

卡尔曼滤波的姿态误差表示

F. Landis Markley

4 October 2002

摘要

四元数具有全局非奇异姿态表示的最低维数。四元数必须服从单位范数约束，这导致了扩展卡尔曼滤波器的发展，该滤波器使用四元数进行全局姿态估计，并对姿态误差进行 3 分量表示。我们考虑了乘法扩展卡尔曼滤波器及其二阶扩展的各种姿态误差表示。

1 简介

扩展卡尔曼滤波器 (EKF)[1-4] 用于航天器姿态估计有着悠久的历史。最早的应用程序 [5] 使用三个欧拉角来参数化姿态，最近的一个例子使用了旋转向量 [6]。这两个参数化都需要先验函数的估计，并且都是有許多特定的奇异姿态，因此卡尔曼滤波采用了其它类型的参数化。寻找理想的参数化因旋转群的全局维参数化在拓扑上的不可能而受阻 [7]。

单位四元数具有全局非奇异姿态参数化的最低维，并将姿态矩阵表示为一个齐次二次函数。四元数的运动传播方程在四元数分量和角速度向量中是双线性的。这些优点推动了基于四元数表示的全局姿态和姿态误差滤波器的发展 [8]。然而，由这些直接 EKF 提供的线性测量更新违反了非线性四元数规范化约束。针对这一问题提出了几种解决方案，取得了不同程度的成功 [8-12]。

在本文中，我们将考虑一个用单位四元数参数化全局姿态的 EKF，同时对姿态误差采用 3 分量表示 [9,13,14]。对于这种卡尔曼滤波的非标准方法，提供了几个理由。参考文献 [9] 第 9 节中的方法将滤波器视为 4 分量四元数的估计，但认为四元数协方差由于四元数范数约束而秩不足，或者由于旋转群的基本三维性质而秩不足 [7,15,16]。由于假设 4×4 四元数协方差具有秩 3，因此可以将其投影到 3×3 矩阵上，而不会丢失任何信息。这给出了一个测量更新，遵循四元数范数对测量残差中一阶的约束，因此强制执行精确四元数规范化会将四元数修改到二阶，并因此不在 EKF 的范围内。Vathsala[17] 将这种方法扩展到了二阶，但结果似乎不是一致的二阶滤波器，因为他的四元数更新违反了二阶规范约束。

另一种方法，它已被称为乘法 EKF (Multiplicative EKF, MEKF)，在参考文献 [9] 的第 11 节中阐述。这将滤波器视为估计 3 分量姿态误差向量，自然具有 3×3 协方差，同时用四元数参数化全局姿态。此文实际上是原始方法 [13,14] 的出处，它导致了与线性化 EKF 近似的协方差投影方法相同的算法。然而，它建立在更坚实的概念基础上。

本文是参考文献 [9] 的一个扩展，它提供了到 1981 年的文献引文。其主要目的是在一定程度上考虑 3 分量姿态误差向量与四元数的关系，并将 MEKF 方法推广到一致的二阶卡尔曼滤波器。在开始阶段，我们首先简要讨论姿态表示。然后，我们扩展了 MEKF 的基本方程，并考虑了它对二阶的推广。

2 姿态参数化

对姿态表示的良好评价是现成的 [18,19]。我们提供一个简短的讨论，以建立对本文感兴趣的表示的约定和符号。我们认为 3×3 正交姿态矩阵或方向余弦矩阵是最基本的姿态表示。

2.1 旋转向量

欧拉定理 [20] 指出，一点固定的刚体最一般的运动是绕某个轴旋转 ϕ 角度。我们用单位向量 \mathbf{e} 指定该轴，并将轴和角组合成旋转向量 $\phi \equiv \phi \mathbf{e}$ 。作为 ϕ 函数的姿态矩阵是

$$A(\phi) = \mathbf{I}_{3 \times 3} - (\sin(\phi)/\phi)[\phi \times] + [(1 - \cos(\phi)/\phi^2)[\phi \times]^2 \quad (1)$$

其中 $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 表示 3×3 特征矩阵，同时叉乘矩阵是

$$[\phi \times] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

方程式 (1) 和旋转向量的动力学方程是超越方程并且具有病态行为，尽管对零旋转角来说作用是有限的。在旋转向量空间中，所有旋转都可以映射到半径为 π 的球体的内部和表面上的点，其中直径两端的点表示相同的旋转；但随着姿态的平滑变化，旋转向量可以从直径的一端跳到另一端。这些跳跃可以通过将表示扩展到半径为 2π 的球体来延迟问题的出现，但不能完全避免，因为旋转向量的运动方程对于 $\phi = 2\pi$ 是奇异的。这些特性限制了旋转向量作为全局姿态表示的实用性。

2.2 四元数

表示航天器姿态的单位四元数有一个 3 参数向量部分和一个标量部分¹，它们与旋转轴和旋转角有关。

$$q = \begin{bmatrix} q_v \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \sin(\phi/2) \\ \cos(\phi/2) \end{bmatrix} \quad (3)$$

并遵守单位长度约束

$$|q|^2 \equiv |\mathbf{q}|^2 + q_4^2 = 1 \quad (4)$$

q 的 4 个分量是欧拉对称参数或欧拉-罗德里格斯参数 (Euler-Rodrigues parameters)，它首先出现在欧拉 [21] 的一篇论文和高斯未发表的笔记中 [22]。罗德里格斯 1840 年的经典论文首先证明了它们的一般用途 [23]。汉密尔顿在 1844 年将四元数作为一个抽象的数学对象引入，但他是否正确理解了四元数与旋转的关系还存在一些问题 [25]。单位四元数位于嵌入四维欧几里得方程 $E4$ 的三维球体 $S3$ 上。姿态矩阵是单位四元数各分量的齐次二次函数；

$$A(q) = (q_4^2 - |\mathbf{q}|^2)\mathbf{I}_{3 \times 3} - 2q_4[\mathbf{q} \times] + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T \quad (5)$$

¹译者注：航天人使用的四元数是 JPL 约定形式。

四元数表示是 $2-1$ ，因为方程式 (5) 表明 q 和 $-q$ 表示相同的旋转矩阵。四元数是一种理想的全局姿态表示，因为它在 S^3 上随姿态变化而不断平滑变化，避免了某些三维参数化所引起的跳跃。然而，通常将代表姿态误差的四元数限制在 $q_4 > 0$ 的 S^3 半球。

