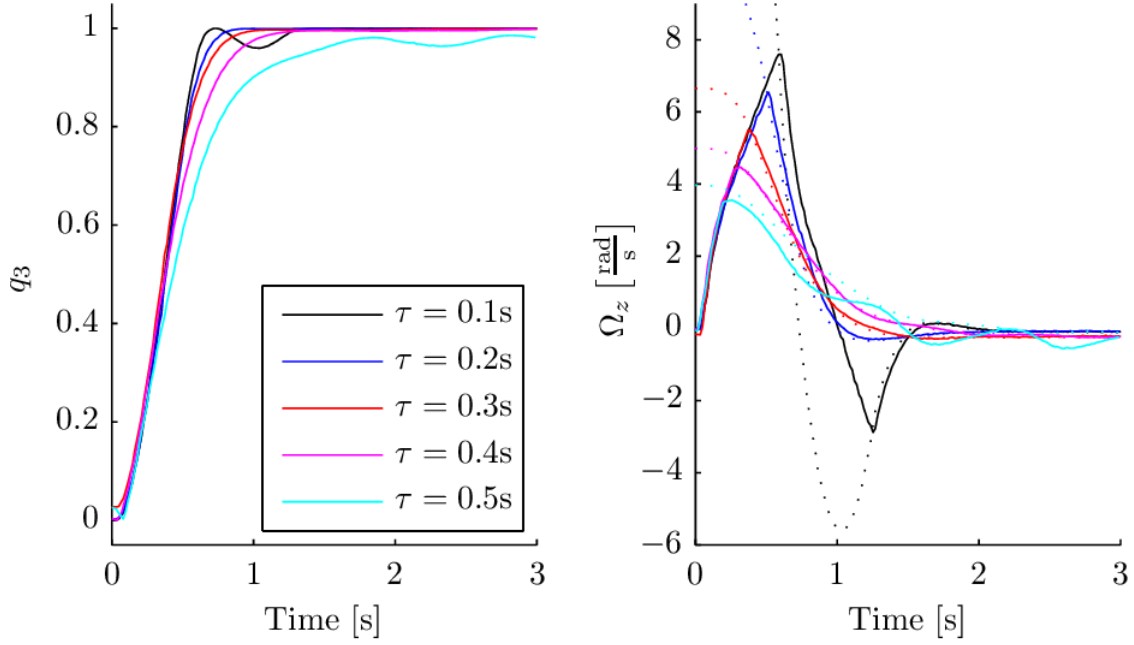


图 9:  $q_3$  和  $\Omega_z$  的阶跃响应。虚线是对应  $\Omega_{cmd,z}$ 。

$$p = \frac{0.08 s}{0.2 s} = 0.4. \quad (65)$$

在图 10 中, 显示了  $p$  和  $\tau = 0.08 s$  的不同值的实验。从欧拉角  $(\psi, \theta, \phi) = (180^\circ, 45^\circ, 0^\circ)$  的位置开始, 在  $t = 0 s$  时指令偏航  $180^\circ$ 。

作为基准,  $p = 0$  的结果绘制在图 10a 中。对于不同的  $p$  值, 围绕俯仰角的旋转没有显著变化, 并且在所有情况下, 在  $0.2 s$  后不久都获得了正确的倾斜角。但是仔细检查图 10, 可以看出, 随着  $p$  的增加, 俯仰角的校正稍微慢一些。这是由于  $p$  越大, 偏航控制功率越大。值得注意的是  $p$  越大, 偏航控制越快。对于  $p = 0.4$ , 在  $t = 0.88 s$  时达到正确姿态, 而对于  $p = 0.267$  和  $p = 0.133$ , 在  $t = 1 s$  时尚未达到所需姿态。

**备注 1:** 对于极大角速度约为  $\vec{e}_z^B$  的情况, 混合姿态控制又比单纯降阶姿态控制取得了更好的控制效果。如果  $|\Omega_z|$  较大, 则  $\mathbf{q}_{e,red}$  的特征轴  $\vec{k}$  在  $\vec{e}_x^B \vec{e}_y^B$  平面上以  $\Omega_z$  的速度旋转。这意味着电机的转速不断增加和降低。然而, 电机的动态特性受到限制, 电机的转速不能无限快地控制。此外, 由于  $\Omega_{cmd,z} = 0$ , 板载控制器使用大量控制力来分解  $\Omega_z$ , 几乎没有控制力来围绕俯仰和横滚轴旋转四旋翼机。

