

# Plücker 基向量

Roy Featherstone

15-19 May 2006

## 摘要

6-D 向量通常以 Plücker 坐标表示；然而，文献中几乎没有提到产生这些坐标的基向量。本文确定了 Plücker 基向量，并用它们来解释以下内容：6-D 向量与其 Plücker 坐标之间的关系，6-D 向量与用于定义它的一对 3-D 向量之间的关系，以及在移动的坐标系中区分 6-D 向量的正确方法。

## 1 简介

6-D 向量被用来描述刚体的运动和作用在它们身上的动力。因此，它们对于描述刚体系统的运动学和动力学非常有用，特别是对机器人机构。6-D 向量有多种形式，如运动旋量 (twists)、动力旋量 (wrenches)、矩量 (motors)、空间向量 (spatial vectors)、李代数 (Lie-algebra) 元素和 3-D 向量对的简单串联。例如，参见文献 [1]、[2]、[3]、[4]、[6]、[8]、[9]、[10]、[12]、[16]。几乎所有这样的向量都是用 Plücker 坐标表示的 — 这是 J. Plücker 在 1860s 发明的坐标系统 [11]。

线性代数的一个基本原则是，一个向量空间的坐标系统是由一个基定义的。因此，Plücker 坐标也必须由一个基来定义。然而，尽管 Plücker 坐标被广泛使用，但似乎几乎没有人提到产生它们的基向量。作者能找到的唯一例子是在文献 [4] 中描述的标准基。

基的作用是定义坐标和它们所表示的向量之间的关系。如果没有对 Plücker 基向量的明确定义，就无法清楚地描述 Plücker 坐标与其表示的 6-D 向量之间的关系。这偶尔会导致对 6-D 向量的真实性质的混淆，最近关于 6-D 加速度向量定义的争论就证明了这一点 [5], [7], [13], [14], [15]。有一种倾向是把 6-D 向量看作是 3-D 向量的有序对，但该模型不准确，因为它没有适当考虑参考点的作用。

本文的主要贡献如下：定义了 Plücker 基向量；它解释了 Plücker 坐标向量与其表示的 6-D 向量之间的关系；它解释了一个 6-D 向量和定义它的两个 3-D 向量之间的关系；并以加速度为例，说明了如何在移动的 Plücker 坐标系统中区分 6-D 向量。为了具体的阐述，本文使用了空间向量的符号和术语；但结果通常适用于任意使用 Plücker 坐标表示的 6-D 向量。

本文的其余部分组织如下。首先，描述了 Plücker 基向量。然后讨论了对偶坐标系统的主题。这与那些 6-D 向量形式有关，在这些形式中，动力向量被视为占据与运动向量不同的向量空间。接下来，引入了一种方便的算子符号，它允许我们表示和操纵坐标向量与其表示的向量之间的映射，这些映射由基向量确定。然后，本文继续研究空间向量和用于定义它们的欧几里德向量对之间关系的性质。最后，解释了在移动的 Plücker 坐标系统中的微分方法，并用结果阐明 6-D 加速度向量的竞争定义之间的关系。

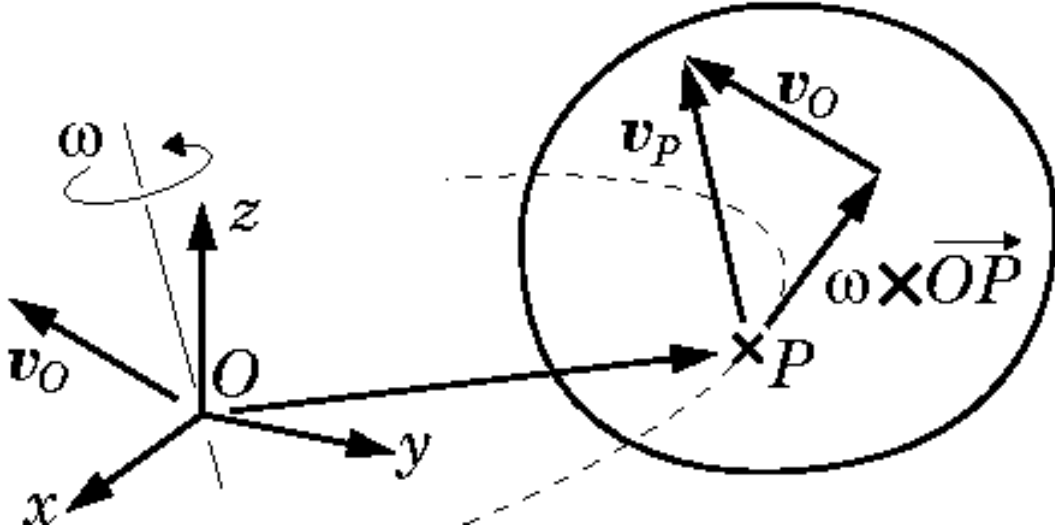


图 1: 刚体速度

## 2 Plücker 基向量

不同种类的向量属于不同的向量空间。因此，我们首先定义向量空间  $E^n$  和  $R^n$ ，分别代表  $n$  维欧几里德向量和坐标向量。 $E^n$  的元素具有大小和方向的属性，而  $R^n$  的元素是  $n$  个实数的元组。

空间向量不是欧几里德向量，因此不属于  $E^6$ 。此外，在描述刚体运动的向量和描述作用在其上的动力的向量之间保持区别是有用的。因此，我们定义两个向量空间， $M^6$  和  $F^6$ ，一个用于空间运动向量，一个用于空间动力向量。 $M^6$  的元素描述速度、加速度、运动自由度的方向等等。 $F^6$  的元素描述动力、动量、冲量等等。