我们按照参考文献 [19] 编写四元数积

$$p \otimes q \equiv \begin{bmatrix} p_4 \mathbf{q} + q_4 \mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{q} \\ p_4 q_4 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (6)$$

这与历史乘法约定²不同，[18,24] 用 qp 表示，不带中缀运算符，这里用向量部分的叉积符号 \otimes 表示。这两种乘法通过 $p \otimes q = qp$ 关联。这里采用的约定具有以下有用的性质：

$$A(p)A(q) = A(p \otimes q) \quad (7)$$

与 $A(p)A(q) = A(qp)$ 相比。方程式 (7) 表示旋转群和四元数群几乎是同构的，由于映射的 $2-1$ 性质，限定符为“几乎” [16]。我们使用顶线表示三个向量的四元数表示。

$$\bar{\mathbf{v}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

有了这个约定，四元数的运动方程就可以用另一种形式来表示。

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \bar{\omega} \otimes q = \frac{1}{2} \Omega(\bar{\omega}) q \quad (9)$$

其中， ω 是角速度向量，斜对称 4×4 矩阵 $\Omega(\omega)$ 定义为

$$\Omega(\omega) \equiv \begin{bmatrix} -[\omega \times] & \omega \\ -\omega^T & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$\Omega(\omega)$ 的斜对称性保留了 q 的归一化，但这种归一化可能由于计算误差而丢失。如果是这样的话，可以通过 $q = q/|q|$ 进行轻微的恢复。

2.3 吉布斯向量 (Gibbs Vector) 或罗德里格斯参数 (Rodrigues Parameters)

3 分量的罗德里格斯参数被定义为 [23]

$$\mathbf{g} \equiv \frac{\mathbf{q}}{q_4} = \frac{\mathbf{e} \sin(\phi/2)}{\cos(\phi/2)} = \mathbf{e} \tan(\phi/2) \quad (11)$$

吉布斯把它们排列成向量，半正切形式；难怪我们现在称它为吉布斯向量 [26]。吉布斯向量可以看作是 S^3 四元数空间在三维欧几里德 \mathbf{g} 空间上的一个几何投影，如图 1 所示。这是 S^3 的 $2-1$ 映射， q 和 $-q$ 映射到同一点。由于 q 和 $-q$ 代表相同的旋转，吉布斯向量参数化是 E^3 上旋转的 $1-1$ 表示。吉布斯向量对于 180° 旋转是无限的 (S^3 的 $q_4 = 0$ 算子)，这对于旋转的全局表示是不可取的。姿态矩阵采用吉布斯向量表示

$$A(\mathbf{g}) = \mathbf{I}_{3 \times 3} - 2(1 + g^2)^{-1} \left\{ [\mathbf{g} \times] - [\mathbf{g} \times]^2 \right\} \quad (12)$$

其中斜体项用于表示除四元数的向量部分以外的任意 3 分量向量的模数。

²译者注：所谓四元数历史约定，就是 Hamilton 约定形式。

2.4 改进型罗德里格斯参数 (Modified Rodrigues Parameters)

Wiener[27] 介绍了这些参数:

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\mathbf{q}}{1 + q_4} = \frac{\mathbf{e} \sin(\phi/2)}{1 + \cos(\phi/2)} = \mathbf{e} \tan(\phi/4) \quad (13)$$

表示姿态矩阵为

$$A(\mathbf{p}) = \mathbf{I}_{3 \times 3} - 4(1 + p^2)^{-2} \{ (1 - p^2)[\mathbf{p} \times] - 2[\mathbf{p} \times]^2 \} \quad (14)$$

Marandi 和 Modi[28] 指出, 改进型罗德里格斯参数可以看作是 S^3 四元数空间的立体平面投影, 如图 2 所示。 S^3 的一个半球在三维 \mathbf{p} 空间中投射到单位球体的内部, 而 S^3 的另一个半球则投射到单位 \mathbf{p} -sphere 的外部。所有的旋转都可以用改进型罗德里格斯参数来表示。如果我们将表示扩展到所有欧几里得 \mathbf{p} 空间, 我们有一个 2-1 参数化, 其中 \mathbf{p} 和 $-\mathbf{p}/p^2$ 表示相同的旋转。这种参数化与旋转向量参数化有许多共同的特点, 包括离散跳跃的需求, 但又避免了超越函数。

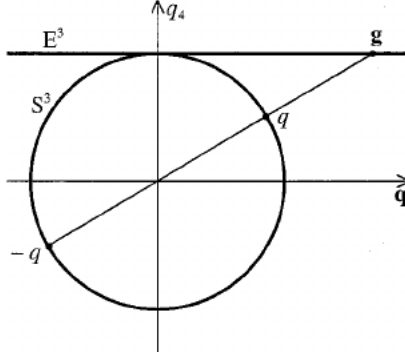


Figure 1. Gibbs Vector as a Gnomonic Projection

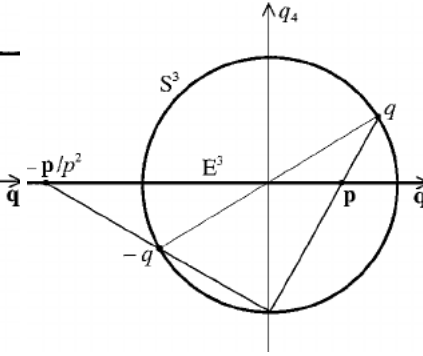


Figure 2. Modified Rodrigues Parameters as a Stereographic Projection

3 乘法扩展卡尔曼滤波器 (MEKF)

MEKF 以四元数积表示真正的非线性状态。

$$q(t) = \delta q(\mathbf{a}(t)) \otimes q_{ref}(t) \quad (15)$$

其中 $q_{ref}(t)$ 是一些单位参考四元数, 而 $\delta q(\mathbf{a}(t))$ 是一个单位四元数, 表示从 $q_{ref}(t)$ 到由 $q(t)$ 参数化的真实姿态的旋转。我们用航天器机体坐标系中姿态误差的 3 分量向量 $\mathbf{a}(t)$ 来参数化 $\delta q(\mathbf{a}(t))$ 。方程式 (15) 中的两种姿态表示形式 $\mathbf{a}(t)$ 和 $q_{ref}(t)$ 显然是多余的。当使用 4 分量 $q_{ref}(t)$ 提供全局非奇异姿态表示时, MEKF 计算 3 分量 $\mathbf{a}(t)$ 的无约束估计。该方程式的变形具有一些优点, 将方程式 (15) 中的乘法次序颠倒, 以使用 $\mathbf{a}(t)$ 表示惯性参考系中的姿态误差, 而不是机体坐标系中的误差 [29]。

