FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

ÁLGEBRA LINEAL

TEORÍA y PRÁCTICA

Elizabeth Vera de Payer   Magdalena Dimitroff

2020

Un especial agradecimiento al Ing. Alfredo Payer quien prestó conformidad para poner este material bajo lincencia Creative Commons, convencido de que esa hubiera sido la voluntad de la Ing. Elizabeth Vera de Payer.

Índice

3

Vectores y Valores Propios

3.1 La Función Determinante

Algunas características de una matriz pueden expresarse mediante un escalar, tal como sucede, por ejemplo, con su rango. En particular, si se considera el conjunto de las matrices cuadradas pueden definirse otros dos escalares: la traza y el determinante.
Este último permite algunas aplicaciones importantes tanto geométricas como algebraicas. Así es posible,

- Cuando se trabaja en $\mathbb{R}^3$ dar fórmulas para el cálculo del área de un paralelogramo y el volumen de un paralelepípedo**.**
- Dar un nuevo criterio para caracterizar matrices inversibles y obtener una fórmula para la inversa. Expresar el valor de cada incógnita en la solución de un sistema de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas cuando la solución es única.

Definición 3.1.1 Sea **K** un cuerpo. Sea $\mathbf{A} = \left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{A}^j,\ldots,\mathbf{A}^n\right] \in \mathbf{K}^{\mathbf{n\times n}}$ y $k \in \mathbf{K}$.
Llamaremos función determinante a una función

$$\begin{aligned} det\colon \mathbf{K}^{\mathbf{n\times n}} &\to \mathbf{K} \\ \mathbf{A} &\to det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

sí y sólo si satisface

1) $det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{A}_1^j+\mathbf{A}_2^j,\ldots,\mathbf{A}^n\right] = det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{A}_1^j,\ldots,\mathbf{A}^n\right] + det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{A}_2^j,\ldots,\mathbf{A}^n\right].$

2) $det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathrm{k}\mathbf{A}^j,\ldots,\mathbf{A}^n\right] = k\ det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{A}^j,\ldots,\mathbf{A}^n\right].$

3) Si $\mathbf{A}^j = \mathbf{A}^r$ entonces $det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{A}^j,\ldots,\mathbf{A}^r,\ldots,\mathbf{A}^n\right] = 0.$

4) $det\,(\mathbf{I_n}) = 1$ siendo $\mathbf{I_n}$ la matriz identidad $\mathrm{n}\times\mathrm{n}$.

Observación: Las propiedades 1) y 2) expresan que la función determinante, mirada como función de una cualquiera de sus columnas, es una función lineal. Así, si **A** tiene *n* columnas, se dice que $det(\mathbf{A})$ es *n-lineal*.

Los ejemplos siguientes muestran el significado de estas propiedades en una matriz 2x2.

$$det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}+a'_{12} \\ a_{21} & a_{22}+a'_{22} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} a_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}$$

$$det\begin{bmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$det\begin{bmatrix} k\,a_{11} & a_{12} \\ k\,a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} a_{11} & k\,a_{12} \\ a_{21} & k\,a_{22} \end{bmatrix} = k\ det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Es importante destacar que, como función de $\mathbf{K}^{\mathbf{n\times n}}$ en $\mathbf{K}$, la función determinante **no es lineal**. Esto es, si **A** y **B** son matrices $n\times n$ y k es un escalar, en general:

$$det(\mathbf{A+B}) \text{ no es igual a } det(\mathbf{A})+det(\mathbf{B})$$

$$det(k\,\mathbf{A}) \text{ no es igual a } k\ det(\mathbf{A})$$

Son consecuencia de la definición las propiedades que se enuncian a continuación.

Proposición 3.1.1 Sea $\mathbf{K}$ un cuerpo y sean $\mathbf{A}=\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{A}^j,\ldots,\mathbf{A}^n\right]\in\mathbf{K}^{\mathbf{n\times n}}$ y $k\in\mathbf{K}$. Si $\begin{array}{l} det\colon \mathbf{K}^{\mathbf{n\times n}} \to \mathbf{K} \\ \qquad\ \mathbf{A} \ \to det(\mathbf{A}) \end{array}$ es la función determinante se verifica que:

1. Si **A** tiene una columna nula, entonces: $det\ (\mathbf{A})=0$.
2. Si **B** se obtiene intercambiando dos columnas de **A**, entonces: $det(\mathbf{B})=-det(\mathbf{A})$.
3. Si **B** se obtiene sumando a una columna de **A** un múltiplo escalar de otra columna, entonces: $det(\mathbf{B})=det(\mathbf{A})$.

Demostración:

1. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la columna nula es la j-ésima y consideremos el punto 2) de la definición de función determinante

$$det\left[\begin{array}{ccc} & \text{columna } j & \\ \mathbf{A}^1,\ldots, & \mathbf{0} & ,\ldots,\mathbf{A}^n \end{array}\right] = det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,0.\mathbf{A}^j,\ldots,\mathbf{A}^n\right]=0\ .\,det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{A}^j,\ldots,\mathbf{A}^n\right]=0.$$

2. Supongamos que B se obtiene de A intercabiando las columnas $\mathbf{A}^j=\mathbf{H}$ y $\mathbf{A}^r=\mathbf{L}$. Consideremos la matriz $\mathbf{M}=\left[\begin{array}{ccccc} & \text{columna } j & & \text{columna } r & \\ \mathbf{A}^1,\ldots, & \mathbf{H}+\mathbf{L} & ,\ldots, & \mathbf{H}+\mathbf{L} & ,\ldots,\mathbf{A}^n \end{array}\right]$. $\mathbf{M}$ tiene dos columnas iguales, entonces por propiedad 3) de la definición de determinante se tiene que $det(\mathbf{M})=0$.
Luego, se tiene que:

$$det(\mathbf{M}) = 0 = det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\overset{columna\ j}{\mathbf{H}+\mathbf{L}},\ldots,\overset{columna\ r}{\mathbf{H}+\mathbf{L}},\ldots,\mathbf{A}^n\right] =$$

$$= \underbrace{det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{A}^n\right]}_{=0} + det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{A}^n\right] +$$

$$+\ det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{A}^n\right] + \underbrace{det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{A}^n\right]}_{=0}$$

$$= det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{A}^n\right] + det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{A}^n\right]$$

Por lo tanto $\underbrace{det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{A}^n\right]}_{det(\mathbf{B})} = -\underbrace{det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{A}^n\right]}_{det(\mathbf{A})}$.

3. Supongamos que **B** se obtiene de **A**, sumando a la columna j-ésima un múltiplo escalar de la columna *r*. Si consideramos las columnas $\mathbf{A}^j = \mathbf{H}$ y $\mathbf{A}^r = \mathbf{L}$. Se tiene entonces que la matriz $\mathbf{B} = \left[\mathbf{A}^1,\ldots,\overbrace{\mathbf{H}+k\mathbf{L}}^{\text{columna } j},\ldots,\overset{\text{columna } r}{\mathbf{L}},\ldots,\mathbf{A}^n\right]$. Luego, se tiene que:

$$det(\mathbf{B}) = det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\overbrace{\mathbf{H}+k\mathbf{L}}^{columna\ j},\ldots,\overset{columna\ r}{\mathbf{L}},\ldots,\mathbf{A}^n\right] =$$

$$= \underbrace{det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{A}^n\right]}_{det(\mathbf{A})} + k.\underbrace{det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{A}^n\right]}_{=0}$$

Por lo tanto $\underbrace{det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{A}^n\right]}_{det(\mathbf{B})} = \underbrace{det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{A}^n\right]}_{det(\mathbf{A})}$. #

3.1.1. Existencia y Unicidad

La definición de la función determinante en base a las propiedades que requerimos para la misma deja abiertas las siguientes cuestiones:

a) ¿**Existe** alguna función de $\mathbf{K}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ en $\mathbf{K}$ que satisfaga los requisitos?

b) Si la respuesta al ítem a) es afirmativa, entonces ¿hay una **única** función determinante ó más de una?

En la teoría de determinantes se prueba que, en todos los casos, es decir para todo número natural *n*, la definición de función determinante caracteriza como tal a una **única** función.
Si bien admitiremos sin prueba esta afirmación, analizaremos en detalle el caso cuando se tiene $\mathbf{K}^{2\times 2}$.

Existencia: Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} det: \mathbf{K}^{2\times 2} &\rightarrow \mathbf{K} \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &\rightarrow det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Dicha aplicación es una función determinante, pues se verifica sin dificultad el cumplimiento de los ítems 1), 2), 3) y 4) de la **Definición 3.1.1**. (la pueba queda a cargo del alumno).

Unicidad: Supongamos que se tiene $D: \mathbf{K}^{2\times 2} \rightarrow \mathbf{K}$ una función determinante y sean $\mathbf{E}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Entonces resulta $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \left[a_{11}\mathbf{E}^1 + a_{21}\mathbf{E}^2, \, a_{12}\mathbf{E}^1 + a_{22}\mathbf{E}^2 \right]$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} D(\mathbf{A}) &= D\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = D\left[a_{11}\mathbf{E}^1 + a_{21}\mathbf{E}^2, \, a_{12}\mathbf{E}^1 + a_{22}\mathbf{E}^2 \right] \\ &= (a_{11}a_{12}) \,.\, D\left[\mathbf{E}^1, \mathbf{E}^1\right] + (a_{11}a_{22}) \,.\, D\left[\mathbf{E}^1, \mathbf{E}^2\right] + (a_{21}a_{12}) \,.\, D\left[\mathbf{E}^2, \mathbf{E}^1\right] + (a_{21}a_{22}) \,.\, D\left[\mathbf{E}^2, \mathbf{E}^2\right] \\ &= (a_{11}a_{12}) \,.\, 0 + (a_{11}a_{22}) \,.\, D\left[\mathbf{E}^1, \mathbf{E}^2\right] + (a_{21}a_{12}) \,.\left(-D\left[\mathbf{E}^1, \mathbf{E}^2\right] \right) + (a_{21}a_{22}) \,.\, 0 \\ &= (a_{11}a_{22}) \,.\, 1 + (a_{21}a_{12}) \,.\, (-1) \end{aligned}$$

luego $D(\mathbf{A}) = D\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$,es decir la función determinante es única para matrices en $\mathbf{K}^{2\times 2}$.

3.1.2. Otras Propiedades de la Función Determinante

Aceptaremos también, sin demostrarlas, las dos propiedades que enunciaremos a continuación:

a). Determinante de la Transpuesta.

La matriz que se obtiene escribiendo como filas las columnas de **A**, en su orden, se llama **matriz transpuesta** de **A** y se denota: $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$.
Esto es

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{fila } i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & \text{columna } j & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \text{traspuesta de } \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{fila } j \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & \text{columna } i & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1j} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Luego se verifica: $det(\mathbf{A}) = det\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right)$.

En virtud de esta igualdad, las propiedades 1) a 7) que verifica la función determinante, que se refieren a las columnas de la matriz, son válidas para las filas. Así, por ejemplo, es válido afirmar que si **A** tiene *dos filas iguales* su determinante es nulo. Si se intercambian *dos filas* el determinante cambia de signo, etc.

b). Determinante de un Producto.

Si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{K}^{\mathbf{n \times n}}$ se verifica: $det(\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}) = det(\mathbf{A}) \,.\, det(\mathbf{B})$.

3.1.3. Cálculo de Determinante

3.1.3.1 Regla de Sarrus.

Como ya se dijo con anterioridad puede mostrarse fácilmente que para una matriz 2x2 el número que se obtiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow (ad - bc)$$

cumple las exigencias de la función determinante.

De igual forma, para una matriz 3x3 la aplicación

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow aei + bfg + dhc - ceg - afh - bdi$$

Cumple con las exigencias de la función determinante. Sin embargo, esta fórmula parece difícil de recordar. Para simplificar este problema, se tiene en cuenta la llamada **Regla de Sarrus**: que consiste en agregar a la matriz **A** sus dos primeras columnas como se ilustra a continuación. El producto de los elementos que están en las diagonales descendentes de izquierda a derecha se suman y las que están en las diagonales ascendentes se restan:

$$\begin{array}{c} \text{columnas} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{matrix} + & + & + \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} - & - & - \end{matrix}$$

$$det(A) = \quad (aef + bfg + cdh) \quad + \quad (-gec - hfa - idb)$$

3.1.3.2 Cofactores

Definición 3.1.3.2 Sea $\mathbf{K}$ un cuerpo. Sea $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{\mathbf{n \times n}}$. Denotaremos $\mathbf{A}_{i\,j} \in \mathbf{K}^{(\text{n-1})\times(\text{n-1})}$ a la matriz que se obtiene suprimiendo de $\mathbf{A}$ la fila i y la columna j, esto es:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \text{fila } i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & \text{columna } j & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

El escalar: $$C_{i\,j} = (-1)^{(i+j)}.det\left(\mathbf{A}_{i\,j}\right)$$

se denomina **cofactor** del lugar (i,j) (o también **cofactor del elemento** $a_{i\,j}$)

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, consideramos $\mathbf{A}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ la matriz que se obtuvo a partir de $\mathbf{A}$ al suprimir la fila 2 y la columna 3. El cofactor del lugar (2,3) es $\mathbf{C_{23}} = (-1)^{(2+3)}.det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 5$.

Observación: El cofactor del lugar (i,j) no depende de los elemento de la fila i ni de los elementos de la columna j. Si en la matriz $\mathbf{A}$ se cambia la fila i y la columna j el cofactor de la nueva matriz es igual al cofactor $C_{i\,j}$ de la matriz $\mathbf{A}$.

Ejemplo 2

Si en $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, se cambia la fila **2** y la columna **3,** se obtiene $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Notar que $\mathbf{C_{23}}$ no cambia, pues $\mathbf{B_{23}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y por lo tanto $\mathbf{C_{23}} = (-1)^{(2+3)}.det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 5$.

3.1.3.3 Desarrollo por Cofactores

Teorema 3.1.3.3 Sea **K** un cuerpo. Sea $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$. El determinante de la matriz **A** se puede calcular como suma de los elementos de una fila (ó de una columna) multiplicados por sus respectivos cofactores C_{ij}, esto es:

- El desarrollo del determinante de **A** por la fila *i* está dado por:

$$det(\mathbf{A}) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \qquad (1)$$

- El desarrollo del determinante de **A** por la columna *j* está dado por:

$$det(\mathbf{A}) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \qquad (j = 1,2,\ldots,n) \qquad (2)$$

Observación: Puesto que cada cofactor incluye el determinante de una matriz de orden $(n-1)$, las fórmulas (1) y (2) permiten calcular el determinante de una matriz de orden *n* si se saben calcular determinantes de matrices de orden $(n-1)$. A su vez, cada uno de estos determinantes puede desarrollarse en la misma forma. El proceso conduce finalmente a expresar $det(\mathbf{A})$ por medio de determinantes de matrices 2×2 (ó si se quiere, 1×1).

