

PX4 的 ECL EKF2 方程推导

Shuyong Chen

October 13, 2022

1 简介

PX4 的 ECL (Estimation and Control Library, 估计与控制库) 使用 EKF 对机体状态进行估计, 是一个很成熟很优秀的状态估计模块。因此在很多项目里面得到了广泛应用。但是, 对于 ECL EKF 里面的算法, 却很少有文档进行系统的总结, 而是散落在各个角落。而总结 ECL EKF 的算法, 也相当困难。如果直接看 C++ 代码, 则会被里面复杂庞大的计算式吓到。因为它的算法, 以前采用 matlab 描述, 后来采用 python 描述, C++ 代码则是由符号推导系统优化后的展开式。但是, matlab / python 描述的只是算法的主要部分, 有很多细节的处理, 还需要回头看 C++ 代码的部分。

本文试图对 ECL EKF 其中的主要算法做一个梳理。经验和学识不足, 难免有错漏。欢迎读者讨论和指正。

2 EKF 简单回顾

对于一个在状态空间描述的线性或者准线性系统, 状态 k 从 $k-1$ 的状态演变而来, 根据

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k$$

在这里,

- \mathbf{F}_k 是状态转换矩阵。对于简单的问题, 这个矩阵可以是一个常数, 但是对于大多数实际应用程序, 转换矩阵依赖于状态向量的值并每次迭代改变。
- \mathbf{G}_k 是应用于控制向量 \mathbf{u} 的控制输入模型。这可用于为系统的已知控制输入建模, 例如应用于机器人电机的电流、汽车方向盘的位置等。
- \mathbf{w}_k 是过程噪声, 假定从零均值多元正态分布 \mathcal{N} 中提取, 利用协方差矩阵 $\mathbf{Q}_k: \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_k)$ 。为这个矩阵确定一个合适的值是很棘手的, 并且在卡尔曼滤波器的文献中经常被忽视。

在时间 “ k ” 时刻, 一个真实状态的观测 (或测量) \mathbf{z}_k 根据

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

其中

- \mathbf{H}_k 是将状态空间映射到观测空间的观测模型。
- \mathbf{v}_k 是假设为零均值高斯协方差的观测噪声 $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_k)$

注意, \mathbf{H}_k 将状态向量映射到观测值, 而不是相反。这是因为 \mathbf{H}_k 通常是不可逆的, 也就是说, 它不提供对状态的直接可见性。

滤波器的状态由两个变量表示:

- $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$, 时间 k 的后验状态估计, 给出时间 k 之前 (包括该时间) 的观测值;
- $\mathbf{P}_{k|k}$, 后验误差协方差矩阵 (状态估计精度的度量)。

滤波器分两步工作:

- 一个时间更新 (预测) 步骤, 其中状态和协方差矩阵根据我们对系统动力学和误差特征的了解进行更新, 这些特征由 \mathbf{F} 和 \mathbf{Q} 矩阵建模。预测步骤不包括观察结果的影响。
- 一个测量更新 (校正) 步骤, 其中包括观测的影响, 以完善状态估计和协方差矩阵。这一步需要确定测量矩阵 \mathbf{H} 和 \mathbf{R} 矩阵。

预测和校正步骤的相应方程式如下:

预测		
1	预测 (先验) 状态估计	$\hat{\mathbf{x}}_{k k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1 k-1}$
2	预测 (先验) 估计协方差	$\mathbf{P}_{k k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1 k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k$

校正		
	新息或测量残差	$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k k-1}$
	新息 (或残差) 协方差	$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$
3	最佳卡尔曼增益	$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1}$
4	更新 (后验) 的状态估计	$\hat{\mathbf{x}}_{k k} = \hat{\mathbf{x}}_{k k-1} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k$
5	更新 (后验) 的协方差	$\mathbf{P}_{k k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k k-1}$

卡尔曼滤波实现的主要任务是利用系统动力学模型和测量模型, 提出状态转换矩阵 \mathbf{F} 、测量矩阵 \mathbf{H} 和系统噪声特性, 设计过程和测量噪声协方差矩阵。

对于 EKF 系统, 上述方程则增加了本地线性化的处理, 变化后的预测和校正步骤的相应方程式如下:

• 预测

- 预测 (先验) 状态估计

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \quad (1)$$

- 预测 (先验) 估计协方差

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^T \quad (2)$$

其中，状态转移矩阵 \mathbf{F}_k 为雅克比矩阵

$$\mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_k}$$

控制输入矩阵 \mathbf{G}_k 为雅克比矩阵

$$\mathbf{G}_k = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_k}$$

- 校正

- 新息或测量残差

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{z}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$$

- 新息 (或残差) 协方差

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$$

其中，观测矩阵 \mathbf{H}_k 为雅克比矩阵

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}$$

- 最佳卡尔曼增益

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \quad (3)$$

- 更新 (后验) 的状态估计

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k \quad (4)$$

- 更新 (后验) 的协方差

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} \quad (5)$$

对于 EKF，新增的任务就是计算状态转移矩阵 \mathbf{F} 、控制输入矩阵 \mathbf{G} 和测量矩阵 \mathbf{H} 的雅克比矩阵。

3 ECL EKF 所使用的传感器测量值

ECL EKF 具有不同的操作模式，以允许不同的传感器测量组合。滤波器在启动时会检查传感器的最小可行组合，并且在完成初始倾斜，偏航和高度对准之后，进入提供旋转，垂直速度，垂直位置，IMU 角度偏差和 IMU 速度偏差估计的模式。

此模式需要 IMU 数据，偏航数据源 (磁力计或外部视觉) 和高度数据源。该数据集是所有 EKF 运行模式的最低需求数据。在此基础上可以使用其它传感器数据来估计额外的状态变量。

3.1 IMU

与机体固连的三轴惯性测量单元 (IMU)，以最小 100Hz 的频率获取增量角度和增量速度数据。EKF 仅将 IMU 数据用于状态预测。在 EKF 推导中，IMU 数据不作为观测值使用。

3.2 磁力计

需要以最小 5Hz 的速度的三轴机体固连磁力计数据 (或外部视觉系统姿势数据)。磁力计数据可以用于两种方式:

- 使用倾角估计和磁偏角将磁力计测量值转换为偏航角。然后将该偏航角用作 EKF 的观察值。该方法精度较低并且不允许学习机体坐标系场偏移,但是它对于磁场异常和大的初置陀螺偏差更有鲁棒性。它是启动期间和在地面时的默认方法。
- XYZ 磁力计读数用作单独的观察值。该方法更精确并且允许学习机体坐标系场偏移,但是它假设地球磁场环境只会缓慢变化,并且当存在显着的外部磁场异常时表现较差。

3.3 高度

高度数据源 — 来自 GPS, 气压计, 测距仪或外部视觉设备, 需要最小频率为 5Hz。

如果不存在这些测量值, EKF 将无法启动。当检测到这些测量值时, EKF 将初始化状态并完成倾角和偏航对准。当倾角和偏航对齐完成后, EKF 可以转换到其它操作模式,从而可以使用其它传感器数据。

3.4 GPS

3.4.1 位置和速度测量

GPS 提供位置和速度测量。

3.4.2 偏航角测量

有一些全球定位系统接收器可用来提供一个偏航角测量,以取代磁强计数据的使用。在存在大型磁场异常的环境中工作时,或在高纬度地区,地球磁场具有很大的倾斜角时,这可能是一个重要的优势。

3.4.3 从 GPS 速度数据获取偏航角

EKF 在内部运行一个附加的多假设滤波器,它使用多个 3 参数状态 — 北/东向 (N/E) 的速度和偏航角 — 的扩展卡尔曼滤波器 (EKF)。然后使用高斯加和滤波器 (GSF) 合并这些偏航角的估计值。单个 3 参数状态的 EKF 使用了 IMU 和 GPS 水平速度数据 (加上可选的空速数据),而不依赖于事先对偏航角或磁强计测量有任何了解。这里提供了一个对于主滤波器的偏航角备份,当起飞后导航丢失,表明磁力计的偏航估计值不好时,它被用于重置主 EKF 滤波器的 24 参数状态的中的偏航数据。

这也使得 ECL 能够在没有任何磁力计、或没有双天线 GPS 接收器的情况下运行,并提供偏航数据,只要起飞后能够进行某种水平的移动,偏航数据就变得可观测。一旦机体完成了足够的水平移动,使偏航角可观测,24 参数的主 EKF 将使其偏航角与 GSF 的估计值对齐,并开始使用 GPS。

3.4.4 双 GPS 接收器

GPS 接收器提供的数据可以用基于所报告数据的精确度的加权算法混合 (如果两者都以相同的速度输出数据并使用相同的精确度, 这样做效果最好)。如果来自接收器的数据丢失, 该机制还提供了自动故障转移, (例如, 它允许使用标准 GPS 作为更精确的 RTK 接收器的备份)。

3.5 测距仪

测距仪的对地距离被用于一个单状态滤波器以估计地形相对于高度基准的垂直位置。如果在可用作零高度基准面的平面上操作, 则 EKF 也可以直接使用测距仪数据估算高度。

3.6 空速

当存在空速传感器并且飞机类型不是旋翼时, 将使用空速数据。

3.7 合成侧滑

固定翼平台可以利用假定的侧滑观测值为零来改进风速估计, 也可以在没有空速传感器的情况下进行风速估计。

3.8 基于阻力比力的多旋翼风场估计

多旋翼平台可以利用沿 X 和 Y 机体轴的空速和阻力之间的关系来估计风速的北/东分量。

3.9 光流

光流传感器依赖测距仪, 提供 xy 水平面的速度测量值。

3.10 外部视觉系统

外部视觉系统提供位置、速度和姿态测量。

3.11 测量值用途汇总

测量值	符号	单位	来源	最小频率	用途
角速度	ω	rad/s	IMU	100Hz	预测
加速度	\mathbf{a}	m/s^2	IMU	100Hz	预测
地球磁场	\mathbf{M}_{meas}	gauss	磁力计	5Hz	校正
距地高度	hagl	m	GPS/气压计/测距仪/外部视觉	5Hz	校正
速度测量	\mathbf{V}_{meas}	m/s	GPS/(光流 + 测距仪)/外部视觉	5Hz	校正
位置测量	\mathbf{P}_{meas}	m	GPS/外部视觉	5Hz	校正
偏航角测量	ψ	rad	GPS/磁力计/外部视觉	5Hz	校正
等效空速	airspeed	m/s	空速传感器		校正
合成侧滑	beta	rad	虚拟		校正
阻力比力	drag		虚拟		校正

根据前面的描述可知:

- ECL EKF2 最小传感器集合为: IMU, 偏航数据源和高度数据源。
- 机体的姿态变化由角速度驱动, 速度变化由加速度驱动, 这两者由 IMU 提供。
- 偏航测量值校正了在 xy 水平面上姿态, 高度测量值校正了 z 轴上的位置。有了这两者才能执行最基本的自动导航功能。
- 磁力计是最适合校正姿态的传感器, 也是最容易受到外界影响的传感器。气压计是最常见的测量高度的设备, 因为成本低廉。
- GPS 是多面手, 可以提供很多测量数据。所以如果不是成本受限, GPS 应该是无人机的标配设备。注意, GPS 的采样速率比较慢, 在 ECL 系统中假设其最小频率为 2Hz。
- 光流设备和外部视觉设备是最时髦的设备。但是应用效果还有待观察。
- ECL EKF2 做了很多数据质量检测判断。因此外接传感器的种类越多, 则容错率就越高。

4 ECL EKF 时间更新方程

4.1 状态向量

估计和控制库 (ECL) 使用扩展卡尔曼滤波算法 (EKF) 来处理传感器的测量信息, 并提供如下状态向量的估计值:

- 四元数定义从北, 东, 地 (NED) 局部地球坐标系到 X, Y, Z 机体坐标系的旋转
- IMU 的速度 — 北, 东, 地 (NED)(m/s)
- IMU 的位置 — 北, 东, 地 (NED)(m)
- IMU 增量角度偏差估计 — X, Y, Z(rad)
- IMU 增量速度偏差估计 — X, Y, Z(m/s)
- 地球磁场分量 — 北, 东, 地 (NED)(gauss)
- 飞行器机体坐标系磁场偏差 — X, Y, Z(gauss)
- 风速 — 北, 东 (NE)(m/s)

24 个状态的状态向量定义为:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T & \mathbf{V}_{NED}^T & \mathbf{P}_{NED}^T & \Delta\boldsymbol{\theta}_b^T & \Delta\mathbf{V}_b^T & \mathbf{M}_I^T & \mathbf{M}_B^T & \mathbf{V}_{wind}^T \end{bmatrix}^T$$

其中, 姿态四元数 \mathbf{q} , 用于定义 XYZ 机体坐标系相对于 NED 导航坐标系的角度位置, 我们用 \mathbf{q} 表示其向量部分,

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}$$

\mathbf{V}_{NED} 表示在 NED 坐标系的机体速度,

$$\mathbf{V}_{NED} = \begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix}$$

