FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

ÁLGEBRA LINEAL

TEORÍA y PRÁCTICA

Elizabeth Vera de Payer   Magdalena Dimitroff

2020

Un especial agradecimiento al Ing. Alfredo Payer quien prestó conformidad para poner este material bajo lincencia Creative Commons, convencido de que esa hubiera sido la voluntad de la Ing. Elizabeth Vera de Payer.

Índice

5

Formas Bilineales y Cuadráticas

5.1. Formas Lineales

Recordemos, en primer lugar, que el cuerpo $\mathbb{R}$ puede ser considerado como un espacio vectorial (de dimensión uno) sobre sí mismo, si se toman como operaciones vectoriales la adición y la multiplicación en $\mathbb{R}$.

Por lo tanto, si $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, tiene sentido hablar de aplicaciones lineales de $\mathbf{V}$ en $\mathbb{R}$. Estas aplicaciones se llaman **formas lineales** o **funcionales lineales.**

Definición 5.1.1. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Diremos que la aplicación $\mathbf{L}:\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ que satisface las condiciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \mathbf{L}(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathbf{L}(\mathbf{u})+\mathbf{L}(\mathbf{v}) \\ 2)\ \mathbf{L}(k\,\mathbf{u})=k\,\mathbf{L}(\mathbf{u}) \end{array}\right\}\text{para todo } \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V},\ \ k\in\mathbb{R}$$

es una **forma lineal** sobre $\mathbf{V}$.

Ejemplos

Ejemplo 1

La aplicación que asigna a cada matriz $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ su **traza** (suma de los elementos de la diagonal principal) es una forma lineal sobre $\mathbb{R}^{n\times n}$.

$$\mathbf{Tr}:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R},\quad \mathbf{Tr}\,(\mathbf{A})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

Pues:

1) Sean $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$; $\quad \mathbf{Tr}\,(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\sum_{i=1}^{n}(a+b)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\mathbf{Tr}\,(\mathbf{A})+\mathbf{Tr}\,(\mathbf{B})$.

2) Sean $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ y $k\in\mathbb{R}$; $\quad \mathbf{Tr}\,(k\,\mathbf{A})=\sum_{i=1}^{n}(ka)_{ii}=k\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=k\,\mathbf{Tr}\,(\mathbf{A})$.

Ejemplo 2

La expresión $\mathbf{L}(\boldsymbol{f}) = \int_a^b \boldsymbol{f}(x)\, dx$ define una forma lineal sobre el espacio vectorial $\mathbf{C}[a,b]$, de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continuas en el intervalo $[a,b]$.

Pues:

1) Sean $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \mathbf{C}([a,b])$; $\mathbf{L}(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}) = \int_a^b (\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(x)\, dx = \int_a^b \boldsymbol{f}(x)\, dx + \int_a^b \boldsymbol{g}(x)\, dx = \mathbf{L}(\boldsymbol{f}) + \mathbf{L}(\boldsymbol{g})$

2) Sean $\boldsymbol{f} \in \mathbf{C}([a,b])$ y $k \in \mathbb{R}$; $\mathbf{L}(k\,\boldsymbol{f}) = \int_a^b (k\,\boldsymbol{f})(x)\, dx = \int_a^b k\,\boldsymbol{f}(x)\, dx = k\int_a^b \boldsymbol{f}(x)\, dx = k\,\mathbf{L}(\boldsymbol{f})$

Ejemplo 3

En el vectorial $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$), la valuación en $x = a$ es una forma lineal sobre $\mathbb{R}$.

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{f} \to \boldsymbol{f}(a)$$

Pues:

1) Sean $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; $\mathbf{T}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(a) = \boldsymbol{f}(a) + \boldsymbol{g}(a) = \mathbf{T}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{f}) + \mathbf{T}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{g})$.

2) Sean $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $k \in \mathbb{R}$; $\mathbf{T}_{\boldsymbol{a}}(k\,\boldsymbol{f}) = (k\,\boldsymbol{f})(a) = k\,\boldsymbol{f}(a) = k\,\mathbf{T}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{f})$.

Ejemplo 4

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. La aplicación

$$\mathbf{L}_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{L}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\,.\,\mathbf{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \qquad (1)$$

es una forma lineal sobre $\mathbb{R}^n$.

Sea $\mathbf{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$ resulta $\mathbf{L}_{\mathbf{a}}(e_i) = a_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Es decir que la matriz $[a_1\ a_2 \ldots a_n]$ representa a la forma lineal respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y la base $\{1\}$ de $\mathbb{R}$.

Se verifica fácilmente que toda forma lineal sobre $\mathbb{R}^n$ es del tipo (1). En efecto, sea **L** la forma lineal definida por las imágenes de los vectores de la base canónica

$$\mathbf{L}_{\mathbf{a}}(e_i) = a_i \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

resulta

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) = x_1\,\mathbf{L}(e_1) + x_2\,\mathbf{L}(e_2) + \cdots + x_n\,\mathbf{L}(e_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n\,.$$

En forma más general, si **V** es un espacio vectorial real de dimensión finita "*n*" y $\mathbf{B}=(\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\ldots,\mathbf{v}_n)$ es una base de **V,** la forma lineal **L** tal que $\mathbf{L}(\mathbf{v}_i)=a_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ puede expresarse en la forma (1).

En efecto, para todo $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, $\mathbf{v}=x_1\,\mathbf{v}_1+x_2\,\mathbf{v}_2+\cdots+x_n\,\mathbf{v}_n$ resulta

$$\mathbf{L}(\mathbf{v})=\mathbf{L}(x_1\,\mathbf{v}_1+x_2\,\mathbf{v}_2+\cdots+x_n\,\mathbf{v}_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=\mathbf{a}\,.\,\mathbf{x}$$

con $\mathbf{a}=(a_1,\,a_2,\ldots,a_n)$; $\mathbf{x}=(\mathbf{v})_\mathbf{B}$.

5.2. Formas Bilineales

Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Una forma bilineal sobre **V** es también una función que toma sus valores en $\mathbb{R}$ pero está definida sobre pares ordenados de vectores de **V** y es lineal con respecto a cada vector.

Definición 5.2.1 Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Una función $\mathbf{b}:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ que asigna a cada par $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ de vectores de **V** un escalar $\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ que cumple las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{array}{l}1)\ \mathbf{b}(\mathbf{u}+\mathbf{u}',\mathbf{v})=\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})+\mathbf{b}(\mathbf{u}',\mathbf{v})\\ 2)\ \mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{v}')=\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})+\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v}')\\ 3)\ \mathbf{b}(k\,\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{b}(\mathbf{u},k\,\mathbf{v})=k\,\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})\end{array}\right\}\text{para todos los }\mathbf{u},\mathbf{u}',\mathbf{v},\mathbf{v}'\in\mathbf{V};\ k\in\mathbb{R}$$

es una **forma bilineal** sobre **V**.

Ejemplos

Ejemplo 1

Todo producto interior es una forma bilineal. En particular, son formas bilineales:

a) El producto punto en $\mathbb{R}^n$.

b) La función definida por $\int_a^b \boldsymbol{f}(x).\boldsymbol{g}(x)\,dx$ en el vectorial $\mathbf{C}[a,b]$ de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continuas en el intervalo $[a,b]$.

Ejemplo 2

La función $f\colon\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right)=x_1^2y_1+x_2y_2+2$ no es una forma bilineal.

Ejemplo 3

La función $\mathbf{b}:\ \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\mathbf{b}\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=x_1y_2-y_1x_2$ es una forma bilineal en $\mathbb{R}^2$.

Observar que es justamente el determinante de $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$ (considerada como función de las filas (o columnas) de la matriz).

Ejemplo 4

Sea $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ definimos una forma bilineal sobre $\mathbf{V}=\mathbb{R}^{n\times 1}$ por la expresión:

$$\mathbf{b}:\ \mathbb{R}^{n\times 1}\times\mathbb{R}^{n\times 1}\to\mathbb{R},\qquad \mathbf{b}(\mathbf{X},\mathbf{Y})=\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\,.\mathbf{A}\,.\,\mathbf{Y}$$

La linealidad respecto de cada vector es consecuencia de las propiedades de la multiplicación y de la transposición de matrices.

$$\left(\text{Recordar que:}\qquad \begin{array}{l} \text{Si}\quad \mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}\ \Rightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{T}}=\mathbf{A}^{\mathbf{T}}+\mathbf{B}^{\mathbf{T}} \\ \text{Si}\quad \mathbf{C}=\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}\ \Rightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{T}}=\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\,.\,\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \end{array}\right)$$

1. $\mathbf{b}(\mathbf{X}+\mathbf{X}',\mathbf{Y})=\left(\mathbf{X}+\mathbf{X}'\right)^{\mathbf{T}}.\mathbf{A}\,.\,\mathbf{Y}=\left(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}+\left(\mathbf{X}'\right)^{\mathbf{T}}\right).\mathbf{A}\,.\,\mathbf{Y}=\mathbf{X}^{\mathbf{T}}.\mathbf{A}\,.\,\mathbf{Y}\ +\left(\mathbf{X}'\right)^{\mathbf{T}}.\mathbf{A}\,.\,\mathbf{Y}$
   $=\mathbf{b}(\mathbf{X},\mathbf{Y})+\mathbf{b}(\mathbf{X}',\mathbf{Y})$
2. $\mathbf{b}(\mathbf{X},\mathbf{Y}+\mathbf{Y}')=\mathbf{X}^{\mathbf{T}}.\mathbf{A}.\left(\mathbf{Y}+\mathbf{Y}'\right)=\mathbf{X}^{\mathbf{T}}.\mathbf{A}\,.\,\mathbf{Y}\ +\mathbf{X}^{\mathbf{T}}.\mathbf{A}\,.\,\mathbf{Y}'=\mathbf{b}(\mathbf{X},\mathbf{Y})+\mathbf{b}(\mathbf{X},\mathbf{Y}')$.
3. $\mathbf{b}(k\,\mathbf{X},\mathbf{Y})=\left(k\,\mathbf{X}\right)^{\mathbf{T}}.\mathbf{A}\,.\mathbf{Y}=k\,\mathbf{X}^{\mathbf{T}}.\mathbf{A}\,.\,\mathbf{Y}=\mathbf{X}^{\mathbf{T}}.\mathbf{A}\,.\,k\,\mathbf{Y}=k\,\mathbf{b}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$.

5.2.1 Formas Bilineales sobre $\mathbb{R}^n$

Sean $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Sean $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ los vectores de coordenadas en base canónica de $\mathbf{x},\mathbf{y}$ respectivamente.

La expresión $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}.\mathbf{A}\,.\,\mathbf{Y}$ define una forma bilineal sobre $\mathbb{R}^n$ para toda matriz $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

En el caso $n=2$ se tiene

$$\mathbf{b}\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\tag{1}$$

efectuando el producto

$$\mathbf{b}\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+a_{21}x_2y_1+a_{22}x_2y_2\tag{2}$$

Diremos que en (1) la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$ está expresada en forma matricial y en (2) en forma polinomial.

