FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

# ÁLGEBRA LINEAL

TEORÍA y PRÁCTICA

Elizabeth Vera de Payer    Magdalena Dimitroff

2020

Un especial agradecimiento al Ing. Alfredo Payer quien prestó conformidad para poner este material bajo lincencia Creative Commons, convencido de que esa hubiera sido la voluntad de la Ing. Elizabeth Vera de Payer.

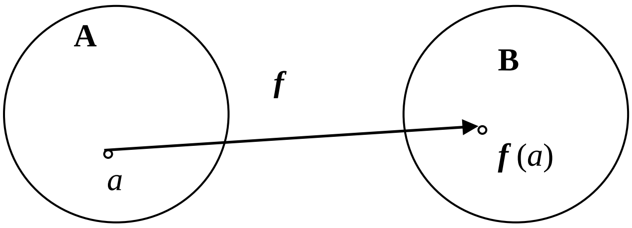
# Índice

# 4

# Aplicaciones Lineales

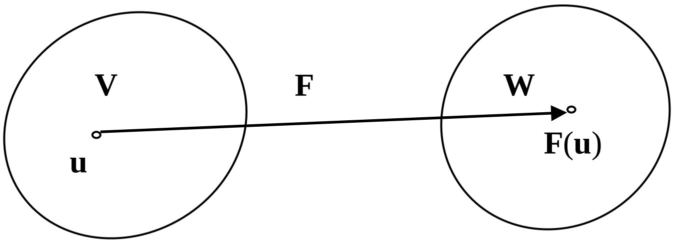
## 4.1. Aplicaciones Lineales

Se ha visto en los cursos de Análisis Matemático que una **función** o **aplicación** es una regla $\boldsymbol{f}$ que asocia a cada elemento de un conjunto **A** uno y sólo un elemento del conjunto **B**. Decimos entonces que para todo $a \in \mathbf{A}$, existe $b \in \mathbf{B}$ tal que $b = \boldsymbol{f}(a)$. **A** es el **conjunto dominio**, **B** es el **conjunto** de **llegada**, *b* se llama la **imagen** de *a* por $\boldsymbol{f}$ y el subconjunto de **B** que consta de todos los valores de $\boldsymbol{f}$ cuando *a* varía sobre **A** es el **conjunto imagen** de la función $\boldsymbol{f}$.




Hasta ahora, el énfasis se ha puesto en los casos en que tanto **A** como **B** son conjuntos de números reales y se las llama **funciones a valores reales de variable real**, pero las mismas consideraciones pueden ser hechas cuando **A** y **B** son conjuntos más generales.

En lo que sigue, se centrará la atención en funciones donde tanto **A** como **B** son espacios vectoriales cumpliendo, además, propiedades especiales. Estas propiedades están vinculadas al hecho que la estructura de espacio vectorial se basa en la existencia de dos operaciones: la suma y la multiplicación por escalar, las cuales se pretende "se preserven" a través de la función, esto es, a la suma de elementos en el dominio se corresponda la suma de las imágenes respectivas y de igual forma en la multiplicación por escalar. Este tipo de funciones reciben una denominación especial, se las llama **aplicaciones lineales** o **transformaciones lineales**.



> **Definición 4.1.1** Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Diremos que $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ es una **aplicación lineal** sí y sólo si se satisface
>
> a) $\mathbf{F(u + v) = F(u) + F(v)}$
>
> b) $\mathbf{F(}k\,\mathbf{v) =} k\,\mathbf{F(v)}$
>
> para todo $\mathbf{u}\,;\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ y $k\in\mathbf{K}$

En particular, si $\mathbf{V=W}$ las aplicaciones lineales $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ se llaman **operadores lineales**.

## Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbf{K}$. $dim\mathbf{V}=n$. La elección de una base ordenada $\mathbf{B}$ del vectorial, permite definir la aplicación "Vector Coordenado respecto a la base $\mathbf{B}$":

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{B}}:\mathbf{V}&\to\ \mathbf{K}^{\mathrm{n}}\\ \mathbf{v}&\to\varphi_{\mathbf{B}}(\mathbf{v})=(\mathbf{v})_{\mathbf{B}}\end{aligned}$$

Por la **Proposición 1.9.1** se tiene que:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_{\mathbf{B}}\,(\mathbf{u+v})=(\mathbf{u+v})_{\mathbf{B}}=(\mathbf{u})_{\mathbf{B}}+(\mathbf{v})_{\mathbf{B}}=\varphi_{\mathbf{B}}(\mathbf{u})+\varphi_{\mathbf{B}}\,(\mathbf{v})\\&\varphi_{\mathbf{B}}\,(k\,\mathbf{v})=(k\,\mathbf{v})_{\mathbf{B}}=k\,(\mathbf{v})_{\mathbf{B}}=k\,\varphi_{\mathbf{B}}(\mathbf{v})\end{aligned}\right.\quad \text{para todo } \mathbf{u}\,;\mathbf{v}\in\mathbf{V} \text{ y } k\in\mathbf{K}\,.$$

Luego la aplicación $\varphi_{\mathbf{B}}$ es una aplicación lineal.

Análogamente, también es lineal la aplicación

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{B}}:\mathbf{V}&\to\mathbf{K}^{\mathrm{n}\times 1}\\ \mathbf{v}&\to\varphi_{\mathbf{B}}(\mathbf{v})=[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}\end{aligned}$$

En particular, como ya se mencionó en la **Proposición 1.9.1**, una vez fijada la base $\mathbf{B}$ en el vectorial, existe una correspondencia biunívoca entre el vector $\mathbf{v}$ y su vector coordenado, lo que indica que $\varphi_{\mathbf{B}}$ es una biyección.

Las aplicaciones lineales biyectivas se llaman **isomorfismos** entre los espacios vectoriales que vincula. Luego $\varphi_{\mathbf{B}}$ es un isomorfismo entre los espacios vectoriales $\mathbf{V}$ y $\mathbf{K}^{\mathrm{n}\times 1}$.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{A}\in\mathbf{K}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$. Para toda matriz $\mathbf{X}\in\mathbf{K}^{\mathrm{n}\times 1}$ el producto $\mathbf{A.X}$ está definido y es una matriz columna de "m" elementos. De aquí que la matriz $\mathbf{A}$ define una aplicación entre los espacios $\mathbf{K}^{\mathrm{n}\times 1}$ y $\mathbf{K}^{\mathrm{m}\times 1}$, en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{T_A}:\mathbf{K}^{\mathbf{n\times 1}}&\to\mathbf{K}^{\mathbf{m\times 1}}\\ \mathbf{X}&\to\mathbf{T_A(X)}\end{aligned}\qquad \text{donde}\quad \mathbf{T_A(X)}=\mathbf{A.X}$$

Las propiedades de la multiplicación de matrices permiten mostrar que esta aplicación es lineal. En efecto:

$$\mathbf{T_A(X+Y) = A.(X+Y) = A.X + A.Y = T_A(X) + T_A(Y)}$$
$$\mathbf{T_A}\,(k\,\mathbf{X}) = \mathbf{A}.(k\,\mathbf{X}) = k\,(\mathbf{A}.\mathbf{X}) = k\,\mathbf{T_A(X)}$$

Como caso particular, si consideramos $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se tiene que :

$$\begin{aligned} \mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \mathbf{X} &\to \mathbf{Y} = \mathbf{A}.\mathbf{X} \end{aligned}$$

define un operador lineal en $\mathbb{R}^n$ (ya se había mencionado en la Sección **3.3.1**).

Se sobre-entiende que el vector $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ viene expresado como una matriz columna (es decir $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$).

$\mathbf{T_A}$ también se lo llama transformación de $\mathbb{R}^n$ en si mismo.

---

Ejemplo 3

---

Sean **V** y **W** espacios vectoriales sobre el cuerpo **K**.

La aplicación $\mathbf{F}{:}\,\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tal que $\mathbf{F(v)} = \overline{\mathbf{0}}_\mathbf{W}$ $\forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ es una aplicación lineal y se la denomina "aplicación nula".

---

Ejemplo 4

---

Sea **V** espacio vectorial sobre el cuerpo **K**.

La "aplicación identidad" $id{:}\,\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definida por $id(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ es una aplicación lineal.

---

Ejemplo 5

---

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}$.

a) La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\quad x \to m\,x \quad (m \in \mathbb{R})$ es una aplicación lineal.

b) La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\quad x \to m\,x + b \quad (m, b \in \mathbb{R};\ b \neq 0)$ **no** es una aplicación lineal. ¿Por qué?

---

Ejemplo 6

---

Sean $\mathbf{V} = \mathbf{P}_n$.

La aplicación: $\mathbf{D}{:}\,\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ que asigna a cada $\mathbf{p} \in \mathbf{V}$ su derivada primera $\mathbf{p}'$ es decir:

$$\mathbf{D}{:}\,\mathbf{P}_n \to \mathbf{P}_n$$
$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i \to \mathbf{D(p)} = \mathbf{p}' = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$$

es una aplicación lineal.

De manera mas general, si $\mathbf{V}=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ la aplicación: $\mathbf{D}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ que asigna a cada $f\in\mathbf{V}$ su derivada primera $f'$ es una aplicación lineal.

Ello resulta de las propiedades: "la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de sus derivadas" y "la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función".

### 4.1.1 Propiedades de las Aplicaciones Lineales

> **Teorema 4.1.1** Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Si $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ es una aplicación lineal entonces
>
> a) $\mathbf{F}\left(\bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{V}}\right)=\bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{W}}$
>
> b) $\mathbf{F}(-\mathbf{v})=-\mathbf{F}(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.
>
> c) $\mathbf{F}\left(x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+\cdots+x_r\mathbf{v}_r\right)=x_1\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)+x_2\mathbf{F}(\mathbf{v}_2)+\cdots+x_r\mathbf{F}(\mathbf{v}_r)$ con $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\in\mathbf{V}$ y $x_1, x_2, \ldots, x_r\in\mathbf{K}$.

**Demostración:**

a) Demostraremos que la imagen por una aplicación lineal del vector nulo de $\mathbf{V}$ es el vector nulo de $\mathbf{W}$.

$$\mathbf{F}\left(\bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{V}}\right)=\mathbf{F}(0.\mathbf{v})=0.\mathbf{F}(\mathbf{v})=\bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{W}}\ .$$

b) La demostración de que $\mathbf{F}$ aplica el opuesto de un vector $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ en el opuesto de $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ queda como ejercicio para el lector.

c) Demostremos que la imagen de una combinación lineal de vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\in\mathbf{V}$ es la combinación lineal con los mismos coeficientes de $\mathbf{F}(\mathbf{v}_1),\mathbf{F}(\mathbf{v}_2),\ldots,\mathbf{F}(\mathbf{v}_r)$ .

Teniendo en cuenta la asociatividad de la suma de vectores de $\mathbf{V}$, planteamos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}\left(x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+x_3\mathbf{v}_3+\cdots+x_r\mathbf{v}_r\right)&=\mathbf{F}\left(x_1\mathbf{v}_1+\left(x_2\mathbf{v}_2+x_3\mathbf{v}_3+\cdots+x_r\mathbf{v}_r\right)\right)\\
&=\mathbf{F}\left(x_1\mathbf{v}_1\right)+\mathbf{F}\left(x_2\mathbf{v}_2+x_3\mathbf{v}_3+\cdots+x_r\mathbf{v}_r\right) \quad \text{por ser } \mathbf{F} \text{ lineal}\\
&=x_1\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)+\mathbf{F}\left(x_2\mathbf{v}_2+\left(x_3\mathbf{v}_3+\cdots+x_r\mathbf{v}_r\right)\right) \quad \text{por ser } \mathbf{F} \text{ lineal}\\
&=x_1\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)+x_2\mathbf{F}(\mathbf{v}_2)+\mathbf{F}\left(x_3\mathbf{v}_3+\cdots+x_r\mathbf{v}_r\right) \text{ por ser } \mathbf{F} \text{ lineal}\\
&\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \text{repitiendo el proceso}\\
&=x_1\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)+x_2\mathbf{F}(\mathbf{v}_2)+\cdots+x_r\mathbf{F}(\mathbf{v}_r)
\end{aligned}$$

quedando demostrado el ítem. #

Consideremos ahora el siguiente ejemplo:

Sea $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $F\big((1,0)\big) = (1,2,3)$ y $F\big((0,1)\big) = (3,4,1)$.

Se quiere hallar $F\big((4,-3)\big)$.

Dado que los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ forman una base de $\mathbb{R}^2$, el vector $(4,-3)$ es combinación lineal de ellos

$$(4,-3) = 4(1,0) + (-3)(0,1)$$

Luego por se **F** aplicación lineal, se tiene que

$$\begin{aligned} F\big((4,-3)\big) &= F\big(4(1,0) + (-3)(0,1)\big) \\ &= 4F\big((1,0)\big) + (-3)F\big((0,1)\big) \\ &= 4(1,2,3) + (-3)(3,4,1) \\ &= (-5,-4,9) \end{aligned}.$$

Este ejemplo sugiere que una aplicación lineal queda determinada por el conocimiento de las imágenes de los vectores de una base.

Si $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ son espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbf{K}$, es siempre posible dar **aplicaciones** de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{W}$ que asignen a los vectores de una base del vectorial **V**, vectores arbitrariamente elegidos en el vectorial **W**.

Por ejemplo, sean $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{W} = \mathbb{R}^3$ y se buscan aplicaciones que asignen a los vectores de la base $\mathbf{B} = \big((1,0);\ (0,1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$, los vectores $\mathbf{w}_1 = (1,0,3)$ y $\mathbf{w}_2 = (2,1,5)$ de $\mathbf{W}$.

Una de las aplicaciones queda definida mediante la asignación:

$$\begin{aligned} &(1,0) \ \to\ (1,0,3) \\ &(0,1) \ \to\ (2,1,5) \\ &(x,y) \ \to\ (0,0,0) \ \text{ si } (x,y) \neq (1,0) \text{ y } (x,y) \neq (0,1) \end{aligned}$$

De hecho pueden elegirse muchas otras asignaciones para $(x,y) \neq (1,0)$ y $(x,y) \neq (0,1)$ lo que dará origen a otras aplicaciones.

Nos preguntamos si entre tales aplicaciones, alguna es **lineal.** El teorema siguiente da la respuesta a esta pregunta.

**Teorema 4.1.2.** Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**.
Si $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ es una base ordenada de **V** y $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ son vectores arbitrarios de **W**, entonces: existe una única aplicación lineal $\mathbf{F}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ para $i = 1,2,\ldots,n$.

**Demostración:**

- Probaremos primero **la existencia**.

Si $\mathbf{B} = \left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\right)$ es una base ordenada de $\mathbf{V}$, todo vector $\mathbf{v}$ que pertenece al vectorial **V**, es combinación lineal de los vectores de la base.

Sea entonces $\mathbf{v} = x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n$.

Por otro lado, teniendo en cuenta que $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n$ son vectores de $\mathbf{W}$, el vector $\mathbf{w} = x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{w}_n$ pertenece al vectorial **W**.

Consideremos la aplicación:

$$\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$$
$$x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n \to x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{w}_n$$

Teniendo en cuenta la definición anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{F}\left(1\mathbf{v}_1 + 0\,\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\,\mathbf{v}_n\right) = 1\mathbf{w}_1 + 0\,\mathbf{w}_2 + \cdots + 0\,\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1 \\
\mathbf{F}(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{F}\left(0\,\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\,\mathbf{v}_n\right) = 0\,\mathbf{w}_1 + 1\mathbf{w}_2 + \cdots + 0\,\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{F}(\mathbf{v}_n) &= \mathbf{F}\left(0\,\mathbf{v}_1 + 0\,\mathbf{v}_2 + \cdots + 1\mathbf{v}_n\right) = 0\,\mathbf{w}_1 + 0\,\mathbf{w}_2 + \cdots + 1\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_n
\end{aligned}$$

Es decir que la aplicación **F** cumple la condición de que: $\mathbf{F}\,(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ para $i = 1,2,\ldots,n$.

- Probaremos ahora la **linealidad** de **F**.

Sean $\mathbf{v} = x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{v'} = y_1\,\mathbf{v}_1 + y_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\,\mathbf{v}_n$ vectores de **V**.
Queremos ver que se verifica que a) $\mathbf{F}(\mathbf{v} + \mathbf{v'}) = \mathbf{F}(\mathbf{v}) + \mathbf{F}(\mathbf{v'})$ y b) $\mathbf{F}(k\,\mathbf{v}) = k\,\mathbf{F}(\mathbf{v})$.

$$\begin{aligned}
\text{a) } \mathbf{F}(\mathbf{v} + \mathbf{v'}) &= \mathbf{F}(\underbrace{x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n}_{\mathbf{v}} + \underbrace{y_1\,\mathbf{v}_1 + y_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\,\mathbf{v}_n}_{\mathbf{v'}}) \\
&= \mathbf{F}\left((x_1 + y_1)\,\mathbf{v}_1 + (x_2 + y_2)\,\mathbf{v}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\,\mathbf{v}_n\right) \\
&= (x_1 + y_1)\,\mathbf{w}_1 + (x_2 + y_2)\,\mathbf{w}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\,\mathbf{w}_n \qquad \text{por definición de } \mathbf{F} \\
&= (x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{w}_n) + (y_1\,\mathbf{w}_1 + y_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + y_n\,\mathbf{w}_n) \\
&= \mathbf{F}(\mathbf{v}) + \mathbf{F}(\mathbf{v'})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \mathbf{F}(k\,\mathbf{v}) &= \mathbf{F}(k\underbrace{\left(x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n\right)}_{\mathbf{v}}) \\
&= \mathbf{F}\left((kx_1)\,\mathbf{v}_1 + (kx_2)\,\mathbf{v}_2 + \cdots + (kx_n)\,\mathbf{v}_n\right) \\
&= (kx_1)\,\mathbf{w}_1 + (kx_2)\,\mathbf{w}_2 + \cdots + (kx_n)\,\mathbf{w}_n \qquad \text{por definición de } \mathbf{F} \\
&= k(x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{w}_n) \\
&= k\mathbf{F}(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Luego $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{v}_i)=\mathbf{w}_i$ para $i=1,2,\ldots,n$ es una aplicación lineal.

- Finalmente probaremos que **F** es la **única** aplicación lineal de **V** en **W** que cumple con la condición solicitada.

Supongamos que $\mathbf{G}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ es una aplicación lineal tal que satisface $\mathbf{G}(\mathbf{v}_i)=\mathbf{w}_i$ para $i=1,2,\ldots,n$.

Se tiene que para todo $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(\mathbf{v}) &= \mathbf{G}\left(x_1\,\mathbf{v}_1+x_2\,\mathbf{v}_2+\cdots+x_n\,\mathbf{v}_n\right)\\
&= x_1\mathbf{G}(\mathbf{v}_1)+x_2\mathbf{G}(\mathbf{v}_2)+\cdots+x_n\mathbf{G}(\mathbf{v}_n) && \text{por ser } \mathbf{G} \text{ aplicacion lineal}\\
&= x_1\,\mathbf{w}_1+x_2\,\mathbf{w}_2+\cdots+x_n\,\mathbf{w}_n && \text{porque } \mathbf{G}(\mathbf{v}_i)=\mathbf{w}_i \text{ para } i=1,2,\ldots,n\\
&= \mathbf{F}(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $\mathbf{G}=\mathbf{F}$ ya que **G** y **F** asignan la misma imagen a todo $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

Queda así completada la demostración del teorema. #

## 4.2. Imagen y Núcleo de una Aplicación Lineal

**Definición 4.2.1** Sean **V** y **W** espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ una aplicación lineal.

Se denomina **imagen de F** al conjunto:

$$\mathbf{I}_{\mathrm{F}}=\{\mathbf{w}\in\mathbf{W}/\text{existe } \mathbf{v}\in\mathbf{V}:\mathbf{F}(\mathbf{v})=\mathbf{w}\}$$

**Definición 4.2.2** Sean **V** y **W** espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ una aplicación lineal.

Se denomina **núcleo de F** al conjunto:

$$\mathbf{N}_{\mathrm{F}}=\left\{\mathbf{v}\in\mathbf{V}/\ \mathbf{F}(\mathbf{v})=\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}\right\}.$$

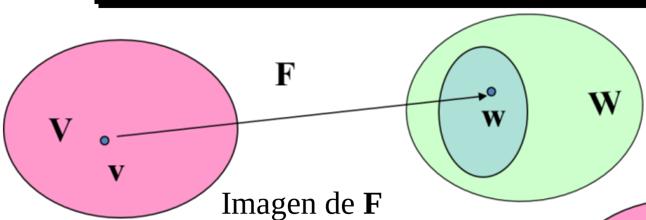
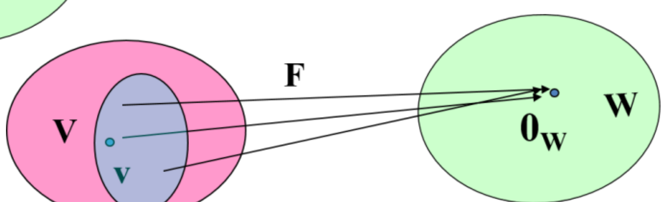



Imagen de **F**




Núcleo de **F**

**Teorema 4.2.1** Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ una aplicación lineal. Se verifica que:

a) $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}=\{\mathbf{w}\in\mathbf{W}/\text{existe } \mathbf{v}\in\mathbf{V}: \mathbf{F}(\mathbf{v})=\mathbf{w}\}$ es un subespacio de $\mathbf{W}$.

b) Si $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r$ generan $\mathbf{V}$ entonces $\mathbf{F}(\mathbf{v}_1),\mathbf{F}(\mathbf{v}_2),\ldots,\mathbf{F}(\mathbf{v}_r)$ generan $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$.

c) Si $dim\,\mathbf{V}=n$ entonces $dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}}\le n$.

**Demostración:**

a) Veamos que $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}=\{\mathbf{w}\in\mathbf{W}/\text{existe } \mathbf{v}\in\mathbf{V}: \mathbf{F}(\mathbf{v})=\mathbf{w}\}$ es un subespacio de $\mathbf{W}$.

$\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}\in\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ pues $\mathbf{F}\left(\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}\right)=\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}$ (por ser $\mathbf{F}$ aplicación lineal).

Si $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ son vectores de $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$, entonces existen $\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2\in\mathbf{V}$ tales que $\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)=\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{F}(\mathbf{v}_2)=\mathbf{w}_2$. Por lo tanto

$$\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2=\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)+\mathbf{F}(\mathbf{v}_2)=\mathbf{F}(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) \quad \text{(por ser } \mathbf{F} \text{ lineal)}$$

o sea que $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\in\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ por ser imagen de $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$.

Por otra parte $k\,\mathbf{w}_1=k\,\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)=\mathbf{F}(k\,\mathbf{v}_1)$ es decir que para todo $k\in\mathbf{K}$ se tiene que $k\,\mathbf{w}_1\in\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$.

Luego $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ es un subespacio de $\mathbf{W}$.

b) Sea $\mathbf{w}\in\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ entonces existe un vector $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{v})=\mathbf{w}$.

