75.12 ANÁLISIS NUMÉRICO I
FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

TRABAJO PRÁCTICO N° 2
2do Cuatrimestre 2022

Resolución de la Ley de Newton en ecuaciones diferenciales
Misión en búsqueda del objeto interestelar Oumuamua

Introducción

Oumuamua es un objeto interestelar que atravesó el sistema solar en 2017 [1, NASA]. Inicialmente se pensó que era un cometa, pero al observar que no tenía actividad se lo reclasificó como un asteroide. Sin embargo, su órbita altamente hiperbólica y su dirección de procedencia indicaron que nunca ha estado gravitacionalmente ligado al sistema solar y, presumiblemente, sea un objeto interestelar.

Al momento de su descubrimiento, se manejaron distintas hipótesis con respecto al origen de este objeto. La imposibilidad de detectar una cola de cometa, su forma, la manera en que refleja la luz y la particularidad de sus movimientos, llevaron a especular que podría tratarse de tecnología extraterrestre [2, Loeb]. Más adelante surgieron otras teorías como la que argumenta que Oumuamua tiene la estructura de un iceberg interestelar, proveniente de una nube molecular gigante [3, Oberhaus].

Como el objeto se aleja continuamente, no pueden hacerse análisis con los métodos de observación disponibles desde la Tierra. Por esa razón, surgió el interés de ir a buscar a Oumuamua con una sonda [4, Lyra]. Con la tecnología espacial actual, y a las altas velocidades que alcanzan dichos objetos, las visualizaciones cercanas y las misiones orbitales son un gran desafío, aunque no imposible.

En este Trabajo Práctico, se simulan la órbita terrestre, la trayectoria de Oumuamua, y se propone una misión para ir a buscarlo. Se emplean distintos métodos numéricos para resolver las ecuaciones de movimiento y se calcula la conservación de la energía para evaluar la precisión de cada método. La predicción sucesiva de posición y velocidad a partir de datos de partida supone la resolución de un problema de valores iniciales. La trayectoria se va determinando por medio de métodos numéricos entre un instante y el que sigue, repitiendo el cálculo hasta un tiempo final determinado. Sin embargo, los pequeños errores cometidos por el algoritmo se van acumulando, limitando la precisión de este enfoque.

Ecuaciones intervinientes

Supongamos que un cuerpo genérico se encuentra atraído por la fuerza gravitatoria del Sol (luego consideraremos que este "cuerpo" es la Tierra, Oumuamua o la sonda encargada de emprender su búsqueda). La fuerza resultante sobre este cuerpo será entonces:

$\underline{F_S} = G\frac{m_S\, m}{d_S^2}\underline{\breve{e}_S}$ fuerza que ejerce el Sol sobre un cuerpo de masa m (Fig. 1)

G	constante universal de gravitación
m	masa del cuerpo
m_S	masa del Sol
d_S	distancia entre el cuerpo y el Sol
$\underline{\breve{e}_S}$	versor unitario en sentido al Sol

A su vez, las distancias se calculan como (Fig. 2):

$$d_S = \sqrt{(x_S - x)^2 + (y_S - y)^2}$$

donde

x, y	coordenadas del cuerpo (incógnita, en función del tiempo)
x_S, y_S	coordenadas del centro del Sol (dato, fijas)

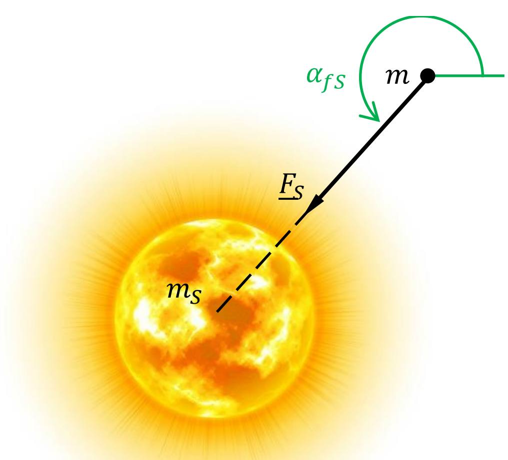

Figura 1
Fuerza gravitacional ejercida por el Sol sobre un cuerpo de masa *m* y ángulo de esa fuerza con la horizontal