Veremos, a continuación, que toda forma bilineal **b** sobre $\mathbb{R}^2$ puede expresarse en las formas (1) y (2).

Sea $\mathbf{B} = (e_1, e_2)$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces $\mathbf{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2$, $\mathbf{y} = y_1 e_1 + y_2 e_2$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{b}\,(x_1 e_1 + x_2 e_2,\ y_1 e_1 + y_2 e_2)$$

por las propiedades de la forma bilineal resulta

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1\, \mathbf{b}(e_1, e_1) + x_1 y_2\, \mathbf{b}(e_1, e_2) + x_2 y_1\, \mathbf{b}\,(e_2, e_1) + x_2 y_2\, \mathbf{b}(e_2, e_2)\,.$$

Es decir que **b** queda determinada por los valores que toma sobre los pares de vectores de la base.

Llamando $a_{11} = \mathbf{b}(e_1, e_1)$, $a_{12} = \mathbf{b}(e_1, e_2)$, $a_{21} = \mathbf{b}\,(e_2, e_1)$, $a_{22} = \mathbf{b}(e_2, e_2)$ se obtiene que

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2$$

que es la forma polinomial de **b**.

En forma matricial resulta $\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{X}^{\mathbf{T}} . \mathbf{A} . \mathbf{Y}$

Expresiones análogas a (1) y (2) se obtienen cuando $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$.

La generalización a $\mathbb{R}^n$ se verifica de manera similar. (Se deja como ejercicio para el lector)

Ejemplos

Ejemplo 1

La forma bilineal **b** sobre $\mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{b}(e_1, e_1) = 3, \quad \mathbf{b}(e_1, e_2) = 1, \quad \mathbf{b}\,(e_2, e_1) = 6, \quad \mathbf{b}(e_2, e_2) = -4$$

siendo $\mathbf{B} = (e_1, e_2)$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Si consideramos $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces **b** se expresa en forma matricial como

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

y en forma polinomial como

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1 y_1 + x_1 y_2 + 6x_2 y_1 - 4x_2 y_2\,.$$

Ejemplo 2

Sea la forma bilineal **b** sobre $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_1y_3 - 6x_2y_1 + x_2y_2 - 3x_2y_3 + 4x_3y_3$$

b puede expresarse en forma matricial como: $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

5.2.2. Formas Bilineales sobre un Espacio de Dimensión Finita

Sea **V** un espacio vectorial de dimensión finita. Una forma bilineal sobre **V** admite descripciones similares a las que obtuvimos para $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ a condición de representar los vectores de **V** por sus vectores de coordenadas respecto de una base elegida.

Sea $\mathbf{B} = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base de **V**. Sea $\mathbf{b}: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \to \mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ forma bilineal sobre **V**.

Para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se tiene que $\mathbf{u} = x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{v} = y_1\,\mathbf{v}_1 + y_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\,\mathbf{v}_n$.

Luego **b** se puede escribir:

$$\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{b}\,(x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n,\; y_1\,\mathbf{v}_1 + y_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\,\mathbf{v}_n)$$

teniendo en cuenta que **b** es una forma bilineal, resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = {} & x_1y_1\,\mathbf{b}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1) + \cdots + x_1y_n\,\mathbf{b}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_n) + \\ & + x_2y_1\,\mathbf{b}(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1) + \cdots + x_2y_n\,\mathbf{b}(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_n) + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + x_ny_1\,\mathbf{b}(\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_1) + \cdots + x_ny_n\,\mathbf{b}(\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

es decir que la forma bilineal **b** queda determinada por los valores que toma sobre los pares de vectores de la base.

Haciendo $a_{ij} = \mathbf{b}\,(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ se tiene:

$$\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{1n}x_1y_n + a_{21}x_2y_1 + \cdots + a_{2n}x_2y_n + \cdots\cdots + a_{n1}x_ny_1 + \cdots + a_{nn}x_ny_n \quad (*)$$

Entonces:

> $\mathbf{b}: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ forma bilineal sobre **V**. $\mathbf{B} = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v}_n)$ base de **V**.
>
> Para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, **b** puede ser escrita como
>
> $\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$ con $a_{ij} = \mathbf{b}\,(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ **Forma polinómica de b**

Considerando (*), ésta puede ser expresada en forma matricial

$$\mathbf{b(x,y)} = \mathbf{X^T . A . Y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Entonces

> $\mathbf{b}: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ forma bilineal sobre **V**. $\mathbf{B} = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v}_n)$ base de **V**.
>
> Para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, **b** puede ser escrita como
>
> $\mathbf{b(u,v)} = [\mathbf{u}]_\mathbf{B}^\mathbf{T} . [a_{ij}] . [\mathbf{v}]_\mathbf{B}$ con $a_{ij} = \mathbf{b}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ <u>**Forma matricial de b**</u>

Recíprocamente, toda matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ define una forma bilineal sobre **V** por medio de esta última fórmula.

5.2.3. Matriz de una Forma Bilineal

> **Definición 5.2.3** Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de dimensión finita, con $\mathbf{B} = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base de **V**.
>
> Sea la forma bilineal $\mathbf{b}: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, $\mathbf{(u,v)} \to \mathbf{b(u,v)}$.
>
> La matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ donde $a_{ij} = \mathbf{b}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ con $i, j = 1,2,\dots,$n se denomina **matriz de la forma bilineal b en la base B**.
>
> Notación: $[\mathbf{b}]_\mathbf{B} = \mathbf{A}$.

Como ya se vio previamente, para esta matriz se verifica que $\mathbf{b(u,v)} = [\mathbf{u}]_\mathbf{B}^\mathbf{T} . \mathbf{A} . [\mathbf{v}]_\mathbf{B}$.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ y la forma bilineal $\mathbf{b(x,y)} = x_1 y_1 + x_2 y_2$ (producto punto).

- Con respecto a $\mathbf{B}_0 = (e_1, e_2)$ base canónica de $\mathbb{R}^2$, resulta que:

$$a_{11} = \mathbf{b}(e_1, e_1) = 1, \quad a_{12} = \mathbf{b}(e_1, e_2) = 0, \quad a_{21} = \mathbf{b}(e_2, e_1) = 0, \quad a_{22} = \mathbf{b}(e_2, e_2) = 1$$

Por lo tanto $\mathbf{A} = [\mathbf{b}]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- Con respecto a la base $\mathbf{B}_1 = \big((1,2),\ (3,4)\big)$ resulta:

$$a_{11} = \mathbf{b}\big((1,2),\ (1,2)\big) = (1,2)\mathbf{.}(1,2) = 5$$
$$a_{12} = \mathbf{b}\big((1,2),\ (3,4)\big) = (1,2)\mathbf{.}(3,4) = 11$$
$$a_{21} = \mathbf{b}\big((3,4),\ (1,2)\big) = (3,4)\mathbf{.}(1,2) = 11$$
$$a_{22} = \mathbf{b}\big((3,4),\ (3,4)\big) = (3,4)\mathbf{.}(3,4) = 25$$

Por lo tanto $\mathbf{A} = [\mathbf{b}]_{\mathbf{B_1}} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$.

Ejemplo 2

Sea la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{b(x,y)} = \frac{1}{2} x_1 y_1 + 3x_2 y_2 - x_2 y_1 + 5\, x_2 y_2$.

Con respecto a $\mathbf{B_0} = (e_1, e_2)$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$, resulta que:

$$a_{11} = \mathbf{b(}e_1, e_1\mathbf{)} = \frac{1}{2}, \quad a_{12} = \mathbf{b(}e_1, e_2\mathbf{)} = 3, \quad a_{21} = \mathbf{b\ (}e_2, e_1\mathbf{)} = -1, \quad a_{22} = \mathbf{b(}e_2, e_2\mathbf{)} = 5$$

por lo tanto $\mathbf{A} = [\mathbf{b}]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.

Ejemplo 3

Sea la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{b(x,\, y)} = x_1 y_1 - x_1 y_2 + 3x_1 y_3 - 6x_2 y_1 + x_2 y_2 - 3x_2 y_3 + 4x_3 y_3\,.$$

- Con respecto a $\mathbf{B_0}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, resulta: $\mathbf{A} = [\mathbf{b}]_{\mathbf{B_0}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

- Con respecto a $\mathbf{B_1} = \big(\mathbf{(}1,1,1\mathbf{)},\ \mathbf{(}0,1,1\mathbf{)},\ \mathbf{(}0,0,1\mathbf{)}\big)$ base de $\mathbb{R}^3$, resulta:

$$a_{11} = \mathbf{b}\big((1,1,1),\ (1,1,1)\big) = -1; \quad a_{12} = \mathbf{b}\big((1,1,1),\ (0,1,1)\big) = 4; \quad a_{13} = \mathbf{b}\big((1,1,1),\ (0,0,1)\big) = 4$$
$$a_{21} = \mathbf{b}\big((0,1,1),\ (1,1,1)\big) = -4; \quad a_{22} = \mathbf{b}\big((0,1,1),\ (0,1,1)\big) = 2; \quad a_{23} = \mathbf{b}\big((0,1,1),\ (0,0,1)\big) = 1$$
$$a_{31} = \mathbf{b}\big((0,0,1),\ (1,1,1)\big) = 4; \quad a_{32} = \mathbf{b}\big((0,0,1),\ (0,1,1)\big) = 4; \quad a_{33} = \mathbf{b}\big((0,0,1),\ (0,0,1)\big) = 4$$

Por lo tanto, $\mathbf{A} = [\mathbf{b}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -4 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

5.2.4 Cambio de Base

Como se vio en la sección anterior la matriz de $\mathbf{b}: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ forma bilineal sobre $\mathbf{V}$ ($dim\,\mathbf{V} < \infty$) depende de la base elegida.
A continuación, analizaremos cómo se transforma la matriz de la forma bilineal **b** cuando se cambia la base en el vectorial.

> **Teorema 5.2.4** Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de dimensión finita. Sea la forma bilineal $\mathbf{b}: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to \mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.
> Si $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$ son bases de $\mathbf{V}$ entonces
>
> $$[\mathbf{b}]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{P}^{\mathbf{T}} . [\mathbf{b}]_{\mathbf{B}} . \mathbf{P} .$$

Demostración:

Consideramos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$ son bases de $\mathbf{V}$ y sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.
Con respecto a la base **B** se tiene:

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [\mathbf{u}]_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}} . [\mathbf{b}]_{\mathbf{B}} . [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} \qquad (1)$$

Si **P** es la matriz de cambio de la base $\mathbf{B}$ a la base $\mathbf{B'}$, entonces:

$$[\mathbf{u}]_{\mathbf{B}} = \mathbf{P} . [\mathbf{u}]_{\mathbf{B'}} \qquad \text{y} \qquad [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = \mathbf{P} . [\mathbf{v}]_{\mathbf{B'}}$$

Reemplazando en (1) resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \left(\mathbf{P} . [\mathbf{u}]_{\mathbf{B'}}\right)^{\mathbf{T}} . [\mathbf{b}]_{\mathbf{B}} . \left(\mathbf{P} . [\mathbf{v}]_{\mathbf{B'}}\right) \\ &= [\mathbf{u}]_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{T}} . \mathbf{P}^{\mathbf{T}} . [\mathbf{b}]_{\mathbf{B}} . \mathbf{P} . [\mathbf{v}]_{\mathbf{B'}} \\ &= [\mathbf{u}]_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{T}} . \left(\mathbf{P}^{\mathbf{T}} . [\mathbf{b}]_{\mathbf{B}} . \mathbf{P}\right) . [\mathbf{v}]_{\mathbf{B'}} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la última igualdad, se verifica que:

$$[\mathbf{b}]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{P}^{\mathbf{T}} . [\mathbf{b}]_{\mathbf{B}} . \mathbf{P} . \ \#$$

Observación: La matriz de una forma bilineal se transforma por cambio de base según una regla distinta a la que sigue un operador lineal. Recordar que si **T** es un operador lineal de **V**

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}(\mathbf{T}) = \mathbf{P}^{-1} . \mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{T}) . \mathbf{P}$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{b(x,y)} = \frac{1}{2}x_1y_1 + 3x_2y_2 - x_2y_1 + 5\,x_2y_2$.

