李群的导数与 Jacobian 矩阵

Shuyong Chen

2023 年 7 月 26 日

—姜太公直钩钓鱼有云：宁可直中取，不向曲中求。

1 简介

在向量微积分中，多个变量的向量值函数的**雅可比矩阵** (**Jacobian matrix**) 是其所有一阶偏导数的矩阵。

假设 $\mathbf{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 是一个函数，使得它的每个一阶偏导数都存在于 $\mathbf{R}^n$ 上。该函数将点 $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ 作为输入，并生成向量 $\mathbf{f}(\mathbf{x})\in\mathbf{R}^m$ 作为输出。那么 $\mathbf{f}$ 的 Jacobian 矩阵被定义为一个 $m\times n$ 矩阵，记为 $\mathbf{J}$，其第 (i,j) 项为 $\mathbf{J}_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$，或明确地

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\nabla^{\mathrm{T}} f_1\\ \vdots \\ \nabla^{\mathrm{T}} f_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

其中 $\nabla^{\mathrm{T}} f_i$ 是梯度的转置 (行向量) 的第 i 个分量。

Jacobian 矩阵表示 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{f}$ 的可微分的每个点上的微分。具体来说，如果 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}$ 处可微，如果 $\mathbf{h}$ 是一个列矩阵表示的位移向量，那么矩阵乘积 $\mathbf{J}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}$ 是另一个位移向量，即 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 的邻域内的变化的最佳线性近似。这意味着将 $\mathbf{y}$ 映射到 $\mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{J}(\mathbf{x})\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ 的函数是 $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ 对于所有靠近 $\mathbf{x}$ 的点的最佳线性逼近。该线性函数称为 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 处的**导数** (*derivative*) 或**微分** (*differential*)。

形象地说，Jacobian 矩阵在流形的当前线性化点的各个自然基方向上求导，因此在线性化点处形成一个超平面，所以我们主要采用 Jacobian 矩阵映射向量切空间的形式在李群中定义导数。因为在这些空间中，不确定性和增量可以被恰当而容易地定义。利用这些 Jacobian 矩阵，李群中的不确定性管理公式与向量空间中的不确定性管理公式基本相似。

2 伴随与伴随矩阵

在应用 Jacobian 矩阵的公式中，经常遇到伴随矩阵，因此这里对此做简单摘要。

首先是指数映射的重要性质

$$\exp\left((t+s)\boldsymbol{\tau}^\wedge\right)=\exp\left(t\boldsymbol{\tau}^\wedge\right)\exp\left(s\boldsymbol{\tau}^\wedge\right) \tag{1}$$

$$\exp\left(t\boldsymbol{\tau}^\wedge\right)=\exp\left(\boldsymbol{\tau}^\wedge\right)^t \tag{2}$$

$$\exp\left(-\boldsymbol{\tau}^\wedge\right)=\exp\left(\boldsymbol{\tau}^\wedge\right)^{-1} \tag{3}$$

$$\exp\left(\mathcal{X}\boldsymbol{\tau}^\wedge\mathcal{X}^{-1}\right)=\mathcal{X}\exp\left(\boldsymbol{\tau}^\wedge\right)\mathcal{X}^{-1} \tag{4}$$

其中方程 (4) 很有用，在推导伴随矩阵和 Jacobian 矩阵时经常用到。

流形 $\mathcal{M}$ 有幺元 $\mathcal{E}$，在 $\mathcal{X}$ 处的切空间中有向量 $\boldsymbol{\tau}$。我们用伴随矩阵进行局部切元素和全局切元素的变换

$$\begin{aligned}\operatorname{Exp}\left({}^{\mathcal{E}}\boldsymbol{\tau}\right)\mathcal{X} &= \mathcal{X}\operatorname{Exp}\left({}^{\mathcal{X}}\boldsymbol{\tau}\right)\\ \exp\left({}^{\mathcal{E}}\boldsymbol{\tau}^{\wedge}\right) &= \mathcal{X}\exp\left({}^{\mathcal{X}}\boldsymbol{\tau}^{\wedge}\right)\mathcal{X}^{-1} = \exp\left(\mathcal{X}\,{}^{\mathcal{X}}\boldsymbol{\tau}^{\wedge}\mathcal{X}^{-1}\right)\\ {}^{\mathcal{E}}\boldsymbol{\tau}^{\wedge} &= \mathcal{X}\,{}^{\mathcal{X}}\boldsymbol{\tau}^{\wedge}\mathcal{X}^{-1}\end{aligned}$$

因此，我们将 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{X}$ 处的伴随记为 $\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}$，定义为

$$\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}:\mathfrak{m}\to\mathfrak{m};\ \boldsymbol{\tau}^{\wedge}\mapsto\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}\left(\boldsymbol{\tau}^{\wedge}\right)\triangleq\mathcal{X}\,{}^{\mathcal{X}}\boldsymbol{\tau}^{\wedge}\mathcal{X}^{-1}, \tag{5}$$

因此有

$$\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}\boldsymbol{\tau} = \left(\mathcal{X}\,{}^{\mathcal{X}}\boldsymbol{\tau}^{\wedge}\mathcal{X}^{-1}\right)^{\vee}. \tag{6}$$

这定义了群在它自己的李代数上的伴随作用。伴随矩阵有一些常用的性质

$$\mathcal{X}\oplus\boldsymbol{\tau} = \left(\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}\boldsymbol{\tau}\right)\oplus\mathcal{X} \tag{7}$$

$$\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}^{-1}} = \mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}^{\ \ -1} \tag{8}$$

$$\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} = \mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}\mathbf{Ad}_{\mathcal{Y}}. \tag{9}$$

请注意在方程 (8, 9) 中的左半部分通常比右半部分计算起来更方便快捷。我们将经常使用伴随矩阵将 $\mathcal{X}$ 处的切空间的向量线性变换为原点的切空间的向量，应用方程为 ${}^{\mathcal{E}}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}\,{}^{\mathcal{X}}\boldsymbol{\tau}$。

3 向量空间上的 Jacobian 矩阵

对于多元函数 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$，Jacobian 矩阵定义为所有偏导数的 $n\times m$ 矩阵，

$$\mathbf{J} = \frac{\partial f\left(\mathbf{x}\right)}{\partial\mathbf{x}} \triangleq \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}\end{bmatrix} \in\mathbb{R}^{n\times m}. \tag{10}$$

让我们用列向量形式分割 $\mathbf{J} = [\mathbf{j}_1\cdots\mathbf{j}_m]$，并让 $\mathbf{j}_i = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_i}\end{bmatrix}^{\top}$ 作为它的第 i 个列向量。此列向量响应于

$$\mathbf{j}_i = \frac{\partial f\left(\mathbf{x}\right)}{\partial x_i} \triangleq \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\mathbf{x}+h\mathbf{e}_i\right)-f\left(\mathbf{x}\right)}{h}\in\mathbb{R}^n, \tag{11}$$

其中 $\mathbf{e}_i$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的自然基的第 i 个向量。对于分子，注意这个向量

$$\mathbf{v}_i\left(h\right)\triangleq f\left(\mathbf{x}+h\mathbf{e}_i\right)-f\left(\mathbf{x}\right)\in\mathbb{R}^n \tag{12}$$

是当 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{e}_i$ 方向上受到扰动时，$f\left(\mathbf{x}\right)$ 的变化量，并且相应的 Jacobian 矩阵的列仅为

$$\mathbf{j}_i = \left.\frac{\partial\mathbf{v}_i\left(h\right)}{\partial h}\right|_{h=0} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{v}_i\left(h\right)}{h}.$$

我们引入紧凑形式，

$$\mathbf{J} = \frac{\partial f\left(\mathbf{x}\right)}{\partial\mathbf{x}} \triangleq \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{f\left(\mathbf{x}+\mathbf{h}\right)-f\left(\mathbf{x}\right)}{\mathbf{h}}\in\mathbb{R}^{n\times m}, \tag{13}$$

其中 $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$, 其用方程 (11) 计算所有列以形成方程 (10) 的定义。我们注意到方程 (13) 只是一个方便的符号 (就像方程 (10) 一样)，因为向量 $\mathbf{h}$ 的除法未定义，正确的计算需要方程 (11) 。然而，通过将分子扩展 $\mathbf{h}$ 中的线性形式，并将左手侧标识为 Jacobian 矩阵，该形式可用于计算 Jacobian 矩阵，即，

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})}{\mathbf{h}} = \cdots = \lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\mathbf{Jh}}{\mathbf{h}} \triangleq \frac{\partial \mathbf{Jh}}{\partial \mathbf{h}} = \mathbf{J}. \tag{14}$$

对于 $\mathbf{h}$ 的小值，我们有线性近似值，

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) \xrightarrow[\mathbf{h}\to 0]{} f(\mathbf{x}) + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{h}. \tag{15}$$

4 李群上的 Jacobian 矩阵

4.1 李群上的右 Jacobian 矩阵

受上面标准导数定义方程 (13) 的启发，我们现在可以使用我们的 $\oplus$ 和 $\ominus$ 算子来定义作用于流形的函数 $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 的 Jacobian 矩阵。使用右结合 (right-) 的 $\{\oplus, \ominus\}$ 代替 $\{+, -\}$，我们获得一个类似于标准导数的形式，

$$\frac{{}^{\mathcal{X}}Df(\mathcal{X})}{D\mathcal{X}} \triangleq \lim_{\boldsymbol{\tau}\to 0} \frac{f(\mathcal{X}\oplus\boldsymbol{\tau}) \ominus f(\mathcal{X})}{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{R}^{n\times m} \tag{16a}$$

$$= \lim_{\boldsymbol{\tau}\to 0} \frac{\operatorname{Log}\left(f(\mathcal{X})^{-1} \circ f(\mathcal{X}\circ \operatorname{Exp}(\boldsymbol{\tau}))\right)}{\boldsymbol{\tau}} \tag{16b}$$

$$= \left.\frac{\partial \operatorname{Log}\left(f(\mathcal{X})^{-1} \circ f(\mathcal{X}\circ \operatorname{Exp}(\boldsymbol{\tau}))\right)}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right|_{\boldsymbol{\tau}=0}. \tag{16c}$$

我们把这种 Jacobian 矩阵称为 f 函数的右 Jacobian 矩阵。请注意方程 (16c) 只是在标准导数方程 (13) 中使用相当复杂的函数 $g(\boldsymbol{\tau}) = \operatorname{Log}\left(f(\mathcal{X})^{-1} \circ f(\mathcal{X}\circ \operatorname{Exp}(\boldsymbol{\tau}))\right)$。将其写入方程 (16a) 中传达了更多的直觉：它是 $f(\mathcal{X})$ 相对于 $\mathcal{X}$ 的导数，只是我们表达为在切空间中的无穷小变化！实际上，由于使用右结合 (right-) 的 $\oplus$ 和 $\ominus$ 的操作，$\mathcal{X}$ 和 $f(\mathcal{X})$ 中的变量现在被表示为局部切空间中的向量，即分别在 $\mathcal{X} \in \mathcal{M}$ 和 $f(\mathcal{X}) \in \mathcal{N}$ 处的正切。这个导数是一个适当的 Jacobian 矩阵 $\mathbb{R}^{n\times m}$ 线性地映射到局部 (local) 切空间 $T_{\mathcal{X}}\mathcal{M} \to T_{f(\mathcal{X})}\mathcal{N}$ (并且我们用一个局部‘$\mathcal{X}$’上标来标记导数)。就像在向量空间中一样，这个矩阵的列对应于方向导数。也就是对于向量

$$\boldsymbol{\sigma}_i(h) = f(\mathcal{X}\oplus h\mathbf{e}_i) \ominus f(\mathcal{X}) \in \mathbb{R}^n \tag{17}$$