空间向量通常由一对 3-D 欧几里德向量构成。现在让我们检查一下这是如何做到的。特别是，让我们检查速度向量和动力向量的构造。

参考图 1，刚体的速度可以由一对向量指定， $\omega, v_O \in E^3$ ，其中在底层物理空间中， $\omega$  是整个物体的角速度，并且  $v_O$  是通过任意给定点  $O$  的物体固连点的线速度。这两个向量所描述的刚体速度是纯旋转和纯平移的总和，其中物体以角速度  $\omega$  围绕通过  $O$  的轴旋转，并且纯平移由  $v_O$  给出。这可以从公式中看出

$$v_P = v_O + \omega \times \overrightarrow{OP}, \quad (1)$$

式中给出了物体在  $P$  的固连点的速度。右侧是由于整个刚体平移  $v_O$  而产生的一个分量，以及由于刚体绕通过  $O$  的轴旋转  $\omega$  而产生的一个分量之和。

观察这两个向量组合时的含义是如何变化的： $\omega$  本身是一个无实体的角速度，对于  $O$  的任意选择都是相同的，而  $v_O$  本身具体指的是物体中当前瞬间与  $O$  重合的一个点；但当我们两者结合起来时，他们所描述的刚体速度是专门围绕通过  $O$  的轴旋转的总和，以及一个纯平移，其中物体中的每个点都以速度  $v_O$  移动。

让我们引入一个笛卡尔坐标帧  $Oxyz$ ，其原点为  $O$ 。该帧定义了三个相互垂直的方向， $x$ 、 $y$  和  $z$ 。这些方向允许我们定义正交基，

$$C = \{i, j, k\} \subset E^3, \quad (2)$$

其中单位向量  $i$ 、 $j$  和  $k$  分别指向  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向。该基在  $E^3$  上形成笛卡尔坐标系，因此  $\omega$  和

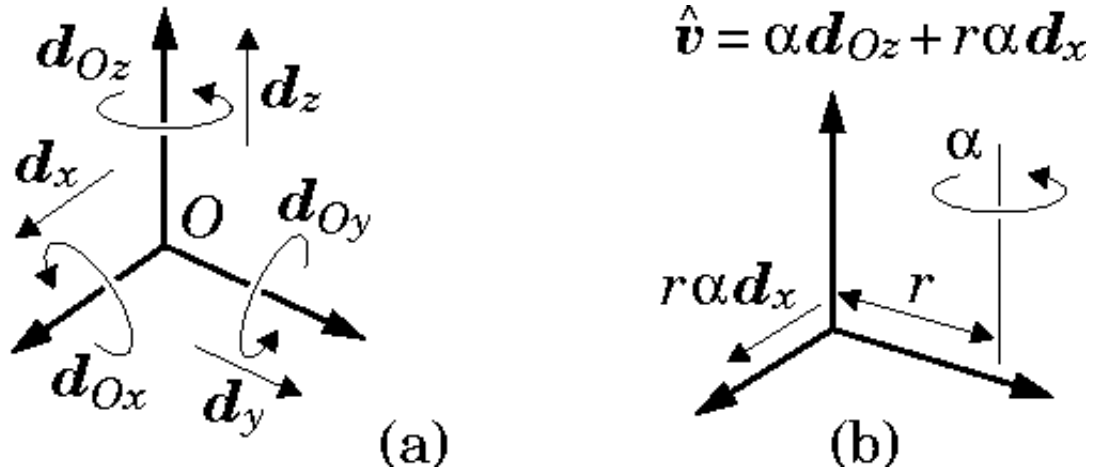


图 2: Plücker 运动基 (a), 以及示例 (b)。

$\mathbf{v}_O$  可以用笛卡尔坐标表示:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} \quad (3)$$

并且

$$\mathbf{v}_O = v_{Ox} \mathbf{i} + v_{Oy} \mathbf{j} + v_{Oz} \mathbf{k}. \quad (4)$$

我们现在可以说, 欧几里德向量  $\boldsymbol{\omega}$  和  $\mathbf{v}_O$  由坐标向量<sup>1</sup>  $\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$  和  $\underline{\mathbf{v}}_O = \begin{bmatrix} v_{Ox} & v_{Oy} & v_{Oz} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$  表示, 分别位于基  $\mathcal{C}$  定义的坐标系中。

众所周知, 这 6 个数字  $\omega_x, \dots, v_{Oz}$  是空间向量<sup>2</sup>  $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{M}^6$  的 Plücker 坐标, 它表示与两个 3D 向量  $\boldsymbol{\omega}$  和  $\mathbf{v}_O$  相同的刚体速度。为了建立  $\hat{\mathbf{v}}$  与其坐标之间的关系, 我们在  $\mathbb{M}^6$  上定义了以下基:

$$\mathcal{D}_O = \{\mathbf{d}_{Ox}, \mathbf{d}_{Oy}, \mathbf{d}_{Oz}, \mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y, \mathbf{d}_z\} \subset \mathbb{M}^6, \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{d}_{Ox}$ 、 $\mathbf{d}_{Oy}$  和  $\mathbf{d}_{Oz}$  是围绕有向线  $Ox$ 、 $Oy$  和  $Oz$  (分别在  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向通过  $O$ ) 的单位旋转,  $\mathbf{d}_x$ 、 $\mathbf{d}_y$  和  $\mathbf{d}_z$  是在  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向的单位平移 (参见图 2(a))。因此, 如果物体以  $\alpha$  幅值的角速度围绕  $Ox$  旋转, 那么它的空间速度将是  $\alpha \mathbf{d}_{Ox}$ 。同样, 如果物体以  $\mathbf{v}_O$  的线速度平移, 则其空间速度将为  $v_{Ox} \mathbf{d}_x + v_{Oy} \mathbf{d}_y + v_{Oz} \mathbf{d}_z$ 。注意此表达式与方程 (4) 中的表达式之间的差异: 前者是空间向量 (即  $\mathbb{M}^6$  的元素), 后者是欧几里德向量 ( $\mathbb{E}^3$  的元素)。第三个示例如图 2(b) 所示。该示例显示了围绕平行于  $z$  轴并通过点  $(0, r, 0)$  的轴的幅值  $\alpha$  旋转。该运动由空间向量  $\alpha \mathbf{d}_{Oz} + r\alpha \mathbf{d}_x$  表示。观察平移分量等于原点处的粒子以  $\alpha$  的角速度围绕  $(0, r, 0)$  旋转的速度。

通过检查可以看出, 空间向量

$$\hat{\mathbf{v}} = \omega_x \mathbf{d}_{Ox} + \omega_y \mathbf{d}_{Oy} + \omega_z \mathbf{d}_{Oz} + v_{Ox} \mathbf{d}_x + v_{Oy} \mathbf{d}_y + v_{Oz} \mathbf{d}_z \quad (6)$$

表示与上述两个向量  $\boldsymbol{\omega}$  和  $\mathbf{v}_O$  所描述的相同的刚体速度。因此, 我们可以得出结论,  $\mathcal{D}_O$  是引起在  $\mathbb{M}^6$  中与  $Oxyz$  相关联的 Plücker 坐标系统的基, 并且坐标向量

$$\underline{\hat{\mathbf{v}}}_O = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z & v_{Ox} & v_{Oy} & v_{Oz} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^6 \quad (7)$$

<sup>1</sup>坐标向量带有下列线, 以区分它们与它们所表示的向量。

<sup>2</sup>除基向量以外的空间向量用帽子符号标记。未标记的为基向量。

表示由基  $\mathcal{D}_O$  定义的在 Plücker 坐标系统中的空间向量  $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbf{M}^6$ 。方程 (7) 通常被写成以下形式

$$\hat{\mathbf{v}}_O = \begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ \underline{\mathbf{v}}_O \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中右侧是两个坐标向量  $\underline{\omega}$  和  $\underline{\mathbf{v}}_O$  的串联。

观察方程 (6) 中的下标模式。每个取决于  $O$  位置的量的下标中都包含一个  $O$ 。然而，请注意， $\mathbf{d}_{Ox}$  中的下标指的是直线  $Ox$ ，而  $\mathbf{v}_{Ox}$  中的下标实际上是两个在一起运行的下标，因为  $\mathbf{v}_{Ox}$  是  $\mathbf{v}_O$  的  $x$  坐标。尽管个别项可能会有不同，但可以证明方程 (6) 右侧的完整表达式对于  $Oxyz$  的位置和方向都是不变量。因此， $\hat{\mathbf{v}}$  是刚体速度的一个真正的不变量表示。

空间动力向量以类似的方式构造。作用在单个刚体上的任意作用力系统都等效于单个合力向量  $\mathbf{f}$ ，以及力矩向量  $\mathbf{n}_O$ ，其给出了动力系统关于任意给定点  $O$  的力矩。虽然  $\mathbf{f}$  本身与  $O$  无关，但它所表示的量是沿着穿过  $O$  的直线作用在刚体上的动力。

引入坐标帧  $Oxyz$  和基  $\mathcal{C}$ ，我们可以用笛卡尔坐标表示  $\mathbf{f}$  和  $\mathbf{n}_O$ ：

$$\mathbf{f} = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} \quad (9)$$

并且

$$\mathbf{n}_O = n_{Ox} \mathbf{i} + n_{Oy} \mathbf{j} + n_{Oz} \mathbf{k}. \quad (10)$$

如前所述，这 6 个数字  $n_{Ox}, \dots, f_z$  是空间动力向量  $\hat{\mathbf{f}} \in \mathbf{F}^6$  的 Plücker 坐标，表示与  $\mathbf{f}$  和  $\mathbf{n}_O$  相同的动力系统。为了建立  $\hat{\mathbf{f}}$  与其坐标之间的关系，我们在  $\mathbf{F}^6$  上定义以下基：

$$\mathcal{E}_O = \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{Ox}, \mathbf{e}_{Oy}, \mathbf{e}_{Oz}\} \subset \mathbf{F}^6, \quad (11)$$

其中， $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$  和  $\mathbf{e}_z$  是  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向上的单位力偶， $\mathbf{e}_{Ox}$ 、 $\mathbf{e}_{Oy}$  和  $\mathbf{e}_{Oz}$  是沿着  $Ox$ 、 $Oy$  和  $Oz$  直线的单位动力。通过检查，可以再次看到，空间向量

$$\hat{\mathbf{f}} = n_{Ox} \mathbf{e}_x + n_{Oy} \mathbf{e}_y + n_{Oz} \mathbf{e}_z + f_x \mathbf{e}_{Ox} + f_y \mathbf{e}_{Oy} + f_z \mathbf{e}_{Oz} \quad (12)$$

表示与两个向量  $\mathbf{f}$  和  $\mathbf{n}_O$  相同的动力系统。因此，我们可以得出结论， $\mathcal{E}_O$  是引起在  $\mathbf{F}^6$  中与  $Oxyz$  相关的 Plücker 坐标系统的基，并且坐标向量

$$\underline{\hat{\mathbf{f}}}_O = \begin{bmatrix} n_{Ox} & n_{Oy} & n_{Oz} & f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^6 \quad (13)$$

