

# 航空航天、Android 和 Windows 坐标系

NXP

21 June 2016

## 摘要

本应用说明记录了 NXP 传感器融合库中支持的 3 个坐标系 (航空航天、Windows 和 Android)。

## 1 介绍

### 1.1 概要

本应用说明记录了 NXP 传感器融合库中支持的三个坐标系：

- 航空航天 ( $x = \text{North}, y = \text{East}, z = \text{Down}$  / NED 标准)
- Android ( $x = \text{East}, y = \text{North}, z = \text{Up}$  / ENU 标准)
- Windows 8 ( $x = \text{East}, y = \text{North}, z = \text{Up}$  / ENU 标准)

在为 Android 或 windows8 系统开发时，用户应该使用相应的坐标系。否则，航空航天坐标系可能是最佳选择，因为它的旋转顺序和欧拉角的范围导致偏航角/罗盘航向角估计比使用其他两个坐标系计算的航向估计更方便用户。

具体而言，航空航天坐标系中的  $180^\circ$  横滚角不会改变偏航角/罗盘航向角，而  $180^\circ$  俯仰角旋转会改变偏航角/罗盘航向角  $180^\circ$ 。这与飞机的行为相匹配，其中  $180^\circ$  横滚角仅意味着飞机处于同一罗盘航向角但反向，而  $180^\circ$  俯仰角变化意味着飞机处于反向罗盘航向角并反向。在 Android 和 windows 8 坐标系中，相反的行为是强制性的，在这些坐标系中， $180^\circ$  的横滚角会导致罗盘航向角发生  $180^\circ$  的变化，而  $180^\circ$  的俯仰角旋转对罗盘航向角没有影响。

### 1.2 软件功能

表 1. 传感器融合软件功能

功能	描述	参考
<pre>void fNEDAnglesDegFromRotationMatrix (float R[][3], float *pfPhiDeg, float *pfTheDeg, float *pfPsiDeg, float *pfRhoDeg, float *pfChiDeg);  void fAndroidAnglesDegFromRotationMatrix (float R[][3], float *pfPhiDeg, float *pfTheDeg, float *pfPsiDeg, float *pfRhoDeg, float *pfChiDeg);  void fWin8AnglesDegFromRotationMatrix (float R[][3], float *pfPhiDeg, float *pfTheDeg, float *pfPsiDeg, float *pfRhoDeg, float *pfChiDeg);</pre>	<p>从航空航天/NED、Android 和 Windows 8 方向矩阵计算欧拉角 (横滚、俯仰、偏航) 加上罗盘航向和倾角。</p>	<p>2 (NED) 3 (Android) 4 (Windows 8)</p>

### 1.3 术语

符号	定义
$q$	一般四元数 $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$
$\mathbf{R}$	旋转矩阵
$\mathbf{R}_{NED}$	航空航天 (NED) 的旋转矩阵
$\mathbf{R}_{Android}$	Android 的旋转矩阵
$\mathbf{R}_{Win8}$	Windows 8 的旋转矩阵
$\mathbf{R}_x$	旋转矩阵的 $x$ 轴
$\mathbf{R}_y$	旋转矩阵的 $y$ 轴
$\mathbf{R}_z$	旋转矩阵的 $z$ 轴
$\theta$	俯仰角
$\rho$	罗盘航向角
$\phi$	横滚角
$\chi$	倾斜角
$\psi$	偏航角

## 1.4 重力与加速度的等效性

加速计测量直线加速度减去每个轴上的重力分量。这是基础物理学的一个结果，它指出了在重力场中静止时所受的力与在与重力相反的方向上加速时所受的力之间的等价性。

例如，一个坐在椅子上休息的观测者在地球上有一个  $1g$  的向下指向的重力场，他所感受到的力与坐在远离任何重力场的宇宙飞船上以  $1g$  的速度向相反方向加速时所感受到的力完全相同。

## 1.5 坐标系的差异

航空航天坐标系将零旋转方向的轴方向定义为  $x = \text{North}, y = \text{East}, z = \text{Down}(\text{NED})$ 。Android 和 Windows 8 坐标系将同一零旋转方向的轴的方向定义为  $x = \text{East}, y = \text{North}, z = \text{Up}(\text{ENU})$ 。

另一个复杂的情况是，尽管所有加速度计的输出都是本机正加速度，但航空航天和 Windows 8 坐标系中的轴被指定为重力正，这意味着当轴向下并与重力对齐时，测量值为  $+1g$ 。Android 坐标系是加速度正数，这意味着当一个轴指向上并与重力相反方向上的等效  $1g$  加速度对齐时，它的测量值为  $+1g$ 。

航空航天和 Windows 8 坐标系定义了通常的数学意义上的旋转，即顺时针方向观察时，旋转为正。Android 坐标系中的旋转具有相反的符号。

表 2 总结了这些差异。

表 2. 坐标系比较

项	航空航天 (NED)	Android (ENU)	Windows 8 (ENU)
坐标轴对齐	XYZ = NED	XYZ = ENU	XYZ = ENU
加速计符号	重力-加速度 轴向下时为 $+1g$ 轴向上时为 $-1g$	加速度-重力 轴向上时为 $+1g$ 轴向下时为 $-1g$	重力-加速度 轴向下时为 $+1g$ 轴向上时为 $-1g$
水平时加速计读数	$G[Z] = +1g$	$G[Z] = +1g$	$G[Z] = -1g$
正旋转方向	顺时针	逆时针	顺时针
罗盘航向 $\rho$ /偏航 $\psi$	$\rho = \psi$	$\rho = \psi$	$\rho = 360^\circ - \psi$

参考第 2.1 节、第 3.1 节和第 4.1 节，了解轴的定义、加速计的符号标准以及航空航天、Android 和 Windows 8 坐标系中绕任何轴正旋转的定义。

## 1.6 欧拉角方向矩阵

与旋转矩阵和四元数相比，欧拉角 (横滚角、俯仰角和偏航角) 的数学特性非常差，应该避免。欧拉角仅用于 NXP 的传感器融合库软件中，作为供人使用的输出，因为它们直观易懂。

欧拉角的一个数学问题是旋转矩阵不可交换，这意味着单个欧拉角旋转的顺序很重要。相同的三个欧拉角在不同的顺序下会给出不同的旋转矩阵。简单地指定横滚、俯仰和偏航的欧拉角而不指定它们的顺序是没有意义的。

另一个问题是，欧拉角在某些方向上具有不连续性，而旋转矩阵或旋转四元数总是连续的，并且随着旋转而平滑变化。最后，在称为“万向节锁”的方向上，欧拉角变得模糊和振荡，即使旋转矩阵和四元数是稳定的。

由于三个坐标标准要求计算欧拉角，下表 3 列出了方向矩阵分解为三个欧拉角旋转。

表 3. 欧拉角旋转序列

项	航空航天 (NED)	Android (ENU)	Windows 8 (ENU)
欧拉角旋转序列	$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x(\phi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_z(\psi)$	$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{R}_y(\phi) \mathbf{R}_z(\psi)$	$\mathbf{R} = \mathbf{R}_y(\phi) \mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{R}_z(\psi)$

## 1.7 万向节锁

当第二次旋转 (在航空航天和 Windows 8 系统中为俯仰, 在 Android 有系统中为横滚) 与第一次和第三次欧拉角旋转的轴对齐时, 所有三个坐标系中都会发生万向节锁定。定义方向所需的自由度从三个欧拉角减少到两个。第一个欧拉旋转角的任何变化都可以通过第三个欧拉旋转角的抵消变化来抵消, 从而导致两个值一起不稳定地振荡。

因此, 捷联导航系统中的万向节锁定是一种数学不稳定性, 它是由方向矩阵或四元数分解为三个单独的欧拉角旋转而产生的, 并且通过使用在万向节锁定方向上完全稳定的方向矩阵或四元数表示可以很容易地避免。

NXP 传感器融合库始终使用方向矩阵和四元数代数, 并计算供人类使用的欧拉角作为算法的输出。因此, 计算的方向在万向节锁定方向上与在其它方向上一样稳定。任何软件基本上基于欧拉角旋转优先于旋转矩阵或四元数将遭受万向节锁定不稳定性和数学不连续性。

表 4. 坐标系定义的万向节锁

项	航空航天 (NED)	Android (ENU)	Windows 8 (ENU)
万向节锁	$\pm 90^\circ$ 俯仰角 ( $y$ 轴)	$\pm 90^\circ$ 横滚角 ( $y$ 轴)	$\pm 90^\circ$ 俯仰角 ( $x$ 轴)

## 1.8 欧拉角不连续性

方向的欧拉角表示的另一个问题是, 除了在万向节锁方向上有无限多个欧拉角解外, 通常每个方向都有两个欧拉角解。这将强制其中一个欧拉角在  $-90^\circ$  到  $+90^\circ$  的缩小范围内受到约束, 以消除两个解中的一个。

通过将装置的起始位置平放在工作台上, 然后应用这两种旋转顺序, 很容易证明存在两种解:

- 俯仰旋转  $180^\circ$
- 偏航旋转  $180^\circ$ , 俯仰旋转  $180^\circ$

两个旋转序列产生相同的物理方向和相同的方向矩阵和四元数。

航空航天坐标系将俯仰角的范围限制在  $-90^\circ$  到  $+90^\circ$  之间, Android 和 Windows 8 坐标系将横滚角的范围限制在  $-90^\circ$  到  $+90^\circ$  之间。尽管这种限制只会导致除万向节锁以外的所有方向上的一个欧拉角解, 但它会产生不幸的数学副作用, 即在欧拉角中引入不连续性。