Vimos que con respecto a $\mathbf{B_0} = (e_1, e_2)$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{b}$ está representada por la matriz

$$\mathbf{A} = [\mathbf{b}]_{\mathbf{B_0}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Sea $\mathbf{B_1} = \big((1,2),\,(1,-3)\big)$ otra base de $\mathbb{R}^2$.

La matriz de cambio de base de $\mathbf{B_0}$ a $\mathbf{B_1}$ esta dada por $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Luego resulta

$$[\mathbf{b}]_{\mathbf{B_1}} = \mathbf{P^T}.[\mathbf{b}]_{\mathbf{B_0}}.\mathbf{P}$$

$$[\mathbf{b}]_{\mathbf{B_1}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{29}{2} & -\frac{81}{2} \\ -\frac{41}{2} & \frac{79}{2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Sea la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{b(x,y)} = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_1y_3 - 6x_2y_1 + x_2y_2 - 3x_2y_3 + 4x_3y_3\,.$$

Vimos que con respecto a $\mathbf{B_0}$, la base canónica de $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{A} = [\mathbf{b}]_{\mathbf{B_0}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Si ahora consideramos $\mathbf{B_1} = \big(\mathbf{(}1,1,1\mathbf{)},\,\mathbf{(}0,1,1\mathbf{)},\,\mathbf{(}0,0,1\mathbf{)}\big)$ otra base de $\mathbb{R}^3$ y la matriz de cambio de base $\mathbf{B_0}$ a $\mathbf{B_1}$ es $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, resulta:

$$[\mathbf{b}]_{\mathbf{B_1}} = \mathbf{P^T}.[\mathbf{b}]_{\mathbf{B_0}}.\mathbf{P}$$

$$[\mathbf{b}]_{\mathbf{B_1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -4 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

5.3. Formas Bilineales Simétricas

Definición 5.3.1 Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sea la forma bilineal $\mathbf{b}: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to \mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.
Diremos que **b** es una **forma bilineal simétrica** sí y sólo si $\mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{b}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ para todos los $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Ejemplos

Ejemplo 1

a) Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ y sea la forma bilineal dada por $\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 - 5x_2 y_2$.
b es una forma bilineal simétrica en $\mathbb{R}^2$.

b) Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ y sea la forma bilineal dada por $\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 + x_2 y_2$.
b NO es una forma bilineal simétrica en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2

a) Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y sea la forma bilineal dada por
$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - x_1 y_3 + 2x_2 y_1 - x_3 y_1 + 4x_3 y_3 .$$
b es una forma bilineal simétrica en $\mathbb{R}^3$.

b) Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y sea la forma bilineal dada por
$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - x_1 y_3 + 3x_2 y_1 - x_3 y_1 + 4x_3 y_3 .$$
b NO es una forma bilineal simétrica en $\mathbb{R}^3$.

Observación: En el ejemplo 1a) $\mathbf{A} = [\mathbf{b}]_{\mathbf{B_0}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, mientras que en el ejemplo 1b) $\mathbf{A} = [\mathbf{b}]_{\mathbf{B_0}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ($\mathbf{B_0}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$).

En el ejemplo 2a) $\mathbf{A} = [\mathbf{b}]_{\mathbf{B_0}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, mientras que en el ejemplo 2b) $\mathbf{A} = [\mathbf{b}]_{\mathbf{B_0}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ($\mathbf{B_0}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$).

¿Nota alguna relación entre la forma bilineal simétrica y la matriz de la forma bilineal?

Teorema 5.3.1 Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de dimensión finita y $\mathbf{B}=\left(\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\ldots,\mathbf{v}_n\right)$ es una base de **V**.
Sea la forma bilineal $\mathbf{b}:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R},\ (\mathbf{u},\mathbf{v})\to\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})$.
b es una forma bilineal simétrica sí y sólo si $[\mathbf{b}]_\mathbf{B}=\mathbf{A}$ es una matriz simétrica.

Demostración:

$\Rightarrow$**)** Sea $\mathbf{A}=\left[a_{i\,j}\right]$ donde $a_{i\,j}=\mathbf{b}\,(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)$ con $i,j=1,2,\ldots,$n la matriz de la forma bilineal **b** en la base **B**.

Por ser **b** simétrica se tiene que:

$$\underbrace{\mathbf{b}\,(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)}_{a_{ij}}=\underbrace{\mathbf{b}\,(\mathbf{v}_j,\mathbf{v}_i)}_{a_{ji}}$$

El resultado precedente muestra que la matriz **A** es igual a su transpuesta $\left(\mathbf{A}=\mathbf{A}^\mathbf{T}\right)$ es decir que **A** es una **matriz simétrica**.

$\Leftarrow$**)** Supongamos ahora que la matriz **A**, de la forma bilineal **b**, es simétrica.

Sean $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ los vectores de coordenadas de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ respecto a la base **B**.

$$\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{X}^\mathbf{T}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{Y}$$

Puesto que $\left(\mathbf{X}^\mathbf{T}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{Y}\right)$ es una matriz 1x1, es igual a su transpuesta. Teniendo en cuenta además que por hipótesis **A** es una matriz simétrica $\left(\mathbf{A}=\mathbf{A}^\mathbf{T}\right)$ resulta

$$\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{X}^\mathbf{T}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{Y}=\left(\mathbf{X}^\mathbf{T}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{Y}\right)^\mathbf{T}=\mathbf{Y}^\mathbf{T}\,.\,\mathbf{A}^\mathbf{T}\,.\,\mathbf{X}=\mathbf{Y}^\mathbf{T}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{X}=\mathbf{b}(\mathbf{v},\mathbf{u})\,.$$

Por lo tanto, **b** es una forma bilineal simétrica. #

5.4. Formas Cuadráticas

Las aplicaciones más simples de las formas bilineales se presentan en el estudio de las cónicas y cuádricas. Para establecer la vinculación entre estos lugares geométricos y las formas bilineales introduciremos el concepto de "forma cuadrática".

Definición 5.4.1 Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Sea la forma bilineal $\mathbf{b}:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R},\ (\mathbf{u},\mathbf{v})\to\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

La función $\begin{array}{l}\mathbf{q}:\mathbf{V}\to\mathbb{R}\\ \quad\ \mathbf{v}\to\mathbf{b}(\mathbf{v},\mathbf{v})\end{array}$ se denomina **forma cuadrática** asociada a la forma bilineal **b**.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{b}$ la forma bilineal definida por $\mathbf{b}\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 6x_2y_1 + 6x_1y_2$.

La forma cuadrática asociada a **b** es

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 2x_1x_1 + 2x_1x_2 + 6x_2x_1 + 6x_2x_2 = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 6x_2^2 .$$

Observación: El valor de **q** en el vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ se expresa por medio de un polinomio homogéneo de segundo grado en x_1, x_2, coordenadas de **x** respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2

Sea la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_1y_3 - 6x_2y_1 + x_2y_2 - 3x_2y_3 + 4x_3y_3 .$$

La forma cuadrática asociada a **b** es

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{x}) &= x_1x_1 - x_1x_2 + 3x_1x_3 - 6x_2x_1 + x_2x_2 - 3x_2x_3 + 4x_3x_3 \\ &= x_1^2 - 7x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2^2 - 3x_2x_3 + 4x_3^2\end{aligned}$$

Observación: El valor de **q** en el vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ se expresa por medio de un polinomio homogéneo de segundo grado en x_1, x_2, x_3, coordenadas de **x** respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

5.4.1 Matriz de la Forma Cuadrática

Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de dimensión "*n*" y sea $\mathbf{b}: \mathbf{V}\times\mathbf{V} \to \mathbb{R}$ la forma bilineal definida por

$$\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{X}^{\mathbf{T}}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{Y} \qquad (1)$$

con

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- $\mathbf{X} = [\mathbf{u}]_{\mathbf{B}}$ e $\mathbf{Y} = [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$ los vectores de coordenadas de **u** y **v** respecto de una base **B**.

Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, se mostró con anterioridad que desarrollando (1), se tenía la forma polinómica

$$\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{13}x_1y_3 + \cdots + a_{nn}x_ny_n = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

Luego, la forma cuadrática asociada es

$$\mathbf{q(u)} = \mathbf{b(u,u)} = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{nn}x_nx_n = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

Cada término (no nulo) de esta suma es de segundo grado en las coordenadas del vector **u**, es decir, el valor de la forma cuadrática **q** en el vector **u** se expresa por medio de un polinomio homogéneo de segundo grado en las coordenadas de **u** con respecto de la base **B**.

Cabe preguntarse si dado un polinomio homogéneo de segundo grado en *n* variables es posible encontrar una forma bilineal sobre el vectorial **V** de dimensión "*n*", cuya forma cuadrática asociada sea precisamente el polinomio dado.

Analicemos un ejemplo sencillo, considerando $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$.
Sea

$$\mathbf{q(x)} = \mathbf{q}\big((x_1, x_2)\big) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 4\,x_2^2 .$$

Es evidente que **q** es la forma cuadrática asociada a cualquier forma bilineal del tipo:

$$\mathbf{b(x,y)} = 2x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + 4x_2y_2 \quad \text{con} \quad a_{12} + a_{21} = 6$$

es decir, que **hay muchas formas bilineales asociadas a la misma forma cuadrática**.

La matriz de **b**, en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & a_{12} \\ a_{21} & 4 \end{bmatrix}$.

Entre todas las matrices de este tipo hay una sola que es simétrica. Es la que se obtiene haciendo $a_{12} = a_{21} = 3$, esto es $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Teniendo en cuenta esta última matriz, definimos entonces la forma bilineal $\mathbf{b_s}$

$$\mathbf{b_s(x,y)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2 .$$

La forma bilineal $\mathbf{b_s}$ es simétrica y su forma cuadrática asociada es **q**. Es más, es la única forma bilineal simétrica entre todas las que están asociadas a **q**.