表示由基  $\mathcal{E}_O$  定义的在 Plücker 坐标系统中的空间向量  $\hat{\mathbf{f}} \in \mathbf{F}^6$ 。方程 (13) 可写成以下形式

$$\underline{\hat{\mathbf{f}}}_O = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{n}}_O \\ \underline{\mathbf{f}} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中，右侧是两个坐标向量  $\underline{\mathbf{n}}_O$  和  $\underline{\mathbf{f}}$  的串联。

### 3 对偶坐标系统

无论  $\mathbf{M}^6$  还是  $\mathbf{F}^6$  都没有在其元素上定义内积。相反，有一个标量积，它从每个空间中获取一个参数，并产生一个表示功的实数。因此，如果  $\hat{\mathbf{m}} \in \mathbf{M}^6$  和  $\hat{\mathbf{f}} \in \mathbf{F}^6$ ，则  $\hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{m}}$  是动力  $\hat{\mathbf{f}}$  作用在随着运动  $\hat{\mathbf{m}}$  移动的刚体上所做的功。为方便起见，我们将  $\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{f}}$  定义为与  $\hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{m}}$  相同的含义，但未定义  $\hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{f}}$  和  $\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{m}}$  的表达式。

设  $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_6\}$  是  $M^6$  上的任意基。对于  $\mathcal{D}$  的任意选择,  $F^6$  上存在唯一的基  $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_6\}$ , 其性质为

$$\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (15)$$

$\mathcal{E}$  是  $\mathcal{D}$  的对偶 (或互易) 基, 反之亦然。这对  $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$  可以称为对偶基对, 或者简单地称为对偶基。它定义了一个包含  $M^6$  和  $F^6$  的对偶坐标系统, 其中  $M^6$  的元素通过  $\mathcal{D}$  表示,  $F^6$  的元素通过  $\mathcal{E}$  表示。对偶坐标系统是欧几里德向量空间中笛卡尔坐标系统的空间-向量等价物。

在任意对偶坐标系统中, 以下方程成立:

$$\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{f}}, \quad (16)$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \hat{\mathbf{m}} = m_i \quad (17)$$

并且

$$\mathbf{d}_i \cdot \hat{\mathbf{f}} = f_i, \quad (18)$$

其中,  $\hat{\mathbf{m}}$  和  $\hat{\mathbf{f}}$  是坐标向量, 分别表示基  $\mathcal{D}$  和  $\mathcal{E}$  中的  $\hat{\mathbf{m}} \in M^6$  和  $\hat{\mathbf{f}} \in F^6$ , 并且  $m_i$  和  $f_i$  是单独的坐标。这些结果直接来自于方程 (15)。如果  $A$  和  $B$  是任意两个对偶坐标系统,  ${}^B\mathbf{X}_A^M$  是运动向量从  $A$  坐标到  $B$  坐标的坐标变换矩阵, 则动力向量的对应变换矩阵为

$${}^B\mathbf{X}_A^F = ({}^B\mathbf{X}_A^M)^{-T}. \quad (19)$$

该方程源自标量积的不变量性质, 对于所有的  $\hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{f}}, A$  和  $B$ , 可以表示为

$$\hat{\mathbf{m}}_A^T \hat{\mathbf{f}}_A = \hat{\mathbf{m}}_B^T \hat{\mathbf{f}}_B. \quad (20)$$

在方程 (5) 和 (11) 中的 Plücker 基满足方程 (15), 因此基对  $(\mathcal{D}_O, \mathcal{E}_O)$  在  $M^6$  和  $F^6$  上定义了一个对偶坐标系统。

可以按照不同的顺序写入  $\mathcal{D}_O$  的元素, 前提是对  $\mathcal{E}_O$  执行相同的操作。其结果是坐标向量中的坐标重新排序。例如, 我们可以将  $\mathcal{D}_O$  和  $\mathcal{E}_O$  重写为

$$\mathcal{D}_O = \{\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y, \mathbf{d}_z, \mathbf{d}_{Ox}, \mathbf{d}_{Oy}, \mathbf{d}_{Oz}\}$$

并且

$$\mathcal{E}_O = \{\mathbf{e}_{Ox}, \mathbf{e}_{Oy}, \mathbf{e}_{Oz}, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\},$$

在这种情况下, 表示  $\hat{\mathbf{v}}$  和  $\hat{\mathbf{f}}$  的坐标向量为

$$\hat{\mathbf{v}}_O = \begin{bmatrix} v_{Ox} & v_{Oy} & v_{Oz} & \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T$$

并且

$$\hat{\mathbf{f}}_O = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z & n_{Ox} & n_{Oy} & n_{Oz} \end{bmatrix}^T.$$

有些作者倾向于在方程 (7) 和 (13) 中线性项在角度项之前的排序, 而不是角度项在线性项之前的排序。借助于 Plücker 基, 就可以立即看出这两种排序的差异纯粹是表面的, 它们都表示相同的空间向量。

## 4 基映射

假设  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  是向量空间  $U$  上的基。给定  $\mathcal{B}$ ，我们可以表示任意向量  $\mathbf{u} \in U$  用形式

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i u_i,$$

其中， $u_i$  是  $\mathbf{u}$  在  $\mathcal{B}$  中的坐标。该方程也可以写成以下形式

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \mathcal{B} \underline{\mathbf{u}}, \quad (21)$$

其中， $\mathcal{B}$  是将坐标向量映射到它们在基  $\mathcal{B}$  中所表示的向量的算子。因此，我们将  $\mathcal{B}$  称为与  $\mathcal{B}$  相关的基映射。形式上， $\mathcal{B}$  是从  $\mathbb{R}^n$  到  $U$  的映射，定义如下：

$$\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \mapsto U : \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i u_i. \quad (22)$$

