基于平面三自由度机械臂的路径规划问题

陈华丰

Tel:18870735406 **E-mail:**chenhuafeng@stu.scu.edu.cn

1 题面以及要求

1.1 题面

题面如下：

已知平面三连杆机械臂，其连杆长度计为L_1, L_2, L_3, 每个关节计为$\theta_0, \theta_1, \theta_2$, 范围为$[-\pi, \pi]$，平面中额外有一圆，计为$C = [\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2, r]$， 其中$\mathbf{c}$是其中心点坐标，$r$是其半径。

设计算法实现以下需求：

- C++/Python实现，并可视化
- 输出一系列路径点$\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_n$, 使得机械臂末端沿$C$的外部圆弧运动，视圆的大小，尽可能覆盖尽量多的圆弧，如下半圆弧等
- 使得$\sum_{i=1}^{n-1} \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i+1}\|_2$最小
- 考虑每个连杆有3个圆（半径为$L_i/6$），以及平面上有若干碰撞圆，在考虑碰撞的情况下，完成上述任务（加分项，选做）
- 用三种不同方法实现上述任务（超级加分项，选做，提示：采样、优化、解析暴力）

图 1: 3 DOF Arm Planning Problem

1.2 要求

要求如下：

要求

- 不限制AI，需吸收消化，会根据代码提问，包括数学原理
- 如果使用非线性优化，需要手动推导梯度，使用求解器作为参考传入
- 如果做不出来，尽可能展现自己的思路和思考
- 最终提交
  - 运动可视化录制（MP4格式）*1
  - 代码*1
  - 解题文档（包含公式推导，PDF格式）*1

图 2: 3 DOF Arm Planning Request

2 题目解析

2.1 无碰撞情况

首先可知有如下两个目标：

- **视圆的大小应尽可能覆盖更多的圆弧**；
- **机械臂运行的路径长度应尽可能短**，即：

$$\min \sum_{i=1}^{n-1} \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i+1}\|_2^2$$

对于前者，暂时没有需要过多阐述的。

而对于后者，则需要简单分析一下：

假设**在不考虑碰撞的情况下**，我们设 q_k 为机械臂第一次到达圆上的点，那么 q_1 到 q_k 则是机械臂从初始点到达圆上的轨迹，而从 q_k 到 q_n 就是视圆的轨迹。从而，我们将整体任务划分为两个阶段：第一阶段是从初始点到第一次到达圆上；第二阶段则是视圆轨迹。

针对第一阶段，我们根据基本的几何知识，即**两点之间直线最短**，可以令 q_k 为初始点与圆心连线与圆的交点中距离初始点更近的那个点。通过连接初始点和 q_k，我们可以得到第一阶段的最短路径。

针对第二阶段，则为简单的圆形弧线。

编程语言选择的是方便快捷的脚本语言 **Python**，可视化用的是 Python 的第三方库 Matplotlib。

2.2 考虑碰撞情况

TODO

3 解决方法

根据提示，主要的解法有**基于采样**、**基于优化**和**解析暴力**三种。

3.1 基于采样的解法

TODO

刚开始写了几版，但是效果都很差，关键在于怎么定义各个节点之间的代价函数。

3.2 基于优化的解法

3.2.1 基本思路

针对基于优化的解法，我主要使用的是 QP 求解器，将平面三自由度机械臂的规划问题转化为二次规划的 QP 问题。

QP 的基本形式如下：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & A_{\text{eq}}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{\text{eq}} \\ & A_{\text{ineq}}\mathbf{x} \le \mathbf{b}_{\text{ineq}} \end{aligned}$$

其中：

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 为决策变量；
- $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是半正定矩阵，定义了目标函数的二次项；
- $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ 为目标函数的一次项；
- $A_{\text{eq}} \in \mathbb{R}^{m_e\times n}, \mathbf{b}_{\text{eq}} \in \mathbb{R}^{m_e}$ 表示等式约束；
- $A_{\text{ineq}} \in \mathbb{R}^{m_i\times n}, \mathbf{b}_{\text{ineq}} \in \mathbb{R}^{m_i}$ 表示不等式约束。