用方程 (12) 中的 $\mathbf{v}_i$ 来比较方程 (17) 的 $\boldsymbol{\sigma}_i$，其是当 $\mathcal{X}$ 沿着 $\mathbf{e}_i$ 方向变化时，$f(\mathcal{X})$ 的变化。其相应的 Jacobian 矩阵的列是

$$\mathbf{j}_i = \left.\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_i(h)}{\partial h}\right|_{h=0}.$$

注意，每当函数 f 从一个流形传递到另一个流形时，方程 (16a) 中的加号和减号算子必须被正确选择：$\oplus$ 对应定义域 (domain) $\mathcal{M}$，并且 $\ominus$ 对应陪域 (codomain) 或图 (image) $\mathcal{N}$。

对于 $\boldsymbol{\tau}$ 的小值，以下近似值适用，

$$f\left(\mathcal{X}\oplus {}^{\mathcal{X}}\boldsymbol{\tau}\right) \xrightarrow[{}^{\mathcal{X}}\boldsymbol{\tau}\to 0]{} f(\mathcal{X}) \oplus \frac{{}^{\mathcal{X}}Df(\mathcal{X})}{D\mathcal{X}}\,{}^{\mathcal{X}}\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{N}. \tag{18}$$

4.2 李群上的左 Jacobian 矩阵

导数也可以由左结合 (left-) 加号和减号算子定义，因此，

$$\begin{aligned}\frac{{}^{\mathcal{E}}Df(\mathcal{X})}{D\mathcal{X}} &\triangleq \lim_{\boldsymbol{\tau}\to 0}\frac{f(\boldsymbol{\tau}\oplus\mathcal{X})\ominus f(\mathcal{X})}{\boldsymbol{\tau}}\in\mathbb{R}^{n\times m} \\ &= \lim_{\boldsymbol{\tau}\to 0}\frac{\log\left(f(\operatorname{Exp}(\boldsymbol{\tau})\circ\mathcal{X})\circ f(\mathcal{X})^{-1}\right)}{\boldsymbol{\tau}} \\ &= \left.\frac{\partial\log\left(f(\operatorname{Exp}(\boldsymbol{\tau})\circ\mathcal{X})\circ f(\mathcal{X})^{-1}\right)}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right|_{\boldsymbol{\tau}=0},\end{aligned} \tag{19}$$

我们称之为 f 函数的左 Jacobian 矩阵。请注意，现在 $\boldsymbol{\tau}\in T_{\mathcal{E}}\mathcal{M}$，并且分子属于 $T_{\mathcal{E}}\mathcal{N}$，因此左 Jacobian 矩阵是一个 $n\times m$ 的矩阵，映射了全局 (global) 切空间，$T_{\mathcal{E}}\mathcal{M}\to T_{\mathcal{E}}\mathcal{N}$，这是 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 的李代数 (并且我们用全局或原点‘$\mathcal{E}$’上标来标记导数)。对于 $\boldsymbol{\tau}$ 的小值，以下方程成立，

$$f\left({}^{\mathcal{E}}\boldsymbol{\tau}\oplus\mathcal{X}\right)\xrightarrow[{}^{\mathcal{E}}\boldsymbol{\tau}\to 0]{}\frac{{}^{\mathcal{E}}Df(\mathcal{X})}{D\mathcal{X}}{}^{\mathcal{E}}\boldsymbol{\tau}\oplus f(\mathcal{X})\quad\in\mathcal{N}. \tag{20}$$

我们可以从方程 (18, 20) 中展示左和右 Jacobian 矩阵由 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 的伴随相关联的关系，

$$\frac{{}^{\mathcal{E}}Df(\mathcal{X})}{D\mathcal{X}}\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}=\mathbf{Ad}_{f(\mathcal{X})}\frac{{}^{\mathcal{X}}Df(\mathcal{X})}{D\mathcal{X}}. \tag{21}$$

4.3 交叉使用右-左 Jacobian 矩阵

也可以同时使用右侧加号和左侧减号来定义 Jacobian 矩阵，反之亦然。虽然不太可能，但它们有时很有用，因为它们将局部的正切映射到全局的正切，反之亦然。简而言之，我们将通过伴随把它们与其它 Jacobian 矩阵联系起来，

$$\frac{{}^{\mathcal{E}}D\mathcal{Y}}{{}^{\mathcal{X}}D\mathcal{X}}=\frac{{}^{\mathcal{E}}D\mathcal{Y}}{{}^{\mathcal{E}}D\mathcal{X}}\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}=\mathbf{Ad}_{\mathcal{Y}}\frac{{}^{\mathcal{Y}}D\mathcal{Y}}{{}^{\mathcal{X}}D\mathcal{X}} \tag{22}$$

$$\frac{{}^{\mathcal{Y}}D\mathcal{Y}}{{}^{\mathcal{E}}D\mathcal{X}}=\frac{{}^{\mathcal{Y}}D\mathcal{Y}}{{}^{\mathcal{X}}D\mathcal{X}}\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}{}^{-1}=\mathbf{Ad}_{\mathcal{Y}}{}^{-1}\frac{{}^{\mathcal{E}}D\mathcal{Y}}{{}^{\mathcal{E}}D\mathcal{X}}, \tag{23}$$

其中 $\mathcal{Y}=f(\mathcal{X})$ 。现在，上一行和下一行的上标表明表示差异的参考坐标系。相应的小 $\boldsymbol{\tau}$ 的近似值取为，

$$f\left(\mathcal{X}\oplus{}^{\mathcal{X}}\boldsymbol{\tau}\right)\xrightarrow[{}^{\mathcal{X}}\boldsymbol{\tau}\to 0]{}\frac{{}^{\mathcal{E}}Df(\mathcal{X})}{{}^{\mathcal{X}}D\mathcal{X}}{}^{\mathcal{X}}\boldsymbol{\tau}\oplus f(\mathcal{X}) \tag{24}$$

$$f\left({}^{\mathcal{E}}\boldsymbol{\tau}\oplus\mathcal{X}\right)\xrightarrow[{}^{\mathcal{E}}\boldsymbol{\tau}\to 0]{}f(\mathcal{X})\oplus\frac{{}^{f(\mathcal{X})}Df(\mathcal{X})}{{}^{\mathcal{E}}D\mathcal{X}}{}^{\mathcal{E}}\boldsymbol{\tau}. \tag{25}$$

5 流形上的微分法则

对于我们所使用的所有经典流形 $\mathcal{M}$，对于求逆 (inversion)、组合 (composition)、求幂 (exponentiation) 和作用 (action) 的初等 Jacobian 矩阵，我们可以确定封闭形式。此外，其中一些形式可能与伴随 $\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}$ 有关，后者成为微分过程的矩阵中心块。Log、$\oplus$ 和 $\ominus$ 等其它形式可以很容易地从它们当中推导出来。一旦找到这些形式或“矩阵块”，所有其它 Jacobian 矩阵都遵循链式法则。这

里扩展的所有 Jacobian 矩阵都是右 Jacobian 矩阵，即由方程 (16a) 所定义。对于扩展左 Jacobian 矩阵，可采用方程 (21) 进行变换，因为

$$\frac{{}^{\mathcal{E}}Df\left(\mathcal{X}\right)}{D\mathcal{X}}=\mathbf{Ad}_{f(\mathcal{X})}\frac{{}^{\mathcal{E}}Df\left(\mathcal{X}\right)}{D\mathcal{X}}\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}{}^{-1}. \tag{26}$$

我们使用便捷符号 $\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{f(\mathcal{X})}\triangleq\frac{Df\left(\mathcal{X}\right)}{D\mathcal{X}}$ 和 $\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}\triangleq\frac{D\mathcal{Y}}{D\mathcal{X}}$。此外，$\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}{}^{-1}$ 应该由 $\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}^{-1}}$ 实现，参见方程 (8, 9)，因为后者运算快一些。

5.1 求逆 (Inverse)

我们用方程 (16a) 定义

$$\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}^{-1}}\triangleq\frac{{}^{\mathcal{X}}D\mathcal{X}^{-1}}{D\mathcal{X}}\qquad\in\mathbb{R}^{m\times m} \tag{27}$$

这可以通过方程 (6) 的伴随来确定，

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}^{-1}}&=\lim_{\boldsymbol{\tau}\to0}\frac{\mathrm{Log}\left(\left(\mathcal{X}^{-1}\right)^{-1}\left(\mathcal{X}\mathrm{Exp}\left(\boldsymbol{\tau}\right)\right)^{-1}\right)}{\boldsymbol{\tau}}\\&=\lim_{\boldsymbol{\tau}\to0}\frac{\mathrm{Log}\left(\mathcal{X}\mathrm{Exp}\left(-\boldsymbol{\tau}\right)\mathcal{X}^{-1}\right)}{\boldsymbol{\tau}}\\&=\lim_{\boldsymbol{\tau}\to0}\frac{\left(\mathcal{X}\left(-\boldsymbol{\tau}\right)^{\wedge}\mathcal{X}^{-1}\right)^{\vee}}{\boldsymbol{\tau}}=-\mathbf{Ad}_{\mathcal{X}}\end{aligned} \tag{28}$$

5.2 组合 (Composition)

我们用方程 (16a) 定义

$$\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}\circ\mathcal{Y}}\triangleq\frac{{}^{\mathcal{X}}D\mathcal{X}\circ\mathcal{Y}}{D\mathcal{X}}\qquad\in\mathbb{R}^{m\times m} \tag{29}$$

$$\mathbf{J}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}\circ\mathcal{Y}}\triangleq\frac{{}^{\mathcal{Y}}D\mathcal{X}\circ\mathcal{Y}}{D\mathcal{Y}}\qquad\in\mathbb{R}^{m\times m} \tag{30}$$

并如上面一样使用方程 (4, 6)，并使用方程 (8) 来确定，

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}\circ\mathcal{Y}}&=\lim_{\boldsymbol{\tau}\to0}\frac{\mathrm{Log}\left(\left(\mathcal{X}\mathcal{Y}\right)^{-1}\left(\mathcal{X}\mathrm{Exp}\left(\boldsymbol{\tau}\right)\mathcal{Y}\right)\right)}{\boldsymbol{\tau}}\\&=\lim_{\boldsymbol{\tau}\to0}\frac{\mathrm{Log}\left(\mathcal{Y}^{-1}\mathrm{Exp}\left(\boldsymbol{\tau}\right)\mathcal{Y}\right)}{\boldsymbol{\tau}}\\&=\lim_{\boldsymbol{\tau}\to0}\frac{\left(\mathcal{Y}^{-1}\boldsymbol{\tau}^{\wedge}\mathcal{Y}\right)^{\vee}}{\boldsymbol{\tau}}=\mathbf{Ad}_{\mathcal{Y}}{}^{-1}\end{aligned} \tag{31}$$

$$\mathbf{J}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}\circ\mathcal{Y}}=\lim_{\boldsymbol{\tau}\to0}\frac{\mathrm{Log}\left(\left(\mathcal{X}\mathcal{Y}\right)^{-1}\left(\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathrm{Exp}\left(\boldsymbol{\tau}\right)\right)\right)}{\boldsymbol{\tau}}=\mathbf{I} \tag{32}$$