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Desarrollaremos el $det(\mathbf{A})$ por la tercera fila, esto es:

$$det(\mathbf{A}) = 4.(-1)^{(3+2)}.det\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} + 1.(-1)^{(3+4)}.det\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}}$$

$$det(\mathbf{B}) = det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2.(-1)^{(1+2)}.det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 1.(-1)^{(3+2)}.det\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 3.$$

$$det(\mathbf{C}) = det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2.(-1)^{(1+3)}.det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 1.(-1)^{(3+3)}.det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -3.$$

Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} det(\mathbf{A}) &= 4.(-1)^{(3+2)}.det(\mathbf{B}) + 1.(-1)^{(3+4)}.det(\mathbf{C}) \\ &= 4.(-1)^{(3+2)}.3 + 1.(-1)^{(3+4)}.(-3) \\ &= -9 \end{aligned}$$

Observación: El determinante de una matriz puede calcularse desarrollando por los cofactores de cualquiera de sus filas o columnas; la unicidad de la función determinante garantiza que, en todos los casos, el resultado que se obtiene es el mismo.

Propiedad importante de los cofactores de una fila (ó columna).

Hemos visto que la suma de los elementos de una fila (ó columna) por sus cofactores es igual al determinante de la matriz. Veremos ahora que ocurre si se suma el producto de los elementos de una fila (ó columna) por los correspondientes cofactores de otra fila (ó columna).

Proposición 3.1.3.3 Sea **K** un cuerpo. Sea $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{\mathbf{n \times n}}$. Si C_{ij} es el cofactor del lugar (i,j), entonces

$$a_{i1}C_{r1} + a_{i2}C_{r2} + \cdots + a_{in}C_{rn} = 0 \quad (\text{si} \quad r \neq i) \qquad (3)$$

Demostración:

Si en la matriz **A** se reemplaza la fila *r* por la fila *i*, los cofactores de la fila *r* no cambian. Luego, el primer miembro de (3) es el desarrollo por la fila *r* del determinante de esta nueva matriz que como tien la fila *r* igual a la fila *i*, resulta igual a cero. #

3.1.3.4 Calculo de Determinante por Triangulación

Si **T** es una matriz triangular superior (es decir que son iguales a cero los elementos que están debajo de la diagonal principal), la aplicación del desarrollo por la primera columna muestra que $det(\mathbf{T})$ se obtiene multiplicando los elementos de esta diagonal.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow det(\mathbf{A}) = \prod_{j=1}^{n} a_{jj} \ .$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Si $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ entonces $det(\mathbf{T}) = det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.det\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= 2.3.det\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.3.(-5).1 = -30 \ .$$

El resultado precedente sugiere que podrían usarse las operaciones elementales de filas para transformar una matriz **A** en una triangular **T** para facilitar el cálculo del determinante de **A** por medio de $det(\mathbf{T})$. Por tal motivo, analizaremos los cambios introducidos en el determinante al aplicar a la matriz operaciones elementales de filas. Las propiedades de la función determinante muestran lo siguiente

I. $\mathbf{A} \xrightarrow{e_i(k)} \mathbf{B}$ la matriz **B** se obtiene a partir de **A** multiplicando la fila r por un escalar k, luego $det(\mathbf{B}) = k\ det(\mathbf{A})$.

II. $\mathbf{A} \xrightarrow{e_{ir}(k)} \mathbf{B}$ la matriz **B** se obtiene a partir de **A** multiplicando sumando a la fila i la fila r multiplicada por el escalar k, luego $det(\mathbf{B}) = det(\mathbf{A})$.

III. $\mathbf{A} \xrightarrow{e_{ir}} \mathbf{B}$ la matriz **B** se obtiene a partir de **A** intercambiando la fila i por la fila r, luego $det(\mathbf{B}) = -det(\mathbf{A})$.

En los ejemplos siguientes, pasamos de **A** a **T** por operaciones de filas, calculamos $det(\mathbf{T})$ y lo corregimos, teniendo en cuenta los factores introducidos por las operaciones de tipo I y tipo III, para obtener $det(\mathbf{A})$.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, queremos hallar la matriz triangular **T** que se obtiene a partir de **A** por aplicaciones de operaciones por fila.

$$\mathbf{A}\quad \begin{array}{cccc} (1) & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \qquad e_{21}(-1);\ e_{31}(-2)$$

$$\mathbf{B}\quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & (1) & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \qquad e_{43}(-2);\ e_{23} \qquad det(\mathbf{B}) = det(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{C}\quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & (-1) \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{array} \qquad e_4(2);\ e_{43}(3) \qquad det(\mathbf{C}) = (-1)\ det(B) = (-1)det(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{T}\quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array} \qquad det(\mathbf{T}) = 2.det(\mathbf{C}) = 2.(-1)det(\mathbf{A})$$

Luego, como $det(\mathbf{T}) = 1.1.(-2).7 = -14$ se tiene que $det(\mathbf{A}) = \dfrac{det(\mathbf{T})}{(-1)\cdot 2} = \dfrac{-14}{-2} = 7$.

Ejemplo 2

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, queremos hallar la matriz triangular **T** que se obtiene a partir de **A** por aplicaciones de operaciones por fila.

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{A} & \begin{array}{rrr} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{array} & e_3\left(\tfrac{1}{2}\right) & \\
\hline
\mathbf{B} & \begin{array}{rrr} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} & e_{13} & det(\mathbf{B}) = \tfrac{1}{2}\, det(\mathbf{A}) \\
\hline
\mathbf{C} & \begin{array}{rrr} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{array} & e_{21}(-3);\ e_{31}(-4) & det(\mathbf{C}) = (-1).det(B) = (-1).\left(\tfrac{1}{2}\right).det(\mathbf{A}) \\
\hline
\mathbf{D} & \begin{array}{rrr} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -5 & -10 \end{array} & e_{32}\left(\tfrac{-5}{8}\right) & det(\mathbf{D}) = det(\mathbf{C}) = (-1).\left(\tfrac{1}{2}\right).det(\mathbf{A}) \\
\hline
\mathbf{T} & \begin{array}{rrr} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -\tfrac{15}{2} \end{array} & & det(\mathbf{T}) = det(\mathbf{D}) = (-1).\left(\tfrac{1}{2}\right).det(\mathbf{A})
\end{array}$$

Luego, como $det(\mathbf{T}) = 1.(\text{-}8).\left(\text{-}\tfrac{15}{2}\right) = 60$ se tiene que $det(\mathbf{A}) = \dfrac{det(\mathbf{T})}{(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)} = -120$.

3.2 Aplicaciones Algebraicas de la Función Determinante

3.2.1. Criterio para la Inversibilidad de una Matriz

La realización de operaciones elementales de filas sólo puede modificar el determinante de una matriz multiplicándolo por factores no nulos, por lo tanto si **R** es la reducida por filas de **A** se tiene:

$$det(\mathbf{A}) \neq 0 \text{ sí y sólo si } det(\mathbf{R}) \neq 0$$

Recordando que

- la reducida por filas de una matriz cuadrada es la identidad o tiene una fila nula

y que

- **A** es inversible sí y sólo si su reducida es la matriz identidad,

resulta: $\det(\mathbf{A}) \neq 0 \iff \det(\mathbf{R}) \neq 0 \iff \mathbf{R} = \mathbf{I} \iff \mathbf{A}$ es inversible .

Por lo tanto

> **A** es **inversible** sí y sólo si $det(\mathbf{A}) \neq 0$

Teniendo en cuenta que una matriz es inversible sí y sólo si sus columnas son linealmente independientes, resulta también el siguiente criterio para la independencia lineal de *n* vectores de $\mathbf{K}^{\mathbf{n\times 1}}$

> $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n$ son linealmente independientes sí y sólo si $det\left(\left[\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n\right]\right) \neq 0$

3.2.2. Inversa de una Matriz

> **Definición 3.2.2** Sea $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{\mathbf{n\times n}}$. Llamaremos **matriz adjunta** de **A** a la matriz
>
> $adj(\mathbf{A}) = \left[C_{ij}\right]^{\mathbf{T}}$ donde C_{ij} es el cofactor de lugar (i,j).

Por lo tanto, para obtener la matriz adjunta debemos construir la matriz de los cofactores de la matriz **A** y transponerla.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ de donde al calcular los cofactores se tiene: $C_{11} = 0$; $C_{12} = 4$; $C_{13} = -2$ $C_{21} = -1$; $C_{22} = -4$; $C_{23} = 3$; $C_{31} = 1$; $C_{32} = -2$; $C_{33} = 1$. Luego la adjunta de **A** es:

$$adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{\mathbf{n\times n}}$ si se realiza el producto de **A** por $adj(\mathbf{A})$, el elemento (i, j) del producto es la suma de los elementos de la fila *i* de la matriz **A** multiplicados por los elementos de la columna *j* de $adj(\mathbf{A})$, es decir:

$$\left[\mathbf{A}.\, adj(\mathbf{A})\right]_{ij} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$$

- Cuando $j = i$ se tiene el desarrollo por cofactores por la fila i de $det(\mathbf{A})$; por lo tanto los elementos de la diagonal principal de la matriz $\mathbf{A}\,.\,adj(\mathbf{A})$ son iguales a $det(\mathbf{A})$.

- Cuando $j \neq i$ se tiene la suma de los elementos de la fila i multiplicados por los cofactores de otra fila; por lo tanto el correspondiente elemento de la matriz producto es igual a cero.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{i1} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{1i} & \cdots & C_{ii} & \cdots & C_{ni} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{in} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} = adj(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} det(\mathbf{A}) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & det(\mathbf{A}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & det(\mathbf{A}) \end{bmatrix} = \mathbf{A}\cdot adj(\mathbf{A})$$

Resulta $\mathbf{A}\,.\,adj(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A})\,.\,\mathbf{I}$.

Si **A** es inversible entonces $det(\mathbf{A}) \neq 0$, por lo tanto se tiene:

$\mathbf{A}\,.\,adj(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A})\,.\,\mathbf{I}$ multiplicamos por $\dfrac{\mathbf{1}}{det(\mathbf{A})}$ y asociamos convenientemente

$$\frac{\mathbf{1}}{det(\mathbf{A})}\,.\,\left(\mathbf{A}\,.\,adj(\mathbf{A})\right) = \mathbf{A}\,.\left(\frac{\mathbf{1}}{det(\mathbf{A})}\,.\,adj(\mathbf{A})\right) = \mathbf{I}$$

Esta expresión muestra que la matriz $\left(\dfrac{\mathbf{1}}{det(\mathbf{A})}\,.\,adj(\mathbf{A})\right)$ es la inversa de **A**. Luego

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\frac{\mathbf{1}}{det(\mathbf{A})}\,.\,adj(\mathbf{A})\right).$$

Hemos obtenido así una fórmula que expresa $\mathbf{A}^{-1}$. Debe observarse que el interés de la fórmula es esencialmente teórico pues su aplicación es muy laboriosa para matrices de orden $n > 3$. En el ejemplo siguiente la emplearemos para calcular la inversa de una matriz 3×3.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, la matriz adjunta es $adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $det(\mathbf{A}) = 2$ luego la matriz inversa de $\mathbf{A}$ está dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.2.3. Regla de Cramer

Teorema 3.3.3 Sea $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{\mathbf{n \times n}}$. El sistema $\mathbf{A.X = H}$ de n ecuaciones con n incógnitas tiene solución única para todo $\mathbf{H}$

sí y sólo si $\mathbf{A}$ es inversible

sí y sólo si $det(\mathbf{A}) \neq 0$

siendo la única solución la *n-upla* $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ con:

$$\overline{x}_j = \frac{det\left[\mathbf{A}^{\mathbf{1}}, ..., \mathbf{A}^{j-1}, \mathbf{H}, \mathbf{A}^{j+1}, ..., \mathbf{A}^n\right]}{det(\mathbf{A})} \quad \text{para} \quad j = 1, 2, ..., n$$

Demostración:

Si $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ es la solución del sistema, se verifica:

$$\overline{x}_1 . \mathbf{A}^{\mathbf{1}} + \cdots + \overline{x}_j . \mathbf{A}^j + \cdots + \overline{x}_n \mathbf{A}^n = \mathbf{H} \qquad \text{Por lo tanto:}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{lugar } j}}{det\left[\mathbf{A}^{\mathbf{1}}, ..., \mathbf{H}, ..., \mathbf{A}^n\right]} = det\left[\mathbf{A}^{\mathbf{1}}, ..., \underbrace{\left(\overline{x}_1 \mathbf{A}^{\mathbf{1}} + \cdots + \overline{x}_j \mathbf{A}^j + \cdots + \overline{x}_n \mathbf{A}^n\right)}_{\substack{\downarrow \\ \text{lugar } j}}, ..., \mathbf{A}^n\right]$$

Por las propiedades 1) y 2) de la definición de función determinante resulta:

$$det\left[\mathbf{A}^{\mathbf{1}}, \ldots, \mathbf{H}, \ldots, \mathbf{A}^n\right] =$$
$$= \overline{x}_1 \, det\left[\mathbf{A}^{\mathbf{1}}, \ldots, \mathbf{A}^{\mathbf{1}}, \ldots, \mathbf{A}^n\right] + \cdots + \overline{x}_j \, det\left[\mathbf{A}^{\mathbf{1}}, \ldots, \mathbf{A}^j, \ldots, \mathbf{A}^n\right] + \cdots + \overline{x}_n \, det\left[\mathbf{A}^{\mathbf{1}}, \ldots, \mathbf{A}^n, \ldots, \mathbf{A}^n\right]$$

El único término que no se anula es el de orden *j*, en los restantes aparecen determinantes de matrices con dos columnas iguales. Por lo tanto:

$$det\left[\mathbf{A^1},\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{A}^n\right]=\overline{x}_j\ det\left[\mathbf{A^1},\ldots,\mathbf{A}^j,\ldots,\mathbf{A}^n\right]=\overline{x}_j\ det(\mathbf{A})$$

Por ser $det(\mathbf{A})\neq 0$ se puede despejar $\overline{x}_j$ y se obtiene: $\overline{x}_j=\dfrac{det\left[\mathbf{A^1},\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{A}^n\right]}{det(\mathbf{A})}$.#

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea el sistema $\begin{cases}2x_1-3x_2=1\\-x_1+2x_2=3\end{cases}\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}.\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}}_{\mathbf{X}}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}}_{\mathbf{H}}$

$$\overline{x}_1=\frac{det\begin{bmatrix}1&-3\\3&2\end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}}=\frac{11}{1}=11;\qquad \overline{x}_2=\frac{det\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}}=\frac{7}{1}=7.$$

Observación: Igual que la fórmula para la matriz inversa, la Regla de Cramer es de importancia esencialmente teórica. Para $n>3$ su aplicación resulta excesivamente laboriosa, por la cantidad de multiplicaciones y divisiones que importa, muy superior a los que se requieren con otros métodos de cálculo.

3.3 Valores y Vectores Propios de una Matriz

3.3.1. Transformaciones en $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$

En esta subsección, veremos que una matriz puede usarse para transformar vectores y actuar como un tipo de "función" de la forma **w** =T(**v**), donde la variable independiente **v** y la variable dependiente **w** son vectores. Ahora esta noción se hará más precisa y se observarán varios ejemplos de tales transformaciones matriciales, lo que conduce al concepto de *transformación (aplicación) lineal*, que veremos en el capítulo 4.

La ecuación matricial $\mathbf{A.X=b}$ se puede interpretar como que la matriz **A** actúa sobre el vector **X** (por multiplicación) produciendo un nuevo vector **b**.