Lo que hemos observado en el ejemplo se generaliza sin dificultad, a cualquier espacio vectorial **V** de dimensión finita "*n*", trabajando en coordenadas respecto de una base.

En todos los casos, un polinomio homogéneo de segundo grado en *n* variables se presenta como una forma cuadrática asociada a una única forma bilineal simétrica sobre **V**.

La correspondencia uno a uno entre formas bilineales simétricas y formas cuadráticas permite definir matriz de una forma cuadrática.

> **Definición 5.4.1** Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de dimensión finita y **B** una base de **V**. Sea la forma bilineal **b** y su forma cuadrática asociada **q**.
>
> Diremos que la **matriz de la forma cuadrática q** en la base **B**, es la matriz que representa, en dicha base, a la forma bilineal simétrica asociada a la forma cuadrática. Esto es: $[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}} = [\mathbf{b}_s]_{\mathbf{B}}$

Observación: Por su definición, la matriz de una forma cuadrática $\mathbf{q}$ en cualquier base, es la matriz que representa, en dicha base, a la forma bilineal simétrica asociada a $\mathbf{q}$, entonces por el **Teorema 5.3.1** dicha matriz es una matriz simétrica.

Ejemplos

Ejemplo 1

Se quiere hallar la matriz, con respecto a la base canónica, de la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathbf{q(x)} = \mathbf{q}\big((x_1, x_2)\big) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 5\,x_2^2$$

"Desdoblando" el termino mixto en la forma $-4x_1x_2 \;= -2x_1x_2 - 2x_2x_1$, podemos escribir

$$\mathbf{q(x)} = 3x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 5\,x_2^2\,.$$

Luego, la forma bilineal simétrica asociada a **q** es

$$\mathbf{b_s}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$, la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ representa a $\mathbf{b_s}$ y por lo tanto a la forma cuadrática **q**.

Ejemplo 2.

Se busca dar la matriz, con respecto a la base canónica, de la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{q}\big((x_1, x_2, x_3)\big) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 + 4\,x_2^2 - 2x_2x_3 - 5x_3^2$$

Reescribiendo (desdoblando) los términos mixtos en la siguiente forma

$$2x_1x_2 = x_1x_2 + x_2x_1, \quad -3x_1x_3 = -\tfrac{3}{2}x_1x_3 - \tfrac{3}{2}x_3x_1, \quad -2x_2x_3 = -x_2x_3 - x_3x_2$$

Luego, podemos escribir

$$\mathbf{q(x)} = -x_1x_1 + x_1x_2 + x_2x_1 - \tfrac{3}{2}x_1x_3 - \tfrac{3}{2}x_3x_1 + 4x_2x_2 - x_2x_3 - x_3x_2 - 5x_3x_3$$

Reordenando los términos se obtiene:

$$\mathbf{q(x)} = -x_1x_1 + x_1x_2 - \tfrac{3}{2}x_1x_3 + x_2x_1 + 4x_2x_2 - x_2x_3 - \tfrac{3}{2}x_3x_1 - x_3x_2 - 5x_3x_3$$

La forma bilineal simétrica asociada a **q** es

$$\mathbf{b_s(x,y)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 4 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & -5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 4 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & -5 \end{bmatrix}$ representa a la forma bilineal $\mathbf{b_s}$ y por lo tanto es también la matriz de **q**.

Ejemplo 3

Supongamos tener $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ del tipo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ una matriz diagonal, entonces la forma bilineal simétrica asociada es de la forma

$$\mathbf{b_S(x,y)} = \mathbf{X^T . A . Y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b_S(x,y)} = a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n$$

y por lo tanto, la forma cuadrática asociada es de la forma

$$\mathbf{q(x)} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \,.$$

Teniendo en cuenta el ejemplo anterior y dado que las matrices diagonales son las matrices simétricas más simples, es natural preguntarse si, en alguna base, la matriz de una forma cuadrática es diagonal. Esto equivale a plantearse, si la matriz de la forma bilineal simétrica asociada es diagonalizable.

Teorema 5.4.1 Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de dimensión finita. Si $\mathbf{b_s}$ es una forma bilineal simétrica en **V** entonces existe una base ortonormal de **V** en la cual la forma cuadrática asociada puede ser escrita como $\mathbf{q(u)} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$ siendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz de la forma cuadrática y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las coordenadas de **u** respecto de la base ortonormal.

Demostración:

Sea $\mathbf{B_1}$ una base cualquiera de **V**.

Sabemos que $[\mathbf{q}]_{\mathbf{B_1}} = [\mathbf{b_s}]_{\mathbf{B_1}} = \mathbf{A}$ es una matriz simétrica.

Por el **Teorema 3.5.2** si **A** es una matriz simétrica, entonces existe una matriz **P** ortogonal, tal que: $\mathbf{P^T . A . P = D}$ matriz diagonal.

Esto es, existe $\mathbf{B}_2$ una base ortonormal formada por vectores propios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ de **A** talque

$$\mathbf{P^T} . [\mathbf{b}]_{\mathbf{B_1}} . \mathbf{P} = [\mathbf{b_s}]_{\mathbf{B_2}} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ siendo } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \text{ los valores propios de } \mathbf{A}$$

Luego, si $\mathbf{B}_2 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ se tiene que $\mathbf{u} = x_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n$ y entonces, desarrollando

$$\mathbf{q(u)} = [\mathbf{u}]_{\mathbf{B_2}}^{\mathbf{T}} . \mathbf{D} . [\mathbf{u}]_{\mathbf{B_2}}$$

$$\mathbf{q(u)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q(u)} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

Por lo tanto, la forma cuadrática asociada $\mathbf{q(u)} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$ es una suma de múltiplos de cuadrados donde no aparecen "términos mixtos". #

Ejemplos

Ejemplo 1

Encuentre un cambio de variable de manera la forma cuadrática dada por

$$\mathbf{q(x)} = \mathbf{q}\big((x_1, x_2)\big) = 5x_1^2 + 4x_1 x_2 + 2x_2^2$$

se transforme en una forma cuadrática sin "término mixto" (o término cruzado).

Con respecto a la base canónica $\mathbf{B_0}$ de $\mathbb{R}^2$, la matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B_0}} = [\mathbf{b}_S]_{\mathbf{B_0}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ y podemos escribir $\mathbf{q(x)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, esto es $\mathbf{q(x)} = [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{T}} .\mathbf{A}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0}$.

Como **A** es una matriz simétrica, diagonaliza ortogonalmente.

Planteamos entonces

$$0 = det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow 0 = (\lambda - 5)(\lambda - 2) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

Luego los valores propios de **A** son $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 1$. Los correspondientes vectores propios unitarios son $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

Por lo tanto, considerando $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ (matriz cambio de base canónica a base de vectores propios) y $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ se tiene que $\mathbf{P^T} . \mathbf{A} . \mathbf{P} = \mathbf{D}$.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \mathbf{P}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}$ donde $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ y $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ resulta:

$$\mathbf{q}((y_1,y_2)) = [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}^{\mathbf{T}} .\mathbf{D}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 6y_1^2 + y_2^2 \ .$$

Ejemplo 2

Encuentre un cambio de variable de manera la forma cuadrática dada por

$$\mathbf{q(x)} = \mathbf{q}\big((x,y,z)\big) = x^2 + y^2 + 2xy + 2z^2$$

se transforme en una forma cuadrática sin "término mixto" (o término cruzado).

Con respecto a la base canónica $\mathbf{B_0}$ de $\mathbb{R}^3$, la matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B_0}} = [\mathbf{b}_S]_{\mathbf{B_0}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y podemos escribir $\mathbf{q(x)} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, esto es $\mathbf{q(x)} = [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{T}} .\mathbf{A}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0}$.

Como **A** es una matriz simétrica, diagonaliza ortogonalmente.

Planteamos entonces

$$0 = det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow 0 = (\lambda-2)\left((\lambda-1)^2+1\right) = \lambda(\lambda-2)^2$$

Luego los valores propios de **A** son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$ (multiplicidad 2). Los correspondientes vectores propios unitarios son $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto, considerando $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (matriz cambio de base canónica a base de vectores propios) y $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ se tiene que $\mathbf{P}^{\mathbf{T}}.\mathbf{A}.\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

Luego, teniendo en cuenta que $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \mathbf{P}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}$ donde $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ y $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ resulta:

$$\mathbf{q}((x',y',z')) = [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}^{\mathbf{T}}.\mathbf{D}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1} = [x' \quad y' \quad z'].\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 2(y')^2 + 2(z')^2 .$$

5.5. Ecuaciones Cuadráticas

En lo que sigue supondremos que $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$ con el producto punto.

Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y sea **q** una forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^n$. La elección de un número real c permite plantear la ecuación cuadrática

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = c .$$

Resolver esta ecuación, es encontrar el conjunto $\boldsymbol{C}$ de todos los $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que la satisfacen, es decir $\boldsymbol{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{q}(\mathbf{x}) = c,\ c \in \mathbb{R}\}$. Cuando este conjunto $\boldsymbol{C}$ no es vacío, recibe el nombre de **cuádrica** de $\mathbb{R}^n$.

En particular en $\mathbb{R}^2$ las gráficas de ecuaciones cuadráticas se denominan **cónicas**. Las más importantes son la **elipse**, **circunferencia**, **hipérbola** y **parábola** a las que se las suele llamar cónicas ordinarias o regulares. Las demás cónicas se llaman degeneradas e incluye a **pares de rectas** y **puntos simples**.

5.5.1 Secciones Cónicas en $\mathbb{R}^2$

En esta sección realizaremos una breve revisión del tema secciones cónicas. Definiremos cada una de las secciones cónicas como lugares geométricos, esto es, como conjuntos de puntos del plano que satisfacen una determinada condición.

Las secciones cónicas se obtienen como intersección de un plano con un cono recto circular de dos hojas, esto es, que se extiende indefinidamente a ambos lados del vértice. El cono circular recto, es una superficie en el espacio tridimensional generada por el movimiento de una recta llamada *generatriz*, que corta a una recta fija eje del cono, en un punto fijo, denominado *vértice* del cono, con un ángulo constante θ, siendo $0<\theta<\pi/2$.

Según cuál sea la inclinación del plano respecto al eje del cono, resultan las distintas curvas (secciones cónicas) como se observa en la siguiente figura.