\mathbf{P}_{NED} 表示在 NED 坐标系的机体位置,

$$\mathbf{P}_{NED} = \begin{bmatrix} P_N \\ P_E \\ P_D \end{bmatrix}$$

$\Delta\theta_b$ 表示在 XYZ 机体坐标系的增量角度偏差 (bias),

$$\Delta\theta_b = \begin{bmatrix} \Delta\theta_{b_x} \\ \Delta\theta_{b_y} \\ \Delta\theta_{b_z} \end{bmatrix}$$

$\Delta\mathbf{V}_b$ 表示在 XYZ 机体坐标系的增量速度偏差 (bias),

$$\Delta\mathbf{V}_b = \begin{bmatrix} \Delta V_{b_x} \\ \Delta V_{b_y} \\ \Delta V_{b_z} \end{bmatrix}$$

\mathbf{M}_I 表示在 NED 坐标系的地球磁场向量, 简称地磁,

$$\mathbf{M}_I = \begin{bmatrix} M_N \\ M_E \\ M_D \end{bmatrix}$$

\mathbf{M}_B 表示在 XYZ 机体坐标系的磁场偏差 (bias),

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{bmatrix}$$

\mathbf{V}_{wind} 表示在 NED 坐标系的在北东 (NE) 方向上的风速,

$$\mathbf{V}_{wind} = \begin{bmatrix} V_{wind_N} \\ V_{wind_E} \end{bmatrix}$$

应用软件常用的数据输出有:

- 姿态输出。
- 速度输出。
- 位置输出。
- 风速输出。

注意：输出的数据项和状态向量中的数据不完全相同，而是使用输出互补滤波器进行校正的数据，参见文档 [12] 中的算法。

4.2 时间更新方程

4.2.1 旋转矩阵

从机体坐标系到导航坐标系的旋转矩阵根据姿态四元数 q 由以下方程给出：

$$\begin{aligned}
 [T]_B^N &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 \cdot q_2 - q_0 \cdot q_3) & 2(q_1 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_2) \\ 2(q_1 \cdot q_2 + q_0 \cdot q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_1) \\ 2(q_1 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_2) & 2(q_2 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 - 2q_2^2 - 2q_3^2 & 2(q_1 \cdot q_2 - q_0 \cdot q_3) & 2(q_1 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_2) \\ 2(q_1 \cdot q_2 + q_0 \cdot q_3) & 1 - 2q_1^2 - 2q_3^2 & 2(q_2 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_1) \\ 2(q_1 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_2) & 2(q_2 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_1) & 1 - 2q_1^2 - 2q_2^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

上面上下两个方程在数学上完全相等，但是第二个方程在符号推导系统中产生更简单且更数值稳定的计算式，因此 ECL EKF2 选择了第二个方程。

如果需要从导航坐标系到机体坐标系的旋转，将使用转置，并用 $[T]_N^B$ 表示：

$$[T]_N^B = \left([T]_B^N\right)^T = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

4.2.2 时间更新

IMU 传感器定时采样，采样间隔时间为 Δt ，获得角速度 ω 和加速度 \mathbf{a} 数据。所以我们得到增量角度的测量值为

$$\Delta \theta_{meas} = \omega \Delta t \quad (6)$$

还有增量速度的测量值为

$$\Delta \mathbf{V}_{meas} = \mathbf{a} \Delta t \quad (7)$$

已知陀螺仪的测量方差为 σ_{gyro}^2 ，加速计的测量方差为 σ_{accel}^2 。所以我们有增量角度的测量方差为

$$\sigma_{\Delta \theta}^2 = \sigma_{gyro}^2 \Delta t^2 \quad (8)$$

还有增量速度的测量方差为

$$\sigma_{\Delta \mathbf{V}}^2 = \sigma_{accel}^2 \Delta t^2 \quad (9)$$

根据 IMU 测量值 $\Delta\theta_{meas}$ 和增量角度偏差 $\Delta\theta_b$ 计算出真增量角度 $\Delta\theta_{truth}$:

$$\Delta\theta_{truth} = \Delta\theta_{meas} - \Delta\theta_b \quad (10)$$

增量四元数 Δq 定义了从第 k 时刻到第 $k+1$ 时刻四元数的旋转, 使用小角度近似从真增量角度 $\Delta\theta_{truth}$ 计算 (惯性导航采用其它精确方法计算):

$$\Delta q = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\Delta\theta_{truth}}{2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

从 k 时刻到 $k+1$ 时刻, 四元数乘积规则用于将姿态四元数的状态向前旋转增量四元数 Δq :

$$\begin{aligned} q_{k+1} &= q_k \cdot \Delta q \\ \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix} q_0\Delta q_0 - q_1\Delta q_1 - q_2\Delta q_2 - q_3\Delta q_3 \\ q_1\Delta q_0 + q_0\Delta q_1 - q_3\Delta q_2 + q_2\Delta q_3 \\ q_2\Delta q_0 + q_3\Delta q_1 + q_0\Delta q_2 - q_1\Delta q_3 \\ q_3\Delta q_0 - q_2\Delta q_1 + q_1\Delta q_2 + q_0\Delta q_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

根据 IMU 测量值 ΔV_{meas} 和增量速度偏差 ΔV_b 计算出真增量速度 ΔV_{truth} :

$$\Delta V_{truth} = \Delta V_{meas} - \Delta V_b \quad (13)$$

从 k 时刻到 $k+1$ 时刻, 将真增量速度向量 ΔV_{truth} 从机体坐标系旋转到地球坐标系, 并减去重力, 计算速度状态变化

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_{NED})_{k+1} &= (\mathbf{V}_{NED})_k + [T]_B^N \cdot \Delta \mathbf{V}_{truth} + \mathbf{g}_D \cdot \Delta t \\ \begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix}_k + [T]_B^N \cdot \Delta \mathbf{V}_{truth} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (14)$$

使用欧拉积分更新位置状态 (惯性导航使用更精确的梯形积分方法)

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_{NED})_{k+1} &= (\mathbf{P}_{NED})_k + (\mathbf{V}_{NED})_k \cdot \Delta t \\ \begin{bmatrix} P_N \\ P_E \\ P_D \end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix} P_N \\ P_E \\ P_D \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix}_k \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (15)$$

IMU 传感器的偏差、磁场和风速状态均采用静态过程模型:

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta_b \\ \Delta V_b \\ M_I \\ M_B \\ V_{wind} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \Delta\theta_b \\ \Delta V_b \\ M_I \\ M_B \\ V_{wind} \end{bmatrix}_k \quad (16)$$

自此, 已经完成预测 (先验) 状态估计的计算。接下来要进行预测 (先验) 估计协方差的计算。方程 (1) 可表示为:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k$$

其中，控制向量 \mathbf{u} ，也称干扰 (disturbance) 向量，为

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta\theta}^2 \\ \sigma_{\Delta V}^2 \end{bmatrix}$$

它是由惯性测量单元 (IMU) 的增量角度和增量速度的测量方差， $\sigma_{\Delta\theta}^2$ 和 $\sigma_{\Delta V}^2$ 所定义。在状态变量中消除偏差影响后，假设惯性解中的误差增长是由增量角度和增量速度中的“噪声”驱动的。这种方案是可行的，因为在状态方程中考虑了传感器偏差。方程 (2) 中的矩阵 \mathbf{Q} 为测量方差元素构成的对角线矩阵：

$$\mathbf{Q}_{6 \times 6} = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \sigma_{\Delta\theta}^2 \\ \sigma_{\Delta V}^2 \end{bmatrix} \right)$$

并且 $\mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T$ 被称为状态误差矩阵。

根据前面推导的第 $k+1$ 时刻的状态向量方程 (12)、(14)、(15) 和 (16)，分别对第 k 时刻的状态 \mathbf{x}_k 求 Jacobian 可得状态转换矩阵 \mathbf{F} 、控制 (干扰) 影响矩阵 \mathbf{G} 。

状态转换矩阵 \mathbf{F} 是一个 24×24 的稀疏矩阵：

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}_k} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{q_k}^{q_{k+1}} & 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 3} & \mathbf{F}_{\Delta\theta_b^k}^{q_{k+1}} & 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 2} \\ \mathbf{F}_{q_k}^{V_{k+1}} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \mathbf{F}_{\Delta V_b^k}^{V_{k+1}} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} \\ 0_{3 \times 4} & \mathbf{F}_{V_k}^{P_{k+1}} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

其中， $\mathbf{F}_{q_k}^{q_{k+1}}$ 、 $\mathbf{F}_{q_k}^{V_{k+1}}$ 、 $\mathbf{F}_{V_k}^{P_{k+1}}$ 、 $\mathbf{F}_{\Delta\theta_b^k}^{q_{k+1}}$ 、 $\mathbf{F}_{\Delta V_b^k}^{V_{k+1}}$ 这 5 个分块矩阵见下面的推导。

1. $\mathbf{F}_{q_k}^{q_{k+1}}$ 为关于四元数的状态转移矩阵，即 $k+1$ 时刻的旋转相对于 k 时刻的 Jacobian，大小为 4×4 ，根据方程 (11) 和 (12) 可得：

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{q_k}^{q_{k+1}} &= \frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_k} \\ &= \frac{\partial (q_k \cdot \Delta q)}{\partial q_k} \\ &= \frac{\partial \left(q_k + q_k \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Delta\theta_{truth}}{2} \end{bmatrix} \right)}{\partial q_k} \\ &= \mathbf{I}_{4 \times 4} + M \left(\frac{\Delta\theta_{truth}}{2} \right) \end{aligned}$$

其中, $M(\boldsymbol{\theta})$ 为 4×4 斜对称矩阵

$$M(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_x & -\theta_y & -\theta_z \\ \theta_x & 0 & \theta_z & -\theta_y \\ \theta_y & -\theta_z & 0 & \theta_x \\ \theta_z & \theta_y & -\theta_x & 0 \end{bmatrix}$$

该矩阵在四元数教材里又被称为 $\boldsymbol{\Omega}$ 矩阵, 出现在向量和四元数的乘积中

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\theta}^T \\ \boldsymbol{\theta} & -[\boldsymbol{\theta} \times] \end{bmatrix}$$

2. $\mathbf{F}_{q_k}^{V_{k+1}}$ 为速度关于四元数的状态转移矩阵, 即 $k+1$ 时刻的速度相对于 k 时刻的旋转的 Jacobian, 大小为 3×4 , 根据方程 (14) 可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{q_k}^{V_{k+1}} &= \frac{\partial \left((\mathbf{V}_{NED})_k + [\mathbf{T}]_B^N \cdot \Delta \mathbf{V}_{truth} + \mathbf{g}_D \cdot \Delta t \right)}{\partial q_k} \\ &= \frac{\partial \left([\mathbf{T}]_B^N \cdot \Delta \mathbf{V}_{truth} \right)}{\partial q_k} \\ &= \frac{\partial \left(\begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 \cdot q_2 - q_0 \cdot q_3) & 2(q_1 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_2) \\ 2(q_1 \cdot q_2 + q_0 \cdot q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_1) \\ 2(q_1 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_2) & 2(q_2 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_X \\ \Delta V_Y \\ \Delta V_Z \end{bmatrix} \right)}{\partial q_k} \\ &= \frac{\partial \left(\begin{bmatrix} (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) \Delta V_X + 2(q_1 \cdot q_2 - q_0 \cdot q_3) \Delta V_Y + 2(q_1 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_2) \Delta V_Z \\ 2(q_1 \cdot q_2 + q_0 \cdot q_3) \Delta V_X + (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) \Delta V_Y + 2(q_2 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_1) \Delta V_Z \\ 2(q_1 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_2) \Delta V_X + 2(q_2 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_1) \Delta V_Y + (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \Delta V_Z \end{bmatrix} \right)}{\partial q_k} \\ &= 2 \begin{bmatrix} q_0 \Delta V_X - q_3 \Delta V_Y + q_2 \Delta V_Z & q_1 \Delta V_X + q_2 \Delta V_Y + q_3 \Delta V_Z & -q_2 \Delta V_X + q_1 \Delta V_Y + q_0 \Delta V_Z & -q_3 \Delta V_X - q_0 \Delta V_Y + q_1 \Delta V_Z \\ q_3 \Delta V_X + q_0 \Delta V_Y - q_1 \Delta V_Z & q_2 \Delta V_X - q_1 \Delta V_Y - q_0 \Delta V_Z & q_1 \Delta V_X + q_2 \Delta V_Y + q_3 \Delta V_Z & q_0 \Delta V_X - q_3 \Delta V_Y + q_2 \Delta V_Z \\ -q_2 \Delta V_X + q_1 \Delta V_Y + q_0 \Delta V_Z & q_3 \Delta V_X + q_0 \Delta V_Y - q_1 \Delta V_Z & -q_0 \Delta V_X + q_3 \Delta V_Y - q_2 \Delta V_Z & q_1 \Delta V_X + q_2 \Delta V_Y + q_3 \Delta V_Z \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} (\Phi_1 \cdot \Delta \mathbf{V}_{truth})^T \\ (\Phi_2 \cdot \Delta \mathbf{V}_{truth})^T \\ (\Phi_3 \cdot \Delta \mathbf{V}_{truth})^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中,

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \\ -q_3 & -q_0 & q_1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_2 & -q_1 & -q_0 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \end{bmatrix}, \quad \Phi_3 = \begin{bmatrix} -q_2 & q_1 & q_0 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}$$