5.3 流形 $\mathcal{M}$ 的 Jacobian 矩阵

我们定义流形 $\mathcal{M}$ 的右 Jacobian 矩阵为 $\mathcal{X}=\mathrm{Exp}\left(\boldsymbol{\tau}\right)$ 的右 Jacobian 矩阵，即对于 $\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{R}^{m}$，

$$\mathbf{J}_{r}\left(\boldsymbol{\tau}\right)\triangleq\frac{{}^{\boldsymbol{\tau}}D\mathrm{Exp}\left(\boldsymbol{\tau}\right)}{D\boldsymbol{\tau}}\quad\in\mathbb{R}^{m\times m}, \tag{33}$$

这由方程 (16a) 定义。右 Jacobian 矩阵将参数 $\boldsymbol{\tau}$ 的变化映射到 $\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau})$ 处的局部 (local) 切空间中的变化。从方程 (16a) 这很容易证明，对于小的 $\delta\boldsymbol{\tau}$ 值，以下近似值成立，

$$\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau}+\delta\boldsymbol{\tau}) \approx \mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau})\,\mathrm{Exp}(\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\tau})\,\delta\boldsymbol{\tau}) \tag{34}$$

$$\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau})\,\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\tau}) \approx \mathrm{Exp}\left(\boldsymbol{\tau}+\mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\tau})\,\delta\boldsymbol{\tau}\right) \tag{35}$$

$$\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau})\,\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\tau})) \approx \boldsymbol{\tau}+\mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\tau})\,\delta\boldsymbol{\tau}. \tag{36}$$

另一方面，流形 $\mathcal{M}$ 的左 Jacobian 矩阵被定义为，

$$\mathbf{J}_l(\boldsymbol{\tau}) \triangleq \frac{{}^{\mathcal{E}}D\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau})}{D\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{R}^{m\times m}, \tag{37}$$

使用左 Jacobian 矩阵方程 (19)，得出近似值

$$\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau}+\delta\boldsymbol{\tau}) \approx \mathrm{Exp}(\mathbf{J}_l(\boldsymbol{\tau})\,\delta\boldsymbol{\tau})\,\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau}) \tag{38}$$

$$\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\tau})\,\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau}) \approx \mathrm{Exp}\left(\boldsymbol{\tau}+\mathbf{J}_l^{-1}(\boldsymbol{\tau})\,\delta\boldsymbol{\tau}\right) \tag{39}$$

$$\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\tau})\,\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau})) \approx \boldsymbol{\tau}+\mathbf{J}_l^{-1}(\boldsymbol{\tau})\,\delta\boldsymbol{\tau}. \tag{40}$$

左 Jacobian 矩阵将参数 $\boldsymbol{\tau}$ 的变化映射到全局 (global) 切空间或李代数中的变化。从方程 (34, 38) 我们可以把左 Jacobian 矩阵和右 Jacobian 矩阵用伴随联系起来，

$$\mathbf{Ad}_{\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau})} = \mathbf{J}_l(\boldsymbol{\tau})\,\mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\tau}). \tag{41}$$

此外，链式法则允许我们关联 $\mathbf{J}_r$ 和 $\mathbf{J}_l$，

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_r(-\boldsymbol{\tau}) &\triangleq \mathbf{J}_{-\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{Exp}(-\boldsymbol{\tau})} = \mathbf{J}_{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{Exp}(-\boldsymbol{\tau})}\mathbf{J}_{-\boldsymbol{\tau}}^{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{J}_{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau})^{-1}}(-\mathbf{I}) \\ &= -\mathbf{J}_{\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau})}^{\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau})^{-1}}\mathbf{J}_{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau})} = \mathbf{Ad}_{\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau})}\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\tau}) \\ &= \mathbf{J}_l(\boldsymbol{\tau}).\end{aligned} \tag{42}$$

对于使用中的经典流形，$\mathbf{J}_r$、${\mathbf{J}_r}^{-1}$、$\mathbf{J}_l$ 和 ${\mathbf{J}_l}^{-1}$，存在封闭形式。见后面章节的推导。

5.4 群作用

对于 $\mathcal{X}\in\mathcal{M}$ 和 $v\in\mathcal{V}$，我们用方程 (16a) 定义

$$\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}\cdot v} \triangleq \frac{{}^{\mathcal{X}}D\mathcal{X}\cdot v}{D\mathcal{X}} \tag{43}$$

$$\mathbf{J}_{v}^{\mathcal{X}\cdot v} \triangleq \frac{{}^{v}D\mathcal{X}\cdot v}{Dv}. \tag{44}$$

由于群作用依赖于集合 $\mathcal{V}$，因此这些表达式不能通用化。

5.5 常见 Jacobian 矩阵块

Log 映射: 对于 $\boldsymbol{\tau}=\mathrm{Log}(\mathcal{X})$，并从方程 (36) ，

$$\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{Log}(\mathcal{X})} = \mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\tau}). \tag{45}$$

加号和减号： 我们有

$$\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}\oplus\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}\circ(\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau}))} \qquad = \mathbf{Ad}_{\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau})}{}^{-1} \tag{46}$$

$$\mathbf{J}_{\boldsymbol{\tau}}^{\mathcal{X}\oplus\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{J}_{\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau})}^{\mathcal{X}\circ(\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau}))}\mathbf{J}_{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau})} = \mathbf{J}_r\left(\boldsymbol{\tau}\right) \tag{47}$$

并得到 $\mathcal{Z} = \mathcal{X}^{-1}\circ\mathcal{Y}$ 和 $\boldsymbol{\tau} = \mathcal{Y}\ominus\mathcal{X} = \mathrm{Log}\left(\mathcal{Z}\right)$，

$$\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}\ominus\mathcal{X}} = \mathbf{J}_{\mathcal{Z}}^{\mathrm{Log}(\mathcal{Z})}\mathbf{J}_{\mathcal{X}^{-1}}^{\mathcal{Z}}\mathbf{J}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}^{-1}} = -\mathbf{J}_l^{-1}\left(\boldsymbol{\tau}\right) \tag{48}$$

$$\mathbf{J}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Y}\ominus\mathcal{X}} = \mathbf{J}_{\mathcal{Z}}^{\mathrm{Log}(\mathcal{Z})}\mathbf{J}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}} \qquad = \mathbf{J}_r^{-1}\left(\boldsymbol{\tau}\right) \tag{49}$$

6 三维变换群与 Jacobian 矩阵

对于我们常用的经典流形，我们使用方程 (16a) 以便使用相同的机制方程 (14) 来真正地寻找 Jacobian 矩阵。

6.1 旋转群 S^3 和 SO(3) 的 Jacobian 矩阵

单位四元数群 S^3 和特殊正交矩阵群 SO(3)，两者都可旋转 3 元向量。它们有同构的切空间，其元素可用 $\mathbb{R}^3$ 中的旋转向量标识，所以我们把它们放在一起研究。正是在这个空间 $\mathbb{R}^3$ 中，我们定义旋转率 $\boldsymbol{\omega}\triangleq\mathbf{u}\omega$、轴-角 $\boldsymbol{\theta}\triangleq\mathbf{u}\theta$，以及所有扰动和不确定性的向量。

四元数流形 S^3 是 SO(3) 的双倍覆盖，即 $\mathbf{q}$ 和 $-\mathbf{q}$ 表示相同的旋转 $\mathbf{R}$。第一个覆盖对应于正实部 $w>0$ 的四元数。这两个群可以被认为是同构的第一覆盖。

6.1.1 Exp 与 Log 映射

Exp 与 Log 映射可以定义为 S^3 的四元数和 SO(3) 的旋转矩阵。对于四元数 $\mathbf{q}=(w,\mathbf{v})\in\mathbb{H}$ 我们有

$$\mathbf{q} = \mathrm{Exp}\left(\theta\mathbf{u}\right) \triangleq \cos\left(\theta/2\right) + \mathbf{u}\sin\left(\theta/2\right) \ \in\mathbb{H} \tag{50}$$

$$\theta\mathbf{u} = \log\left(\mathbf{q}\right) \triangleq 2\mathbf{v}\frac{\arctan\left(\left\|\mathbf{v}\right\|, w\right)}{\left\|\mathbf{v}\right\|} \qquad \in\mathbb{R}^3 \tag{51}$$

对于旋转矩阵我们有，

$$\mathbf{R} = \mathrm{Exp}\left(\theta\mathbf{u}\right) \triangleq \mathbf{I} + \sin\theta\left[\mathbf{u}\right]_\times + \left(1-\cos\theta\right)\left[\mathbf{u}\right]_\times^2 \ \in\mathbb{R}^{3\times3} \tag{52}$$

$$\theta\mathbf{u} = \log\left(\mathbf{R}\right) \triangleq \frac{\theta\left(\mathbf{R}-\mathbf{R}^\top\right)^\vee}{2\sin\theta} \qquad \in\mathbb{R}^3, \tag{53}$$

其中 $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{trace}(\mathbf{R})-1}{2}\right)$。

6.1.2 旋转作用

给定上述四元数和旋转矩阵的表达式，四元数在 3 元向量上的旋转作用是由双四元数积来完成的，

$$\mathbf{x}' = \mathbf{q}\mathbf{x}\mathbf{q}^* \tag{54}$$

当旋转矩阵使用单个矩阵积时，

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}. \tag{55}$$

两者相当于一个围绕轴 $\mathbf{u}$ 旋转角度 θ 弧度 (rad) 的右手旋转。从四元数 $\mathbf{q}$ 变换到旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 的公式为

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} w^2+x^2-y^2-z^2 & 2(xy-wz) & 2(xz+wy) \\ 2(xy+wz) & w^2-x^2+y^2-z^2 & 2(yz-wx) \\ 2(xz-wy) & 2(yz+wx) & w^2-x^2-y^2+z^2 \end{bmatrix}. \tag{56}$$

6.1.3 初等 Jacobian 矩阵块

由于我们定义的导数映射切向量空间，并且这些空间重叠于 S^3 和 SO(3) 的三维旋转流形，即，$\boldsymbol{\theta} = \mathrm{Log}(\mathbf{q}) = \mathrm{Log}(\mathbf{R})$，因此 Jacobian 矩阵独立于所使用的表示 ($\mathbf{q}$ 或 $\mathbf{R}$)。因此，我们考虑通用的 3D 旋转元素，并用无衬线字体 R 来标记它们。

伴随: 从方程 (6) 我们有

$$\mathbf{Ad}_{\mathsf{R}}\boldsymbol{\theta} = \left(\mathbf{R}[\boldsymbol{\theta}]_\times \mathbf{R}^\top\right)^\vee = \left([(\mathbf{R}\boldsymbol{\theta})]_\times\right)^\vee = \mathbf{R}\boldsymbol{\theta}$$