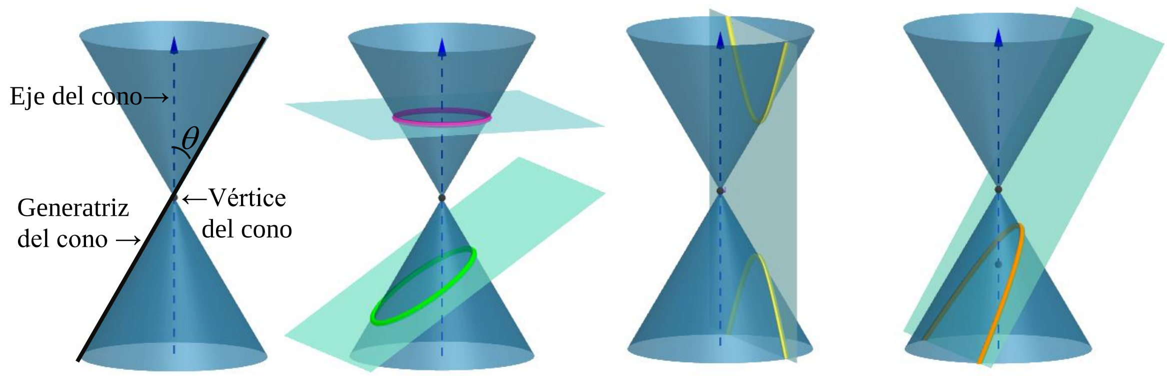


Figura 5.1

I. Si el plano interseca sólo a una de las hojas y no es paralelo a ninguna generatriz del cono, la curva obtenida se denomina **elipse**. Como caso particular, si el plano fuera perpendicular al eje del cono, se tendrá una **circunferencia**.

II. Si el plano corta a las dos hojas del cono, siendo paralelo al eje y no pasa por el vértice, la curva que se obtiene se denomina **hipérbola**.

III. Si el plano corta sólo una de las hojas y es paralelo a una generatriz del cono, lo que se obtiene recibe el nombre de **parábola**.

Por otra parte, las secciones cónicas degeneradas se obtienen cuando se considera la intersección de un cono circular recto de dos hojas con un plano que pasa por su vértice. Se clasifican en tres tipos: **punto**, **recta** y **par de rectas**.

A continuación, veremos las principales características de las cónicas no degeneradas.

5.5.1.1. Circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a igual distancia de un punto fijo llamado **centro** (**P** en la Figura 5.2). Esta distancia recibe el nombre de **radio** de la circunferencia y la denotaremos "*r*".

En el sistema de coordenadas mostrado en la Figura 5.2, se tiene el centro $\mathbf{P} = (x_0, y_0)$ y el punto genérico de la circunferencia $\mathbf{Q} = (x, y)$.

Luego, la distancia entre los puntos **P** y **Q** es: $d(\mathbf{P},\mathbf{Q}) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$

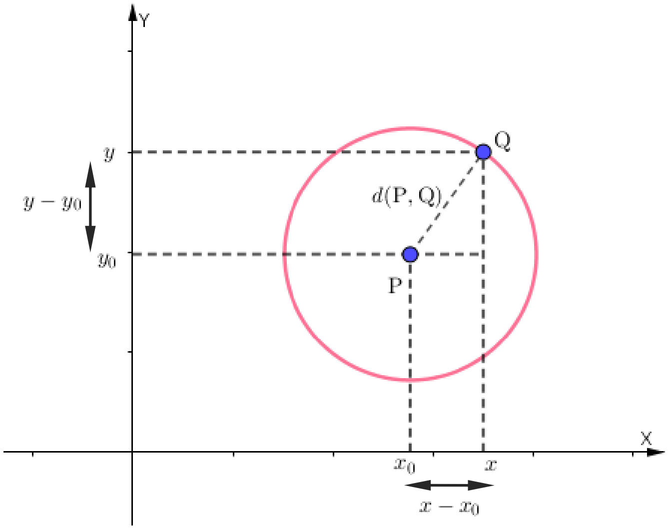


Figura 5.2

Elevando al cuadrado, se obtiene la **ecuación canónica de la circunferencia** de centro (x_0, y_0) y rado *r*.

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r \qquad \textbf{(1)}$$

Desarrollando la última expresión, se tiene:

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y = r^2 - x_0^2 - y_0^2$$

Luego se ontiene la **ecuación general de la circunferencia** de centro (x_0, y_0) y rado *r*:

$$x^2 + y^2 + D\,x + E\,y = F \qquad \textbf{(2)}$$

donde $D = -2x_0 \quad E = -2y_0 \quad F = r^2 - x_0^2 - y_0^2$

Ejemplos

Ejemplo 1

Se desea dar la ecuación de la circunferencia con centro en **P** = (–2, 3) y radio r = 4.

De acuerdo con la ecuación **(1)** escribimos: $(x+2)^2+(y-3)^2=16$.

Equivalentemente la ecuación general de la misma es: $x^2+y^2+4x-6y=3$.

Ejemplo 2

Se quiere hallar el centro y el radio de la circunferencia de ecuación $x^2+y^2+8x-5y=6$.

Usando las expresiones **(2)**

$$A=-2x_0=8 \Rightarrow x_0=-4$$

$$B=-2y_0=-5 \Rightarrow y_0=-\tfrac{5}{2}$$

$$C=r^2-x_0^2-y_0^2=6 \Rightarrow r^2=4+\tfrac{5}{2}+9 \Rightarrow r^2=\tfrac{31}{2} \Rightarrow r=\sqrt{\tfrac{31}{2}}$$

Consecuentemente:

Centro: $\mathbf{P}=\left(-4,-\tfrac{5}{2}\right)$; radio: $r=\sqrt{\tfrac{31}{2}}$.

5.5.1.2 Elipse

La elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos del plano, llamados **focos**, es una magnitud constante mayor que la distancia entre los focos.

Para deducir la expresión matemática que vincula las coordenadas de un punto que pertenezca a la elipse, en su forma más simple, llamada **ecuación canónica,** ubicaremos un sistema de coordenadas en una posición, especialmente conveniente para nuestro fin.

Con este objeto, construimos el eje x, de forma tal que contenga a los focos de la elipse, mientras que el eje y, perpendicular al eje x, pasa por el punto medio del segmento determinado por los focos (Figura 5.3).

La distancia entre los focos es una cantidad fija, que la llamaremos 2 c.

Sea $\mathbf{P}=(x,y)$ un punto genérico de la elipse. De acuerdo a la definición, la suma de las distancias de **P** a los focos, $\mathbf{F}_1=(c,0)$ y $\mathbf{F}_2=(-c,0)$, debe ser una constante que la llamaremos $2a$, es decir: $d(\mathrm{P},\mathrm{F}_1)+d(\mathrm{P},\mathrm{F}_2)=2a$. (Observar que $a>c>0$)

Si denominamos a las distancias de **P** a los focos, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, r_1 y r_2 respectivamente, resulta:

$$r_1 + r_2 = 2a \qquad \textbf{(1)}$$

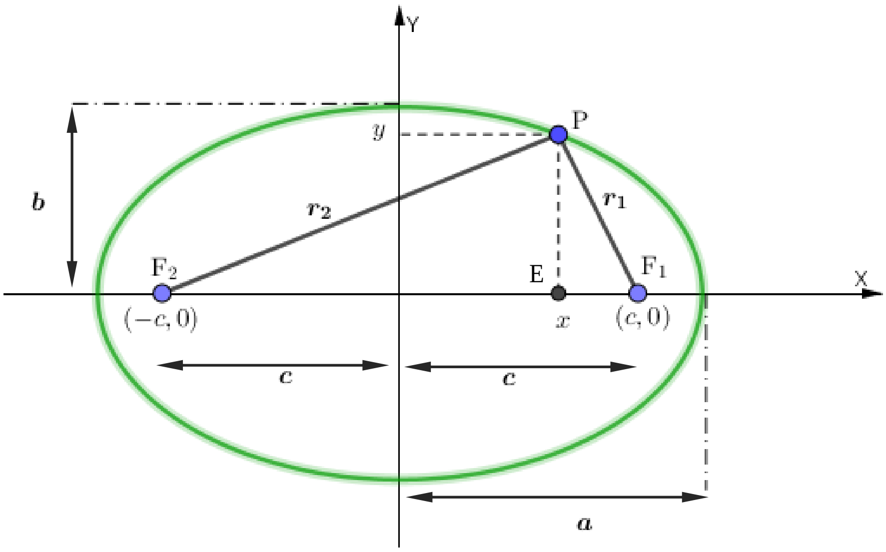


Figura 5.3

Observando la Figura 5.3, vemos que r_1 y r_2 son, respectivamente las hipotenusas de los triángulos rectángulos: $F_1\overset{\Delta}{E}P$ y $F_2\overset{\Delta}{E}P$. Aplicando Pitágoras:

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Reemplazando estas expresiones en (1):

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 = 4a^2 + x^2 - 2xc + c^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

elevando nuevamente al cuadrado y operando:

$$a^2x^2 - 2c\,x\,a^2 + c^2a^2 + a^2y^2 = a^4 - 2c\,x\,a^2 + c^2x^2$$

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = \left(a^2 - c^2\right)a^2$$

Luego dividiendo por $\left(a^2 - c^2\right)a^2$ se tiene:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(a^2-c^2\right)}=1$$

Obtenemos entoces la **ecuación canónica de la elipse** con centro $(0,0)$:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ donde } b^2=a^2-c^2 \qquad \textbf{(2)}}$$

Observaciones:

- El punto medio del segmento definido por los focos, es centro de simetría de la figura, en adelante lo llamaremos simplemente **centro**. Debe notarse que en el caso de la Figura 5.3, dicho centro coincide con el origen del sistema, por lo que sus coordenadas serán (0,0). Observar que, si (x,y) pertenece a la elipse, entonces $(-x,-y)$ también pertenece a ella, por verificar ambos la ecuación **(2)**.

- En la ecuación **(2)**, podemos analizar el significado geométrico de las constantes *a* y *b*. En efecto, para $y=0$, se tiene: $x=\pm a$ (Figura 5.4). Es decir, los puntos en que la elipse corta al eje X, denominados **vértices**, tienen abscisa $\pm a$. Luego las coordenadas de los vértices son: $\mathbf{V}=(a,0)$; $\mathbf{V'}=(-a,0)$.

- El segmento que une los vértices, tiene longitud $2a$ y se denomina **eje mayor**.

- En forma similar, para $x=0$, resulta: $y=\pm b$. Esto nos muestra que los puntos donde la elipse corta al eje Y, tienen ordenada $\pm b$ (Figura 5.4). Luego: $\mathbf{M}=(0,b)$; $\mathbf{M'}=(0,-b)$.

- La longitud del segmento $\overline{\mathbf{MM'}}$ es $2b$ y es llamado **eje menor**.

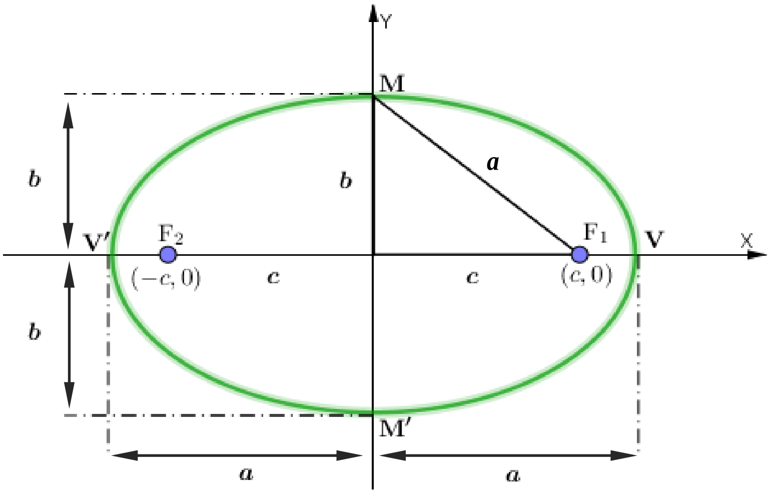


Figura 5.4

- Las coordenadas de los focos son: $\mathbf{F_1} = (c, 0)$**;** $\mathbf{F_2} = (-c, 0)$ donde se verifica $c < a$. En el caso de ser $c = a$, se tendrá un segmento de recta que es uno de los casos de cónicas degeneradas.