Sean $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{\mathbf{m\times n}}$ y $\mathbf{X}\in\mathbb{R}^{\mathbf{n\times 1}}$. La correspondencia $\mathbf{X}\to\mathbf{A.X}$ define una función o **transformación** entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^{\mathbf{n\times 1}}$ y $\mathbb{R}^{\mathbf{m\times 1}}$, y se indica:

$$\begin{aligned}\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^{\mathbf{n\times 1}} &\to \mathbb{R}^{\mathbf{m\times 1}} \\ \mathbf{X} &\to \mathbf{T_A(X)}\end{aligned} \qquad \text{donde} \quad \mathbf{T_A(X)} = \mathbf{A.X} = \mathbf{b}$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Para la matriz **A** y los vectores **X** y **b** dados, la expresión $\mathbf{A.X=b}$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \mathbf{A}}}{\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}} . \underset{\substack{\uparrow\\ \mathbf{X}}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \underset{\substack{\uparrow\\ \mathbf{b}}}{\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}}$$

puede ser vista como la imagen de **X** por una transformación.

Esto es, al multiplicar el vector $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{4\text{x}1}$ por la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ éste se transforma en el vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{2\text{x}1}$. Desde este punto de vista, resolver el sistema $\mathbf{A.X=b}$ equivale a encontrar todos los vectores $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{4\text{x}1}$ que se transformen en el vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{2\text{x}1}$ bajo la acción de multiplicar por **A**.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Se define la función:

$$\begin{aligned}\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^{3\text{x}1} &\to \mathbb{R}^{2\text{x}1} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &\to \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Considerando la identificación entre los vectores de $\mathbb{R}^{\mathbf{n\times 1}}$ y $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ puede definirse equivalentemente

$$\begin{aligned}\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^{\mathbf{n}} &\to \mathbb{R}^{\mathbf{m}} \\ \mathbf{X} &\to \mathbf{A.X}\end{aligned}$$

a la cual también llamamos transformación o mapeo de $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ en $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$. Se sobre-entiende que el vector **X** se expresa como una matriz columna.

En el caso particular en que m=n, la matriz **A** es cuadrada y permite establecer una correspondencia entre vectores de $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^{\mathbf{n}} &\to \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \\ \mathbf{X} &\to \mathbf{A.X}\end{aligned}$$

en cuyo caso $\mathbf{T_A}$ se llama **operador** sobre $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$.

Ejemplo 4

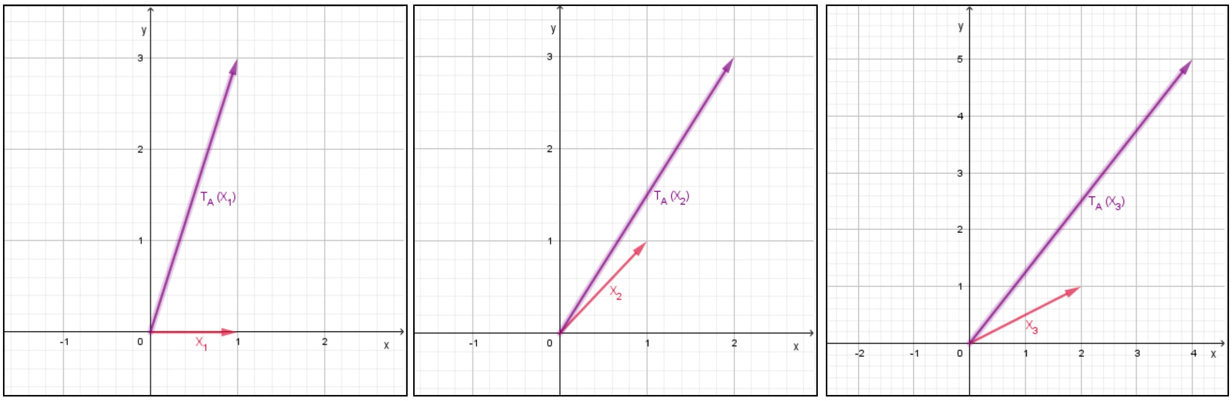
Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Consideramos $\begin{aligned}\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{X} &\to \mathbf{A.X}\end{aligned}$ $\mathbf{T_A}$ transforma los vectores de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ en nuevos vectores de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$.

Podemos analizar el efecto geométrico de esta transformación:

Sean: $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ entondes para obtener $\mathbf{T_A}(\mathbf{X}_1)$; $\mathbf{T_A}(\mathbf{X}_2)$ y $\mathbf{T_A}(\mathbf{X}_3)$ plantemos:

$$\mathbf{T_A}(\mathbf{X}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}; \ \mathbf{T_A}(\mathbf{X}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \ \text{y} \ \mathbf{T_A}(\mathbf{X}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Graficando se tiene:



Observación: En las figuras precedentes, se tiene que al multiplicar el vector dato (línea roja) por la matriz **A**, éste se transforma en otro vector (línea lila) que en general está rotado y dilatado o contraído respecto al original.

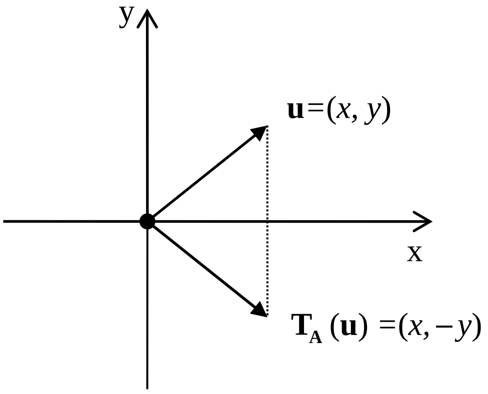
Teniendo en cuenta lo manifestado en la observación para los vectores del ejemplo 4, podemos señalar de manera general que:

Si a $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ lo representamos por sus coordenadas $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2x1}$, entonces si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

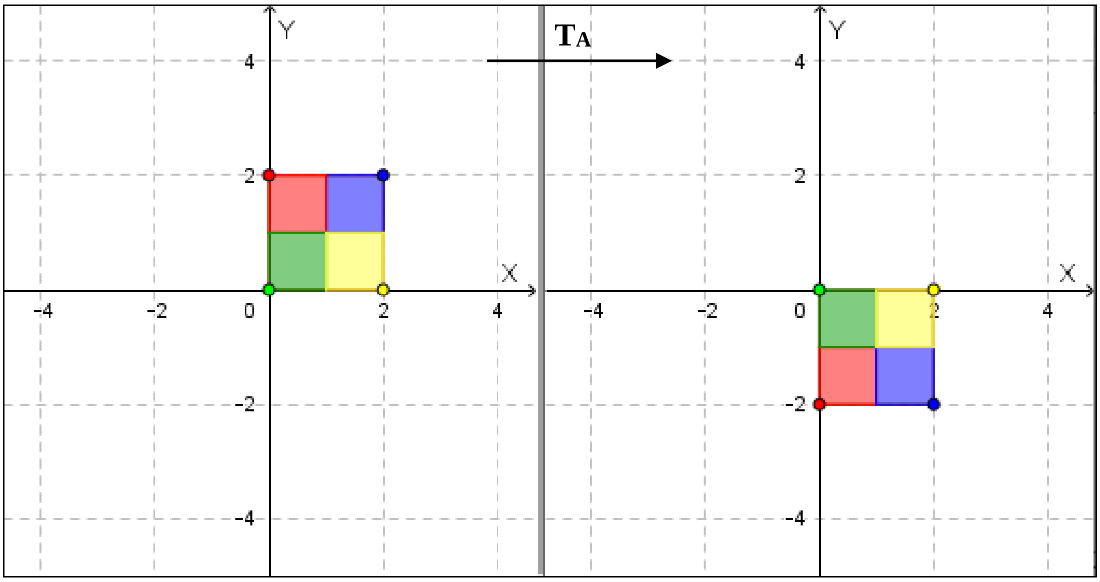
se tiene que $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donde $\mathbf{T_A}(\mathbf{u})$ será la "Reflexión respecto al eje x del vector **u**''
$\mathbf{u} \to \mathbf{T_A}(\mathbf{u})$

$$\mathbf{T_A}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

que puede ser representado gráficamente por:

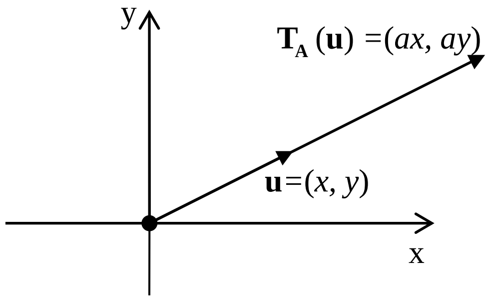


Así, por ejemplo, si consideramos el cuadrado de vértices $(0,0),(0,2),(2,2)$ y $(0,2)$ podemos observar que ocurre si aplicamos **T**

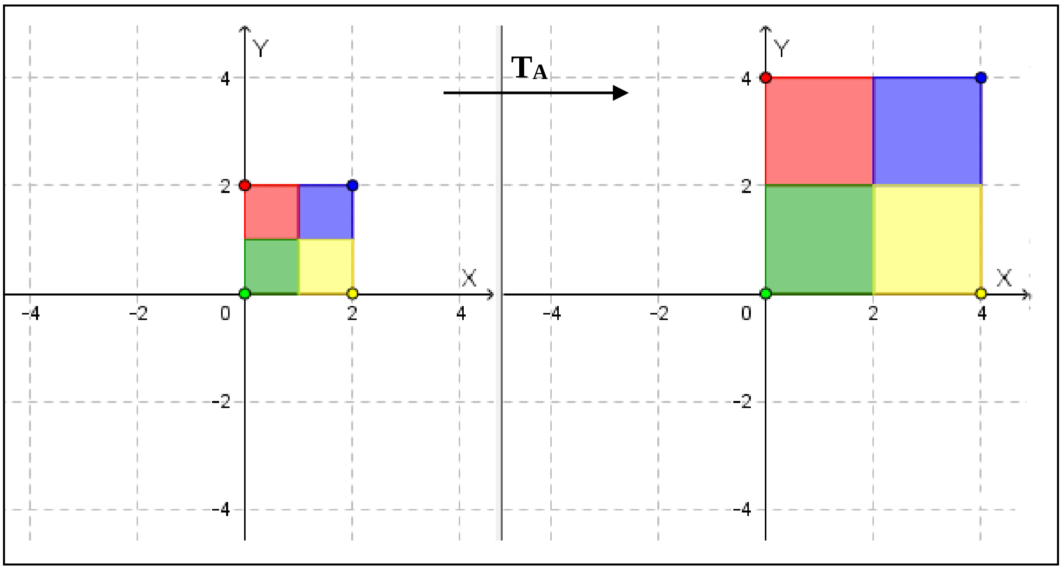


Ahora bien, si en lugar de tener la matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ consideramos la matriz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ tendremos una dilatación o una contracción según sea el valor de a. Más concretamente,

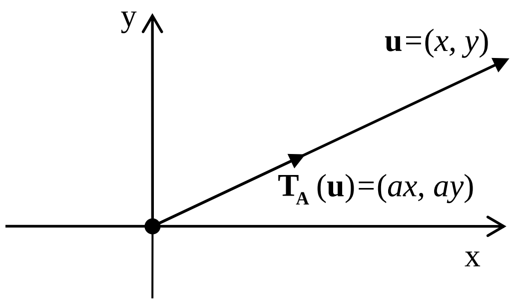
Dilatación: $\mathbf{T_A}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ si $a > 0$



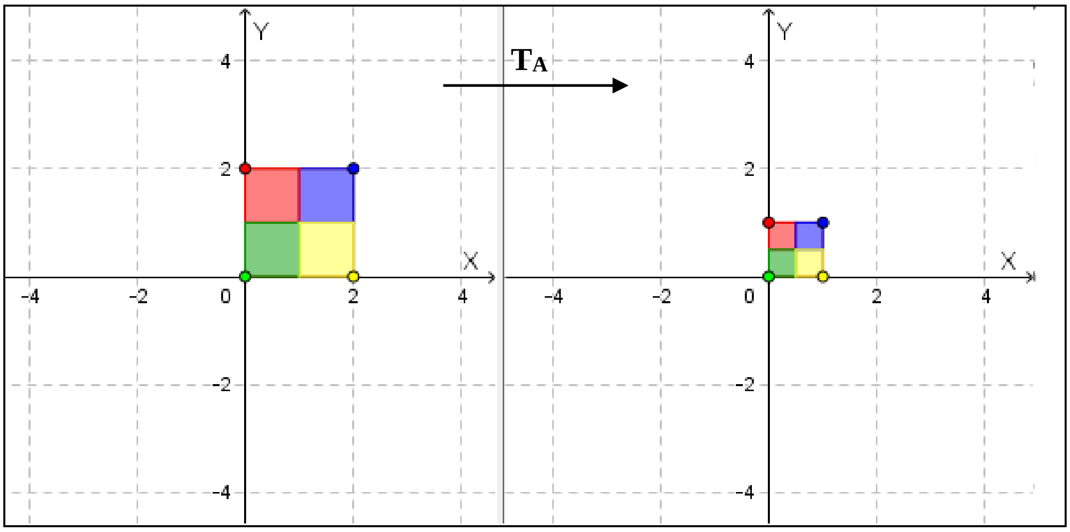
Así, por ejemplo, si consideramos nuevamente el cuadrado de vértices $(0,0), (0,2), (2,2)$ y $(0,2)$ podemos observar qué ocurre si aplicamos **T_A** siendo **A**= $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$



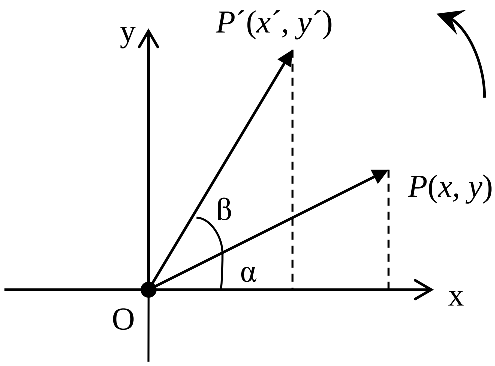
Contracción: $\mathbf{T_A}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ si $0 < a < 1$



Entonces si por ejemplo consideramos nuevamente el cuadrado de vértices $(0,0),(0,2),(2,2)$ y $(0,2)$ podemos observar qué ocurre si aplicamos $\mathbf{T_A}$ siendo $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$



Rotación: Del mismo modo que lo hicimos anteriormente, si ahora a cada punto de $\mathbb{R}^2$ lo rotamos en sentido antihorario según un ángulo β, con vértice en el origen, tenemos según se aprecia en la figura



Si denotamos con r la longitud del segmento OP (que es igual a la del segmento OP') tenemos que:

$$x = r\cos(\alpha) \qquad y = r\ \mathrm{sen}(\alpha) \tag{1}$$

y entonces

$$x' = r\cos(\alpha+\beta) \qquad y' = r\ \mathrm{sen}(\alpha+\beta) \tag{2}$$

Teniendo en cuenta las fórmulas para el seno y el coseno de una suma de ángulos se tiene que:

$$x' = r\cos(\alpha)\ \cos(\beta) - r\ \mathrm{sen}(\alpha)\ \mathrm{sen}(\beta)$$
$$y' = r\ \mathrm{sen}(\alpha)\ \cos(\beta) + r\ \cos(\alpha)\ \mathrm{sen}(\beta)$$