下表总结了每个坐标系中的欧拉角不连续性。第 2 节到第 4 节提供了有关各种表条目含义的更多信息。

项	航空航天 (NED)	Android (ENU)	Windows 8 (ENU)
欧拉角范围	$0^\circ \leq \text{Yaw}\psi(z) < 360^\circ$ $-90^\circ \leq \text{Pitch}\theta(y) < 90^\circ$ $-180^\circ \leq \text{Roll}\phi(x) < 180^\circ$	$0^\circ \leq \text{Yaw}\psi(z) < 360^\circ$ $-90^\circ \leq \text{Roll}\phi(y) < 90^\circ$ $-180^\circ \leq \text{Pitch}\theta(x) < 180^\circ$	$0^\circ \leq \text{Yaw}\psi(z) < 360^\circ$ $-180^\circ \leq \text{Pitch}\theta(x) < 180^\circ$ $-90^\circ \leq \text{Roll}\phi(y) < 90^\circ$
等效矩阵	$\mathbf{R}_x(\phi+\pi)\mathbf{R}_y(\pi-\theta)\mathbf{R}_z(\psi+\pi)$	$\mathbf{R}_x(\theta+\pi)\mathbf{R}_y(\pi-\phi)\mathbf{R}_z(\psi+\pi)$	$\mathbf{R}_y(\phi-\pi)\mathbf{R}_x(\pi-\theta)\mathbf{R}_z(\psi+\pi)$
在 $\pm 180^\circ$ 横滚角旋转时的行为	<p>横滚角在 <math>-180^\circ</math> 到 <math>180^\circ</math> 的范围内是连续的。</p> <p>偏航角或罗盘角没有变化。</p>	<p>横滚角是连续的，增大到 <math>90^\circ</math>，然后减小到 <math>-90^\circ</math>，然后再增大。</p> <p>俯仰角和偏航角在 <math>\pm 90^\circ</math> 横滚角时有 <math>180^\circ</math> 不连续性。</p>	<p>当横滚角超过 <math>90^\circ</math> 和 <math>-90^\circ</math> 时，横滚角、俯仰角、偏航角和罗盘角发生 <math>180^\circ</math> 跳跃。</p>
在 $\pm 180^\circ$ 俯仰角旋转时的行为	<p>俯仰角是连续的，增大到 <math>90^\circ</math>，然后减小到 <math>-90^\circ</math>，然后再增大。</p> <p>横滚角和偏航角在 <math>\pm 90^\circ</math> 俯仰角时有 <math>180^\circ</math> 不连续性。</p>	<p>俯仰角平滑变化。横滚角、偏航角或罗盘角无变化。</p>	<p>俯仰角平滑变化。横滚角、偏航角或罗盘角无变化。</p>

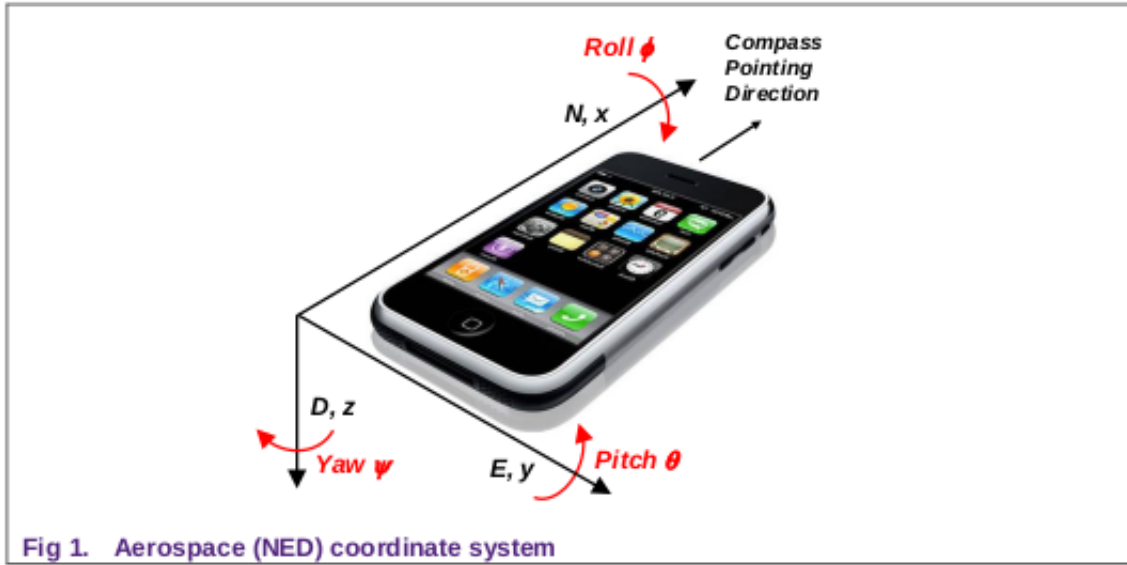
## 2 航空航天 (NED) 坐标系

### 2.1 坐标轴定义

航空航天坐标系如图 1 所示。它是一个  $x = \text{North}, y = \text{East}, z = \text{Down}$ (称为 NED) 坐标系，这意味着当产品以其默认方向放置时，平放在工作台上并指向北， $x$  轴指向北， $y$  轴指向东， $z$  轴指向下。

关于  $x$ 、 $y$  和  $z$  轴的旋转符号在正常惯例中定义为顺时针旋转，并且当沿着轴的增加方向看时被认为是正的。横滚、俯仰和偏航旋转具有其正常意义，并分别对应于围绕  $x$ 、 $y$  和  $z$  轴的旋转。偏航角  $\psi$  等于罗盘角  $\rho$ 。

航空航天坐标系为重力 (非加速度) 正，这意味着任何加速度计通道的输出在指向下方并与重力对齐时为正。因此，当设备水平时，加速计  $z$  轴读数为  $+1g$ 。



## 2.2 欧拉角方向矩阵

在航空航天坐标系中，欧拉角的旋转顺序是偏航，然后是俯仰，最后是横滚。横滚旋转  $\phi$  绕  $x$  轴旋转，俯仰旋转  $\theta$  绕  $y$  轴旋转，偏航旋转  $\psi$  绕  $z$  轴旋转。单个旋转矩阵为：

$$\mathbf{R}_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{R}_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

使用指定旋转顺序的复合航空航天旋转矩阵为：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{NED} &= \mathbf{R}_x(\phi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_z(\psi) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \mathbf{R}_{NED} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \theta \sin \phi \\ \cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \cos \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (5)$$

### 2.3 欧拉角方向四元数

航空航天坐标系中的欧拉角旋转四元数是：

$$q_x(\phi) = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \mathbf{i} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (6)$$

$$q_y(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathbf{j} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (7)$$

$$q_z(\psi) = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \mathbf{k} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (8)$$

航空航天旋转四元数  $q_{zyx} = q_z(\psi) q_y(\theta) q_x(\phi)$  计算为：

$$q_{zyx} = q_z(\psi) q_y(\theta) q_x(\phi) = \left\{ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \mathbf{k} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \right\} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathbf{j} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \left\{ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \mathbf{i} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\} \\ &+ \left\{ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\} \mathbf{i} \\ &+ \left\{ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\} \mathbf{j} \\ &+ \left\{ \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (10)$$

因此，航空航天四元数的元素是：

$$q_0 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (11)$$

$$q_1 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (12)$$

$$q_2 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (13)$$

$$q_3 = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (14)$$

### 2.4 万向节锁

当第二个俯仰旋转对准第一个偏航和第三个横滚旋转时，在航空航天坐标系中发生万向节锁定。这发生在  $90^\circ$  俯仰向上和  $90^\circ$  俯仰向下。方向的欧拉角描述中的自由度从三个减少到两个，横滚角和偏航角仅在定义了它们的和与差的情况下振荡。

在万向节锁  $\theta = 90^\circ$  和  $\theta = -90^\circ$  时，方程 (5) 简化为：

$$\mathbf{R}_{NED} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\sin(\psi - \phi) & \cos(\psi - \phi) & 0 \\ \cos(\psi - \phi) & \sin(\psi - \phi) & 0 \end{pmatrix} \text{ for } \theta = 90^\circ \quad (15)$$

$$\mathbf{R}_{NED} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin(\psi + \phi) & \cos(\psi + \phi) & 0 \\ -\cos(\psi + \phi) & -\sin(\psi + \phi) & 0 \end{pmatrix} \text{ for } \theta = -90^\circ \quad (16)$$

方向矩阵和四元数是稳定的，但在两个万向节锁方向上只能确定差分角  $\psi - \phi$  或求和角  $\psi + \phi$ 。

## 2.5 欧拉角不连续性

航空航天旋转矩阵  $\mathbf{R}_x(\phi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_z(\psi)$  等于矩阵  $\mathbf{R}_x(\phi + \pi) \mathbf{R}_y(\pi - \theta) \mathbf{R}_z(\psi + \pi)$ ，其中  $\pi$  弧度对应于  $180^\circ$ 。通过直接计算：