- Como **M** pertenece a la elipse, se debe cumplir: $\overline{\mathbf{MF_1}} + \overline{\mathbf{MF_2}} = 2a$ pero además, por simetría: $\overline{\mathbf{MF_1}} = \overline{\mathbf{MF_2}} = a$ siendo: $\overline{\mathbf{M0}} = b$ y $\overline{\mathbf{0F_1}} = c$.

  Si se considera el triángulo $\overset{\Delta}{\mathbf{M0F_1}}$, rectángulo en **0**, aplicando Pitágoras se tiene $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ según puede apreciarse, a corresponde a la longitud de la hipotenusa del triángulo, en tanto que b y c son las longitudes de los catetos. Como consecuencia, en todo este análisis, se tiene: $a > b$.

- Si en una expresión, tal como la **(2)**, fuera: $b > a$, la elipse tendría sus vértices y focos sobre el eje y, en consecuencia el eje mayor estará sobre el eje y.

- Cuando $a = b = r$, se tiene el caso particular de la **circunferencia**.

  Multiplicando ambos miembros de la ecuación de la elipse por r^2, resulta:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \textbf{(3)}$$

  que es la ecuación de una circunferencia de radio " r " y centro en el origen.

- Si el centro de la elipse estuviera desplazado del origen, ocupando el punto de coordenadas: (x_0, y_0), pero con los ejes mayor y menor paralelos a los ejes coordenados del sistema, la ecuación **(2)** se modifica, presentando la forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad \textbf{(4)}$$

Ecuación de la elipse con centro (x_0, y_0)

- Desarrollando la ecuación **(4)**, se obtiene una expresión de la forma:

$$A x^2 + C y^2 + D x + E y = F \qquad \textbf{(5)}$$

- Si, como caso particular, en la expresión **(5)** se tiene A=B, con muy poco trabajo algebraico, es posible llegar a una ecuación de la forma **(3)**, es decir, se trata de una circunferencia.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la ecuación de una elipse, dada en la forma:

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y = -51 \qquad \text{(I)}$$

Se quieren hallar las coordenadas del centro y el valor de los semiejes a y b.

En la ecuación (I), los términos en x^2 y x, pueden pensarse como ***parte del desarrollo de un cuadrado***, esto es:

$$6x^2 - 24x = 6(x^2 - 4x)$$

si: $x^2 - 4x$ son los dos primeros términos del desarrollo de: $(x-\alpha)^2 = x^2 - 2\alpha\, x + \alpha^2$ entonces debe cumplirse que: $-2\alpha = -4$ o equivalentemente $\alpha = 2 \Rightarrow \alpha^2 = 4$.

Luego, reescribiendo adecuadamente en (I), resulta:

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y = -51$$
$$6x^2 - 24x + 9y^2 - 54y = -51$$
$$6(x^2 - 4x) + 9y^2 - 54y = -51$$
$$6(x^2 - 4x + 4 - 4) + (9y^2 - 54y) = -51$$
$$6(x^2 - 4x + 4) + (9y^2 - 54y) - 24 = -51 \qquad \text{(II)}$$

En la expresión obtenida, procedemos de manera similar con el segundo paréntesis:

$$9y^2 - 54y = 9(y^2 - 6y)$$

si $y^2 - 6y$ como los dos primeros términos del desarrollo de $(y-\beta)^2 = y^2 - 2y\beta + \beta^2$ se tendrá que $\beta = 3 \Rightarrow \beta^2 = 9$.

Ahora (II) toma el aspecto:

$$6(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9 - 9) - 24 = -51$$
$$6(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) - 24 - 81 = -51$$
$$6(x-2)^2 + 9(y-3)^2 - 105 = -51$$

O lo que es igual: $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y-3)^2}{6} = 1$

En esta ecuación se pone de manifiesto que las coordenadas del centro son: $centro = (x_0, y_0) = (2,3)$ y los cuadrados de los semiejes: $a^2 = 9$; $b^2 = 6$.

Ejemplo 2

Dada la elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, se busca hallar la distancia entre los focos.

Como $a^2 = 5^2$ y $b^2 = 4^2 \Rightarrow c = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$. Luego, la distancia entre los focos es $2c = 6$.

5.5.1.3 Hipérbola

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos del plano, llamados **focos**, tomada en valor absoluto, es una cantidad constante, menor que la distancia entre los focos.

Para deducir la ecuación canónica de la hipérbola, se trabaja de manera análoga al caso de la elipse.

Se construye un sistema de coordenadas tal que el eje x contenga a los focos, el eje y sea perpendicular al x, y pase por el punto medio del segmento determinado por los focos.

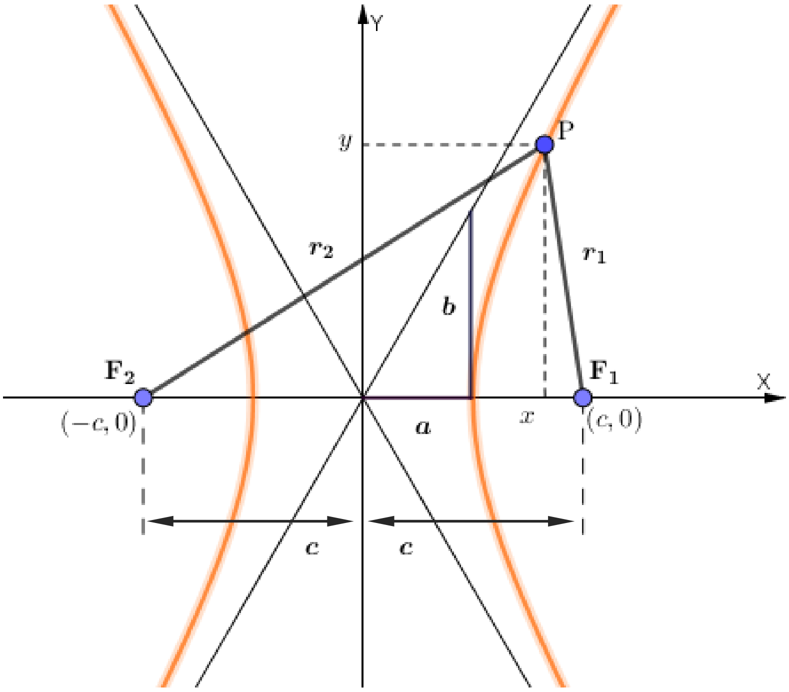


Figura 5.5

La distancia entre los focos la llamamos nuevamente 2*c*.

Sea $\mathbf{P} = (x,y)$ un punto genérico de la hipérbola. De acuerdo a la definición, la resta de las distancias de **P** a los focos, $\mathbf{F}_1 = (c,0)$ y $\mathbf{F}_2 = (-c,0)$, debe ser en valor absoluto una constante que llamaremos $2a$, es decir: $d(\mathrm{P},\mathrm{F}_1) - d(\mathrm{P},\mathrm{F}_2) = |2a|$.

Teniendo en cuenta la Figura 5.5, denominamos a las distancias de **P** a los focos, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, r_1 y r_2 respectivamente,entonces podemos escribir: $r_1 - r_2 = \pm\, 2a$.

De acuerdo a la Figura 5.5: $r_1 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$ y $r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, luego se tiene:

$$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(c-x)^2+y^2}+(c-x)^2+y^2$$

desarrollando los cuadrados y simplificando

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

elevando nuevamente al cuadrado y con algo de trabajo algebraico

$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=(c^2-a^2)a^2$$

Luego dividiendo por $\left(a^2-c^2\right)a^2$ se tiene:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{(c^2-a^2)}=1$$

Obtenemos entoces la **ecuación canónica de la hipérbola** con centro en (0,0) y focos sobre el eje x:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{donde } b^2=a^2-c^2 \qquad \textbf{(1)}}$$

Teniendo en cuenta esta última expresión, se puede despejar : $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$.

Puede apreciarse que, cuando $x>>a$ entonces: $y\approx\pm\frac{b}{a}x$.

La última expresión, considerada como una igualdad, contiene las ecuaciones de dos rectas que se denominan **asíntotas** de la hipérbola: $y=\frac{b}{a}x$; $y=-\frac{b}{a}x$.

Éstas son rectas a las que se aproximan los puntos de la hipérbola a medida que $x\to\pm\infty$ (Figura 5.6).

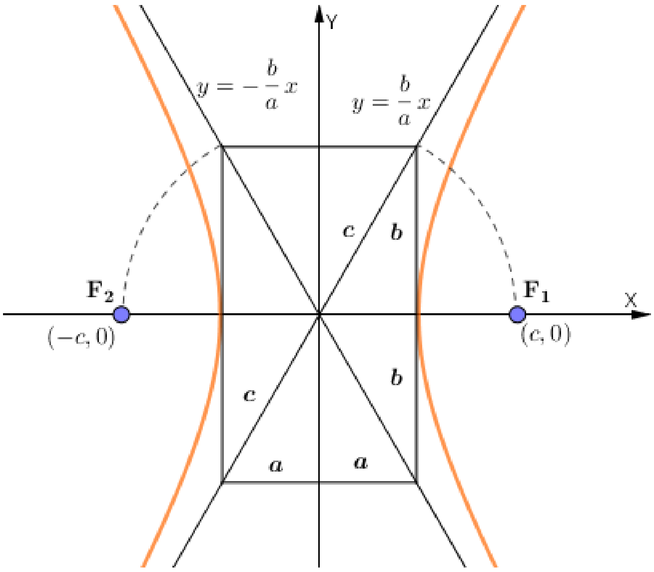


Figura 5.6

Observaciones:

- La hipérbola es una curva que tiene **centro de simetría**, es decir, si (x, y) pertenece a la curva, entonces $(-x,-y)$ también pertenece a ella, hecho que se verifica inmediatamente en la ecuación **(1)**. En el caso que se ha estudiado, el eje de simetría coincide con el origen del sistema de coordenadas.

- Se conviene en llamar **eje transversal** de la hipérbola, al segmento determinado por los vértices (puntos $(a,0)$ y $(-a,0)$ en este caso); en tanto que se denomina **eje conjugado**, al determinado por $(0,b)$ y $(0,-b)$.

- Los puntos (a,b), $(-a,b)$, $(-a,-b)$ y $(a,-b)$ definen lo que se denomina **rectángulo principal** de la hipérbola. Las diagonales del mismo, son parte de las **asíntotas** de la hipérbola.

- La distancia de uno de los focos al origen del sistema, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de base a y altura b, de modo que: $c^2 = a^2 + b^2$.