Sustituyendo en (1) obtenemos

$$x' = x\cos(\beta) - y\ \mathrm{sen}(\beta) \qquad y' = x\ \mathrm{sen}(\beta) + y\ \cos(\beta)$$

Esta última expresión puede escribirse matricialmente del siguiente modo:

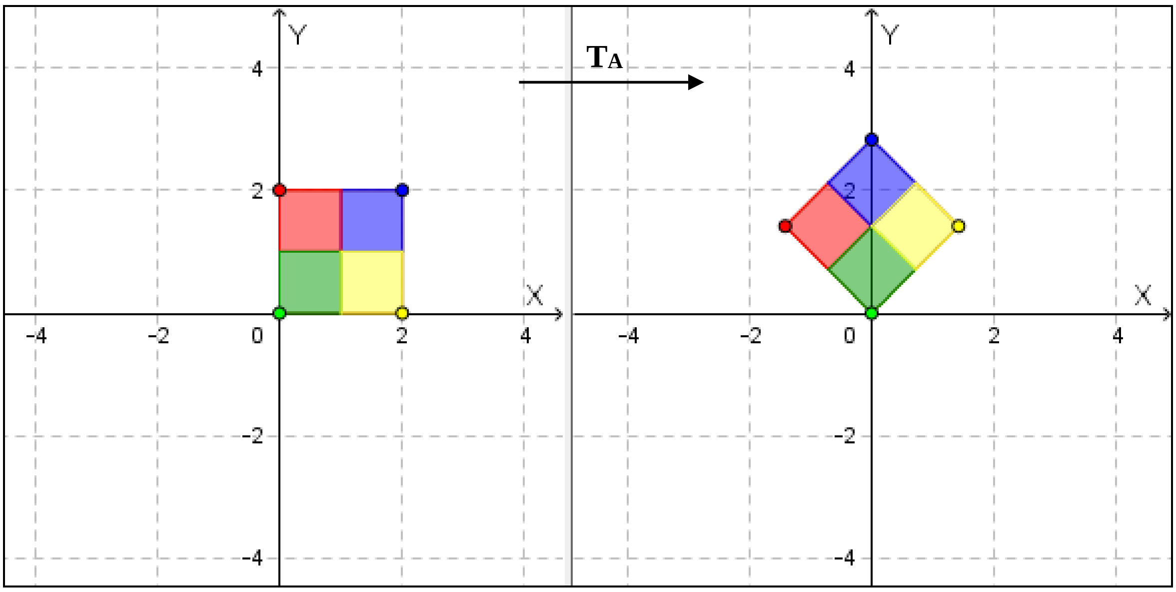
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\mathrm{sen}(\beta) \\ \mathrm{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Notar que el determinante de la matriz **A** (giro en sentido antihorario) es igual a 1.

Luego, si suponemos que $\beta = \frac{\pi}{4}$ resulta $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$ y por lo tanto la se tiene que

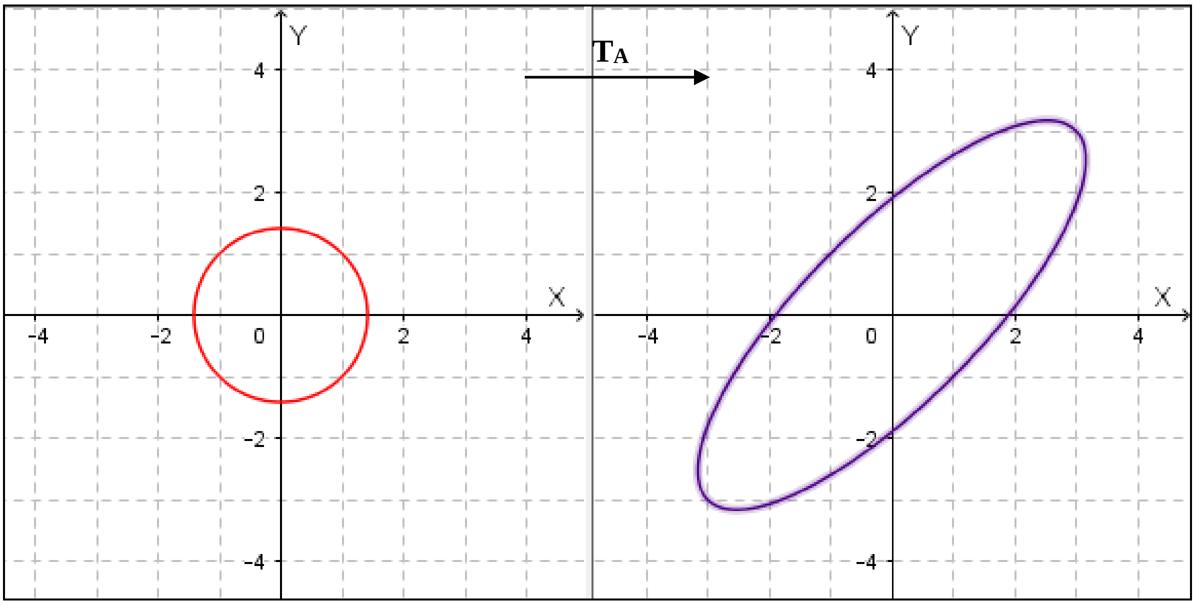
$$\mathbf{T}_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, considerando nuevamente el cuadrado de vértices $(0,0), (0,2), (2,2)$ y $(0,2)$ podemos observar qué ocurre si aplicamos **TA** siendo **A**= $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$



Ejemplo 5

Sea $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$. Consideramos $\mathbf{T_A}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{X} \to \mathbf{A.X}$ y queremos ver el efecto geométrico de esra transformación en los elementos de la Circunferencia de centro (0,0) y radio 1.



Sean, por ejemplo, $\mathbf{X}_1=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}$; $\mathbf{X}_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$; $\mathbf{X}_3=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ y obtengamos $\mathbf{A.X}_1$; $\mathbf{A.X}_2$; $\mathbf{A.X}_3$

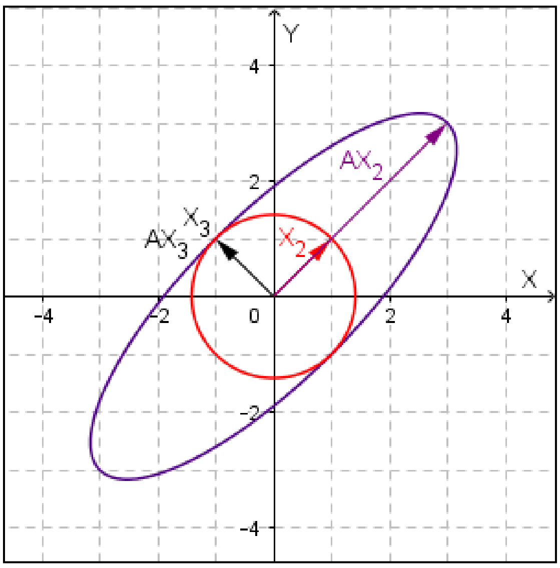
$$\mathbf{A.X}_1=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{A.X}_2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix} \qquad \mathbf{A.X}_3=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

Observar que:

En el caso de $\mathbf{X}_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ se tiene que $\mathbf{A.X}_2=3\mathbf{X}_2$

- En el caso de $\mathbf{X}_3=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ se tiene que $\mathbf{A.X}_3=1\mathbf{X}_3$

¿Para qué $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ se verifica $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$?



¿Siempre es posible hallar un vector que al transformarlo mediante la multiplicación por **A** se obtenga un vector que mantiene la dirección? ¿mantendrá su longitud y/o sentido o se modificarán?

En la próxima sección estudiaremos si existen estos vectores para una matriz $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ dada.

3.3.2. Valores y Vectores Propios

Interesa estudiar si dada una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n \times n}}$ existen vectores $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ $(\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n \times 1}})$ tal que $\mathbf{X}$ y $\mathbf{A.X}$ sean múltiplos escalares entre si.

> **Definición 3.3.2** Sea la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n \times n}}$
>
> 1) Un vector no nulo $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n \times 1}}$ se llama **vector propio** de la matriz **A** si existe algún escalar λ tal que: $\mathbf{A.X} = \lambda.\mathbf{X}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.
>
> 2) En caso de existir un vector $\mathbf{X} \neq \overline{\mathbf{0}}$ tal que $\mathbf{A.X} = \lambda.\mathbf{X}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces al escalar λ de lo llama **valor propio** de la matriz **A**.

Nota: Los vectores propios también se llaman **vectores característicos** o **eigenvectores** de la matriz **A**. De la misma forma, a los valores propios también se los designa como **valores característicos** o **eigenvalores** de la matriz **A**.

Ejemplos

Ejemplo 1

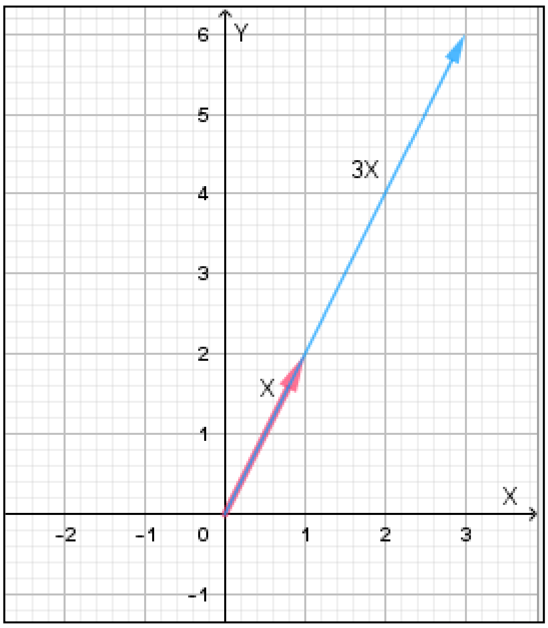
Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

El vector $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es un vector propio de la matriz **A** asociado al valor propio $\lambda = 3$.

En efecto

$$\mathbf{A.X} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3.\mathbf{X}$$

Geométricamente se tiene:



Ejemplo 2

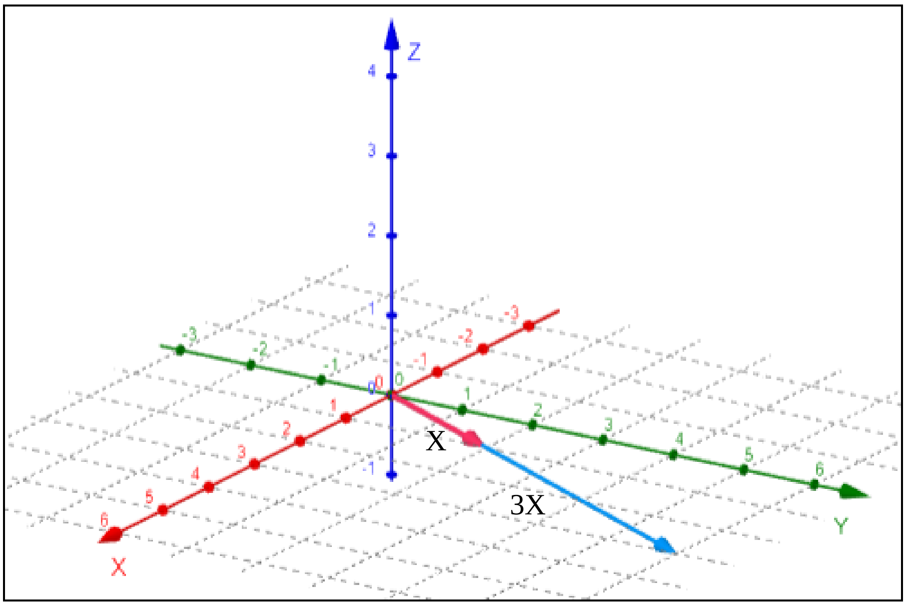
Sea la matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\8&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

El vector $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$ es un vector propio de la matriz **A** asociado al valor propio $\lambda = 3$.

En efecto

$$\mathbf{A}.\mathbf{X}=\begin{bmatrix}3&0&0\\8&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\\0\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}=3.\mathbf{X}$$

Geométricamente se tiene:



Ejemplo 3

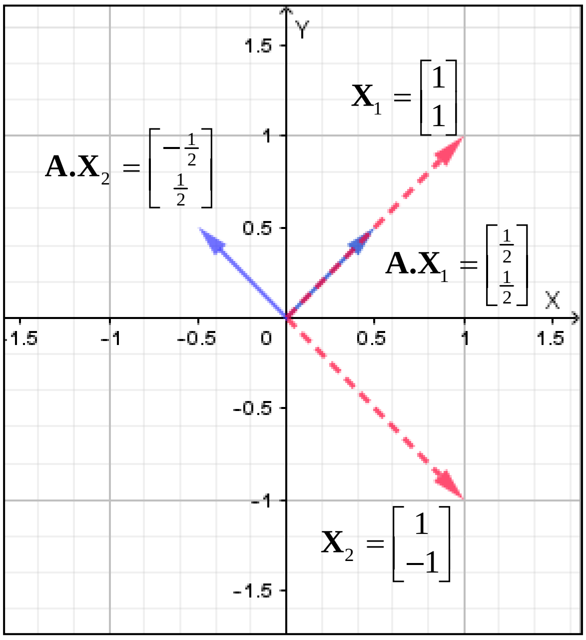
Sea la matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$. Los vectores $\mathbf{X}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ y $\mathbf{X}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ son vectores propios de la matriz **A** asociados a los valores propios $\lambda_1=\frac{1}{2}$ y $\lambda_2=-\frac{1}{2}$ respectivamente.

En efecto

$$\mathbf{A}.\mathbf{X}_1=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}.\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}.\mathbf{X}_1$$

$$\mathbf{A.X}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right) . \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right) . \mathbf{X}_2$$

Geométricamente se tiene:



Observación: En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ la multiplicación por la matriz **A**, mapea a sus vectores propios en vectores ubicados sobre la misma recta que pasa por el origen en la que se ubica **X.**

Dependiendo de la magnitud y signo del valor propio asociado λ, la acción de la matriz **A** sobre **X** hace que éste se comprima o se alargue por un factor λ, con un cambio de sentido si λ es negativo.

3.3.3. Determinación de los Valores Propios de la Matriz A

Dada una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n \times n}}$ y teniendo en cuenta la sección 3.3.2 surgen las siguientes preguntas:

- ¿Tiene esta matriz valores propios?
- En caso de existir, ¿cómo se determinan los valores propios de **A**?

Comenzaremos por responder el segundo de estos interrogantes.

Teorema 3.3.3.1 Sea la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n \times n}}$.

λ es valor propio de $\mathbf{A}$ sí y sólo si $det\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = 0$.