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_x(\phi + \pi) \mathbf{R}_y(\pi - \theta) \mathbf{R}_z(\psi + \pi) \\ &= \begin{pmatrix} -\cos(\pi - \theta) \cos \psi & -\cos(\pi - \theta) \sin \psi & -\sin(\pi - \theta) \\ \cos \psi \sin(\pi - \theta) \sin \phi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin(\pi - \theta) \sin \phi \sin \psi & -\cos(\pi - \theta) \sin \phi \\ \cos \phi \cos \psi \sin(\pi - \theta) + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin(\pi - \theta) \sin \psi - \cos \psi \sin \phi & -\cos(\pi - \theta) \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \theta \sin \phi \\ \cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \cos \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} = \mathbf{R}_x(\phi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_z(\psi) \end{aligned} \quad (17)$$

这是数学恒等式，相当于第 1.8 节中的陈述，即每个方向有两个欧拉角解。这句话可以改写为：除了在偏航时旋转  $\psi$ ，然后在俯仰时旋转  $\theta$ ，最后在横滚时旋转  $\phi$  之外，在偏航时旋转  $180^\circ$  加上  $\psi$ ，然后在俯仰时旋转  $180^\circ$  减去  $\theta$ ，最后在横滚时旋转  $180^\circ$  加上  $\phi$ ，可以达到相同的方向。

航空航天坐标系通过将俯仰角  $\theta$  限制在  $-90^\circ$  到  $+90^\circ$  的范围内，删除了两种解中的一种。方程式 (17) 和 (18) 规定，当俯仰角大于  $90^\circ$  或小于  $-90^\circ$  时，横滚角应增加  $180^\circ$  ( $\mathbf{R}_x(\phi + \pi)$  项)，俯仰角应取反并增加  $180^\circ$  ( $\mathbf{R}_y(\pi - \theta)$  项)，偏航/罗盘航向增加  $180^\circ$  ( $\mathbf{R}_z(\psi + \pi)$  项)。这些不连续性如图 2 至图 4 所示。

图 2 显示了当设备从默认的开始位置 (水平并指向北方) 横滚旋转  $360^\circ$  时的欧拉角。俯仰角和偏航角都没有变化，从  $-180^\circ$  到  $+180^\circ$  的横滚不连续性是取模  $360^\circ$  算法的结果，是完全可以接受的。电子罗盘的普通用户会同意，如果智能手机指向北方，然后给出  $180^\circ$  的横滚旋转，那么它仍然指向北方。



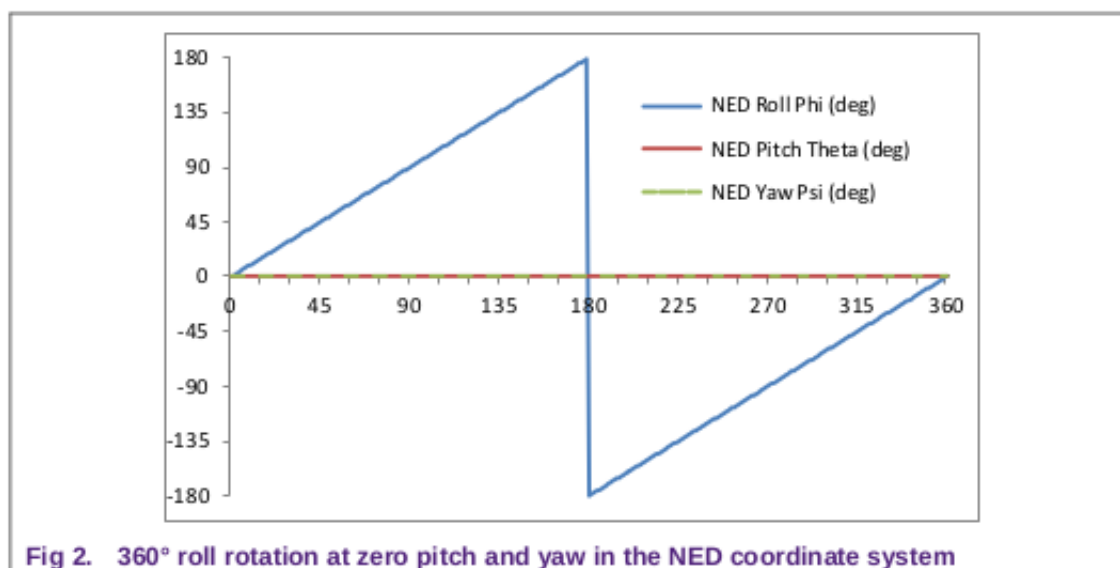


图 3 显示了 PCB 从同一起始位置俯仰旋转 360° 时的欧拉角。俯仰角达到 90°，然后开始平稳减小，没有间断，直到达到 -90°，然后开始平稳增大。偏航/罗盘角度在 90° 和 -90° 俯仰角时翻转 180°，但这是合理的人体工程学行为。出于上述相同的原因，一般智能手机用户会考虑 180° 俯仰旋转，以将偏航/罗盘航向翻转 180°。

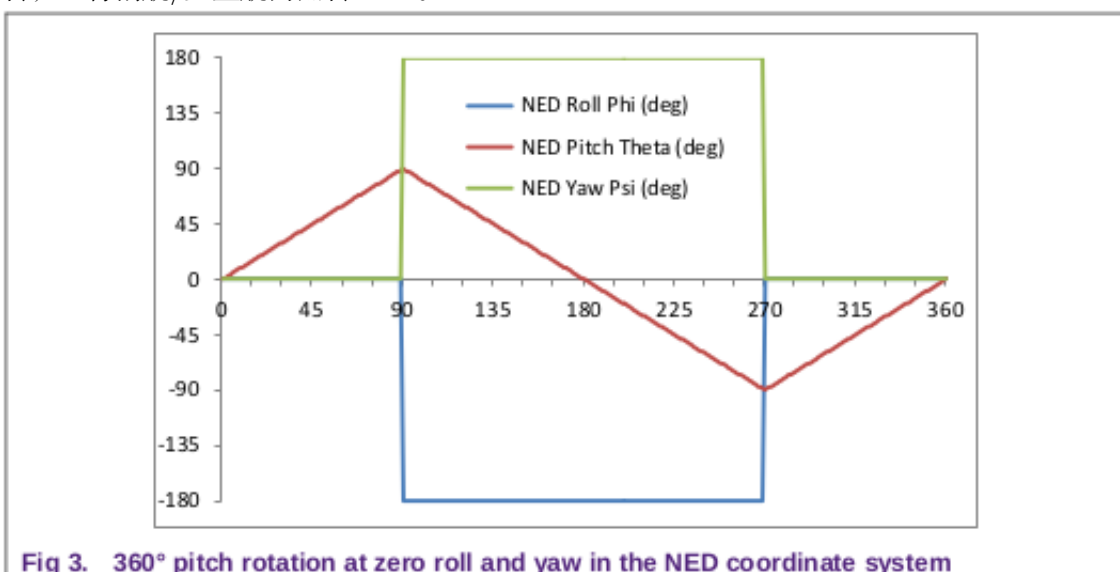


图 4 显示了当 PCB 在偏航时旋转 360° 而保持水平时偏航/罗盘角度的行为。偏航/罗盘航向平稳增加，当指向北方时，具有可接受的取模 360° 不连续性。

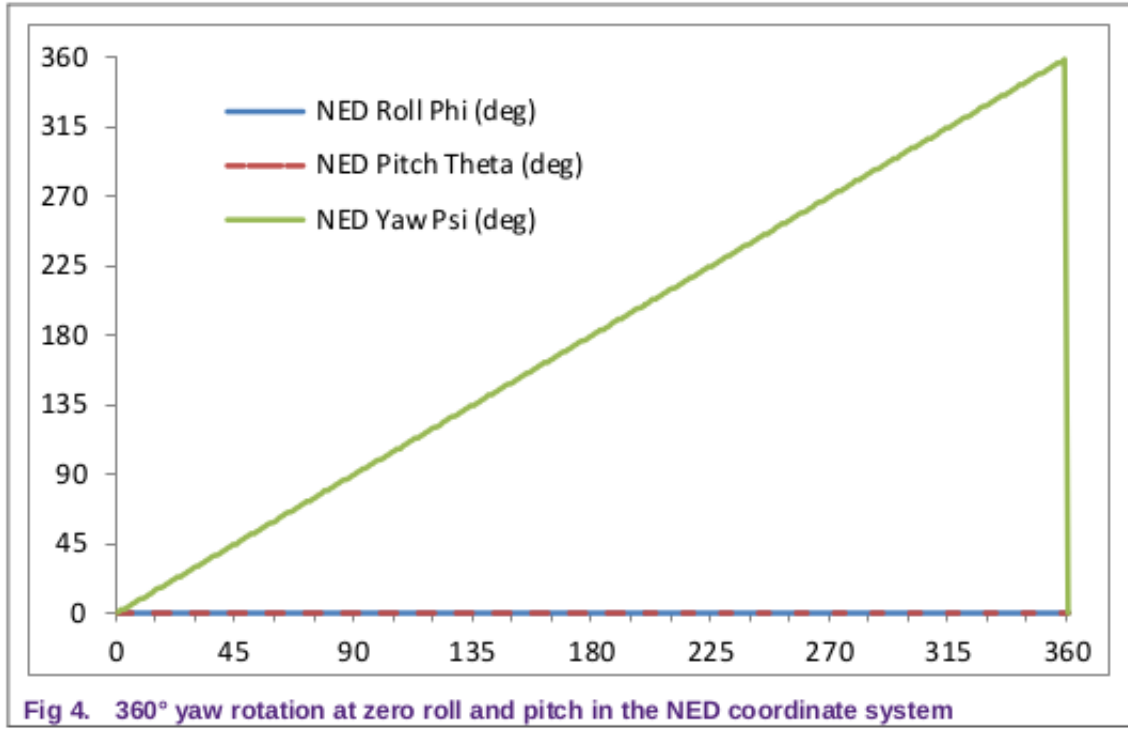


图 4 所示的行为是第 1 节中所作评论的理由，即航空航天坐标系在人体工程学上最合理，应优先使用，除非专门针对 Android 和 Windows 8 标准开发。