给定误差向量的估计值 $\hat{\mathbf{a}}(t)$, 姿态四元数的最佳估计值为

$$\hat{q}(t) \equiv \delta q(\hat{\mathbf{a}}(t)) \otimes q_{ref}(t) \quad (16)$$

它是一个单位四元数。我们通过选择参考四元数 $q_{ref}(t)$ 来消除姿态表示中的冗余，以便在包含所有可用的动态测量信息时，期望值 $\hat{\mathbf{a}}(t)$ 等于零。方程式 (16) 表明 $q_{ref}(t)$ 恒等于 $\hat{q}(t)$ ，因此我们后面就这样表示。这意味着 $\delta q(\hat{\mathbf{a}}(t))$ 是姿态误差的一种表示。需要注意的是，如果 $\hat{q}(t)$ 被定义为 S_3 上某些概率分布的期望值，那么它不会是一个单位四元数，除非分布集中在一个点上，因为将四元数空间中的概率分布限制在 S_3 的表面意味着它的期望值必须在 S_3 内。这是 MEKF 的概念优势。

连续/离散滤波分三个步骤进行：时间传播、测量更新和重置。连续时间传播被安排为保持 $\hat{\mathbf{a}}(t) \equiv 0$ ，但离散测量更新将有限更新后值 $\hat{\mathbf{a}}(+)$ 分配给 $\hat{\mathbf{a}}$ 。为了避免传播姿态的两种表示，重置操作将姿态信息从 $\hat{\mathbf{a}}(+)$ 移动到 $\hat{q}(+)$ ，之后， $\hat{\mathbf{a}}$ 复位为零。由于该操作不改变真四元数，方程式 (15) 要求

$$\delta q(\hat{\mathbf{a}}(+)) \otimes \hat{q}(-) = \delta q(\mathbf{0}) \otimes \hat{q}(+) = \hat{q}(+) \quad (17)$$

其中 $\hat{q}(-)$ 是预更新四元数。即使在更新过程中，也可以通过考虑每个姿态测量更新在无穷小的时间间隔内展开，而不是瞬时进行，始终保持 $\hat{\mathbf{a}}(t) \equiv 0$ 来消除离散重置 [30]。然而，本文将测量更新视为离散的而不是连续的。

重置的重要性在标准 EKF 中被掩盖，它表示真实状态 \mathbf{X} 是参考值 $\hat{\mathbf{X}}$ 和一个小误差 \mathbf{x} 的总和。

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \mathbf{x} \quad (18)$$

测量过程产生误差向量的更新值。

$$\hat{\mathbf{x}}(+) = \hat{\mathbf{x}}(-) + \Delta \mathbf{x} \quad (19)$$

重置操作通过以下方式将更新信息从误差状态移动到完整状态的估计值：

$$\hat{\mathbf{X}}(+) = \hat{\mathbf{X}}(-) + \hat{\mathbf{x}}(+) - \hat{\mathbf{x}}(-) = \hat{\mathbf{X}}(-) + \Delta \mathbf{x} \quad (20)$$

这使得更新直接应用于完整状态估计的外观。事实上，在本文后面讨论的滤波器中，采用这种方式实现了陀螺偏差的隐式复位。然而，必须在 MEKF 中明确处理姿态的重置。

3.1 姿态误差表示

\mathbf{a} 的第一种参数化是旋转向量 $\phi \mathbf{e}$ ，我们表示为 \mathbf{a}_ϕ ，所以从方程式 (3) 中，

$$\delta q(\mathbf{a}_\phi) = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}_\phi / a_\phi) \sin(a_\phi/2) \\ \cos(a_\phi/2) \end{bmatrix} \quad (21a)$$

这种参数化的优点是协方差包含了以弧度表示的角度方差 [2]，但由于三角函数和 \mathbf{a}_ϕ / a_ϕ 的出现，在数值计算上会引起麻烦，在 $a_\phi = 0$ 时数值是不确定的。

我们可以通过要求 \mathbf{a} 等于旋转向量 (小角度近似) 来保留协方差矩阵的这种解释。这导致 \mathbf{a} 的第二种参数化为 δq 的向量部分的 2 倍，这是参考文献 [9] 的第 11 节中使用的参数化，除了两个因子；

$$\delta q(\mathbf{a}_q) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_q \\ \sqrt{4 - a_q^2} \end{bmatrix} \quad (21b)$$

第三种选择是改进型罗德里格斯参数向量的 4 倍，因此从方程式 (13) 中，

$$\delta q(\mathbf{a}_p) = \frac{1}{16 + a_p^2} \begin{bmatrix} 8\mathbf{a}_p \\ 16 - a_p^2 \end{bmatrix} \quad (21c)$$

这种参数化具有不需要任何超越函数的计算优势。第四种参数化是方程式 (11) 的倒数的吉布斯向量的 2 倍。

$$\delta q(\mathbf{a}_g) = \frac{1}{\sqrt{4 + a_g^2}} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_g \\ 2 \end{bmatrix} \quad (21d)$$

吉布斯向量形式的优点是，重置可以首先定义非规范四元数

$$\rho \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{a}_g \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \hat{q}(-) \quad (22)$$

然后更新后的单位四元数由下式给出

$$\hat{q}(+) = \rho / |\rho| \quad (23)$$

这种形式避免了四元数范数中任何数值误差的累积。

\mathbf{a} 的这四种定义为四元数提供了相同的二阶近似值。

$$\delta q(\mathbf{a}) \approx \begin{bmatrix} \mathbf{a}/2 \\ 1 - a^2/8 \end{bmatrix} \quad (24)$$

以及姿态误差矩阵

$$A(\delta q) = \mathbf{I}_{3 \times 3} - [\mathbf{a} \times] + \frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{a}^T - a^2 \mathbf{I}_{3 \times 3}) \quad (25)$$