Demostración:

De la definición de valor propio, debe existir algún vector **X** no nulo, tal que

$$\mathbf{A.X} = \lambda.\mathbf{X} \qquad (1)$$

Recordando que la matriz unidad **I** es elemento neutro para la multiplicación de matrices se tiene que $\mathbf{X} = \mathbf{I.X}$, entonces la expresión (1) puede escribirse:

$$\mathbf{A.X} = \lambda.\mathbf{I.X}$$

Operando se tiene:

$$\left(\lambda.\mathbf{I.X} - \mathbf{A.X}\right) = \mathbf{0}$$

$$\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

Para que λ sea un valor propio de la matriz **A** debe existir un vector $\mathbf{X} \neq \bar{\mathbf{0}}$ que satisfaga la ecuación (2). Como se trata de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de igual número de incognitas que de ecuaciones, para que existan soluciones distintas de la trivial es necesario que la matriz de los coeficientes sea no inversible lo que equivale a decir que su determinante debe ser igual a cero. Esto es:

Existe $\mathbf{X} \neq \bar{\mathbf{0}}$ tal que $\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \mathbf{0}$ sí y sólo si $\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)$ es no inversible sí y sólo si $det\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = 0$. #

Definición 3.3.3.1 Sea la matriz $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{R}^{\mathbf{n \times n}}$.

El determinante

$$p(\lambda) = det\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = det\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}$$

se denomina **polinomio característico** de la matriz **A**.

Mientras que la ecuación

$$p(\lambda) = det\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = 0$$

es la llamada **ecuación característica** de la matriz **A**.

Observación: La ecuación característica $p(\lambda) = det\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = 0$ es una ecuación algebraica de grado *n* con coeficiente conductor igual a uno, es decir, una ecuación de la forma:

$$p(\lambda) = \lambda^n + C_{n-1}\,\lambda^{n-1} + C_{n-2}\,\lambda^{n-2} + \cdots + C_1\,\lambda + C_0 = 0$$

Los coeficientes $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1} \in \mathbf{K}$ son funciones de los elementos a_{ij} de la matriz **A.** En particular:

$$\begin{aligned} C_{n-1} &= -\left(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}\right) = -\ Traza(\mathbf{A}) \\ C_0 &= (\text{-}1)^n\, det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

Si $n = 2$, se tiene $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matriz 2x2 con ecuación característica:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + C_{2-1}\,\lambda^{2-1} + C_0 = 0 \quad \text{con } C_1 = -(a+d) \quad \text{y } C_0 = (ad\ \text{-}\ cb) = det(\mathbf{A})\,.$$

Sustituyendo resulta:

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - cb) = 0$$

Cuando $n > 2$, las funciones que expresan los restantes coeficientes de la ecuación característica no son tan sencillas.

Además, si la ecuación característica carece de soluciones en el cuerpo de trabajo, la matriz **A** no tiene valores propios.

Podemos resumir lo hasta aquí analizado de la búsqueda de los valores propios de una matriz **A** en el siguiente teorema:

Teorema 3.3.3.2 Sean $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n \times n}}$ una matriz y $\lambda \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- λ es un valor propio de la matriz **A**.
- El sistema de ecuaciones lineales $\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \mathbf{0}$ tiene soluciones distintas
- de la trivial.
- Existe $\mathbf{X} \neq \bar{\mathbf{0}}$ tal que $\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \mathbf{0}$ es decir tal que $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \lambda.\mathbf{X}$.
- λ es solución de la ecuación característica $p(\lambda) = det\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = 0$.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$.

Para investigar la existencia de valores propios construimos la matriz $\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}(\lambda-2)&-1\\0&(\lambda-2)\end{bmatrix}$ y obtenemos el polinomio característico

$$p(\lambda)=det\,(\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A})=(\lambda-2).(\lambda-2).$$

Luego la ecuación característica $0=(\lambda-2).(\lambda-2)=(\lambda-2)^2$ tiene una raíz real doble.

Entonces $\lambda=2$ es valor propio de **A**.

Ejemplo 2

Sea la matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$.

Construimos la matriz $\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda&1\\-1&\lambda\end{bmatrix}$ y el polinomio característico resulta:

$$p(\lambda)=det\,(\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A})=\lambda^2+1.$$

La ecuación característica $\lambda^2+1=0$ no tiene raíces reales.

Como el campo de trabajo es $\mathbf{K}=\mathbb{R}$ diremos entonces que la matriz **A no tiene valores propios**.

Ahora bien, si se tomara la misma matriz **A** sobre el cuerpo $\mathbf{K}=\mathbb{C}$ de los números complejos, entonces se obtiene la misma ecuación característica $\lambda^2+1=0$. En este caso, la ecuación sí tiene raíces en el cuerpo: $\lambda_1=i\quad y\quad \lambda_2=-i$, que valores propios de **A**.

Ejemplo 3

Sea la matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&1\\1&0&4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$. Construimos la matriz $\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}(\lambda-1)&0&0\\-1&(\lambda-2)&-1\\-1&0&(\lambda-4)\end{bmatrix}$.

Luego el polinomio característico está dado por:

$$p(\lambda)=det(\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A})=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4).$$

En consecuencia, la ecuación característica es $0 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$ y las raíces de dicha ecuación son: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 4$. Luego son los valores propios de la matriz **A**.

3.3.4. Determinación de los Vectores Propios de la Matriz A

Conocidos los valores propios de la matriz **A** resta encontrar los vectores propios correspondientes.

Recordando la **Definición 3.3.2** se deduce que **X** es vector propio de la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n \times n}}$ sí y sólo si

$$\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \bar{\mathbf{0}}.$$

Es decir, que los vectores propios **X** son las soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogénea cuya matriz de coeficientes es $\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)$. Esto es, los vectores propios son los vectores del subespacio nulo de la matriz $\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)$.

Luego, para cada λ_i valor propio de **A** tendremos un subespacio $\left\{\mathbf{X} / \left(\lambda_i.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \bar{\mathbf{0}}\right\}$ asociado a dicho valor propio.

Definición 3.3.4.1 Sea la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n \times n}}$ y sea λ valor propio de **A**. El conjunto de soluciones de $\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \bar{\mathbf{0}}$ se denomina **subespacio propio asociado** al valor propio λ y lo denotaremos

$$\mathbf{V}_\lambda = \left\{\mathbf{X} / \left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \bar{\mathbf{0}}\right\}.$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ cuyos valores propios (obtenidos en el Ejemplo 3 de la sección anterior) son $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 4$.

Nos proponemos hallar los subespacios propios correspondientes a cada uno de dichos valores propios.

Consideremos la matriz $\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}(\lambda-1) & 0 & 0\\ -1 & (\lambda-2) & -1\\ -1 & 0 & (\lambda-4)\end{bmatrix}$ y busquemos para cada valor propio (λ_i) de **A,** los vectores $\mathbf{X}\in\mathbb{R}^{3\times1}$ tal que

$$\left(\lambda_i.\mathbf{I}-\mathbf{A}\right).\mathbf{X}=\begin{bmatrix}(\lambda_i-1) & 0 & 0\\ -1 & (\lambda_i-2) & -1\\ -1 & 0 & (\lambda_i-4)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad (*)$$

a) Para i=1, $\lambda_1=1$, reemplazando λ_i por 1 en (*) se obtiene el sistema

$$\left(1.\mathbf{I}-\mathbf{A}\right).\mathbf{X}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Resolviéndolo, hallamos que el conjunto de soluciones es $\mathbf{V}_{\lambda_1=1}=\left\langle\begin{bmatrix}-3\\ 2\\ 1\end{bmatrix}\right\rangle$.

$\mathbf{V}_1$ es el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1=1$.

b) Para i=2, $\lambda_2=2$, reemplazando λ_i por 2 en (*) se obtiene el sistema

$$\left(2.\mathbf{I}-\mathbf{A}\right).\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Resolviéndolo, hallamos que el conjunto de soluciones es $\mathbf{V}_{\lambda_2=2}=\left\langle\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\right\rangle$.

$\mathbf{V}_2$ es el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_2=2$.

c) Para i=3, $\lambda_3=4$, reemplazando λ_i por 4 en (*) se obtiene el sistema

$$\left(4.\mathbf{I}-\mathbf{A}\right).\mathbf{X}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Resolviéndolo, hallamos que el conjunto de soluciones es $\mathbf{V}_{\lambda_3=4}=\left\langle\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}\right\rangle$.

$\mathbf{V}_4$ es el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_3=4$.

Ejemplo 2

Sea la matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$. Construimos la matriz $\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&(\lambda-1)&0\\0&0&(\lambda-1)\end{bmatrix}$ y

obtenemos que el polinomio característico de **A** es $p(\lambda)=det(\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A})=\lambda(\lambda-1)^2$. En consecuencia, la ecuación característica de la matríz **A** resulta $0=\lambda(\lambda-1)^2$.

Luego los valores propios de **A** son $\lambda_1=0$; $\lambda_2=1$ y $\lambda_3=1$. Como se puede observar $\lambda_2=1$ es un valor propio de multiplicidad 2.

Ahora, nos proponemos hallar los subespacios propios correspondientes a cada uno de los valores propios.

a) Para $\lambda_1=0$, reemplazando λ por 1 se obtiene el sistema

$$\left(0.\mathbf{I}-\mathbf{A}\right).\mathbf{X}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

La solución del sistema está dada por el subespacio propio asociado al valor propio 0: $\mathbf{V}_0=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\rangle$.

b) Para $\lambda_2=1$, reemplazando λ por 1 se obtiene el sistema

$$\left(1.\mathbf{I}-\mathbf{A}\right).\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

El subespacio propio asociado al valor propio 1 está dado por: $\mathbf{V}_1=\left\langle\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle$.

Teorema 3.3.4.1 Sea la matriz $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{\mathbf{n\times n}}$. Si $\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,...,\mathbf{X}_r$ son vectores propios que corresponden a valores propios distintos $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ de la matriz **A**, entonces el conjunto $\{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,...,\mathbf{X}_r\}$ es linealmente independiente.

Demostración:

Supongamos que $\{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,...,\mathbf{X}_r\}$ es un conjunto linealmente dependiente. Entonces podemos pensar que hay un índice mínimo *p* tal que $\mathbf{X}_{p+1}$ es una combinación lineal de los vectores precedentes (que son linealmente independientes) y que existen escalares $c_1,c_2,...,c_p$ tales que

$$c_1\,\mathbf{X}_1 + c_2\,\mathbf{X}_2 + \cdots + c_p\,\mathbf{X}_p = \mathbf{X}_{p+1} \qquad (1)$$

Multiplicando a ambos lados de (1) por **A** y recordando el hecho de que $\mathbf{A}.\mathbf{X}_k = \lambda_k.\mathbf{X}_k$ para todo *k*, obtenemos:

$$c_1\,\mathbf{A}.\mathbf{X}_1 + c_2\,\mathbf{A}.\mathbf{X}_2 + \cdots + c_p\,\mathbf{A}.\mathbf{X}_p = \mathbf{A}.\mathbf{X}_{p+1}$$

$$c_1\lambda_1.\mathbf{X}_1 + c_2\lambda_2.\mathbf{X}_2 + \cdots + c_p\lambda_p.\mathbf{X}_p = \lambda_{p+1}.\mathbf{X}_{p+1} \qquad (2)$$

Por otro lado, multiplicando a ambos miembros de (1) por λ_{p+1} y restando ese resultado a (2), se tiene

$$c_1\left(\lambda_1 - \lambda_{p+1}\right).\mathbf{X}_1 + c_2\left(\lambda_2 - \lambda_{p+1}\right).\mathbf{X}_2 + \cdots + c_p\left(\lambda_p - \lambda_{p+1}\right).\mathbf{X}_p = \bar{\mathbf{0}}$$

Dado que $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_p\}$ es linealmente independiente, entonces $c_i = 0$ ó $\left(\lambda_i - \lambda_{p+1}\right) = 0 \;\; \forall i = 1,2,\ldots,p$.

Pero como los valores propios son distintos se tiene que $c_i = 0 \;\forall i = 1,2,\ldots,p$, luego (1) indica que $\mathbf{X}_{p+1} = \bar{\mathbf{0}}$, lo cual contradice el hecho de que sea vector propio. Por lo tanto, $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_r\}$ no puede ser linealmente dependiente como se supuso y por ende $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_r\}$ debe ser linealmente independiente. #

3.4. Diagonalización de una Matriz

Definición 3.4.1 Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$. Diremos que la matriz **A** es diagonalizable si existe una matriz inversible **P** tal que $\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P} = \mathbf{D}$ (matriz diagonal).

Se expresa que la matriz **P** diagonaliza a la matriz **A**.

Observar que el hecho que una matriz **A** sea diagonalizable, permite que dicha matriz pueda escribirse con una factorización útil de la forma $\mathbf{A} = \mathbf{P}.\mathbf{D}.\mathbf{P}^{-1}$. Esta factorización nos permite, por ejemplo, calcular rápidamente $\mathbf{A}^k$ para valores grandes de *k*.

Los valores y vectores propios de una matriz y el hecho que ésta sea diagonalizable están íntimamente vinculados. En el siguiente teorema se establece una condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada sea diagonalizable.

Teorema 3.4.1 Sea la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

A es diagonalizable

sí y sólo si

A tiene "*n*" vectores propios linealmente independientes.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supondremos que **A** es **diagonalizable** y probaremos que **A** tiene "*n*" vectores propios linealmente independientes.

Como **A** es diagonalizable, entonces existe una matriz invertible $\mathbf{P}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$ tal que $\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P}=\mathbf{D}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ matriz diagonal.

De la expresión $\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P}=\mathbf{D}$ multiplicando a ambos miembros por **P**, tenemos que $\mathbf{A}.\mathbf{P}=\mathbf{P}.\mathbf{D}$. Esto es:

$$\mathbf{A}.\mathbf{P}=\mathbf{P}.\mathbf{D}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Si se denotan con $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, ..., \mathbf{p}_n$ a los vectores columna de la matriz **P**, esto es

$$\mathbf{P}=[\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n]=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \quad & \mathbf{p}_n \end{array} \end{array}$$

y se considera el algoritmo de la multiplicación de matrices, se tiene que:

$$\mathbf{A}.\mathbf{P}=\mathbf{A}.[\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n]=[\mathbf{A}.\mathbf{p}_1 \ \mathbf{A}.\mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{A}.\mathbf{p}_n]. \qquad (2)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta el último miembro de la expresión (1), la matriz $\mathbf{A}.\mathbf{P}$ puede ser expresada en función de sus sucesivas columas, esto es:

$$\mathbf{A}.\mathbf{P}=[\lambda_1.\mathbf{p}_1 \ \lambda_2.\mathbf{p}_2 \ \cdots \ \lambda_n.\mathbf{p}_n]. \qquad (3)$$

Luego teniendo en cuenta (2) y (3) se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}.\mathbf{p_1} &= \lambda_1.\mathbf{p_1} \\ \mathbf{A}.\mathbf{p_2} &= \lambda_2.\mathbf{p_2} \\ &\vdots \\ \mathbf{A}.\mathbf{p}_n &= \lambda_n.\mathbf{p}_n \end{aligned} \qquad (4)$$

Como **P** es una matriz inversible entonces

- sus vectores columna no son cero,
- sus columnas $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, ..., \mathbf{p}_n$ son linealmente independientes.

Entonces de (4) se tiene que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son valores propios de la matriz **A** y que $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p}_n$ son sus vectores propios asociados.

Luego concluimos que **A** tiene "*n*" vectores propios linealmente independientes, que es lo que queríamos demostrar.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que **A** tiene "*n*" vectores propios linealmente independientes, probabremos que **A** es diagonalizable.

Por hipótesis **A** tiene "*n*" vectores propios linealmente independientes, sean $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p}_n$ dichos vectores y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios correspondientes.