### 4.3 启发式

实验表明, 该方法是有用的。从悬停开始, 四旋翼机以不同的角速度绕偏航轴旋转。一旦偏航角  $\psi$  达到  $90^\circ$ , 四旋翼机被指令返回  $\psi_{cmd} = 0^\circ$ 。本实验的控制参数为  $\tau = 0.1 s$ ,  $p = 0.3$ ,  $\Omega_{z,min} = 4 \text{ rad/s}$ 。结果如图 11 所示。

显然, 对于较慢的角速度, 如果启用或不启用启发式, 则没有区别 (图 11a)。但如果  $\Omega_z$  超过某个阈值, 则执行较长的旋转路径速度更快, 因此启用启发式的控制器可以获得更好的结果。



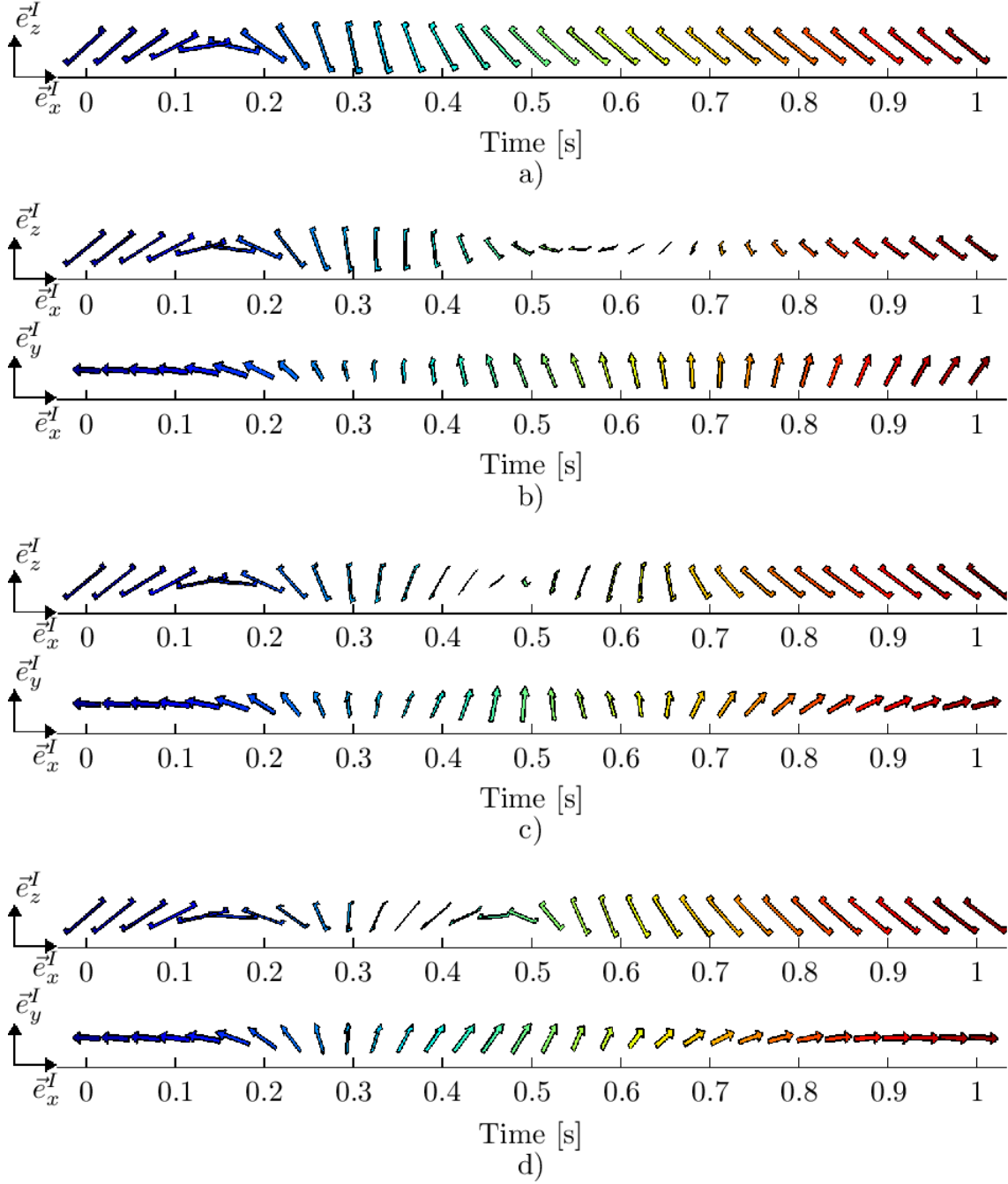


图 10: 在  $xz$  平面和  $xy$  平面上分别显示不同优先级因子的四旋翼机视图: a)  $p = 0.0$ , b)  $p = 0.133$ , c)  $p = 0.267$  和 d)  $p = 0.4$ 。