因此，它们对于使用线性近似的 EKF 是等效的；但它们在 \mathbf{a} 中的三阶和更高阶上有所不同。值得注意的是，方程式 (24) 和 (25) 仅当 \mathbf{a} 的分量被视为围绕三个正交轴的欧拉角旋转时保持一阶，如参考文献 [5] 和 [13] 中所述。因此，欧拉角参数化将导致相同的 EKF，但对于二阶滤波器将给出不同的结果。

在卡尔曼滤波器收敛之前，对于较大的误差，其误差表示形式会有很大的不同。考虑最大可能的姿态误差，即 180° 旋转。这对应于 $a_q = 2$, $a_\phi = \pi$, $a_p = 4$ 或无限的 a_g 的各种 3 分量表示。滤波器更新大于此值的 $\hat{\mathbf{a}}(+)$ 不会给出合理的四元数重置。吉布斯向量表示的无限的极限值是另一个更喜欢这种表示的原因。

3.2 状态和协方差传播

通过微分方程发现滤波器的动力学特性。

$$\delta q(t) = q(t) \otimes \hat{q}^{-1}(t) \quad (26)$$

利用方程式 (9) 和恒等式

$$d\hat{q}^{-1}/dt = -\hat{q}^{-1} \otimes \dot{\hat{q}} \otimes \hat{q}^{-1} \quad (27)$$

跟着, 这是从 $\hat{q} \otimes \hat{q}^{-1}$ 的时间导数的消失中得出的矩阵逆导数的相应表达式, $\hat{q} \otimes \hat{q}^{-1}$ 是常数特征四元数。这给出了

$$d(\delta q(\mathbf{a}))/dt = \frac{1}{2}\bar{\omega} \otimes \delta q(\mathbf{a}) - \delta q(\mathbf{a}) \otimes \dot{\hat{q}} \otimes \hat{q}^{-1} \quad (28)$$

在忽略相关关系的一般线性 EKF 近似下, 求该方程的期望值, 给出

$$d(\delta q(\hat{\mathbf{a}}))/dt = \frac{1}{2}\bar{\omega} \otimes \delta q(\hat{\mathbf{a}}) - \delta q(\hat{\mathbf{a}}) \otimes \dot{\hat{q}} \otimes \hat{q}^{-1} \quad (29)$$

因为 $\delta q(\hat{\mathbf{a}})$ 是一个特征四元数, 所以恒量, 所以我们有

$$0 = \frac{1}{2}\bar{\omega} - \dot{\hat{q}} \otimes \hat{q}^{-1} \quad (30)$$

或者

$$\dot{\hat{q}}(t) = \frac{1}{2}\bar{\omega} \otimes \hat{q}(t) = \frac{1}{2}\Omega(\bar{\omega}(t))\hat{q}(t) \quad (31)$$

这个四元数传播方程与传统方法推导的方程相同, 但我们是根据 $\hat{\mathbf{a}}(t)$ 等于零的要求推导出来的。

现在我们专门研究一组陀螺仪用来获得角速率信息来代替航天器动力学模型的情况。卡尔曼滤波器估计航天器姿态和陀螺漂移偏差的 3 分量向量 [9,14]。我们采用了 Farrenkopf 的陀螺动力学误差模型 [31], 这意味着我们忽略了速率积分陀螺的输出噪声 [32]。这是导航级陀螺仪的最佳近似值。根据航天器机体坐标系中陀螺输出向量 $\tilde{\omega}(t)$ 和陀螺漂移向量 $\mathbf{b}(t)$, 给出了航天器角速度向量

$$\omega(t) = \tilde{\omega}(t) - \mathbf{b}(t) - \boldsymbol{\eta}_1(t) \quad (32)$$

其中 $\boldsymbol{\eta}_1(t)$ 是零均值白噪声过程。陀螺漂移向量服从

$$\dot{\mathbf{b}}(t) = \boldsymbol{\eta}_2(t) \quad (33)$$

其中 $\boldsymbol{\eta}_2(t)$ 是独立的零均值白噪声过程。这显然意味着

$$\dot{\dot{\mathbf{b}}}(t) = 0 \quad (34)$$

我们考虑吉布斯向量参数化的特殊性。为 \mathbf{a}_g 求解方程式 (21d) 给出

$$\mathbf{a}_g(t) = 2(\delta q)_V / (\delta q)_4 \quad (35)$$

其中下标 V 和 4 表示四元数的向量和标量部分, 如方程式 (3) 所示。然后, 用方程式 (15) 和 (28);

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) &\equiv \dot{\mathbf{a}}_g(t) \\ &= \left\{ \frac{1}{2}\bar{\omega}(t) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{a}_g(t) \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{a}_g(t) \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \dot{\hat{q}}(t) \otimes \hat{q}^{-1}(t) \right\}_V \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}\bar{\omega}(t) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{a}_g(t) \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{a}_g(t) \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \dot{\hat{q}}(t) \otimes \hat{q}^{-1}(t) \right\}_4 \mathbf{a}_g(t) \end{aligned} \quad (36)$$

其中参考四元数的时间依赖性隐式包含在 $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$ 的时间参数中。在 EKF 近似中, 代入方程式 (31) 给出

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) = -\hat{\omega} \times \mathbf{a}_g(t) + \Delta\omega(t) - \frac{1}{2}\Delta\omega(t) \times \mathbf{a}_g(t) + \frac{1}{4}[\Delta\omega(t) \cdot \mathbf{a}_g(t)] \mathbf{a}_g(t) \quad (37)$$

其中

$$\Delta\omega(t) \equiv \omega(t) - \hat{\omega} = \omega(t) - [\tilde{\omega}(t) - \hat{\mathbf{b}}(t)] = \hat{\mathbf{b}}(t) - \mathbf{b}(t) - \boldsymbol{\eta}_1(t) \quad (38)$$

我们要为 6 分量状态向量构造一个 EKF

$$\mathbf{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{a}(t) \\ \mathbf{b}(t) \end{bmatrix} \quad (39)$$

在这里，我们抑制了方程中的下标，该下标包含任何三维参数化。这个状态向量服从传播方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) \\ \boldsymbol{\eta}_2(t) \end{bmatrix} \quad (40)$$

在没有测量的情况下，上面显示的状态向量的期望值为常数。协方差矩阵可以划分为 3×3 子矩阵

$$P(t) \equiv E \{ (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \} = \begin{bmatrix} P_a(t) & P_c(t) \\ P_c^T(t) & P_b(t) \end{bmatrix} \quad (41)$$