Por ser $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\}$ un conjunto generador de $\mathbf{V}$, se tiene que: $\mathbf{v}=x_1\,\mathbf{v}_1+x_2\,\mathbf{v}_2+\cdots+x_r\,\mathbf{v}_r$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbf{w}=\mathbf{F}(\mathbf{v})&=\mathbf{F}\left(x_1\,\mathbf{v}_1+x_2\,\mathbf{v}_2+\cdots+x_r\,\mathbf{v}_r\right)\\&=x_1\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)+x_2\mathbf{F}(\mathbf{v}_2)+\cdots+x_r\mathbf{F}(\mathbf{v}_r) \quad \text{por ser } \mathbf{F} \text{ lineal}\end{aligned}.$$

Es decir: cualquier vector de $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ es combinación lineal de $\mathbf{F}(\mathbf{v}_1),\mathbf{F}(\mathbf{v}_2),\ldots,\mathbf{F}(\mathbf{v}_r)$, por lo tanto

$$\mathbf{I}_{\mathrm{F}}\subseteq\left\langle\mathbf{F}(\mathbf{v}_1),\mathbf{F}(\mathbf{v}_2),\ldots,\mathbf{F}(\mathbf{v}_r)\right\rangle \qquad (1)$$

Por otra parte $\mathbf{F}(\mathbf{v}_1),\mathbf{F}(\mathbf{v}_2),\ldots,\mathbf{F}(\mathbf{v}_r)$ pertenecen a la $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ que es un subespacio; por lo tanto

$$\left\langle\mathbf{F}(\mathbf{v}_1),\mathbf{F}(\mathbf{v}_2),\ldots,\mathbf{F}(\mathbf{v}_r)\right\rangle\subseteq\mathbf{I}_{\mathrm{F}} \qquad (2)$$

Luego de (1) y (2) se tiene que

$$\mathbf{I}_{\mathrm{F}}=\left\langle\mathbf{F}(\mathbf{v}_1),\mathbf{F}(\mathbf{v}_2),\ldots,\mathbf{F}(\mathbf{v}_r)\right\rangle.$$

c) La proposición (b) que acabamos de demostrar, dice en particular, que $\mathbf{I}_F$ es generado por las imágenes de los vectores de una base del vectorial **V**.

Si $dim\,\mathbf{V} = n$ las bases de **V** tienen "*n*" vectores.

Puesto que más vectores que los de un conjunto de generadores son linealmente dependientes, las bases de $\mathbf{I}_F$ tienen a lo sumo "*n*" vectores. Luego, resulta que $dim\,\mathbf{I}_F \leq n$ .#

Se llama **rango** de una aplicación lineal **F**, a la dimensión del subespacio $\mathbf{I}_F$.
Es decir:

$$dim\,\mathbf{I}_F = \textbf{rango de } \mathbf{F}$$

Sea una aplicación lineal $\mathbf{F}:\mathbf{V} \to \mathbf{W}$. Acabamos de demostrar que $\bar{\mathbf{0}}_\mathbf{W} \in \mathbf{I}_F$. Por consiguiente siempre existe su imagen inversa, esto es, el conjunto de vectores de **V** que por **F** tienen como imagen al $\bar{\mathbf{0}}_\mathbf{W}$. Este conjunto tiene gran importancia en el estudio de las aplicaciones lineales y por este motivo lo definimos y denominamos con un nombre especial: **núcleo** de la aplicación lineal. Veamos algunas propiedades que satisface este conjunto.

**Teorema 4.2.2** Sean **V** y **W** espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una aplicación lineal. Se verifica que:

a) $\mathbf{N}_F$ es un subespacio de **V**.

b) Si $dim\,\mathbf{V} = n$ entonces $dim\,\mathbf{N}_F \leq n$.

c) Si $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{I}_F$ entonces la imagen inversa de $\mathbf{w}_0$ es una variedad lineal cuyo subespacio asociado es el $\mathbf{N}_F$.

**Demostración:**

a) Veamos que $\mathbf{N}_F = \left\{\mathbf{v} \in \mathbf{V} / \ \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \bar{\mathbf{0}}_\mathbf{W}\right\}$ es un subespacio de **V**.

$\bar{\mathbf{0}}_\mathbf{V} \in \mathbf{N}_F$ pues $\mathbf{F}\left(\bar{\mathbf{0}}_\mathbf{V}\right) = \bar{\mathbf{0}}_\mathbf{W}$ (por ser **F** aplicación lineal).

Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores de $\mathbf{N}_F$, entonces $\mathbf{F}(\mathbf{v}_1) = \bar{\mathbf{0}}_\mathbf{W}$ y $\mathbf{F}(\mathbf{v}_2) = \bar{\mathbf{0}}_\mathbf{W}$.
Veamos que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{N}_F$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \mathbf{F}(\mathbf{v}_1) + \mathbf{F}(\mathbf{v}_2) \quad \text{por ser } \mathbf{F} \text{ lineal} \\ &= \bar{\mathbf{0}}_\mathbf{W}\end{aligned}$$

luego $\mathbf{N}_F$ es cerrado para la suma de vectores.

Por otra parte, para todo $k \in \mathbf{K}$ se tiene que $k\,\mathbf{v}_1 \in \mathbf{N}_F$ pues $\mathbf{F}(k\,\mathbf{v}_1) = k\,\mathbf{F}(\mathbf{v}_1) = k\bar{\mathbf{0}}_\mathbf{W} = \bar{\mathbf{0}}_\mathbf{W}$.

Luego $\mathbf{N}_F$ es un subespacio de **V** .

b) Queda como ejercicio para el lector.

c) Probaremos ahora que: Si $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{I}_F$ entonces la imagen inversa de $\mathbf{w}_0$ es una variedad lineal cuyo subespacio asociado es el $\mathbf{N}_F$.

Tengamos presente que la imagen inversa del vector $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{I}_F$ es el conjunto $\mathbf{A} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} / \ \mathbf{F(v)} = \mathbf{w}_0\}$.

Dado que $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{I}_F$, el conjunto **A** no es vacío. Sea entonces $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{A}$.

El enunciado afirma que $\mathbf{A} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_F$.

Para probar esta igualdad debemos mostrar que $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_F$ y que $\mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_F \subseteq \mathbf{A}$.

1. Veamos que $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_F$

Para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{A}$ se tiene que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$.

Por otro lado $\mathbf{F}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = \mathbf{F(v)} - \mathbf{F}(\mathbf{v}_0) = \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0 = \overline{\mathbf{0}}_W$ luego $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \in \mathbf{N}_F$.

En consecuencia, $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_F$ y por lo tanto $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_F$.

2. Veamos que $\mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_F \subseteq \mathbf{A}$

Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_F$. Luego $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$ con $\mathbf{u} \in \mathbf{N}_F$.

Planteando $\mathbf{F(v)} = \mathbf{F}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{v}_0) + \mathbf{F(u)} = \mathbf{w}_0 + \overline{\mathbf{0}}_W = \mathbf{w}_0$ se tiene entonces que $\mathbf{v} \in \mathbf{A}$.

Por lo tanto $\mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_F \subseteq \mathbf{A}$.

De 1. y 2. resulta que $\mathbf{A} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_F$.#

Se llama **nulidad** de una aplicación lineal **F**, a la dimensión del subespacio $\mathbf{N}_F$. Es decir:

$$dim\, \mathbf{N}_F = \text{nulidad de } \mathbf{F}.$$

**Corolario 4.2.1** Sean $\mathbf{M} \in \mathbf{K}^{m\times n}$ y $\mathbf{H} \in \mathbf{K}^{m\times 1}$.

Si el sistema $\mathbf{M.X} = \mathbf{H}$ es compatible, entonces el conjunto $\mathbf{A} = \{\mathbf{X} \in \mathbf{K}^{n\times 1} / \mathbf{M.X} = \mathbf{H}\}$ de sus soluciones es una variedad lineal con subespacio asociado $\mathbf{W} = \{\mathbf{X} \in \mathbf{K}^{n\times 1} / \mathbf{M.X} = \overline{\mathbf{0}}\}$ que es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado.

**Demostración:**

Consideremos la aplicación lineal $\mathbf{L_M} : \mathbf{K}^{n\times 1} \to \mathbf{K}^{m\times 1}$ definida por $\mathbf{L_M(X)} = \mathbf{M.X}$.

El núcleo de esta aplicación lineal es el conjunto $\mathbf{N}_{\mathbf{L_M}} = \left\{ \mathbf{X} \in \mathbf{K}^{n\times 1} / \ \mathbf{L_M}(\mathbf{X}) = \overline{\mathbf{0}} \right\}$, esto es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $\mathbf{M}\,.\,\mathbf{X} = \overline{\mathbf{0}}$.

Decir que el sistema $\mathbf{M.X} = \mathbf{H}$ es compatible equivale a afirmar que $\mathbf{H}$ es un elemento de la imagen de $\mathbf{L_M}$ y por consiguiente, por el **ítem c) del Teorema 4.2.2** su imagen inversa es una variedad lineal cuyo subespacio asociado es $\mathbf{N}_{\mathbf{L_M}} = \mathbf{W} = \left\{ \mathbf{X} \in \mathbf{K}^{n\times 1} / \mathbf{M.X} = \overline{\mathbf{0}} \right\}$. Pero la imagen inversa de $\mathbf{H}$ es el conjunto:

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{X} \in \mathbf{K}^{n\times 1} / \mathbf{L_M}(\mathbf{X}) = \mathbf{H} \right\} = \left\{ \mathbf{X} \in \mathbf{K}^{n\times 1} / \mathbf{M.X} = \mathbf{H} \right\}$$

esto es, el conjunto de soluciones del sistema planteado.#

## Ejemplos

### Ejemplo 1

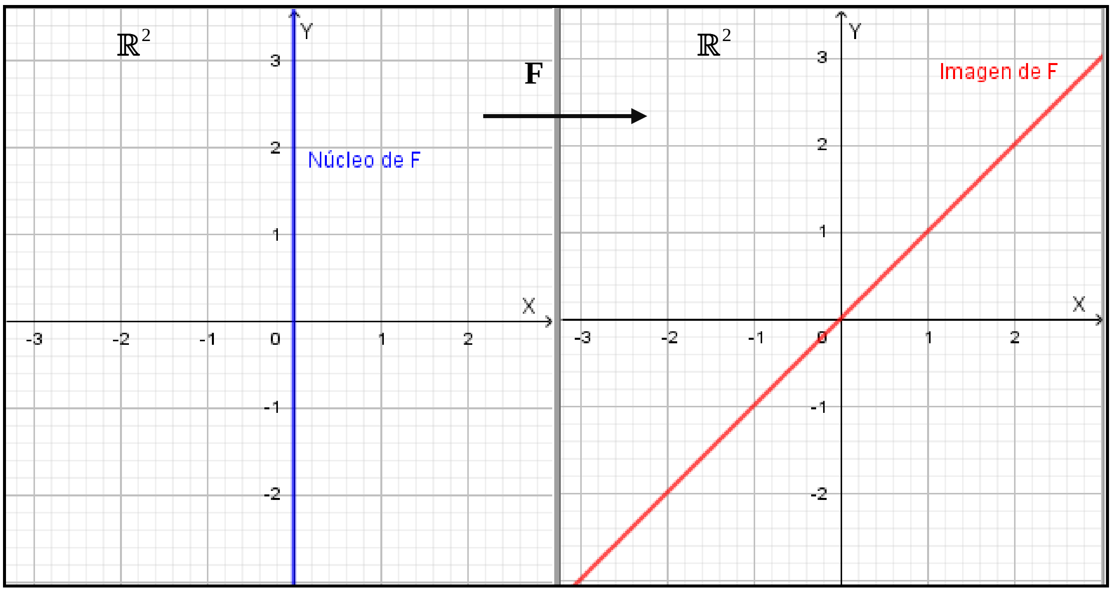
Sea la aplicación lineal $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{F}\big((x,y)\big) = (x,x)$. Se desea hallar $\mathbf{N}_\mathrm{F}$ e $\mathbf{I}_\mathrm{F}$.

- En este caso $\mathbf{N}_\mathrm{F} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \mathrm{F}\big((x,y)\big) = (0,0) \right\}$.

Entonces $(x,y) \in \mathbf{N}_\mathrm{F}$ sí y sólo si $(0,0) = \mathrm{F}\big((x,y)\big) = (x,x) \Leftrightarrow x = 0$.
Luego el $\mathbf{N}_\mathrm{F}$ es el conjunto de los pares ordenados de la forma $(0,y)$ es decir es el eje “y” (si se identifica $\mathbb{R}^2$ con el plano cartesiano).

- $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pertenecerá a $\mathbf{I}_\mathrm{F}$ si existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{F}\big((x,y)\big) = (x,x)$.

Es decir, todo vector de $\mathbf{I}_\mathrm{F}$ es de la forma $(x,x) \ \Rightarrow \ \mathbf{I}_\mathrm{F} = \langle (1,1) \rangle$.



Ejemplo 2

Sea **V** espacio vectorial sobre el cuerpo **K**.

El núcleo de la aplicación "identidad" $id\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definida por $id(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ es $\{\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}\}$.

Ejemplo 3

Sean **V** y **W** espacios vectoriales sobre el cuerpo **K**.

El núcleo de la "aplicación nula" $\mathbf{F}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tal que $\mathrm{F}(\mathbf{v}) = \bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{W}} \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ es el vectorial **V**.

Ejemplo 4

Sea $\mathbf{V} = \{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f \text{ tiene derivada de todo orden}\}$ y sea $\mathbf{D}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ el operador derivada definido por $\mathbf{D}(f) = \dfrac{df}{dx}$.

Entonces $\mathbf{N_D} = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Big/ \mathbf{D}(f) = \dfrac{df}{dx} = 0 \right\} = \{\text{funciones constantes}\}$.

Ejemplo 5

Sea la aplicación lineal $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que: $\mathbf{F}\big((x,y,z)\big) = (x-2y,\, x+y+z)$. Se quiere caracterizar el Núcleo y hallar generadores de la Imagen de esta aplicación lineal.

- $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big/ \mathrm{F}\big((x,y,z)\big) = (0,0)\right\}$, es el conjunto de las ternas $(x,y,z)$ tales que: $\begin{cases} x-2y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$. Luego $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ formado por las soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneas. Resulta $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \langle(-2/3, -1/3, 1)\rangle = \langle(-2,-1,3)\rangle$.

- Veamos ahora $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$.

Teniendo en cuenta que $\mathbf{F}\big((x,y,z)\big) = (x-2y,\, x+y+z)$, todo vector de la imagen $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ es de la forma $(x-2y,\, x+y+z) = (x,\, x) + (-2y,\, y) + (0,\, z)$.

Se tiene entonces que $\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \langle(1,1),\, (-2,1),\, (0,1)\rangle = \mathbb{R}^2$

**Notar que:** $(1,1) = \mathbf{F}\big((1,0,0)\big)$, $(-2,1) = \mathbf{F}\big((0,1,0)\big)$ y $(0,1) = \mathbf{F}\big((0,0,1)\big)$. Por lo visto en el **Teorema 4.2.1** si consideramos la base $\{(1,0,0),\, (0,1,0),\, (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ el subespacio $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ estará generado por las imágenes por **F** de dichos vectores, es decir $\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \langle\mathbf{F}\big((1,0,0)\big),\, \mathbf{F}\big((0,1,0)\big),\, \mathbf{F}\big((0,0,1)\big)\rangle$

## Ejemplo 6

Sea la aplicación lineal $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathbf{F}\left((x_1,x_2,x_3)\right) = (x_1 + x_2 - x_3,\ -2x_1 + x_2 + x_3,\ -x_1 + 2x_2)$$

Se quiere la caracterización y una base del Núcleo y de la Imagen de **F**.

➢ $\mathbf{N}_\mathrm{F}$ es el conjunto de las ternas $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\mathbf{F}\left((x_1,x_2,x_3)\right) = (x_1 + x_2 - x_3,\ -2x_1 + x_2 + x_3,\ -x_1 + 2x_2) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Entonces $\mathbf{N}_\mathrm{F} = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \right\}$

Luego $\mathbf{N}_\mathrm{F}$ es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ formado por las soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneas, que corresponde a las ternas de la forma: $k(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, 1)$ con $k \in \mathbb{R}$.
Es decir $\mathbf{N}_\mathrm{F} = \left\langle (\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, 1) \right\rangle = \left\langle (2, 1, 3) \right\rangle$. Luego, **nulidad** de $\mathbf{F} = dim\,\mathbf{N}_\mathrm{F} = 1$.

➢ Veamos la Imagen de **F**

Por definición $\mathbf{I}_\mathrm{F} = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \mathrm{F}\left((x_1,x_2,x_3)\right) = (a,b,c) \right\}$ o sea que $(a,b,c) \in \mathbf{I}_\mathrm{F}$ si existe $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ talque $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = a \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = b \\ -x_1 + 2x_2 = c \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \qquad \mathrm{e}_{21}(2);\ \mathrm{e}_{31}(1)$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{c} a \\ b+2a \\ c+a \end{array} \qquad \mathrm{e}_{32}(-1)$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} a \\ b+2a \\ c-b-a \end{array} \qquad \Rightarrow \ \mathbf{I}_\mathrm{F} = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ a + b - c = 0 \right\}$$

Luego se tiene que $\mathbf{I}_\mathrm{F} = \left\langle (1,0,1), (0,1,1) \right\rangle$, y $\mathrm{B} = \left\{ (1,0,1), (0,1,1) \right\}$ es una base de $\mathbf{I}_\mathrm{F}$. Por lo tanto $dim\,\mathbf{I}_\mathrm{F} = 2$.

¿Se podría haber hallado un conjunto de vectores generadores de la Imagen de **F**, trabajando de otra manera? La respuesta es SI, se podría haber aplicado **Teorema 4.2.1** esto es:

Consideramos la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es decir $\mathrm{B}=\{\mathbf{(}1,0,0\mathbf{)}, (0,1,0), \mathbf{(}0,0,1\mathbf{)}\}$. Sabemos que $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}=\left\langle \mathbf{F}\left(\mathbf{(}1,0,0\mathbf{)}\right), \mathbf{F}\left((0,1,0)\right), \mathbf{F}\left(\mathbf{(}0,0,1\mathbf{)}\right)\right\rangle$ entonces teniendo en cuenta la definición de la aplicación $\mathbf{F}\left(\mathbf{(}x_1,x_2,x_3\mathbf{)}\right)=\mathbf{(}x_1+x_2-x_3,\ -2x_1+x_2+x_3,\ -x_1+2x_2\mathbf{)}$ se tiene que:

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{(}1,0,0\mathbf{)}\right)=\mathbf{(}1,-2,-1\mathbf{)} \qquad \mathbf{F}\left((0,1,0)\right)=\mathbf{(}1,1,2\mathbf{)} \qquad \mathbf{F}\left(\mathbf{(}0,0,1\mathbf{)}\right)=\mathbf{(}-1,1,0\mathbf{)}$$

Luego, $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ está generada por los vectores $(1,-2,-1), (1,1,2), (-1,1,0)$. Eliminando $(1,1,2)$ pues es combinación lineal de los demás ($(-2)(1,-2,-1)+(-3)(-1,1,0)=(1,1,2)$), se tiene que $\mathbf{I}_{\mathbf{F}}=\left\langle (1,-2,-1), (-1,1,0)\right\rangle$.

**Nota:** Observar que, considerando la definicón de **F**, resulta también lo escrito previamente

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\left(\mathbf{(}x_1,x_2,x_3\mathbf{)}\right)&=\mathbf{(}x_1+x_2-x_3,\ -2x_1+x_2+x_3,\ -x_1+2x_2\mathbf{)}\\&=\mathbf{(}x_1,-2x_1,-x_1\mathbf{)}+\mathbf{(}x_2,x_2,2x_2\mathbf{)}+\mathbf{(}-x_3,x_3,0\mathbf{)}\\&=\underbrace{x_1\mathbf{(}1,-2,-1\mathbf{)}+x_2\mathbf{(}1,1,2\mathbf{)}+x_3\mathbf{(}-1,1,0\mathbf{)}}\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{I}_{\mathbf{F}}=\left\langle (1,-2,-1), (1,1,2), (-1,1,0)\right\rangle$$

Ejemplo 7

Determinar el Núcleo y la Imagen de la siguiente aplicación lineal

$$\mathrm{F}:\mathbf{P}_2\to\mathbb{R}^2 \qquad \mathbf{F}\left(a+bX+cX^2\right)=\mathbf{(}a+b+2c,\ 3a+3b+6c\mathbf{)}$$

- $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}=\left\{a+bX+cX^2\in\mathbf{P}_2 \,/\, \mathbf{F}\left(a+bX+cX^2\right)=\mathbf{(}0,0\mathbf{)}\right\}$ es el conjunto de polinomios $a+bX+cX^2\in\mathbf{P}_2$ tales que $\begin{cases} a+b+2c=0\\ 3a+3b+6c=0\end{cases}$.

Entonces $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ es un subespacio de $\mathbf{P}_2$ formado por polinomios cuyos coeficientes son las soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneas esto es $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}=\left\{a+bX+cX^2\in\mathbf{P}_2 \ / \ a+b+2c=0\right\}$**.**

Luego un polinomio que pertenece al núcleo de **F** podrá escribirse como:

$$a+bX+cX^2=\mathbf{(}-b-2c\mathbf{)}+bX+cX^2=-b-2c+bX+cX^2=b\ \mathbf{(}-1+X\mathbf{)}+c\ \mathbf{(}-2+X^2\mathbf{)}$$

$\mathbf{N}_{\mathrm{F}}=\left\langle -1+X,\ -2+X^2\right\rangle$**.** Luego, **nulidad** de $\mathbf{F}=dim\,\mathbf{N}_{\mathrm{F}}=2$.

➢ Veamos la Imagen de **F**

Por definición $(x, y) \in \mathbf{I}_F$ si existe $a + bX + cX^2 \in \mathbf{P}_2$ talque $\mathbf{F}\left(a + bX + cX^2\right) = (x, y)$.

Entonces, todo vector de la imagen $\mathbf{I}_F$ es de la forma

$$(a + b + 2c,\ 3a + 3b + 6c) = (a,\ 3a) + (b,\ 3b) + (2c,\ 6c)$$

Luego, $\mathbf{I}_F$ está generada por los vectores (1,3), (1,3), (2,6). Eliminando los vectores que son combinación lineal de los demás, se tiene que $\mathbf{I}_\mathbf{F} = \langle (1,3) \rangle$. Luego, **rango** de $\mathbf{F} = dim\,\mathbf{I}_F = 1$.

**Notar que:** Si se considera la base canónica de $\mathbf{P}_2$, es decir $\mathrm{B} = \{1, X, X^2\}$ por el **Teorema 4.2.1** se tiene que $\mathbf{I}_F = \left\langle \mathbf{F}(1),\ \mathbf{F}(X),\ \mathbf{F}\left(X^2\right) \right\rangle$.

Como $\mathbf{F}(1) = (1,3)$; $\mathbf{F}(X) = (1,3)$ y $\mathbf{F}\left(X^2\right) = (2,6)$, se tiene que $\mathbf{I}_\mathbf{F} = \langle (1,3) \rangle$.

## Ejemplo 8

Determinar el Núcleo y la Imagen de la aplicación lineal $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbf{P}_3$ definida por:

$$\mathrm{F}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + b - c) + (2a + b)\,X + (a + c)X^2 + (-a - b + c)X^3$$

➢ $\mathbf{N}_F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\mathrm{x}2} \Big/ \mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0 + 0X + 0X^2 + 0X^3 \right\}$ es el conjunto de matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\mathrm{x}2}$ tales que $\begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ -a - b + c = 0 \end{cases}$.

Resolviendo se tiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{e_{21}(-2) \\ e_{31}(-1) \\ e_{41}(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{e_{12}(1) \\ e_{32}(-1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{e_2(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Entonces $\mathbf{N}_F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\mathrm{x}2} \Big/ \begin{cases} a + 3c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \right\}$. Luego una vector que pertenece al núcleo de **F** podrá escribirse como:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3c & -2c \\ c & d \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $\mathbf{N}_F = \left\langle \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. Luego, **nulidad** de $\mathbf{F} = dim\,\mathbf{N}_F = 2$.