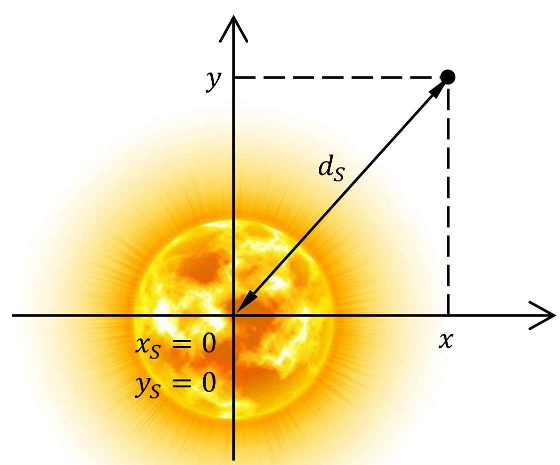

Figura 2
Distancia al Sol y sistema de coordenadas

La Ley de Newton establece:

$\underline{F_S} = m\underline{a}$

donde $\underline{a}$ es la aceleración del cuerpo. Descomponiendo esta ecuación en sus componentes cartesianas, nos queda el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dv_x}{dt} = G\frac{m_S}{d_S^2}\cos\alpha_{fS} \qquad \text{(ec. 1)}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = G\frac{m_S}{d_S^2}\operatorname{sen}\alpha_{fS} \qquad \text{(ec. 2)}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x \qquad \text{(ec. 3)}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \qquad \text{(ec. 4)}$$

con condiciones iniciales

$$v_x(0) = v_0\cos\alpha_{v0}$$

$$v_y(0) = v_0\operatorname{sen}\alpha_{v0}$$

$$x(0) = x_0$$

$$y(0) = y_0$$

donde el ángulo que forma la fuerza con el Sol es (Fig. 1, en verde):

$$\alpha_{fS} = \operatorname{atan}\frac{y_S - y}{x_S - x}$$

(la función *atan* debe tener en cuenta el cuadrante en que se encuentra el argumento, es decir, los signos de numerador y denominador)

Desarrollo del Trabajo Práctico

Resolver el sistema de las ec. 1 a 4 con el método de Euler y con Runge-Kutta orden 2. Expresar las ecuaciones en diferencias que surgen de aplicar cada método y programar un código computacional.

Datos comunes para todos los ejercicios:

$G = 6.674E\text{-}11\ kg^{-1}m^3s^{-2}$ $\qquad$ $d_{ST} = 1.496E11\ m = 1AU$ (distancia Sol-Tierra)

Sol: $\quad x_S = 0 \qquad y_S = 0 \qquad m_S = 1.988E30\ kg$

Unidades recomendadas:

Magnitud	Para trabajar	Para informar
Distancia	m	$AU = d_{ST}$
Tiempo	s	$año{\sim}31.536E6\ s$
Masa	kg	kg
Velocidad	m/s	$km/s = 1E3\ m/s$
Energía específica	$J/kg = m^2/s^2$	$MJ/kg = 1E6\ m^2/s^2$

Ejercicio 1: órbita terrestre

a) Modelar una vuelta de la Tierra alrededor del Sol. Las condiciones iniciales son:
$x_T(0) = d_{ST} \qquad y_T(0) = 0 \qquad v_{xT}(0) = 0 \qquad v_{yT}(0) = \sqrt{Gm_S/d_{ST}}$
El período a modelar es $T = 2\pi d_{ST}/v_{yT} = 1\ año$.

b) Si los métodos numéricos tuvieran precisión infinita, la trayectoria descrita debería presentar una distancia constante al centro del Sol. Evaluar qué sucede con esa distancia en función del tamaño de paso para cada método.

c) Verificar si se conserva la energía mecánica específica:

$$E_m = E_c + E_p \qquad \text{(ec. 5)}$$

donde

E_m energía mecánica específica
$E_c = \frac{1}{2}v^2$ energía cinética específica
$E_p = -G\frac{m_S}{d_S}$ energía potencial específica con respecto al Sol

Ejercicio 2: trayectoria de Oumuamua

Elegir uno de los métodos probados en la parte 1 para continuar con el análisis.

a) Modelar la trayectoria de Oumuamua conociendo sus datos de posición y velocidad en el perihelio del Sol (condiciones iniciales):
$x_U(0) = 0$ $\quad y_U(0) = -3.81E10\ m$ $\quad v_{xU}(0) = 8.771E4\ m/s$ $\quad v_{yU}(0) = 0$
Extender la simulación hasta que la velocidad de Oumuamua prácticamente no varíe, en cuyo caso se la considerará $v_{\infty U}$.
b) Graficar la evolución temporal de las energías intervinientes en la ec. 5. Verificar si se conserva E_m.