我们让 $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{a}$ 表示矩阵元素

$$[\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{a}]_{ij} = \partial f_i / \partial a_j \quad (42)$$

并定义矩阵

$$F(t) \equiv \begin{bmatrix} E \{ \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{a} \} & E \{ \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{b} \} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\hat{\omega}(t) \times] & -\mathbf{I}_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$G(t) \equiv \begin{bmatrix} E \{ \partial \mathbf{f} / \partial \eta_1 \} & E \{ \partial \mathbf{f} / \partial \eta_2 \} \\ 0_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (44)$$

这样协方差的时间传播为

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) - P(t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t) \quad (45)$$

其中

$$Q(t) = \begin{bmatrix} Q_1(t) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & Q_2(t) \end{bmatrix} \quad (46)$$

并且

$$E \{ \boldsymbol{\eta}_i(t) \boldsymbol{\eta}_j^T(t') \} = \delta_{ij} \delta(t - t') Q_i \quad \text{for } i, j = 1, 2 \quad (47)$$

姿态测量更新间隔期间的协方差传播与参考文献 [13] 和 [14] 相同，除了某些配方中的因子 $\frac{1}{2}$ 。附录表明，如果用方程式 (21b) 代替方程式 (21d)，这些方程也成立。这也暗示着，只要满足方程式 (24)，这些关系就独立于对 \mathbf{a} 选择的表示。

3.3 测量模型和更新

将测量建模为航天器机体坐标系中向量 \mathbf{v}_B 的 m 个分量函数 \mathbf{h} ，并加入白噪声：

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{v}_B) + \text{white noise} \quad (48)$$

机体 (body frame) 坐标系中 \mathbf{v}_B 的表示是通过姿态矩阵在惯性参考坐标系 (inertial reference frame) 中对其表示 \mathbf{v}_I 的映射：

$$\mathbf{v}_B = A(q)\mathbf{v}_I = (\mathbf{I}_{3 \times 3} - [\mathbf{a} \times])\hat{\mathbf{v}}_B \quad (49)$$

其中我们使用了方程式 (7), (15) 和方程式 (24) 的一阶近似值，其中 $\hat{\mathbf{v}}_B = A(\hat{q})\mathbf{v}_I$ 是由参考四元数预测的机体坐标系中的向量。这给了 \mathbf{a} 中的一阶近似值。

$$\mathbf{h}(\mathbf{v}_B) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{v}}_B) - (\partial \mathbf{h} / \partial \mathbf{v})|_{\hat{\mathbf{v}}_B} [\mathbf{a} \times] \hat{\mathbf{v}}_B = \hat{\mathbf{h}} + H_a \mathbf{a} \quad (50)$$

其中

$$\hat{\mathbf{h}} \equiv \mathbf{h}(\hat{\mathbf{v}}_B) \quad (51)$$

并且

$$H_a \equiv (\partial \mathbf{h} / \partial \mathbf{v})|_{\hat{\mathbf{v}}_B} [\hat{\mathbf{v}}_B \times] \quad (52)$$

因此， $m \times 6$ 测量灵敏度矩阵为

$$H = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{h} / \partial \mathbf{a} & \partial \mathbf{h} / \partial \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_a & 0_{m \times 3} \end{bmatrix} \quad (53)$$

由于姿态矩阵的测量假定不明确地依赖于陀螺漂移。卡尔曼增益由下式给出

$$K = \begin{bmatrix} P_a(-) & P_c(-) \end{bmatrix}^T H_a^T [H_a P_a(-) H_a^T + R]^{-1} \quad (54)$$

其中 R 是测量白噪声的协方差。状态更新由下式给出

$$\hat{\mathbf{x}}(+) = \hat{\mathbf{x}}(-) + K(\tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}) = \hat{\mathbf{x}}(-) + K \left[\tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{h}} - H_a \hat{\mathbf{a}}(-) \right] \quad (55)$$

其中 $\tilde{\mathbf{z}}$ 表示测量值， $\hat{\mathbf{z}}$ 是根据预更新状态估计预测的值。协方差更新是

$$P(+) = P(-) - \begin{bmatrix} P_a(-) & P_c(-) \end{bmatrix}^T H_a^T [H_a P_a(-) H_a^T + R]^{-1} H_a \begin{bmatrix} P_a(-) & P_c(-) \end{bmatrix} \quad (56)$$

3.4 重置

四元数重置使用方程式 (17) 和任意一种方程式 (21a-21d)；我们已经看到，更新与所选的表示无关。重置可以在每次测量更新后执行，在这种情况下，方程式 (55) 中的项 $H_a \hat{\mathbf{a}}(-)$ 是恒等于零；但是为了计算效率，重置通常会延迟，直到一组同时测量的所有更新都已执行。但是，在开始下一次传播之前必须执行重置，以确保 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 在传播开始时为零，从而避免在测量之间传播 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 。重置不会修改协方差，因为它既不会增加也不会减少估计的总信息内容；它只是将这些信息从姿态表示的一部分移动到另一部分。

3.5 四元数测量

许多现代的恒星跟踪器同时跟踪 5 到 50 颗恒星，将它们与内部恒星目录中的恒星匹配，并将它们的姿态计算为一个惯性参考四元数 [33,34]。计算还产生姿态误差角 3×3 协方差的估计 [35,36]。将这些量从恒星跟踪器参考坐标系转换到航天器坐标系是一件简单的事情，以产生四元数“测量”值 \tilde{q} 和 3×3 测量协方差矩阵 R 。将测量四元数中的信息呈现给卡尔曼滤波器的最方便方法是采用一种三维参数化方法。估计姿态误差的参数化

$$\delta q(\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{z}}) \equiv \tilde{q} \otimes \hat{q}^{-1}(-) \quad (57)$$

测量模型很简单

$$\mathbf{h}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \quad (58)$$

所以 H_a 是 3×3 单位矩阵， R 是这个误差角的协方差。由于 $\hat{\mathbf{h}}$ 在方程式 (57) 和 (58) 中等于零，状态更新由下式给出：

$$\hat{\mathbf{a}}(+) = \hat{\mathbf{a}}(-) + K_a[\tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{a}}(-)] = (\mathbf{I}_{3 \times 3} - K_a)\hat{\mathbf{a}}(-) + K_a\tilde{\mathbf{z}} \quad (59a)$$