## 2.6 由旋转矩阵计算欧拉角

本节记录了从旋转矩阵计算欧拉角的函数 `fNEDAnglesDegFromRotationMatrix`，该函数根据方程 (5) 中定义的航空航天旋转矩阵计算欧拉角。三个航空航天欧拉角的解为：

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{R_{yz}}{R_{zz}} \right), -180^\circ \leq \phi < 180^\circ \quad (19)$$

$$\theta = \sin^{-1} (-R_{xz}), -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \quad (20)$$

$$\psi = \tan^{-1} \left( \frac{R_{xy}}{R_{xx}} \right), 0^\circ \leq \psi < 360^\circ \quad (21)$$

航空航天罗盘航向角  $\rho$  始终等于偏航角  $\psi$ ：

$$\rho = \psi \quad (22)$$

在万向节锁处，方程 (15) 和 (16) 给出：

$$\tan(\psi - \phi) = \left( \frac{R_{zy}}{R_{yy}} \right) \text{ for } \theta = 90^\circ \quad (23)$$

$$\tan(\psi + \phi) = \left( \frac{-R_{zy}}{R_{yy}} \right) \text{ for } \theta = -90^\circ \quad (24)$$

垂直方向的倾斜角  $\chi$  可由旋转重力向量与向下  $z$  轴的标量积确定，给出：

$$\cos \chi = \left\{ \mathbf{R}_{NED} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \\ R_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = R_{zz} = \cos \theta \cos \phi \quad (25)$$

### 3 Android 坐标系

#### 3.1 坐标轴定义

本节参考 Android 规范，网址：

<http://developer.android.com/reference/android/hardware/SensorEvent.html>

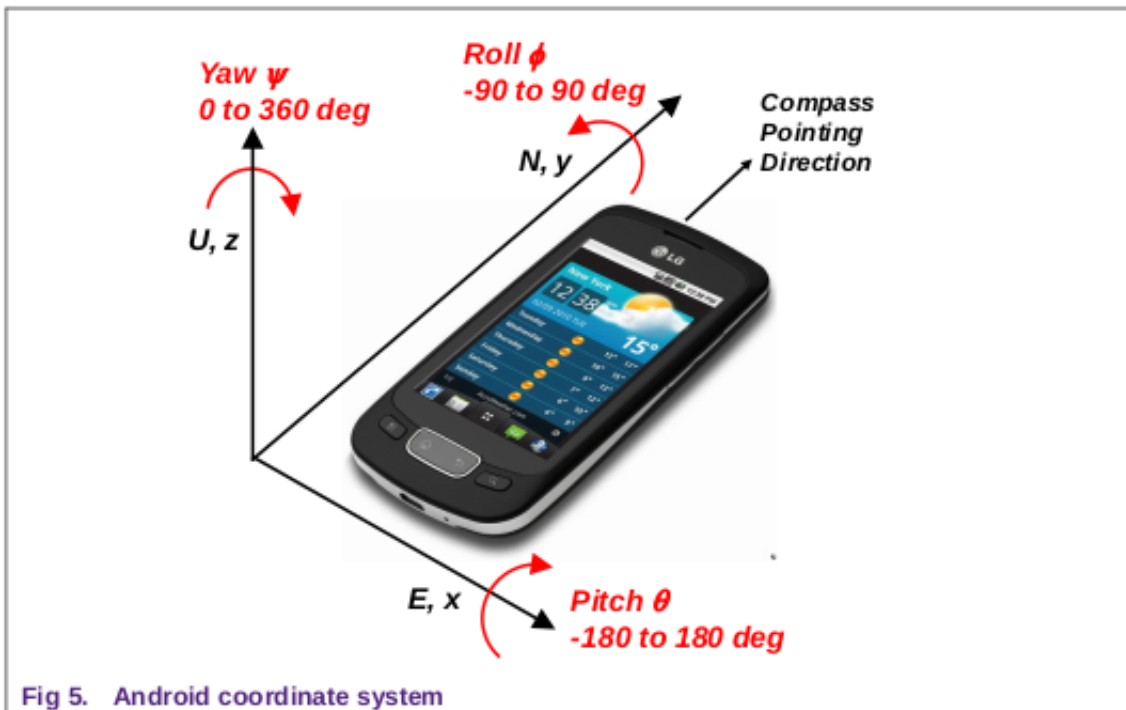
Android：“坐标空间是相对于手机屏幕的默认方向定义的。当设备的屏幕方向改变时，不会交换轴。采用 OpenGL ES 坐标系。原点位于屏幕的左下角， $x$  轴水平并指向右侧， $y$  轴垂直并指向上方， $z$  轴指向屏幕正面之外。在此系统中，屏幕后面的坐标具有负  $z$  值。”

Android 传感器坐标系如图 5 所示。它是一个  $x = \text{East}, y = \text{North}, z = \text{Up}$  (称为 ENU) 坐标系，这意味着当产品处于其默认方向 (平放在工作台上并指向北方) 时， $x$  轴指向东， $y$  轴指向北， $z$  轴指向上。

绕  $x$ 、 $y$  和  $z$  轴旋转的符号定义为与正常数学意义相反。当沿着轴的增加方向看时，逆时针旋转被认为是正的。横滚、俯仰和偏航旋转具有其正常意义，因此，分别对应于围绕  $y$ 、 $x$  和  $z$  轴的旋转。偏航角  $\psi$  等于罗盘角  $\rho$ 。

Android 坐标系是加速度 (不是重力) 正的，这意味着任何加速度计通道的输出在指向上并与重力对齐时都是正的。因此，当产品平直时，加速计  $z$  轴读数为  $+1g$ 。这与航空航天坐标系相同，因为有两个消除符号更改：i)  $z$  轴指向相反方向，ii) 航空航天为重力正，而 Android 为加速度正。

Android：“当设备平躺在桌子上时，加速度值为  $+9.81$ ，相当于设备的加速度 ( $0 \text{ m/s}^2$ ) 减去重力。”



### 3.2 欧拉角方向矩阵

在 Android 坐标系中，欧拉角旋转的顺序似乎没有记录在标准中。对 Android 平板电脑和手机行为的调查表明，大多数使用 i) 第一偏航 ii) 第二横滚和 iii) 最后俯仰。横滚旋转  $\phi$  是关于  $y$  轴的，俯仰旋转  $\theta$  是关于  $x$  轴的，偏航旋转  $\psi$  是关于  $z$  轴的。单个旋转矩阵为：

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{R}_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{R}_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

使用指定旋转顺序的组合 Android 旋转矩阵为：

$$\mathbf{R}_{Android} = \mathbf{R}_x(\theta)\mathbf{R}_y(\phi)\mathbf{R}_z(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi & -\cos \phi \sin \psi & \sin \phi \\ \cos \theta \sin \psi + \cos \psi \sin \phi \sin \theta & \cos \psi \cos \theta - \sin \phi \sin \psi \sin \theta & -\cos \phi \sin \theta \\ -\cos \psi \cos \theta \sin \phi + \sin \psi \sin \theta & \cos \theta \sin \phi \sin \psi + \cos \psi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (30)$$

### 3.3 欧拉角方向四元数

Android 坐标系中的单个欧拉角度旋转四元数为：

$$q_x(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathbf{i} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (31)$$

$$q_y(\phi) = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \mathbf{j} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (32)$$

$$q_z(\psi) = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \mathbf{k} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (33)$$

Android 旋转四元数  $q_{zyx} = q_z(\psi)q_y(\phi)q_x(\theta)$  计算为：

$$q_{zyx} = q_z(\psi)q_y(\phi)q_x(\theta) = \left\{ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \mathbf{k} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \right\} \left\{ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \mathbf{j} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathbf{i} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\} \\ &\quad - \left\{ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\} \mathbf{i} \\ &\quad - \left\{ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\} \mathbf{j} \\ &\quad - \left\{ \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (35)$$

因此, Android 四元数  $q_{zyx}$  的元素是:

$$q_0 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (36)$$

$$q_1 = -\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (37)$$

$$q_2 = -\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (38)$$

$$q_3 = -\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (39)$$

### 3.4 万向节锁

当第二个横滚旋转与第一个偏航和第三个俯仰旋转对齐时, 在 Android 坐标系中发生万向节锁定。这发生在  $+90^\circ$  横滚和  $-90^\circ$  横滚时。因此, 方向的欧拉角描述中的自由度从三个减少到两个, 俯仰角和偏航角仅在定义了它们的和与差的情况下振荡。

在万向节锁  $\phi = 90^\circ$  时, 方程 (30) 简化为:

$$\mathbf{R}_{Android} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\psi + \theta) & \cos(\psi + \theta) & 0 \\ -\cos(\psi + \theta) & \sin(\psi + \theta) & 0 \end{pmatrix} \text{ for } \phi = 90^\circ \quad (40)$$