如果  $\mathcal{B}$  被写成一个  $1 \times n$  的基向量数组，如方程 (21) 所示，那么  $\mathcal{B}$  对  $\underline{\mathbf{u}}$  的作用可以理解为二者之间形式的矩阵乘法的结果。

$\mathcal{B}$  是  $1:1$  映射，并因此是可逆的；所以必须存在一个逆映射， $\mathcal{B}^{-1}$ ，满足  $\underline{\mathbf{u}} = \mathcal{B}^{-1} \mathbf{u}$ 。 $\mathcal{B}^{-1}$  的形式表达式可以表示为

$$\mathcal{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^* \cdot \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n^* \cdot \end{bmatrix}, \quad (23)$$

其中  $\{\mathbf{b}_1^*, \dots, \mathbf{b}_n^*\}$  是  $\mathcal{B}$  的对偶基，并且  $\mathbf{b}_i^* \cdot$  是将任意向量  $\mathbf{u} \in U$  映射到标量  $\mathbf{b}_i^* \cdot \mathbf{u}$  的算子。展开  $\mathcal{B}^{-1} \mathcal{B}$  给出为

$$\mathcal{B}^{-1} \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^* \cdot \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n^* \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^* \cdot \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_1^* \cdot \mathbf{b}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}_n^* \cdot \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n^* \cdot \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$$

其中由于互易条件方程 (15)，它等于单位矩阵。值得关注的特殊情况为：

$$\mathcal{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} \cdot \\ \mathbf{j} \cdot \\ \mathbf{k} \cdot \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathcal{D}_O^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \cdot \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{Oz} \cdot \end{bmatrix} \quad (25)$$

和

$$\mathcal{E}_O^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{Ox} \cdot \\ \vdots \\ \mathbf{d}_z \cdot \end{bmatrix}. \quad (26)$$

基映射为表达向量之间的关系提供了一个简单但强大的工具。为了说明它们的用法，考虑在两个坐标系  $A$  和  $B$  之间制订变换矩阵的任务。设  $\underline{u}_A$  和  $\underline{u}_B$  为在  $A$  和  $B$  坐标中表示向量  $\mathbf{u} \in U$  的坐标向量。如果  ${}^B\mathbf{X}_A$  是从  $A$  到  $B$  的坐标变换矩阵，则我们有

$$\underline{u}_B = {}^B\mathbf{X}_A \underline{u}_A.$$

然而，如果  $\mathcal{B}_A$  和  $\mathcal{B}_B$  是  $A$  和  $B$  的基映射，则我们也有

$$\underline{u}_B = \mathcal{B}_B^{-1} \mathbf{u} = \mathcal{B}_B^{-1} \mathcal{B}_A \underline{u}_A,$$

所以

$${}^B\mathbf{X}_A = \mathcal{B}_B^{-1} \mathcal{B}_A.$$

展开此方程得到

$$\begin{aligned} {}^B\mathbf{X}_A &= \mathcal{B}_B^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{A1} & \cdots & \mathbf{b}_{An} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{B}_B^{-1} \mathbf{b}_{A1} & \cdots & \mathcal{B}_B^{-1} \mathbf{b}_{An} \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

但是  $\mathcal{B}_B^{-1} \mathbf{b}_{Ai}$  只是在  $B$  坐标中表示  $\mathbf{b}_{Ai}$  的坐标向量，因此我们可以得出结论， ${}^B\mathbf{X}_A$  是一个方阵，其列是新的坐标系统中旧基向量的坐标。(这是一个标准结果。问题的关键点在于可以获得它的速度。)

## 5 空间向量与欧几里德向量之间的关系

让我们检查空间向量和用于定义它的一对欧几里德向量之间的关系。如果我们将  $\mathcal{D}_O$  划分为两个子基， $\mathcal{D}_O^{rot} = \{\mathbf{d}_{Ox}, \mathbf{d}_{Oy}, \mathbf{d}_{Oz}\}$  和  $\mathcal{D}_O^{lin} = \{\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y, \mathbf{d}_z\}$ ，则方程 (6) 可以写成如下：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}} &= \mathcal{D}_O^{rot} \underline{\omega} + \mathcal{D}_O^{lin} \underline{v}_O \\ &= \mathcal{D}_O^{rot} \mathcal{C}^{-1} \omega + \mathcal{D}_O^{lin} \mathcal{C}^{-1} v_O \\ &= \mathbf{Rot}_O^M \omega + \mathbf{Lin}^M v_O, \end{aligned} \tag{27}$$

其中

$$\mathbf{Rot}_O^M = \mathcal{D}_O^{rot} \mathcal{C}^{-1} = \mathbf{d}_{Ox} \mathbf{i} \cdot + \mathbf{d}_{Oy} \mathbf{j} \cdot + \mathbf{d}_{Oz} \mathbf{k} \cdot \tag{28}$$

并且

$$\mathbf{Lin}^M = \mathcal{D}_O^{lin} \mathcal{C}^{-1} = \mathbf{d}_x \mathbf{i} \cdot + \mathbf{d}_y \mathbf{j} \cdot + \mathbf{d}_z \mathbf{k} \cdot. \tag{29}$$