和

$$\hat{\mathbf{b}}(+) = \hat{\mathbf{b}}(-) + K_b[\tilde{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{a}}(-)] \quad (59b)$$

其中

$$K_a = P_a(-)[P_a(-) + R]^{-1} \quad (60a)$$

和

$$K_b = P_c^T(-)[P_a(-) + R]^{-1} \quad (60b)$$

在测量模型方程式 (57) 中使用与重置中相同的三维参数化非常重要。例如，如果

$$\mathbf{a}_g(t) = 2 [\tilde{q} \otimes \hat{q}^{-1}(-)]_v / [\tilde{q} \otimes \hat{q}^{-1}(-)]_4 \quad (61)$$

如方程式 (35) 所示，则应使用方程式 (21d) 进行重置。或者，如果测量建模为误差四元数向量部分的 2 倍，则重置应使用方程式 (21b) 代替方程式 (21d)。有了这个前提，我们看到 $R \ll P_a(-)$ ，那么 K_a 进入 3×3 单位矩阵时，我们得到 $\hat{q}(+) = \tilde{q}$ 。

4 二阶滤波器

非线性卡尔曼滤波器中的二阶项在非线性质对测量和过程噪声项具有重要意义时会变得重要。根据 Maybeck 的观点 [4]，一个带有偏差修正项的一阶滤波器获得了二阶滤波器的基本好处，而无需额外的二阶矩计算的计算代价。该滤波器对状态传播和测量残差方程进行二阶修正，但对协方差和增益使用 EKF 表达式。

4.1 状态和协方差传播

状态估计传播由

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) + \hat{\mathbf{b}}_p(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (62)$$

其中传播偏差校正由以下方程式给出：

$$\hat{\mathbf{b}}_p(t) \equiv \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} P_{ij}(t) \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t)} \quad (63)$$

对于吉布斯向量参数化，方程式 (36)，(41) 和 (63) 给出

$$\hat{\mathbf{b}}_p(t) = \frac{1}{4} P_a \{ \hat{\omega}(t) - 2 [\dot{\hat{q}}(t) \otimes \hat{q}^{-1}(t)]_v \} + \omega_c(t) \quad (64)$$

其中 ω_c 有下面组成

$$[\omega_c(t)]_i \equiv \frac{1}{2} \{ [P_c(t)]_{kj} - [P_c(t)]_{jk} \} \quad (65)$$

其中 $\{i, j, k\}$ 是 $\{1, 2, 3\}$ 的循环排列。包括方程式 (36) 中的这个二阶项给出

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{a}}}_g(t) &= \left\{ \frac{1}{2} \bar{\omega}(t) \otimes \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_g(t) \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_g(t) \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \dot{\hat{q}}(t) \otimes \hat{q}^{-1}(t) \right\}_v \\ &+ \frac{1}{4} P_a \{ \hat{\omega}(t) - 2 [\dot{\hat{q}}(t) \otimes \hat{q}^{-1}(t)]_v \} \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \bar{\omega}(t) \otimes \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_g(t) \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_g(t) \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \dot{\hat{q}}(t) \otimes \hat{q}^{-1}(t) \right\}_4 \mathbf{a}_g(t) + \omega_c(t) \end{aligned} \quad (66)$$

$\hat{\mathbf{a}}_g(t)$ 和 $\dot{\hat{\mathbf{a}}}_g(t)$ 等于 0 的条件是

$$[\dot{\hat{q}}(t) \otimes \hat{q}^{-1}(t)]_v = \frac{1}{2} \left\{ \hat{\omega}(t) + \left[\mathbf{I}_{3 \times 3} + \frac{1}{4} P_a(t) \right]^{-1} \omega_c(t) \right\} \quad (67)$$

在附录中显示， $\left[\mathbf{I}_{3 \times 3} + \frac{1}{4} P_a(t) \right]^{-1}$ 的系数取决于旋转的三维参数化的具体选择。由于 $P_a(t)$ 和 ω_c 在估计误差中都是二阶的，用特征矩阵代替 $\left[\mathbf{I}_{3 \times 3} + \frac{1}{4} P_a(t) \right]$ 对二阶滤波器是一致的，给出

$$\dot{\hat{q}}(t) = \frac{1}{2} [\bar{\omega}(t) + \bar{\omega}_c(t)] \otimes \hat{q}(t) = \frac{1}{2} \Omega(\hat{\omega}(t) + \omega_c(t)) \hat{q}(t) \quad (68)$$

测量之间的时间传播由 EKF 改变，通过将二阶修正 ω_c 加到由姿态误差和陀螺漂移偏差之间的协方差的偏斜部分引起角速率向量的改变。这相当于 Vathsar 得出的结果 [17]。

4.2 测量更新和重置

在二阶滤波器中，预测测量 $\hat{\mathbf{z}}$ 的形式为

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{h}} + H_a \hat{\mathbf{a}}(-) + \hat{\mathbf{b}}_m(t) \quad (69)$$

其中测量偏差项由 [4] 给出

$$\hat{\mathbf{b}}_m(t) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} P_{ij}(t) \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t)} \quad (70)$$

利用方程式 (25) 将方程式 (48) 扩展到 \mathbf{a} 中的二阶，给出

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{v}_B) &= \mathbf{h}(\hat{\mathbf{v}}_B) \\ &+ \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\hat{\mathbf{v}}_B} \left\{ [\hat{\mathbf{v}}_B \times] \mathbf{a} + \frac{1}{2} (\mathbf{a} \mathbf{a}^T - a^2 \mathbf{I}_{3 \times 3}) \hat{\mathbf{v}}_B \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{h}(\mathbf{v})}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{\hat{\mathbf{v}}_B} ([\hat{\mathbf{v}}_B \times] \mathbf{a})_i ([\hat{\mathbf{v}}_B \times] \mathbf{a})_j \end{aligned} \quad (71)$$

将其代入方程式 (70) 中，利用 P_a 的对称性和混合二阶偏导数，以及测量不明确依赖于陀螺漂移偏差的事实，给出

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_m(t) &= \frac{1}{2} (\partial \mathbf{h} / \partial \mathbf{v}) \Big|_{\hat{\mathbf{v}}_B} [P_a - (\text{tr} P_a) \mathbf{I}_{3 \times 3}] \hat{\mathbf{v}}_B \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{h}(\mathbf{v})}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{\hat{\mathbf{v}}_B} ([\hat{\mathbf{v}}_B \times]^T P_a [\hat{\mathbf{v}}_B \times])_{ij} \end{aligned} \quad (72)$$