Consideremos la matriz **P** que tiene como columnas los vectores $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p}_n$. Luego, $\mathbf{A.P}$ es la matriz cuyas columnas son $\mathbf{A.p}_1$, $\mathbf{A.p}_2$, $\ldots$, $\mathbf{A.p}_n$.
Pero $\mathbf{A.p_1} = \lambda_1.\mathbf{p_1}$, $\mathbf{A.p_2} = \lambda_2.\mathbf{p_2}$, $\ldots\ldots$, $\mathbf{A.p}_n = \lambda_n.\mathbf{p}_n$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A.P} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A.p}_1 & \mathbf{A.p}_2 & \cdots & \mathbf{A.p}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1.\mathbf{p}_1 & \lambda_2.\mathbf{p}_2 & \cdots & \lambda_n.\mathbf{p}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{P.D}
\end{aligned}
$$

Donde:

- La matriz **D** es una matriz diagonal que tiene a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de **A** como los elementos de su diagonal principal.

- Los vectores columna de **P** son vectores propios, entonces son linealmente independientes (**Teorema 3.3.4.1**). Luego **P** es una matriz invertible.

Por lo tanto la expresión $\mathbf{A.P} = \mathbf{P.D}$ se puede escribir como $\mathbf{P^{-1}.A.P} = \mathbf{D}$ lo cual implica **A es diagonalizable**. #

El teorema que acabamos de ver, brinda un camino para investigar si una matriz es o no diagonalizable. Los pasos a seguir para diagonalizar una matriz son:

1. Encontrar "*n*" vectores propios linealmente independientes de la matriz **A,** sean estos $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p}_n$.

2. Formar la matriz **P** con $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p}_n$ como sus matrices columna.

3. El producto $\mathbf{P^{-1}.A.P}$ dará por resultado una matriz diagonal donde los elementos de su diagonal principal son los valores propios de la propia matriz.

El problema básico es entonces el encontrar "*n*" vectores propios linealmente independientes.

Los siguientes enunciados, que no demostraremos, son importantes cuando se analiza esa posibilidad:

Teorema 3.4.2 Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se verifican las afirmaciones siguientes:

1) Si λ un valor propio de **A**. La dimensión del subespacio propio asociado $\mathbf{V}_\lambda$ es menor o igual que la multiplicidad de λ como raíz de la ecuación característica.

2) Si $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_r$ son subespacios propios, asociados a valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ de **A** y $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_r$ son las respectivas bases de $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_r$, entonces $\{\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2 \cup \cdots \cup \mathbf{B}_r\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente.

3) La suma de subespacios propios es directa, es decir $\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_r$.

El siguiente teorema caracteriza las matrices diagonalizables:

Teorema 3.4.3 Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

A es diagonalizable

sí y sólo si

se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) La ecuación característica de **A** tiene todas sus raíces en $\mathbb{R}$.

2) La multiplicidad de cada valor propio, como raíz de la ecuación característica, es igual a la dimensión del subespacio propio asociado.

Demostración:

$\Leftarrow$) De la **Definición 3.3.3.1** de la ecuación característica de una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se observó que ésta resulta ser una ecuación de grado *n*. Entonces:

a) Si todas las raíces son reales y distintas, sean éstas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Es decir:

$$0 = p(\lambda) = det(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n).$$

Los vectores propios asociados $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ forman un conjunto de "*n*" vectores linealmente independiente (**Teorema 3.3.4.1**). Luego por el **Teorema 3.4.1**, **A** es una matriz diagonalizable.

b) Supongamos que todas las raíces de la ecuación característica están en el cuerpo $\mathbb{R}$, sean éstas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ con multiplicidades $d_1, d_2, \ldots, d_r$ es decir:

$$0 = p(\lambda) = det(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1}(\lambda - \lambda_2)^{d_2} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{d_r} \quad \text{con} \quad d_1 + d_2 + \cdots + d_r = n$$

Si se satisface 2), entonces $\dim \mathbf{V}_{\lambda_i} = d_i \quad \forall i = 1,2,\ldots,r$ entonces teniendo en cuenta el enunciado 3) del **Teorema 3.4.2**:

$$dim\left(\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_r\right) = d_1 + d_2 + \cdots + d_r = n$$

y además, por el enunciado 2) del mismo teorema, la unión de las bases de los subespacios propios nos provee de *n* vectores propios linealmente independientes, de donde resulta que **A** es diagonalizable.

$\Rightarrow$) Veremos que si no se satisfacen las condiciones 1) ó 2), la matriz **A** resulta no diagonalizabe.

a) Si no se cumple 2) entonces algún subespacio propio supongamos $\mathbf{V}_{\lambda_i}$ es tal que tiene dimensión menor que la multiplicidad de λ_i como raíz de la ecuación característica. Es decir: $\dim \mathbf{V}_{\lambda_i} < d_i$. Luego $dim\left(\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_r\right) < n$ y no tenemos suficientes vectores propios linealmente independientes para armar la matriz **P**. Por lo tanto, la matriz **A** no es diagonalizable.

b) Si la ecuación característica tiene raíces fuera del cuerpo $\mathbb{R}$, éstos por la **Definición 3.3.2** no son valores propios de la matriz **A**. Luego la suma de las multiplicidades de los valores propios λ_i como raíces de la ecuación característica resulta $d_1 + d_2 + \cdots + d_r < n$. En consecuencia, no contamos con suficientes vectores propios linealmente independientes para armar la matriz **P** y por lo tanto **A** no es diagonalizable. #

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$.

En el ejemplo 3 de la Sección **3.3.3**, obtuvimos la ecuación característica $0 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$ y los valores propios de **A**: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 4$ los tres son raices simples de la ecuación característica.

En el ejemplo 1 de la Sección **3.3.4** se obtuvieron los correspondientes subespacios propios asociados, de dimensión 1.

$$\mathbf{V}_{\lambda_1=1} = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad , \quad \mathbf{V}_{\lambda_2=2} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_{\lambda_3=4} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle .$$

Dado que se satisfacen los ítems 1) y 2) del **Teorema 3.4.3**, se tiene que **A** es diagonalizable.

Se construye la matriz **P** -cuyas columnas son los generadores de los respectivos subespacios propios-

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Luego se verifica con facilidad que $\mathbf{P}^{-1}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{P} = \mathbf{D}$**,** en efecto:

$$\mathbf{P}^{-1}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/6 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{D} .$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

La ecuación característica de **A** es:

$$0 = det\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \left(\lambda - 1\right)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

Los valores propios de **A** son: $\lambda_1 = -1 \;\; y \;\; \lambda_2 = 3$.

Los subespacios propios correspondientes son:

a) Para $\lambda_1 = -1$ se plantea $\left((-1).\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \bar{\mathbf{0}}$ es decir

$$\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene que $\mathbf{V}_{\lambda_1=-1} = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

b) Para $\lambda_2 = 3$ se plantea $(3.\mathbf{I} - \mathbf{A}).\mathbf{X} = \bar{\mathbf{0}}$ es decir

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene que $\mathbf{V}_{\lambda_2 = 3} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

La ecuación característica tiene dos raíces reales y distintas cumpliéndose las condiciones del **Teorema 3.4.3** luego es posible formar una matriz **P** cuyas columnas sean vectores propios linealmente independientes:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ siendo } \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

luego se verifica que:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}.\mathbf{P} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Se desea analizar si **A** es diagonalizable y en caso afirmativo encontrar matrices **P** y **D** (diagonal) tales que $\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

1. Determinación de la ecuación característica y de los valores propios de **A**:

$$0 = det(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = det\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

$$0 = (\lambda - 2).(\lambda - 3)^2$$

Las raíces de esta ecuación son los escalares $\lambda_1 = 2$ *y* $\lambda_2 = 3$. Siendo λ_1 una raíz simple y λ_2 es raíz doble.

2. Determinación de los subespacios propios:

a) Para $\lambda_1 = 2$ se plantea $\left(2.\mathbf{I}-\mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ obteniéndose el subespacio propio $\mathbf{V}_{\lambda_1=2} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$, $dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_1=2}\right) = 1$

b) Para $\lambda_2 = 3$ se plantea $\left(3.\mathbf{I}-\mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ obteniéndose el subespacio propio $\mathbf{V}_{\lambda_2=3} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$, $dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_2=3}\right) = 2$

3. Por cumplirse las condiciones del **Teorema 3.4.3**, **A** es diagonalizable y la matriz **P** no es sino la que tiene por columnas los vectores propios hallados en 2).

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ obteniéndose } \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego resulta que:

$$\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

Ejemplo 4

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Se desea analizar si **A** es diagonalizable y en caso afirmativo encontrar matrices **P** y **D** (diagonal) tales que $\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

1. Determinación de la ecuación característica y de los valores propios de **A**:

$$0 = det(\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A}) = det\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$0 = (\lambda - 2).(\lambda^2 + 1)$$

la ecuación característica tiene una sola raíz real $\lambda_1 = 2$ y dos raíces complejas conjugadas $\lambda_2 = i \;\; y \;\; \lambda_3 = -i$. Luego, por no tener todas las raíces en $\mathbb{R}$, **A** no es diagonalizable.

Ejemplo 5

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Se desea analizar si **A** es diagonalizable y en caso afirmativo encontrar matrices **P** y **D** (diagonal) tales que $\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

1 Determinación de la ecuación característica y de los valores propios de **A**:

$$0 = det(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -4 & -3 \\ 4 & \lambda + 6 & 3 \\ -3 & -3 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$0 = (\lambda - 1).(\lambda + 2)^2$$

Las raices de esta ecuación son: $\lambda_1 = 1$ raíz simple y $\lambda_2 = -2$ raíz doble.

2 Determinación de los subespacios propios:

a) Para $\lambda_1 = 1$ se plantea $\left(1.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -3 \\ 4 & 7 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ obteniéndose el subespacio propio $\mathbf{V}_{\lambda_1 = 1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_1 = 1}\right) = 1$

b) Para $\lambda_2 = -2$ se plantea $\left((\text{-}2).\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -3 \\ 4 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ obteniéndose el subespacio propio $\mathbf{V}_{\lambda_2 = -2} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$, $dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_2 = -2}\right) = 1$.

Observar que $dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_2 = -2}\right) = 1 < 2$ (multipliciad de $\lambda_2 = -2$ como raiz de la ecuación característica). Luego como no se satisface el ítem 2) del **Teorema 3.4.3**, **A** no es diagonalizable.

Ejemplo 6

Sea $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Se desea analizar si **A** es diagonalizable.

1. Determinación de la ecuación característica y de los valores propios de **A**:

$$0 = det(\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A}) = det\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix}$$

$$0 = (\lambda+2).(\lambda-4).(\lambda+1)$$

Las raices (simples) de esta ecuación son: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=4$ y $\lambda_3=-1$.

2. Determinación de los subespacios propios:

Planteando $\left(\lambda_i.\mathbf{I}-\mathbf{A}\right).\mathbf{X}=\bar{\mathbf{0}}$ para $i=1, 2, 3$ se obtiene que:

$$\left(\lambda_i.\mathbf{I}-\mathbf{A}\right).\mathbf{X}=\begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 2 \\ 0 & (\lambda_i+2) & 0 \\ 2 & 0 & (\lambda_i-3) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ✓ Para $\lambda_1=-2$, se tiene que $\mathbf{V}_{\lambda_1=-2}=\left\langle\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\rangle$ y $dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_1=-2}\right)=1$.
- ✓ Para $\lambda_2=4$, se tiene que $\mathbf{V}_{\lambda_2=4}=\left\langle\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\rangle$ y $dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_2=4}\right)=1$.
- ✓ Finalmente, para $\lambda_3=-1$, se tiene que $\mathbf{V}_{\lambda_3=-1}=\left\langle\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\rangle$ y $dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_3=-1}\right)=1$.

Como $dim\,\mathbf{V}_{\lambda_j}=$multipliciad de λ_j como raiz de la ecuación característica, **A** es diagonalizable.

3.5. Diagonalización Ortogonal de una Matriz

Definición 3.5.1 Una matriz no singular **P** (o invertible), es una **matriz ortogonal** si $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}$.

Observación: De la definición anterior se deduce que **P** es una matriz ortogonal si $\mathbf{P}.\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}.\mathbf{P} = \mathbf{I}$ (Siendo $\mathbf{I} = \mathbf{I}_n$ la matriz identidad $n \times n$).

Teorema 3.5.1 Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) **P** es una matriz ortogonal.
2) Los vectores filas de **P** forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ con el producto interno estándar.
3) Los vectores columna de **P** forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ con el producto interno estándar.

Demostración: Si bien no nos detendremos en la demostración completa de este teorema, mostraremos a modeo de ejemplo 1) $\Leftrightarrow$ 2). Por hipótesis se tiene que P es una matriz ortogonal, esto es $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ y además $\mathbf{P}.\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}.\mathbf{P} = \mathbf{I}$. Si consideramos que $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n]$ siendo $\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n$ los vectores fila, luego

$$\mathbf{P}.\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n] \cdot [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n]^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$1 = p_{i1}^2 + p_{i2}^2 + \cdots + p_{in}^2 = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_i$$
$$0 = p_{i1}\, p_{j1} + p_{i2}\, p_{j2} + \cdots + p_{in}\, p_{jn} = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Luego los vectores fila $\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n$ forman una conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ con el producto interno estándar.#

NOTA: Las propiedades enunciadas parecen sugerir nombrar a P “matriz ortonormal” en lugar de “matriz ortogonal”. Sin embargo, siguiendo la mayoría de la bibliografía se la designará “matriz ortogonal”.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la matriz $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\cos(\beta) & -\text{sen}(\beta)\\ \text{sen}(\beta) & \cos(\beta)\end{bmatrix}$.

La matriz **P** resulta ortogonal para cualquier valor de β pues:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}.\mathbf{P}^{\mathrm{T}} &= \begin{bmatrix}\cos(\beta) & -\text{sen}(\beta)\\ \text{sen}(\beta) & \cos(\beta)\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\cos(\beta) & \text{sen}(\beta)\\ -\text{sen}(\beta) & \cos(\beta)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos^2(\beta)+\text{sen}^2(\beta) & \cos(\beta)\text{sen}(\beta)-\text{sen}(\beta)\cos(\beta)\\ \text{sen}(\beta)\cos(\beta)-\cos(\beta)\text{sen}(\beta) & \cos^2(\beta)+\text{sen}^2(\beta)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

y además define, como ya se mencionó anterioremente, en $\mathbb{R}^2$ el operador $\begin{aligned}\mathrm{T}_{\mathbf{P}}:\mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2\\ \mathbf{X} &\to \mathbf{P}.\mathbf{X}\end{aligned}$.

El efecto geométrico de esta transformación es realizar una rotación en sentido antihorario en un ángulo β.

Ejemplo 2

Sea la matriz $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$. Se verifica con facilidad que la matriz **P** resulta ortogonal, pues:

$$\mathbf{P}.\mathbf{P}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3

Sea la matriz **A** del ejemplo 6 del ítem anterior. El conjunto de vectores propios obtenidos $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ resulta un conjunto ortogonal.

Si dichos vectores son normalizados se tiene el siguiente conjunto ortonormal de vectores propios de **A**: $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt5}\\0\\\frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\0\\\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}\right\}$.