3. $\mathbf{F}_{V_k}^{P_{k+1}}$ 为位置关于速度的状态转移矩阵, 即 $k+1$ 时刻的位置相对于 k 时刻的速度的 Jacobian, 大小为 3×3 , 根据方程 (15) 可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{V_k}^{P_{k+1}} &= \frac{\partial \left((\mathbf{P}_{NED})_k + (\mathbf{V}_{NED})_k \cdot \Delta t \right)}{\partial (\mathbf{V}_{NED})_k} \\ &= \mathbf{I}_{3 \times 3} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

4. $\mathbf{F}_{\Delta\theta_b^k}^{q_{k+1}}$ 为四元数关于增量角度偏差的状态转移矩阵，即 $k+1$ 时刻的旋转相对于陀螺仪 k 时刻增量角度偏差的 Jacobian，大小为 4×3 ，根据方程 (10)、(11) 和 (12) 可得：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{\Delta\theta_b^k}^{q_{k+1}} &= \frac{\partial(q_k \cdot \Delta q)}{\partial(\Delta\theta_b)_k} \\
 &= \frac{\partial \left(q_k + q_k \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Delta\theta_{meas}}{2} \end{bmatrix} + q_k \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{(\Delta\theta_b)_k}{2} \end{bmatrix} \right)}{\partial(\Delta\theta_b)_k} \\
 &= \frac{\partial \left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1\Delta\theta_{b_x} - q_2\Delta\theta_{b_y} - q_3\Delta\theta_{b_z} \\ +q_0\Delta\theta_{b_x} - q_3\Delta\theta_{b_y} + q_2\Delta\theta_{b_z} \\ +q_3\Delta\theta_{b_x} + q_0\Delta\theta_{b_y} - q_1\Delta\theta_{b_z} \\ -q_2\Delta\theta_{b_x} + q_1\Delta\theta_{b_y} + q_0\Delta\theta_{b_z} \end{bmatrix} \right)}{\partial(\Delta\theta_b)_k} \\
 &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ +q_0 & -q_3 & +q_2 \\ +q_3 & +q_0 & -q_1 \\ -q_2 & +q_1 & +q_0 \end{bmatrix} \\
 &= -\frac{1}{2} \Xi(q)
 \end{aligned}$$

矩阵 $\Xi(q)$ 出现在四元数与向量的乘法中

$$\Xi(q) = \begin{bmatrix} -\mathbf{q}^T \\ q_0 \mathbf{I}_{3 \times 3} + [\mathbf{q} \times] \end{bmatrix}$$

矩阵 Ξ 和 Ω 之间的关系为

$$\Omega(\theta)q = \Xi(q)\theta$$

5. $\mathbf{F}_{\Delta V_b^k}^{V_{k+1}}$ 为速度关于增量速度偏差的状态转移矩阵，即 $k+1$ 时刻的速度相对于加速度计 k 时刻增量速度偏差的 Jacobian，大小为 3×3 ，根据方程 (13) 和 (14) 可得：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{\Delta V_b^k}^{V_{k+1}} &= \frac{\partial \left((\mathbf{V}_{NED})_k + [\mathbf{T}]_B^N \cdot \Delta \mathbf{V}_{truth} + \mathbf{g}_D \cdot \Delta t \right)}{\partial(\Delta \mathbf{V}_b)_k} \\
 &= \frac{\partial \left((\mathbf{V}_{NED})_k + [\mathbf{T}]_B^N \cdot (\Delta \mathbf{V}_{meas} - \Delta \mathbf{V}_b) + \mathbf{g}_D \cdot \Delta t \right)}{\partial(\Delta \mathbf{V}_b)_k} \\
 &= -[\mathbf{T}]_B^N
 \end{aligned}$$

控制 (干扰) 影响矩阵 \mathbf{G} 需要对增量角度和增量速度的测量值求偏导，因为测量值中包含有噪声。它是一个 24×6 的稀疏矩阵：

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} &= \frac{\partial \mathbf{x}_{k+1}}{\partial \mathbf{w}_k} \\
&= \frac{\partial \mathbf{x}_{k+1}}{\partial (\Delta \boldsymbol{\theta}_{meas}, \Delta \mathbf{V}_{meas})_k} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\Delta \theta_{meas}}^{q_{k+1}} & 0_{4 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \mathbf{G}_{\Delta V_{meas}}^{V_{k+1}} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

其中, $\mathbf{G}_{\Delta \theta_{meas}}^{q_{k+1}}$ 和 $\mathbf{G}_{\Delta V_{meas}}^{V_{k+1}}$ 这 2 个分块矩阵见下面的推导。

1. $\mathbf{G}_{\Delta \theta_{meas}}^{q_{k+1}}$ 为姿态四元数关于增量角度噪声的控制输入矩阵, 即 $k+1$ 时刻的旋转相对于陀螺仪 k 时刻增量角度噪声的协方差矩阵, 大小为 4×3 , 根据方程 (10)、(11) 和 (12) 可得:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{\Delta \theta_{meas}}^{q_{k+1}} &= \frac{\partial (q_k \cdot \Delta q)}{\partial (\Delta \boldsymbol{\theta}_{meas})_k} \\
&= \frac{\partial \left(q_k + q_k \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}_{meas}}{2} \end{bmatrix} + q_k \begin{bmatrix} 0 \\ -(\Delta \boldsymbol{\theta}_b)_k \end{bmatrix} \right)}{\partial (\Delta \boldsymbol{\theta}_{meas})_k} \\
&= \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 \Delta \theta_{meas_x} - q_2 \Delta \theta_{meas_y} - q_3 \Delta \theta_{meas_z} \\ +q_0 \Delta \theta_{meas_x} - q_3 \Delta \theta_{meas_y} + q_2 \Delta \theta_{meas_z} \\ +q_3 \Delta \theta_{meas_x} + q_0 \Delta \theta_{meas_y} - q_1 \Delta \theta_{meas_z} \\ -q_2 \Delta \theta_{meas_x} + q_1 \Delta \theta_{meas_y} + q_0 \Delta \theta_{meas_z} \end{bmatrix} \right)}{\partial (\Delta \boldsymbol{\theta}_{meas})_k} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ +q_0 & -q_3 & +q_2 \\ +q_3 & +q_0 & -q_1 \\ -q_2 & +q_1 & +q_0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Xi}(q)
\end{aligned}$$

2. $\mathbf{G}_{\Delta V_{meas}}^{V_{k+1}}$ 为速度关于增量速度噪声的控制输入矩阵, 即 $k+1$ 时刻的速度相对于加速度计 k 时刻增量速度噪声的协方差矩阵, 大小为 3×3 , 根据方程 (13) 和 (14) 可得:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{\Delta V_{meas}}^{V_{k+1}} &= \frac{\partial \left((\mathbf{V}_{NED})_k + [\mathbf{T}]_B^N \cdot \Delta \mathbf{V}_{truth} + \mathbf{g}_D \cdot \Delta t \right)}{\partial (\Delta \mathbf{V}_{meas})_k} \\
&= \frac{\partial \left((\mathbf{V}_{NED})_k + [\mathbf{T}]_B^N \cdot (\Delta \mathbf{V}_{meas} - \Delta \mathbf{V}_b) + \mathbf{g}_D \cdot \Delta t \right)}{\partial (\Delta \mathbf{V}_{meas})_k} \\
&= [\mathbf{T}]_B^N
\end{aligned}$$

最后, 为方程 (2) 中的协方差矩阵 \mathbf{P} 增加过程噪声 \mathbf{w} 。那些运动学的状态 (姿态 q 、速度 \mathbf{V}_{NED} 和位置 \mathbf{P}_{NED}), 它们的误差增长分别由 IMU 噪声方差控制, 已经在前面的方程中加入。对于其它静态过程模型的状态, 则用静态过程模型构造这些状态的过程噪声方差对角线, 24×24 的过程噪声矩阵为

$$\mathbf{w} = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 0_{4 \times 1} \\ 0_{3 \times 1} \\ 0_{3 \times 1} \\ \sigma_{\Delta\theta}^2 \\ \sigma_{\Delta V}^2 \\ \sigma_{M_I}^2 \\ \sigma_{M_B}^2 \\ \sigma_{V_{wind}}^2 \end{bmatrix} \right)$$

其中, 增量角度偏差和增量速度偏差的过程噪声方差, 同样采用增量角度的测量方差 $\sigma_{\Delta\theta}^2$ 和增量速度的测量方差 $\sigma_{\Delta V}^2$ 。地球磁场 M_I , 机体磁场偏差 M_B 和风速 V_{wind} 的过程噪声方差, $\sigma_{M_I}^2$ 、 $\sigma_{M_B}^2$ 和 $\sigma_{V_{wind}}^2$, 可由用户自行设定。

至此, 已经完成预测 (先验) 估计协方差的计算。

5 ECL EKF 测量更新方程

ECL EKF 算法最大的特点就是使用传感器组合进行状态估计。这样的好处是系统具有很高的容错性, 不管发生什么异常, 总是有方法进行数据校正。但是带来的问题就是算法复杂, 代码分支繁多, 很难把握, 更难调试。

该算法的第二个特点是将 xy 水平面和 z 轴方向的高度分开估计。这个估计是因为 GPS 的高度数据误差太大, 而高度数据源又很多, 这么处理可以提升高度数据的精度。

该算法的第三个特点是对所有的观测向量都是拆分为一维一维的数据进行校正。这是一种优化算法, 通过使用更多的运算步骤换取使用更少的栈空间。这对于 MCU 这种内存紧张的环境有好处。

5.1 磁力计融合

磁力计更新分为两种情况:

1. 用三轴磁力计的数据作为三维观测。
2. 直接将磁力计的数据转换为磁偏角作为一维观测。

第二种方法对于磁场异常和大的初置陀螺偏差更有鲁棒性。它是启动期间和在地面时的默认方法。第一种方法有更好的精度, 但是当存在显着的外部磁场异常时表现较差。

三轴磁场的更新根据是否有磁偏角的约束分为两个阶段。在初始化或差工况时, 先进行无磁偏角约束的磁力计融合阶段, 再进行有磁偏角约束的融合阶段; 好工况时则相反。下面 2 个小节分别进行这两个阶段的方程推导。第 3 小节进行一维观测的方程推导。

5.1.1 磁力计测量融合方程

无磁偏角约束的三轴磁场的融合阶段，不考虑磁偏角 $\psi_{DECLINATION}$ ，也就是假设地球的地理南北极与地磁南北极重合。

由磁力计测量的机体磁场强度为 \mathbf{M}_{meas} 。已知磁力计的测量方差为 \mathbf{R}_{MAG} 。

预测的机体磁场强度为 \mathbf{M}_{pred} ，由状态向量中的地球磁场 \mathbf{M}_I 旋转到机体轴得到：

$$\mathbf{M}_{pred} = \left([T]_B^N\right)^T \mathbf{M}_I + \mathbf{M}_B$$

$$\begin{bmatrix} M_{pred_X} \\ M_{pred_Y} \\ M_{pred_Z} \end{bmatrix} = \left([T]_B^N\right)^T \begin{bmatrix} M_N \\ M_E \\ M_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{bmatrix}$$

磁场观测矩阵 \mathbf{H}_{MAG} 是一个 3×24 的稀疏矩阵：

$$\mathbf{H}_{MAG} = \frac{\partial \mathbf{M}_{pred}}{\partial \mathbf{x}}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_q & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{H}_{M_I} & \mathbf{H}_{M_B} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \end{bmatrix}$$

其中， \mathbf{H}_q 、 \mathbf{H}_{M_I} 和 \mathbf{H}_{M_B} 这 3 个分块矩阵见下面的推导。

1. \mathbf{H}_q 为磁力计的观测相对于姿态四元数的观测矩阵，即磁场测量值相对于旋转的 Jacobian，大小为 3×4 ：

$$\mathbf{H}_q = \frac{\partial \mathbf{M}_{pred}}{\partial q}$$

$$= \frac{\partial \left(\left([T]_B^N\right)^T \mathbf{M}_I + \mathbf{M}_B \right)}{\partial q}$$

$$= \frac{\partial \left(\begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_N \\ M_E \\ M_D \end{bmatrix} \right)}{\partial q}$$

$$= \frac{\partial \left(\begin{bmatrix} (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) M_N + 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) M_E + 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) M_D \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) M_N + (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) M_E + 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) M_D \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) M_N + 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) M_E + (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) M_D \end{bmatrix} \right)}{\partial q}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} q_0 M_N + q_3 M_E - q_2 M_D & q_1 M_N + q_2 M_E + q_3 M_D & -q_2 M_N + q_1 M_E - q_0 M_D & -q_3 M_N + q_0 M_E + q_1 M_D \\ -q_3 M_N + q_0 M_E + q_1 M_D & q_2 M_N - q_1 M_E + q_0 M_D & q_1 M_N + q_2 M_E + q_3 M_D & -q_0 M_N - q_3 M_E + q_2 M_D \\ q_2 M_N - q_1 M_E + q_0 M_D & q_3 M_N - q_0 M_E - q_1 M_D & q_0 M_N + q_3 M_E - q_2 M_D & q_1 M_N + q_2 M_E + q_3 M_D \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} (\Phi_4 \cdot \mathbf{M}_I)^T \\ (\Phi_5 \cdot \mathbf{M}_I)^T \\ (\Phi_6 \cdot \mathbf{M}_I)^T \end{bmatrix}$$

