Fabricio Camacho
4.822.364-8

Segunda entrega de ejercicios – Regresión Lineal Simple.

EJERCICIO 1

En el modelo lineal de la forma:

$$Y = X\beta + \epsilon$$

Donde la *matriz de diseño* X tiene n filas y $k+1$ columnas (con $n < k+1$), se define la matriz de proyección ortogonal:

$$H = X\left(X'X\right)^{-1}X'$$

Demuestre las siguientes propiedades:

1. $H^j = H \quad \forall j = 1, 2, 3, \ldots$
2. Si H es idempotente, entonces $I_{n\times n} - H$ también lo es
3. $H(I_{n\times n} - H) = \mathbf{0}_{n\times n}$

1)

Idempotencia de la matriz de proyección H:

$$H = X(X'X)^{-1}X'$$

$$HH = X(X'X)^{-1}X'\,X(X'X)^{-1}X'$$

$$HH = X(X'X)^{-1}X'\,X(X'X)^{-1}X'$$

$$HH = X(X'X)^{-1}X'$$

Lo mismo es cierto para cualquier cantidad de H hasta generalizarlo para $H^k \; k \in \mathbb{N}$.

2)

$$(I_{nxn} - H) = (I_{nxn} - H)(I_{nxn} - H)$$

$$(I_{nxn} - H) = I_{nxn}^2 - 2I_{nxn}H + H^2$$

$$(I_{nxn} - H) = I_{nxn} - 2H + H$$ (idempotencia de la matriz identidad)

$$(I_{nxn} - H) = (I_{nxn} - H)$$

3)

$$H(I_{nxn} - H) = HI_{nxn} - H^2$$

$$H(I_{nxn} - H) = H - H$$ (idempotencia de la matriz H)

$$H(I_{nxn} - H) = 0$$