Luego consideramos la matriz $\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ tal que $\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P}=\mathbf{D}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

La matriz $\mathbf{P}$ es una matriz ortogonal pues:

$$\mathbf{P}.\mathbf{P}^{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definición 3.5.2 Sea $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Diremos que **A** es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz **P** ortogonal tal que $\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P}=\mathbf{D}$ siendo **D** una matriz diagonal.

Se expresa que la matriz **P** diagonaliza ortogonalmente a la matriz **A**.

El siguiente Teorema asegura que, dada una matriz simétrica, ella es diagonalizable ortogonalmente.

Teorema 3.5.2 Sea $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1) **A** es diagonalizable ortogonalmente

2) **A** tiene un conjunto ortonormal de "n" vectores propios.

3) **A** es simétrica.

Demostración: Si bien no nos detendremos en la demostración completa de este teorema, mostraremos ciertas implicaciones cuya demostración es sencilla.

2**)** $\Rightarrow$ 3**)** **A** diagonaliza ortogonalmente si existe una matriz **P** ortogonal tal que $\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P}=\mathbf{D}$. Por ser **P** ortogonal se tiene que $\mathbf{P}.\mathbf{P}^{\mathbf{T}}=\mathbf{P}^{\mathbf{T}}.\mathbf{P}=\mathbf{I}$ resultando:

$\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P}=\mathbf{D}$ multiplicamos a izuiqerda por **P** y a derecha por $\mathbf{P}^{\mathbf{T}}$

$\mathbf{A}=\mathbf{P}.\mathbf{D}.\mathbf{P}^{\mathbf{T}}$ tomando transpuesta, se tiene que

$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}=\left(\mathbf{P}.\mathbf{D}.\mathbf{P}^{\mathbf{T}}\right)^{\mathbf{T}}=\mathbf{P}.\mathbf{D}^{\mathbf{T}}.\mathbf{P}^{\mathbf{T}}$ por ser D diagonal, $\mathbf{D}=\mathbf{D}^{\mathbf{T}}$ luego

$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}=\mathbf{P}.\mathbf{D}.\mathbf{P}^{\mathbf{T}}=\mathbf{A}$

Luego **A** es una **matriz simétrica**.

1**)** $\Rightarrow$ 2**)** Por hipótesis el ser **A** diagonalizable ortogonalmente implica que existe una matriz **P** tal que $\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}^{\mathbf{T}}$ *y* $\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P}=\mathbf{D}$. Por **Teorema 3.4.1**, **A** tiene "n" vectores propios linealmente independientes los que constituyen las columnas de la matriz de **P**. Pero al ser **P** ortogonal, sus columnas, y por ende, los vectores propios de **A** forman un conjunto ortonormal (**Teorema 3.5.1**). #

También son importantes las siguientes propiedades de las matrices simétricas.

> **Proposición 3.5.1** Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si **A** es una matriz simétrica, entonces:
>
> 1) Todos sus valores propios son reales
>
> 2) Los vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.

Demostración: Sólo demostraremos el ítem 2).

Supongamos que **u** es un vector propio de **A** asociado al valor propio λ_1 y **v** lo sea al valor propio asociado λ_2. Recordando propiedades del producto interno estándar de $\mathbb{R}^{n\times 1}$ y teniendo en cuenta que $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ por ser matriz simétrica, planteamos:

$$(\mathbf{Au}/\mathbf{v}) = (\mathbf{Au})\bullet\mathbf{v} = (\mathbf{Au})^{\mathbf{T}}\,\mathbf{v} = \left(\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right)\mathbf{v} = \left(\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{A}\right)\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathbf{T}}\,(\mathbf{A}\,\mathbf{v}) = \mathbf{u}^{\mathbf{T}}\,.(\mathbf{A}\,\mathbf{v}) = (\mathbf{u}/\mathbf{A}\,\mathbf{v})$$

Entonces $(\mathbf{Au}/\mathbf{v}) = (\mathbf{u}/\mathbf{A}\,\mathbf{v})$.

Luego resulta:

Por ser **u** vector propio de **A**

$$(\mathbf{Au}/\mathbf{v}) = (\lambda_1\,\mathbf{u}/\mathbf{v}) = (\lambda_1\,\mathbf{u})\bullet\mathbf{v} = (\lambda_1\,\mathbf{u})^{\mathbf{T}}\,\mathbf{v} = \left(\lambda_1\,\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\right)\mathbf{v} = \lambda_1\,\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{v} = \lambda_1\,(\mathbf{u}/\mathbf{v})$$

Por ser **v** vector propio de **A**

$$(\mathbf{u}/\mathbf{A}\,\mathbf{v}) = (\mathbf{u}/\lambda_2\,\mathbf{v}) = \mathbf{u}\bullet(\lambda_2\,\mathbf{v}) = \mathbf{u}^{\mathbf{T}}\,(\lambda_2\,\mathbf{v}) = \lambda_2\,\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{v} = \lambda_2\,(\mathbf{u}/\mathbf{v})$$

Restando miembro a miembro se tiene $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{u}/\mathbf{v}) = 0$.
Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ debe ser $(\mathbf{u}/\mathbf{v}) = 0$, luego **u** y **v** son ortogonales. #

3.5.1. Procedimiento a tener en cuenta en la diagonalización ortogonal de una matriz

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica a la cual se quiere diagonalizar ortogonalmente mediante una matriz **P**. Para ello, se proponen los siguientes pasos:

1) Determinación de la ecuación característica $det(\lambda\,\mathbf{I}\text{-}\,\mathbf{A}) = 0$ y de sus raíces. Las raíces serán todas reales.

2) Para cada valor propio λ_j de $\mathbf{A}$, de multiplicidad d_j, se establece una base de d_j vectores propios para el subespacio propio $\left(\lambda_j\,\mathbf{.I}-\mathbf{A}\right)\mathbf{.X}=\overline{\mathbf{0}}$.

3) Para cada subespacio propio, se ortonormaliza mediante el proceso de Gram- Schmidt la base obtenida en el paso 2). Por **Teorema 3.4.2 ítem 2)**, la unión de dichas bases determinan un conjunto de vectores linealmente independientes de **A** que en este caso ademas son ortonormales.

4) Se forma la matriz **P** con los "n" vectores propios linealmente independientes determinados en el paso 3). La matriz **P** así constrida es una matriz ortogonal tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{.A.P}=\mathbf{D}$ es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son los valores propios de **A**.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$. Como **A** es simétrica, sabemos que diagonaliza ortogonalmente.

Entonces se quiere hallar la matriz **P** ortogonal que diagonaliza a **A**.

1 Determinación de la ecuación característica y obtención de los valores propios de **A**:

$$0=det\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)=\begin{bmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{bmatrix}$$

Ecuación característica $\lambda^3-3\lambda-2=0$.

Valores propios $\lambda_1=-1$ (raíz doble)
$\lambda_2=2$ (raíz simple)

2 Determinación de los subespacios propios y obtención de una base de cada uno de ellos:

$$\mathbf{V}_{\lambda_1=-1}=\left\langle\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\rangle \quad B_{\mathbf{V}_{\lambda_1}}=\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right) \quad dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_1}\right)=2$$

$$\mathbf{V}_{\lambda_2=2}=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\rangle \quad B_{\mathbf{V}_{\lambda_2}}=\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) \quad dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_2}\right)=1$$

3 Aplicando a la base de $\mathbf{V}_{\lambda_1}$ el proceso de ortogonalización de Gram- Schmidt y posterior normalizado obtenemos $\mathbf{B}_1$ una base ortonormal para dicho subespacio propio.

$$\mathbf{B}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

Por otro lado, una base ortonormal de $\mathbf{V}_{\lambda_2}$ es $\mathbf{B}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

4 Construcción de la matriz ortogonal **P**:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad \text{verificándose que } \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

luego $\mathbf{P}^{\mathbf{T}} \,.\, \mathbf{A} \,.\, \mathbf{P} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3.5.2. Algunas Aplicaciones

Los vectores y valores propios de una matriz proporcionan una herramienta sumamente valiosa para la solución e interpretación de muchos problemas de matemática aplicada que se presentan no sólo en Ingeniería, sino también en Ciencias tan disímiles como la Biología, Ecología, Geología y Economía

El profesional o científico debe interiorizarse profundamente del fenómeno a analizar, plantear sus hipótesis, modelarlo matemáticamente, usar los algoritmos disponibles y luego interpretar los resultados. El Álgebra Lineal le provee no sólo de una metodología de cálculo, sino que también conceptualmente le puede ayudar a realizar una visualización correcta de los fenómenos estudiados.

1. Ecuaciones en Diferencias.

En campos como ecología e ingeniería entre otros, surge la necesidad de modelar matemáticamente un sistema dinámico que cambia con el tiempo.

Algunas características del sistema se miden en tiempos discretos, produciéndose una secuencia de vectores $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ donde $\mathbf{x}_k$ proporciona información del sistema en el momento de la *k*-ésima medición.

Si existe una matriz **A** tal que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_3 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2, \ldots$ se tiene de manera general

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Esta última expresión se denomina *ecuación lineal en diferencias*.

Asimismo, si consideramos la señal a tiempo discreto $z[n] = \{z_n\}$ y escalares $a_0, a_1, \ldots, a_n$ Encontrar la señal $y[n] = \{y_n\}$ tal que la expresión

$$a_0 y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_n y_k = z_k \ \forall k \tag{1}$$

se llama *ecuación lineal en diferencias de orden n.*

Se muestra que dada una ecuación lineal en diferencias homogénea (segundo miembro igual a cero) de orden *n*, es posible expresar lo anterior, por un sistema equivalente de ecuaciones en la forma:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}.\mathbf{X}_k \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{con} \quad \mathbf{X}_k \in \mathbb{R}^{n\times 1} \ \text{ y } \ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

En general, dada la ecuación $y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = 0$ puede re-escribirse como $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}.\mathbf{X}_k$ con

$$\mathbf{X_k} = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+n} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Cualquiera sea la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, formalmente la ecuación $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}.\mathbf{X}_k$ es fácil de resolver. La solución $\mathbf{X}_k$ está relacionada con el valor inicial $\mathbf{X}_0$. En efecto

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}.\mathbf{X}_k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{X_1} = \mathbf{A}.\mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_2 = \mathbf{A}.\mathbf{X_1} = \mathbf{A}^2.\mathbf{X}_0 \\ \quad \vdots \\ \mathbf{X}_k = \mathbf{A}.\mathbf{X}_{k\text{-}1} = \mathbf{A}^k.\mathbf{X}_0 \end{cases}$$

El problema está en encontrar una manera rápida de calcular $\mathbf{A}^k$.

Si la matriz **A** es diagonalizable, entonces existe **P** tal que $\mathbf{A} = \mathbf{P}.\mathbf{D}.\mathbf{P}^{-1}$ con **D** matriz diagonal. Luego

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{A}^k . \mathbf{X}_0 = \underbrace{\left(\mathbf{P}.\mathbf{D}.\mathbf{P}^{-1}\right)}_{\mathbf{A}} . \underbrace{\left(\mathbf{P}.\mathbf{D}.\mathbf{P}^{-1}\right)}_{\mathbf{A}} \cdots \underbrace{\left(\mathbf{P}.\mathbf{D}.\mathbf{P}^{-1}\right)}_{\mathbf{A}} . \mathbf{X}_0$$

Haciendo uso de la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices, resulta:

$$\mathbf{X}_k = \left(\mathbf{P}.\mathbf{D}^k . \mathbf{P}^{-1}\right) . \mathbf{X}_0$$

Recordando que las columnas de **P** son los vectores propios de la matriz **A**, se tiene:

$$\mathbf{X}_k = \underbrace{\left[\mathbf{v}_1\, \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_n\right]}_{\mathbf{P}} . \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^k} . \mathbf{P}^{-1} . \mathbf{X}_0$$

$$\mathbf{X}_k = c_1 \lambda_1^k\, \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2^k\, \mathbf{v}_2 + \cdots + c_n \lambda_n^k\, \mathbf{v}_n$$

donde:

λ_i son los valores propios de la matriz **A** (se los ha supuesto reales y distintos).

$\mathbf{v}_i$ son los vectores propios de la matriz **A**.

c_i son coeficientes que dependen de las condiciones iniciales $\left(\left[c_i\right] = \mathbf{P}^{-1} . \mathbf{X}_0\right)$.

Entonces, si tenemos en cuenta lo anteriormente expuesto y suponemos que por ejemplo se plantea

$$y_{k+3} - 2y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0$$

Entonces se tiene que $y_{k+3} = 2y_{k+2} + 5y_{k+1} - 6y_k$.

Haciendo $\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \end{bmatrix}$ y $\mathbf{X}_{k+1} = \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ y_{k+3} \end{bmatrix}$.

Se tiene

$$\begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ y_{k+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{bmatrix} . \mathbf{X}_k$$

Analizaremos, si la matriz **A** es diagonalizable. Para ello:

- Determinamos la ecuación característica y los valores propios de **A**:

  Ecuación característica $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$.
  Valores propios $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 3$.

- Vectores propios de **A**: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};\quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix};\quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Entonces, la solución general de la ecuación en diferencias es:

$$\mathbf{X}_k = c_1 1^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 (-2)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + c_3 3^k \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

En definitiva, con esta expresión obtenemos que:

$$y_k = c_1.1^k + c_2.(-2)^k + c_3.3^k \qquad (2)$$

2. Filtrado Lineal.

En el procesamiento digital de señales, una ecuación en diferencias lineal de orden n como la indicada en (1) describe un filtro lineal y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se llaman los coeficientes del filtro.

Se toma $y[n]$ como la señal de entrada y $z[n]$ como la señal de salida. En particular, si $z[n]$ es la señal nula, la ecuación (1) se dice homogénea y <u>las soluciones corresponden a las señales que se eliminan por filtración</u> ya que se convierten al paso por el filtro en la señal nula.

Sea una señal de audio a la que se hace pasar por un filtro. Se quiere analizar qué componentes de la misma serán eliminadas. Supongamos que el filtro lineal viene representado por la ecuación en diferencias

$$y_{k+3} - 2y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = z_k$$

Las componentes de la señal que serán eliminadas son las que al pasar por el filtro nos da la señal nula, esto es $y_{k+3} - 2y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0$.

Teniendo en cuenta que la solución que hemos encontrado en (2), $y_k = c_1.1^k + c_2.(-2)^k + c_3.3^k$ podemos concluir que serán eliminadas las combinaciones lineales de las señales:

$$x_1[n] = 1^n; \quad x_2[n] = (-2)^n; \quad x_3[n] = 3^n.$$

Observaciones:

- Las soluciones de la ecuación en diferencias homogénea de orden *n* forman un subespacio $\mathbf{W} \subset \mathbf{S}$. Se muestra que $dim\,\mathbf{W} = n$.

  Del ejemplo anterior $\mathbf{W} = \langle x_1[n], x_2[n], x_3[n] \rangle$. Se muestra que ellas son linealmente independientes luego $dim\,\mathbf{W} = 3$.
- Los valores y vectores propios también proporcionan la clave para entender el comportamiento a largo plazo o evolución de un sistema dinámico descrito por medio de una ecuación en diferencias del tipo $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}.\mathbf{X}_k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$.
- El planteo de estos problemas se presenta, como ya se mencionó, no sólo en Ingeniería, sino también en Economía, Biología y Ecología.
- Se puede interpretar que el vector $\mathbf{X}_k$ da información sobre el sistema con el paso del tiempo (indicado por *k*), por lo que su formulación se adapta para describir tanto un modelo de crecimiento de población en Biología, como la respuesta de estado estable de un sistema de control que es el equivalente en Ingeniería de lo que usualmente se llama comportamiento a largo plazo del sistema dinámico.