其中，tr 表示矩阵 trace。这一结果与 Vathsar 发现的测量偏差不同，Vathsar 的计算忽略了四元数范数约束。

现在考虑一个特殊情况，即姿态协方差 P_a 是单位矩阵的某个标量 p_a 倍数， $P_a = p_a \mathbf{I}_{3 \times 3}$ 。这个情况很有趣，因为卡尔曼滤波器通常是用这种形式的大数值协方差初始化的。我们要确保一个不切实际的大数值协方差不会破坏更新。在这种情况下

$$\hat{\mathbf{b}}_m(t) = p_a \left\{ -(\partial \mathbf{h} / \partial \mathbf{v}) \Big|_{\hat{\mathbf{v}}_B} \hat{\mathbf{v}}_B + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{h}(\mathbf{v})}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{\hat{\mathbf{v}}_B} [\hat{\mathbf{v}}_B^2 \delta_{ij} - (\hat{\mathbf{v}}_B)_i (\hat{\mathbf{v}}_B)_j] \right\} \quad (73)$$

现在考虑两种不同的恒星跟踪器测量模型。第一种是普通模型，

$$\mathbf{h}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} u_1 / u_3 \\ u_2 / u_3 \end{bmatrix} \quad (74)$$

其中

$$\mathbf{u} = B \mathbf{v}_B \quad (75)$$

是恒星跟踪器参考坐标系中恒星的单位向量，该坐标系通过正交变换矩阵 B 从航天器机体坐标系旋转而来。测量灵敏度矩阵为

$$H_a = \frac{1}{u_3^2} \begin{bmatrix} u_3 & 0 & -u_2 \\ 0 & u_3 & -u_1 \end{bmatrix} [\mathbf{u} \times] B \quad (76)$$

方程式 (73) 中的第一项用于二阶测量偏差消除，第二项下式给出

$$\hat{\mathbf{b}}_m(t) = p_a (1 + \hat{h}^2) \hat{\mathbf{h}} \quad (77)$$

第二种测量模型是线性的：

$$\mathbf{h}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (78)$$

这种测量模型的测量灵敏度矩阵是

$$H_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} [\mathbf{u} \times] B \quad (79)$$

在这种情况下，方程式 (73) 中的第二项用于 $\hat{\mathbf{b}}_m(t)$ 的消除，第一项下式给出

$$\hat{\mathbf{b}}_m(t) = -p_a \hat{\mathbf{h}} \quad (80)$$

这两个测量模型给出了相同数量级但符号相反的测量偏差。对于大于通常的 0.01 弧度 (radian) 或 0.573° 的恒星跟踪器初始化误差，对预测测量值的修正为前导项 $\hat{\mathbf{h}}$ 的 0.1%。

因为给卡尔曼滤波器输入的四元数测量值在三维姿态参数向量中是线性的，因此在这种情况下，测量偏差 $\hat{\mathbf{b}}_m(t)$ 恒等为零。此外，由于方程式 (21a) 与 \mathbf{a} 的所有阶数都精确，因此二阶滤波器的重置与 EKF 相同。

5 总结

本文的主要成果是澄清了被广泛使用的乘法扩展卡尔曼滤波器 (MEKF) 中姿态四元数表示与姿态误差三元表示之间的关系。我们将此滤波器视为基于以参考四元数表示的姿态的明显冗余表示和指定姿态与参考偏差的 3 分量向量。通过约束参考四元数，消除了这种明显的冗余，使姿态偏差的 3 分量向量的期望值为零。因此，不需要计算相同的零期望值。乘法扩展卡尔曼滤波器 (MEKF) 的基本结构是这样约束参考四元数：参考四元数成为姿态估计，姿态误差向量为 3 分量向量，其协方差的 3 分量向量为姿态协方差。所有这些结果在以前的实践中都是众所周知的，但是使用这种混合姿态表示的理由还不清楚。几种不同的三维参数化在线性扩展卡尔曼滤波器和二阶滤波器中给出了相同的结果，但在重置步骤中，它们在测量更新中的三阶不同。二阶传播和测量偏差很容易在这个坐标系中计算出来。

6 附录

我们不使用吉布斯向量，而是使用四元数的向量部分，如方程式 (21b) 所示。利用该参数化，方程式 (36) 替换为

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) &\equiv \dot{\mathbf{a}}_q(t) \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \bar{\omega}(t) \otimes \left[\frac{\mathbf{a}_q(t)}{\sqrt{4 - a_q^2(t)}} \right] - \left[\frac{\mathbf{a}_q(t)}{\sqrt{4 - a_q^2(t)}} \right] \otimes \dot{\hat{q}}(t) \otimes \hat{q}^{-1}(t) \right\}_v \end{aligned} \quad (81)$$

在方程式 (31) 的 EKF 近似值中，

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) = -\hat{\omega} \times \mathbf{a}_q(t) + \frac{1}{2} \sqrt{4 - a_q^2(t)} \Delta \hat{\omega}(t) - \frac{1}{2} \Delta \hat{\omega}(t) \times \mathbf{a}_q(t) \quad (82)$$

与方程式 (37) 中 \mathbf{a} 和 $\Delta \omega$ 中的二阶项相同。因此，EKF 传播和更新方程不变。用方程式 (63) 减去方程式 (81)，

$$\hat{\mathbf{b}}_p(t) = -\frac{1}{8}\text{tr}P_a(t) \left\{ \hat{\omega}(t) - 2 [\dot{\hat{q}}(t) \otimes \hat{q}^{-1}(t)]_v \right\} + \omega_c(t) \quad (83)$$

替换方程式 (64), 将方程式 (67) 改为

$$[\dot{\hat{q}}(t) \otimes \hat{q}^{-1}(t)]_v = \frac{1}{2} \left\{ \hat{\omega}(t) + \left[1 - \frac{1}{8}\text{tr}P_a(t) \right]^{-1} \omega_c(t) \right\} \quad (84)$$