像  $\mathbf{d}_{Ox} \mathbf{i} \cdot$  这样的表达式是将欧几里德向量映射到空间运动向量的二元关系。 $\mathbf{d}_{Ox} \mathbf{i} \cdot$  将任意向量  $\mathbf{v} \in E^3$  映射到  $\mathbf{d}_{Ox}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{d}_{Ox} v_x \in M^6$ ，以此类推。因此，算子  $\mathbf{Rot}_O^M$  和  $\mathbf{Lin}^M$  都是并矢 (二元关系之和)。 $\mathbf{Rot}_O^M$  将欧几里德向量映射到围绕通过  $O$  的轴的纯旋转集合； $\mathbf{Lin}^M$  将欧几里德向量映射到纯平移集合。可以看出， $\mathbf{Rot}_O^M$  和  $\mathbf{Lin}^M$  都与产生基  $\mathcal{C}$  和  $\mathcal{D}_O$  的坐标帧  $Oxyz$  的方向无关。此外， $\mathbf{Lin}^M$  也与  $O$  的位置无关。因此， $\mathbf{Lin}^M$  是一个不变量张量，而  $\mathbf{Rot}_O^M$  仅取决于  $O$  的位置。

可以对动力向量执行类似的分析：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}} &= \mathcal{E}_O^{rot} \underline{n}_O + \mathcal{E}_O^{lin} \underline{f} \\ &= \mathcal{E}_O^{rot} \mathcal{C}^{-1} \mathbf{n}_O + \mathcal{E}_O^{lin} \mathcal{C}^{-1} \mathbf{f} \\ &= \mathbf{Rot}_O^F \mathbf{n}_O + \mathbf{Lin}_O^F \mathbf{f}, \end{aligned} \tag{30}$$

其中

$$\mathbf{Rot}^F = e_x \mathbf{i} \cdot + e_y \mathbf{j} \cdot + e_z \mathbf{k} \cdot \quad (31)$$

并且

$$\mathbf{Lin}_O^F = e_{Ox} \mathbf{i} \cdot + e_{Oy} \mathbf{j} \cdot + e_{Oz} \mathbf{k} \cdot. \quad (32)$$

将  $\boldsymbol{\omega}$ 、 $\mathbf{v}_O$ 、 $\mathbf{n}_O$  和  $\mathbf{f}$  描述为  $\hat{\mathbf{v}}$  和  $\hat{\mathbf{f}}$  的角度和线性分量是不准确的。然而，可以把它们看作由基张量  $\mathbf{Rot}_O^M$ 、 $\mathbf{Lin}_O^M$ 、 $\mathbf{Rot}^F$  和  $\mathbf{Lin}_O^F$  定义的坐标系统中  $\hat{\mathbf{v}}$  和  $\hat{\mathbf{f}}$  的向量-值坐标。

总之，从  $E^3 \times E^3$  到  $M^6$  或  $F^6$  的映射由一对并矢张量完成，其中一个是不变量，而另一个是参考点位置  $O$  的函数，在指定两个欧几里德向量时使用。

## 6 微分

设  $\mathbf{u}(t)$  是实变量  $t$  的向量-值的可微函数。 $\mathbf{u}$  对  $t$  的导数本身就是一个向量，并给出为

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t + \delta t) - \mathbf{u}(t)}{\delta t}. \quad (33)$$

该方程对任意变量  $t$  都有效；但我们将下面假设  $t$  标志时间，并且我们将使用标准的点符号表示时间导数 ( $d\mathbf{u}/dt = \dot{\mathbf{u}}$ ，等等)。

方程 (33) 适用于所有向量，包括坐标向量。因此，坐标向量的导数是其分量形式的导数：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \begin{bmatrix} u_1(t + \delta t) - u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t + \delta t) - u_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{bmatrix}. \quad (34)$$

设  $\mathcal{B}$  是  $U$  上的一个基，并设  $\underline{\mathbf{u}}$  是在  $\mathcal{B}$  坐标中表示向量  $\mathbf{u} \in U$  的坐标向量。 $\underline{\mathbf{u}}$  和  $\mathbf{u}$  的导数分别是  $\dot{\underline{\mathbf{u}}}$  和  $\dot{\mathbf{u}}$ ，但在  $\mathcal{B}$  中表示  $\dot{\mathbf{u}}$  的坐标向量是  $\mathcal{B}^{-1}\dot{\mathbf{u}}$ 。 $\dot{\underline{\mathbf{u}}}$  和  $\mathcal{B}^{-1}\dot{\mathbf{u}}$  之间的关系给出为

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{-1}\dot{\mathbf{u}} &= \mathcal{B}^{-1} \left( \frac{d}{dt} (\mathcal{B}\underline{\mathbf{u}}) \right) \\ &= \mathcal{B}^{-1} (\mathcal{B}\dot{\underline{\mathbf{u}}} + \dot{\mathcal{B}}\underline{\mathbf{u}}) \\ &= \dot{\underline{\mathbf{u}}} + \mathcal{B}^{-1}\dot{\mathcal{B}}\underline{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (35)$$

这是移动坐标系中微分的一般公式。如果坐标系是静止的，则  $\dot{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$  并且  $\mathcal{B}^{-1}\dot{\mathbf{u}} = \dot{\underline{\mathbf{u}}}$ 。

展开  $\mathcal{B}^{-1}\dot{\mathcal{B}}$  项，给出为

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{-1}\dot{\mathcal{B}} &= \mathcal{B}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{b}_1 & \cdots & \dot{b}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{B}^{-1}\dot{b}_1 & \cdots & \mathcal{B}^{-1}\dot{b}_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