- Los puntos donde la hipérbola corta al eje x, se denominan **vértices** de la hipérbola. De la ecuación, surge fácilmente que: $y = 0 \Rightarrow x \pm a$, por lo que las coordenadas de los vértices son: $\mathbf{V}_1 = (a, 0)$ y $\mathbf{V}_2 = (-a, 0)$. Para $x = 0$, no existe el correspondiente valor de *y*, lo cual nos indica que esta curva *no corta* al eje y.

- En el caso particular en que $a = b = r$, se tiene una **hipérbola equilátera**, cuya ecuación es: $x^2 - y^2 = r^2$.

- Si los focos de la hipérbola se encuentran sobre el eje y, la ecuación de la curva toma la forma: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$. En este caso, los vértices se encuentran sobre el eje "y" y la curva no corta al eje x.

- Cuando la hipérbola tiene sus asíntotas coincidentes con los ejes de coordenadas, la ecuación es: $x.y = k$ con $k \in \mathbb{R}$. En este caso, el aspecto de la curva se muestra en la Figura 5.7

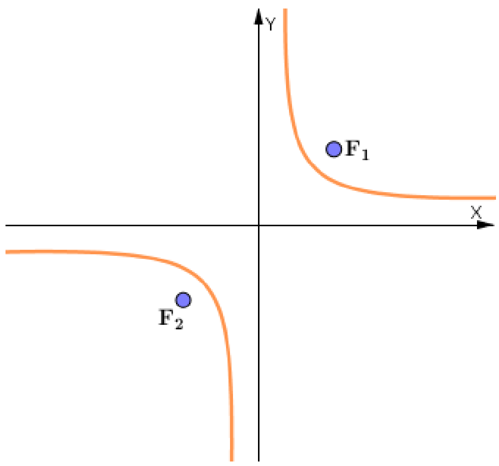


Figura 5.7

- Cuando el centro de simetría de la hipérbola, se encuentra desplazado al punto de coordenadas (x_0, y_0), la ecuación **(1)** toma la forma:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad \textbf{(2)}}$$

- Desarrollando (2), se obtiene una expresión que presenta el aspecto:

$$\boxed{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey=F \quad \text{(donde se cumple que } A.C<0 \text{)} \qquad \textbf{(3)}}$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Dada la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, se quiere calcular la distancia focal y la ecuación de las asíntotas.

Dado que $a^2=16$ y $b^2=9$, planteamos $c=\sqrt{16+9}=5 \quad \Rightarrow \quad$ distancia focal: $2c=10$

$$\left.\begin{array}{l} a=\sqrt{16}=4 \\ b=\sqrt{9}\ =\ 3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{asíntotas:} \quad \left\{\begin{array}{ll} L: & y=\tfrac{3}{4}x \\ L': & y=-\tfrac{3}{4}x \end{array}\right.$$

Ejemplo 2

Se quiere analizar la curva correspondiente a la ecuación:

$$9x^2-4y^2-18x-16y+29=0 \qquad \text{(I)}$$

Vamos a proceder de manera similar a lo realizado en el ejemplo 1 de elipse, donde, el método aplicado fue **completar cuadrados**.

Re-escribimos (I):

$$9\left(x^2-2x\right)-4\left(y^2+4y\right)=-29$$

Completando cuadrados y operando:

$$9\left(x^2-2x+1-1\right)-4\left(y^2+4y+4-4\right)=-29$$

$$9\left(x^2-2x+1\right)-4\left(y^2+4y+4\right)-9+16=-29$$

$$9\left(x-1\right)^2-4\left(y+2\right)^2=-36$$

Finalmente se tiene que la ecuación se puede escribir:

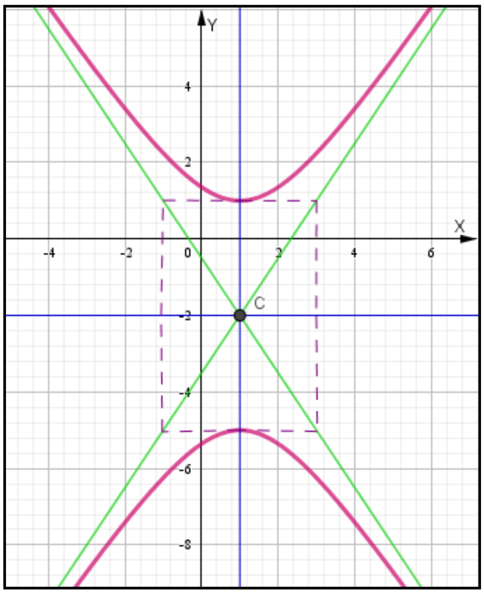
$$\frac{(y+2)^2}{9}-\frac{(x-1)^2}{4}=1$$

Centro: $centro=(1,-2)$

Asíntotas: $y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}$; $\quad y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

Vértices: $\mathbf{V}_1=(1,1)$; $\mathbf{V}_2=(1,-5)$

Focos: $\mathbf{F}_1=\left(1,-2+\sqrt{13}\right)$; $\mathbf{F}_2=\left(1,-2-\sqrt{13}\right)$



5.5.1.4. Parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos $\mathbf{P}=(x,y)$ que equidistan de una recta $\boldsymbol{r}$, llamada **directriz** y de un punto que no pertenece a ella, denominado **foco** de la parábola.

Fijados estos dos elementos, siempre es posible determinar la distancia entre el foco **F** y la directriz $\boldsymbol{r}$, magnitud que denotaremos *p*.

De manera similar a lo realizado en las secciones anteriores, introducimos un sistema de coordenadas donde, el eje y sea perpendicular a la directriz y contenga al foco; el eje x pasa por el punto medio del segmento del eje y que une al foco con la directriz (Figura 5.8).

Un punto genérico $\mathbf{P}=(x,y)$ pertenece a la parábola si: $\overline{\mathbf{PF}}=d(\mathbf{P},\mathbf{F})=d(\mathbf{P},r)$.

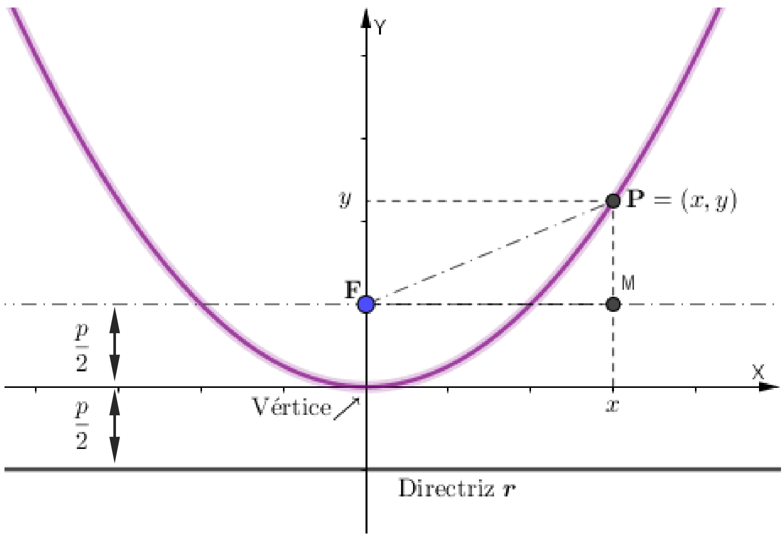


Figura 5.8

Considerando además, que $\overline{\mathbf{PF}}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{\mathbf{FMP}}$ se tiene:

$$\overline{\mathbf{PF}} = d(\mathbf{P},\mathbf{F}) = d(\mathbf{P},r) = y + \frac{p}{2} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$$

elevando al cuadrado y operando:

$$y^2 + py + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + y^2 - py + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$2py = x^2$$

$$y = \frac{1}{2p}x^2$$

Haciendo: $\frac{1}{2p} = a$ se tiene la **ecuación canónica de la parábola.**

$$y = a\,x^2 \qquad \textbf{(1)}$$

La ecuación de la directriz es: $y = -\frac{p}{2}$.

Observaciones:

- La recta que contiene al foco y es perpendicular a la directriz es el **eje de la parábola**.
- El punto medio entre el foco y la directriz, esto es, el punto donde la curva corta al eje de la parábola, se denomina **vértice**.
- En el caso considerado, el vértice coincide con el origen del sistema, por lo que sus coordenadas son: $\mathbf{V} = (0,0)$; en tanto que las del foco son: $\mathbf{F} = \left(0, \frac{p}{2}\right)$.
- Cuando el foco está situado sobre el eje y (como vimos en la Figura 5.8), la parábola se llama a eje vertical.
- Si se invierten los roles de x e y, se obtiene como ecuación canónica de la parábola a eje horizontal:

$$x = a\,y^2 \qquad \textbf{(2)}$$

- Cuando la parábola se desplaza paralelamente, de forma tal que el vértice no coincide con el origen del sistema, siendo ahora sus coordenadas: $\mathbf{V} = (x_0, y_0)$, la ecuación **(1)** toma la forma:

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2 \qquad \textbf{(a)}$$

Desarrollando el cuadrado y reordenando los términos, se obtiene:

$$\boxed{A x^2 + D x + y = F \qquad \text{con } A, D, F \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(3)}}$$

Frecuentemente suele también despejarse "*y*" en la ecuación **(a)**, y haciendo:

$$b = -2ax_0 \qquad \text{y} \qquad c = a x_0{}^2 + y_0 \qquad \textbf{(b)}$$

Se obtiene la más conocida expresión:

$$\boxed{y = a x^2 + b x + c \qquad \textbf{(4)}}$$

Si el coeficiente *a* es positivo, las ramas de la parábola a eje vertical, son hacia arriba; si fuera negativo, hacia abajo. En la parábola a eje horizontal, las ramas serían hacia la derecha, o la izquierda respectivamente, según el caso.

En la expresión **(4)**, las abscisas de los puntos donde la curva corta al eje x, $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ son las raíces de la ecuación: $a x^2 + b x + c = 0$.