➢ Veamos la Imagen de **F**

Todo vector perteneciente a $\mathbf{I}_F$ es de la forma $(a+b-c) + (2a+b)\,X + (a+c)X^2 + (-a-b+c)X^3$
Agrupando convenientemente esta última expresión, se tiene que:

$$(a+b-c) + (2a+b)\,X + (a+c)X^2 + (-a-b+c)X^3 =$$
$$=(a+2aX+aX^2-aX^3) + (b+bX-bX^3) + (-c+cX^2+cX^3)$$
$$=a\,(1+2X+X^2-X^3) + b\,(1+X-X^3) + c\,(-1+X^2+X^3)$$

Entonces se tiene que $\mathbf{I_F} = \left\langle 1+2X+X^2-X^3, 1+X-X^3, -1+X^2+X^3 \right\rangle$

Como $1+2X+X^2-X^3 = 2\left(1+X-X^3\right)+\left(-1+X^2+X^3\right)$, una base del subespacio imagen de **F** es $\mathrm{B} = \left\{1+X-X^3,\ -1+X^2+X^3\right\}$. Luego, **rango** de $\mathbf{F} = dim\,\mathbf{I}_F = 2$.

En los teoremas anteriores, hemos visto que si $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ es una aplicación lineal y el espacio vectorial **V** es de dimensión "n", este número acota el **rango** y la **nulidad** de **F**. El siguiente teorema nos brinda más información de cómo se relaciona rango, nulidad y dimensión del dominio.

**Teorema 4.2.3 (**Teorema de la Dimensión para aplicaciones lineales**)**
Sean **V** y **W** espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ una aplicación lineal.

Si **V** es de dimensión finita entonces $dim\,\mathbf{N}_F + dim\,\mathbf{I}_F = dim\,\mathbf{V}$.

**Demostración:**

Por ser **V** de dimensión finita, existe un subespacio **U**, complementario de $\mathbf{N}_F$, tal que

$$\mathbf{V} = \mathbf{N}_F \oplus \mathbf{U} \quad \text{donde} \quad dim\,\mathbf{V} = dim\,\mathbf{N}_F + dim\,\mathbf{U}.$$

Para probar el teorema bastará con demostrar que $dim\,\mathbf{I}_F = dim\,\mathbf{U}$.

Supongamos que $\mathbf{N}_F \neq \left\{\bar{\mathbf{0}}_V\right\}$ y $\mathbf{U} \neq \left\{\bar{\mathbf{0}}_V\right\}$.

Sean

$\mathbf{B}_{\mathbf{N}_F} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ base del núcleo de **F**, $dim\,\mathbf{N}_F = m$.

$\mathbf{B}_\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ base de **U**, $dim\,\mathbf{U} = r$.

Por ser $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ y $\mathbf{U}$ subespacios complementarios se tiene que $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\mathbf{N}_{\mathrm{F}}} \cup \mathbf{B}_{\mathbf{U}}$ es una base de $\mathbf{V}$ y por lo tanto $dim\,\mathbf{V} = m + r$.

Por ser $\mathbf{F}$ una aplicación lineal (**Teorema 4.2.1** propiedades de la imagen) se tiene que:

$$\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \langle \mathbf{F}(\mathbf{v}_1), \mathbf{F}(\mathbf{v}_2), \ldots, \mathbf{F}(\mathbf{v}_m), \mathbf{F}(\mathbf{u}_1), \mathbf{F}(\mathbf{u}_2), \ldots, \mathbf{F}(\mathbf{u}_r) \rangle .$$

Puesto que $\mathbf{F}(\mathbf{v}_1) = \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}, \mathbf{F}(\mathbf{v}_2) = \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}, \ldots, \mathbf{F}(\mathbf{v}_m) = \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}$ entonces $\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \langle \mathbf{F}(\mathbf{u}_1), \mathbf{F}(\mathbf{u}_2), \ldots, \mathbf{F}(\mathbf{u}_r) \rangle$.

Vamos a mostrar que $\mathbf{F}(\mathbf{u}_1), \mathbf{F}(\mathbf{u}_2), \ldots, \mathbf{F}(\mathbf{u}_r)$ son linealmente independientes.

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_r$ escalares tales que $x_1\mathbf{F}(\mathbf{u}_1) + x_2\mathbf{F}(\mathbf{u}_2) + \cdots + x_r\mathbf{F}(\mathbf{u}_r) = \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}$.

Por la linealidad de $\mathbf{F}$, esta última expresión es equivalente a: $\mathbf{F}\left(x_1\,\mathbf{u}_1 + x_2\,\mathbf{u}_2 + \cdots + x_r\,\mathbf{u}_r\right) = \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}$

Por lo tanto $x_1\,\mathbf{u}_1 + x_2\,\mathbf{u}_2 + \cdots + x_r\,\mathbf{u}_r \in \mathbf{N}_{\mathrm{F}}$, pero por otro lado $x_1\,\mathbf{u}_1 + x_2\,\mathbf{u}_2 + \cdots + x_r\,\mathbf{u}_r \in \mathbf{U}$ luego pertenece a $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} \cap \mathbf{U}$. Teniendo en cuenta que la suma de $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ y $\mathbf{U}$ es directa resulta:

$$x_1\,\mathbf{u}_1 + x_2\,\mathbf{u}_2 + \cdots + x_r\,\mathbf{u}_r = \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}$$

Dado que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ son linealmente independientes (por formar base) resulta que $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_r = 0$ es la única solución posible.

En consecuencia $\mathbf{B}' = \{\mathbf{F}(\mathbf{u}_1), \mathbf{F}(\mathbf{u}_2), \ldots, \mathbf{F}(\mathbf{u}_r)\}$ es una base de $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ y por lo tanto $dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = r$.

Luego $dim\,\mathbf{N}_{\mathrm{F}} + dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = dim\,\mathbf{V}$ y el teorema queda probado. #

**Observaciones:** Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una aplicación lineal. Si $dim\,\mathbf{V} = n$ se verifica que:

a) Si $dim\,\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = n \Rightarrow \mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{F}$ es la aplicación nula. Por lo tanto $\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \left\{\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}\right\} \Rightarrow dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = 0$.

b) Si $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}\right\} \Rightarrow$ el complentario $\mathbf{U}$ es todo el vectorial $\mathbf{U} = \mathbf{V}$ entonces $dim\,\mathbf{U} = dim\,\mathbf{V} = n$. Por lo tanto $dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = n$.

**Ejemplos**

Ejemplo 1

Considerar los ejemplos 5, 6, 7 y 8 vistos anteriormente y verificar el cumplimiento del **Teorema 4.2.3** que se acaba de demostrar.

## Ejemplo 2

Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{3\times1}$ la aplicación lineal definida por $\mathbf{F}\left((x_1,x_2,x_3)\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$. Se quiere hallar el Núcleo y la Imagen de **F**.

- Núcleo de **F**: $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ pertenecerá a $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ si $\mathrm{F}\left((x_1,x_2,x_3)\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ (*)

Se busca hallar la solución de (*):

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{e_{21}(-1)} \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{e_{32}(-1)} \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\langle (-2,2,1) \right\rangle$ en consecuencia la **nulidad** de $\mathbf{F} = dim\,\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = 1$

- Imagen de **F**:

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times1}$ pertenecerá a $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ si existe $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{F}\left((x_1,x_2,x_3)\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$.

Es decir, todo vector de $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ es de la forma $\begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 - 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_3 \\ 0 \\ -2x_3 \end{bmatrix}$.

Entonces $\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{¿por qué?}}}{=} \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ de modo que **rango** de $\mathrm{F} = dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = 2$.

Observar que se verifica que $dim\,\mathbb{R}^3 = 3 = dim\,\mathbf{N}_{\mathrm{F}} + dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = 1 + 2$.

## Ejemplo 3

Sea $\mathrm{F}: \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_1$ la aplicación lineal definida por $\mathrm{F}\left(aX^2 + bX + c\right) = (a + 2b)X + (b + c)$. Se quiere caracterizar el Núcleo y la Imagen de $\mathbf{F}$.

- Núcleo de **F**

$aX^2 + bX + c \in \mathbf{P}_2$ pertenecerá a $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ si $\mathrm{F}\left(aX^2 + bX + c\right) = 0X^2 + 0X + 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{e_{12}(-2)} \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right.$ Entonces $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{ aX^2 + bX + c \in \mathbf{P}_2 \;/\; \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \right\}$

Luego, $\mathbf{N}_F = \langle 2X^2 - X + 1 \rangle$ y en consecuencia **nulidad** de $\mathbf{F} = dim\,\mathbf{N}_F = 1$

- Imagen de **F**

Todo vector perteneciente a $\mathbf{I}_F$ es de la forma $(a+2b)X + (b+c)$, por lo tanto los vectores $\mathbf{p} = X$ y $\mathbf{q} = 1$ generan la imagen de **F**.

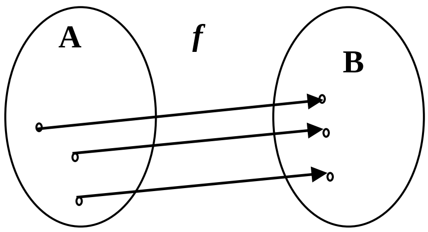
Entonces, $\mathbf{I}_F = \langle X, 1 \rangle$ en consecuencia **rango** de $\mathbf{F} = dim\,\mathbf{I}_F = 2$.

Observar que se verifica el **Teorema 4.2.3** puesto que $dim\ \mathbf{P}_2 = 3 = dim\,\mathbf{N}_F + dim\,\mathbf{I}_F = 1 + 2$.

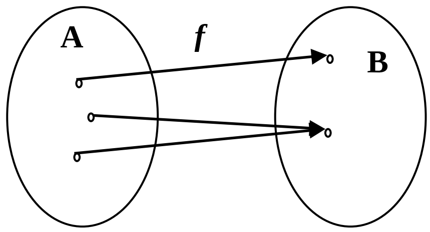
**Aplicación Inyectiva, Suryectiva y Biyectiva**

Antes de avanzar con las próximas secciones, recordemos cuándo una aplicación (arbitraria) $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es inyectiva y cuándo es suryectiva.

La aplicación $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es **inyectiva** (uno a uno) cuando elementos distintos de **A** tienen por imagen elementos distintos de **B**.
Es decir, $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es inyectiva sí y sólo si $\forall a_1, a_2 \in \mathbf{A},\ f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$



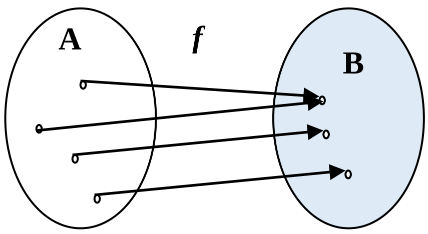
Aplicación Inyectiva



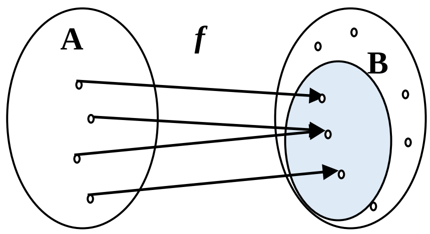
Aplicación no Inyectiva

En otras palabras, $f$ es inyectiva sí y sólo si la imagen inversa de todo elemento de la imagen incluye un sólo elemento del dominio.

La aplicación $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es **suryectiva** (sobreyectiva) si todo elemento de **B** es imagen de al menos un elemento de **A**.
Es decir, $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es suryectiva sí y sólo si $\forall b \in \mathbf{B}\ \ \exists a \in \mathbf{A}$ tal que $b = f(a)$



Aplicación Suryectiva



Aplicación no Suryectiva

Luego, una **biyección** es una aplicación $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ que es a la vez **inyectiva** y **suryectiva**.

## 4.3 Aplicaciones Lineales Inyectivas

Retomemos ahora el trabajo con $\mathbf{F}:\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{W}$ aplicación lineal entre los vectoriales **V** y **W**. A continuación, enunciaremos y demostraremos una condición necesaria y suficiente que debe verificar una aplicación lineal para ser inyectiva.

> **Teorema 4.3.1** Sean **V** y **W** espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**.
> Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{W}$ una aplicación lineal.
>
> **F** es **inyectiva** sí y sólo si $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{ \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}} \right\}$

**Demostración:**

Recordemos que una aplicación (arbitraria) **F** es inyectiva sí y sólo si la imagen inversa de todo elemento de la imagen incluye un sólo elemento del dominio.

Supongamos ahora que tenemos una aplicación $\mathbf{F}:\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{W}$ lineal. Por **Teorema 4.2.2** se tiene que la imagen inversa de $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ es una variedad lineal con subespacio asociado $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$. Por consiguiente,

**F** es inyectiva sí y sólo si estas variedades lineales son "puntos", o sea

sí y sólo si $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{ \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}} \right\}$. #

Luego, para determinar si una aplicación lineal **F** es inyectiva basta analizar su Núcleo. Si éste se reduce al vector nulo entonces **F** será inyectiva, caso contrario no lo será.

### Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2\times 1}$ la aplicación lineal definida por $\mathbf{F}\left((x_1,x_2)\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_2 \end{bmatrix}$. Se quiere analizar si la aplicación **F** es inyectiva.

Teniendo en cuenta el teorema que se acaba de demostrar, analizaremos si $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \{(0,0)\}$.

- $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ pertenecerá a $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ si $\mathbf{F}\left((x_1,x_2)\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Luego

$$\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_2 = 0 \end{cases} \right\}$$

entonces $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \{(0,0)\}$ y por lo tanto **F** es inyectiva.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $\mathbf{F}\left((x_1,x_2,x_3)\right) = (x_1 - 2x_2,\, x_1 + x_2 + x_3)$. Se desea analizar si la aplicación $\mathbf{F}$ es inyectiva.

Con anterioridad se obtuvo que $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \langle(-2,-1,3)\rangle$. Por lo tanto, como $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} \neq \{(0,0,0)\}$ la aplicación $\mathrm{F}$ **no** es inyectiva.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{F}: \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_1$ la aplicación lineal definida por $\mathbf{F}\left(aX^2 + bX + c\right) = (a+2b)X + (b+c)$. Se desea analizar si la aplicación $\mathbf{F}$ es inyectiva.

Con anterioridad se obtuvo que $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \langle 2X^2 - X + 1\rangle$.

Luego, **F no** es inyectiva pues $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} \neq \left\{\bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{P}_2}\right\}$.

### 4.3.2. Aplicaciones Lineales e Independencia Lineal

Las imágenes por una aplicación lineal de vectores linealmente independientes, no son necesariamente vectores linealmente independientes (considere, por ejemplo, el efecto de la aplicación nula).

El siguiente teorema caracteriza las aplicaciones que preservan la independencia lineal.

> **Teorema 4.3.2.1** Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**.
>
> Sea $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una aplicación lineal.
>
> La imagen de todo subconjunto linealmente independiente de **V** es un subconjunto linealmente independiente de **W** sí y sólo si **F** es inyectiva

**Demostración:**

$\Rightarrow)$ Por hipótesis tenemos que la imagen por **F** de todo subconjunto linealmente independiente de **V** es un subconjunto linealmente independiente de **W**, queremos probar que **F** es inyectiva.

Sea un conjunto linealmente independiente, la imagen de un vector no nulo (linealmente independiente) de **V**, no puede ser $\bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{W}}$ (que es linealmente dependiente); por lo tanto: $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{\bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{V}}\right\}$ o sea que **F** es inyectiva.

$\Leftarrow)$ Por hipótesis tenemos que **F** es inyectiva, queremos probar que la imagen por **F** de todo subconjunto linealmente independiente de **V** es un subconjunto linealmente independiente de **W**.

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores linealmente independientes de $\mathbf{V}$ queremos ver que $\mathbf{F}(\mathbf{v}_1), \mathbf{F}(\mathbf{v}_2), \ldots, \mathbf{F}(\mathbf{v}_r)$ son vectores linealmente independientes de $\mathbf{W}$. Planteamos

$$x_1\mathbf{F}(\mathbf{v}_1) + x_2\mathbf{F}(\mathbf{v}_2) + \cdots + x_r\mathbf{F}(\mathbf{v}_r) = \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}$$

$$\mathbf{F}\left(x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_r\,\mathbf{v}_r\right) = \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}} \quad \text{por la linealidad de } \mathbf{F}$$

Luego, $x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_r\,\mathbf{v}_r \in \mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ pero por hipótesis $\mathbf{F}$ es inyectiva, esto es $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{ \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}} \right\}$ por lo tanto $x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_r\,\mathbf{v}_r = \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}$.

Luego, por ser $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ linealmente independientes, resulta que $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_r = 0$ lo que prueba que $\mathbf{F}(\mathbf{v}_1), \mathbf{F}(\mathbf{v}_2), \ldots, \mathbf{F}(\mathbf{v}_r)$ son linealmente independientes. #

## 4.4. Aplicaciones Lineales entre Espacios Vectoriales de Igual Dimensión

Si consideramos aplicaciones lineales, vemos que las propiedades de inyectividad y suryectividad no dependen una de la otra. Es fácil dar ejemplos de aplicaciones lineales que tienen sólo una de las dos propiedades.

$\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\quad \mathbf{F}\big((x,y)\big) = (x,y,0)$ es inyectiva y no suryectiva.

$\mathbf{G}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\quad \mathbf{G}\big((x,y,z)\big) = (x,y)$ es suryectiva y no inyectiva.

En el siguiente teorema se demuestra que, entre espacios vectoriales de igual dimensión, "inyectividad" y "suryectividad" se dan siempre en forma simultánea.

**Teorema 4.4.1** Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Sea $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una aplicación lineal.

Si $dim\,\mathbf{V} = dim\,\mathbf{W} = n$ entonces $\mathbf{F}$ inyectiva $\Leftrightarrow$ $\mathbf{F}$ suryectiva .

**Demostración:**

La demostración es inmediata a partir de la igualdad $dim\,\mathbf{N}_{\mathrm{F}} + dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = dim\,\mathbf{V} = n$

$\mathbf{F}$ es inyectiva $\Leftrightarrow \mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}\right\} \Leftrightarrow dim\,\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = 0 \Leftrightarrow dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = n \Leftrightarrow \mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \mathbf{W} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ es suryectiva .#

**Corolario 4.4.1** Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Si $dim\,\mathbf{V} = dim\,\mathbf{W} = n$ y $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ es una aplicación lineal se verifica que:

- Toda aplicación lineal $\mathbf{F}$ inyectiva es una biyección.
- Toda aplicación lineal $\mathbf{F}$ suryectiva es una biyección.

**Demostración:** queda como ejercicio para el lector.

Además,

$$\mathbf{F} \text{ es biyectiva si se verifica que} \begin{cases} \mathbf{F} \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow \mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{ \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}} \right\} \Leftrightarrow dim\, \mathbf{I}_{\mathrm{F}} = n \\ \mathbf{F} \text{ es suryectiva} \Leftrightarrow \mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \mathbf{W} \end{cases}$$

luego $dim\, \mathbf{W} = n = dim\, \mathbf{V}$.

De donde las biyecciones sólo pueden presentarse entre espacios de igual dimensión.

Entonces si $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales de la misma dimensión, la biyectividad de **F** es equivalente a que $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{ \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}} \right\}$ o bien $\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \mathbf{W}$. #

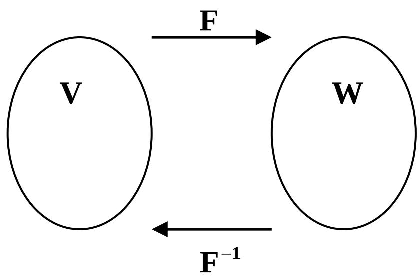
### 4.4.1. Aplicaciones Lineales Inversibles

Sea $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ es una aplicación biyectiva se verifica:

a) Esta definida la aplicación **"inversa"**:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1}&: \mathbf{W} \to \mathbf{V} \\ &\mathbf{w} \to \mathbf{v} \quad \text{siendo } \mathbf{v} \text{ el único elemento de } \mathbf{V} \text{ tal que } \mathbf{F(v)} = \mathbf{w} \end{aligned}$$

b) $\mathbf{F}^{-1}$ es una biyección y su aplicación inversa es **F**.




$$\left( \mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F} \right)(\mathbf{v}) = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}(\mathbf{v})) = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$$

$$\left( \mathbf{F} \circ \mathbf{F}^{-1} \right)(\mathbf{w}) = \mathbf{F}(\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{w})) = \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

o sea

$\mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F} = id_{\mathrm{V}}$ (aplicación identidad de $\mathbf{V}$)

$\mathbf{F} \circ \mathbf{F}^{-1} = id_{\mathrm{W}}$ (aplicación identidad de $\mathbf{W}$)

En el siguiente teorema vamos a mostrar que si en particular, **F** es una aplicación lineal biyectiva, $\mathbf{F}^{-1}$ también lo es.

> **Teorema 4.4.1.1** Sean **V** y **W** espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Si $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ es una aplicación lineal biyectiva entonces su aplicación inversa $\mathbf{F}^{-1}: \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ es también una aplicación lineal.

**Demostración:**

Veamos que $\mathbf{F}^{-1}$ es una aplicación lineal.

Sean $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ elementos de **W**.

Por ser $\mathbf{F}$ una biyección, existe un único elemento $\mathbf{v}_1$ y un único $\mathbf{v}_2$ tales que: $\mathbf{F(v_1)=w_1}$ y $\mathbf{F(v_2)=w_2}$ (recordar que $\mathbf{F^{-1}:W\to V}$ está definida por $\mathbf{F^{-1}(w)=v}$ siendo $\mathbf{v}$ el único elemento de $\mathbf{V}$ tal que $\mathbf{F(v)=w}$).
Por lo tanto, $\mathbf{F^{-1}(w_1)=v_1}$ y $\mathbf{F^{-1}(w_2)=v_2}$.

- $\mathbf{F^{-1}(w_1+w_2)=F^{-1}\left(F(v_1)+F(v_2)\right)}$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{F^{-1}\left(F(v_1+v_2)\right)} && \text{por ser } \mathbf{F} \text{ lineal}\\
&= \mathbf{v_1+v_2} && \text{pues } \mathbf{F^{-1}\circ F}=id_{\mathbf{V}}\\
&= \mathbf{F^{-1}(w_1)+F^{-1}(w_2)}
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{F^{-1}}(k\,\mathbf{w_1})=\mathbf{F^{-1}}\left(k\,\mathbf{F(v_1)}\right)$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{F^{-1}}\left(\mathbf{F}(k\,\mathbf{v_1})\right) && \text{por ser } \mathbf{F} \text{ lineal}\\
&= k\,\mathbf{v_1} && \text{pues } \mathbf{F^{-1}\circ F}=id_{\mathbf{V}}\\
&= k\,\mathbf{F^{-1}(w_1)}
\end{aligned}
$$

Luego, $\mathbf{F^{-1}}$ es una aplicación lineal . #

### 4.4.2 Espacios Vectoriales Isomorfos

**Definición 4.4.2.1** Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Diremos que $\mathbf{F:V\to W}$ es un **isomorfismo** de $\mathbf{V}$ sobre $\mathbf{W}$ sí y sólo si **F** es una aplicación lineal **biyectiva**.

En ese caso decimos que **V** es isomorfo a **W**.

**Observación**: Al ser $\mathbf{F:V\to W}$ una aplicación lineal biyectiva existe la aplicación inversa $\mathbf{F^{-1}}$, que es también un isomorfismo, por lo que resulta que **W** es isomorfo a **V**. Por este motivo diremos que los espacios vectoriales **V** y **W** son "isomorfos" cada vez que estén vinculados por una aplicación lineal biyectiva.

Con el siguiente teorema se muestra que cuando los vectoriales son de dimensión finita, los únicos espacios vectoriales que son "isomorfos" son los que tiene igual dimensión.