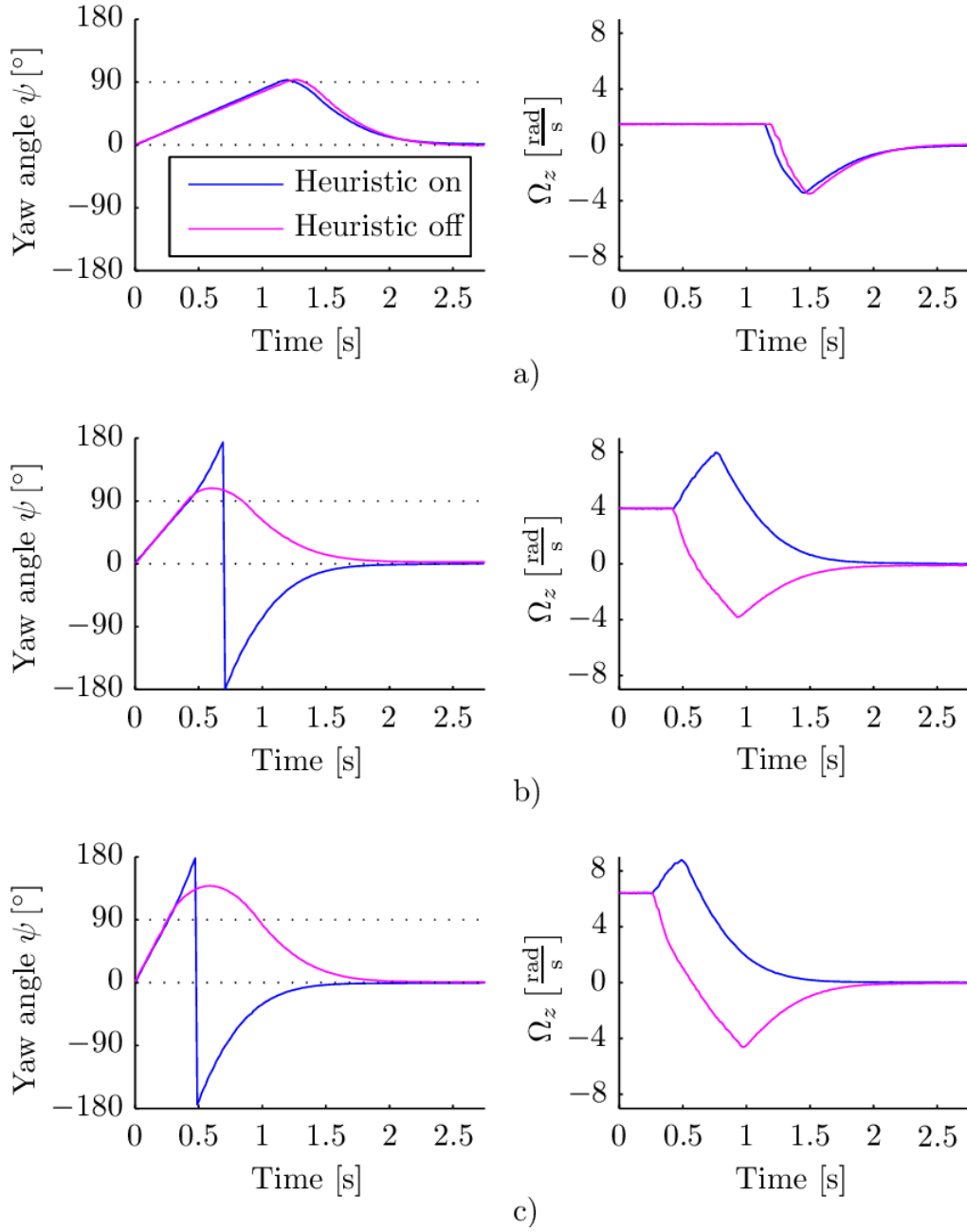


图 11: 实验测试不同角速度下的启发式: a)  $\Omega_z = 1.5 \text{ rad/s}$ , b)  $\Omega_z = 4 \text{ rad/s}$ , c)  $\Omega_z = 6.5 \text{ rad/s}$ 。