Ejercicio 3: misión de búsqueda

Se le encarga diseñar una misión de búsqueda de Oumuamua que cumpla con las condiciones de contorno especificadas a continuación. La sonda debe partir de la Tierra, con condiciones iniciales:

$$x(0) = d_{ST} \qquad y(0) = y_0 \qquad v_x(0) = v_0 \cos \alpha_{v0} \qquad v_y(0) = v_0 \operatorname{sen} \alpha_{v0}$$

donde v_0 es la velocidad con la que parte la sonda (que debe ser mayor que la velocidad de escape de la Tierra v_{eT}), y α_{v0} el ángulo de partida (que debe estar entre 180° y 270° en el sistema cartesiano adoptado).

La distancia entre sonda y Sol no puede ser menor que un valor de $0.1\ d_{ST}$ para que sus componentes puedan resistir la carga térmica. Al pasar por el perihelio del Sol, la sonda recibirá un impulso definido por Δv_1 con el objetivo de llevar a cabo una maniobra de Oberth [5, Oberth; 6, Adams]. La velocidad infinito alcanzada por la sonda deberá ser mayor que la alcanzada por Oumuamua para que tenga sentido la misión de búsqueda. Por último, al llegar a su destino, la sonda reducirá su velocidad para igualarla a la de Oumuamua y poder realizar los estudios correspondientes.

El costo de la misión se medirá en función de los impulsos y reducciones de velocidad adoptados, pues en función de esos cambios de velocidad variarán el consumo de combustible y los sistemas de propulsión necesarios. Definiremos una "velocidad costo" haciendo:

$$v_{cost} = v_0 + \Delta v_1 + \Delta v_\infty$$

donde v_0 es la velocidad inicial de la sonda, Δv_1 es el impulso de la sonda al pasar por el Sol, y $\Delta v_\infty = v_\infty - v_{\infty U}$ es el frenado de la sonda al llegar a Oumuamua.

Una vez halladas distintas configuraciones posibles de v_0, α_{v0} y Δv_1, se deberá elegir la que tenga menor tiempo entre la partida de la sonda y el encuentro con Oumuamua (llamado t_∞). Para hacerlo, calcular la distancia al Sol de Oumuamua d_{SU} y de la sonda d_S. Considerar que la sonda parte 5 años después de que Oumuamua pase por el perihelio solar.

En resumen, las restricciones son:

$d_S > 0.1\ d_{ST}$	mínima distancia entre sonda y Sol
$v_0 > v_{eT}$	mínima velocidad inicial de la sonda, con $v_{eT} \sim 11.186E3\ m/s$
$180° < \alpha_{v0} < 270°$	rango de ángulos para la partida de la sonda
$v_\infty > v_{\infty U}$	mínima velocidad infinito de la sonda
$v_{cost} < 40\ km/s$	máximo "costo" total de la misión
t_∞	tiempo entre la partida de la sonda y el encuentro con Oumuamua (minimizar)

Para la configuración definitiva de la misión, calcular las energías descritas en la ec. 5. Evaluar especialmente E_m antes y después de Δv_1. Chequear que la discretización empleada sea suficiente.

Referencias

[1] NASA Report: https://www.nasa.gov/feature/jpl/small-asteroid-or-comet-visits-from-beyond-the-solar-system

[2] Avi Loeb: https://www.abc.es/ciencia/abci-loeb-unica-explicacion-para-oumuamua-haya-sido-fabricado-civilizacion-extraterrestre-202102021930_noticia.html

[3] Daniel Oberhaus: https://www.wired.com/story/oumuamua-might-be-a-giant-interstellar-hydrogen-iceberg/

[4] Project Lyra:

https://www.researchgate.net/publication/330254897_Project_Lyra_Sending_a_spacecraft_to_1I'Oumuamua_former_A2017_U1_the_interstellar_asteroid

[5] Oberth effect: https://www.askamathematician.com/2013/01/q-how-does-the-oberth-effect-work-and-where-does-the-extra-energy-come-from-why-is-it-better-for-a-rocket-to-fire-at-the-lowest-point-in-its-orbit/

[6] Robert B. Adams, Georgia A. Richardson (25 July 2010). Using the Two-Burn Escape Maneuver for Fast Transfers in the Solar System and Beyond: https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20100033146/downloads/20100033146.pdf