**Teorema 4.4.2.1** Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo **K** de dimensión finita.

**V** y **W** son "isomorfos" sí y sólo si $dim\,\mathbf{V}=dim\,\mathbf{W}$.

**Demostración:**

$\Rightarrow)$ **V** y **W** son "isomorfos" , entonces sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{W}$ una aplicación lineal biyectiva. Por lo tanto, se verifica que: $dim\,\mathbf{V} = dim\,\mathbf{N}_{\mathrm{F}} + dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = 0 + dim\,\mathbf{W} = dim\,\mathbf{W}$ .

$\Leftarrow)$ Supongamos $dim\,\mathbf{V} = dim\,\mathbf{W} = n$.

Sean $\mathbf{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base de **V** y $\mathbf{B'} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ una base de **W**.

La aplicación lineal $\mathbf{F}:\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{W}$ definida por $\mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{w}_n$ es una biyección (su demostración queda como ejercicio para el lector) y por lo tanto **V** y **W** son isomorfos. #

## 4.5. Operaciones con Aplicaciones Lineales

**Definición 4.5.1** Sean **V** y **W** espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Sean $k \in \mathbf{K}$, $\mathbf{F}:\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{W}$ y $\mathbf{T}:\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{W}$ <u>aplicaciones arbitrarias</u>. Definimos

**1.** $\mathbf{F}+\mathbf{T}:\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{W};\quad (\mathbf{F}+\mathbf{T})(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \mathbf{T}(\mathbf{u})$

La aplicación $\mathbf{F}+\mathbf{T}$ es suma de las aplicaciones **F** y **T**.

**2.** $k\,\mathbf{F}:\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{W};\quad (k\,\mathbf{F})(\mathbf{u}) = k\,\mathbf{F}(\mathbf{u})$

La aplicación $k\ \mathbf{F}$ es el producto del escalar *k* por la aplicación **F**.

**Definición 4.5.2** Sean **U, V** y **W** espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Sean $\mathbf{F}:\mathbf{U}\rightarrow\mathbf{V}$ y $\mathbf{T}:\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{W}$ <u>aplicaciones arbitrarias</u>. Se define la aplicación

$$\mathbf{T}\circ\mathbf{F}:\mathbf{U}\rightarrow\mathbf{W};\quad (\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(\mathbf{u}) = \mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{u}))$$

La aplicación $\mathbf{T}\circ\mathbf{F}$ es la compuesta de **T** con **F**.

**Ejemplos**

Ejemplo 1

Si **F** y **T** son aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ tales que:

$$\mathbf{F}((1,0,0)) = (2,1) \qquad \mathbf{T}((1,0,0)) = (3,2)$$

Se tendrá entonces que:

- $(\mathbf{F}+\mathbf{T})((1,0,0)) = \mathbf{F}((1,0,0)) + \mathbf{T}((1,0,0)) = (2,1) + (3,2) = (5,3)$

- $$\begin{aligned}(3\mathbf{F}-2\mathbf{T})((1,0,0)) &= (3\mathbf{F})((1,0,0))+(-2\mathbf{T})((1,0,0))\\ &= 3\mathbf{F}((1,0,0))+(-2)\mathbf{T}((1,0,0))\\ &= 3(2,1)+(-2)(3,2)\\ &= (0,-1)\end{aligned}$$

## Ejemplo 2

Sean las aplicaciones lineales

$$\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2;\quad \mathbf{F}((x,y,z))=(x+y,\,y-z)$$
$$\mathbf{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2;\quad \mathbf{T}((x,y,z))=(x+z,y)$$

Definimos $(\mathbf{F}+\mathbf{T}):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ como sigue:

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}+\mathbf{T})((x,y,z)) &= \mathbf{F}((x,y,z))+\mathbf{T}((x,y,z))\\ &= (x+y,\,y-z)+(x+z,y)\\ &= (x+y+x+z,\,y-z+y)\\ &= (2x+y+z,\,2y-z)\end{aligned}$$

Notar que la aplicación definida $(\mathbf{F}+\mathbf{T}):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ resulta lineal.

Definimos $(2\mathbf{F}+3\mathbf{T}):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ como sigue:

$$\begin{aligned}(2\mathbf{F}+3\mathbf{T})((x,y,z)) &= (2\mathbf{F})((x,y,z))+(3\mathbf{T})((x,y,z))\\ &= 2\mathbf{F}((x,y,z))+3\mathbf{T}((x,y,z))\\ &= 2(x+y,\,y-z)+3(x+z,y)\\ &= \left(2(x+y)+3(x+z),\,2(y-z)+3y\right)\\ &= (5x+2y+3z,\,y-2z)\end{aligned}$$

Notar que la aplicación definida $(2\mathbf{F}+3\mathbf{T}):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ resulta lineal.

## Ejemplo 3

Sean las aplicaciones lineales

$$\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3;\quad \mathbf{F}((x,y,z))=(x+y,\,y-z,\,x-z)$$
$$\mathbf{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2;\quad \mathbf{T}((x,y,z))=(x+z,y)$$

Definimos $(\mathbf{T}\circ\mathbf{F}):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ como sigue:

$$\begin{aligned}(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})((x,y,z)) &= \mathbf{T}(\mathbf{F}((x,y,z)))\\ &= \mathbf{T}((x+y,\, y-z,\, x-z))\\ &= (2x+y-z,\, y-z)\end{aligned}$$

Notar que la aplicación definida $(\mathbf{T}\circ\mathbf{F}):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ resulta lineal.

> **Teorema 4.5.1** Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$.
> Si $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ y $\mathbf{T}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ son aplicaciones lineales y $k\in\mathbf{K}$, entonces:
>
> a) $\mathbf{F}+\mathbf{T}$ es una aplicación lineal.
>
> b) $k\,\mathbf{F}$ es una aplicación lineal.

**Demostración:**

a) Queremos probar que $\mathbf{F}+\mathbf{T}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$; $(\mathbf{F}+\mathbf{T})(\mathbf{u})=\mathbf{F}(\mathbf{u})+\mathbf{T}(\mathbf{u})$ es una aplicación lineal, para ello planteamos:

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}+\mathbf{T})(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \mathbf{F}(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{T}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) && \text{por definición de suma de aplicaciones}\\ &= \mathbf{F}(\mathbf{u})+\mathbf{F}(\mathbf{v})+\mathbf{T}(\mathbf{u})+\mathbf{T}(\mathbf{v}) && \text{por linealidad de } \mathbf{F} \text{ y } \mathbf{T}\\ &= (\mathbf{F}(\mathbf{u})+\mathbf{T}(\mathbf{u}))+(\mathbf{F}(\mathbf{v})+\mathbf{T}(\mathbf{v})) && \text{por propiedades de la suma de vectores en } \mathbf{W}\\ &= (\mathbf{F}+\mathbf{T})(\mathbf{u})+(\mathbf{F}+\mathbf{T})(\mathbf{v}) && \text{por definición de suma de aplicaciones}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}+\mathbf{T})(k\,\mathbf{u}) &= \mathbf{F}(k\,\mathbf{u})+\mathbf{T}(k\,\mathbf{u}) && \text{por definición de suma de aplicaciones}\\ &= k\mathbf{F}(\mathbf{u})+k\,\mathbf{T}(\mathbf{u}) && \text{por linealidad de } \mathbf{F} \text{ y } \mathbf{T}\\ &= k(\mathbf{F}(\mathbf{u})+\mathbf{T}(\mathbf{u})) && \text{por propiedad de la multiplicación por un escalar en } \mathbf{W}\\ &= k(\mathbf{F}+\mathbf{T})(\mathbf{u}) && \text{por definición de suma de aplicaciones}\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{F}+\mathbf{T}$ es una aplicación lineal.

b) Queremos probar que $k\,\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$; $(k\,\mathbf{F})(\mathbf{u})=k\,\mathbf{F}(\mathbf{u})$ es una aplicación lineal. Para ello planteamos:

$$\begin{aligned}(k\mathbf{F})(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= k\,\mathbf{F}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) && \text{por definición de la aplicación } k\mathbf{F}\\ &= k(\mathbf{F}(\mathbf{u})+\mathbf{F}(\mathbf{v})) && \text{por linealidad de } \mathbf{F}\\ &= k\,\mathbf{F}(\mathbf{u})+k\,\mathbf{F}(\mathbf{v}) && \text{por propiedades de la suma de vectores en } \mathbf{W}\\ &= (k\,\mathbf{F})(\mathbf{u})+(k\,\mathbf{F})(\mathbf{v}) && \text{por definición de la aplicación } k\mathbf{F}\end{aligned}$$

Queda como ejercicio para el lector probar que $(k\mathbf{F})(a\,\mathbf{u})=a((k\,\mathbf{F})(\mathbf{u}))$ con $a\in\mathbf{K}$ . #

**Teorema 4.5.2** Sean $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$.

Si $\mathbf{F}:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$ y $\mathbf{T}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ son aplicaciones lineales entonces la aplicación $\mathbf{T}\circ\mathbf{F}$ también lo es.

**Demostración:**

Para probar que $\mathbf{T}\circ\mathbf{F}:\mathbf{U}\to\mathbf{W}$; $(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(\mathbf{u})=\mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{u}))$ es una aplicación lineal, planteamos:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{u}+\mathbf{v})) && \text{por definición de aplicación compuesta}\\
&= \mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{u})+\mathbf{F}(\mathbf{v})) && \text{por linealidad de } \mathbf{F}\\
&= \mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{u}))+\mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{v})) && \text{por linealidad de } \mathbf{T}\\
&= (\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(\mathbf{u})+(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(\mathbf{v}) && \text{por definición de aplicación compuesta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(k\,\mathbf{u}) &= \mathbf{T}(\mathbf{F}(k\,\mathbf{u})) && \text{por definición de aplicación compuesta}\\
&= \mathbf{T}(k\,\mathbf{F}(\mathbf{u})) && \text{por linealidad de } \mathbf{F}\\
&= k\,\mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{u})) && \text{por linealidad de } \mathbf{T}\\
&= k(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(\mathbf{u}) && \text{por definición de aplicación compuesta}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la aplicación $\mathbf{T}\circ\mathbf{F}$ es lineal. #

### 4.5.1 Propiedades de la Composición de Aplicaciones Lineales

a) **Asociatividad:** La composición de aplicaciones es asociativa (no se requiere que sean lineales). Esto es, dadas las aplicaciones

$\mathbf{F}:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$, $\mathbf{T}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ y $\mathbf{H}:\mathbf{W}\to\mathbf{Z}$ se verifica que: $\mathbf{H}\circ(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})=(\mathbf{H}\circ\mathbf{T})\circ\mathbf{F}$.

b) **Distributividad:** Entre aplicaciones lineales, la composición distribuye a izquierda y a derecha sobre la suma, es decir que si

$\mathbf{F}_1:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$, $\mathbf{F}_2:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$, $\mathbf{T}_1:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ y $\mathbf{T}_2:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ son aplicaciones lineales, entonces se verifica que:

a) $\mathbf{T}_1\circ(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2)=\mathbf{T}_1\circ\mathbf{F}_1+\mathbf{T}_1\circ\mathbf{F}_2$ b) $(\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2)\circ\mathbf{F}_1=\mathbf{T}_1\circ\mathbf{F}_1+\mathbf{T}_2\circ\mathbf{F}_1$

c) Además se verifica $k(\mathbf{T}_1\circ\mathbf{F}_1)=(k\,\mathbf{T}_1)\circ\mathbf{F}_1=\mathbf{T}_1\circ(k\,\mathbf{F}_1)$ con $k\in\mathbf{K}$.

Queda como ejercicio para el lector la demostración de las propiedades enunciada en 1.), 2.) y 3.).

d) Sean $\mathbf{F}:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$ y $\mathbf{T}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ aplicaciones lineales inversibles. La aplicación $\mathbf{T}\circ\mathbf{F}$ es inversible y su inversa es $\mathbf{F}^{-1}\circ\mathbf{T}^{-1}$.
Basta verificar que: $(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})\circ(\mathbf{F}^{-1}\circ\mathbf{T}^{-1})=id_{\mathbf{W}}$ y $(\mathbf{F}^{-1}\circ\mathbf{T}^{-1})\circ(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})=id_{\mathbf{U}}$.

- $\left(\mathbf{T}\circ\mathbf{F}\right)\circ\left(\mathbf{F}^{-1}\circ\mathbf{T}^{-1}\right)=\mathbf{T}\circ\left(\mathbf{F}\circ\mathbf{F}^{-1}\right)\circ\mathbf{T}^{-1}=\mathbf{T}\circ id_{\mathbf{V}}\circ\mathbf{T}^{-1}=\left(\mathbf{T}\circ id_{\mathbf{V}}\right)\circ\mathbf{T}^{-1}=\mathbf{T}\circ\mathbf{T}^{-1}=id_{\mathbf{W}}$.
- La segunda relación se verifica de la misma forma, quedando como ejercicio para el lector.

## 4.6. El Vectorial $\mathbf{L}\left(\mathbf{V},\mathbf{W}\right)$

Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$.

Se denota con $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{W}$. Esto es

$$\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})=\{\ \mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}/\ \mathbf{F}\text{ es una aplicación lineal}\}.$$

Si se consideran las operaciones de adición y multiplicación por un escalar que definimos (**Definición 4.5.1 y Teorema 4.5.1**) en el conjunto $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbf{K}$. En efecto,

- El vector nulo de $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ es la aplicación nula: $\mathbf{0}:\mathbf{V}\to\mathbf{W};\quad \mathbf{v}\to\bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{W}}$.
- La aplicación opuesta a $\mathbf{F}\in\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ es $-\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W};\ \mathbf{v}\to-\mathbf{F}(\mathbf{v})$ la cual pertenece a $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$.
- La asociatividad y conmutatividad de la adición en $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ son consecuencia de las propiedades de la adición en $\mathbf{W}$.
  Si $\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H}$ son aplicaciones lineales de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{W}$ se tiene:
  $$\left(\mathbf{F}+\mathbf{G}\right)+\mathbf{H}=\mathbf{F}+\left(\mathbf{G}+\mathbf{H}\right)$$
  $$\mathbf{F}+\mathbf{G}=\mathbf{G}+\mathbf{F}$$
- Análogamente, la definición de las operaciones en $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ y las propiedades de las operaciones vectoriales en $\mathbf{W}$, permiten probar las propiedades siguientes:
  $$\left.\begin{array}{c} k\left(\mathbf{F}+\mathbf{G}\right)=k\,\mathbf{F}+k\,\mathbf{G}\\ (k_1+k_2)\mathbf{F}=k_1\,\mathbf{F}+k_2\,\mathbf{F}\\ (k_1k_2)\,\mathbf{F}=k_1(k_2\,\mathbf{F})\\ 1\mathbf{F}=\mathbf{F}\end{array}\right\}\ \text{para } \mathbf{F},\mathbf{G}\in\mathbf{L}\left(\mathbf{V},\mathbf{W}\right)\ \text{y}\ k_1,k_2\in\mathbf{K}$$

Un cuerpo $\mathbf{K}$ es un espacio vectorial sobre si mismo (de dimensión 1), por lo tanto, pueden definirse aplicaciones lineales de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{K}$ las cuales reciben el nombre de **formas** o **funcionales lineales**.
El espacio vectorial $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{K})=\{\ \mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{K}/\ \mathbf{F}\text{ es una aplicación lineal}\}$ se lo denota $\mathbf{V^*}$ y se lo llama "**espacio dual**" de $\mathbf{V}$.

### 4.6.1. Operadores Lineales

**Definición 4.6.1.1** Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**.

Diremos que $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ es un **operador lineal** sobre **V** si **F** es una aplicación lineal de **V** en **V**.

Denotaremos $\mathbf{L}(\mathbf{V})=\{\,\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}/\ \mathbf{F} \text{ es una aplicación lineal}\}$ al conjunto de los operadores lineales sobre **V** que, con la adición y la multiplicación por escalar definidas en **Definición 4.5.1 y Teorema 4.5.1**, es un espacio vectorial sobre el cuerpo **K**.

La composición de operadores lineales sobre **V** está siempre definida y da por resultado otro operador lineal en **V**, o sea que es también una operación interna en $\mathbf{L}(\mathbf{V})$.

La aplicación **identidad** es elemento neutro para esta operación. En efecto, para cualquier operador lineal $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}(id_{\mathbf{V}}\circ\mathbf{F})(\mathbf{v})=id_{\mathbf{V}}(\mathbf{F}(\mathbf{v}))=\mathbf{F}(\mathbf{v})\\ (\mathbf{F}\circ id_{\mathbf{V}})(\mathbf{v})=\mathbf{F}(id_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}))=\mathbf{F}(\mathbf{v})\end{array}\right\}\quad\forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{V}$$

es decir que $id_{\mathbf{V}}\circ\mathbf{F}=\mathbf{F}\circ id_{\mathbf{V}}=\mathbf{F}$.

Debe observarse que si $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son operadores lineales sobre **V**, en general, $\mathbf{F}\circ\mathbf{G}\neq\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$, es decir que la operación "composición" no es conmutativa.

Las propiedades de la composición de aplicaciones lineales permiten afirmar que $\mathbf{L}(\mathbf{V})$ con las operaciones de adición y composición, tiene estructura de **anillo** (no conmutativo).

Además, si se considera la operación externa de multiplicación por escalar, $\mathbf{L}(\mathbf{V})$ es un **Álgebra Lineal** sobre **K**.

**Ejemplo**

Sean $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ operadores lineales definidos sobre $\mathbb{R}^3$ por:

$$\mathbf{F}((x,y,z))=(x,0,z),\quad \mathbf{G}((x,y,z))=(y,x,z)\,.$$

Observar que $\mathbf{F}\circ\mathbf{G}\neq\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}\circ\mathbf{G})((x,y,z))&=\mathbf{F}(\mathbf{G}((x,y,z)))\\&=\mathbf{F}((y,x,z))\\&=(y,0,z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}\circ\mathbf{F})((x,y,z))&=\mathbf{G}(\mathbf{F}((x,y,z)))\\&=\mathbf{G}((x,0,z))\\&=(0,x,z)\end{aligned}$$

## 4.7. Aplicaciones Lineales y Matrices

### 4.7.1 Aplicaciones Lineales entre Vectoriales de Matrices Columna

Sea **A** una matriz $\mathrm{m}\times\mathrm{n}$ con elementos en el campo **K**. Vimos al comienzo de este capítulo (**Ejemplo 2**) que la "multiplicación por **A**" define una aplicación lineal entre los vectoriales $\mathbf{K}^{n\times 1}$ y $\mathbf{K}^{m\times 1}$, que asigna a cada $\mathbf{X}\in\mathbf{K}^{n\times 1}$ el vector $\mathbf{A}.\mathbf{X}\in\mathbf{K}^{m\times 1}$.

**1.** Consideremos, por ejemplo, la aplicación lineal $\mathbf{L_A}:\mathbb{R}^{3\times 1}\to\mathbb{R}^{2\times 1}$ dada por $\mathbf{L_A}(\mathbf{X})=\mathbf{A}.\mathbf{X}$ con $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&-1\end{bmatrix}$. La aplicación asigna al vector $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ la imagen:

$$\mathbf{L_A}(\mathbf{X})=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&-1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_3\\2x_1+x_2-x_3\end{bmatrix}.$$

Para los vectores $\mathbf{E}^1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{E}^2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{E}^3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ sus imágenes correspondientes son:

$$\mathbf{L_A}(\mathbf{E}^1)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad \mathbf{L_A}(\mathbf{E}^2)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{L_A}(\mathbf{E}^3)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

Notar que las imágenes de los vectores de la base $\mathbf{B}=\left(\mathbf{E}^1,\,\mathbf{E}^2,\,\mathbf{E}^3\right)$ de $\mathbb{R}^{3\times 1}$ son las columnas de la matriz **A**.

**2.** Sea ahora $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{3\times 1}\to\mathbb{R}^{2\times 1}$ la aplicación lineal definida por la asignación:

$$\mathbf{E}^1\to\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix},\quad \mathbf{E}^2\to\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix},\quad \mathbf{E}^3\to\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

con $\mathbf{B}=\left(\mathbf{E}^1,\mathbf{E}^2,\mathbf{E}^3\right)$ base canónica de $\mathbb{R}^{3\times 1}$ .

Si consideramos un vector cualquiera $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 1}$ su imagen correspondiente será:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{X})=\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)&=\mathbf{F}\left(x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\\&=\mathbf{F}\left(x_1\,\mathbf{E}^1+x_2\,\mathbf{E}^2+x_3\,\mathbf{E}^3\right)\\&=x_1\,\mathbf{F}\left(\mathbf{E}^1\right)+x_2\,\mathbf{F}\left(\mathbf{E}^2\right)+x_3\,\mathbf{F}\left(\mathbf{E}^3\right)\\&=x_1\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}4&0&1\\5&2&-1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Es decir que la aplicación **F** puede realizarse mediante la multiplicación por la matriz

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{A}^1\ \mathbf{A}^2\ \mathbf{A}^3\right]$$

cuyas columnas son las imágenes por **F** de los vectores de la base $\mathbf{B} = \left(\mathbf{E}^1, \mathbf{E}^2, \mathbf{E}^3\right)$ de $\mathbb{R}^{3\times1}$.

Ésta es la única matriz que realiza la aplicación **F**.

En efecto, si se tuviera $\mathbf{F(X)} = \mathbf{M}\,.\,\mathbf{X}$ con $\mathbf{M} = \left[\mathbf{M}^1\ \mathbf{M}^2\ \mathbf{M}^3\right]$ resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A}^1 = \mathbf{F}(\mathbf{E}^1) = \mathbf{M}\,.\,\mathbf{E}^1 = \mathbf{M}^1 \\ \mathbf{A}^2 = \mathbf{F}(\mathbf{E}^2) = \mathbf{M}\,.\,\mathbf{E}^2 = \mathbf{M}^2 \\ \mathbf{A}^3 = \mathbf{F}(\mathbf{E}^3) = \mathbf{M}\,.\,\mathbf{E}^3 = \mathbf{M}^3 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} = \mathbf{A}.$$

Lo que hemos observado en los dos ejemplos anteriores, se puede generalizar sin dificultad al caso de una aplicación lineal $\mathbf{F}:\mathbf{K}^{n\times1} \to \mathbf{K}^{m\times1}$ arbitraria.
Si **A** es la matriz cuyas columnas son las imágenes por **F** de los vectores de la base canónica de $\mathbf{K}^{n\times1}$, es decir $\mathbf{A}^j = \mathbf{F}(\mathbf{E}^j)$ para $j = 1,2,\ldots,n$ resulta: $\mathbf{F(X)} = \mathbf{A}\,.\,\mathbf{X}$ siendo **A** la única matriz que realiza **F**.

**Proposición 4.7.1.1** Sean $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbf{K}^{n\times n}$ y $\alpha \in \mathbf{K}$. Se verifican las siguientes propiedades:

a) $\mathbf{L_A} + \mathbf{L_B} = \mathbf{L_{A+B}}$

b) $\mathbf{L_A} \circ \mathbf{L_B} = \mathbf{L_{A.B}}$

c) $\alpha\,\mathbf{L_A} = \mathbf{L}_{\alpha\mathbf{A}}$

**Demostración:**

a) Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{L_A}:\mathbf{K}^{n\times1} \to \mathbf{K}^{n\times1}, \quad \mathbf{L_A(X)} = \mathbf{A}\,.\,\mathbf{X}$$
$$\mathbf{L_B}:\mathbf{K}^{n\times1} \to \mathbf{K}^{n\times1}, \quad \mathbf{L_B(X)} = \mathbf{B}\,.\,\mathbf{X}$$

Planteamos:

$$\left(\mathbf{L_B} + \mathbf{L_A}\right)\mathbf{(X)} = \mathbf{L_A(X)} + \mathbf{L_B(X)} = \mathbf{A}\,.\,\mathbf{X} + \mathbf{B}\,.\,\mathbf{X} = \left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right).\,\mathbf{X} = \mathbf{L_{A+B}(X)} \quad \forall\,\mathbf{X} \in \mathbf{K}^{n\times1}$$

y por lo tanto $\mathbf{L_A} + \mathbf{L_B} = \mathbf{L_{A+B}}$.