因此

$$\mathbf{Ad}_{\mathsf{R}} = \mathbf{R}, \tag{57}$$

具体的，对于 $\mathbf{q}$ 有 $\mathbf{Ad}_{\mathbf{q}} = \mathbf{R}(\mathbf{q})$，参见方程 (56)，对于 $\mathbf{R}$ 有 $\mathbf{Ad}_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$。

求逆与组合: 从 5.1 节，我们有，

$$\mathbf{J}_{\mathsf{R}}^{\mathsf{R}^{-1}} = -\mathbf{Ad}_{\mathsf{R}} = -\mathbf{R} \tag{58}$$

$$\mathbf{J}_{\mathsf{Q}}^{\mathsf{QR}} = \mathbf{Ad}_{\mathsf{R}}{}^{-1} = \mathbf{R}^\top \tag{59}$$

$$\mathbf{J}_{\mathsf{R}}^{\mathsf{QR}} = \mathbf{I} \tag{60}$$

右 Jacobian 矩阵与左 Jacobian 矩阵: 它们有封闭形式

$$\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} - \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}[\boldsymbol{\theta}]_\times + \frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 \tag{61}$$

$$\mathbf{J}_r{}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta}]_\times + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 \tag{62}$$

$$\mathbf{J}_l(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}[\boldsymbol{\theta}]_\times + \frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 \tag{63}$$

$$\mathbf{J}_l{}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} - \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta}]_\times + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 \tag{64}$$

其中我们可以观察到

$$\mathbf{J}_l = \mathbf{J}_r^\top, \quad \mathbf{J}_l^{-1} = \mathbf{J}_r^{-\top} \tag{65}$$

右结合的加号和减号: 对于 $\boldsymbol{\theta} = \mathsf{Q} \ominus \mathsf{R}$，我们有

$$\mathbf{J}_{\mathsf{R}}^{\mathsf{R}\oplus\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^{\top} \quad \mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}^{\mathsf{R}\oplus\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta}) \tag{66}$$

$$\mathbf{J}_{\mathsf{Q}}^{\mathsf{Q}\ominus\mathsf{R}} = \mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \quad \mathbf{J}_{\mathsf{R}}^{\mathsf{Q}\ominus\mathsf{R}} = -\mathbf{J}_l^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \tag{67}$$

旋转作用: 我们有

$$\begin{gathered}\mathbf{J}_{\mathsf{R}}^{\mathsf{R}\cdot\mathsf{v}} \triangleq \lim_{\boldsymbol{\theta}\to 0} \frac{(\mathbf{R}\oplus\boldsymbol{\theta})\,\mathbf{v} - \mathbf{R}\mathbf{v}}{\boldsymbol{\theta}} = \\ \frac{\mathbf{R}\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\theta})\,\mathbf{v} - \mathbf{R}\mathbf{v}}{\boldsymbol{\theta}} = \lim_{\boldsymbol{\theta}\to 0} \frac{\mathbf{R}\left(\mathbf{I} + [\boldsymbol{\theta}]_\times\right)\mathbf{v} - \mathbf{R}\mathbf{v}}{\boldsymbol{\theta}} \\ = \lim_{\boldsymbol{\theta}\to 0} \frac{\mathbf{R}[\boldsymbol{\theta}]_\times\mathbf{v}}{\boldsymbol{\theta}} = \lim_{\boldsymbol{\theta}\to 0} \frac{-\mathbf{R}[\mathbf{v}]_\times\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{R}[\mathbf{v}]_\times\end{gathered} \tag{68}$$

其中我们使用属性 $\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\theta}) \approx \mathbf{I} + [\boldsymbol{\theta}]_\times$ 和 $[\mathbf{a}]_\times \mathbf{b} = -[\mathbf{b}]_\times \mathbf{a}$。另一个 Jacobian 矩阵为

$$\mathbf{J}_{\mathbf{v}}^{\mathsf{R}\cdot\mathsf{v}} \triangleq \lim_{\partial\mathbf{v}\to 0} \frac{\mathbf{R}(\mathbf{v} + \partial\mathbf{v}) - \mathbf{R}\mathbf{v}}{\partial\mathbf{v}} = \mathbf{R}. \tag{69}$$

6.2 运动群 SE(3) 的 Jacobian 矩阵

我们将三维刚体运动群 SE(3) 的元素写为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{SE}(3) \subset \mathbb{R}^{4\times 4} \tag{70}$$

其中 $\mathbf{R} \in \mathrm{SO}(3)$ 是一个旋转，并且 $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ 是一个平移向量。李代数和向量的正切是由这些类型的元素形成

$$\boldsymbol{\tau}^\wedge = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\theta}]_\times & \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{se}(3), \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 又被称为速度旋量。

6.2.1 求逆与组合

求逆和组合分别用矩阵的求逆和乘积执行，

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^\top & -\mathbf{R}^\top\mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \tag{71}$$

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a\mathbf{R}_b & \mathbf{t}_a + \mathbf{R}_a\mathbf{t}_b \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}. \tag{72}$$

6.2.2 Exp 与 Log 映射

Exp 与 Log 通过指数映射直接从向量的切空间 $\mathbb{R}^6 \cong \mathfrak{se}(3) = T\,\mathrm{SE}(3)$ 实现，

$$\mathbf{M} = \mathrm{Exp}\left(\boldsymbol{\tau}\right) \triangleq \begin{bmatrix} \mathrm{Exp}\left(\boldsymbol{\theta}\right) & \mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \tag{73}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathrm{Log}\left(\mathbf{M}\right) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\mathbf{t} \\ \mathrm{Log}\left(\mathbf{R}\right) \end{bmatrix}. \tag{74}$$

其中 (回想对于 $\mathrm{Log}\left(\mathbf{M}\right)$ 有 $\boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{u} = \mathrm{Log}\left(\mathbf{R}\right)$)

$$\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right) = \mathbf{I} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \tag{75}$$

其中，注意，这与方程 (63) 完全匹配。

6.2.3 初等 Jacobian 矩阵块

伴随： 我们有

$$\mathbf{Ad}_\mathbf{M}\boldsymbol{\tau} = \left(\mathbf{M}\boldsymbol{\tau}^\wedge\mathbf{M}^{-1}\right)^\vee = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\boldsymbol{\rho} + \left[\mathbf{t}\right]_\times\mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{R}\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{Ad}_\mathbf{M}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}$$

因此，

$$\mathbf{Ad}_\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \left[\mathbf{t}\right]_\times\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times6}. \tag{76}$$

求逆与组合： 从 5.1 节，我们有，

$$\mathbf{J}_\mathbf{M}^{\mathbf{M}^{-1}} = -\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \left[\mathbf{t}\right]_\times\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \tag{77}$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{M}_a}^{\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_b^\top & -\mathbf{R}_b^\top\left[\mathbf{t}_b\right]_\times \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_b^\top \end{bmatrix} \tag{78}$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{M}_b}^{\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b} = \mathbf{I}_6. \tag{79}$$

右 Jacobian 矩阵和左 Jacobian 矩阵： 左 Jacobian 矩阵的封闭形式及其逆式给出为，

$$\mathbf{J}_l\left(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\theta}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_l\left(\boldsymbol{\theta}\right) & \mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\theta}\right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_l\left(\boldsymbol{\theta}\right) \end{bmatrix} \tag{80}$$

$$\mathbf{J}_l^{-1}\left(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\theta}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_l^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}\right) & -\mathbf{J}_l^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\theta}\right)\mathbf{J}_l^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}\right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_l^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}\right) \end{bmatrix} \tag{81}$$

其中 $\mathbf{J}_l\left(\boldsymbol{\theta}\right)$ 是 SO(3) 的左 Jacobian 矩阵, 参见方程 (63) ，并且

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\theta}\right) =& \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_\times + \frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\left(\boldsymbol{\theta}_\times\boldsymbol{\rho}_\times + \boldsymbol{\rho}_\times\boldsymbol{\theta}_\times + \boldsymbol{\theta}_\times\boldsymbol{\rho}_\times\boldsymbol{\theta}_\times\right) \\ & - \frac{1-\frac{\theta^2}{2}-\cos\theta}{\theta^4}\left(\boldsymbol{\theta}_\times^2\boldsymbol{\rho}_\times + \boldsymbol{\rho}_\times\boldsymbol{\theta}_\times^2 - 3\boldsymbol{\theta}_\times\boldsymbol{\rho}_\times\boldsymbol{\theta}_\times\right) \\ & - \frac{1}{2}\left(\frac{1-\frac{\theta^2}{2}-\cos\theta}{\theta^4} - 3\frac{\theta-\sin\theta-\frac{\theta^3}{6}}{\theta^5}\right) \\ & \times\left(\boldsymbol{\theta}_\times\boldsymbol{\rho}_\times\boldsymbol{\theta}_\times^2 + \boldsymbol{\theta}_\times^2\boldsymbol{\rho}_\times\boldsymbol{\theta}_\times\right). \end{aligned} \tag{82}$$

右 Jacobian 矩阵及其逆矩阵使用方程 (42) 获得，即，$\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\theta})=\mathbf{J}_l(-\boldsymbol{\rho},-\boldsymbol{\theta})$ 并且 $\mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\theta})=\mathbf{J}_l^{-1}(-\boldsymbol{\rho},-\boldsymbol{\theta})$。

刚体运动作用： 在点 $\mathbf{p}$ 上我们有作用，

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{p}\triangleq\mathbf{t}+\mathbf{R}\mathbf{p}, \tag{83}$$

因此，并且因为对于 $\boldsymbol{\tau}\to 0$ 我们有 $\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau})\to\mathbf{I}+\boldsymbol{\tau}^\wedge$，

$$\mathbf{J}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{M}\cdot\mathbf{p}}=\lim_{\boldsymbol{\tau}\to 0}\frac{\mathbf{M}\mathrm{Exp}(\boldsymbol{\tau})\cdot\mathbf{p}-\mathbf{M}\cdot\mathbf{p}}{\boldsymbol{\tau}}=\left[\begin{array}{cc}\mathbf{R} & -\mathbf{R}[\mathbf{p}]_\times\end{array}\right] \tag{84}$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{M}\cdot\mathbf{p}}=\mathbf{R}. \tag{85}$$

7 组合流形的 Jacobian 矩阵

在我们常用的状态估计中，我们可以将大的和非均匀的状态视为流形组合。在位姿估计中常见两种组合流形：

1. 姿态误差及其偏差的组合流形
2. 位姿误差及其偏差的组合流形

假设机体是匀速运动，采样时间间隔为 Δt，在 k 时刻，从 IMU 读出角速度 $\boldsymbol{\omega}$，线性加速度 $\mathbf{a}$，这是机体坐标系中的数值，已知上一时刻的机体坐标系中的线性速度为 $\mathbf{v}_B$，则增量角度 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ 和增量位移 $\Delta\boldsymbol{\rho}$ 为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\theta}&=\boldsymbol{\omega}\cdot\Delta t\\ \Delta\boldsymbol{\rho}&=\mathbf{v}_B\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\mathbf{a}\cdot\Delta t^2\end{aligned}$$