这是一个方阵，其列是基向量导数的坐标。有三种特殊情况特别令人感兴趣。如果  $\mathcal{C}$ 、 $\mathcal{D}_O$  和  $\mathcal{E}_O$  是从以  $\hat{\mathbf{v}}$  速度 (坐标向量  $\hat{\mathbf{v}}_O = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{\omega}}^T & \underline{\mathbf{v}}_O^T \end{bmatrix}^T$ ) 移动的坐标帧  $Oxyz$  导出的正交基和 Plücker 基，则

$$\mathcal{C}^{-1}\dot{\mathcal{C}} = \underline{\boldsymbol{\omega}} \times, \quad (36)$$

$$\mathcal{D}_O^{-1}\dot{\mathcal{D}}_O = \hat{\mathbf{v}}_O \times = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{\omega}} \times & \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{v}}_O \times & \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \end{bmatrix} \quad (37)$$



和

$$\mathcal{E}_O^{-1} \dot{\mathcal{E}}_O = \hat{\mathbf{v}}_O \times^* = \begin{bmatrix} \underline{\omega} \times & \underline{\mathbf{v}}_O \times \\ \mathbf{0} & \underline{\omega} \times \end{bmatrix}, \quad (38)$$

其中,  $\underline{\omega} \times$  是  $3 \times 3$  矩阵, 该矩阵将 3D 坐标向量  $\underline{\mathbf{u}}$  映射到叉积  $\underline{\omega} \times \underline{\mathbf{u}}$ , 并且  $\hat{\mathbf{v}}_O \times$  和  $\hat{\mathbf{v}}_O \times^*$  是类似的空间-向量算子。 $\hat{\mathbf{v}}_O \times$  将一个运动向量映射到一个运动向量, 而  $\hat{\mathbf{v}}_O \times^*$  将一个动力向量映射到一个动力向量。 $\underline{\omega} \times$  由公式给出为

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

对于上述三种特殊情况, 方程 (35) 变为

$$\mathcal{C}^{-1} \dot{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}} + \underline{\omega} \times \underline{\mathbf{v}}, \quad (40)$$

$$\mathcal{D}_O^{-1} \dot{\hat{\mathbf{m}}} = \dot{\hat{\mathbf{m}}} + \hat{\mathbf{v}}_O \times \hat{\mathbf{m}} \quad (41)$$

和

$$\mathcal{E}_O^{-1} \dot{\hat{\mathbf{f}}} = \dot{\hat{\mathbf{f}}} + \hat{\mathbf{v}}_O \times^* \hat{\mathbf{f}}, \quad (42)$$

其中  $\underline{\mathbf{v}}$ 、 $\hat{\mathbf{m}}$  和  $\hat{\mathbf{f}}$  分别标志  $E^3$ 、 $M^6$  和  $F^6$  的一般元素。除了使用基映射符号外, 方程 (40) 是一个标准结果, 可以在许多教科书中找到。观察到, 我们只能使用一种微分算子来处理这个问题, 而不是通常使用的两种微分算子。这是因为基映射符号为我们提供了一个“表示... 的坐标向量”的符号。

## 7 加速度

关于  $O$  点的速度还没有说过。 $O$  点的作用是指定一个测量某物的点, 或者某物通过的点。因此, 像  $\underline{\mathbf{v}}_O$ 、 $\underline{\mathbf{n}}_O$ 、 $\underline{\mathbf{d}}_{Ox}$  等量都取决于  $O$  点的位置, 而不取决于其速度。因此, 在不影响空间向量定义的情况下, 可以将任意期望的速度指定给  $O$  点。然而, 如果  $O$  点的速度不为零, 则  $\mathcal{D}_O$  和  $\mathcal{E}_O$  是移动的基, 并且在区分空间向量时必须考虑这一点。

回到图 1, 假设我们让  $O$  跟踪移动物体中的一个点, 因此这两个点就永久重合。物体的速度仍然由两个欧几里德向量  $\underline{\omega}$  和  $\underline{\mathbf{v}}_O$  来表征; 它仍然有一个空间速度  $\hat{\mathbf{v}}$ , 如方程 (6) 所定义; 并且  $\hat{\mathbf{v}}$  仍将在  $\mathcal{D}_O$  坐标中由其坐标向量  $\hat{\mathbf{v}}_O$  表示, 如在方程 (7) 和 (8) 中所定义的。然而,  $O$  本身现在有一个  $\underline{\mathbf{v}}_O$  的速度, 并且  $Oxyz$  也是如此。

设  $\hat{\mathbf{v}}_{Oxyz}$  标志坐标帧的空间速度, 并且设  $\hat{\mathbf{v}}_{Oxyz}$  是在  $\mathcal{D}_O$  坐标中表示  $\hat{\mathbf{v}}_{Oxyz}$  的坐标向量。如果我们设置坐标帧的角速度为零, 则  $\hat{\mathbf{v}}_{Oxyz} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \underline{\mathbf{v}}_O^T \end{bmatrix}^T$ 。

刚体的加速度只是其速度的时间导数。因此, 图 1 中物体的空间加速度为  $\dot{\hat{\mathbf{v}}}$ , 在  $\mathcal{D}_O$  坐标中表示其加速度的坐标向量为  $\mathcal{D}_O^{-1} \dot{\hat{\mathbf{v}}}$ 。我们可以直接从方程 (41) 中获得  $\mathcal{D}_O^{-1} \dot{\hat{\mathbf{v}}}$  的表达式, 如下所示:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_O^{-1} \dot{\hat{\mathbf{v}}} &= \dot{\hat{\mathbf{v}}}_O + \hat{\mathbf{v}}_{Oxyz} \times \hat{\mathbf{v}}_O \\ &= \begin{bmatrix} \underline{\dot{\omega}} \\ \underline{\mathbf{v}}_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{v}}_O \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ \underline{\mathbf{v}}_O \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{\dot{\omega}} \\ \underline{\mathbf{v}}_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{v}}_O \times \underline{\omega} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (43)$$