Sea la expresión $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{A}.\mathbf{u}_k$ que representa un sistema del cual queremos averiguar su comportamiento cuando $k \to \infty$. Suponiendo que **A** puede diagonalizarse, la solución $\mathbf{u}_k$ será del tipo:

$$\mathbf{u}_k = c_1\lambda_1^k\,\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\,\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\,\mathbf{v}_n.$$

El crecimiento de $\mathbf{u}_k$ está gobernado por los factores λ_i y por lo tanto, la estabilidad depende de los valores propios de **A**.

La ecuación en diferencias $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{A}.\mathbf{u}_k$ es:

- estable y $\mathbf{u}_k \to \mathbf{0}$ si todos los valores propios satisfacen $|\lambda_i| < 1$;
- es neutralmente estable y $\mathbf{u}_k$ está acotado si todo $|\lambda_i| \leq 1$, y
- es inestable ($\mathbf{u}_k$ no está acotado) cuando al menos un valor propio de **A** es $|\lambda_i| > 1$.

3. Un Sistema Depredador – Presa.

Alrededor del año 1910, un grupo de biólogos presentó un informe en el cual advertían de que la población de peces del Adriático superior cambiaba considerablemente.

Durante la Primera Guerra Mundial la pesca fue suspendida. Después de la Guerra, los tiburones y otras especies voraces se hicieron más numerosas con relación a los tipos herbívoros de peces. Se concluyó que la suspensión de la pesca había permitido que creciera la población de peces y que esto daba a las especies predadoras una ventaja sobre las otras especies-presa. Esta observación provocó un modelo matemático sobre la dinámica de población para el caso en que una especie llamada predadora se alimentara de otras especies llamadas presas.

En lo que sigue suponemos que la población presa encuentra suficiente alimento en todo momento, pero que la reserva de alimentos de la población predadora depende enteramente de la población presa. También se parte de la hipótesis de que durante el proceso el entorno no cambia a favor de una de las especies, y que la adaptación genética es suficientemente lenta. Las hipótesis simplificativas se hacen a los fines de permitir un primer modelado del problema a partir de lo cual pueden ir agregándose limitaciones.

Consideremos la población de tiburones (T) y peces herbívoros (P) en un tiempo k representado por

$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} T_k \\ P_k \end{bmatrix} \qquad \text{donde} \begin{cases} k \text{ es el tiempo en meses} \\ T_k \text{ es el número de tiburones en la región estudiada} \\ P_k \text{ es el número de peces herbívoros (medidos en ciento de mil)} \end{cases}$$

Ss suponemos

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= 0{,}5\ T_k + 0{,}4\ P_k \\ P_{k+1} &= -0{,}104\ T_k + 1{,}1\ P_k \end{aligned}$$

La primera ecuación dice que sin peces “presa” sobrevivirán sólo la mitad de los tiburones “predador” cada mes, mientras que la segunda ecuación dice que, sin tiburones, la cantidad de peces herbívoros aumentará el 10% cada mes. Si hay abundancia de peces el término $(0{,}4\ P_k)$ hará que el número de tiburones aumente, mientras que el término negativo $(-0{,}104\ T_k)$ mide las muertes de peces debidas a la depredación de los tiburones.

Se quiere determinar la evolución del sistema. Teniendo en cuenta que el sistema es del tipo

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}.\mathbf{X}_k \quad \text{con} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 \\ -0{,}104 & 1{,}1 \end{bmatrix}$$

Los valores y vectores propios de **A** son:

$$\lambda_1 = 1{,}02 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 0{,}58 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego

$\mathbf{X}_k = c_1(1{,}02)^k \mathbf{v}_1 + c_2(0{,}58)^k \mathbf{v}_2$ con c_1 y c_2 que dependen de las condiciones iniciales ($\mathbf{X}_0$).

Entonces $\begin{bmatrix} T_k \\ P_k \end{bmatrix} = c_1(1{,}02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} + c_2(0{,}58)^k \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$. Observar que cuando $k \to \infty$, $(0{,}58)^k \to 0$.

Supongamos $c_1 \neq 0$, entonces para toda k suficientemente grande, el segundo término del segundo miembro tiende a cero de donde: $\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} T_k \\ P_k \end{bmatrix} \approx c_1(1{,}02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}$

Para $k+1$ se tiene:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \begin{bmatrix} T_{k+1} \\ P_{k+1} \end{bmatrix} \approx c_1(1{,}02)^{k+1} \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} = c_1(1{,}02)(1{,}02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} = (1{,}02)\, \underbrace{c_1(1{,}02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}}_{\approx \mathbf{X}_k} \approx 1{,}02 \begin{bmatrix} T_k \\ P_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{k+1} \approx 1{,}02\ \mathbf{X}_k$$

Esta expresión nos permite concluir que: sin la intervención del hombre, a largo plazo tanto los tiburones como los peces herbívoros crecerán cada mes en un factor 1,02 el que corresponde a un índice de crecimiento del 2%.

Por ser 1,02 ~ 1,0 se tiene que $\mathbf{X}_k$ es aproximadamente un múltiplo de (10, 13). Esto es cada 10 tiburones hay aproximadamente 1.300.000 peces.

3.6. Ejercicios del Capítulo

Ejercicio 1

Verifique que cada una de las siguientes funciones **no** es una función determinante. Indique qué propiedades no cumple.

a) $f\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a$ b) $f\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad$ c) $f\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad + bc$

Ejercicio 2

Calcular los determinantes siguientes, utilizando el desarrollo por cofactores:

a) $det\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}\right)$ b) $det\left(\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\right)$ b) $det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}\right)$

Ejercicio 3

Calcular el determinante de cada una de las matrices siguientes, por triangulación:

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 4

Calcular los siguientes determinantes:

a) $det\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}\right)$ b) $det\left(\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$ c) $det\left(\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}\right)$

Ejercicio 5

Teniendo en cuenta que $det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right)$ = 4, calcular:

a) $det\left(\begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix}\right)$ b) $det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ (d-3a) & (e-3b) & (f-3c) \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix}\right)$ c) $det\left(\begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right)$

Ejercicio 6

Sea **A** una matriz 3x3, sabiendo que $det\,(\mathbf{A}) = 7$, encuentre:

a) $det(3\mathbf{A})$ b) $det(\mathbf{A}^{-1})$ c) $det(2\,\mathbf{A}^{-1})$ d) $det((2\,\mathbf{A})^{-1})$

Ejercicio 7

En cada uno de los casos siguientes se pide: calcular $adj(\mathbf{A})$ y usarla para calcular $\mathbf{A}^{-1}$.

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Ejercicio 8

Aplicar la Regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ -5x + 4y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + 2y = 1 \\ 2x + 4y + 8z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ -x + 2z = 2 \\ 3x + y + 3z = -2 \end{cases}$

Ejercicio 9

Encuentre los valores de λ para los cuales $det(\mathbf{A}) = 0$.

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\lambda - 1) & -2 \\ 1 & (\lambda - 4) \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\lambda - 6) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & (\lambda - 4) \end{bmatrix}$ c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\lambda - 1) & 1 & 0 \\ 4 & (\lambda - 4) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 2) \end{bmatrix}$

Ejercicio 10

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Se pide:

a) ¿Cuales de los siguientes vectores son vectores propios de **A**?

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

b) ¿Cuales son sus valores propios correspondientes?.

Ejercicio 11

Para cada una de las siguientes matrices se pide:

1) La ecuación característica.
2) Los valores propios.
3) Los subespacios propios.
4) Si es posible, dar una matriz **P** que diagonalice a **A** (es decir, tal que: $\mathbf{P}^{-1} . \mathbf{A} . \mathbf{P} = \mathbf{D}$).

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&0&0\\1&4&0\\0&0&5\end{bmatrix}$ f) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\-3&5&2\end{bmatrix}$ g) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&2\\1&2&1\\1&0&3\end{bmatrix}$ h) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&2&0\\1&0&0&2\end{bmatrix}$

Ejercicio 12

En los siguientes casos, encontrar una matriz **P** y una matriz diagonal a **D** tal que $\mathbf{D}=\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P}$.

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}$ b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&2&2\\0&0&5\end{bmatrix}$ c) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5&-6&-6\\-1&4&2\\3&-6&-4\end{bmatrix}$ d) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1&2\\0&2&2&2\\0&0&3&-2\\0&0&0&4\end{bmatrix}$

Ejercicio 13

En cada uno de los casos siguientes encuentre una matriz **P** que diagonalice **ortogonalmente** a la matriz **A**.

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&4\\4&-3\end{bmatrix}$ b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$ c) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-7&24\\24&7\end{bmatrix}$

d) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ e) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$ f) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&-2&0\\-2&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

Ejercicio 14

Encontrar la matriz **A** sabiendo que:

$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ son vectores propios de **A** siendo sus respectivos valores propios 1 y 4.

Ejercicio 15

Encontrar una matriz **A** 3×3 que tenga a $\lambda_1=0$; $\lambda_2=1$; $\lambda_3=-1$ como valores propios

siendo sus vectores propios correspondientes: $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$; $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$; $\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$.

Ejercicio 16

Probar que los valores propios de una matriz triangular son los elementos de la diagonal principal.

Ejercicio 17

Probar que si λ es un valor propio de la matriz **A**, entonces λ^2 es valor propio de $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}.\mathbf{A}$ y que los vectores propios de **A** son también vectores propios de $\mathbf{A}^2$. Generalizar a $\mathbf{A}^k$.

Ejercicio 18

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Se pide hallar:

a) los valores propios de **A** y los correspondientes subespacios propios;

b) los valores propios de $\mathbf{A}^8$;

c) la matriz $\mathbf{A}^8$.

Ejercicio 19

Probar las siguientes afirmaciones:

a) $\lambda = 0$ es valor propio de **A** sí y sólo si **A** es no inversible.

b) $\lambda \neq 0$ es valor propio de **A** sí y sólo si λ^{-1} es valor propio de $\mathbf{A}^{-1}$ (Se supone **A** inversible).

Ejercicio 20

En Álgebra Lineal avanzada, se demuestra el **Teorema de Cayley-Hamilton**, éste establece que una matriz cuadrada **A** satisface su ecuación característica.
Es decir,

Si $x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1 x + C_0 = 0$ es la ecuación característica de **A**,
entonces $\mathbf{A}^n + C_{n-1}\,\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + C_1\,\mathbf{A} + C_0\,\mathbf{I} = 0$.

Comprobar este resultado para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Observación:

Esta propiedad proporciona un método eficiente para calcular las potencias de una matriz.

Si **A** es 2x2 con ecuación característica $x^2 + c_1 x + c_0 = 0$ entonces $\mathbf{A}^2 + c_1\,\mathbf{A} + c_0\,\mathbf{I} = \mathbf{0}$ de donde $\mathbf{A}^2 = -c_1\,\mathbf{A} - c_0\,\mathbf{I}$.

Luego multiplicando esta expresión por **A** se tiene $\mathbf{A}^3 = -c_1\,\mathbf{A}^2 - c_0\,\mathbf{A}$. Multiplicándola por $\mathbf{A}^2$ se tiene $\mathbf{A}^4 = -c_1\,\mathbf{A}^3 - c_0\,\mathbf{A}^2$.

Este procedimiento muestra cómo es posible calcular las potencias sucesivas de **A** basándonos en las potencias anteriores.

Aplique esta propiedad para encontrar $\mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \mathbf{A}^4$ para la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 21

Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar claramente.

a) Si $\mathbf{u}$ es un vector propio de $\mathbf{A}$ asociado al valor propio λ, entoces $k\mathbf{u}$ también es vector propio de A asociado a λ.

b) Toda matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonaliza sólo si tiene una base ortonormal de vectores propios.

c) Si todas las raíces de la ecuación característica son reales, entonces $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

d) Sea $\mathbf{A}$ una matriz simétrica, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores propios de $\mathbf{A}$ asociados a valores propios distintos. Entonces $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es un conjunto ortonormal.

e) Los vectores propios asociados a un mismo valor propio son siempre linealmente dependientes.

Ejercicio 22

En una población animal la edad máxima alcanzada por sus individuos es de doce años y la población se clasifica en cuatro grupos:

Pequeños [0,3)	Jóvenes [3,6)	Adultos [6,9)	Ancianos [9,12)

Además, se ha observado que la relación existente entre la población que hay en un período k con respecto a la que había en el período anterior (k-1) es la que se recoge en la siguiente tabla, expresada en porcentaje, y entendiéndose que un periodo es un trienio. (TABLA 1)

		PERIODO (k-1)			
		pequeños	jóvenes	adultos	ancianos
PERIODO k	pequeños	0.25	0.25	0.25	0.25
	jóvenes	0.25	0	0.5	0.25
	adultos	0.25	0.5	0.25	0
	ancianos	0.25	0.25	0	0.5

TABLA 1

Se pide:

a) Formular un modelo que represente la evolución temporal de la población.

b) ¿Cuál es la distribución de la población a largo plazo ($k \to \infty$) si en la actualidad (k=0) la proporción de individuos en cada uno de los cuatro grupos es de 20%, 20%, 20% y 40% respectivamente?

3.7. Guía de Estudio

1) ¿Cuáles son las propiedades que definen a la **función determinante**?

2) Enuncie algunas de las propiedades que se deducen de la definición de la función determinante.

3) ¿Cómo está vinculado $det\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right)$ y $det(\mathbf{A})$? ¿Cómo está vinculado $det(\mathbf{A}.\mathbf{B})$ con $det(\mathbf{A})$ y $det(\mathbf{B})$?

4) ¿A qué se llama **cofactor** del lugar (i, j)? ¿Para que se usa?.

5) ¿En que consiste el método de triangulación para el cálculo de determinantes?

6) ¿Por qué $\mathbf{A}$ matriz inversible $\Leftrightarrow$ $det\,(\mathbf{A}) \neq 0$?

7) ¿A qué se llama **adjunta** de **A?** ¿Cuál es la expresión de la inversa de **A** referida a la $adj(\mathbf{A})$?

8) **¿**Qué dice la **Regla de Cramer?** ¿Cuáles son las limitaciones para su aplicación?

9) Defina **valor propio**, **vector propio**, **subespacio propio** de la matriz **A**.

10) Enuncie y demuestre el **Teorema de Caracterización** de los valores propios.

11) Muestre que λ es valor propio de la matriz **A** sí y sólo si λ es raíz de la ecuación $det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = 0$

12) ¿A qué se llama **ecuación característica** de la matriz **A?**

13) ¿Cómo se determinan los subespacios propios?

14) ¿Cuándo se dice que una matriz es **diagonalizable**?

15) ¿Cuáles son las condiciones que se deben cumplir para que una matriz sea diagonalizable?

16) Muestre que, para una matriz simétrica, vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.

17) Defina **matriz ortogonal**. ¿Qué significa “la matriz **A diagonaliza ortogonalmente**”?