其中，

$$\Phi_4 = \begin{bmatrix} q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_2 & q_1 & -q_0 \\ -q_3 & q_0 & q_1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_5 = \begin{bmatrix} -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & q_0 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_0 & -q_3 & q_2 \end{bmatrix}, \quad \Phi_6 = \begin{bmatrix} q_2 & -q_1 & q_0 \\ q_3 & -q_0 & -q_1 \\ q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}$$

2. \mathbf{H}_{M_I} 为磁力计的观测相对于地球磁场向量的观测矩阵，即磁场测量值相对于地球磁场的 Jacobian，大小 3×3 为：

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{M_I} &= \frac{\partial \mathbf{M}_{pred}}{\partial \mathbf{M}_I} \\ &= \frac{\partial \left(\left([\mathbf{T}]_B^N \right)^T \mathbf{M}_I + \mathbf{M}_B \right)}{\partial \mathbf{M}_I} \\ &= \left([\mathbf{T}]_B^N \right)^T\end{aligned}$$

3. \mathbf{H}_{M_B} 为磁力计的观测相对于机体磁场偏差的观测矩阵，即磁场测量值相对于磁场偏差的 Jacobian，大小 3×3 为：

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{M_B} &= \frac{\partial \mathbf{M}_{pred}}{\partial \mathbf{M}_B} \\ &= \frac{\partial \left(\left([\mathbf{T}]_B^N \right)^T \mathbf{M}_I + \mathbf{M}_B \right)}{\partial \mathbf{M}_B} \\ &= \mathbf{I}_{3 \times 3}\end{aligned}$$

在实际的代码里，磁场观测矩阵 \mathbf{H}_{MAG} 实际上是分为 3 个一维观测矩阵进行观测：

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{MAG_x} &= \frac{\partial M_{pred_x}}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{H}_{MAG_y} &= \frac{\partial M_{pred_y}}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{H}_{MAG_z} &= \frac{\partial M_{pred_z}}{\partial \mathbf{x}}\end{aligned}$$

这是一种优化算法，使用更多的运算步骤换取使用更少的栈空间。这对于 MCU 这种内存紧张的环境有好处。

5.1.2 综合偏差测量的融合方程

有磁偏角约束的融合阶段，考虑事实上，地球的地理南北极与地磁南北极并不重合，也就是真北和磁北有一定夹角，这个夹角称为磁偏角 $\psi_{DECLINATION}$ 。因此如果增加了磁偏角的约束，则需要在融合完三轴磁力计测量值的基础上进行此部分的融合。这用于在没有绝对位置或速度测量的情况下保持正确的航向 — 例如使用光流时。这可以用来防止在航向观测不良期间地球磁场估计的不必要的偏航旋转。

磁偏角的测量值，有两个来源：一是由 GPS 提供，二是由用户设定本地的磁偏角数据。磁偏角的噪声为 $R = \sigma_{decl}^2$ ，其中标准差 σ_{decl} 在代码中设定，好工况为 0.02，差工况为 0.5。

磁偏角 $\psi_{DECLINATION}$ 的预测值为

$$\psi_{DECLINATION} = \arctan \left(\frac{M_E}{M_N} \right)$$

磁偏角观测矩阵 $\mathbf{H}_{\psi_{DECLINATION}}$ 是一个 1×24 的稀疏矩阵：

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{\psi_{DECLINATION}} &= \frac{\partial \psi_{DECLINATION}}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{1 \times 4} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & \mathbf{H}_{M_I}^{\psi_{DECLINATION}} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

其中, \mathbf{H}_q^ψ 为磁偏角的观测相对于姿态四元数 q 的观测矩阵, 为 1×4 矩阵:

$$\mathbf{H}_q^\psi = \frac{\partial \psi_{pred}}{\partial q}$$

这个偏导展开太复杂, 很难手工推导。使用符号推导系统生成的计算式如下:

$$\mathbf{H}_q^\psi = \begin{cases} \left[\begin{array}{c} \frac{2(-2q_0(q_0q_3+q_1q_2)+q_3(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2))}{4(q_0q_3+q_1q_2)^2+(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2)^2} \\ \frac{2(-2q_1(q_0q_3+q_1q_2)+q_2(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2))}{4(q_0q_3+q_1q_2)^2+(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2)^2} \\ \frac{2(q_1(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2)+2q_2(q_0q_3+q_1q_2))}{4(q_0q_3+q_1q_2)^2+(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2)^2} \\ \frac{2(q_0(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2)+2q_3(q_0q_3+q_1q_2))}{4(q_0q_3+q_1q_2)^2+(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2)^2} \end{array} \right]^T & \text{for yaw321} \\ \left[\begin{array}{c} \frac{2(-2q_0(q_0q_3-q_1q_2)+q_3(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2))}{4(q_0q_3-q_1q_2)^2+(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2)^2} \\ \frac{2(2q_1(q_0q_3-q_1q_2)-q_2(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2))}{4(q_0q_3-q_1q_2)^2+(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2)^2} \\ -\frac{2q_1(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2)+4q_2(q_0q_3-q_1q_2)}{4(q_0q_3-q_1q_2)^2+(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2)^2} \\ \frac{2(q_0(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2)+2q_3(q_0q_3-q_1q_2))}{4(q_0q_3-q_1q_2)^2+(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2)^2} \end{array} \right]^T & \text{for yaw312} \end{cases}$$

5.2 光流测量序列融合方程

光流传感器 (optical flow) 依赖于测距仪 (range finder), 它可以提供 xy 水平面的速度测量值。光流传感器的观测量有:

- 视轴 (line of sight, LOS) 角速度测量 (相对于传感器坐标系), 从向下看的光流传感器测量, 以 rad/sec 为单位, 围绕 X 和 Y 传感器坐标系轴。这些速度是运动补偿的。
- 正视轴 X 速度是图像围绕 X 传感器轴的相对旋转, 在正的 Y 轴方向上产生地面相对速度。
- 正视轴 Y 速度是图像围绕 Y 传感器轴的相对旋转, 在负的 X 轴方向上产生地面相对速度。
- 距离 (range) 的测量与机体 Z 轴对齐 (假设为平地模型)。

距离 (range) 为从摄像机焦点到传感器视场 (field of view, fov) 中心的距离, 已知其测量噪声 \mathbf{R}_{LOS} , 由地形高差 (terrain height offset) 估计算法计算, 详见第 6 节的描述。

首先计算传感器坐标系中的相对速度 \mathbf{V}_B :

$$\mathbf{V}_B = \left([\mathbf{T}]_B^N \right)^T \mathbf{V}_{NED}$$

$$\begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} = \left([\mathbf{T}]_B^N \right)^T \begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix}$$

将速度除以距离 (range) 得到相对于 X 和 Y 轴的预测视轴角速度 (注: 这些是机体角速度运动补偿光流速度)。

$$\begin{aligned}
V_{LOSx} &= +V_Y/\text{range} \\
V_{LOSy} &= -V_X/\text{range} \\
\mathbf{V}_{LOS} &= \begin{bmatrix} V_{LOSx} \\ V_{LOSy} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\text{range}} \begin{bmatrix} 2(q_1q_2 - q_0q_3)V_N + (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2)V_E + 2(q_2q_3 + q_0q_1)V_D \\ -((q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)V_N + 2(q_1q_2 + q_0q_3)V_E + 2(q_1q_3 - q_0q_2)V_D) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

视轴角速度的观测相对于状态向量 \mathbf{x} 的观测矩阵 \mathbf{H}_{LOS} ，即对应的观测矩阵 Jacobian，为 2×24 的稀疏矩阵：

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{LOS} &= \frac{\partial \mathbf{V}_{LOS}}{\partial \mathbf{x}} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_q^{V_{LOS}} & \mathbf{H}_V^{V_{LOS}} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

其中， $\mathbf{H}_q^{V_{LOS}}$ 和 $\mathbf{H}_V^{V_{LOS}}$ 这 2 个分块矩阵见下面的推导。

1. $\mathbf{H}_q^{V_{LOS}}$ 为视轴角速度的观测相对于姿态四元数的观测矩阵，即视轴角速度相对于旋转的 Jacobian，大小为 2×4 ：

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_q^{V_{LOS}} &= \frac{\partial \mathbf{V}_{LOS}}{\partial q} \\
&= \frac{\partial \left(\frac{1}{\text{range}} \begin{bmatrix} 2(q_1q_2 - q_0q_3)V_N + (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2)V_E + 2(q_2q_3 + q_0q_1)V_D \\ -((q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)V_N + 2(q_1q_2 + q_0q_3)V_E + 2(q_1q_3 - q_0q_2)V_D) \end{bmatrix} \right)}{\partial q} \\
&= \frac{2}{\text{range}} \begin{bmatrix} -q_3V_N + q_0V_E + q_1V_D & q_2V_N - q_1V_E + q_0V_D & q_1V_N + q_2V_E + q_3V_D & -q_0V_N - q_3V_E + q_2V_D \\ -(q_0V_N + q_3V_E - q_2V_D) & -(q_1V_N + q_2V_E + q_3V_D) & -(-q_2V_N + q_1V_E - q_0V_D) & -(-q_3V_N + q_0V_E + q_1V_D) \end{bmatrix} \\
&= \frac{2}{\text{range}} \begin{bmatrix} (\Phi_5 \cdot \mathbf{V}_{NED})^T \\ (-\Phi_4 \cdot \mathbf{V}_{NED})^T \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

其中，

$$\Phi_4 = \begin{bmatrix} q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_2 & q_1 & -q_0 \\ -q_3 & q_0 & q_1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_5 = \begin{bmatrix} -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & q_0 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_0 & -q_3 & q_2 \end{bmatrix}$$

2. $\mathbf{H}_V^{V_{LOS}}$ 为视轴角速度的观测相对于 NED 坐标系下机体速度的观测矩阵，即视轴角速度相对于 NED 坐标系下机体速度的 Jacobian，大小为 2×3 ：

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_V^{V_{LOS}} &= \frac{\partial \mathbf{V}_{LOS}}{\partial \mathbf{V}_{NED}} \\
&= \frac{\partial \left(\frac{1}{\text{range}} \begin{bmatrix} 2(q_1q_2 - q_0q_3)V_N + (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2)V_E + 2(q_2q_3 + q_0q_1)V_D \\ -((q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)V_N + 2(q_1q_2 + q_0q_3)V_E + 2(q_1q_3 - q_0q_2)V_D) \end{bmatrix} \right)}{\partial \mathbf{V}_{NED}} \\
&= \frac{1}{\text{range}} \begin{bmatrix} 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ -(q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) & -2(q_1q_2 + q_0q_3) & -2(q_1q_3 - q_0q_2) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

在实际的代码里，磁场观测矩阵 \mathbf{H}_{LOS} 实际上是分为 2 个一维观测矩阵进行观测：

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{LOS_x} &= \frac{\partial V_{LOS_x}}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{H}_{LOS_y} &= \frac{\partial V_{LOS_y}}{\partial \mathbf{x}}\end{aligned}$$

这是一种优化算法，使用更多的运算步骤换取使用更少的栈空间。这对于 MCU 这种内存紧张的环境有好处。

5.3 GPS 速度和位置测量序列融合方程

GPS 的速度和位置都涉及状态的直接观测，因此观测模型比较简单。因为 GPS 在 z 轴方向上的数据误差比较大，而高度数据源比较多，所以对于位置向量只使用 NE 方向的更新。

GPS 的观测相对于状态向量 \mathbf{x} 的观测矩阵 \mathbf{H}_{GPS} ，即对应的观测矩阵 Jacobian 比较简单，为 5×24 稀疏矩阵：

$$\mathbf{H}_{GPS} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 4} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & 0_{2 \times 3} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

并且已知 GPS 的测量噪声 \mathbf{R}_{GPS} ，由此可对状态向量 \mathbf{x} 中的速度和位置进行校正。

5.4 空速融合方程

对于固定翼平台，空速观测方程假设传感器测量相对于风场的速度 \mathbf{V}_{EAS} 为：

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{EAS} &= \mathbf{V}_{NED} - \mathbf{V}_{wind} \\ \begin{bmatrix} V_{EAS_N} \\ V_{EAS_E} \\ V_{EAS_D} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{wind_N} \\ V_{wind_E} \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

则真实风速的预测值 V_{TAS} 为：

$$V_{TAS} = \sqrt{(V_{EAS_N}^2 + V_{EAS_E}^2 + V_{EAS_D}^2)}$$

当只使用风速估计而不使用合成侧滑时，真实风速的观测相对于状态向量 \mathbf{x} 的观测矩阵 \mathbf{H}_{TAS} ，即对应的观测矩阵 Jacobian，为 1×24 稀疏矩阵：

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{TAS} &= \frac{\partial V_{TAS}}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \frac{\partial \left((V_N - V_{wind_N})^2 + (V_E - V_{wind_E})^2 + V_D^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{1 \times 4} & \mathbf{H}_{V_{NED}}^{V_{TAS}} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & \mathbf{H}_{V_{wind}}^{V_{TAS}} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