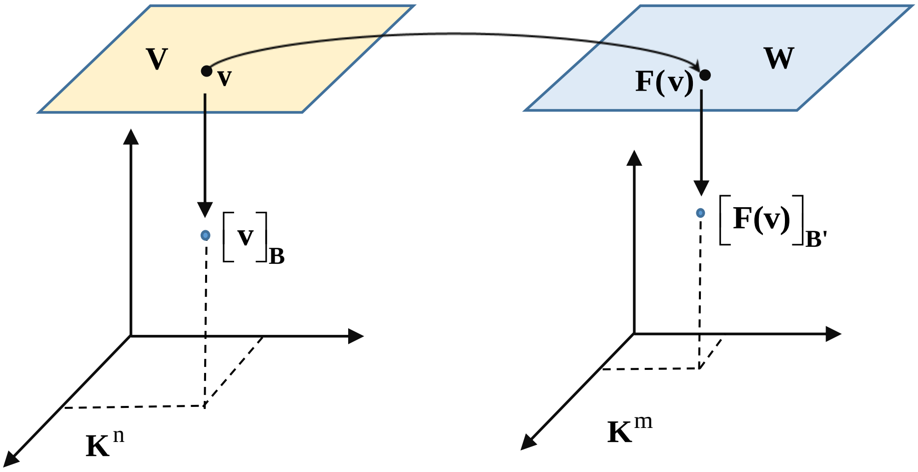
b) y c) quedan como ejercicio para el lector.

### 4.7.2 Matriz de una Aplicación Lineal

Veremos a continuación como cualquier aplicación lineal entre vectoriales de dimensión finita puede realizarse en cierta forma a través de una multiplicación matricial.
La idea básica es trabajar con las matrices de coordenadas de los vectores en vez de hacerlo con los vectores mismos.

> **Teorema 4.7.2.1** Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$, con $dim\,\mathbf{V}=n$ y $dim\,\mathbf{W}=m$. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ una aplicación lineal.
>
> Si $\mathbf{B}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n)$ es una base de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{B'}=(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_m)$ una base de $\mathbf{W}$ entonces existe una única matriz $\mathbf{A}\in\mathbf{K}^{m\times n}$ tal que $[\mathbf{F}(\mathbf{v})]_{\mathbf{B'}}=\mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$

**Demostración:**




Sea $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, teniendo en cuenta que $\mathbf{B}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n)$ es una base de $\mathbf{V}$ se tiene que:

$$\mathbf{v}=x_1\,\mathbf{v}_1+x_2\,\mathbf{v}_2+\cdots+x_n\,\mathbf{v}_n$$

Queremos hallar la imagen por $\mathbf{F}$ de $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{v})=\mathbf{F}(x_1\,\mathbf{v}_1+x_2\,\mathbf{v}_2+\cdots+x_n\,\mathbf{v}_n)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{v})=x_1\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)+x_2\mathbf{F}(\mathbf{v}_2)+\cdots+x_n\mathbf{F}(\mathbf{v}_n)\qquad \text{por ser } \mathbf{F} \text{ lineal}$$

Tomando vectores de coordenadas, se tiene:

$$\begin{aligned}[\mathbf{F}(\mathbf{v})]_{\mathbf{B'}} &= [x_1\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)+x_2\mathbf{F}(\mathbf{v}_2)+\cdots+x_n\mathbf{F}(\mathbf{v}_n)]_{\mathbf{B'}}\\ &= x_1[\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)]_{\mathbf{B'}}+x_2[\mathbf{F}(\mathbf{v}_2)]_{\mathbf{B'}}+\cdots+x_n[\mathbf{F}(\mathbf{v}_n)]_{\mathbf{B'}}\\ &= \underbrace{\Big[[\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)]_{\mathbf{B'}}\;[\mathbf{F}(\mathbf{v}_2)]_{\mathbf{B'}}\cdots[\mathbf{F}(\mathbf{v}_n)]_{\mathbf{B'}}\Big]}_{\mathbf{A}}\,.\,\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}}_{[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left[\mathbf{F(v)}\right]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B}} \qquad \text{donde: } \mathbf{A} = \left[\left[\mathbf{F(v_1)}\right]_{\mathbf{B'}} \left[\mathbf{F(v_2)}\right]_{\mathbf{B'}} \ldots \left[\mathbf{F(v}_n\mathbf{)}\right]_{\mathbf{B'}}\right].$$

**A** es la matriz cuyas columnas son las coordenadas respecto a la base $\mathbf{B'}$ de las imágenes por **F**, de los vectores de la base **B**. En símbolos: $\mathbf{A}^{\mathrm{j}} = \left[\mathbf{F(v_j)}\right]_{\mathbf{B'}}$ $\mathrm{j} = 1, 2, \ldots, n$.

Para probar la unicidad, supongamos que existe $\mathbf{C} \in \mathbf{K}^{\mathrm{m\times n}}$, tal que $\left[\mathbf{F(v)}\right]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{C}.\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B}}$.
Luego

$$\mathbf{A}^1 = \left[\mathbf{F(v_1)}\right]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{C}.\left[\mathbf{v}_1\right]_{\mathbf{B}} = \mathbf{C}.\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} = \mathbf{C}^1 \quad \Rightarrow \mathbf{A}^1 = \mathbf{C}^1$$

De forma similar, se prueba la igualdad para las restantes columnas:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{j}} = \left[\mathbf{F(v_j)}\right]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{C}.\left[\mathbf{v}_{\mathrm{j}}\right]_{\mathbf{B}} = \mathbf{C}.\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\0\\0\end{bmatrix} \begin{matrix}\\\\\leftarrow \text{lugar j}\\\\\\\end{matrix} \quad \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{j}} = \mathbf{C}^{\mathrm{j}}.$$

Por lo tanto $\mathbf{A} = \mathbf{C}$. #

**Definición 4.7.2.1** La matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{\mathrm{m\times n}}$ tal que

$$\mathbf{A} = \left[\left[\mathbf{F(v_1)}\right]_{\mathbf{B'}} \left[\mathbf{F(v_2)}\right]_{\mathbf{B'}} \ldots \left[\mathbf{F(v}_n\mathbf{)}\right]_{\mathbf{B'}}\right]$$

donde: $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ es una aplicación lineal.
Con $\mathbf{B} = \left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\right)$ base de **V** y $\mathbf{B'} = \left(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\right)$ base de **W**.

Se denomina **Matriz de la Aplicación F** con respecto a las bases $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$.
Se denota por: $\mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}\left(\mathbf{F}\right)$.

**Observación:** La matriz de la aplicación lineal **F**, depende de las bases ordenadas $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$. La misma aplicación es representada por distintas matrices respecto a pares de bases distintas.

## Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $\mathbf{F}\left(\left(x_1, x_2, x_3\right)\right) = \left(x_1 + x_2 + x_3, x_2 - x_3\right)$. Se quiere determinar la matriz de **F** con respecto a las bases:

$$\mathbf{B} = \left((1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\right) \text{ y } \mathbf{B'} = \left((1,0), (1,1)\right).$$

Para ello, planteamos:

$$\mathbf{F}\big((1,1,1)\big) = (3,0) = 3.(1,0) + 0.(1,1) \quad \Rightarrow \quad \big[\mathbf{F}\big((1,1,1)\big)\big]_{\mathbf{B'}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}\big((0,1,1)\big) = (2,0) = 2.(1,0) + 0.(1,1) \quad \Rightarrow \quad \big[\mathbf{F}\big((0,1,1)\big)\big]_{\mathbf{B'}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}\big((0,0,1)\big) = (1,-1) = 2.(1,0) + (-1).(1,1) \;\Rightarrow\; \big[\mathbf{F}\big((0,0,1)\big)\big]_{\mathbf{B'}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) = \Big[\big[\mathbf{F}\big((1,1,1)\big)\big]_{\mathbf{B'}} \big[\mathbf{F}\big((0,1,1)\big)\big]_{\mathbf{B'}} \big[\mathbf{F}\big((0,0,1)\big)\big]_{\mathbf{B'}}\Big] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2

Si en el ejemplo anterior consideramos las bases: $\mathbf{B}_1 = \big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$ base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{B'}_1 = \big((0,1), (1,0)\big)$ base de $\mathbb{R}^2$. Resulta:

$$\mathbf{F}(e_1) = \mathbf{F}\big((1,0,0)\big) = (1,0) = 0.(0,1) + 1.(1,0) \;\Rightarrow\; \big[\mathbf{F}(e_1)\big]_{\mathbf{B'}_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(e_2) = \mathbf{F}\big((0,1,0)\big) = (1,1) = 1.(0,1) + 1.(1,0) \;\Rightarrow\; \big[\mathbf{F}(e_2)\big]_{\mathbf{B'}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(e_3) = \mathbf{F}\big((0,0,1)\big) = (1,-1) = (-1).(0,1) + 1.(1,0) \;\Rightarrow\; \big[\mathbf{F}(e_3)\big]_{\mathbf{B'}_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathbf{B'}_1}^{\mathbf{B}_1}(\mathbf{F}) = \Big[\big[\mathbf{F}(e_1)\big]_{\mathbf{B'}_1} \big[\mathbf{F}(e_2)\big]_{\mathbf{B'}_1} \big[\mathbf{F}(e_3)\big]_{\mathbf{B'}_1}\Big] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observar que la misma aplicación es representada por una matriz distinta dado que el par de bases considerado es diferente al del ejemplo 1.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{F}$: $\mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_2$ la aplicación lineal definida por $\mathbf{F}(aX+b) = X(aX+b) = aX^2 + bX$. Se quiere determinar la matriz de $\mathbf{F}$ con respecto a las bases $\mathbf{B} = (X, 1)$ y $\mathbf{B'} = (X^2, X, 1)$ de $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ respectivamente.

Tenemos que:

$$\mathrm{F}(X) = X^2 = 1.X^2 + 0.X + 0 \quad \Rightarrow \big[\mathrm{F}(X)\big]_{\mathbf{B'}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{F}(1) = X = 0.X^2 + 1.X + 0 \quad \Rightarrow \big[\mathrm{F}(X)\big]_{\mathbf{B'}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) = \left[ [\mathbf{F}(X)]_{\mathbf{B'}} \ [\mathbf{F}(1)]_{\mathbf{B'}} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Ejemplo 4

Si en el ejemplo anterior consideramos las bases $\mathbf{B} = (X, 1)$ y $\mathbf{B'}_1 = (X^2, X-1, X+1)$ de $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ respectivamente.

Tenemos:

$\mathbf{F}(X) = X^2 = a.X^2 + b.(X-1) + c.(X+1)$ con $a = 1$ y $b = c = 0$ entonces $[\mathbf{F}(X)]_{\mathbf{B'}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{F}(1) = X = a.X^2 + b.(X-1) + c.(X+1)$ con $a = 0$ y $b + c = 1$ entonces $[\mathbf{F}(1)]_{\mathbf{B'}_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Luego $\quad \mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathbf{B'}_1}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) = \left[ [\mathbf{F}(X)]_{\mathbf{B'}_1} \ [\mathbf{F}(1)]_{\mathbf{B'}_1} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

## Ejemplo 5

Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal y sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ la matriz de $\mathbf{F}$ respecto de las bases $\mathbf{B} = \mathbf{B'} = ((1,2), (0,1))$. Se quiere hallar:

a) $\mathbf{F}((2,5))$.

b) Definición de $\mathbf{F}$, dando $\mathbf{F}((x,y))$.

Resolvamos lo pedido

a) $(2,5) = 2.(1, 2) + 1.(0,1) \Rightarrow [(2,5)]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$[\mathbf{F}((2,5))]_{\mathbf{B'}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{F}((2,5)) = 4.(1,2) + 13.(0,1) = (4,21)$$

b) $(x,y) = x.(1,2) + (y-2x).(0,1) \Rightarrow [(x, y)]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} x \\ y-2x \end{bmatrix}$

$$[\mathbf{F}((x,y))]_{\mathbf{B'}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y-2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 7y-11x \end{bmatrix}$$

Entonces $\mathbf{F}((x,y)) = (2x).(1,2) + (7y-11x).(0,1) = (2x, 7y-7x)$.

## Ejemplo 6

Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal y sea $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ la matriz de $\mathbf{F}$ respecto de las bases $\mathbf{B}=\big((1,2),\,(0,1)\big)$ y $\mathbf{B'}=\big((0,1),\,(1,0)\big)$. Se quiere hallar: $\mathbf{F}\big(\mathbf{(}x,y\mathbf{)}\big)$.

Teniendo en cuenta que $[\mathbf{F(v)}]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$ planteamos:

$$\mathbf{v} = \mathbf{(}x,y\mathbf{)} = x.\mathbf{(}1,2\mathbf{)}+\mathbf{(}y-2x\mathbf{)}.\mathbf{(}0,1\mathbf{)} \;\Rightarrow\; [(x,y)]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} x \\ y-2x \end{bmatrix}$$

Luego se tiene $[\mathbf{F(v)}]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} \;\Rightarrow\; \left[\mathbf{F}\big(\mathbf{(}x,y\mathbf{)}\big)\right]_{\mathbf{B'}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y-2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ -11x+7y \end{bmatrix}$

Finalmente

$$\mathbf{F}\big(\mathbf{(}x,y\mathbf{)}\big) = 2x.(0,1)+(-11x+7y).(1,0) = \big(-11x+7y,\;2x\big)$$

## Ejemplo 7

Sea $\mathbf{F}$: $\mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_2$ la aplicación lineal cuya matriz con respecto a las bases $\mathbf{B}=\big(1,\,X\big)$ y $\mathbf{B'}=\big(X-1,\,X+1,\,X^2\big)$ está dada por $\mathbf{A}=\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}\big(\mathbf{F}\big)=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Se quiere determinar $\mathrm{F}\big(aX+b\big)$.

Consideramos $\mathbf{p}=aX+b\in\mathbf{P}_1$ y hallamos el vector coordenado $[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$.

Luego (teniendo en cuenta que $[\mathbf{F(v)}]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$) planteamos:

$$\left[\mathrm{F}\big(aX+b\big)\right]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.\big[aX+b\big]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ -2a \\ b+\frac{1}{2}a \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{F}\big(aX+b\big) &= \mathbf{(}-b\mathbf{)}.(X-1)+\mathbf{(}-2a\mathbf{)}.(X+1)+\big(b+\tfrac{1}{2}a\big).X^2 \\ &= \big(b+\tfrac{1}{2}a\big).X^2+\big(-b-2a\big).X+\big(b-2a\big)\end{aligned}$$

**Observación:** Si se conoce la **Matriz de la Aplicación F** con respecto a las bases $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$, esto es $\mathbf{A}=\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}\big(\mathbf{F}\big)$, y se desea obtener la imagen por **F** de un vector $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ se procede de la siguiente forma:

a) Se obtiene el vector coordenado de **v** en la base **B**.

b) Se multiplica **A** por $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$, obteniéndose así $[\mathbf{F(v)}]_{\mathbf{B'}}$.

c) Conocido $[\mathbf{F(v)}]_{\mathbf{B'}}$ se reconstruye el vector $\mathbf{F(v)}$.

### 4.7.3 Cambio de Base

Nos interesa plantear y resolver el problema de cómo se modifican las matrices de una aplicación lineal cuando cambian las bases.

> **Teorema 4.7.3.1** Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ de dimensión finita. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ una aplicación lineal.
> Sean $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B_1}$ bases de $\mathbf{V}$, y sea $\mathbf{P}$ la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B_1}$.
> Sean $\mathbf{B'}$ y $\mathbf{B_2}$ bases de $\mathbf{W}$, y sea $\mathbf{Q}$ la matriz de cambio de base de $\mathbf{B'}$ a $\mathbf{B_2}$.
> Si $\mathbf{A}=\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$ es la matriz de la aplicación $\mathbf{F}$ con respecto a las bases $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$ entonces la matriz que representa a $\mathbf{F}$ con respecto a las bases $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ está dada por $\mathbf{Q}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P}=\mathbf{M}_{\mathbf{B_2}}^{\mathbf{B_1}}(\mathbf{F})=\mathbf{C}$.

**Demostración:**

Si $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ se tiene que:

$$\left[\mathbf{F}(\mathbf{v})\right]_{\mathbf{B'}}=\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}).\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B}}=\mathbf{A}.\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B}} \tag{1}$$

$$\left[\mathbf{F}(\mathbf{v})\right]_{\mathbf{B_2}}=\mathbf{M}_{\mathbf{B_2}}^{\mathbf{B_1}}(\mathbf{F}).\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B_1}}=\mathbf{C}.\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B_1}} \tag{2}$$

Por otro lado, considerando que:

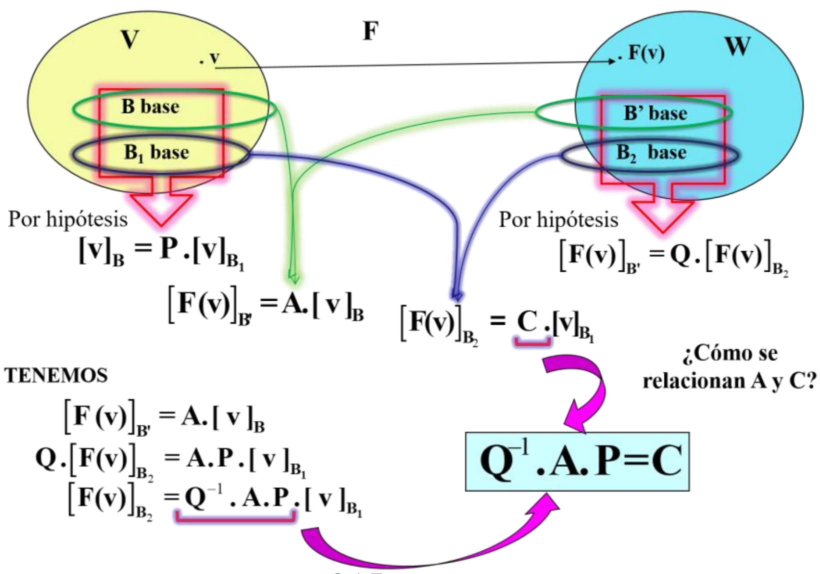
- ✓ $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B_1}$ son bases de $\mathbf{V}$ con $\mathbf{P}$ la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B_1}$ se tiene $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}=\mathbf{P}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B_1}}$.
- ✓ $\mathbf{B'}$ y $\mathbf{B_2}$ son bases de $\mathbf{W}$ con $\mathbf{Q}$ la matriz de cambio de base de $\mathbf{B'}$ a $\mathbf{B_2}$ se tiene $\left[\mathbf{F}(\mathbf{v})\right]_{\mathbf{B'}}=\mathbf{Q}.\left[\mathbf{F}(\mathbf{v})\right]_{\mathbf{B_2}}$.

Reemplazando en (1), obtenemos $\mathbf{Q}.\left[\mathbf{F}(\mathbf{v})\right]_{\mathbf{B_2}}=\mathbf{A}.\mathbf{P}.\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B_1}}$.

Luego $\left[\mathbf{F}(\mathbf{v})\right]_{\mathbf{B_2}}=\mathbf{Q}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P}.\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B_1}}$.

Comparando esta última igualdad con (2) tenemos $\mathbf{Q}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P}=\mathbf{M}_{\mathbf{B_2}}^{\mathbf{B_1}}(\mathbf{F})=\mathbf{C}$. #

**Esquema de lo demostrado**



**Nota Importante:** Cuando se trabaja con operadores lineales $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ y se adopta la misma base para el vectorial **V** como espacio de partida y de llegada, se usa la notación $\mathbf{M_B}(\mathbf{F})$.

En particular si se cambia la base en el vectorial de una base **B** a una base $\mathbf{B'}$, resulta

$$\mathbf{M_{B'}}(\mathbf{F}) = \mathbf{P}^{-1}.\mathbf{M_B}(\mathbf{F}).\mathbf{P}$$

con **P** matriz de cambio de base de **B** a $\mathbf{B'}$.

## Ejemplos

### Ejemplo 1

Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ el operador lineal definido por $\mathbf{F}\big((x_1,x_2)\big)=(x_1+x_2,\, x_1-2x_2)$. La matriz del operador con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ está dada por: $\mathbf{A}=\mathbf{M_B}(\mathbf{F})=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$.

Si ahora se considera la base $\mathbf{B}_1=\big((1,-1),(2,1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$, se quiere hallar $\mathbf{M}_{\mathbf{B}_1}(\mathbf{F})$.

La matriz **P** de cambio de base de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}_1$ está dada por: $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ y en consecuencia $\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & -2/3\\ 1/3 & 1/3\end{bmatrix}$ es la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}$.

Entonces $$\mathbf{M}_{\mathbf{B}_1}(\mathbf{F})=\underbrace{\begin{bmatrix}1/3 & -2/3\\ 1/3 & 1/3\end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^{-1}}.\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}.\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{P}}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

### Ejemplo 2

Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ la aplicación lineal cuya matriz es $\mathbf{M}^{\mathbf{B}}_{\mathbf{B'}}(\mathbf{F})=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$, donde las respectivas bases son: $\mathbf{B}=\big((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\big)$ y $\mathbf{B'}=\big((1,0),(1,1)\big)$.

Si ahora la base **B** cambia por $\mathbf{B}_1=\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ y la base $\mathbf{B'}$ cambia por $\mathbf{B'}_1=\big((0,1),(1,0)\big)$, encontrar la $\mathbf{M}^{\mathbf{B}_1}_{\mathbf{B'}_1}(\mathbf{F})$.

- La matriz **P** de cambio de base de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}_1$ está dada por: $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$

- La matriz **Q** de cambio de base de $\mathbf{B'}$ a $\mathbf{B'}_1$ está dada por: $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{Q}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

Luego $\mathbf{M}^{\mathbf{B}_1}_{\mathbf{B'}_1}(\mathbf{F})=\mathbf{Q}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

### 4.7.4 Aplicación Lineal definida por una Matriz

Hemos visto que toda matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m\times n}$ define una aplicación lineal entre los vectoriales $\mathbf{K}^{n\times 1}$ y $\mathbf{K}^{m\times 1}$ dada por

$$\mathbf{L_A}:\ \mathbf{K}^{n\times 1} \to \mathbf{K}^{m\times 1}, \quad \mathbf{L_A(X) = A.X}$$

Veremos que la misma matriz $\mathbf{A}$ define también una aplicación lineal entre los espacios vectoriales $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ de dimensiones $n$ y $m$ respectivamente a condición de elegir bases $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$ en $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$.

**Teorema 4.7.4.1** Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$, con $dim\,\mathbf{V} = n$ y $dim\,\mathbf{W} = m$. Sean $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{B'} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$ una base de $\mathbf{W}$.

Si $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m\times n}$ entonces existe una aplicación lineal $\mathbf{F_A}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tal que $[\mathbf{F_A(v)}]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$.

