Fabricio Camacho
4.822.364-8

Primera entrega de ejercicios – Regresión Lineal Simple.

EJERCICIO 2

Considere el siguiente modelo lineal:

$$y_i = \beta_0 + \epsilon_i \qquad \forall_i = 1, \ldots, n$$

Emplee la expresión matricial del estimador de MCO para obtener:

1. La expresión de $\hat{\beta}_0$.
2. La expresión de $\widehat{\mathbb{V}ar(\hat{\beta}_0)}$.

Relacione los resultados obtenidos con los obtenidos en el curso de Inferencia I.

1)

El modelo por considerar no presenta variables explicativas x_i por lo que la variable y solo está representada por β_0 y ε_i.

La expresión matricial del estimador $\hat{\beta}_0$ por MCO entonces está dada por:

$$Y = \hat{\beta}_0 + \varepsilon$$

Donde: Y es un vector de dimensión n × 1

$\hat{\beta}_0$ es un escalar

ε es un vector de dimensión n × 1

Por Teorema 2.4.1 de Francesc Carmona:

Toda estimación MCO de β es solución de la ecuación $\boldsymbol{X'X\beta} = \boldsymbol{X'Y}$

Si $\boldsymbol{X}$ es de rango máximo entonces $\boldsymbol{X'X}$ tiene inversa y el estimador es

$$\boldsymbol{\hat{\beta}} = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'Y}$$

Por la particularidad de nuestro modelo la matriz X corresponde a una columna de unos, por lo que el estimador $\hat{\beta}_0$ es la misma variable Y.

2)

La varianza del modelo lineal es la varianza de los errores del mismo modelo.

$$\sigma^2 = var(\varepsilon_i) = var(y_i) \qquad i = 1, \dots . n$$

Así mismo, los ε_i son las únicas variables aleatorias del modelo, ya que los valores de y_i son determinísticos, y esta varianza es constante.

De forma matricial se puede expresar de la manera:

$$\boldsymbol{var(\varepsilon) = I_n \sigma^2}$$

Sin embargo, la varianza del modelo es desconocida, y por lo tanto debe ser estimada:

Por Teorema 2.4.3 y 2.5.1 de Francesc Carmona:

Suma de cuadrados residual (SCR) = $(\boldsymbol{Y - X\widehat{\beta}})'(\boldsymbol{Y - X\widehat{\beta}})$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{1 - Rg(X)}$$

De esta forma, $var(\widehat{\beta}) = \sigma^2 (X^{'}X)^{-1}$ y $(\widehat{var(\widehat{\beta})} = \hat{\sigma}^2 (X^{'}X)^{-1}$ donde una vez más al ser un vector de unos nuestra matriz X, la estimación de la varianza del modelo es $\hat{\sigma}^2$.

Este caso tiene similitudes con los de inferencia 1 debido a que en dicho curso las variables aleatorias que teníamos eran de la misma naturaleza, una variable Y tomaba distintos valores dependiendo de un parámetro β y tenía un desvío σ. No se da el caso donde otra variable X aporte información sobre el comportamiento de Y.