其中, $\mathbf{H}_{V_{NED}}^{V_{TAS}}$ 为真实风速相对于速度的 1×3 观测矩阵:

$$\mathbf{H}_{V_{NED}}^{V_{TAS}} = \begin{bmatrix} \frac{V_N - V_{wind_N}}{\sqrt{(V_N - V_{wind_N})^2 + (V_E - V_{wind_E})^2 + V_D^2}} \\ \frac{V_E - V_{wind_E}}{\sqrt{(V_N - V_{wind_N})^2 + (V_E - V_{wind_E})^2 + V_D^2}} \\ \frac{V_D}{\sqrt{(V_N - V_{wind_N})^2 + (V_E - V_{wind_E})^2 + V_D^2}} \end{bmatrix}^T$$

$\mathbf{H}_{V_{wind}}^{V_{TAS}}$ 为真实风速相对于风速的 1×2 观测矩阵:

$$\mathbf{H}_{V_{wind}}^{V_{TAS}} = - \begin{bmatrix} \frac{V_N - V_{wind_N}}{\sqrt{(V_N - V_{wind_N})^2 + (V_E - V_{wind_E})^2 + V_D^2}} \\ \frac{V_E - V_{wind_E}}{\sqrt{(V_N - V_{wind_N})^2 + (V_E - V_{wind_E})^2 + V_D^2}} \end{bmatrix}^T$$

并且已知风速传感器的测量噪声 \mathbf{R}_{TAS} , 由此可对状态向量 \mathbf{x} 中的速度和风速进行校正。本节的方程可对比第 8.4.1 节“真实空速融合”的内容。

注意, 因为风速的误差相当大, 为减小其对状态向量 \mathbf{x} 中的速度的影响, 正常情况下都将 $\mathbf{H}_{V_{NED}}^{V_{TAS}} = \mathbf{0}$, 直到 ECL 估计系统进入风场航位推算模式模式后, 才用 $\mathbf{H}_{V_{NED}}^{V_{TAS}}$ 对状态向量 \mathbf{x} 中的速度进行校正。具体见第 10 章“惯性航位推算”的讨论。

5.5 合成侧滑融合方程

非固定翼平台可以利用假定的侧滑观测值为零来改进风速估计, 也可以在没有空速传感器的情况下进行风速估计。本节的方程可对比第 8.4.2 节“合成侧滑融合”的内容。

首先将等效风速 \mathbf{V}_{EAS} 旋转到机体坐标系中得到机体的风速 \mathbf{V}_{wind_B} :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{wind_B} &= \left([\mathbf{T}]_B^N \right)^T \mathbf{V}_{EAS} \\ &= \left([\mathbf{T}]_B^N \right)^T (\mathbf{V}_{NED} - \mathbf{V}_{wind}) \\ \begin{bmatrix} V_{wind_X} \\ V_{wind_Y} \\ V_{wind_Z} \end{bmatrix} &= \left([\mathbf{T}]_B^N \right)^T \left(\begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{wind_N} \\ V_{wind_E} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_N - V_{wind_N} \\ V_E - V_{wind_E} \\ V_D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

用小角近似法计算预测侧滑角度, 也是侧滑新息, 因为假设观测值为零:

$$\text{beta} = \frac{V_{wind_Y}}{V_{wind_X}}$$

合成侧滑的噪声 R_{beta} 由用户设定。合成侧滑的观测相对于状态向量 \mathbf{x} 的观测矩阵 \mathbf{H}_{beta} , 即

对应的观测矩阵 Jacobian , 为 1×24 稀疏矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{beta} &= \frac{\partial \left(\frac{V_{wind_Y}}{V_{wind_X}} \right)}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \frac{\partial \left(\frac{2(q_1 q_2 - q_0 q_3)(V_N - V_{wind_N}) + (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2)(V_E - V_{wind_E}) + 2(q_2 q_3 + q_0 q_1)V_D}{(q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)(V_N - V_{wind_N}) + 2(q_1 q_2 + q_0 q_3)(V_E - V_{wind_E}) + 2(q_1 q_3 - q_0 q_2)V_D} \right)}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_q^{beta} & \mathbf{H}_V^{beta} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & \mathbf{H}_{V_{wind}}^{beta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中, \mathbf{H}_q^{beta} 为合成侧滑的观测相对于姿态四元数的观测矩阵, 即合成侧滑相对于旋转的 Jacobian, 大小为 1×4 , \mathbf{H}_V^{beta} 为合成侧滑的观测相对于 NED 坐标系下机体速度的观测矩阵, 即合成侧滑相对于 NED 坐标系下机体速度的 Jacobian, 大小为 1×3 , $\mathbf{H}_{V_{wind}}^{beta}$ 为合成侧滑的观测相对于风速观测矩阵, 大小为 1×3 。这 3 个偏导展开太复杂, 就不在这里推导。具体可见代码中用符号推导系统生成的计算式。

注意, 因为合成侧滑的误差相当大, 为减小其对状态向量 \mathbf{x} 中的姿态和速度的影响, 正常情况下都将 $\mathbf{H}_q^{beta} = \mathbf{0}$, $\mathbf{H}_V^{beta} = \mathbf{0}$, 直到 ECL 估计系统进入风场航位推算模式模式后, 才用 \mathbf{H}_q^{beta} 和 \mathbf{H}_V^{beta} 对状态向量 \mathbf{x} 中的姿态和速度进行校正。具体见第 10 章“惯性航位推算”的讨论。

5.6 阻力比力融合方程

与合成侧滑类似, 首先将等效风速 \mathbf{V}_{EAS} 旋转到机体坐标系中得到机体的风速 \mathbf{V}_{wind_B} :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{wind_B} &= \left([\mathbf{T}]_B^N \right)^T \mathbf{V}_{EAS} \\ &= \left([\mathbf{T}]_B^N \right)^T (\mathbf{V}_{NED} - \mathbf{V}_{wind}) \\ \begin{bmatrix} V_{wind_X} \\ V_{wind_Y} \\ V_{wind_Z} \end{bmatrix} &= \left([\mathbf{T}]_B^N \right)^T \left(\begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{wind_N} \\ V_{wind_E} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_N - V_{wind_N} \\ V_E - V_{wind_E} \\ V_D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

根据 IMU 测得的加速度 \mathbf{a}_{meas} 计算阻力比力 drag:

$$\text{drag} = \mathbf{a}_{meas} - \Delta \mathbf{V}_b / \Delta t$$

并用空气密度 ρ 和弹道系数 coef 估算空速 airspeed:

$$\text{airspeed} = \sqrt{(2|\text{drag}|) / (\text{coef} \cdot \rho)}$$

并计算比力系数 \mathbf{K}_{acc} :

$$\mathbf{K}_{acc} = \text{coef} \cdot \text{airspeed}$$

预测的加速度 \mathbf{a}_{pred} 为:

$$\mathbf{a}_{pred} = -\frac{1}{2} \text{sign} \left(\begin{bmatrix} V_{wind_X} \\ V_{wind_Y} \\ V_{wind_Z} \end{bmatrix} \right) (\text{coef} \cdot \rho) \begin{bmatrix} V_{wind_X}^2 \\ V_{wind_Y}^2 \\ V_{wind_Z}^2 \end{bmatrix}$$

则阻力比力新息 drag_innov 为：

$$\text{drag_innov} = \mathbf{a}_{pred} - \text{drag}$$

阻力比力的观测相对于状态向量 \mathbf{x} 的观测矩阵 \mathbf{H}_{drag} ，即对应的观测矩阵 Jacobian，为 3×24 稀疏矩阵：

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{drag} &= \frac{\partial \mathbf{a}_{pred}}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_q^{drag} & \mathbf{H}_V^{drag} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \mathbf{H}_{V_{wind}}^{drag} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中， \mathbf{H}_q^{drag} 为阻力比力的观测相对于姿态四元数的观测矩阵，即阻力比力相对于旋转的 Jacobian，大小为 3×4 ， \mathbf{H}_V^{drag} 为阻力比力的观测相对于 NED 坐标系下机体速度的观测矩阵，即阻力比力相对于 NED 坐标系下机体速度的 Jacobian，大小为 3×3 ， $\mathbf{H}_{V_{wind}}^{drag}$ 为阻力比力的观测相对于风速观测矩阵，大小为 3×2 。这 3 个偏导展开太复杂，就不在这里推导。具体可见代码中用符号推导系统生成的计算式。

5.7 高度融合方程

高度涉及状态的直接观测，因此观测模型比较简单。

高度数据源比较多，有 4 个：

- 气压计
- 测距仪
- GPS
- 外部视觉

软件内部会根据数据源的质量状况进行切换。

高度的观测相对于状态向量 \mathbf{x} 的观测矩阵 \mathbf{H}_{hgt} ，即对应的观测矩阵 Jacobian，为 1×24 稀疏矩阵：

$$\mathbf{H}_{hgt} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 4} & 0_{1 \times 3} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 2} \end{bmatrix}$$

根据各自传感器 Z 轴的噪声 R_{hgt} ，就可以对高度进行校正。

5.8 外部视觉融合方程

外部视觉系统可以提供速度、位置和航向角的测量值。相对应的融合方程见前面章节的描述。

6 地形高差估计的 EKF 方程

因为光流的算法依赖测距仪提供的高度数据，所以 ECL 模块在原先维护的 24 参数状态 EKF 之外，还单独维护一个地形估计器，目的是融合测距仪的测量值以估计地形垂直位置。地形高差 (terrain height offset) 估计的 EKF 方程在本节描述。

6.1 距地高度的估计

在地形估计器内部用一个标准 KF 维护一个地形高度 (terrain height) 状态值, 又称地形垂直位置 (terrain vertical position, terrain_{vpos}), 也称在向下轴的地形位置 (position of terrain in down axis, ptd)。相对应的, 在 ECL/EKF2 中维护的垂直速度 V_D 为高差, 又称在向下轴飞行器的位置 (position of vehicle in down axis, pd)。

距地高度 (height above ground, hagl_{meas}) 的测量值由测距仪提供。距地高度预测值 hagl_{pred} 由以下方程计算:

$$\text{hagl}_{pred} = \text{terrain}_{vpos} - V_D$$

距地高度新息:

$$\text{hagl}_{innov} = \text{hagl}_{pred} - \text{hagl}_{meas}$$

由此可以得出最优估计的地形高度 terrain_{vpos} 。

6.2 光流速度的估计

已知从导航坐标系到机体坐标系的旋转矩阵 $\left([T]_N^B\right)^T$, 以及光流观测方差 R_{LOS} 。

距离 (range) 为从摄像机焦点到传感器视场 (field of view, fov) 中心的距离, 由以下方程计算:

$$\text{range} = (\text{terrain}_{vpos} - V_D) / (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)$$

计算传感器坐标系中的相对速度 \mathbf{V}_B :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_B &= \left([T]_B^N\right)^T \mathbf{V}_{NED} \\ \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} &= \left([T]_B^N\right)^T \begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

将速度除以距离 (range) 得到相对于 X 和 Y 轴的预测视轴角速度 (注: 这些是机体角速度运动补偿光流速度):

$$V_{LOS_X} = +V_Y / \text{range}$$

$$V_{LOS_Y} = -V_X / \text{range}$$

计算观测雅可比矩阵:

$$\begin{aligned} H_{flow} &= \frac{\partial (V_{LOS_X}, V_{LOS_Y})}{\partial (\text{terrain}_{vpos})} \\ &= \frac{\partial \left(\frac{+V_Y (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)}{(\text{terrain}_{vpos} - V_D)}, \frac{-V_X (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)}{(\text{terrain}_{vpos} - V_D)} \right)}{\partial (\text{terrain}_{vpos})} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{+V_Y (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)}{(\text{terrain}_{vpos} - V_D)^2} \\ \frac{-V_X (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)}{(\text{terrain}_{vpos} - V_D)^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由此可以对光流速度进行最优估计。