**Demostración:**

Sean los isomorfismos definidos por las bases $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$

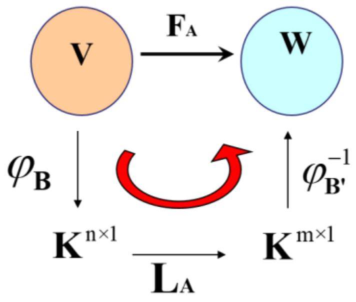
$$\varphi_{\mathbf{B}}: \mathbf{V} \to \mathbf{K}^{n\times 1}, \quad \varphi_{\mathbf{B}}(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$$
$$\varphi_{\mathbf{B'}}: \mathbf{W} \to \mathbf{K}^{m\times 1}, \quad \varphi_{\mathbf{B'}}(\mathbf{w}) = [\mathbf{w}]_{\mathbf{B'}}$$

La matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m\times n}$ define una aplicación lineal entre los vectoriales $\mathbf{K}^{n\times 1}$ y $\mathbf{K}^{m\times 1}$ dada por

$$\mathbf{L_A}:\ \mathbf{K}^{n\times 1} \to \mathbf{K}^{m\times 1}, \quad \mathbf{L_A(X) = A.X}$$

Definimos la aplicación lineal entre $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ por:

$$\mathbf{F_A}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$$
$$\mathbf{F_A} = \varphi_{\mathbf{B'}}^{-1} \circ \mathbf{L_A} \circ \varphi_{\mathbf{B}}$$




$\mathbf{F_A}$ verifica la relación $[\mathbf{F_A(v)}]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$, pues si $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se tiene:

$$\mathbf{F_A(v)} = \left(\varphi_{\mathbf{B'}}^{-1} \circ \mathbf{L_A} \circ \varphi_{\mathbf{B}}\right)(\mathbf{v}) = \varphi_{\mathbf{B'}}^{-1}\left(\mathbf{L_A}\left(\varphi_{\mathbf{B}}(\mathbf{v})\right)\right) = \varphi_{\mathbf{B'}}^{-1}\left(\mathbf{L_A}\left([\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}\right)\right) = \varphi_{\mathbf{B'}}^{-1}\left(\mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}\right)$$

lo que equivale a decir:

$$\varphi_{\mathbf{B'}}\left(\mathbf{F_A(v)}\right) = [\mathbf{F_A(v)}]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}. \ \#$$

**Observación:** Es inmediato que $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F_A}) = \mathbf{A}$.

### 4.7.5 Isomorfismo entre $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ y $\mathbf{K}^{m\times n}$

Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$, con $dim\,\mathbf{V}=n$ y $dim\,\mathbf{W}=m$.

La elección de bases $\mathbf{B}$ en $\mathbf{V}$ y $\mathbf{B'}$ en $\mathbf{W}$ permite asignar a cada aplicación lineal $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ una matriz bien determinada.

Queda así definida una aplicación entre los espacios vectoriales $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ (conjunto de aplicaciones lineales de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{W}$) y $\mathbf{K}^{m\times n}$ que denotaremos: $\mathcal{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}$

Esto es $\mathcal{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}:\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})\to\mathbf{K}^{m\times n}$, $\quad \mathbf{F}\to\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$.

**Teorema 4.7.5.1** Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$, con $dim\,\mathbf{V}=n$ y $dim\,\mathbf{W}=m$. Sean $\mathbf{B}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n)$ es una base de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{B'}=(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_m)$ una base de $\mathbf{W}$. La aplicación

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}:\ \mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})&\to\mathbf{K}^{m\times n}\\ \mathbf{F}&\to\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})\end{aligned}$$

es un isomorfismo.

**Demostración:**

Para demostrar el teorema, se procederá a probar que la aplicación $\mathcal{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}$ es una aplicación lineal biyectiva.

**1.** Probaremos que la función $\mathcal{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}$ es una aplicación lineal. Para ello debemos verificar que:

a) $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}+\mathbf{T})=\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})+\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{T})$

b) $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(k\,\mathbf{F})=k\,\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$

para todo $\mathbf{F},\mathbf{T}\in\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$; $k\in\mathbf{K}$.

Veamos a)

Sean $\mathbf{F}$ y $\mathbf{T}$ aplicaciones lineales de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{W}$ y sea $k\in\mathbf{K}$. Sabemo***s*** que las aplicaciones $\mathbf{F}+\mathbf{T}$ y $k\,\mathbf{F}$ son lineales.

Sean $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})=\mathbf{A}$ y $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{T})=\mathbf{C}$ que verifican $[\mathbf{F(v)}]_{\mathbf{B'}}=\mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$ y $[\mathbf{T(v)}]_{\mathbf{B'}}=\mathbf{C}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$ (*)

Para todo $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, se tiene que $(\mathbf{F}+\mathbf{T})\mathbf{(v)}=\mathbf{F(v)}+\mathbf{T(v)}$ (por definición de $\mathbf{F}+\mathbf{T}$)

Tomando vectores de coordenadas, se tiene:

$$[(\mathbf{F}+\mathbf{T})\mathbf{(v)}]_{\mathbf{B'}}=[\mathbf{F(v)}]_{\mathbf{B'}}+[\mathbf{T(v)}]_{\mathbf{B'}}$$

Reemplazando (*) en la expresión anterior resulta:

$$[(\mathbf{F}+\mathbf{T})\mathbf{(v)}]_{\mathbf{B'}}=\mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}+\mathbf{C}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$$

la propiedad distributiva de la multiplicación de matrices permite escribir:

$$\left[\left(\mathbf{F}+\mathbf{T}\right)(\mathbf{v})\right]_{\mathbf{B}'}=(\mathbf{A}+\mathbf{C}).\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B}}$$

Esta última igualdad muestra que $(\mathbf{A}+\mathbf{C})$ es la matriz de la aplicación $\left(\mathbf{F}+\mathbf{T}\right)$ o sea:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}\left(\mathbf{F}+\mathbf{T}\right)=\mathbf{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}\left(\mathbf{F}\right)+\mathbf{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}\left(\mathbf{T}\right).$$

c) La prueba queda como ejercicio para el lector.

**2.** Probaremos que la aplicación $\mathcal{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}$ es una biyección o sea: $\mathcal{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}$ es suryectiva e inyectiva.

- Teniendo en cuenta el **Teorema 4.7.4.1** toda matriz $\mathbf{A}\in\mathbf{K}^{m\times n}$ define una aplicación lineal $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ tal que $\mathbf{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}\left(\mathbf{F}\right)=\mathbf{A}$. Esto muestra que $\mathcal{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}$ es suryectiva.

- Para ver que $\mathcal{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}$ es una aplicación inyectiva mostraremos que su núcleo se reduce a $\left\{\overline{\mathbf{0}}_{\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})}\right\}$ (es decir el único vector del núcleo de $\mathcal{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}$ es la aplicación nula).

Sea $\mathbf{F}$ una aplicación lineal perteneciente al núcleo de $\mathcal{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}$. Por lo tanto su matriz es la matriz nula, es decir $\mathbf{0}=\mathbf{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}\left(\mathbf{F}\right)$.

Entonces, para todo $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ se tiene $\left[\mathbf{F}(\mathbf{v})\right]_{\mathbf{B}'}=\mathbf{0}.\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$.

Luego $\mathbf{F}(\mathbf{v})=\mathbf{0}_{\mathbf{W}}$ y por consiguiente $\mathbf{F}$ es la aplicación nula.

De lo probado en **1.** y **2.** se tiene que la aplicación

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}:\ \mathbf{L}\left(\mathbf{V},\mathbf{W}\right)&\to\mathbf{K}^{m\times n}\\ \mathbf{F}&\to\mathbf{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}\left(\mathbf{F}\right)\end{aligned}\quad \text{es un isomorfismo. \#}$$

**Observación:** Por ser isomorfos los espacios vectoriales $\mathbf{L}\left(\mathbf{V},\mathbf{W}\right)$ y $\mathbf{K}^{m\times n}$, éstos tiene igual dimensión y por lo tanto:

$$\dim\mathbf{L}\left(\mathbf{V},\mathbf{W}\right)=\dim\mathbf{K}^{m\times n}=m\times n=\dim\mathbf{W}.\dim\mathbf{V}.$$

### 4.7.6 Matriz de la Compuesta de Aplicaciones Lineales

**Teorema 4.7.6.1** Sean $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$, de dimensión finita. Sea $\mathbf{B}=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n)$ una base de $\mathbf{U}$, $\mathbf{B'}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_p)$ una base de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{B''}=(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_m)$ una base de $\mathbf{W}$. Si se tiene las aplicaciones lineales

$$\mathbf{F}:\mathbf{U}\to\mathbf{V} \quad \text{con} \quad \mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})=\mathbf{A}$$

$$\mathbf{T}:\mathbf{V}\to\mathbf{W} \quad \text{con} \quad \mathbf{M}_{\mathbf{B''}}^{\mathbf{B'}}(\mathbf{T})=\mathbf{C}$$

Entonces la matriz de la aplicación compuesta $\mathbf{T}\circ\mathbf{F}:\ \mathbf{U}\to\mathbf{W}$ está dada por:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B''}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})=\mathbf{C}.\mathbf{A}=\mathbf{M}_{\mathbf{B''}}^{\mathbf{B'}}(\mathbf{T}).\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$$

**Demostración:**

Para todo $\mathbf{u}\in\mathbf{U}$ se tiene, por definición de aplicación compuesta, que:

$$(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(\mathbf{u})=\mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{u}))$$

Tomando vectores de coordenadas, tenemos:

$$[(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(\mathbf{u})]_{\mathbf{B''}}=[\mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{u}))]_{\mathbf{B''}}$$

Pero se sabe que $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})=\mathbf{A}$ y $\mathbf{M}_{\mathbf{B''}}^{\mathbf{B'}}(\mathbf{T})=\mathbf{C}$ , por lo tanto se tiene:

$$[\mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{u}))]_{\mathbf{B''}}=\mathbf{C}.[\mathbf{F}(\mathbf{u})]_{\mathbf{B'}} \quad \text{y} \quad [\mathbf{F}(\mathbf{u})]_{\mathbf{B'}}=\mathbf{A}.[\mathbf{u}]_{\mathbf{B}}.$$

Reemplazando en (*), obtenemos:

$$[(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(\mathbf{u})]_{\mathbf{B''}}=\mathbf{C}.\mathbf{A}.[\mathbf{u}]_{\mathbf{B}}$$

Luego:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B''}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})=\mathbf{C}.\mathbf{A}=\mathbf{M}_{\mathbf{B''}}^{\mathbf{B'}}(\mathbf{T}).\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}).\ \#$$

**Ejemplos**

Ejemplo 1

Sean las aplicaciones lineales $\mathbf{F}:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$ y $\mathbf{L}:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$ tales que

$$\mathbf{A}=\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})=\begin{bmatrix}2&1&3\\1&0&4\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{D}=\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{L})=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{bmatrix}.$$

- La matriz de la aplicación lineal $(\mathbf{F}+\mathbf{L})$ es:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}+\mathbf{L})=\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})+\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{L})=\begin{bmatrix}2&1&3\\1&0&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&6\\5&-1&4\end{bmatrix}$$

- La matriz de la aplicación lineal $(2\,\mathbf{F})$ es:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}(2\mathbf{F}) = 2.\mathbf{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) = 2.\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Sean las aplicaciones lineales $\mathbf{F}:\ \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ y $\mathbf{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tales que

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \mathbf{M}_{\mathbf{B}''}^{\mathbf{B}'}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- La matriz de la aplicación lineal compuesta $(\mathbf{T} \circ \mathbf{F})$ es:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B}''}^{\mathbf{B}}(\mathbf{T} \circ \mathbf{F}) = \mathbf{M}_{\mathbf{B}''}^{\mathbf{B}'}(\mathbf{T}).\mathbf{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

### 4.7.7 Matriz del Operador Identidad

Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbf{K}$, con $dim\mathbf{V} = n$ y sea $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base de $\mathbf{V}$. Consideremos el operador identidad $id_{\mathbf{V}}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $id_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

$$id_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}_1) = 1.\mathbf{v}_1 + 0.\mathbf{v}_2 + \cdots + 0.\mathbf{v}_n \quad \Rightarrow \quad [id_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}_1)]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$id_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}_2) = 0.\mathbf{v}_1 + 1.\mathbf{v}_2 + \cdots + 0.\mathbf{v}_n \quad \Rightarrow \quad [id_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}_2)]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ etc.}$$

Luego

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(id_{\mathbf{V}}) = \mathbf{M}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{B}}(id_{\mathbf{V}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_n \ \textbf{matriz identidad}.$$

**IMPORTANTE:** Si se adoptan bases distintas para el vectorial **V** como espacio de partida y de llegada, la matriz que representa al operador identidad deja de ser la matriz identidad.

### 4.7.8 Isomorfismo entre las Estructuras de Álgebra de $\mathbf{L}(\mathbf{V})$ y $\mathbf{K}^{n\times n}$

Sean $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbf{K}$, con $dim\mathbf{V} = n$.

Sea la base $\mathbf{B}$ en $\mathbf{V}$, ésta permite asignar a cada operador lineal $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una matriz bien determinada.

Entonces, la aplicación

$$\mathscr{M}_{\mathbf{B}}: \mathbf{L(V)} \to \mathbf{K}^{n\times n}$$
$$\mathbf{F} \to \mathbf{M_B}(\mathbf{F})$$

no es sino un caso particular del **Teorema 4.7.5.1**, luego $\mathscr{M}_{\mathbf{B}}$ es un isomorfismo entre los vectoriales $\mathbf{L(V)}$ y $\mathbf{K}^{n\times n}$.

Además, si $\mathbf{F}$ y $\mathbf{T}$ son operadores lineales sobre $\mathbf{V}$, la compuesta siempre está definida y resulta (**Teorema 4.7.6.1**):

$$\mathbf{M_B}(\mathbf{T} \circ \mathbf{F}) = \mathbf{M_B}(\mathbf{T}).\mathbf{M_B}(\mathbf{F})$$

Estonces, la biyección $\mathscr{M}_{\mathbf{B}}$ no sólo preserva la estructura vectorial de $\mathbf{L(V)}$ y $\mathbf{K}^{n\times n}$ sino que transforma la composición de operadores en multiplicación de sus correspondientes matrices y hace corresponder el elemento neutro de la composición de operadores en el elemento neutro de la multiplicación de matrices.

Luego decimos es un **isomorfismo de álgebra** entre $\mathbf{L(V)}$ y $\mathbf{K}^{n\times n}$.

Resulta también que

> **Teorema 4.7.8.1** Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbf{K}$, de dimensión finita y sea $\mathbf{B}$ una base de $\mathbf{V}$.
>
> El operador lineal $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ con $\mathbf{M_B}(\mathbf{F}) = \mathbf{A}$ es inversible sí y sólo si la matriz que lo representa lo es.

**Demostración:**

Si $\mathbf{F}$ es inversible, existe $\mathbf{F}^{-1}$ tal que $\mathbf{F} \circ \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F} = id_{\mathbf{V}}$. Luego

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{M_B}(id_{\mathbf{V}}) = \mathbf{M_B}(\mathbf{F} \circ \mathbf{F}^{-1}) = \mathbf{M_B}(\mathbf{F}).\mathbf{M_B}(\mathbf{F}^{-1})$$
$$\mathbf{I}_n = \mathbf{M_B}(id_{\mathbf{V}}) = \mathbf{M_B}(\mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F}) = \mathbf{M_B}(\mathbf{F}^{-1}).\mathbf{M_B}(\mathbf{F})$$

De donde

$$\mathbf{M_B}(\mathbf{F}^{-1}) = (\mathbf{M_B}(\mathbf{F}))^{-1}$$

Esto es, si $\mathbf{A}$ es la matriz del operador inversible $\mathbf{F}$, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ es la matriz correspondiente al operador $\mathbf{F}^{-1}$. #

Se ha establecido una correspondencia entre aplicaciones lineales y matrices la cual depende de las bases elegidas en los espectivos espacios vectoriales de partida y llegada. Esto permite agilizar los cálculos al transformar, por ejemplo, la composición de aplicaciones en una multiplicación matricial, o la búsqueda de la inversa de una aplicación lineal con la de la inversa de una matriz, con el agregado que se han desarrollado software como el MATLAB sumamente aptos para el manipuleo de las matrices.

El paso siguiente, será ver la posibilidad de elegir bases convenientes para que la matriz que representa la aplicación lineal sea lo más sencilla posible.

En particular, se estudiará el caso de un operador lineal y las condiciones para que pueda ser representado en alguna base por una matriz diagonal.

## 4.8. Valores y Vectores Propios de un Operador Lineal

Sean $\mathbf{F}$ y $\mathbf{T}$ operadores lineales del espacio vectorial **V**.

Nos planteamos el siguiente problema: ¿Qué vectores de **V** tienen la misma imagen por **F** y por **T**?

Esto es, para que $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se verifica que $\mathbf{F(v) = T(v)}$.

Entonces $$\mathbf{F(v) - T(v) = \bar{0}_V} \Leftrightarrow \mathbf{(F-T)(v) = \bar{0}_V}$$

Es decir, que el conjunto de vectores $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ para los cuales $\mathbf{F(v) = T(v)}$ es el núcleo del operador diferencia $\mathbf{(F-T)}$.

Por lo tanto, el conjuto de vectores de $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ para los cuales $\mathbf{F(v) = T(v)}$ es un subespacio:

$$\mathbf{N_{F-T}} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} / \ \mathbf{F(v) = T(v)}\} \ .$$

**Ejemplos**

Ejemplo 1

Sean los operadores lineales

$$\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{F}\big(\mathbf{(}x_1, x_2\mathbf{)}\big) = \mathbf{(}x_1 + 4x_2,\ x_1 + x_2\mathbf{)}$$

$$\mathbf{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{T}\big(\mathbf{(}x_1, x_2\mathbf{)}\big) = \mathbf{(}\text{-}x_1 + 5x_2, \text{-}3x_1 + 3x_2\mathbf{)}$$

El operador diferencia está definido por:

$$\big(\mathbf{F}-\mathbf{T}\big)\big(\mathbf{(}x_1, x_2\mathbf{)}\big) = \mathbf{(}2x_1 - x_2, 4x_1 - 2x_2\mathbf{)}$$

El núcleo de $\mathbf{(F-T)}$ es el subespacio $\mathbf{N_{F\text{-}T}} = \langle (1,2) \rangle$.

Entonces para todos los vectores de $\mathbf{N_{F\text{-}T}}$ se verifica que $\mathbf{F(w) = T(w)}$.

Las consideraciones anteriores son de particular utilidad en el caso que la acción de **T** sobre los elementos de **V** sea más simple que analizar la acción de **F**.

En especial se tomará en cuenta el caso en que **T** es un múltiplo escalar del operador identidad, es decir:

$$\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}=\lambda.id:\mathbf{V}\to\mathbf{V} \quad \text{con} \quad \lambda\in \mathrm{K}$$
$$\mathbf{v}\to\lambda\,\mathbf{v}$$

Buscar el conjunto de vectores para los cuales $\mathbf{F(v)}=(\lambda.id)\mathbf{(v)}=\lambda\,\mathbf{v}$ es estudiar qué vectores tienen como imagen por **F** un múltiplo escalar (fijo) del mismo vector.

Denotaremos $\mathbf{V}_\lambda$ al conjunto de estos vectores, es decir: $\mathbf{V}_\lambda = \{\mathbf{v}\in\mathbf{V}/\ \mathbf{F(v)}=\lambda\,\mathbf{v}\}$

De acuerdo al análisis realizado resulta: $\mathbf{V}_\lambda$ = Núcleo de $(\mathbf{F}-\lambda.id)$.

**Definición 4.8.1** Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ operador lineal.

Diremos que $\lambda\in\mathbf{K}$ es **valor propio** del operador **F** sí y sólo si existe algún vector $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, $\mathbf{v}\neq\bar{\mathbf{0}}$ tal que $\mathbf{F(v)}=\lambda\,\mathbf{v}$.

**Definición 4.8.2** Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ operador lineal.

Si $\lambda\in\mathbf{K}$ es valor propio del operador **F**, el subespacio $\mathbf{V}_\lambda = \{\mathbf{v}\in\mathbf{V}/\ \mathbf{F(v)}=\lambda\,\mathbf{v}\}$ se llama **subespacio propio** asociado a $\lambda$.

**Definición 4.8.3** Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ operador lineal.

Si $\lambda\in\mathbf{K}$ es valor propio del operador **F**, todo $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, $\mathbf{v}\neq\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}$ perteneciente a $\mathbf{V}_\lambda$ se llama **vector propio** del operador **F** asociado a $\lambda$.

### 4.8.1 Caracterización de los Valores Propios de un Operador Lineal

**Teorema 4.8.1.1** Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ operador lineal.

$\lambda$ es valor propio de **F** sí y sólo si Núcleo de $(\mathbf{F}-\lambda.id)\neq\{\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}\}$.

**Demostración:**

$\lambda \in \mathbf{K}$ es valor propio del operador $\mathbf{F}$ sí y sólo si existe $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{v} \neq \bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{V}}$ tal que $\mathbf{F(v)} = \lambda\, \mathbf{v}$ sí y sólo si el subespacio $\mathbf{V}_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} / \ \mathbf{F(v)} = \lambda\, \mathbf{v}\} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} / \ (\mathbf{F} - \lambda.id)(\mathbf{v}) = \bar{\mathbf{0}}\}$ tiene algún vector no nulo sí y sólo si $\mathbf{V}_\lambda$ = Núcleo de $(\mathbf{F} - \lambda.id_{\mathbf{V}}) \neq \{\bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{V}}\}$. #

**Nota:** Del teorema anterior resulta que
$\lambda$ es valor propio de **F** sí y sólo si $(\mathbf{F} - \lambda.id)$ **no es inyectivo**.

**Teorema 4.8.1.2** Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K** de dimensión finita.

Sea $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ operador lineal. $\mathbf{M_B}(\mathbf{F}) = \mathbf{A}$, $\lambda \in \mathbf{K}$.

$\lambda$ es valor propio de **F** sí y sólo si $det(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$.

**Demostración:**

Sabemos que $\lambda$ es valor propio de **F** sí y sólo si Núcleo de $(\mathbf{F} - \lambda.id) \neq \{\bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{V}}\}$.

**V** es de dimensión finita, por **Teorema 4.4.1**, **inyectividad** del operador **F** equivale a **suryectividad**. Luego un operador lineal inyectivo es también **biyectivo** y por consiguiente, **inversible**.

Por lo tanto, se verifica que:

$$\text{Núcleo de } (\mathbf{F} - \lambda.id) \neq \{\bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{V}}\} \iff (\mathbf{F} - \lambda.id) \text{ no es inversible}.$$

Sea **B** una base de **V** y sean las matrices $\mathbf{M_B}(\mathbf{F}) = \mathbf{A}$ e $\mathbf{M_B}(id) = \mathbf{I}$ (matriz identidad).

Resulta entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{M_B}(\mathbf{F} - \lambda.id) &= \mathbf{M_B}(\mathbf{F}) - \mathbf{M_B}(\lambda.id) \\ &= \mathbf{M_B}(\mathbf{F}) - \lambda.\mathbf{M_B}(id) \\ &= \mathbf{A} - \lambda.\mathbf{I} \end{aligned}$$

Recordando que:

- un operador lineal es inversible sí y sólo si la matriz que lo representa, en cualquier base, es inversible (**Teorema 4.7.8.1**) y que
- una matriz es inversible sí y sólo si su determinante es distinto de cero, podemos escribir:

$$(\mathbf{F} - \lambda.id) \text{no es inversible} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda.\mathbf{I}) \text{no es inversible} \Leftrightarrow det(\mathbf{A} - \lambda.\mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow det(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

Por lo tanto $\lambda$ es valor propio de **F** sí y sólo si $det(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. #

Teniendo en cuenta este teorema, resulta algo muy importante: los valores propios de un operador lineal no son sino los valores propios de la matriz **A** que lo representa respecto a alguna base.

Luego, todos los mecanismos implementados para obtención de los valores y vectores propios de una matriz pueden ser usados para el cálculo de los valores y vectores propios de un operador lineal con sólo fijar una base en el espacio vectorial y determinar la matriz **A** del operador respecto de esa base.