其构成的增量速度旋量向量 $\Delta\boldsymbol{\tau}$ 和增量位姿 $\Delta\mathbf{M}$ 为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\tau}&=\left[\begin{array}{c}\Delta\boldsymbol{\rho}\\ \Delta\boldsymbol{\theta}\end{array}\right]\\ \Delta\boldsymbol{\tau}^\wedge&=\left[\begin{array}{cc}[\Delta\boldsymbol{\theta}]_\times & \Delta\boldsymbol{\rho}\\ \mathbf{0} & 0\end{array}\right]\\ \Delta\mathbf{M}(\Delta\boldsymbol{\tau})&=\exp(\Delta\boldsymbol{\tau}^\wedge)\\ &=\left[\begin{array}{cc}\Delta\mathbf{R} & \Delta\mathbf{t}\\ \mathbf{0} & 1\end{array}\right]\end{aligned}$$

已知上一时刻的位姿 $\mathbf{M}_{k-1}$，则当前时刻的位姿 $\mathbf{M}_k$ 为

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_k&=\mathbf{M}_{k-1}\cdot\Delta\mathbf{M}(\Delta\boldsymbol{\tau})\\ &=\left[\begin{array}{cc}\mathbf{R} & \mathbf{t}\\ \mathbf{0} & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}\Delta\mathbf{R} & \Delta\mathbf{t}\\ \mathbf{0} & 1\end{array}\right]\\ &=\left[\begin{array}{cc}\mathbf{R}\cdot\Delta\mathbf{R} & \mathbf{t}+\mathbf{R}\Delta\mathbf{t}\\ \mathbf{0} & 1\end{array}\right]\end{aligned}$$

这是一个典型的 SE(3) 元素的计算过程。我们是在局部笛卡尔坐标系中获取向量，是在局部切空间中计算增量，然后用指数函数 exp 收回并作用在当前位姿上，则位姿沿测地线移动到新的当前位姿上。不过在工程中为计算速度常常做各种简化，例如当 $\|\Delta\boldsymbol{\theta}\| \to 0$，则 $\Delta\mathbf{t} \approx \Delta\boldsymbol{\rho}$。

但是因为种种原因，当前位姿 $\mathbf{M}_k$ 存在误差，标记为 $\bar{\mathbf{M}}_k$，需要对其进行最优估计。但是现有成熟的最优估计算法都有一个被估计元素是向量的假设，因此无法直接对当前位姿进行估计。但是因为其误差 $\delta\mathbf{M}$ 较小，可以用向量形式 $\delta\mathbf{x}$ 表示，所以我们可以对其误差进行估计，最后将误差作用到当前位姿上，则当前位姿为最优估计位姿 $\hat{\mathbf{M}}_k$，于是有

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{M}}_k &= \hat{\mathbf{M}}_{k-1} \cdot \Delta\mathbf{M}\left(\Delta\boldsymbol{\tau}\right) \cdot \delta\mathbf{M}\left(\delta\mathbf{x}\right) \\
&= \hat{\mathbf{M}}_{k-1} \oplus \Delta\boldsymbol{\tau} \oplus \delta\mathbf{x} \\
&= \bar{\mathbf{M}}_k \oplus \delta\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

我们认为误差 $\delta\mathbf{M}$ 受两个因素的影响，一是 IMU 的噪声，二是其偏差，两者都可以通过实验测量出来，其中角速度和加速度的噪声和偏差表示为 $\mathbf{w}_{\boldsymbol{\omega}}$、$\mathbf{w}_{\mathbf{a}}$、$\boldsymbol{\omega}_b$ 和 $\mathbf{a}_b$。误差向量 $\delta\mathbf{x}$ 的准线性系统的演变方程为，

$$
\delta\mathbf{x}_k = f\left(\bar{\mathbf{M}}_k, \Delta\boldsymbol{\tau}\right)\delta\mathbf{x}_{k-1}
$$

其中由控制向量 $\Delta\boldsymbol{\tau}$ 的噪声引入了误差。还有，在最优估计中一同估计其偏差是一种传感器偏差的自校正算法。因此我们估计的误差向量 $\delta\mathbf{x}$ 除了角速度和加速度的误差之外，还包含其偏差的误差，因此误差向量 $\delta\mathbf{x}$ 是一种类似于速度旋量的组合流形。我们是在当前位姿点，也就是在当前线性化点处计算误差的状态转换矩阵 $\mathbf{F}$，控制模型矩阵 $\mathbf{G}$，以及观测模型矩阵 $\mathbf{H}$ 等这些 Jacobian 矩阵。

根据右结合的 $\oplus$ 方程 (46, 66)，误差状态转换矩阵 $\mathbf{F}$ 为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \frac{\partial\bar{\mathbf{M}}_k}{\partial\hat{\mathbf{M}}_{k-1}} \\
&= \frac{\partial\left(\hat{\mathbf{M}}_{k-1} \oplus \Delta\boldsymbol{\tau}\right)}{\partial\hat{\mathbf{M}}_{k-1}} \\
&= \mathbf{Ad}_{\mathrm{Exp}(\Delta\boldsymbol{\tau})}{}^{-1}
\end{aligned} \tag{86}
$$

根据右结合的 $\oplus$ 方程 (47, 66)，误差控制模型矩阵 $\mathbf{G}$ 为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G} &= \frac{\partial\bar{\mathbf{M}}_k}{\partial\Delta\boldsymbol{\tau}} \\
&= \frac{\partial\left(\hat{\mathbf{M}}_{k-1} \oplus \Delta\boldsymbol{\tau}\right)}{\partial\Delta\boldsymbol{\tau}} \\
&= \mathbf{J}_r\left(\Delta\boldsymbol{\tau}\right)
\end{aligned} \tag{87}
$$

在测量更新时，预设的观测向量 $\mathbf{p}_I$ 为全局坐标系中的向量，需要将其变换到局部坐标系中，$\mathbf{p}_B = \bar{\mathbf{M}}_k^{-1} \cdot \mathbf{p}_I$，并与在局部坐标系中的测量值相减得到残差。根据链式法则，根据群作用方程 (43, 68, 84)，以及求逆方程 (28, 58, 77)，观测模型矩阵 $\mathbf{H}$ 为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \frac{\partial\left(\bar{\mathbf{M}}_k^{-1} \cdot \mathbf{p}_I\right)}{\partial\bar{\mathbf{M}}_k} \\
&= \frac{\partial\left(\bar{\mathbf{M}}_k^{-1} \cdot \mathbf{p}_I\right)}{\partial\bar{\mathbf{M}}_k^{-1}} \cdot \frac{\partial\bar{\mathbf{M}}_k^{-1}}{\partial\bar{\mathbf{M}}_k}
\end{aligned} \tag{88}
$$

下面我们用两种组合流形的 Jacobian 矩阵进行验证。具体的误差的动力学方程的推导可见参考文献 [2,4]，后面只推导与 Jacobian 矩阵和伴随矩阵相关的方程。

7.1 姿态误差及其偏差的组合流形

当我们只需要估计姿态时，误差向量 $\delta\mathbf{x}$ 由增量角度误差 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 和角速度偏差的误差 $\delta\boldsymbol{\omega}_b$ 构成

$$\delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\theta} \\ \delta\boldsymbol{\omega}_b \end{bmatrix}$$

其一阶微分方程为

$$\dot{\delta\mathbf{x}} = \mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{w}$$

其中 $\mathbf{A}$ 为误差的动力学矩阵，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -[\boldsymbol{\omega}]_\times & -\mathbf{I}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 为校正偏差后的角速度，$\mathbf{B}$ 为干扰矩阵，

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} \end{bmatrix}$$

它将白噪声序列转化为干扰 (disturbance) 向量。$\mathbf{w}$ 为系统过程噪声。

误差状态转换矩阵 $\mathbf{F}$ 为

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \exp(\mathbf{A}\cdot\Delta t) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}} & -\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})$ 参见方程 (52)，$\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})$ 参见方程 (63, 75)，$\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}$ 参见方程 (61, 65)。并且，根据方程 (46) 和方程 (47)，上式可以解释为

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathsf{R}}^{\mathsf{R}\oplus\boldsymbol{\theta}} & -\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}^{\mathsf{R}\oplus\boldsymbol{\theta}} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} \end{bmatrix}$$

这也说明姿态误差是一个很复杂的组合流形，增量角度误差 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 的方向和增量角度 $\boldsymbol{\theta}$，也即和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向相反，并且角速度偏差的误差 $\delta\boldsymbol{\omega}_b$ 的方向同样相反，而且因为 $\mathbf{V}$ 矩阵为 $\mathbf{R}$ 矩阵的一阶导数，即 $\mathbf{R}' = \mathbf{V}$，所以偏差的误差值与 $\mathbf{R}$ 矩阵的一阶导数相关。

我们对验证方程 (86) 感兴趣。因为偏差的误差是各向同性，与旋转无关，所以可设置为全 1 向量，于是我们有向量 $\Delta\boldsymbol{\tau}$，它构成的切空间和流形如下：

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\tau} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 1_{3\times1} \end{bmatrix}\cdot\Delta t \\ \Delta\boldsymbol{\tau}^\wedge &= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_\times & \mathbf{I}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix}\cdot\Delta t \\ \exp(\Delta\boldsymbol{\tau}^\wedge) &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

并且与旋转 R 相似，它的伴随是它自身

$$\mathbf{Ad}_{\exp(\Delta\boldsymbol{\tau}^\wedge)} = \exp(\Delta\boldsymbol{\tau}^\wedge)$$

此外，$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{V}$ 矩阵还有这样的性质

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}} &= \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})\\ \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\exp\left(\Delta\boldsymbol{\tau}^{\wedge}\right)\cdot\mathbf{F} &= \begin{bmatrix}\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}} & -\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\mathbf{I}_{3\times3} & -\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}+\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

由此验证了方程 (86)。

误差控制模型矩阵 $\mathbf{G}$ 的封闭式太过复杂，并且因为实际的传感器噪声都很小，所以在工程中 $\mathbf{G}$ 矩阵都会做大大的简化，所以这里就不再验证方程 (87)。

基于观测向量 $\mathbf{v}$ 的观测模型矩阵 $\mathbf{H}$ 很简单，根据方程 (68, 58) 我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{J}_{\mathsf{R}}^{\mathsf{R}^{-1}\cdot\mathsf{v}}\\ &= \mathbf{J}_{\mathsf{R}^{-1}}^{\mathsf{R}^{-1}\cdot\mathsf{v}}\mathbf{J}_{\mathsf{R}}^{\mathsf{R}^{-1}}\\ &= \left(-\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{v}]_{\times}\right)(-\mathbf{R})\\ &= \left[\mathbf{R}^{-1}\mathbf{v}\right]_{\times}\end{aligned}$$

再加上与旋转无关的偏差误差的项，实际矩阵为 $\mathbf{H}=\begin{bmatrix}[\mathbf{R}^{-1}\mathbf{v}]_{\times} & \mathbf{I}_{3\times3}\end{bmatrix}$，由此验证了方程 (88)。