7 使用 IMU 和 GPS 进行偏航对准

7.1 EKF-GSF 偏航估计器描述

该算法能在没有磁强计或外部偏航传感器的情况下运行，其目的是自动校正偏航误差引起的起飞后导航损失。它可以从不依赖磁偏航引起的起飞后导航故障中快速自动恢复。

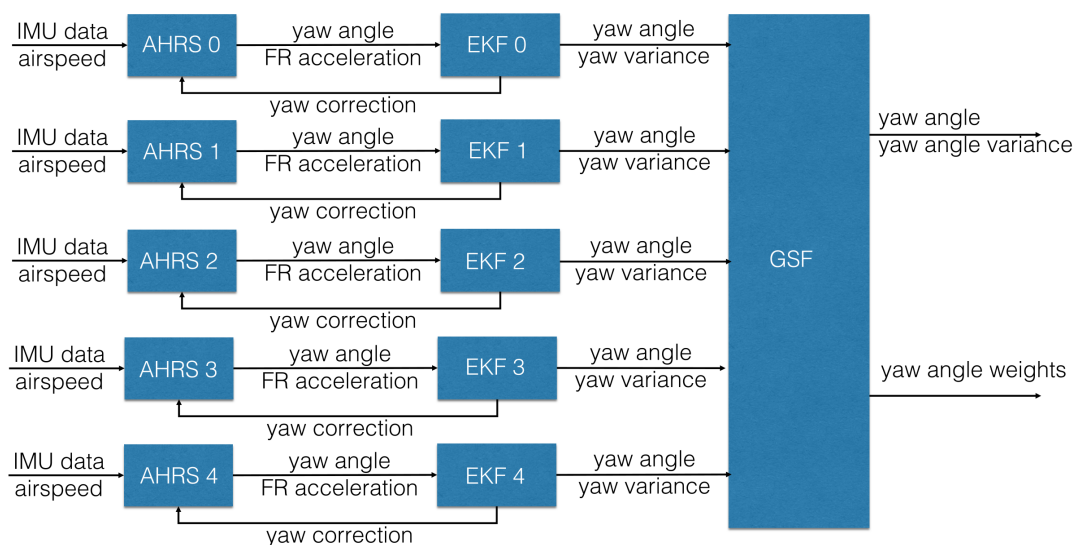
ECL 项目自 2018 年起进行的初步算法工作，以确定是否有可能仅使用 IMU 和 GPS 速度数据快速确定偏航角 (yaw)，而不依赖机体动力学的假设。最后确定使用多个 EKF 状态的高斯和滤波器 (Gaussian Sum Filter, GSF) 算法，即 EKF-GSF，因其为应用提供了最佳的性能/计算成本权衡。

EKF-GSF 算法也是在 24 参数状态 EKF 之外又一个 EKF 实现，包括以下内容：

- 使用互补滤波器的 5 组 AHRS 的解
 - 这些计算预测偏航角和向前、向右加速度。
 - 空速 (测量或估计) 用于固定翼飞机飞行期间的向心加速度校正。
- 5 组 3 参数状态扩展卡尔曼滤波器
 - 状态为向北 (N)、向东 (E) 速度和偏航角。
 - 偏航角估算开始时的角度间隔相等， $\left[-4/5\pi \quad -2/5\pi \quad 0 \quad 2/5\pi \quad 4/5\pi \right]$ 。
 - GPS 的向北 (N)、向东 (E) 速度作为观测值。
- 高斯和滤波器 (Gaussian Sum Filter)
 - 根据标准化 GPS 的向北 (N)、向东 (E) 速度新息数值级别计算每个 EKF 的权重。总权重为 1。
 - 输出偏航角 ψ_{GSF} 估计值，这是单个 EKF 估计值的加权平均值。

GSF-EKF 过程框图如下：

EKF-GSF Yaw Estimator Diagram



该算法运行要求无人机在起飞和初始水平运动时必须处于不需要位置固定模式 (Position Control Mode)，让无人机水平移动一段距离。根据实验，无人机大约在 1s 左右移动 4m 左右的距离，EKF 将自动对准偏航并开始使用 GPS，从而启用位置固定模式。测试结果表明：

- GSF 权重在单个 EKF 滤波器之前收敛。
- 要求水平速度变化大于 GPS 速度不确定性。
- 速度变化越大，收敛速度越快。
- 由于失去导航，速度变化较大，导致在 1s 内收敛。

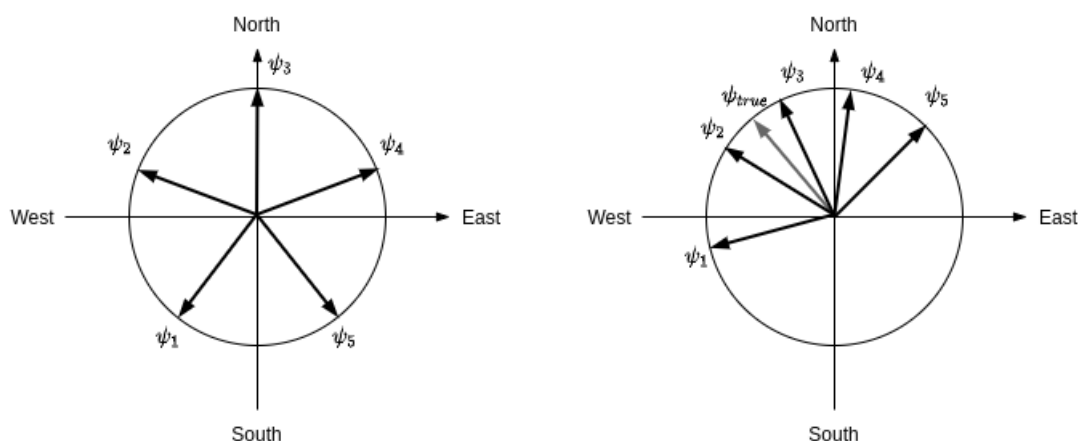
7.2 偏航估计器的算法直觉

EKF-GSF 算法是一个很新奇也很有创意的算法。不论是在 KF 方面还是在传感器方面，以及无人机的运动特性方面，设计者在技术方面和工程方面都已经炉火纯青、游刃有余。虽然该算法在数学方面还有说不清的地方，但是 KF 同样擅长在相关性领域工作，建模不一定要因果关系。

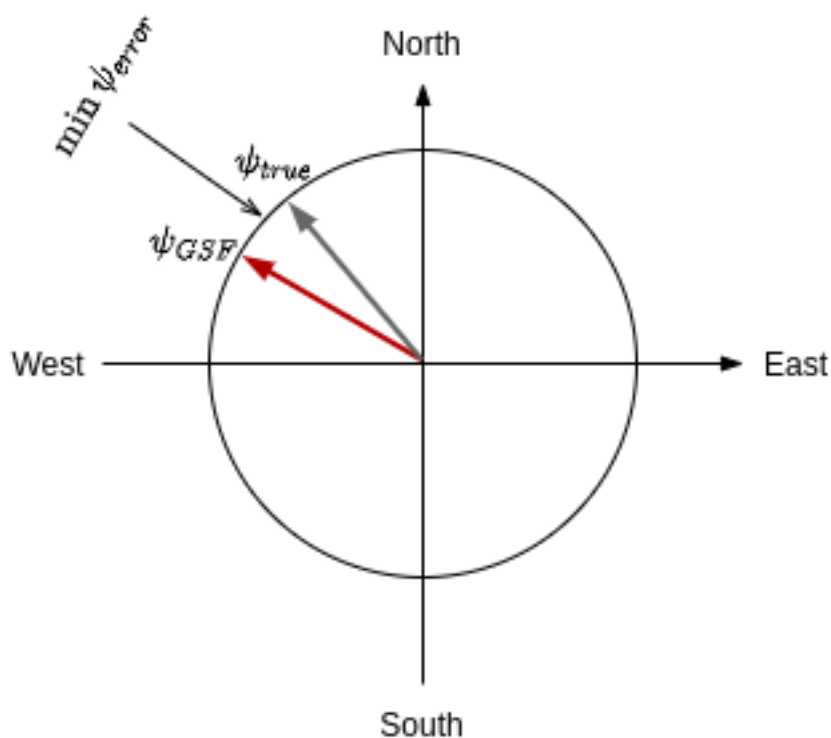
首先该算法一个假设就是偏航角由 xy 水平面的向北 (N)、向东 (E) 的增量速度和绕 z 轴旋转的增量角度所驱动，所以偏航角的测量误差也和这 3 个值的测量噪声相关

$$\psi_{error} \propto (\sigma_{\Delta V_x}^2, \sigma_{\Delta V_y}^2, \sigma_{\Delta \psi}^2)$$

这 3 个值和 3 个噪声由 IMU 提供。于是我们可以在 xy 水平面上面预置 5 个偏航角 $\psi_i, i \in 1 \sim 5$ ，每个偏航角由这 3 个值和 3 个噪声驱动演化，独立进行时间更新。在测量更新阶段，我们观测 GPS 提供的 xy 水平面的向北 (N)、向东 (E) 的速度，因为残差的存在，这 5 个偏航角 ψ_i 会向真实的偏航角 ψ_{true} 聚拢，但是真实的偏航角 ψ_{true} 不可见。



不过我们可以通过高斯和的算法，计算这 5 个偏航角 ψ_i 的权重并相加，得到距离真实的偏航角 ψ_{true} 最近的复合偏航角 ψ_{GSF} 。

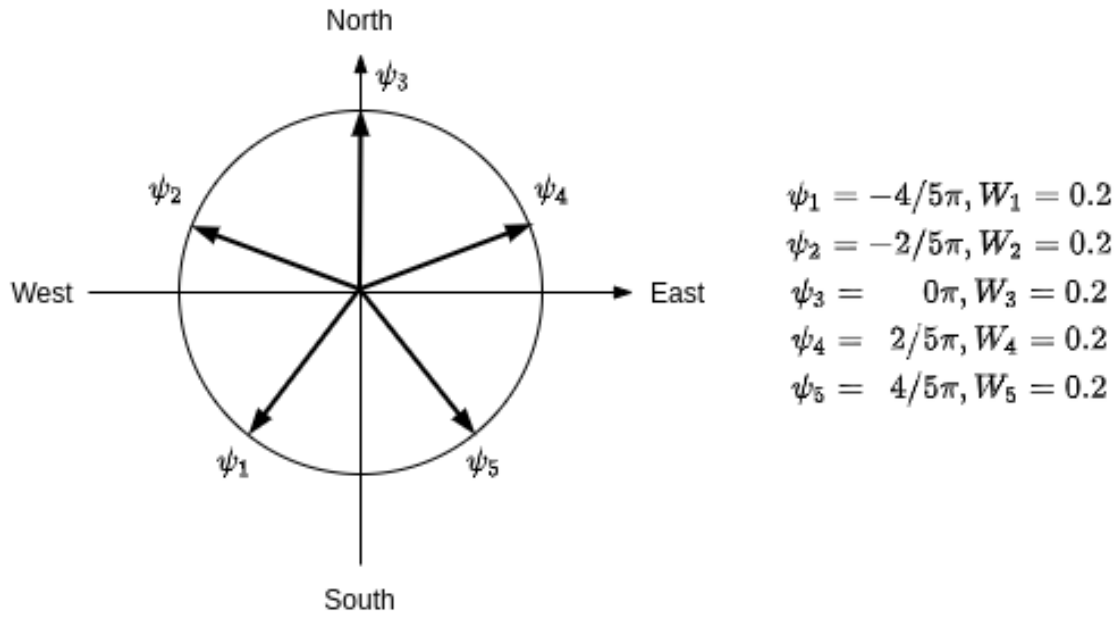


因此该算法就可以在没有磁强计的情况下估计偏航角，并且是水平速度变化越大，收敛越快。

7.3 偏航估计器的初始化与对齐

7.3.1 偏航估计器的初始化

初始化的关键在于在 xy 平面上预制 5 个偏航角，平均间隔，平均权重。其它初始化都是常规操作。



7.3.2 AHRS 倾斜对齐

就是如何从增量速度计算旋转矩阵。旋转矩阵直接从加速度测量中构造，对于所有模型都是相同的，因此只需计算一次。其假设是：

1. 偏航角为零 — 当速度融合开始时，每个模型的偏航角稍后对齐。
2. 机体没有加速，因此所有测量的加速度都是由重力引起的。

用 Δt 表示传感器事件间隔时间。从主模块得到的加速度 \mathbf{a}_I 计算得到增量速度 $\Delta \mathbf{V}_I$

$$\Delta \mathbf{V}_I = \mathbf{a}_I \cdot \Delta t$$

这是地球坐标系中的数据，需要转换到机体坐标系中并归一得到重力方向的单位向量

$$\mathbf{D}_B = -\Delta \mathbf{V}_I / \|\Delta \mathbf{V}_I\|$$

计算地球坐标系向北轴的单位向量，旋转为机体坐标系，与 \mathbf{D}_B 正交

$$\mathbf{N}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \mathbf{D}_B \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{D}_B \right)$$

$$\mathbf{N}_B = \mathbf{N}_B / \|\mathbf{N}_B\|$$

计算地球坐标系向东轴的单位向量，旋转为机体坐标系，与 \mathbf{D}_B 和 \mathbf{N}_B 正交

$$\mathbf{E}_B = \mathbf{D}_B \times \mathbf{N}_B$$

从地球坐标系到机体坐标系的旋转矩阵中的每一列表示旋转到机体坐标系的相应地球坐标系单位向量的投影，例如 \mathbf{N}_B 将是第一列。我们需要从机体坐标系到地球坐标系的旋转矩阵，因此旋

转到机体坐标系的地球坐标系单位向量被复制到相应的行中

$$[T]_B^N = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_B^T \\ \mathbf{E}_B^T \\ \mathbf{D}_B^T \end{bmatrix}$$

倾斜对齐完成后可对每一个模型进行时间更新。

7.3.3 AHRS 偏航角对齐

其算法是根据最新的偏航角 ψ 更新欧拉角向量, 进而生成新的姿态矩阵 $[T]_B^N$ 。在 24 参数 EKF 算法之外, 在 EKF-GSF 算法中为每一个模型用增益系数法维护一个独立的姿态矩阵 $[T]_B^N$, 用于后面的算法中。