**Ejemplos**

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$ y sea el operador lineal $\mathbf{F}\colon\ \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ definido por

$$\mathbf{F}\left(a+bX+cX^2\right)=a+(a+2b+c)X+(a+4c)X^2$$

Se quieren determinar los valores propios de **F**, así como los correspondientes vectores propios y subespacios propios asociados.

Consideramos $\mathbf{B}=\left(1,\ X,\ X^2\right)$ base de $\mathbf{P}_2$.

Luego: $$\mathbf{M_B}(\mathbf{F})=\mathbf{A}=\left[\left[\mathbf{F}(1)\right]_\mathbf{B}\left[\mathbf{F}(X)\right]_\mathbf{B}\left[\mathbf{F}\left(X^2\right)\right]_\mathbf{B}\right]=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&1\\1&0&4\end{bmatrix}$$

- Obtención de la ecuación característica

$$\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-1\\-1&0&\lambda-4\end{bmatrix}\Rightarrow\ det\,(\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A})=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)=0$$

- Determinación de los Valores propios de **F**

$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)=0\ \Rightarrow\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=4$ son los valores propios de **F**.

- Determinación de los subespacios propios

**- Subespacio propio para $\lambda_1=1$:**

$$1.\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&-1&-1\\-1&0&-3\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&-1&-1\\-1&0&-3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\qquad(1)$$

El subespacio de soluciones del sistema (1), como subespacio de $\mathbb{R}^{3\times1}$, resulta: $\mathbf{S}_1=\left\langle\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}\right\rangle$.

**Importante!!** $\mathbf{S}_1$ es el subespacio propio de la matriz **A** y corresponde a los vectores coordenados de los vectores propios correspondientes al operador **F** respecto a la base **B**.

El polinomio $\mathbf{p}\in\mathbf{P}_2$ tal que $[\mathbf{p}]_\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}$ es $\mathbf{p}=-3+2X+X^2$. Luego $\underline{\mathbf{V}_1=\left\langle-3+2X+X^2\right\rangle}$.

**- Subespacio propio para $\lambda_2 = 2$:**

$$2.\mathbf{I}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

El subespacio de soluciones del sistema (2), como subespacio de $\mathbb{R}^{3\times1}$, resulta: $\mathbf{S}_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.

El polinomio $\mathbf{p} \in \mathbf{P}_2$ tal que $[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es $\mathbf{p} = X$. Por lo tanto, $\underline{\mathbf{V}_2 = \langle X \rangle}$.

**- Subespacio propio para $\lambda_3 = 4$:**

$$4.\mathbf{I}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

El subespacio de soluciones del sistema (3), como subespacio de $\mathbb{R}^{3\times1}$, resulta: $\mathbf{S}_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ .

El polinomio $\mathbf{p}$ tal que $[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es $\mathbf{p} = X + 2X^2$. En consecuencia $\underline{\mathbf{V}_4 = \langle X + 2X^2 \rangle}$.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times2}$ y sea el operador lineal $\mathbf{F}: \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^{2\times2}$ definido por

$$\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a & b \\ b & c+d \end{bmatrix}$$

Se quieren determinar los valores propios de **F**, así como los correspondientes vectores propios y subespacios propios asociados.

Consideramos $\mathbf{B} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ base de $\mathbb{R}^{2\times2}$.

Luego:

$$\mathbf{M_B}(\mathbf{F}) = \mathbf{A} = \left[ \left[\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right]_{\mathbf{B}} \left[\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right]_{\mathbf{B}} \left[\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\right]_{\mathbf{B}} \left[\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right]_{\mathbf{B}} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Obtención de la ecuación característica

$$\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \ det\,(\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \lambda(\lambda-2)(\lambda-1)^2 = 0$$

- Determinación de los Valores propios de **F**

$$\lambda(\lambda-2)(\lambda-1)^2=0 \;\Rightarrow\; \lambda_1=0,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=1 \text{ son los valores propios de } \mathbf{F}.$$

- Determinación de los subespacios propios

**- Subespacio propio para** $\lambda_1=0$

$$0.\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&-1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-2&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad (1)$$

$\mathbf{S}_0=\left\langle\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\rangle$ es el subespacio de soluciones del sistema (1).

Entonces la matriz $\mathbf{D}\in\mathbb{R}^{2\times2}$ tal que $[\mathbf{D}]_\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$ resulta $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0&0\\-1&1\end{bmatrix}$. Luego $\underline{\mathbf{V}_0=\left\langle\begin{bmatrix}0&0\\-1&1\end{bmatrix}\right\rangle}$.

**- Subespacio propio para** $\lambda_2=2$

$$2.\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-1&2&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-1&2&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad (2)$$

$\mathbf{S}_2=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\rangle$ es el subespacio de soluciones del sistema (2).

Entonces la matriz $\mathbf{E}\in\mathbb{R}^{2\times2}$ tal que $[\mathbf{E}]_\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ resulta $\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$. Luego $\underline{\mathbf{V}_2=\left\langle\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right\rangle}$.

**- Subespacio propio para** $\lambda_3=1$

$$1.\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad (3)$$

$\mathbf{S}_1=\left\langle\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle$ es el subespacio de soluciones del sistema (3).

Entonces la matriz $\mathbf{G}\in\mathbb{R}^{2\times2}$ tal que $[\mathbf{G}]_\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ es $\mathbf{G}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$. Entonces $\underline{\mathbf{V}_1=\left\langle\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\rangle}$.

### 4.8.2 Operadores Diagonalizables

> **Definición 4.8.2.1** Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K** de dimensión finita. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ operador lineal.
>
> Decimos que **F** es **diagonalizable** sí y sólo si existe una base de **V** formada por vectores propios de **F**.

Supongamos que **V** es de dimensión finita "$n$" y que $\mathbf{B}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n)$ una base de **V** formada por vectores propios del operador lineal **F** asociados respectivamente a $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$.
Resulta, $\mathbf{F}(\mathbf{v}_i)=\lambda_i\,\mathbf{v}_i$ para $i=1,2,\ldots,n$.
Luego

$$\left.\begin{array}{l}
\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)=\lambda_1\,\mathbf{v}_1\Rightarrow[\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)]_{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}\lambda_1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\\
\mathbf{F}(\mathbf{v}_2)=\lambda_2\,\mathbf{v}_2\Rightarrow[\mathbf{F}(\mathbf{v}_2)]_{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}0\\\lambda_2\\\vdots\\0\end{bmatrix}\\
\qquad\qquad\vdots\\
\mathbf{F}(\mathbf{v}_n)=\lambda_n\,\mathbf{v}_n\Rightarrow[\mathbf{F}(\mathbf{v}_n)]_{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\\lambda_n\end{bmatrix}
\end{array}\right\}\text{entonces }\mathbf{M_B}(\mathbf{F})=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{bmatrix}=\mathbf{D}\,\text{(matriz diagonal).}$$

Por consiguiente:

> **Definición 4.8.2.1** Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**, $dim\,\mathbf{V}=n$.
> Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ operador lineal.
>
> **F** es **diagonalizable** sí y sólo si existe una base **B'** de **V** tal que $\mathbf{M_{B'}}(\mathbf{F})=\mathbf{D}$ (matriz diagonal).

Teniendo en cuenta la forma en que están vinculadas las matrices del operador cuando se cambia de una base **B** a una base **B'**, se puede concluir:

> **F** es diagonalizable si lo es la matriz **A** que representa al operador respecto a alguna base **B**, esto es, si existe **P** inversible tal que $\mathbf{D}=\mathbf{P}^{-1}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{P}$.

Los vectores columna de la matriz **P** son los vectores coordenados respecto a la base **B** de los vectores que forman la nueva base **B'**.

**Ejemplos**

Ejemplo 1

En el ejemplo 1 de la sección anterior, trabajamos con el operador lineal $\mathbf{F}:\ \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ definido por

$$\mathbf{F}\left(a+bX+cX^2\right)=a+(a+2b+c)X+(a+4c)X^2$$

Obtuvimos $\mathbf{B'}=\left(-3+2X+X^2,\, X,\, X+2X^2\right)$ una base de $\mathbf{P_2}$ formada por vectores propios de **F**.

La matriz que representa al operador respecto a dicha base resulta: $\mathbf{M_{B'}}\left(\mathbf{F}\right)=\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$

Se puede verificar fácilmente que $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}-3&0&0\\2&1&1\\1&0&2\end{bmatrix}$ cumpliéndose que: $\mathbf{D}=\mathbf{P}^{-1}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{P}$ .

Ejemplo 2

En el ejemplo 2 de la sección anterior, consideramos el operador lineal $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$ definido por

$$\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2a&b\\b&c+d\end{bmatrix}$$

El operador F no es diagonalizable pues $\mathbf{M_B}\left(\mathbf{F}\right)=\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ (B base canónica de $\mathbb{R}^{2\times2}$) no es una matriz diagonalizable.

## 4.9. Algunas Aplicaciones

### 4.9.1. Ecuaciones Diferenciales

Muchas leyes de la Física, Química, Biología y Economía están descriptas en términos de ecuaciones diferenciales, esto es, ecuaciones en las que aparecen funciones y sus derivadas.

Una de las ecuaciones diferenciales más simples es $y'=a\,y$ donde $y=\boldsymbol{f}(x)$ es la función desconocida a determinar y $a$ es una constante.

Esta ecuación se resuelve muy fácilmente:

$$\frac{dy}{dx}=ay \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y}=a.dx \;\Rightarrow\; \ln|y|=ax+c \;\Rightarrow\; y=C.e^{ax}\ .$$

Indicamos: $\mathbf{C}\left[a,b\right]$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas en $[a,b]$.

Sea $\mathbf{C}^1(a,b) \subset \mathbf{C}\left[a,b\right]$ el subconjunto de las funciones continuas y con derivadas primeras continuas en el intervalo $(a,b)$. Es fácil mostrar que $\mathbf{C}^1(a,b)$ es un subespacio.

Sea $\mathbf{D}:\mathbf{C}^1(a,b) \to \mathbf{C}\left[a,b\right]$ tal que $\boldsymbol{f}(x) \to \mathbf{D}(\boldsymbol{f}(x)) = \boldsymbol{f}\,'(x)$.

De las propiedades de la derivada:

1) $\mathbf{D}(\boldsymbol{f}(x)+\boldsymbol{g}(x)) = \mathbf{D}(\boldsymbol{f}(x)) + \mathbf{D}(\boldsymbol{g}(x))$
2) $\mathbf{D}(k\,\boldsymbol{f}(x)) = k.\mathbf{D}(\boldsymbol{f}(x))$

Luego **D** es una **aplicación lineal**.

Por ser suma, producto por escalar y composición (también llamada multiplicación) de aplicaciones lineales resulta que:

$\mathbf{D}^2 = \mathbf{D}\circ\mathbf{D}$, $\mathbf{D}^n = \underbrace{\mathbf{D}\circ\mathbf{D}\circ\cdots\circ\mathbf{D}}_{n}$, $5\,\mathbf{D}^2 + 3\mathbf{D}$ son aplicaciones lineales de $\mathbf{C}^1(a,b) \to \mathbf{C}\left[a,b\right]$.

Por lo tanto $\mathbf{L} = a_n\,\mathbf{D}^n + a_{n-1}\,\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + a_1\,\mathbf{D} + a_0\,\mathbf{I}$ con $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ también lo es.

Sea: $y = \boldsymbol{f}(x) \in \mathbf{C}^1(a,b)$

$$\mathbf{L}(y) = a_n\,\mathbf{D}^n(y) + a_{n-1}\,\mathbf{D}^{n-1}(y) + \cdots + a_1\,\mathbf{D}(y) + a_0\,\mathbf{I}(y)$$

Esta expresión se puede escribir:

$$\mathbf{L}(y) = a_n\,y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$$

donde

$y^{(n)}$ indica la derivada de orden $n$ de la función $y = \boldsymbol{f}(x)$,

$y^{(n-1)}$ indica la derivada de orden $n$-1 de la función $y = \boldsymbol{f}(x)$ etc.

La expresión

$$a_n\,y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = \boldsymbol{h}(x)$$

constituye una ecuación diferencial lineal de orden $n$ a coeficientes constantes. En particular si $\boldsymbol{h}(x) = 0$ la ecuación se dice homogénea.

Resolver una ecuación diferencial es encontrar todas las soluciones, esto es, todas las funciones que la satisfacen.

Vamos a analizar el caso

$$a_n\,y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (1)$$

con $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$.

Con esta última condición, sin quitar generalidad, podemos hacer $a_n = 1$.

La ecuación (1) puede escribirse $\mathbf{L}(y) = 0$ con

$$\mathbf{L} = \mathbf{D}^n + a_{n-1}\,\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + a_1\,\mathbf{D} + a_0\,\mathbf{I} \,:\, \mathbf{C}^1(a,b) \to \mathbf{C}[a,b] \text{ aplicación lineal.}$$

Luego, resolver la ecuación (1) no es sino encontrar el núcleo de la aplicación lineal **L**.

Sabemos entonces que el conjunto de soluciones es un subespacio. Luego, habremos resuelto el problema si encontramos un generador del mismo.

**L** tiene la forma de un polinomio en **D**, entonces puede ser factoreado y esto nos ayudará a encontrar las soluciones.

**Ejemplos**

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{L} = \mathbf{D}^2 + \mathbf{D} - 6\,\mathbf{I}$ entonces $\mathbf{L} = (\mathbf{D} - 2\,\mathbf{I}).(\mathbf{D} + 3\,\mathbf{I})$.

En efecto

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(y) = (\mathbf{D} - 2\mathbf{I}).(\mathbf{D} + 3\mathbf{I})(y) = (\mathbf{D} - 2\mathbf{I})(y' + 3y) = \mathbf{D}(y' + 3y) - 2\mathbf{I}(y' + 3y)\\ = y'' + 3y' - 2y' - 6y = y'' + y' - 6y = (\mathbf{D}^2 + \mathbf{D} - 6\mathbf{I})(y)\end{aligned}$$

**Nota:** La factorización se efectúa de la misma forma que si se tratara de polinomios

$$\mathbf{p} \in \mathbb{R}[X], \quad \mathbf{p} = X^2 + X - 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \text{ tiene raíces } x_1 = 2,\ x_2 = -3 \qquad (2)$$

Luego $X^2 + X - 6 = (X - 2)(X + 3)$.

La ecuación (2) se llama ecuación auxiliar o ecuación característica de la ecuación diferencial dada.

Dada la ecuación diferencial $y'' + y' - 6\,y = 0$ corresponde a la forma $\mathbf{L}(y) = 0$ con:

$$\mathbf{L} = \mathbf{D}^2 + \mathbf{D} - 6\,\mathbf{I} \;\Rightarrow\; (\mathbf{D}^2 + \mathbf{D} - 6\,\mathbf{I})(y) = 0 \;\Rightarrow\; (\mathbf{D} - 2\,\mathbf{I}).(\mathbf{D} + 3\,\mathbf{I})(y) = 0$$

Las soluciones serán las funciones $y = \boldsymbol{f}(x)$ que anulan sea a $(\mathbf{D} - 2\,\mathbf{I})$ como al operador $(\mathbf{D} + 3\,\mathbf{I})$. Si tomamos

$$(\mathbf{D} - 2\,\mathbf{I})(y) = 0 \;\Rightarrow\; y' = 2y \text{ tiene una solución del tipo: } y_1(x) = e^{2x}.$$

$$(\mathbf{D} + 3\,\mathbf{I})(y) = 0 \;\Rightarrow\; y' = -3y \text{ tiene una solución del tipo: } y_2(x) = e^{-3x}.$$

Como el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial homogénea es un subespacio, es solución de la misma toda combinación lineal de $y_1$ y de $y_2$. Luego

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \;\Rightarrow\; y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}.$$

Se demuestra que la dimensión del subespacio de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden *n*, es justamente *n*. Siendo $e^{2x}$ y $e^{-3x}$ linealmente independientes (verifíquelo!), ellas forman la base del conjunto de soluciones de la ecuación diferencial planteada con lo cual hemos resuelto el problema.

Luego los pasos a seguir para resolver una ecuación diferencial de la forma

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0 \quad \text{con} \quad a_n,\, a_{n-1},\ldots,\, a_0\in\mathbb{R} \quad \text{y} \quad a_n=1\,.$$

Son los siguientes:

1. Construir la ecuación auxiliar $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$.
2. Calcular las raíces $x_1, x_2,\ldots, x_n$.
3. Si éstas son todas reales y distintas, entonces la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x)=c_1.e^{x_1x}+c_2.e^{x_2x}+\cdots+c_n.e^{x_nx}\,. \qquad (*)$$

La solución (*) es válida, como se mencionó, si todas las raíces de la ecuación característica son reales y distintas. Sin embargo, a menudo se presentan raíces múltiples o raíces complejas. Vamos a analizar esta situación, sea

$$y''+a_1y'+a_0=0 \qquad (3)$$

Con ecuación auxiliar consideramos $x^2+a_1x+a_0=0$.

Sabemos que para una ecuación algebraica a coeficientes reales, las raíces complejas, si existen, vienen de a pares, esto es si $x_1=\alpha+i\omega$ es raíz, también lo es $x_2=\alpha-i\omega$.

Luego $e^{(\alpha+i\omega)x}$ y $e^{(\alpha-i\omega)x}$ son ambas soluciones de la ecuación diferencial, por lo tanto también lo son: $y_1=e^{(\alpha+i\omega)x}+e^{(\alpha-i\omega)x}$, $\quad y_2=e^{(\alpha+i\omega)x}-e^{(\alpha-i\omega)x}$.

Operando se tiene

$$y_1=e^{(\alpha+i\omega)x}+e^{(\alpha-i\omega)x}=e^{\alpha x}\left(e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}\right) \;\Rightarrow\; y_1=\tfrac{1}{2}e^{\alpha x}cos(\omega x)$$
$$y_2=e^{(\alpha+i\omega)x}-e^{(\alpha-i\omega)x}=e^{\alpha x}\left(e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}\right) \;\Rightarrow\; y_2=\tfrac{1}{2i}e^{\alpha x}sen(\omega x)$$

**Nota:** Se demuestra que $\dfrac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}=cos(\omega x)$, $\dfrac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}=sen(\omega x)$.

Luego la solución de la ecuación planteada es:

$$y=e^{\alpha x}\left(c_1cos(\omega x)+c_2sen(\omega x)\right) \qquad (4)$$

Las funciones $e^{\alpha x}cos(\omega x)$ y $e^{\alpha x}sen(\omega x)$ son linealmente independientes, de donde forman una base del espacio de soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden dada (3) y por lo tanto (4) es la solución general.

## Ejemplo 2

Sea un resorte suspendido verticalmente de un soporte fijo. En el extremo inferior del resorte se sujeta un cuerpo de masa *m* la cual se supone lo suficientemente grande como para que pueda despreciarse la masa del resorte. Si se tira del cuerpo hacia abajo una cierta distancia y a continuación se deja en libertad, éste se mueve. Suponemos que lo hace estrictamente en el sentido vertical.

Se desea determinar el movimiento de este sistema mecánico. Para ello vamos a considerar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo durante el movimiento. Se elige la dirección hacia abajo como positiva y por lo tanto se consideran como positivas a las fuerzas que actúan hacia abajo y como negativas las que actúan hacia arriba (Figura 4.1).


Figura 4.1: Sistema Mecánico

La fuerza que actúa sobre el cuerpo es la atracción de la gravedad

$$\mathbf{F}_1 = m.g \quad \text{con} \quad g = 980 cm/s^2 \quad \text{(Aceleración de la gravedad)}$$

Otra fuerza que debe considerarse es la del resorte, ejercida por este último si se encuentra deformado. Los experimentos indican que esta fuerza es proporcional a la deformación, (Ley de Hooke) esto es

$$\mathbf{F} = k.s \quad \text{con} \quad k\text{: módulo del resorte,} \quad s\text{: deformación .}$$

Cuando el cuerpo se encuentra en reposo, su posición se llama de equilibrio estático. En esa situación el resorte está deformado en una cantidad $s_0$ de tal manera que la resultante de la fuerza correspondiente del resorte y gravitatoria es cero:

$$k.s_0 = m.g$$

Sea $y = y(t)$ el desplazamiento del cuerpo respecto de su posición de equilibrio estático.

De la Ley de Hooke $\mathbf{F}_2 = -k.s_0 - k.y$ .

La fuerza total que actúa sobre el sistema es $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = m.g - k.s_0 - k.y$ .

O sea $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -k.y$.

Si el amortiguamiento del sistema es tan pequeño que se puede descartar, entonces $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$ es la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

Aplicando la segunda Ley de Newton: *Fuerza = masa x aceleración* donde por *Fuerza* se entiende la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en cualquier instante, y la aceleración viene dada por $y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2}$ resulta $m.y'' = -k.y$

El movimiento del sistema se rige por la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$m.y'' + k.y = 0$$

con ecuación auxiliar $m.x^2 + k = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{-\dfrac{k}{m}} = \pm\, i\omega_0$.

La solución general de la ecuación diferencial resulta:

$$y(t) = c_1 cos(\omega_o t) + c_2 sen(\omega_o t) \quad \text{con} \quad \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Este movimiento se conoce como oscilación armónica. Se trata de un movimiento periódico de período $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ siendo $\omega_0$ la frecuencia angular.

Haciendo uso de identidades trigonométricas la solución general también puede ser escrita:

$$y(t) = C\; cos(\omega_o t - \varphi)$$

donde tanto $C$ como $\varphi$ dependen de las condiciones iniciales.

En la gráfica se muestran dos situaciones para valores distintos de $C$ y $\varphi$. (Figura 4.2).

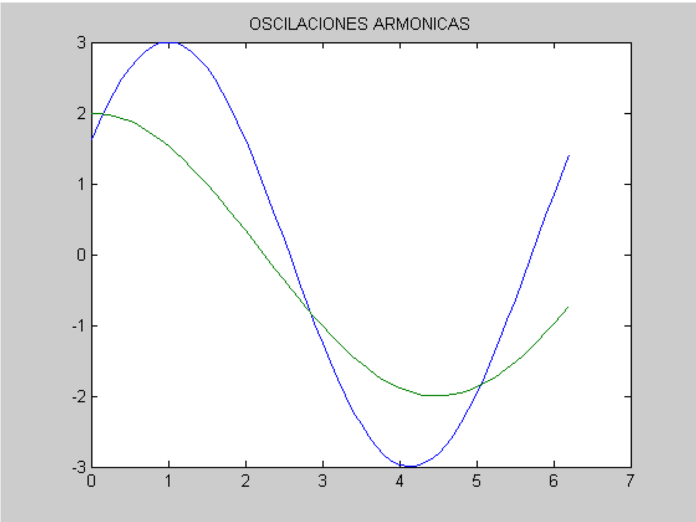



Figura 4.2

## 4.10. Ejercicios del Capítulo

Ejercicio 1

Analizar cuales de estas siguientes aplicaciones son lineales:

a) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{F}\big((x,y)\big)=(x,0)$.

b) $\mathbf{G}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{G}\big((x,y)\big)=(x,1)$.

c) $\mathbf{L}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{L}\big((x,y,z)\big)=(x,2y+3z)$.

d) $\mathbf{H}:\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{H}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=(a+d)+X$ .

e) $\mathbf{M}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{M}\big((x,y,z)\big)=x^2$

f) $\mathbf{T}:\mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3, \quad \mathbf{T}(\mathbf{p})=X.\mathbf{p}$ siendo $\mathbf{p}=a+bX+cX^2$

g) $\mathbf{D}:\mathbf{C}^1(a,b) \to \mathbf{C}[a,b], \quad \mathbf{D}(f(x))=f'(x)$ (función derivada).