在万向节锁  $\phi = -90^\circ$  时, 方程 (30) 简化为:

$$\mathbf{R}_{Android} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sin(\psi - \theta) & \cos(\psi - \theta) & 0 \\ \cos(\psi - \theta) & -\sin(\psi - \theta) & 0 \end{pmatrix} \text{ for } \phi = -90^\circ \quad (41)$$

方向矩阵和四元数是稳定的, 但是在两个万向节锁方向上只能确定求和角  $\psi + \theta$  或差分角  $\psi - \theta$ 。

### 3.5 欧拉角不连续性

Android 旋转矩阵  $\mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{R}_y(\phi) \mathbf{R}_z(\psi)$  等于矩阵  $\mathbf{R}_x(\theta + \pi) \mathbf{R}_y(\pi - \phi) \mathbf{R}_z(\psi + \pi)$ 。通过直接计算:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{R}_x(\theta + \pi) \mathbf{R}_y(\pi - \phi) \mathbf{R}_z(\psi + \pi) \\
&= \begin{pmatrix} -\cos(\pi - \phi) \cos \psi & \cos(\pi - \phi) \sin \psi & \sin(\pi - \phi) \\ \cos \theta \sin \psi + \cos \psi \sin(\pi - \phi) \sin \theta & \cos \psi \cos \theta - \sin(\pi - \phi) \sin \psi \sin \theta & \cos(\pi - \phi) \sin \theta \\ -\cos \psi \cos \theta \sin(\pi - \phi) + \sin \psi \sin \theta & \cos \theta \sin(\pi - \phi) \sin \psi + \cos \psi \sin \theta & -\cos(\pi - \phi) \cos \theta \end{pmatrix} \\
&\quad (42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi & -\cos \phi \sin \psi & \sin \phi \\ \cos \theta \sin \psi + \cos \psi \sin \phi \sin \theta & \cos \psi \cos \theta - \sin \phi \sin \psi \sin \theta & -\cos \phi \sin \theta \\ -\cos \psi \cos \theta \sin \phi + \sin \psi \sin \theta & \cos \theta \sin \phi \sin \psi + \cos \psi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} = \mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{R}_y(\phi) \mathbf{R}_z(\psi) \\
&\quad (43)
\end{aligned}$$

方程 (42) 和 (43) 表明, 对于给定的旋转矩阵, Android 的欧拉角有两个解。如果给定方向矩阵的横滚角、俯仰角和偏航角的一个解是  $\phi$ 、 $\theta$  和  $\psi$ , 则横滚角  $180^\circ$  减去  $\phi$ 、俯仰角  $180^\circ$  加上  $\theta$  和偏航角  $180^\circ$  加上  $\psi$  的解也是一样。

Android 规范通过将横滚角  $\theta$  限制在  $-90^\circ$  到  $+90^\circ$  的范围内, 删除了两种解情况。根据 Android 规范, 所有值都是角度 ( $^\circ$ ):

Android: “

**values[0]**: 方位角, 磁北方向和  $y$  轴之间的角度, 围绕  $z$  轴 (0 到 359)。0 = North, 90 = East, 180 = South, 270 = West

**values[1]**: 俯仰, 绕  $x$  轴旋转 ( $-180^\circ$  到  $180^\circ$ ),  $z$  轴向  $y$  轴移动时为正值。

**values[2]**: 横滚, 绕  $y$  轴旋转 ( $-90^\circ$  到  $90^\circ$ ), 当  $x$  轴向  $z$  轴移动时为正值。”

方程式 (42) 和 (43) 指出, 每当横滚角大于  $90^\circ$  或小于  $-90^\circ$  时, 俯仰角应增加  $180^\circ$  ( $\mathbf{R}_x(\theta + \pi)$  项), 横滚角应取反并增加  $180^\circ$  ( $\mathbf{R}_y(\pi - \phi)$  项), 偏航/罗盘航向应增加  $180^\circ$  ( $\mathbf{R}_z(\psi + \pi)$  项)。这些不连续性如图 6 至图 8 所示。

图 6 显示了当 PCB 从默认的开始位置 (水平并指向北方) 旋转  $360^\circ$  时的欧拉角。横滚角达到  $90^\circ$ , 然后开始平稳地减小, 没有间断, 直到达到  $-90^\circ$ , 然后开始平稳地增大。偏航角/罗盘角在  $90^\circ$  和  $-90^\circ$  横滚角时翻转  $180^\circ$ 。

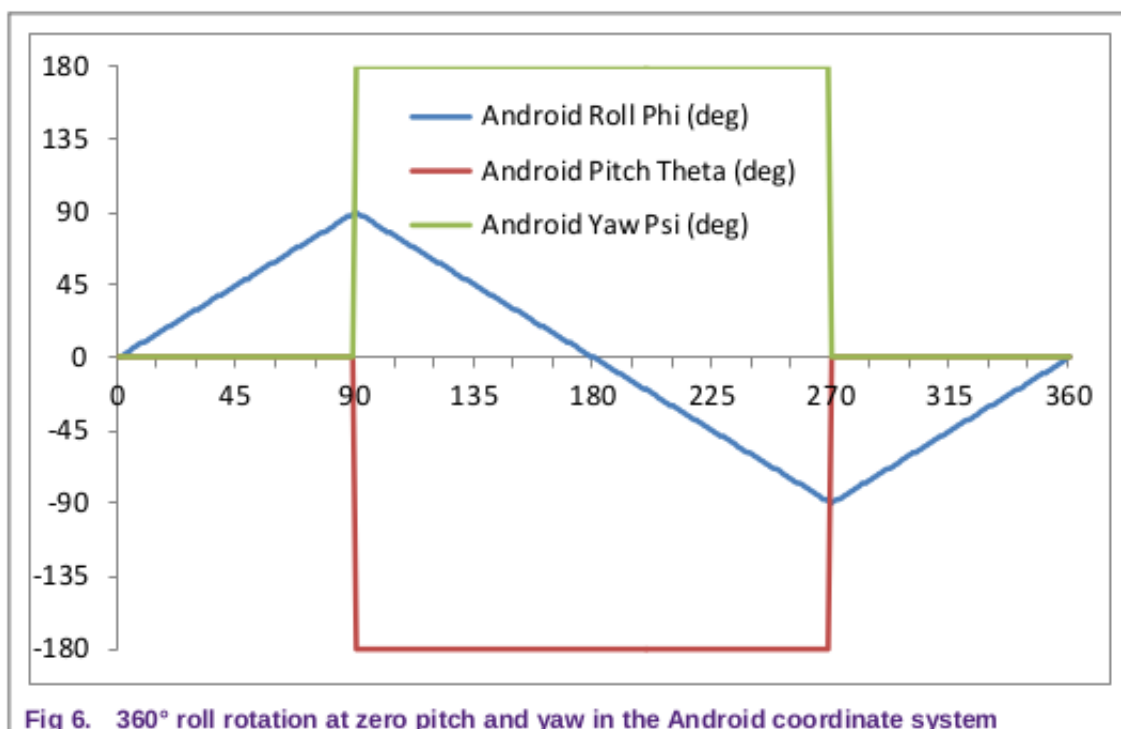


Fig 6. 360° roll rotation at zero pitch and yaw in the Android coordinate system

图 7 显示了 PCB 从同一起始位置俯仰旋转 360° 时的欧拉角。俯仰角平稳增加，等效角度为  $-180^\circ$  和  $+180^\circ$  之间可接受的取模  $360^\circ$  不连续性。