针对当前给定的问题，我的主要想法是将**决策变量**设为三个关节的角速度，**优化目标**则是让 QP 最终输出期望速度 $Expected\_v$。

最终，我使用了两种方法来构建 QP 问题：一种是**将期望速度 $Expected\_v$ 加到目标函数中**，另外一种是**将期望速度 $Expected\_v$ 加到等式约束中**。

3.2.2 期望速度的设计

而在介绍这两种 QP 构建方式之前，我先简要谈谈我的期望速度 $Expected\_v$ 的设计部分。

- **输入：**机械臂末端位姿
- **输出：**机械臂末端期望速度
- **基本逻辑：**若机械臂末端偏离圆上的点较远，则沿**径向方向**上给出速度，引导末端接近圆轨迹；若机械臂末端已经在圆上附近，则沿**法向方向（即切线方向）**给出速度，实现沿着圆轨迹运动。
- **速度数值的设置部分：**输入机械臂末端与圆心的距离并减去半径的 $dist$，当该值 $dist$ 小于阈值 $threshold$ 时，返回固定的最小速度 v_{min}；当该值 $dist$ 大于阈值 $threshold$ 时，速度随 $dist - threshold$ 的增大而平滑增加，逐步接近 v_{max}。同时使用 $e^{-k*delta}$ 进行过渡，保证速度的**连续和平滑性**。

3.2.3 QP 问题的构建

接下来则是两种 QP 问题的构建：

第一种是**将期望速度** $Expected\_v$ **加到目标函数中**，即：

$$\min_{\dot{\mathbf{q}}} \quad \frac{1}{2} \left\| J * \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{v}_{\mathbf{expected}} \right\|^2$$

展开后得到：

$$\begin{aligned} \min_{\dot{\mathbf{q}}} \quad & \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^\top H \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}^\top \dot{\mathbf{q}} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_{\mathbf{in}} \dot{\mathbf{q}} \leq \mathbf{b}_{\text{in}} \\ & \mathbf{l} \leq \dot{\mathbf{q}} \leq \mathbf{u} \end{aligned}$$

其中各项定义如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{jacob0}(\mathbf{q})_{2\times3} \\ \mathbf{H} &= J^\top J + \epsilon I \\ \mathbf{f} &= -J^\top \mathbf{v}_{\mathbf{expected}} \end{aligned}$$

第二种是**将期望速度** $Expected\_v$ **加到等式约束中**，即：

$$\begin{aligned} \min_{\dot{\mathbf{q}}, \xi} \quad & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \xi \end{bmatrix}^\top \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \xi \end{bmatrix} + \mathbf{c}^\top \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \xi \end{bmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_{\mathbf{eq}} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \xi \end{bmatrix} = \mathbf{b}_{\text{eq}} \\ & \mathbf{A}_{\mathbf{in}} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \xi \end{bmatrix} \leq \mathbf{b}_{\mathbf{in}} \\ & \mathbf{l} \leq \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \xi \end{bmatrix} \leq \mathbf{u} \end{aligned}$$

其中各项定义如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{jacob0}(\mathbf{q})_{2\times3} \\ \mathbf{A}_{\mathbf{eq}} &= \begin{bmatrix} J_{2\times3} & I_{2\times2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}_{\mathbf{e}}\mathbf{q} &= \mathbf{v}_{\mathbf{expected}} \\ \mathbf{Q} &= \text{diag}(\mathbf{Cost}) \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)} \\ \mathbf{c} &= \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n+2} \end{aligned}$$

3.3 解析暴力的解法

针对解析暴力的解法，思路比较简单，主要是根据之前队题目的基本解析，将整个任务划分为两个阶段，然后针对两个阶段对路径进行采样。对于第一阶段是对直线等距采样；对于第二阶段则是用正多边形来拟合圆和采样。

此外，在做基于优化的过程中，我突然发觉也可以用雅可比来做正逆运动学解算，进而直接输出三个关节角的角速度。这也不失为一种解析暴力的解法。