7.2 位姿误差及其偏差的组合流形

当我们需要估计位姿时，为便于分析，我们把误差向量 $\delta\mathbf{x}$ 简化为由增量角度误差 $\delta\boldsymbol{\theta}$、增量速度误差 $\delta\mathbf{v}$，以及角速度偏差的误差 $\delta\boldsymbol{\omega}_b$ 和加速度偏差的误差 $\delta\mathbf{a}_b$ 构成

$$\delta\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{\theta}\\ \delta\mathbf{v}\\ \delta\boldsymbol{\omega}_b\\ \delta\mathbf{a}_b\end{bmatrix}$$

经过推导，其误差的动力学矩阵 $\mathbf{A}$ 为，

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-[\boldsymbol{\omega}]_{\times} & \mathbf{0}_{3\times3} & -\mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}\\ -\mathsf{R}[\mathbf{a}]_{\times} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & -\mathsf{R}\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}\end{bmatrix}$$

其中，符号 R 为机体当前姿态，$\mathbf{a}$ 为校正偏差后的机体加速度。

误差状态转换矩阵 $\mathbf{F}$ 为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \exp\left(\mathbf{A}\cdot\Delta t\right) \\
&= \begin{bmatrix}
\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}_{3\times3} & -\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}_{3\times3} \\
-\mathsf{R}\left[\mathbf{a}\right]_{\times}\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{I}_{3\times3} & -\mathsf{R}\left[\mathbf{a}\right]_{\times}\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} & -\mathsf{R}\cdot\Delta t \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3}
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right)$ 矩阵为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right) &= \frac{1}{2}\mathbf{I} + \frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_{\times} + \frac{\cos\theta - 1 + \frac{\theta^2}{2}}{\theta^4}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_{\times}^2 \\
\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} &= \frac{1}{2}\mathbf{I} - \frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_{\times} + \frac{\cos\theta - 1 + \frac{\theta^2}{2}}{\theta^4}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_{\times}^2
\end{aligned}
$$

这个 $\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right)$ 矩阵很复杂，将在后面讨论其几何意义。

我们再次构造向量 $\Delta\boldsymbol{\tau}$。因为偏差的误差是各向同性，与旋转无关，所以可设置为全 1 向量，再加上一个内部状态值为当前姿态 R，于是向量 $\Delta\boldsymbol{\tau}$ 构成的切空间和流形如下：

$$
\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{\tau} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{a} \\ 1_{3\times1} \\ 1_{3\times1} \end{bmatrix}\cdot\Delta t \\
\Delta\boldsymbol{\tau}^{\wedge} &= \begin{bmatrix}
\left[\boldsymbol{\omega}\right]_{\times} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\
\mathsf{R}\left[\mathbf{a}\right]_{\times} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathsf{R} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}
\end{bmatrix}\cdot\Delta t \\
\exp\left(\Delta\boldsymbol{\tau}^{\wedge}\right) &= \begin{bmatrix}
\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right) & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right) & \mathbf{0}_{3\times3} \\
\mathsf{R}\left[\mathbf{a}\right]_{\times}\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right) & \mathbf{I}_{3\times3} & \mathsf{R}\left[\mathbf{a}\right]_{\times}\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right) & \mathsf{R}\cdot\Delta t \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3}
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

并且与旋转 R 相似，它的伴随是它自身

$$
\mathbf{Ad}_{\exp\left(\Delta\boldsymbol{\tau}^{\wedge}\right)} = \exp\left(\Delta\boldsymbol{\tau}^{\wedge}\right)
$$

此外，$\boldsymbol{\Sigma}$ 和 $\mathbf{V}$ 矩阵还有这样的性质

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right) - \boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} \\
\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right) &= \boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\exp\left(\Delta\boldsymbol{\tau}^{\wedge}\right)\cdot\mathbf{F} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right) & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right) & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathsf{R}\left[\mathbf{a}\right]_{\times}\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right) & \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathsf{R}\left[\mathbf{a}\right]_{\times}\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right) & \mathsf{R}\cdot\Delta t \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_{3\times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}_{3\times 3} & -\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ -\mathsf{R}\left[\mathbf{a}\right]_{\times}\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{I}_{3\times 3} & -\mathsf{R}\left[\mathbf{a}\right]_{\times}\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} & -\mathsf{R}\cdot\Delta t \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_{3\times 3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & -\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}}+\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right) & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathsf{R}\left[\mathbf{a}\right]_{\times}\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}}-\mathsf{R}\left[\mathbf{a}\right]_{\times}\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{I}_{3\times 3} & -\mathsf{R}\left[\mathbf{a}\right]_{\times}\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}}-\mathsf{R}\left[\mathbf{a}\right]_{\times}\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}}+\mathsf{R}\left[\mathbf{a}\right]_{\times}\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right) & \mathsf{R}\cdot\Delta t-\mathsf{R}\cdot\Delta t \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_{3\times 3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_{3\times 3} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

由此验证了方程 (86)。

对于 $\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right)$ 矩阵，是刚体旋转群 SO(3) 对角度向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的右结合的加号的二阶导数，即方程 (66) 的 Jacobian 矩阵 $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}^{\mathsf{R}\oplus\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{J}_{r}\left(\boldsymbol{\theta}\right)$ 的导数，$\mathbf{J}_{r}'\left(\boldsymbol{\theta}\right)=\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right)$。于是我们完全用 Jacobian 矩阵解释误差状态转换矩阵 $\mathbf{F}$ 为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}_{3\times 3} & -\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ -\mathsf{R}\left[\mathbf{a}\right]_{\times}\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{I}_{3\times 3} & -\mathsf{R}\left[\mathbf{a}\right]_{\times}\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} & -\mathsf{R}\cdot\Delta t \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_{3\times 3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathsf{R}}^{\mathsf{R}\oplus\boldsymbol{\theta}} & \mathbf{0}_{3\times 3} & -\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}^{\mathsf{R}\oplus\boldsymbol{\theta}} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{J}_{\mathsf{R}}^{\mathsf{R}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}^{\mathsf{R}\oplus\boldsymbol{\theta}} & \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{J}_{\mathsf{R}}^{\mathsf{R}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{J}_{r}'\left(\boldsymbol{\theta}\right) & -\mathsf{R}\cdot\Delta t \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_{3\times 3} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

即，增量速度误差 $\delta\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{R}$ 矩阵的一阶导数相关相关，加速度偏差的误差 $\delta\mathbf{a}_{b}$ 与 $\mathbf{R}$ 矩阵的而阶导数相关，方向都相反，并且都需要使用旋转作用方程 (68)，即可得到经过时间 Δt 之后，新的增量速度误差和加速度偏差的误差。这其中组合流形的几何意义明显可见。

8 旋转向量的动力学矩阵

对于 SO(3) 的导数方程 (47, 66)，$\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}^{\mathsf{R}\oplus\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{J}_{r}\left(\boldsymbol{\theta}\right)$，有着十分重要的几何意义。假如机体以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 匀速旋转，这是机体坐标系中的角速度，由 IMU 测量得到，经过时间 Δt 之后，则增量角度为 $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\omega}\cdot\Delta t$，并且增量旋转为 $\mathsf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right)$。但实际上我们的测量存在误差，误差角度向量用 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 表示，则我们的测量值为 $\mathsf{Q}=\mathsf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\oplus\delta\boldsymbol{\theta}$。根据文献 [1, p55] 的推导，旋转向量 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 的动力学方程为

$$
\dot{\delta\boldsymbol{\theta}}=\left(\mathbf{I}-\frac{1-\cos\theta}{\theta^{2}}\left[\delta\boldsymbol{\theta}\right]_{\times}+\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^{3}}\left[\delta\boldsymbol{\theta}\right]_{\times}^{2}\right)\boldsymbol{\omega}
$$

其中 $\theta=\left\|\delta\boldsymbol{\theta}\right\|$。因此旋转向量的动力学矩阵，习惯上用符号 $\boldsymbol{\Gamma}$ 表示，为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma}\left(\delta\boldsymbol{\theta}\right) &= \mathbf{J}_{\delta\boldsymbol{\theta}}^{\mathsf{R}\oplus\delta\boldsymbol{\theta}} \\
&= \mathbf{J}_{r}\left(\delta\boldsymbol{\theta}\right)
\end{aligned}
$$

因此整理表示误差的旋转向量的动力学方程为

$$
\dot{\delta\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{\Gamma}\left(\delta\boldsymbol{\theta}\right)\boldsymbol{\omega}
$$

这表明误差向量 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 相关。更进一步的，对于 SO(3) 的导数方程 (47, 66)，$\mathbf{J}_{\delta\boldsymbol{\theta}}^{\mathsf{R}\oplus\delta\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{J}_r\left(\delta\boldsymbol{\theta}\right)$，我们是用局部笛卡尔空间中的误差向量 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 的微小扰动，表达了旋转流形 SO(3) 上的元素 R 的变化率；对于 SO(3) 的导数方程 (46, 66)，$\mathbf{J}_{\mathsf{R}}^{\mathsf{R}\oplus\delta\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{R}\left(\delta\boldsymbol{\theta}\right)^{\top}$，对于误差向量 $\delta\boldsymbol{\theta}$，它的方向与增量旋转 $\mathsf{R}\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\Delta t\right)$ 中的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向相反，其直觉就是增量角度误差好像是某种“惯性”，滞后于旋转方向。

类似于方程 (66)，我们进一步扩展 SO(3) 的左结合的加号的 Jacobian 矩阵

$$\mathbf{J}_{\mathsf{R}}^{\boldsymbol{\theta}\oplus\mathsf{R}}=\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\quad \mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{\theta}\oplus\mathsf{R}}=\mathbf{J}_l\left(\boldsymbol{\theta}\right)$$

因此全局坐标系与局部坐标系的切空间的性质正好相反。

类似地，我们可以用切空间的李代数直接表达旋转流形 SO(3) 上的动力学方程，即

$$\dot{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\left[\boldsymbol{\omega}\right]_{\times}$$

并且对于 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\mathbf{R}$ 这两个动力学矩阵，它们有这样的关系

$$\boldsymbol{\Gamma}\left(\boldsymbol{\theta}\right)=\frac{1}{\left\|\boldsymbol{\theta}\right\|^2}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^{\top}+\frac{1}{\left\|\boldsymbol{\theta}\right\|^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_{\times}\left(\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\top}-\mathbf{I}_{3\times3}\right)$$

另外，我们已知 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{V}$ 矩阵有这样的性质

$$\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)$$

根据方程 (61, 63) 、方程 (57)、方程 (66) 和方程 (42) 我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}^{\mathsf{R}\oplus\boldsymbol{\theta}}&=\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{Ad}_{\mathsf{R}^{\top}}&=\mathsf{R}^{\top}\\ \mathbf{J}_l\left(\boldsymbol{\theta}\right)&=\mathbf{J}_r\left(-\boldsymbol{\theta}\right)\end{aligned}$$

于是上式可以解释为

$$\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}^{\mathsf{R}\oplus\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{Ad}_{\mathsf{R}^{\top}}\mathbf{J}_{(-\boldsymbol{\theta})}^{\mathsf{R}\oplus(-\boldsymbol{\theta})}$$

还是在描述 $\boldsymbol{\theta}$ 和 R 的方向，以及局部坐标系变换的关系。

9 总结

用切空间中的无穷小变化表达流形中的导数，这是应用李群理论最本质的思想。

10 参考文献

1. A survey of attitude representations - 1993
2. Indirect Kalman filter for 3D attitude estimation - 2007
3. Lie Groups for 2D and 3D Transformations - 2017
4. Quaternion kinematics for the error-state KF - 2017
5. A micro Lie theory for state estimation in robotics - 2020