Ejercicio 2

a) Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal.

Sabiendo que: $\mathbf{F}\big((1,3,0)\big)=(-4,5)$ y $\mathbf{F}\big((-1,2,0)\big)=(1,3)$, encontrar las imágenes de cada uno de los siguientes vectores:

$$-(1,3,0), \quad 3(-1,2,0), \quad 2(1,3,0)+4(-1,2,0), \quad (0,0,0), \quad (0,1,0), \quad (1,0,0)$$

Con los datos del caso a). ¿es posible determinar las imágenes del vector $(0,0,1)$?

b) Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ una aplicación lineal tal que: $\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Encontrar $\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ y $\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$.

Ejercicio 3

Sea el operador lineal $\mathbf{L_A}:\mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}, \quad \mathbf{L_A}(\mathbf{X})=\mathbf{A}.\mathbf{X}$. Analice geométricamente los efectos de las siguientes transformaciones:

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, d) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, e) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, f) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$

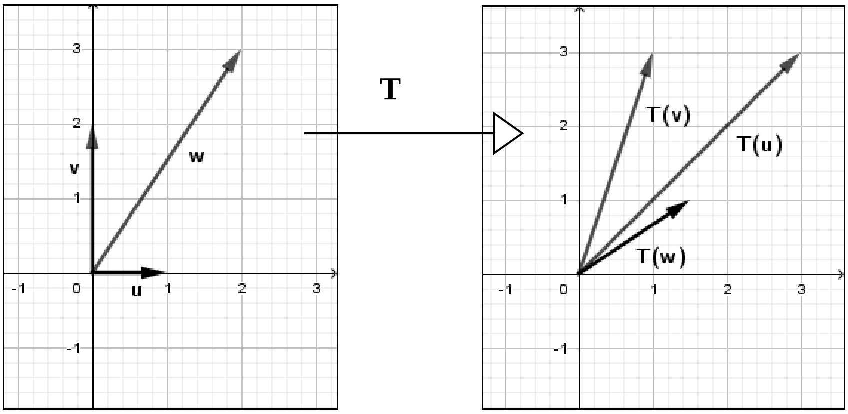
## Ejercicio 4

a) Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $\mathbf{F}\big((1,2)\big)=(2,1)$, $\mathbf{F}\big((1,3)\big)=(3,1)$. Encuentre $\mathbf{F}\big((x,y)\big)$. Describa geométricamente esta aplicación.

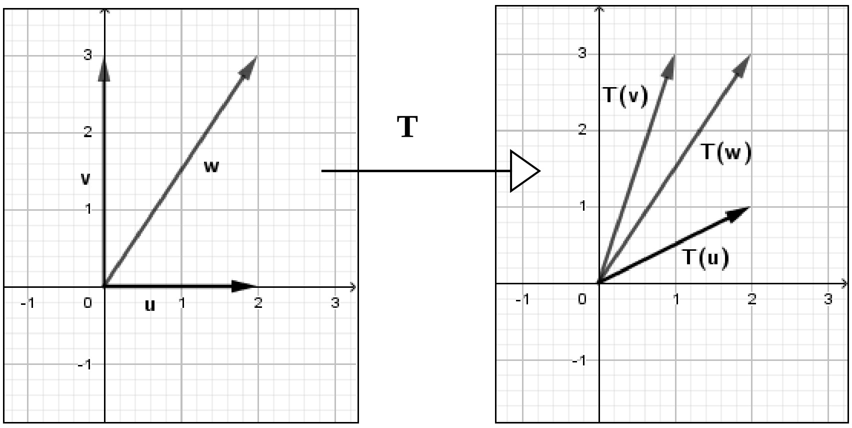
b) Sean $\mathbf{u}_1=(1,-1)$; $\mathbf{u}_2=(0,1)$; $\mathbf{u}_3=(1,0)$; $\mathbf{w}_1=(1,3)$; $\mathbf{w}_2=(-2,1)$; $\mathbf{w}_3=(1,-4)$.
¿Existe una transformación lineal $\mathbf{T}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{T}(\mathbf{u}_i)=\mathbf{w}_i$ para $i=1,2,3$? Justifique su respuesta.

## Ejercicio 5

Indique la opción que mejor describe (debe elegir una sola opción) la posible **aplicación lineal T** (de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$) que se muestra en la figura:




a) **Sí** es posible que exista una aplicación lineal así.
b) **No** es posible que exista una aplicación lineal así.
c) La imagen no da información suficiente para determinar si existe o no una aplicación lineal **T** que satisfaga lo que se observa.




a) **Sí** es posible que exista una aplicación lineal así.
b) **No** es posible que exista una aplicación lineal así.
c) La imagen no da información suficiente para determinar si existe o no una aplicación lineal **T** que satisfaga lo que se observa.

## Ejercicio 6

Para cada una de las aplicaciones lineales siguientes analizar cuáles de los vectores dados pertenecen al núcleo y cuáles a la imagen.

a) $\mathbf{F}\big((x,y)\big) = (2x - y, -8x + 4y,\ 0)$

$$\mathbf{u} = (5,10),\quad \mathbf{v} = (1,-4,0),\quad \mathbf{w} = (1,1),\quad \mathbf{z} = (0,0,1),\quad \overline{\mathbf{0}}_{\mathbf{R}^2} = (0,0),\quad \overline{\mathbf{0}}_{\mathbf{R}^3} = (0,0,0)$$

b) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1},\quad \mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \overline{\mathbf{0}}_{\mathbf{R}^{3x1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{w'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Ejercicio 7

Para cada una de las siguientes aplicaciones lineales se pide:

a) Caracterizar la imagen y el núcleo.
b) Dar, si es posible, una base de cada uno de dichos subespacios.
c) Dar rango y nulidad.
d) Analizar la inyectividad y suryectividad de las aplicaciones.

**I)** $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\quad \mathbf{F}\big((x,y)\big) = (2x - y, -8x + 4y,\ 0)$.

**II)** $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad \mathbf{F}\big((x,y)\big) = (x - y,\ x - y)$.

**III)** $\mathbf{F}:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\quad \mathbf{F}\big((x,y,z,w)\big) = (x + 2y, y + 3z, z - 2w)$

**IV)** $\mathbf{G}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\quad \begin{cases} (1,0) \to (1,0,0) \\ (0,1) \to (1,0,0) \end{cases}$

**V)** $\mathbf{G}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\quad \begin{cases} (1,0) \to (1,0,0,1) \\ (0,1) \to (1,0,1,0) \end{cases}$

**VI)** $\mathbf{H}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\quad \mathbf{H}\big((x,y,z)\big) = (2x - y - 2z,\ x + y - 2z)$

**VII)** $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\quad \mathbf{F} = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

**VIII)** $\mathbf{T}:\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\quad \mathbf{T}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ a+d & b+d \end{bmatrix}$.

**IX)** $\mathbf{F}:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2x2},\quad \mathbf{F}\big((x,y,z,w)\big) = \begin{bmatrix} (x+y) & (y - z + 2w) \\ (x - y - z) & (x - 2y + z) \end{bmatrix}$.

**X)** $\mathbf{S}:\mathbb{R}^{3\times1}\to\mathbb{R}^{3\times1}$, $\mathbf{S} = \left(\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -2\\ -3 & 3 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$.

**XI)** $\mathbf{J}:\mathbf{P}_2\to\mathbb{R}^2$, $\mathbf{J}(a_0+a_1X+a_2X^2)=(a_1,a_2)$.

**XII)** $\mathbf{L}:\mathbf{P}_2\to\mathbf{P}_3$, $\mathbf{L}(a_0+a_1X+a_2X^2)=a_0+a_2X^2+a_0X^3$.

**XIII)** $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{3\text{x}2}\to\mathbf{P}_3$, $\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}\right)=(a_{11}+a_{12})+(a_{31}+2a_{32})X-(a_{21}+a_{12})X^3$.

## Ejercicio 8

a) Sea $\mathbf{T}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$\mathbf{T}(e_1)=(1{,}3{,}2),\ \mathbf{T}(e_2)=(1{,}0{,}0),\ \mathbf{T}(e_3)=(2{,}3{,}2),\ \mathbf{T}(e_4)=(4{,}3{,}2)$$

con $\mathbf{B}=(e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Dar las bases de la imagen y del núcleo. Asimismo, dar rango y nulidad de **T**.

b) Sea $\mathbf{T}:\mathbb{R}^{3\times1}\to\mathbb{R}^{3\times1}$ definida por $\mathbf{T(X)}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 7\\ -2 & 2 & 0\end{bmatrix}.\mathbf{X}$.

Caracterizar imagen y núcleo de **T**.

Mostrar que (si se identifica $\mathbb{R}^{3\times1}$con el espacio geométrico$\mathbb{R}^3$) $\mathbf{I_T}$ es un plano y dar una ecuación cartesiana del mismo. Igualmente mostrar que $\mathbf{N_T}$ es una recta y dar una ecuación vectorial de la misma.

## Ejercicio 9

Estudiar núcleo e imagen de las siguientes aplicaciones lineales. Dar bases de los mismos y decir si las aplicaciones son inyectivas o suryectivas.

a) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}\big((x_1, x_2, x_3)\big)=(4x_1-2x_3,\ 2x_1-x_3,\ 0)$.

b) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{4\times1}\to\mathbb{R}^{2\times1}$, $\mathbf{F(X)}=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 0\end{bmatrix}.\mathbf{X}$.

c) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}\big((x_1, x_2, x_3)\big)=(x_1-x_2+3x_3,\ 5x_1+6x_2-4x_3,\ 7x_1+4x_2+2x_3)$.

d) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{3\times1}\to\mathbb{R}^{4\times1}$, $\mathbf{F(X)}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 0\end{bmatrix}.\mathbf{X}$

## Ejercicio 10

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{C}^{\infty}\left[a,b\right]$ el vectorial de las funciones $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tienen derivada de todo orden en el intervalo $\left[a,b\right]$.

$$\mathbf{D}:\mathbf{V} \to \mathbf{V} \text{ operador derivada}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{D}^2 - 4\mathbf{D} + 5 : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$$

a) ¿Es **L** una aplicación lineal? Justifique su respuesta.

b) Determine si las siguientes funciones pertenecen al núcleo de **L**.

$$\boldsymbol{f}_1(x) = e^{2x} cos\, x, \quad \boldsymbol{f}_2(x) = 2^{2x} sen\, x, \quad \boldsymbol{f}_3(x) = e^{2x} sen\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right)$$

c) ¿Es posible encontrar una función $\boldsymbol{h} \in \mathbf{N_L}$ tal que $\boldsymbol{h}(0) = 2$ y $\boldsymbol{h}'(0) = 3$? ¿Cuál?.

## Ejercicio 11

Por simple observación de la matriz **A** determinar el rango y nulidad de la aplicación

$$\mathbf{L_A} : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{m\times 1}, \quad \mathbf{L_A}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}.\mathbf{X}$$

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

## Ejercicio 12

a) Sea $\mathbf{V} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2x2}$; $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbf{V}$, $\mathbf{F}\left((x,y)\right) = \begin{bmatrix} x+y & x \\ -x & x+y \end{bmatrix}$. Se pide:

1. Mostrar que **F** es inversible.
2. Calcular $\mathbf{F}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\right)$.
3. Definir $\mathbf{F}^{-1}$ dando a la imagen de un elemento arbitrario de **V**.

b) Sea $\mathbf{T}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\begin{cases} \mathbf{T}\left((1,1)\right) = (1,0) \\ \mathbf{T}\left((1,-1)\right) = (0,1) \end{cases}$. ¿Es **T** inversible?. Justifique.

## Ejercicio 13

Sean **F** y **G** operadores lineales definidos por: $\mathbf{F}\left((x,y)\right) = (x,0)$, $\mathbf{G}\left((x,y)\right) = (y,x)$.

a) Calcular la imagen del vector $(-1,2)$ por cada una de las aplicaciones siguientes:

$$\mathbf{F}+\mathbf{G}, \quad 2\mathbf{G}, \quad 3\mathbf{F}+2\mathbf{G}, \quad \mathbf{G}\circ\mathbf{F}, \quad \mathbf{F}\circ\mathbf{G}, \quad \mathbf{G}^2, \quad \mathbf{F}^2$$

b) De reglas semejantes a las que definen **F** y **G** para cada uno de los operadores definidos en el caso a).

## Ejercicio 14

Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{2\times1}\to\mathbb{R}^{3\times1}$ la aplicación lineal definida por: $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$ se pide:

a) Determinar $\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)$.

b) Dar una matriz $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{F(X)=A\,.\,X}$.

## Ejercicio 15

a) Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre el campo $\mathbf{K}$. Sean $\mathbf{B}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$ base de de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{B'}=(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)$ base de $\mathbf{W}$. Considerar $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ la aplicación lineal definida por:

$$\mathbf{F(v_1)}=2\mathbf{w_1}+4\mathbf{w_2},\quad \mathbf{F(v_2)}=-\mathbf{w_1}+5\mathbf{w_2},\quad \mathbf{F(v_3)}=3\mathbf{w_1}$$

Encontrar $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$.

b) Sea $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\-2 & 4 & 3\end{bmatrix}$ la matriz de una aplicación $\mathbf{G}:\ \mathbf{V}\to\mathbf{W}$ respecto de las bases $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$.

Si $\mathbf{v}=2\,\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}-3\,\mathbf{v_3}$ encontrar $[\mathbf{G(v)}]_{\mathbf{B'}}$ y $\mathbf{G(v)}$.

## Ejercicio 16

En cada uno de los casos siguientes encontrar la matriz de la aplicación lineal dada respecto de las bases que indican:

a) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}((x,y))=(x,0)$. $\mathbf{B}=((2,1),(3,4))$, $\mathbf{B'}=((1,1),(0,3))$.

b) $\mathbf{F}$ como en a), pero con $\mathbf{B}=\mathbf{B'}=$ base canónica de $\mathbb{R}^2$.

c) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$, $\mathbf{F}=\left(\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$. $\mathbf{B}=\mathbf{B'}=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)$

d) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbf{P}_2$, $\mathbf{F}((a,b,c))=(a-b)+2(a+b)X+(c-b)X^2$

$\mathbf{B}=((1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0))$ base de $\mathbb{R}^3$ **y** $\mathbf{B}'=(1,X,X^2)$ base de $\mathbf{P}_2$.

e) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{2x2}\to\mathbb{R}^2$, $\mathrm{F}\left(\begin{bmatrix}x & y\\z & w\end{bmatrix}\right)=(x+y+w,\ x+y-z)$. Con $\mathbf{B}$ la base canónica de $\mathbb{R}^{2x2}$ y la base de $\mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{B}'=((1,1),\ (-2,0))$.

f) $\mathbf{V}=\langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle$, $\begin{cases}\boldsymbol{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, & \boldsymbol{f}(x)=sen\ x\\ \boldsymbol{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, & \boldsymbol{g}(x)=cos\ x\end{cases}$. $\mathbf{B}=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})=\mathbf{B'}$

$\mathbf{D}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ es la aplicación **derivada** que asigna a cada función su “función derivada”.

## Ejercicio 17

a) Sea $\mathbf{B} = ((2,1), (0,1))$, $\mathbf{B'} = ((0,2), (1,1))$ bases de $\mathbb{R}^2$. $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Encontrar $[\mathbf{F}(2,1)]_{\mathbf{B'}}$, $\mathbf{F}(2,1)$.

b) $\mathbf{F}$: $\mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ la aplicación lineal tal que: $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ siendo: $\mathbf{B} = (1, X, X^2)$ y

$\mathbf{B'} = (1+X, 1-X, 1+X+X^2)$. Encontrar

1. $\left[\mathbf{F}(2+3X-5X^2)\right]_{\mathbf{B'}}$, $\mathbf{F}(2+3X-5X^2)$
2. $\left[\mathbf{F}(a+bX+cX^2)\right]_{\mathbf{B'}}$, $\mathbf{F}(a+bX+cX^2)$

## Ejercicio 18

Sean $\mathbf{F}:\mathbf{U} \to \mathbf{V}$, $\mathbf{G}:\mathbf{U} \to \mathbf{V}$, $\mathbf{T}:\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ aplicaciones lineales. Sean $\mathbf{B}, \mathbf{B'}$ y $\mathbf{B''}$ bases de $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ respectivamente.

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{B''}}^{\mathbf{B'}}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Encontrar las matrices que representan a las aplicaciones lineales siguientes (indicando en cada caso las bases).

$$\mathbf{F}+\mathbf{G}, \quad 2\mathbf{F}, \quad \mathbf{T}\circ\mathbf{F}, \quad \mathbf{T}\circ\mathbf{G}, \quad \mathbf{T}\circ(2\mathbf{F}+\mathbf{G})$$

b) Verificar si $\mathbf{T}$ es inversible y en caso afirmativo encontrar la matriz $\mathbf{T}^{-1}$ indicando las bases.

c) Si $\mathbf{U} = \mathbf{P}_2$, $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{W} = \mathbf{P}_1$ con $\mathbf{B} = (1, X, X^2)$, $\mathbf{B'} = ((1,0), (0,1))$ y $\mathbf{B''} = (1, 1+X)$
Encontrar la imagen de $\mathbf{p} = 1 - 3X + 5X^2$ por la aplicación $\mathbf{T}\circ(2\mathbf{F}+\mathbf{G})$.

d) Encontrar $\left[\mathbf{T}^{-1}(-3+2X)\right]_{\mathbf{B}}$ y $\mathbf{T}^{-1}(-3+2X)$ con los $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{B}, \mathbf{B'}, \mathbf{B''}$ dados en c).

## Ejercicio 19

Sean $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal tal que $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Si la base $\mathbf{B'}$ se cambia por la base $\mathbf{B'}_1$ con matriz de cambio $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Encontrar $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}_1}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$.

b) Si se cambia la base **B** por la base **B₁** con matriz de cambio $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Encontrar $\mathbf{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}_1}(\mathbf{F})$.

c) Hallar $\mathbf{M}_{\mathbf{B}'_1}^{\mathbf{B}_1}(\mathbf{F})$.

## Ejercicio 20

Para cada uno de los operadores lineales que se dan a continuación:

1) Elegir una base y dar la matriz del operador.
2) La ecuación característica.
3) Los valores propios. y los subespacios propios.
4) Si es posible, dar una base de vectores propios para el espacio vectorial y la matriz del operador lineal en esta base.
5) Dar la matriz de cambio de base.

a) $\mathbf{F}: \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}, \;\; \mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

b) $\mathbf{F}: \;\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{F}\big((x_1, x_2)\big) = (-2x_1 - 7x_2,\, x_1 + 2x_2)$.

c) $\mathbf{F}: \;\mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{F}\big((a + bX)\big) = (3a - b) + (8a - b)X$

d) $\mathbf{F}: \mathbf{P_2} \to \mathbf{P_2}, \;\; \mathbf{F}\left(a + bX + cX^2\right) = -a + (a + 3b + 2c)X + (-a - b)X^2$.

e) $\mathbf{F}: \mathbf{P_2} \to \mathbf{P_2}, \;\; \mathbf{F}\left(a + bX + cX^2\right) = (a - b + c) + (2b - 4c)X + 4cX^2$.

## Ejercicio 20

En la figura se muestra el **pandeo de una varilla** bajo una fuerza vertical constante **F**, la cual se aplica en el extremo superior de la misma.

En Mecánica se muestra que la curva $y(x)$ cuya forma adquiere la varilla bajo la carga, es una solución de la ecuación: $E.I.y'' = -\mathbf{F}.y$ donde $E$ es el módulo de elasticidad del material de la varilla; $I$ es el momento de inercia de la sección transversal (supuesta circular) respecto a un eje que pasa por el centro del círculo.

Se supone que *E, I* son constantes; que el extremo inferior de la varilla está sujeto a las coordenadas que se indican en la Figura 4.3 lo cual conduce a las condiciones iniciales $y(0)=0,\ y'(l)=0$ donde $l$ es la longitud de la varilla y se supone que $y$ es pequeño.

Una solución es $y=0$ , pero se sabe que si **F** es mayor que cierto valor crítico, el equilibrio de la Figura 4.3.(a) ya no es estable, es decir, si se desplaza ligeramente, la varilla no se recuperará sino que se curvará.

Demuestre que la fuerza crítica es $\mathbf{F}_{\text{crit}}=\left(\pi/2\right)^2 E.I$ y la $y(x)$ correspondiente a la Figura 4.3.(b) es una porción de una curva senoidal.

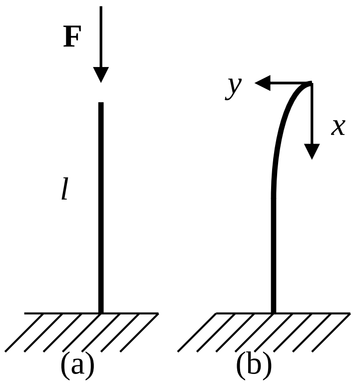


Figura 4.3: Pandeo de Varilla delgada

## 4.11. Guía de Estudio

1) Defina **aplicación lineal**. Enuncie algunas propiedades.
2) Muestre que si Si $\mathbf{B}=\left(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\right)$ es una base de **V** y $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,...,\mathbf{w}_n$ son vectores arbitrarios de **W**, entonces: existe una única aplicación lineal $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{v}_i)=\mathbf{w}_i$ para $i=1,2,\ldots,n.$
3) Defina **imagen** de una aplicación lineal y enuncie sus propiedades.
4) Defina **núcleo** de una aplicación lineal y enuncie sus propiedades.
5) Si $\mathbf{L}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ es una aplicación lineal ¿Cómo están relacionados el núcleo y la imagen de la misma? Pruébelo.
6) ¿Cómo quedan caracterizadas las aplicaciones lineales inyectivas? ¿Por qué?
7) Muestre que todo conjunto $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\ \mathbf{v}_r\in\mathbf{V}$ de vectores linealmente independientes, resultan $\mathbf{F}(\mathbf{v}_1),\mathbf{F}(\mathbf{v}_2),\ldots,\mathbf{F}(\mathbf{v}_r)$ linealmente independientes si y sólo si **F** es inyectiva.
8) ¿Cuáles son las condiciones para que una aplicación lineal sea **inversible**? Muestre que si **F** es una aplicación lineal inversible, su inversa es también una aplicación lineal.

9) ¿A qué se llaman espacios vectoriales **isomorfos**?

10) Muestre que la suma, el producto por escalar y la composición de aplicaciones lineales da por resultado una aplicación lineal.

11) ¿Qué representa $\mathbf{L}\,(\mathbf{V},\mathbf{W})$? ¿Qué estructura tiene?

12) Muestre que dada $\mathbf{L}:\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{W}$ aplicación lineal. Si **B** es una base de **V** y **B'** es una base de **W**, existe una única matriz **A** tal que $\left[\mathbf{L(v)}\right]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}\,.\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B}}$.

13) La matriz de una aplicación lineal depende de las bases fijadas en los vectoriales. ¿Cómo cambia la matriz de la aplicación cuando cambian las bases de los vectoriales?

14) Muestre que si $dim\,\mathbf{V} = n$ y $dim\,\mathbf{W} = m$, entonces existe un isomorfismo entre los espacios $\mathbf{L(V,W)}$ y $\mathbf{K}^{m\times n}$.

15) ¿Cuál es la matriz de la compuesta de dos aplicaciones lineales? ¿Por qué?.

16) ¿Cómo se establece el isomorfismo de Álgebra entre $\mathbf{L(V)}$ y $\mathbf{K}^{n\times n}$?.

17) Defina **valor propio**, **vector propio** y **subespacio propio** de un operador lineal **F**.

18) ¿Cuándo se dice que un operador lineal es **diagonalizable**?.

19) ¿Cuáles son las condiciones que se deben cumplir para que un operador lineal sea diagonalizable?.