方程式 (67) 和 (84) 一致, 前提是我们忽略 $P_a(t)$ 和 ω_c 的乘积。

7 REFERENCES

1. Kalman, R. E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," Transactions of the ASME, Series D, Journal of Basic Engineering, Vol. 82, pp. 35-45, 1960
2. Gelb, A., ed., Applied Optimal Estimation, Cambridge, MA, the MIT Press, 1974
3. Stengel, R. F., Optimal Control and Estimation, New York, Dover Publications, Inc., 1994
4. Maybeck, P. S., Stochastic Models, Estimation, and Control, Arlington, VA, Navtech Book and Software Store, 1994, see especially Volume 2, pp. 224-225 and p. 249
5. Farrell, J. L., "Attitude Determination by Kalman Filtering," Automatica, Vol. 6, pp. 419-430, 1970.
6. Pittelkau, M. E., "Spacecraft Attitude Determination Using the Bortz Equation," AAS Paper 01-310, AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Quebec City, Quebec, August 2001
7. Stuelpnagel, J., "On the Parameterization of the Three-Dimensional Rotation Group," SIAM Review, Vol. 6, No. 4, pp. 422-430, 1964
8. Bar-Itzhack, I. Y., and Oshman, Y., "Attitude Determination from Vector Observations: Quaternion Estimation," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-21, No. 1, pp. 128-135, 1985
9. Lefferts, E. J., Markley, F. L., and Shuster, M. D., "Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 5, No. 5, 1982, pp. 417-429.
10. Bar-Itzhack, I. Y., Deutschmann, J., and Markley, F. L., "Quaternion Normalization in Additive EKF for Spacecraft Attitude Determination," AIAA Paper 91-2706, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. New Orleans, LA, August 1991
11. Deutschmann, J., Markley, F. L., and Bar-Itzhack, I., "Quaternion Normalization in Spacecraft Attitude Determination," Flight Mechanics/Estimation Theory Symposium, NASA Conference Publication 3186, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, May 1992
12. Shuster, M. D., "The Quaternion in the Kalman Filter," Astrodynamics Astronautical Sciences, Vol. 85, pp. 25-37, 1993

13. Toda, N. F., Heiss, J. L., and Schlee, F. H., "SPARS: the System, Algorithm, and Test Results," Proceedings of the Symposium on Spacecraft Attitude Determination, Aerospace Corp. Report TR-0066 (5306)-12, Vol. 1, pp. 361-370, Sept.-Oct. 1969
14. Murrell, J. W., "Piecision Attitude Determination for Multimission Spacecraft," AIAA Paper 78-1248, AIAA Guidance and Control Conference, Palo Alto, CA, August 1978
15. Hamermesh, M., Group Theory and its Application to Physical Problems, Reading, MA, Addison-Wesley, 1962, Section 9-2
16. Curtis, M. L., Matrix Groups, 2nd ed., New York, NY, Springer-Verlag, 1984, Chapter 5
17. Vathsal, S., "Spacecraft Attitude Determination Using a Second-Order Nonlinear Filter," Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 10, No. 6, pp. 559-566, 1987
18. Wertz, J. R., ed., Spacecraft Attitude Determination and Control, Dordrecht, Holland, D. Reidel, 1978
19. Shuster, M. D., "A Survey of Attitude Representations," Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 41, No. 4, pp. 439-517, 1993
20. Euler, L., "Formulae Generales pro Trandlatione Quacunque Corporum Rigidorum," Novi Comment. Petrop., Vol. 20, pp. 189-207, 1775
21. Euler, L., "Problema Algebraicum Ob Affectiones Prorsus Singulares Memorabile," Novi Comment. Petrop., Vol. 15, Section 33, p. 101, 1770
22. Gauss, C. F., Werl, e, Vol. VIII, pp. 357-362, GOTtingen, KOnigliche Gesellschaft der Wissenschaften, 1900
23. Rodrigues, O., "Des lois géométriques qui régissent les déplacements d' un système solide dans l' espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire," Journal de Mathématiques, Vol. 5, pp. 380---440, 1840
24. Hamilton, W. R., "On Quaternions; or a New System of Imaginaries in Algebra," Philosophical Magazine, 3rd Series, Vol. 25, pp. 489-495, 1844
25. Altmann, S. L., "Hamilton, Rodrigues, and the Quaternion Scandal," Mathematics Magazine, Vol. 62, No. 5, pp. 291-3138, 1989
26. Gibbs, J. W., and Wilson, E. B., Vector Analysis, New York, NY, Scribner, 1901
27. Wiener, T. F., "Theoretical Analysis of Gimballess Inertial Reference Equipment Using Delta-Modulated Instruments," D. Sc. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, March 1962
28. Marandi, S. R., and Modi, V. J., "A Preferred Coordinate System and the Associated Orientation Representation in Attitude Dynamics," Acta Astronautica, Vol. 15, No. 11, pp. 833-843, 1987

29. Gray, C. W., "Star Tracker/IRU Attitude Determination Filter," Guidance and Control 2001, Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 105, Paper AAS 01-039
30. Markley, F.L., "Attitude Representations for Kalman Filtering," AAS Paper 01-309, AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Quebec City, Quebec, August 2001
31. Farrenkopf, R.L., "Analytic Steady-State Accuracy Solutions for Two Common Spacecraft Attitude Estimators," Journal of Guidance and Control, Vol. 1, No. 4, pp. 282-284, 1978
32. Markley, F. L. and Reynolds, R. G., "Analytic Steady-State Estimator," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Accuracy of a Spacecraft Attitude Vol. 23, No. 6, pp. 1065-1067, 2000
33. Chapel, J. D., and Kiessig, R., "A Lightweight, Low-Cost Star Camera Designed for Interplanetary Missions," Guidance and Control 1998, Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 98, Paper AAS 00-034
34. Maresi, L., Paulsea, T., Noteborn, R., Mikkelsen, O. and Nielsen, R., "The TERMA Star Tracker for the NEMO Satellite," Guidance and Control 2000, Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 104, Paper AAS 98-040
35. Shuster, M. D., "Maximum Likelihood Estimate of Spacecraft Sciences, Vol. 37, No. 1, January-March 1989, pp. 79-88
36. Markley, F. L. and Mortari, D., "Quaternion Attitude Estimation Using Vector Observations," of the Astronautical Sciences, Vol. 48, No. 2/3, April-Sept. 2000, pp. 359-380