11 草稿纸

$$\mathbf{V} = \mathbf{I} + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\boldsymbol{\omega}_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\boldsymbol{\omega}_\times^2$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sin\theta}{\theta} \\
B &= \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} \\
C &= \frac{1-A}{\theta^2} \\
\mathbf{V} &= \mathbf{I} + B\boldsymbol{\omega}_\times + C\boldsymbol{\omega}_\times^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^{-1} &= \mathbf{I} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_\times + \frac{1}{\theta^2}\left(1-\frac{A}{2B}\right)\boldsymbol{\omega}_\times^2 \\
&= \mathbf{I} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_\times + \frac{1}{\theta^2}\left(1-\frac{\frac{\sin\theta}{\theta}}{2\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)}\right)\boldsymbol{\omega}_\times^2 \\
&= \mathbf{I} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_\times + \frac{1}{\theta^2}\left(1-\frac{\frac{\sin\theta}{\theta}(1+\cos\theta)}{2\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)(1+\cos\theta)}\right)\boldsymbol{\omega}_\times^2 \\
&= \mathbf{I} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_\times + \frac{1}{\theta^2}\left(1-\frac{\frac{\sin\theta}{\theta}(1+\cos\theta)}{2\left(\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\right)}\right)\boldsymbol{\omega}_\times^2 \\
&= \mathbf{I} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_\times + \frac{1}{\theta^2}\left(1-\frac{(1+\cos\theta)}{2\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)}\right)\boldsymbol{\omega}_\times^2 \\
\mathbf{I} &- \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_\times + \left(\frac{1}{\theta^2}-\frac{(1+\cos\theta)}{2\theta\sin\theta}\right)\boldsymbol{\omega}_\times^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V} &= \mathbf{I} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \\
\mathbf{V}^{-1} &= \mathbf{I} - \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \\
\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}^{-1} &= \left(\mathbf{I} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\right) \\
&\cdot\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\right) \\
&= \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\right) \\
&+ \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\right) \\
&+ \frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\right) \\
&= \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\right) \\
&+ \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 + (1-\cos\theta)\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times\right) \\
&+ \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta-\sin\theta}{\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \frac{\theta-\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\right) \\
&= \mathbf{I}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\right) &= \\
\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times - \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times\cdot\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times\cdot\left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 &= \\
\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\cdot\left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^3 &= \\
\because\ \left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^3 = -\theta^2\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times & \\
\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 - (1-\cos\theta)\left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times &= \\
\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times - \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 - \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + (1-\cos\theta)\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times &= \\
-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 + (1-\cos\theta)\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\left(\mathbf{I}-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times+\left(\frac{1}{\theta^2}-\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\right)=\\
\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2-\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\cdot\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times+\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\cdot\left(\frac{1}{\theta^2}-\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2=\\
\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^3+\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\cdot\left(\frac{1}{\theta^2}-\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^4=\\
\because\ \left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^3=-\theta^2\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times,\ \left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^4=-\theta^2\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\\
\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\theta^2\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times-\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\cdot\left(\frac{1}{\theta^2}-\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\right)\theta^2\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2=\\
\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta-\sin\theta}{\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times-\frac{\theta-\sin\theta}{\theta}\cdot\left(\frac{1}{\theta^2}-\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2=\\
\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta-\sin\theta}{\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times-\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2+\frac{\theta-\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2=\\
\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta-\sin\theta}{\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times+\frac{\theta-\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times+(1-\cos\theta)\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times+\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta-\sin\theta}{\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times=\\
-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times+\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times=\mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\theta^2}-\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2+\frac{\theta-\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2=\\
\frac{1}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2-\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2+\left(1-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cdot\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2=\\
\frac{1}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2-\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2+\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2-\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{2\theta\sin\theta}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2=\\
\frac{1}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2=\\
\frac{1}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\theta+1+\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2=\\
\frac{1}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2-\frac{1}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2=\mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}^{-1}&=\mathbf{I}-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times+\frac{1}{\theta^2}\left(1-\frac{\theta\cos(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\\
1-\frac{\theta\cos(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)}&=1-\frac{\theta}{2}\cot(\theta/2)\\
&\because\ \cot(\theta/2)=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\\
&=1-\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\\
&=1-\frac{\frac{\sin\theta}{\theta}}{2\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}}\\
&=1-\frac{A}{2B}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_\times & \mathbf{I}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}^2 &= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_\times & \mathbf{I}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_\times & \mathbf{I}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_\times^2 & [\boldsymbol{\omega}]_\times \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}^3 &= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_\times^2 & [\boldsymbol{\omega}]_\times \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_\times & \mathbf{I}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_\times^3 & [\boldsymbol{\omega}]_\times^2 \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}^4 &= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_\times^3 & [\boldsymbol{\omega}]_\times^2 \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_\times & \mathbf{I}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}]_\times^4 & [\boldsymbol{\omega}]_\times^3 \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[\boldsymbol{\omega}\times]^2 = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} - \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \boldsymbol{I} \\
&[\boldsymbol{\omega}\times]^3 = -\|\boldsymbol{\omega}\|^2 [\boldsymbol{\omega}\times] \qquad [\boldsymbol{\omega}\times]^4 = -\|\boldsymbol{\omega}\|^2 [\boldsymbol{\omega}\times]^2 \quad [\boldsymbol{\omega}\times]^5 = \|\boldsymbol{\omega}\|^4 [\boldsymbol{\omega}\times] \quad [\boldsymbol{\omega}\times]^6 = \|\boldsymbol{\omega}\|^4 [\boldsymbol{\omega}\times]^2 \\
&[\boldsymbol{\omega}\times]^7 = -\|\boldsymbol{\omega}\|^6 [\boldsymbol{\omega}\times] \qquad [\boldsymbol{\omega}\times]^8 = -\|\boldsymbol{\omega}\|^6 [\boldsymbol{\omega}\times]^2 \quad [\boldsymbol{\omega}\times]^9 = \|\boldsymbol{\omega}\|^8 [\boldsymbol{\omega}\times] \quad [\boldsymbol{\omega}\times]^{10} = \|\boldsymbol{\omega}\|^8 [\boldsymbol{\omega}\times]^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Theta} &= \mathbf{I}_{3\times3} + [\boldsymbol{\omega}]_\times \Delta t + \frac{1}{2!}[\boldsymbol{\omega}]_\times^2 \Delta t^2 + \frac{1}{3!}[\boldsymbol{\omega}]_\times^3 \Delta t^3 + \frac{1}{4!}[\boldsymbol{\omega}]_\times^4 \Delta t^4 + \frac{1}{5!}[\boldsymbol{\omega}]_\times^5 \Delta t^5 + \frac{1}{6!}[\boldsymbol{\omega}]_\times^6 \Delta t^6 + \dots \\
&= \mathbf{I}_{3\times3} + [\boldsymbol{\omega}]_\times \Delta t + \frac{1}{2!}[\boldsymbol{\omega}]_\times^2 \Delta t^2 - \frac{1}{3!}\|\boldsymbol{\omega}\|^2 [\boldsymbol{\omega}]_\times \Delta t^3 - \frac{1}{4!}\|\boldsymbol{\omega}\|^2 [\boldsymbol{\omega}]_\times^2 \Delta t^4 + \frac{1}{5!}\|\boldsymbol{\omega}\|^4 [\boldsymbol{\omega}]_\times \Delta t^5 + \frac{1}{6!}\|\boldsymbol{\omega}\|^4 [\boldsymbol{\omega}]_\times^2 \Delta t^6 + \\
&= \mathbf{I}_{3\times3} + \left(\Delta t - \frac{1}{3!}\|\boldsymbol{\omega}\|^2 \Delta t^3 + \frac{1}{5!}\|\boldsymbol{\omega}\|^4 \Delta t^5 - \dots\right)[\boldsymbol{\omega}]_\times + \left(\frac{1}{2!}\Delta t^2 - \frac{1}{4!}\|\boldsymbol{\omega}\|^2 \Delta t^4 + \frac{1}{6!}\|\boldsymbol{\omega}\|^4 \Delta t^6 - \dots\right)[\boldsymbol{\omega}]_\times^2 \\
&= \mathbf{I}_{3\times3} + \frac{[\boldsymbol{\omega}]_\times}{\|\boldsymbol{\omega}\|}\left(\|\boldsymbol{\omega}\| \Delta t - \frac{1}{3!}\|\boldsymbol{\omega}\|^3 \Delta t^3 + \frac{1}{5!}\|\boldsymbol{\omega}\|^3 \Delta t^5 - \dots\right) + \frac{[\boldsymbol{\omega}]_\times^2}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2!}\|\boldsymbol{\omega}\|^2 \Delta t^2 + \frac{1}{4!}\|\boldsymbol{\omega}\|^4 \Delta t^4 - \frac{1}{6!}\right.\right. \\
&= \mathbf{I}_{3\times3} + \frac{[\boldsymbol{\omega}]_\times}{\|\boldsymbol{\omega}\|}\sin(\|\boldsymbol{\omega}\| \Delta t) + \frac{[\boldsymbol{\omega}]_\times^2}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2}\left(1 - \cos(\|\boldsymbol{\omega}\| \Delta t)\right) \\
&= \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Psi} &= \mathbf{I}_{3\times3}\Delta t + \frac{1}{2!}\left[\boldsymbol{\omega}\right]_\times \Delta t^2 + \frac{1}{3!}\left[\boldsymbol{\omega}\right]_\times^2 \Delta t^3 + \frac{1}{4!}\left[\boldsymbol{\omega}\right]_\times^3 \Delta t^4 + \frac{1}{5!}\left[\boldsymbol{\omega}\right]_\times^4 \Delta t^5 + \frac{1}{6!}\left[\boldsymbol{\omega}\right]_\times^5 \Delta t^6 + \dots \\
&= \mathbf{I}_{3\times3}\Delta t + \frac{1}{2!}\left[\boldsymbol{\omega}\right]_\times \Delta t^2 + \frac{1}{3!}\left[\boldsymbol{\omega}\right]_\times^2 \Delta t^3 - \frac{1}{4!}\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|^2\left[\boldsymbol{\omega}\right]_\times \Delta t^4 - \frac{1}{5!}\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|^2\left[\boldsymbol{\omega}\right]_\times^2 \Delta t^5 + \frac{1}{6!}\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|^4\left[\boldsymbol{\omega}\right]_\times \Delta t^6 + \dots \\
&= \mathbf{I}_{3\times3}\Delta t + \left(\frac{1}{2!}\Delta t^2 - \frac{1}{4!}\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|^2 \Delta t^4 + \frac{1}{6!}\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|^4 \Delta t^6 - \dots\right)\left[\boldsymbol{\omega}\right]_\times + \left(\frac{1}{3!}\Delta t^3 - \frac{1}{5!}\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|^2 \Delta t^5 + \frac{1}{7!}\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|^4 \Delta t^7 - \dots\right)\left[\boldsymbol{\omega}\right] \\
&= \mathbf{I}_{3\times3}\Delta t + \frac{\left[\boldsymbol{\omega}\right]_\times}{\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|^2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2!}\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|^2 \Delta t^2 + \frac{1}{4!}\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|^4 \Delta t^4 - \frac{1}{6!}\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|^6 \Delta t^6 - \dots\right)\right) - \frac{\left[\boldsymbol{\omega}\right]_\times^2}{\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|^3}\left(-\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|\Delta t + \left\|\boldsymbol{\omega}\right\|\Delta t - \right. \\
&= \mathbf{I}_{3\times3}\Delta t + \frac{\left[\boldsymbol{\omega}\right]_\times}{\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|^2}\left(1 - \cos\left(\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|\Delta t\right)\right) - \frac{\left[\boldsymbol{\omega}\right]_\times^2}{\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|^3}\left(-\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|\Delta t + \sin\left(\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|\Delta t\right)\right) \\