在经典教科书处理中，刚体的加速度通常由角加速度向量  $\underline{\omega}$  和选定的物体固连点的线加速度  $\ddot{\mathbf{r}}$  定义，该点的位置由  $\mathbf{r}$  给出。如果我们将  $\mathbf{r}$  定义为  $O$  相对于某个固定基准点的位置，则  $\underline{\mathbf{v}}_O = \dot{\mathbf{r}}$  且  $\underline{\dot{\mathbf{v}}}_O = \ddot{\mathbf{r}}$ ，并且方程 (43) 变为

$$\mathcal{D}_O^{-1}\dot{\underline{\mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{\omega}} \\ \ddot{\mathbf{r}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{r}} \times \underline{\omega} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

右侧的第一项是刚体加速度经典描述中使用的两个向量的串联。由于这个原因，它有时被称为经典的或传统的加速度向量，以便将其与空间加速度区分开来。从方程 (43) 和 (44) 中可以看出，经典加速度向量与空间加速度的不同之处在于  $\begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & (\underline{\mathbf{v}}_O \times \underline{\omega})^T \end{bmatrix}^T$  项，这可归因于帧  $Oxyz$  的线速度。此外，经典加速度向量是空间速度向量在 Plücker 坐标系中的分量导数，该坐标系以  $\begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \underline{\mathbf{v}}_O^T \end{bmatrix}^T$  的速度移动。这与文献 [5] 中报告的结果基本相同。

如果没有 Plücker 基的帮助，这可能会产生以下错误论点：“欧几里德向量  $\underline{\omega}$  和  $\dot{\mathbf{r}}$  定义刚体的速度；坐标向量  $\underline{\omega}$  和  $\dot{\mathbf{r}}$  在基  $\mathcal{C} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  中表示  $\underline{\omega}$  和  $\dot{\mathbf{r}}$ ，这是不变量（因为  $Oxyz$  不旋转）；因此  $\underline{\dot{\omega}}$  和  $\ddot{\mathbf{r}}$  是表示  $\underline{\omega}$  和  $\dot{\mathbf{r}}$  的导数的坐标向量；所以  $\begin{bmatrix} \underline{\dot{\omega}}^T & \ddot{\mathbf{r}}^T \end{bmatrix}^T$  是代表加速度的坐标向量。”当我们引入 Plücker 基时，这个论点中的缺陷就显而易见了：从 Plücker 坐标到空间速度向量的映射是由基  $\mathcal{D}_O$  定义的，而不是  $\mathcal{C}$ ，并且如果  $O$  的速度不为零，则  $\mathcal{D}_O$  是一个时变坐标系，并且在执行微分时必须考虑到这一点。

## 8 结论

本文介绍了 Plücker 基的概念，以及一种算子符号，以明确表达一个基如何将坐标向量映射到它所表示的向量。利用这些工具，本文解释了以下内容：空间向量和定义它们的 3-D 向量对之间的精确关系；在移动的 Plücker 坐标系中区分空间向量的正确方法；以及为什么刚体加速度的经典描述不是空间速度的导数。

虽然本文是用空间向量的语言编写的，但这里报告的结果通常适用于任意以 Plücker 坐标表示的 6-D 向量。

## 9 References

1. E. J. Baker and K. Wohlhart. Motor Calculus: A New Theoretical Device for Mechanics. Graz, Austria: Institute for Mechanics, TU Graz, 1996. (English translation of [8] and [9].)
2. R. S. Ball. A Treatise on the Theory of Screws. London: Cambridge University Press, 1900. Republished 1998.
3. L. Brand. Vector and Tensor Analysis, 4th ed. New York/London: Wiley/Chapman and Hall, 1953.
4. R. Featherstone. Robot Dynamics Algorithms. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1987.
5. R. Featherstone. The Acceleration Vector of a Rigid Body. Int. J. Robotics Research, 20(11): 841-846, 2001.

6. O. Khatib. Inertial Properties in Robotic Manipulation: An Object-Level Framework. *Int. J. Robotics Research*, 14(1):19-36, 1995.
7. H. Lipkin. Time Derivatives of Screws with Applications to Dynamics and Stiffness. *Mechanism and Machine Theory*, 40(3):259-273, 2005.
8. R. von Mises. Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik [Motor Calculus: a New Theoretical Device for Mechanics], *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 4(2):155-181, 1924.
9. R. von Mises. Anwendungen der Motorrechnung [Applications of the Motor Calculus], *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 4(3):193-213, 1924.
10. R. M. Murray, Z. Li and S. S. Sastry. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation. Boca Raton, FL: CRC Press, 1994.
11. J. Plücker. Fundamental Views Regarding Mechanics. *Philosophical Transactions*, 156:361-380, 1866.
12. J. M. Selig. Geometrical Methods in Robotics. New York: Springer, 1996.
13. S. Stramigioli and H. Bruyninckx. Geometry of Dynamic and Higher-Order Kinematic Screws. *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Seoul, Korea, pp. 3344-3349, 2001.
14. K. Wohlhart. Time Derivatives of the Velocity Motor. *Proc. SYROM 2001*, Bucharest, Romania, vol. 2, pp. 371-376, 2001.
15. K. Wohlhart. Mises Derivatives of Motors and Motor Tensors. *Proc. RoManSy 2002*, Udine, Italy, pp. 87-98, 2002.
16. L. S. Woo and F. Freudenstein. Application of Line Geometry to Theoretical Kinematics and the Kinematic Analysis of Mechanical Systems. *Journal of Mechanisms*, 5:417-460, 1970.