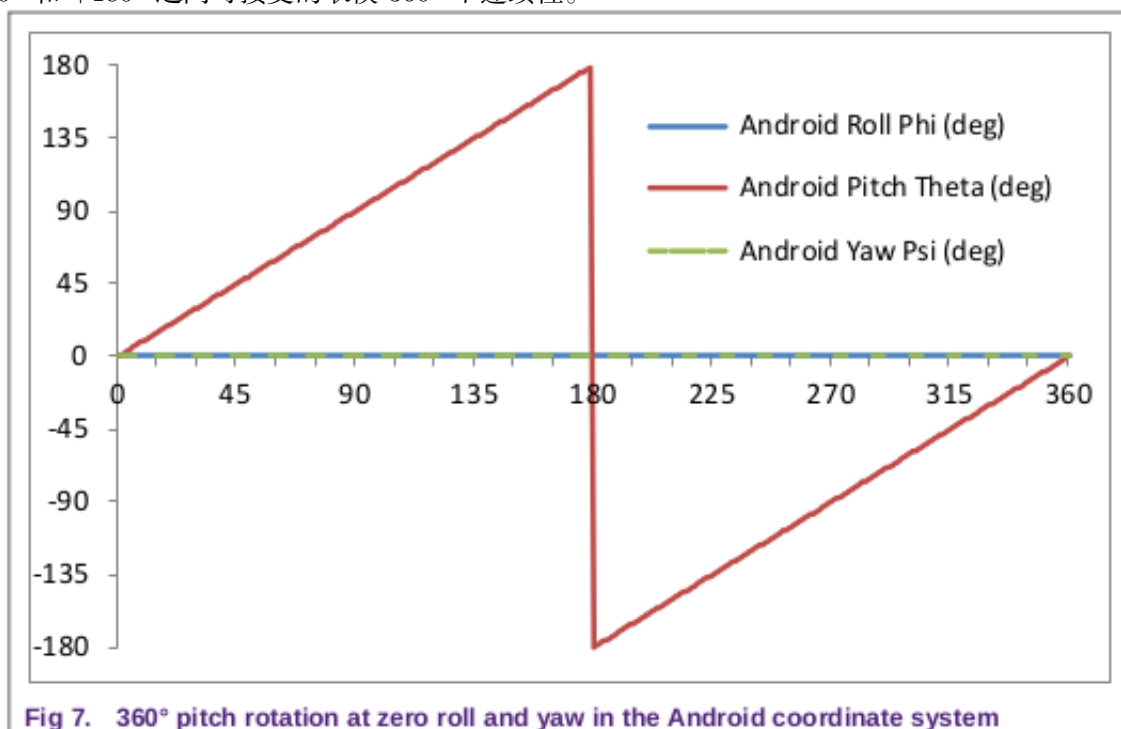
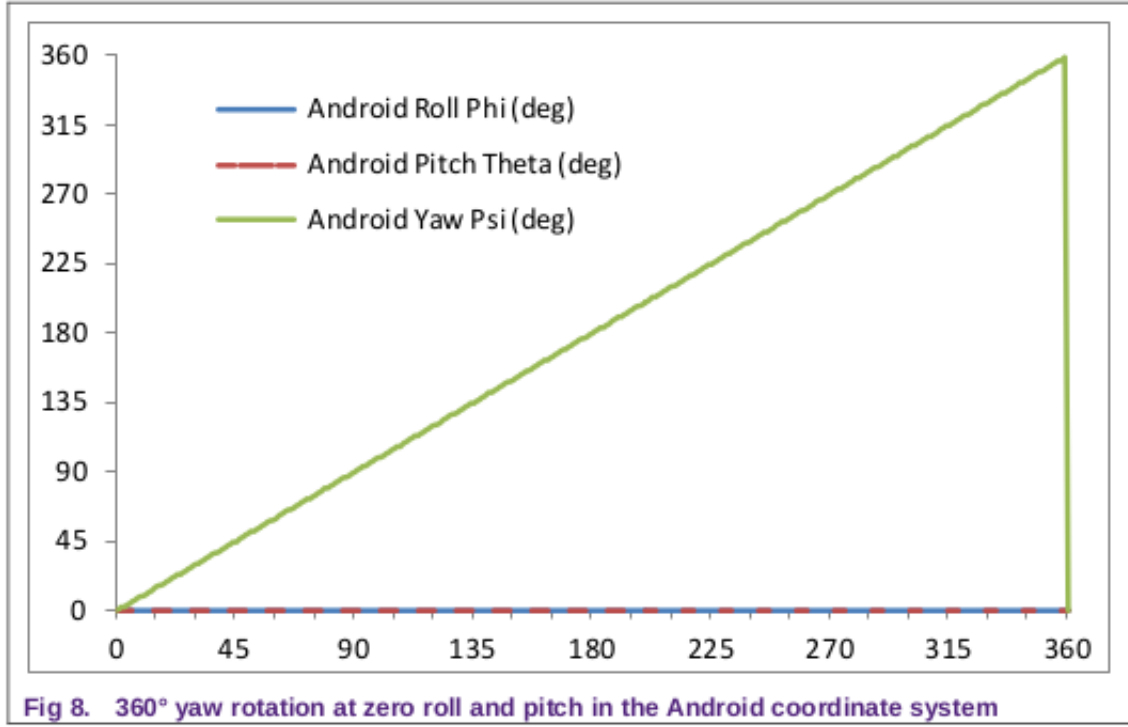


Fig 7. 360° pitch rotation at zero roll and yaw in the Android coordinate system

图 8 显示了当 PCB 在偏航时旋转 360° 而保持水平时偏航/罗盘角度的行为。偏航/罗盘航向平稳增加，当指向北方时，具有可接受的取模  $360^\circ$  不连续性。



从人体工程学的角度来看，当安卓侧倾角度通过  $-90^\circ$  或  $+90^\circ$  时， $180^\circ$  罗盘航向的改变可能并不理想。

### 3.6 由旋转矩阵计算欧拉角

本节介绍了函数 `fAndroidAnglesDegFromRotationMatrix`，它根据方程 (30) 中定义的 Android 旋转矩阵计算欧拉角。

三个 Android 欧拉角的解是：

$$\phi = \sin^{-1}(R_{xz}), -90^\circ \leq \phi < 90^\circ \quad (44)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-R_{yz}}{R_{zz}}\right), -180^\circ \leq \theta < 180^\circ \quad (45)$$

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{-R_{xy}}{R_{xx}}\right), 0^\circ \leq \psi < 360^\circ \quad (46)$$

Android 罗盘航向角  $\rho$  始终等于偏航角  $\psi$ ：

$$\rho = \psi \quad (47)$$

在万向节锁处，方程 (40) 和 (41) 给出：

$$\tan(\psi + \theta) = \left(\frac{R_{yx}}{R_{yy}}\right) \text{ for } \phi = 90^\circ \quad (48)$$

$$\tan(\psi - \theta) = \left(\frac{R_{yx}}{R_{yy}}\right) \text{ for } \phi = -90^\circ \quad (49)$$



垂直方向的倾斜角  $\chi$  可由旋转重力向量和  $z$  轴向下的标量积确定, 给出:

$$\cos \chi = \left\{ \mathbf{R}_{Android} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \\ R_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = R_{zz} = \cos \theta \cos \phi \quad (50)$$

## 4 Windows 8 坐标系

### 4.1 坐标轴定义

本节参考的是 Microsoft 规范: “集成运动和方向传感器”, 可从以下网址下载:

[http://msdn.microsoft.com/en-us/library/windows/hardware/dn642102\(v=vs.85\).aspx](http://msdn.microsoft.com/en-us/library/windows/hardware/dn642102(v=vs.85).aspx)

Windows 8 坐标系如图 9 所示。它是一个  $x = \text{East}, y = \text{North}, z = \text{Up}$  (称为 ENU) 坐标系, 类似于 Android 坐标系。

围绕  $x, y$  和  $z$  轴旋转的符号与 Android 相反, 因此与正常的数学用法兼容。结果是, Windows 8 罗盘航向角  $\rho$  与 Windows 8 偏航角  $\psi$  具有相反的意义, 为  $\rho = 360^\circ - \psi$ 。

Windows 8 坐标系是重力 (不是加速度) 正的, 这意味着任何加速度计通道的输出在指向上并与重力对齐时都是负的。因此, 当产品平放时, 加速计  $z$  轴读数为  $-1g$ 。

微软: “

- 将设备放在平面上, 屏幕朝上, 加速度值应为:  $X \approx 0.0, Y \approx 0.0, Z \approx -1.0$
- 握住设备, 右手朝上, 加速度值应为:  $X \approx -1.0, Y \approx 0.0, Z \approx 0.0$
- 握住设备, 使屏幕顶部朝上, 加速度值应为:  $X \approx 0.0, Y \approx -1.0, Z \approx 0.0$ ”

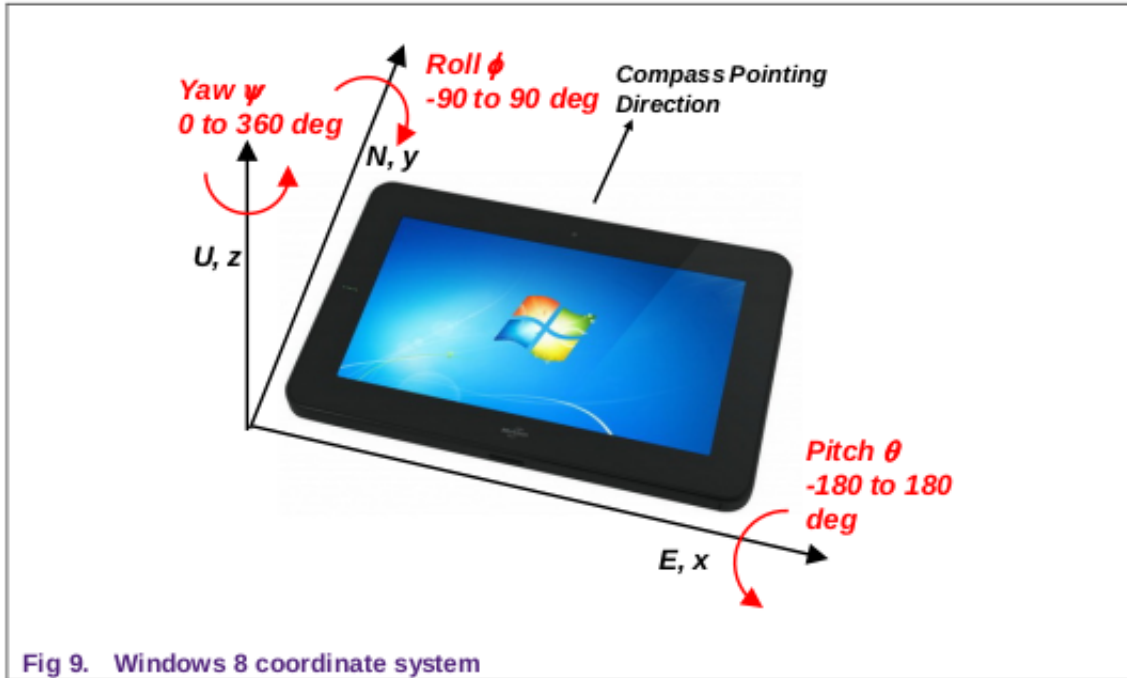


Fig 9. Windows 8 coordinate system

### 4.2 欧拉角方向矩阵

Windows 8 中的旋转顺序与航空航天标准相匹配, 但与 Android 不匹配。首先是偏航旋转, 然后是俯仰旋转, 然后是横滚旋转。

Microsoft: “为了正确描述设备在三维空间中的方向, 按照以下顺序应用欧拉角, 首先设备位于平面上,  $+y$  轴指向正北 (朝向北极):