偏航角对齐完成后可对每一个模型进行测量更新。

7.3.4 AHRS 预测

在每次时间更新前先从 IMU 数据生成姿态基准, 即每一个模型的姿态矩阵 $[T]_B^N$ 被 IMU 数据驱动往前旋转了一个角度。所用数据为 IMU 数据及真实空速 (固定翼飞机), 并用加速度融合增益系数和陀螺仪偏差增益系数进行计算。最后计算得到一个校正后的增量角度, 将其应用到姿态矩阵 $[T]_B^N$ 就得到新的姿态矩阵。

7.3.5 AHRS 更新

同样的, 在每次测量更新之后, 需要对姿态矩阵 $[T]_B^N$ 进行更新。因为增量偏航角 $\Delta\psi$ 发生在 xy 平面上, 所以利用偏航旋转矩阵的稀疏性可以对姿态矩阵 $[T]_B^N$ 做优化更新。

7.4 偏航估计器的预测方程

令 ψ 表示机体坐标系相对于地球坐标系的偏航角 (yaw)。

令 \mathbf{V}_{NE} 表示机体在世界坐标系中的向北 (N) 和向东 (E) 的速度,

$$\mathbf{V}_{NE} = \begin{bmatrix} V_N \\ V_E \end{bmatrix}$$

令 $\Delta\psi$ 表示 IMU 的 z 轴在机体轴上的增量角度测量值, 即增量偏航角的测量值。

令 $\sigma_{\Delta\psi}^2$ 表示 IMU 的 z 轴增量角度测量方差值。

令 $\Delta\mathbf{V}_{xy}$ 表示 IMU 的 x 轴和 y 轴在机体轴上的增量速度测量值

$$\Delta\mathbf{V}_{xy} = \begin{bmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \end{bmatrix}$$

令 $\sigma_{\Delta\mathbf{V}_{xy}}^2$ 表示 IMU 的 x 轴和 y 轴增量速度测量方差

$$\sigma_{\Delta\mathbf{V}_{xy}}^2 = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta V_x}^2 \\ \sigma_{\Delta V_y}^2 \end{bmatrix}$$

推导机体到导航方向的变换矩阵 (2D)

$$[T]_B^N = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix}$$

姿态更新方程

$$\psi' = \psi + \Delta\psi$$

速度更新方程

$$\mathbf{V}'_{NE} = \mathbf{V}_{NE} + [T]_B^N \Delta\mathbf{V}_{xy}$$

定义状态向量

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{NE} \\ \psi \end{bmatrix}$$

定义过程方程的向量

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}'_{NE} \\ \psi' \end{bmatrix}$$

此即方程 (1)，预测 (先验) 状态估计。

计算状态转移矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}} \\ &= \frac{\partial \left(\begin{bmatrix} V_N + \cos(\psi) \Delta V_x - \sin(\psi) \Delta V_y \\ V_E + \sin(\psi) \Delta V_x + \cos(\psi) \Delta V_y \\ \psi + \Delta\psi \end{bmatrix} \right)}{\partial \left(\begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ \psi \end{bmatrix} \right)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\psi) \Delta V_x - \cos(\psi) \Delta V_y \\ 0 & 1 & \cos(\psi) \Delta V_x - \sin(\psi) \Delta V_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

定义控制 (干扰) 向量

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{V}_{xy} \\ \Delta\psi \end{bmatrix}$$

推导协方差预测方程。在消除偏差效应后，假设惯性解中的误差增长由增量角度和增量速度中

的“噪声”驱动。推导 IMU 噪声到状态噪声的 3×3 控制 (干扰) 影响矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}{\partial \mathbf{u}} \\ &= \frac{\partial \left(\begin{bmatrix} V_N + \cos(\psi) \Delta V_x - \sin(\psi) \Delta V_y \\ V_E + \sin(\psi) \Delta V_x + \cos(\psi) \Delta V_y \\ \psi + \Delta\psi \end{bmatrix} \right)}{\partial \left(\begin{bmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta\psi \end{bmatrix} \right)} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这实际上是在 xy 平面上的旋转矩阵。

定义干扰 (disturbance) 矩阵, 即 3×3 过程噪声矩阵

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \sigma_{\Delta V_{xy}}^2 \\ \sigma_{\Delta\psi}^2 \end{bmatrix} \right)$$

推导状态误差矩阵, 即过程噪声协方差矩阵

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{G}^T$$

传播协方差矩阵

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}$$

此即方程 (2), 预测 (先验) 估计协方差。

7.5 偏航估计器的观测方程

由 GPS 提供的向北 (N)、向东 (E) 速度观测值为

$$\mathbf{V}_{GPS} = \begin{bmatrix} V_{N_{GPS}} \\ V_{E_{GPS}} \end{bmatrix}$$

其方差为 $\sigma_{\Delta V_{GPS}}^2$, 由此构建 2×2 测量噪声矩阵

$$\mathbf{R} = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \sigma_{\Delta V_{GPS}}^2 \\ \sigma_{\Delta V_{GPS}}^2 \end{bmatrix} \right)$$

因为是对速度的直接观测, 所以测量矩阵比较简单

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

推导向北 (N)、向东 (E) 速度观测的协方差更新方程, 即方程 (3)、方程 (4) 和方程 (5)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}} &= \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{V}_{GPS} \\ \mathbf{S} &= \mathbf{H}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^T + \mathbf{R} \\ \mathbf{K} &= \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^T\mathbf{S}^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{y}} \\ \mathbf{P}_{k|k} &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}\mathbf{S}\mathbf{K}^T\end{aligned}$$

7.6 偏航估计器的 GSF 方程

对每个模型的状态计算高斯密度。首先计算马氏距离 (Mahalanobis distance)

$$D_M^2 = \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{S}^{-1} \tilde{\mathbf{y}}$$

再计算 2D 正态分布 (Multivariate Normal Distribution) 的密度

$$\text{Density} = \left(\frac{1}{2}\right)^{p/2} \sqrt{\det(\mathbf{S}^{-1})} \exp\left(-\frac{D_M^2}{2}\right)$$

其中我们观测的是 2×1 速度向量, 所以 $p = 2$ 。

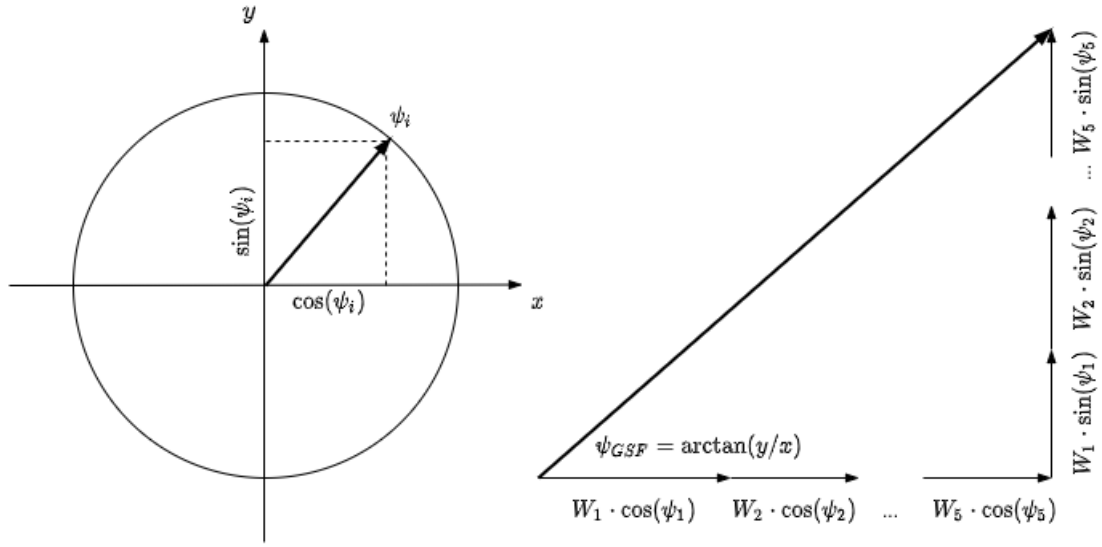
计算 5 组 AHRS 的解的权重并归一

$$\begin{aligned}W'_i &= \text{Density}_i \cdot W_i \\ \mathbf{W} &= \mathbf{W}' / \|\mathbf{W}'\|\end{aligned}$$

用每个模型的偏航状态的加权平均值以计算复合偏航向量。为避免角度回绕问题, 在求和之前, 将偏航状态转换为长度等于权重值为 1 的向量

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^5 W_i \cdot \cos(\psi_i) \\ y &= \sum_{i=1}^5 W_i \cdot \sin(\psi_i) \\ \psi_{GSF} &= \text{atan2}(y, x)\end{aligned}$$

该算法原理在于将每一个偏航状态 ψ_i 看成是一个从原点出发的向量, 因而在 x/y 轴上的投影通过权重缩放后相加, 就得到单位圆上的一个向量, 因而求出加权复合偏航角 ψ_{GSF} 。



根据每个模型方差的加权平均值计算偏航状态的复合方差。具有较大新息的模型的权重较小

$$\Delta\psi_i = \psi_i - \psi_{GSF}$$

$$\text{variance}_{\psi_{GSF}} = \sum_{i=1}^5 W_i \cdot (P_i(3,3) + \Delta\psi_i^2)$$

其中 $P_i(3,3)$ 为第 i 组的协方差矩阵 P_i 中偏航角 ψ_i 的方差。

8 风速估计

因为风速对评估飞行环境十分重要，并且为了容错，所以除了在主要的 24-EKF 估计器中估计风速之外，ECL 还采用另外不同模型的 3-EKF 算法来估计风速。

8.1 假设

假设飞行器为近水平面姿态。飞行器有 z 轴方向上的运动，但是飞行器以近水平面姿态运动。

假设风速为近水平面风场，因此 z 轴方向风速为 0。用 V_{wind_N}/V_{wind_E} 表示在 NED 坐标系中在北/东 (N/E) 方向上的风速，则风速向量 \mathbf{V}_{wind} 表示为

$$\mathbf{V}_{wind} = \begin{bmatrix} V_{wind_N} \\ V_{wind_E} \\ 0 \end{bmatrix}$$

真实空速 (True Air Speed, TAS)，又称真空速，是表示飞行器飞行时相对于周围空气运动的速度。真实空速的方程与温度和空气密度相关。在这里做一个简化，假设其为飞行器相对于地球固定坐标系的速度向量 \mathbf{V}_I 和风速向量 \mathbf{V}_{wind} 的差值，并乘上真实空速缩放因子 k_{tas} 。

所以，最终的要估计的状态向量 \mathbf{x} 为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} V_{wind_N} \\ V_{wind_E} \\ k_{tas} \end{bmatrix}$$

并且假设风场在短时间内不会有大的变化, 所以采用固定过程模型。

系统的输入。由 GPS、光流、外部视觉等传感器提供飞行器的速度向量 $\mathbf{V}_I = \begin{bmatrix} V_N & V_E & V_D \end{bmatrix}^T$, 我们关注 N/E 方向的地面速度方差 $\sigma^2 = \begin{bmatrix} \sigma_{V_N}^2 & \sigma_{V_E}^2 \end{bmatrix}^T$ 。对于风速的过程噪声分量为 Q_w , 对于真实空速过程噪声分量为 $Q_{k_{tas}}$ 。对于固定翼飞机, 由空速传感器提供真实空速测量值 TAS_{meas} , 其测量噪声为 R_{tas} ; 对于旋翼飞机, 由合成侧滑 beta 计算真实空速测量值, 其测量噪声为 R_{beta} 。

8.2 初始化

初始化阶段的主要目标是通过地面速度初始化风速协方差。这是一种快速算法, 与时间更新阶段的方程不一样。

根据地面速度估计航向角 ψ 为

$$\psi = \text{atan2}(V_N, V_E)$$

根据近水平面的假设, 根据飞行器地面速度、航向和空速测量值计算风速估计值 (状态向量)

$$\text{wind}_{est} = \begin{bmatrix} V_{wind_N} \\ V_{wind_E} \\ k_{tas} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ k_{tas} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot TAS_{meas}$$

设置状态协方差矩阵的估计初值为

$$\mathbf{P}_0 = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \sigma_{V_N}^2 \\ \sigma_{V_E}^2 \\ k_{tas} \end{bmatrix} \right)$$

其中, 设置 k_{tas} 初值为 0.0001。

计算风速的状态转移矩阵 \mathbf{F} , 其为相对于北/东方向的速度的状态和真实空速测量值的状态的 Jacobian 矩阵,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\partial(\text{wind}_{est})}{\partial \left(\begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ k_{tas} \end{bmatrix} \right)} \\ &= \begin{bmatrix} L_4 & L_0 \cdot L_3 + L_6 & 0 \\ L_1 \cdot L_3 + L_6 & L_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
L_0 &= V_N^2 \\
L_1 &= V_E^2 \\
L_2 &= V_N^2 + V_E^2 \\
L_3 &= \frac{TAS_{meas}}{(V_N^2 + V_E^2) \sqrt{(V_N^2 + V_E^2)}} \\
L_4 &= \frac{TAS_{meas} \cdot V_N^2 \cdot V_E^2}{(V_N^2 + V_E^2) \sqrt{(V_N^2 + V_E^2)}} + 1 \\
L_5 &= \frac{1}{\sqrt{V_N^2 + V_E^2}} \\
L_6 &= -\frac{TAS_{meas}}{\sqrt{V_N^2 + V_E^2}}
\end{aligned}$$