&= \mathbf{I}_{3\times3}\Delta t + \frac{\left[\boldsymbol{\omega}\right]_\times}{\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|^2}\left(1 - \cos\left(\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|\Delta t\right)\right) + \frac{\left[\boldsymbol{\omega}\right]_\times^2}{\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|^3}\left(\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|\Delta t - \sin\left(\left\|\boldsymbol{\omega}\right\|\Delta t\right)\right) \\
&= \mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right) & \mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right) \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^\mathrm{T} & -\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^\mathrm{T} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times3} & -\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^\mathrm{T} + \mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right) \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^\mathrm{T} & -\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^\mathrm{T} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right) & \mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right) \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^\mathrm{T}\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right) - \mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^\mathrm{T} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right) &= \mathbf{I} + \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \\
\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} &= \mathbf{I} - \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \\
\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right) &= \mathbf{I} + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \\
\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} &= \mathbf{I} - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \\
\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right)\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}} &= \left(\mathbf{I} + \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\right)\left(\mathbf{I} - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\right) \\
&= \mathbf{I} - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \\
&+ \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times\left(\mathbf{I} - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\right) \\
&+ \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\left(\mathbf{I} - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\right) \\
&= \mathbf{I} - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \\
&+ \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times - \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \\
&+ \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \\
&= \mathbf{I} - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \\
&+ \frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times - \frac{\sin\theta\left(1-\cos\theta\right)}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \\
&+ \frac{\left(1-\cos\theta\right)^2}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \frac{\left(1-\cos\theta\right)\sin\theta}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \\
&= \mathbf{I} - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \\
&+ \frac{\sin^2\theta + \left(1-\cos\theta\right)^2}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times \\
&+ \frac{\left(1-\cos\theta\right)\sin\theta - \sin\theta\left(1-\cos\theta\right)}{\theta^3}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \\
&= \mathbf{I} - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \\
&+ \frac{\sin^2\theta + \left(1-2\cos\theta+\cos^2\theta\right)}{\theta^2}\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times \\
&= \mathbf{I} - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \\
&+ 2\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times \\
&= \mathbf{I} + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\left[\boldsymbol{\theta}\right]_\times^2 \\
&= \mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right) \\
\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right) &= \mathbf{V}\left(\boldsymbol{\theta}\right)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times-\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times+\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2&=\\ \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times-\left(\frac{\sin\theta\,(1-\cos\theta)}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2+\left(\frac{\sin\theta\,(\theta-\sin\theta)}{\theta^4}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^3&=\\ \because\ [\boldsymbol{\theta}]_\times^3=-\theta^2\,[\boldsymbol{\theta}]_\times&\\ \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times-\left(\frac{\sin\theta\,(1-\cos\theta)}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2-\left(\frac{\sin\theta\,(\theta-\sin\theta)}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times&=\\ \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times-\left(\frac{\sin\theta\,(1-\cos\theta)}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2-\left(\frac{\sin\theta}{\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times&=\\ \frac{\sin^2\theta}{\theta^2}[\boldsymbol{\theta}]_\times-\frac{\sin\theta\,(1-\cos\theta)}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2-\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times+\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2&=\\ \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2-\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^2[\boldsymbol{\theta}]_\times^3+\left(\frac{(1-\cos\theta)\,(\theta-\sin\theta)}{\theta^5}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^4&=\\ \because\ [\boldsymbol{\theta}]_\times^3=-\theta^2\,[\boldsymbol{\theta}]_\times,\ [\boldsymbol{\theta}]_\times^4=-\theta^2\,[\boldsymbol{\theta}]_\times^2&\\ \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2+\frac{(1-\cos\theta)^2}{\theta^2}[\boldsymbol{\theta}]_\times-\frac{(1-\cos\theta)\,(\theta-\sin\theta)}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2&=\\ \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2+\frac{(1-\cos\theta)^2}{\theta^2}[\boldsymbol{\theta}]_\times-\frac{(1-\cos\theta)\,\theta-(1-\cos\theta)\sin\theta}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2&=\\ \frac{(1-\cos\theta)^2}{\theta^2}[\boldsymbol{\theta}]_\times+\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\boldsymbol{I}_{3\times3}\Delta t^2-\frac{1}{|\hat{\boldsymbol{\omega}}|^2}\left(\boldsymbol{R}_I^B(\hat{\boldsymbol{\omega}}\Delta t)-\boldsymbol{I}_{3\times3}+[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]\Delta t-\frac{1}{2}[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]^2\Delta t^2\right)&=\\ \frac{1}{2}\boldsymbol{I}_{3\times3}\Delta t^2-\frac{1}{|\hat{\boldsymbol{\omega}}|^2}\left(\boldsymbol{R}_I^B(\hat{\boldsymbol{\omega}}\Delta t)-\boldsymbol{I}_{3\times3}+[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]\Delta t\right)-\frac{1}{|\hat{\boldsymbol{\omega}}|^2}\left(\frac{1}{2}[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]^2\Delta t^2\right)&=\\ \frac{\Delta t^2}{2}\left(\boldsymbol{I}_{3\times3}-\frac{[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]^2}{|\hat{\boldsymbol{\omega}}|^2}\right)-\frac{1}{[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]}\frac{[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]}{|\hat{\boldsymbol{\omega}}|^2}\left(\boldsymbol{R}_I^B(\hat{\boldsymbol{\omega}}\Delta t)-\boldsymbol{I}_{3\times3}+[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]\Delta t\right)&=\\ \frac{\Delta t^2}{2}\left(\boldsymbol{I}_{3\times3}-\frac{[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]^2}{|\hat{\boldsymbol{\omega}}|^2}\right)-\frac{1}{[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]}\left(-\boldsymbol{I}_{3\times3}\Delta t+\boldsymbol{I}_{3\times3}\Delta t+\frac{[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]}{|\hat{\boldsymbol{\omega}}|^2}\left(\boldsymbol{R}_I^B(\hat{\boldsymbol{\omega}}\Delta t)-\boldsymbol{I}_{3\times3}+[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]\Delta t\right)\right)&=\\ \frac{\Delta t^2}{2}\left(\boldsymbol{I}_{3\times3}-\frac{[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]^2}{|\hat{\boldsymbol{\omega}}|^2}\right)+\frac{\boldsymbol{I}_{3\times3}\Delta t}{[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]}-\frac{1}{[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]}\left(\boldsymbol{I}_{3\times3}\Delta t+\frac{[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]}{|\hat{\boldsymbol{\omega}}|^2}\left(\boldsymbol{R}_I^B(\hat{\boldsymbol{\omega}}\Delta t)-\boldsymbol{I}_{3\times3}+[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times]\Delta t\right)\right)&=\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{I} + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 \\
\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}} &= \mathbf{I} - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 \\
\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})\,\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}} &= \left(\mathbf{I} + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2\right)\left(\mathbf{I} - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2\right) \\
&= \mathbf{I} - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 \\
&+ \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^2[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^3 \\
&+ \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 - \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^3 + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)^2[\boldsymbol{\theta}]_\times^4 \\
&= \mathbf{I} - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 \\
&- \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^2[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 + \frac{(1-\cos\theta)\sin\theta}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times \\
&+ \frac{(\theta-\sin\theta)(1-\cos\theta)}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times + \frac{(\theta-\sin\theta)\sin\theta}{\theta^4}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 \\
&= \mathbf{I} + \frac{\theta^2+2\cos\theta-2}{\theta^4}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^2[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^3 &= \\
\because\ [\boldsymbol{\theta}]_\times^3 = -\theta^2[\boldsymbol{\theta}]_\times & \\
\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^2[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\left(-\theta^2[\boldsymbol{\theta}]_\times\right) &= \\
\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^2[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 - \frac{(1-\cos\theta)(\theta-\sin\theta)}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times &= \\
\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times - \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^2[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 - \frac{(1-\cos\theta)\theta-(1-\cos\theta)\sin\theta}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times &= \\
- \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^2[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 + \frac{(1-\cos\theta)\sin\theta}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2-\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^3+\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)^2[\boldsymbol{\theta}]_\times^4 &= \\
\because\ [\boldsymbol{\theta}]_\times^3=-\theta^2[\boldsymbol{\theta}]_\times\,,\ [\boldsymbol{\theta}]_\times^4=-\theta^2[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 & \\
\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2-\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\left(-\theta^2[\boldsymbol{\theta}]_\times\right)+\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)^2\left(-\theta^2[\boldsymbol{\theta}]_\times^2\right) &= \\
\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2+\frac{(\theta-\sin\theta)(1-\cos\theta)}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times-\frac{(\theta-\sin\theta)^2}{\theta^4}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 &= \\
\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2+\frac{(\theta-\sin\theta)(1-\cos\theta)}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times-\frac{(\theta-\sin\theta)\theta-(\theta-\sin\theta)\sin\theta}{\theta^4}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 &= \\
\frac{(\theta-\sin\theta)(1-\cos\theta)}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times+\frac{(\theta-\sin\theta)\sin\theta}{\theta^4}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 &=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times+\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times+\frac{(\theta-\sin\theta)(1-\cos\theta)}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times &= \\
-\frac{(1-\cos\theta)}{\theta^2}[\boldsymbol{\theta}]_\times+\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times+\frac{\theta(1-\cos\theta)-\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times &= \\
\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times-\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3}[\boldsymbol{\theta}]_\times &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2-\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^2[\boldsymbol{\theta}]_\times^2+\frac{(\theta-\sin\theta)\sin\theta}{\theta^4}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 &= \\
\frac{\theta(\theta-\sin\theta)}{\theta^4}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2-\frac{(1-\cos\theta)^2}{\theta^4}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2+\frac{(\theta-\sin\theta)\sin\theta}{\theta^4}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 &= \\
\frac{\theta^2-\theta\sin\theta-(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)+\theta\sin\theta-\sin^2\theta}{\theta^4}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 &= \\
\frac{\theta^2-\theta\sin\theta-1+2\cos\theta-\cos^2\theta+\theta\sin\theta-\sin^2\theta}{\theta^4}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 &= \\
\frac{\theta^2-1+2\cos\theta-\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}{\theta^4}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 &= \\
\frac{\theta^2+2\cos\theta-2}{\theta^4}[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{I}+\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times+\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2 \\
\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}} &= \mathbf{I}-\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times+\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)[\boldsymbol{\theta}]_\times^2
\end{aligned}
$$