1. 设备绕其  $z$  轴旋转偏航角 (相对于航向角, 绕  $z$  轴旋转方向相反)。
2. 设备绕其  $x$  轴以俯仰角旋转。
3. 设备绕其  $y$  轴以横滚角旋转。”

单个 Windows 旋转矩阵为:

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (51)$$

$$\mathbf{R}_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (52)$$

$$\mathbf{R}_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (53)$$

使用 Microsoft 旋转序列的复合 Windows 8 旋转矩阵是:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_y(\phi)\mathbf{R}_x(\theta)\mathbf{R}_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (54)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \sin \psi + \cos \psi \sin \phi \sin \theta & -\sin \phi \cos \theta \\ -\cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \\ \cos \psi \sin \phi + \cos \phi \sin \psi \sin \theta & \sin \phi \sin \psi - \cos \phi \cos \psi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (55)$$

### 4.3 欧拉角方向四元数

Windows 8 坐标系中的单个欧拉角度旋转四元数为:

$$q_x(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathbf{i} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (56)$$

$$q_y(\phi) = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \mathbf{j} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (57)$$

$$q_z(\psi) = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \mathbf{k} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (58)$$

Windows 8 旋转四元数  $q_{zxy} = q_z(\psi)q_x(\theta)q_y(\phi)$  计算为:

$$q_{zxy} = q_z(\psi)q_x(\theta)q_y(\phi) = \left\{ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \mathbf{k} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \right\} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathbf{i} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \left\{ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \mathbf{j} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\} \\ &+ \left\{ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\} \mathbf{i} \\ &+ \left\{ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\} \mathbf{j} \\ &+ \left\{ \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (60)$$

因此，Windows 8 四元数  $q_{zxy}$  的元素是：

$$q_0 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (61)$$

$$q_1 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (62)$$

$$q_2 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (63)$$

$$q_3 = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (64)$$

#### 4.4 万向节锁

当第二个俯仰旋转与第一个偏航和第三个横滚旋转对齐时，在 Windows 8 坐标系中发生万向节锁定。这发生在  $+90^\circ$  俯仰角和  $-90^\circ$  俯仰角。因此，方向的欧拉角描述中的自由度从三个减少到两个，横滚角和偏航角仅在定义了它们的和与差的情况下振荡。

在万向节锁  $\theta = 90^\circ$  时，方程 (55) 简化为：

$$\mathbf{R}_{Win8} = \begin{pmatrix} \cos(\psi + \phi) & \sin(\psi + \phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin(\psi + \phi) & -\cos(\psi + \phi) & 0 \end{pmatrix} \text{ for } \theta = 90^\circ \quad (65)$$

在万向节锁  $\theta = -90^\circ$  时，方程 (55) 简化为：

$$\mathbf{R}_{Win8} = \begin{pmatrix} \cos(\psi - \phi) & \sin(\psi - \phi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sin(\psi - \phi) & \cos(\psi - \phi) & 0 \end{pmatrix} \text{ for } \theta = -90^\circ \quad (66)$$

方向矩阵和四元数是稳定的，但在两个万向节锁方向上只能确定求和角  $\psi + \theta$  或差分角  $\psi - \theta$ 。

#### 4.5 欧拉角不连续性

Windows 8 旋转矩阵  $\mathbf{R}_y(\phi) \mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{R}_z(\psi)$  等于矩阵  $\mathbf{R}_y(\phi + \pi) \mathbf{R}_x(\pi - \theta) \mathbf{R}_z(\psi + \pi)$ 。通过直接计算：

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_y(\phi + \pi) \mathbf{R}_x(\pi - \theta) \mathbf{R}_z(\psi + \pi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \sin \psi + \cos \psi \sin \phi \sin \theta & -\cos \theta \sin \phi \\ -\cos \theta \sin \psi & \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \psi \sin \phi + \cos \phi \sin \psi \sin \theta & \sin \phi \sin \psi - \cos \phi \cos \psi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (67)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \sin \psi + \cos \psi \sin \phi \sin \theta & -\cos \theta \sin \phi \\ -\cos \theta \sin \psi & \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \psi \sin \phi + \cos \phi \sin \psi \sin \theta & \sin \phi \sin \psi - \cos \phi \cos \psi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} = \mathbf{R}_y(\phi) \mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{R}_z(\psi) \quad (68)$$

方程 (67) 和 (68) 表明, 对于给定的旋转矩阵, Windows 8 的欧拉角有两个解。如果给定方向矩阵的横滚角、俯仰角和偏航角的一个解是  $\phi$ 、 $\theta$  和  $\psi$ , 则横滚角  $180^\circ$  加上  $\phi$ 、俯仰角  $180^\circ$  减去  $\theta$  和偏航角  $180^\circ$  加上  $\psi$  的解也是一样。

Windows 8 规范通过将横滚角  $\theta$  限制在  $-90^\circ$  到  $+90^\circ$  的范围内, 删除了两种解情况。

Microsoft: “以下范围用于表示偏航、俯仰和横滚:

- $0.0^\circ \leq \text{Yaw} < 360.0^\circ$
- $-180.0^\circ \leq \text{Pitch} < 180.0^\circ$
- $-90.0^\circ \leq \text{Roll} < 90.0^\circ$ ”

方程 (67) 和 (68) 指出, 每当横滚角大于  $90^\circ$  或小于  $-90^\circ$  时, 横滚角应增加  $180^\circ$  ( $\mathbf{R}_y(\phi + \pi)$  项), 俯仰角应取反并增加  $180^\circ$  ( $\mathbf{R}_x(\pi - \theta)$  项), 偏航/罗盘航向应增加  $180^\circ$  ( $\mathbf{R}_z(\psi + \pi)$  项)。这些不连续性如图 10 至图 12 所示, 应与 Microsoft Inc. 规范“集成运动和方向传感器”中的图 21 进行比较。

图 10 显示了 PCB 从默认的开始位置 (水平并指向北方) 旋转  $360^\circ$  时的欧拉角。横滚角达到  $90^\circ$ , 有一个不连续到  $-90^\circ$ , 增加到  $90^\circ$ , 然后有另一个不连续到  $-90^\circ$ 。俯仰角和偏航角/罗盘航向角在  $90^\circ$  和  $-90^\circ$  横滚角下出现  $180^\circ$  不连续。

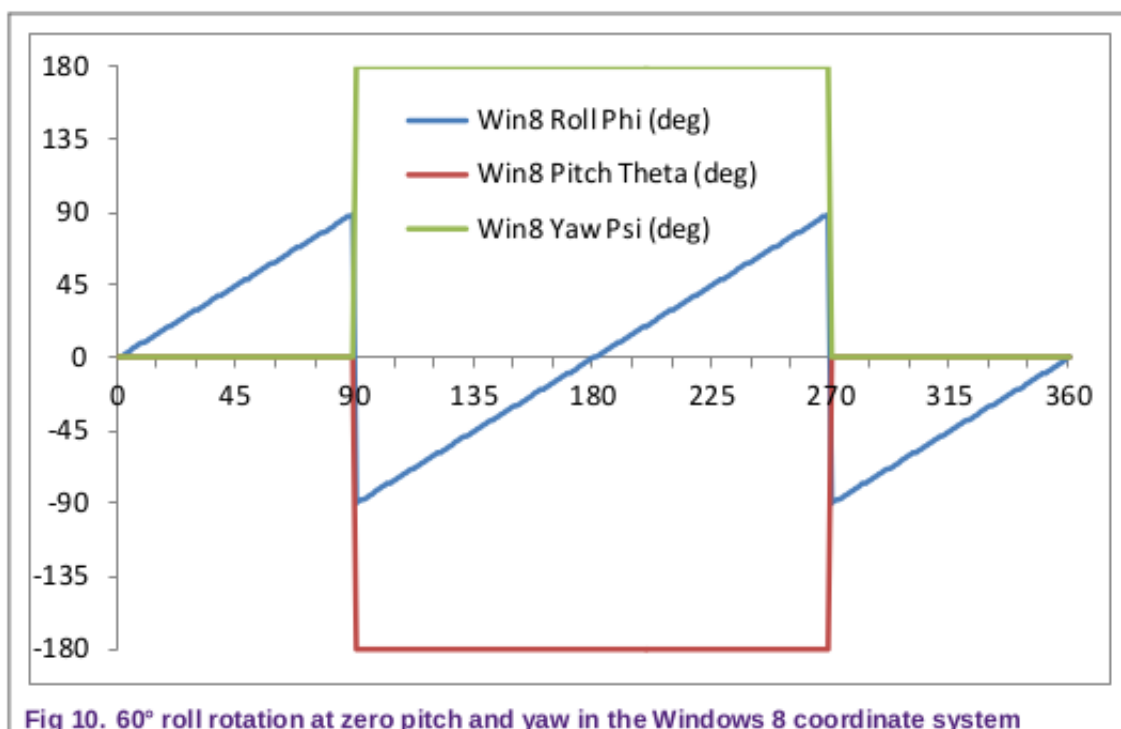


图 11 显示了 PCB 从同一起始位置俯仰旋转 360° 时的欧拉角。俯仰角平稳增加，等效角度为  $-180^\circ$  和  $+180^\circ$  之间可接受的取模  $360^\circ$  不连续性。