## 5 结论

本文提出了一种基于单位四元数的飞行器姿态非线性控制器。控制输入是期望的加速度和横摆角，然后将其转换为指令的目标方向。假设机载控制器和四旋翼机动力学比姿态控制回路快得多，因此四旋翼机可以直接由  $\vec{\Omega}$  控制。控制器的稳定性和鲁棒性已被证明。

通过实验验证了非线性控制器的性能。所提出的姿态控制器有许多优点，特别是对于攻击性机动。该控制器具有全局渐近稳定性，能使四旋翼机从任意姿态恢复到悬停状态，并能跟踪任意可行轨迹。此外，研究还表明，通过混合完全姿态控制和简化姿态控制，可以优先控制关键俯仰角和滚转角。所提出的启发式算法能够缩短到达期望姿态的时间，但是对于绕偏航轴旋转的情况，它只能得到很好的结果。

尽管如此，仍有许多问题有待解决。目前， $\vec{\Omega}$  的上升时间取决于指令推力。如果指令推力很低，这会导致旋转速度非常慢，尽管整个旋转只需要十分之几秒，因此，大推力对平动的影响很小。此外，如果根据姿态误差动态地调整优先级因子  $p$  将是很好的。俯仰和横滚的较大误差应首先控制，但如果俯仰和横滚没有误差发生，则  $p$  可以较大，以便在合理的时间内纠正偏航误差。实验还表明，偏航欧拉角  $\psi$  不适合定义四旋翼机  $z$  轴的期望旋转。由于俯仰角  $\theta$  仅定义在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  的范围内，如果俯仰角超出其范围，则  $\psi$  会发生跳跃。如果在输入轨迹中不考虑这些跳跃，四旋翼机可能会无意中绕其偏航轴旋转。

目前，所提出的控制器与模型无关，因此可用于各种飞行器。然而，结合姿态和机载控制器，并考虑惯性矩等模型参数，在时间上可能是有益的。

## 6 References

1. K. Bilimoria and B. Wie. Time-optimal three-axis reorientation of a rigid spacecraft. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 16(3):446-452, 1993.
2. N.A. Chaturvedi, A.K. Sanyal, and N.H. McClamroch. Rigid-body attitude control. *Control Systems, IEEE*, 31(3):30-51, june 2011.
3. J. Diebel. Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors, 2006.
4. J. Dvorak, M. de Lellis, and Z. Hurak. Advanced control of quadrotor using eigenaxis rotation. In *Control Applications (CCA), 2011 IEEE International Conference on*, pages 153-158, sept. 2011.
5. T. Lee, M. Leok, and N.H. McClamroch. Time optimal attitude control for a rigid body. In *American Control Conference*, 2008, pages 5210-5215, june 2008.
6. J. Lygeros, S. Sastry, and C. Tomlin. Hybrid systems: Foundations, advanced topics and applications.
7. C.G. Mayhew, R.G. Sanfelice, and A.R. Teel. On quaternion-based attitude control and the unwinding phenomenon. In *American Control Conference (ACC)*, 2011, pages 299-304, 29 2011-july 1 2011.

8. C.G. Mayhew, R.G. Sanfelice, and A.R. Teel. Quaternion-based hybrid control for robust global attitude tracking. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 56(11):2555–2566, nov. 2011.
9. D. Mellinger and V. Kumar. Minimum snap trajectory generation and control for quadrotors. In *ICRA*, pages 2520–2525. IEEE, 2011.
10. [10] K Rudin, M.-D. Hua, G. Ducard, and S. Bouabdallah. A robust attitude controller and its application to quadrotor helicopters. In *18th IFAC World Congress*, 2011.
11. J. Stuelpnagel. On the parametrization of the three-dimensional rotation group. *SIAM Review*, 6(4):pp. 422–430, 1964.
12. A. Tayebi. Unit quaternion-based output feedback for the attitude tracking problem. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 53(6):1516–1520, july 2008.
13. A. Tayebi and S. McGilvray. Attitude stabilization of a vtol quadrotor aircraft. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 14(3):562–571, may 2006.
14. J.T.-Y. Wen and K. Kreutz-Delgado. The attitude control problem. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 36(10):1148–1162, oct 1991.