根据地面速度和实测空速值的估计方差，获得初始化时的状态协方差矩阵 \mathbf{P} 的估计值

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{P}_0 \mathbf{F}^T$$

8.3 时间更新

因为算法采用的是固定过程模型，所以状态转移矩阵 $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ 。我们只需要提供协方差预测公式。

创建协方差预测的过程噪声矩阵

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} Q_w \\ Q_w \\ Q_{k_{tas}} \end{bmatrix} \cdot dt$$

计算系统过程噪声矩阵 $\mathbf{Q}_{3 \times 3}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{2 \times 2} &= \text{diag} \left(\begin{bmatrix} Q_w \\ Q_{k_{tas}} \end{bmatrix} \right) \\
\mathbf{G} &= \frac{\partial \mathbf{x}_{k+1}}{\partial \left(\begin{bmatrix} Q_w \\ Q_{k_{tas}} \end{bmatrix} \right)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot dt \\
\mathbf{Q}_{3 \times 3} &= \mathbf{G} \mathbf{Q}_{2 \times 2} \mathbf{G}^T
\end{aligned}$$

协方差矩阵 \mathbf{P} 的预测方程

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{P}_{k-1|k-1} + \mathbf{Q}_{3 \times 3}$$

8.4 测量更新

8.4.1 真实空速融合

对于带有空速传感器的非旋翼无人机，采用这个分支。本节的方程可对比第 5.4 节“空速融合方程”的内容。

计算真实空速预测值 TAS_{pred}

$$\begin{aligned} TAS_{pred} &= \|\mathbf{V}_I - \mathbf{V}_{wind}\|_2 \cdot k_{tas} \\ &= \sqrt{(V_N - V_{wind_N})^2 + (V_E - V_{wind_E})^2 + V_D^2} \cdot k_{tas} \end{aligned}$$

真实空速的观测矩阵 \mathbf{H}_{tas}

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{tas} &= \frac{\partial (TAS_{pred})}{\partial \mathbf{x}_k} \\ &= \frac{\partial \left(\sqrt{(V_N - V_{wind_N})^2 + (V_E - V_{wind_E})^2 + V_D^2} \cdot k_{tas} \right)}{\partial \left(\begin{bmatrix} V_{wind_N} \\ V_{wind_E} \\ k_{tas} \end{bmatrix} \right)} \end{aligned}$$

计算新息 (或残差) 协方差 S

$$S = \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T + R_{tas}$$

最佳卡尔曼增益 $\mathbf{K}_{3 \times 1}$

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T S^{-1}$$

更新 (后验) 的协方差 $\mathbf{P}_{3 \times 3}$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K} \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1}$$

最后注意，风速融合频率不超过 10 Hz。

8.4.2 合成侧滑融合

对于提供虚拟合成侧滑数值的旋翼无人机，采用这个分支。本节的方程可对比第 5.5 节“合成侧滑融合方程”的内容。

计算在飞行器机体坐标系中的相对于地球坐标系的风速向量

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{wind}^N &= \mathbf{V}_I - \mathbf{V}_{wind} \\ &= \begin{bmatrix} V_N - V_{wind_N} \\ V_E - V_{wind_E} \\ V_D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

根据外部输入的姿态四元数 q 得到从机体坐标系到导航坐标系的旋转矩阵 $[\mathbf{T}]_B^N$

$$[\mathbf{T}]_B^N = \mathbf{R}(q)$$

计算相对于机体坐标系的风速

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{wind}^B &= \left([T]_B^N \right)^T \cdot \mathbf{V}_{wind}^N \\ &= \begin{bmatrix} V_{wind_X} \\ V_{wind_Y} \\ V_{wind_Z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

合成侧滑模型的小角度近似方程为

$$\text{beta} = \frac{V_{wind_Y}}{V_{wind_X}}$$

并且根据近水平面假设, beta 即为残差。

计算合成侧滑的观测矩阵 \mathbf{H}_{beta}

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{beta} &= \frac{\partial (\text{beta})}{\partial \mathbf{x}_k} \\ &= \frac{\partial \left(\frac{V_{wind_Y}}{V_{wind_X}} \right)}{\partial \left(\begin{bmatrix} V_{wind_N} \\ V_{wind_E} \\ k_{tas} \end{bmatrix} \right)} \end{aligned}$$

后面的计算如上一小节一样。

9 GPS 的应用

在 ECL 估计系统中, GPS 有着非常重要且特殊的地位。在这里, GPS 有三种应用: 一是在主要的 24-EKF 中校正状态向量; 二是计算纬度/经度点之间的距离、方位角 (bearing); 三是配合全球地磁观测网站提供纬度/经度点的磁偏角。第一种用途已经在前面详细讨论, 后面简略讨论后两种的算法。

9.1 计算纬度/经度点之间的距离与方位角

因为人体的高度和视野相对于巨大的地球而言十分渺小, 于是我们就误以为我们所处的大地是一个平面, 但其实地球是一个近似圆球的椭球体。在一般的短距离的应用中, 我们把地球近似为平均半径 $r = 6371 \text{ km}$ 的理想圆球。在这个假设中, ECL 选择方位等距投影 (Azimuthal Equidistant Projection) 方式计算纬度/经度点之间的距离与方位角。

方位投影 (Azimuthal Projection) 是一种地图投影, 其上所有点的方位都相对于中心正确显示。与地球两极之一相切的平面是极方位投影的基础。对于方位投影, “天顶 (zenithal)” 一词是一个更古老的术语。方位投影最显著的特征是在图上测量的从中心到任意一点的距离是真实的。因而, 地图上以投影中心为圆心的圆在真实地球上与投影中心是等距离的。同时, 从中心出发的任意方向也是真实的。该投影常用于展示多个地理位置与指定点的距离图。

方位等距投影 (Azimuthal Equidistant Projection) 是一种面积既不相等 (equal-area) 也不共形 (conformal) 的方位投影。等距方位投影可以保留距中心点的距离和方向。等距方位投影是假想球面与平面相切, 有极方位投影、赤道投影和斜轴投影三种, 分别是: 切于极点为正轴, 切于赤道为

横轴，切于极点和赤道之间的任意点为斜轴。经纬线形式同一般方位投影，只是在中央经线上纬线间隔相等。其特点是：由切点至任一方向的距离同实地相符；最大角度和面积变形均为以切点为圆心的同心圆。这种投影常用于半球图，交通图等。

ECL 采用的是局部方位等距投影 (Local Azimuthal Equidistant Projection)，也就是斜轴投影。其直觉与我们应用李群和李代数的关系类似，在这里进行的是地理坐标系统 (geographic coordinate system) 和方位等距平面 (azimuthal equidistant plane) 之间的变换。我们以飞行器当前点为切点/原点建立局部水平面，亦称局部方位等距平面 (local azimuthal equidistant plane)。在局部水平面中，从原点出发的射线都是等距，射线的方位角保真，我们在此向量空间中进行向量计算，计算出到达下一个航路点 (waypoint) 的距离与方位角，然后收到球面上，就得到下一个航路点的纬度/经度，或者是反过来计算，将下一航路点的纬度/经度展开到当前水平面中，由此计算飞行距离与方位角。到达下一个航路点后，我们再在这个航路点上建立新的局部水平面，并做下一步的计算。

计算纬度/经度点之间的距离与方位角的算法很古老也很成熟，其中还涉及到基于向量的大地测量学知识。感兴趣的读者可以查看相关的书籍和网站。

9.2 提供纬度/经度点的磁偏角

这里的算法十分简单，就是从开发和分发地球磁场模型的网站获取地磁数据档案，建立查询表格。然后根据当前的纬度/经度，查询表格，获取当前点的磁偏角数据，提供给 ECL 估计系统进行方位校正。

10 惯性航位推算

航位推算 (dead reckoning) 指的是无天文观测辅助导航，或者是基于很少或没有信息的位置估计。在 ECL 的估计系统中，当 GPS 类的全局定位数据不可用的情况下，24-EKF 仅使用惯性数据进行航位推算，并且执行的是水平惯性航位推算 (horizontal inertial dead reckoning)。这是因为存在磁力计就可以校正姿态，存在气压计或测距仪就可以校正 z 轴高度，但是只有 GPS 类的全局定位数据，才能校正飞行器水平面的位置。当全局定位数据丢失或误差过大，则 ECL 估计系统就进入航位推算模式。注意，如果存在光流则可以校正北/东方向速度，从而间接校正了水平面的增量位移，因此 ECL 估计系统不会进入航位推算模式。

当没有 GPS 类的全局定位数据，并且没有光流数据的情况下，航位推算模式还分为两种级别。第一种是存在水平风场数据，则进入风场航位推算 (wind dead reckoning) 模式，此时可以用水平风场向量校正北/东方向速度，从而间接校正了水平面的增量位移，这是第 5.4 节“空速融合方程”和第 5.5 节“合成侧滑融合方程”的内容。第二种是连水平风场向量都没有的情况下，则是完全的水平惯性航位推算。

基于惯性的航位推算，根据经验，水平面位置的估计值，大约最长有 $5 \sim 10$ s 的有效期。所以在 ECL 估计系统中，设置 5 s 的有效期阈值，并且超过 7 s 就将状态向量中的水平位置和速度重置。

11 输出互补滤波器

该算法使用当前时间范围内的最新 IMU 数据实现惯性导航。该算法缓冲惯性导航状态，并计算延迟融合时间范围内与 EKF 状态的差异。根据差值计算增量角、增量速度和速度校正，并在当

前时间范围内应用它们，以便惯性导航状态在延迟融合时间范围内跟踪 EKF 状态。使用互补滤波器校正 EKF 中的时间延迟的灵感来源于参考文档 [12] 的工作。

从软件的角度看，因为现在的系统越来越复杂，原本在 RTOS 时代所做的假设越来越不能得到满足。现在传感器采样，滤波器计算位姿，用户获取位姿，都分别处于不同的线程中，有不同的工作频率。众多传感器各自工作在不同的频率，异步采样，数据异步到达。滤波器有自己的工作频率，上层软件也有另外的工作频率。所有这些，都会有一个时间差，因此在用户获取当前位姿信息的瞬间，滤波器需要对当前所维护的信息做一个补偿，这就是输出互补滤波器。它的工作原理就是维护一个历史窗口，从历史数据中计算互补参数，然后对输出信息进行校正，具体的原理请看参考文档 [12]。在这里没有什么复杂的计算公式，一行的互补公式较多且大多简单细碎，经验参数众多，要看懂还得依赖专业背景和工程经验。

12 总结

ECL EKF 算法最大的特点就是使用传感器组合进行状态估计。这使得系统具有很高的容错性，即对传感器故障的容忍度，但也使得算法具有更大的复杂度。但是在代码里，更多的代码是对数据和协方差矩阵质量判断，并对上下限进行钳制处理，发现异常后更换数据源的处理。这些方法和经验数据，是多年的经验积累，是在一个个项目中一点点地磨炼出来的经验总结。这才是 ECL EKF 模块最有价值的地方，因为主要算法可以在短时间内掌握，而这些知识只有靠时间来积淀。

不过 ECL EKF 算法也有值得探讨的地方。数学上已经清楚，旋转 (包括四元数和旋转矩阵) 不可以直接用卡尔曼滤波器进行估计，因为旋转是群而不是向量，而卡尔曼滤波器里面最核心的概念 — 协方差 — 只能处理向量。因此直接把四元数放入卡尔曼滤波器中计算，估计的是四元数而不是旋转。

此外，对比误差状态 EKF 算法，就会发现这里的 Jacobian 矩阵展开后十分复杂，只要涉及旋转 (包括四元数和旋转矩阵) 的方程的 Jacobian 矩阵都很复杂，并且难以解释。而在误差状态 EKF 算法中，误差大多在零点附近抖动，因此有较好的近线性特性，因此 Jacobian 矩阵和标准的 KF 的矩阵很类似，因此计算速度会快一些，理论上精度也会高一些，并且容易解释。

但是，ECL EKF 模块已经在广大的产品和项目里得到验证，不论是在模拟器里还是在实际环境中，它的计算速度和精度都经受了检验。对此只能说卡尔曼滤波器真是一个很神奇的东西，在工程中实用为上。

13 参考文献

1. PX4: Estimation & Control Library for Guidance, Navigation and Control Applications - EKF
2. PX4 - EKF - documentation
3. PX4 - EKF - python code
4. PX4 - EKF - matlab code
5. Using the ECL EKF
6. EKF2 Estimation System
7. Extended Kalman Filter Navigation Overview and Tuning
8. Extended Kalman Filter (EKF)
9. NavEKF Change Overview 2020
10. PX4 State Estimation 2021 Update
11. Extended Kalman Filter
12. Recursive Attitude Estimation in the Presence of Multi-rate and Multi-delay Vector Measurements
13. PX4 的 ECL EKF 公式推导及代码解析
14. PX4 InertialNAV Filter 与 EKF2 概论