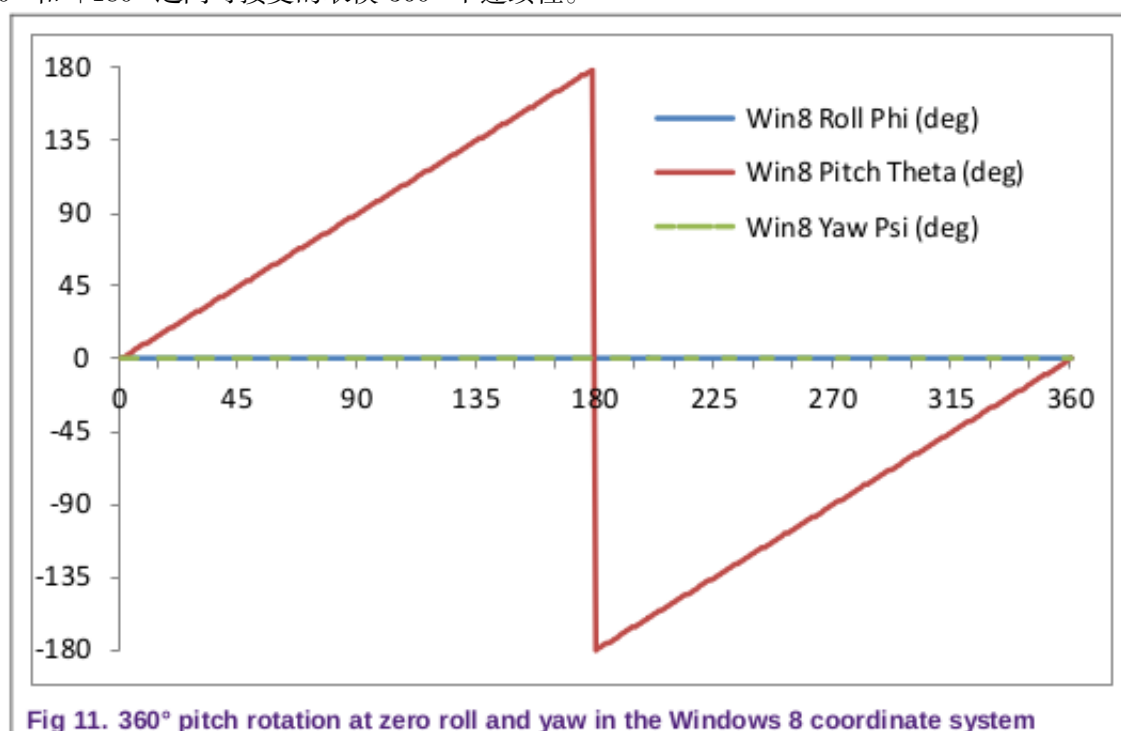
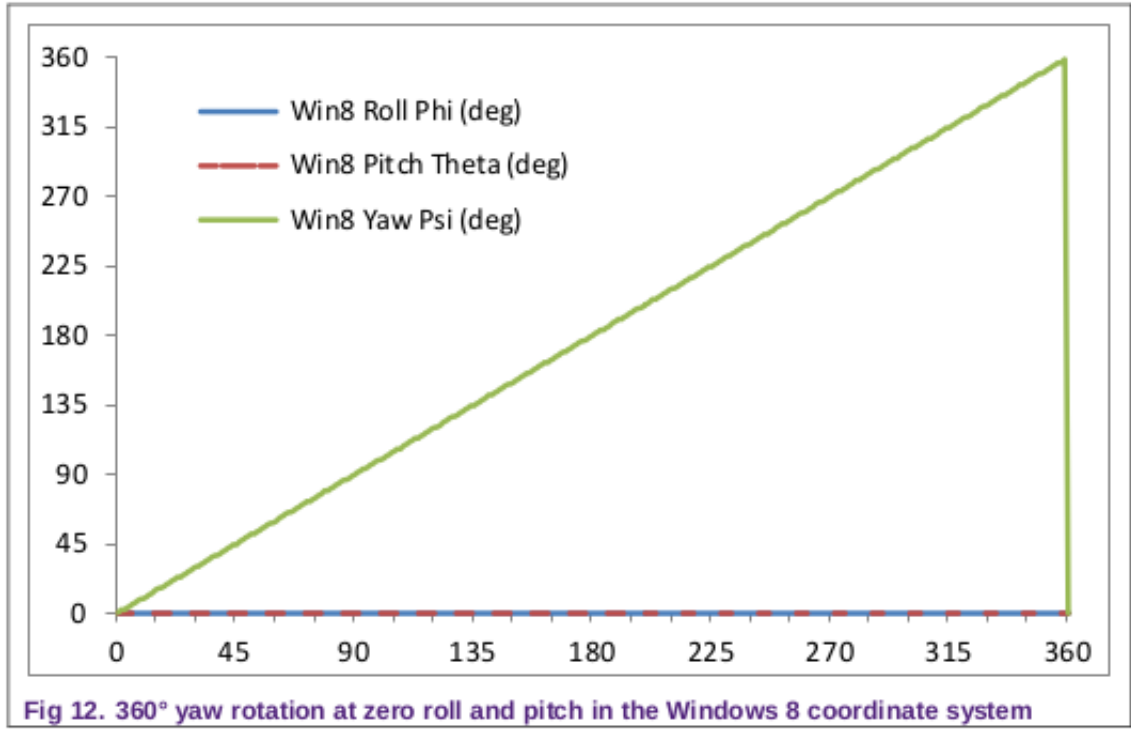


图 12 显示了当 PCB 在保持偏航平面时旋转 360° 的偏航/罗盘角度行为。偏航/罗盘航向平稳增加，当指向北方时，具有可接受的取模  $360^\circ$  不连续性。



当 Windows 8 的横滚角度通过  $-90^\circ$  或  $+90^\circ$  时，有  $180^\circ$  的罗盘航向改变，就像 Android 一样，从人体工程学的角度来看，可以说并不理想。然而，由于欧拉角的不幸特性以及将横滚角范围限制在  $-90^\circ$  到  $+90^\circ$  之间的要求，这种行为在数学上被强制到 Microsoft 规范中。

#### 4.6 由旋转矩阵计算欧拉角

本节介绍了函数 `fWin8AnglesDegFromRotationMatrix`，它根据方程 (55) 中定义的 Windows 8 旋转矩阵计算欧拉角。

横滚角  $\phi$  的解是：

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{-R_{xz}}{R_{zz}} \right), -90^\circ \leq \phi < 90^\circ \quad (69)$$

俯仰角  $\theta$  的范围为  $-180^\circ \leq \theta < 180^\circ$ ，但首先在  $-90^\circ$  到  $90^\circ$  的范围内使用以下方程计算：

$$\theta = \sin^{-1}(R_{yz}), -90^\circ \leq \theta < 90^\circ \quad (70)$$

因为  $\phi$  在  $-90^\circ$  到  $90^\circ$  的范围内，所以  $\cos \phi$  是非负的，并且  $R_{zz} = \cos \phi \cos \theta$  与  $\cos \theta$  具有相同的符号，可以用于将  $\theta$  校正到  $-180^\circ \leq \theta < 180^\circ$  的范围内：

$$\theta \leftarrow \pi - \theta \text{ if } R_{zz} < 0 \text{ and } \theta > 0 \quad (71)$$

$$\theta \leftarrow -\pi - \theta \text{ if } R_{zz} < 0 \text{ and } \theta \leq 0 \quad (72)$$

对于非零  $\cos \theta$ ，偏航角  $\psi$  的通解为：

$$\psi = \tan^{-1} \left( \frac{-\cos \theta R_{yx}}{\cos \theta R_{yy}} \right), 0^\circ \leq \psi < 360^\circ, \theta \neq -90^\circ, \theta \neq 90^\circ \quad (73)$$

在万向节锁处，方程 (65) 和 (66) 给出：

$$\tan(\psi + \phi) = \left( \frac{R_{xy}}{R_{xx}} \right) \text{ for } \theta = 90^\circ \quad (74)$$

$$\tan(\psi - \phi) = \left( \frac{R_{xy}}{R_{xx}} \right) \text{ for } \theta = -90^\circ \quad (75)$$

Windows 8 罗盘航向角  $\rho$  是偏航角  $\psi$  的负值 (取模  $360^\circ$ )：

$$\rho = -\psi \quad (76)$$

垂直方向的倾斜角  $\chi$  可由旋转重力向量和  $z$  轴向下的标量积确定，给出：

$$\cos \chi = \left\{ \mathbf{R}_{Win8} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \\ R_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = R_{zz} = \cos \theta \cos \phi \quad (77)$$

#### 4.7 Windows 8 旋转矩阵的方向

NXP 传感器融合库软件将方向矩阵定义为将向量从全局坐标系转换为对于所有坐标系的传感器坐标系。Microsoft Inc. 规范中列出的旋转矩阵和四元数：“集成运动和方向传感器”是指从传感器坐标系到全局坐标系的转换。若要从一个坐标系转换到另一个坐标系，则转置方向矩阵并取方向四元数的共轭。

## 5 References

- Android specification available at: Android APIs > SensorEvent
- Microsoft Inc. specification available at: Integrating Motion and Orientation Sensors