La ordenada del punto donde la curva corta al eje y, es *c*. (Figura 5.9)

Las coordenadas del vértice $\mathbf{V}$, surgen inmediatamente de las fórmulas **(3)**:

$$v_x = h = \frac{-b}{2a}; \quad v_y = k = \frac{-b^2}{4a} + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad \Rightarrow \mathbf{V} = \left(-\frac{b}{2a},\ c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

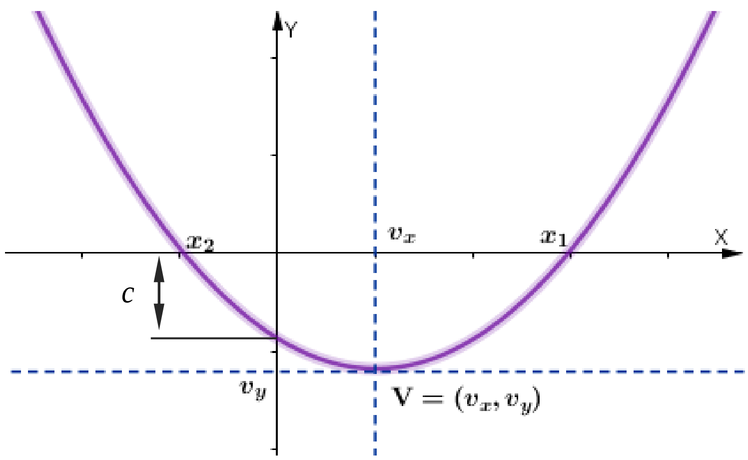


Figura 5.9

Ejemplos

Ejemplo 1

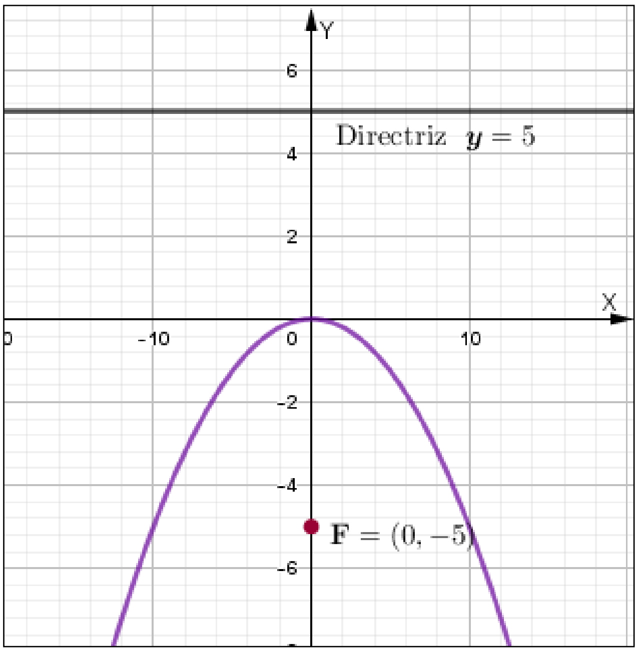
Se busca dar la ecuación de una parábola que tiene su foco en: $\mathbf{F}=(0,-5)$ y como directriz la recta: $y=5$. Se quiere, además, graficarla.

Como el foco está situado debajo de la directriz y sobre el eje y, resulta que:

$$\mathbf{F}=\left(0,\tfrac{p}{2}\right)=(0,-5)\ \Rightarrow p=-10<0,$$

la parábola tiene sus ramas hacia abajo.

$$a=\frac{1}{2p}=-\frac{1}{20}\ \Rightarrow\ y=-\frac{1}{20}x^2$$



Ejemplo 2

Dada la parábola de ecuación: $y=x^2-4x+3$

Se quiere determinar: a) puntos de corte con los ejes coordenados; b) coordenadas del vértice y c) gráfico.

Solución:

a) La parábola corta al eje y en: $x=0\Rightarrow y=3$.
Los puntos de corte con el eje x:

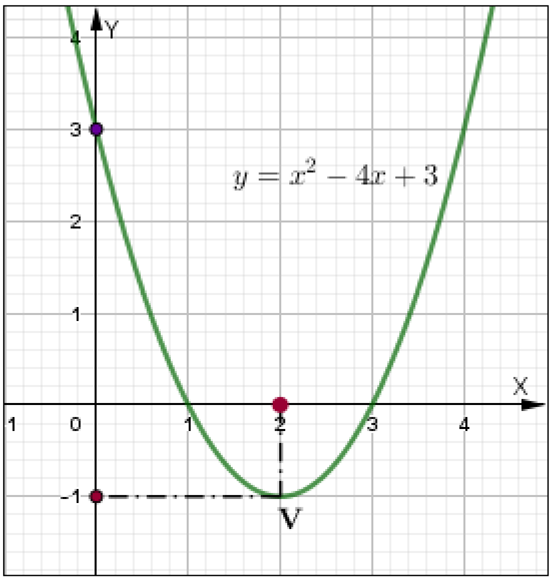
.

$$x^2-4x+3=0\ \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}$$

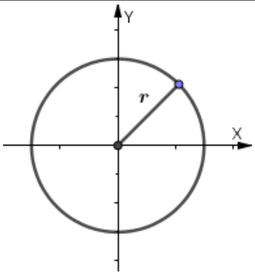
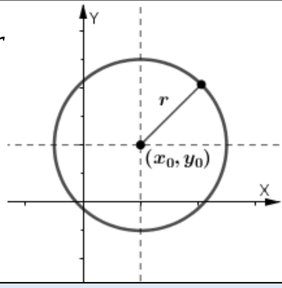
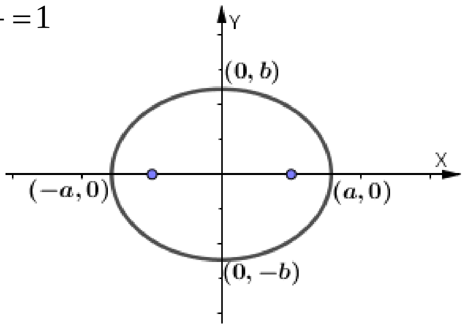
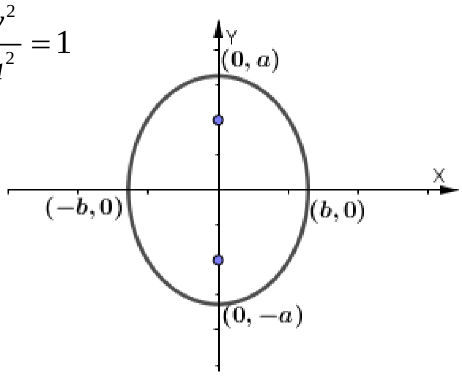
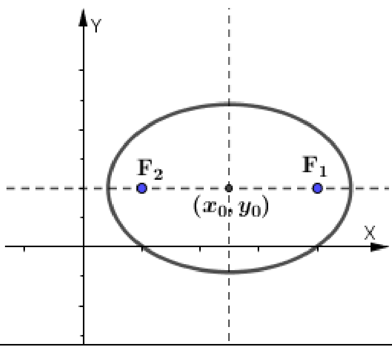
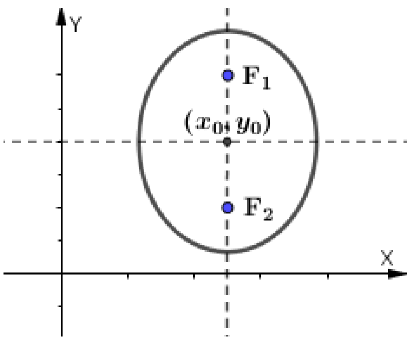
$$\Rightarrow x_1=3\ \text{ y }\ x_2=1$$

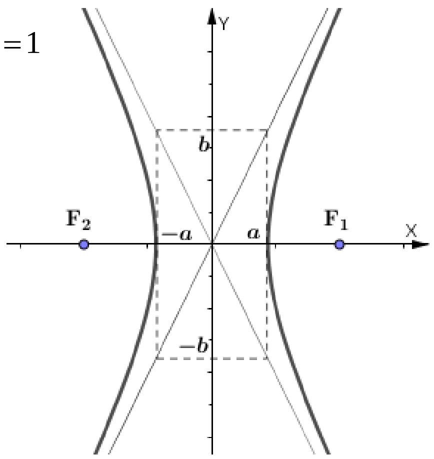
Rta: puntos de corte con los ejes coordenados (0,3); (1,0) y (3,0).

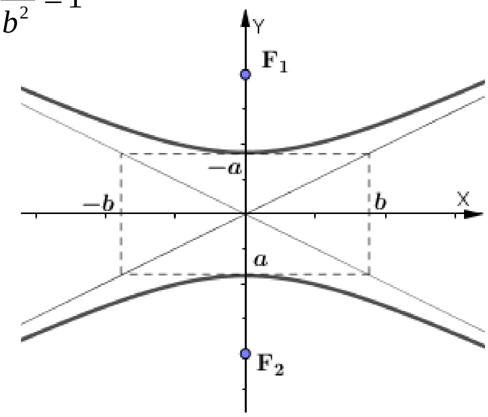
b) $$\left.\begin{aligned} x_{Vértice}&=-\frac{b}{2a}=-\frac{(-4)}{2}=2\\ y_{Vértice}&=c-\frac{b^2}{4a}=3-\frac{16}{4}=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \mathrm{V}=(2,-1)$$

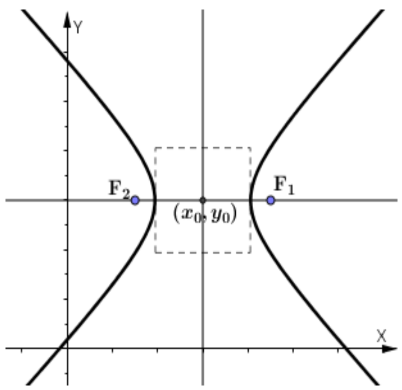


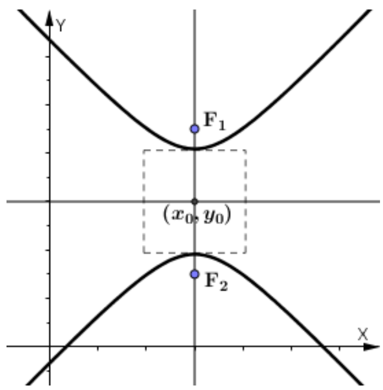
Resumen Secciones Cónicas (estándar y/o trasladadas)

<table>
<tr><th colspan="2">Circunferencia</th></tr>
<tr><td>Centro $(0,0)$ Radio r</td><td>Centro (x_0, y_0) Radio r</td></tr>
<tr><td>$x^2+y^2=r$
</td><td>$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r$
</td></tr>
<tr><th colspan="2">Elipse</th></tr>
<tr><td>Centro $(0,0)$
Focos sobre el eje x: $\mathbf{F_1}=(c,0)$; $\mathbf{F_2}=(-c,0)$
Corte con eje x: $(a,0)$ y $(-a,0)$
Corte con eje y: $(0,b)$ y $(0,-b)$
Se verifica que: $b^2=a^2-c^2$
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
</td><td>Centro $(0,0)$
Focos sobre el eje y: $\mathbf{F_1}=(0,c)$; $\mathbf{F_2}=(0,-c)$
Corte con eje x: $(b,0)$ y $(-b,0)$
Corte con eje y: $(0,a)$ y $(0,-a)$
Se verifica que: $b^2=a^2-c^2$
$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$
</td></tr>
<tr><td>Centro (x_0, y_0)
Eje mayor (o eje focal) es <u>paralelo al eje x.</u>
$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$
</td><td>Centro (x_0, y_0)
Eje mayor (o eje focal) es <u>paralelo al eje y</u>.
$\dfrac{(x-x_0)^2}{b^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Hipérbola</th></tr>
<tr>
<td>
Centro $(0,0)$
Eje focal: <u>eje x</u>
Corte con eje x: $\mathbf{V_1}=(a,0)$ y $\mathbf{V_2}=(-a,0)$
Corte con eje y: -----
Asíntotas: $y=\frac{b}{a}x$; $y=-\frac{b}{a}x$
Eje transversal: $\overline{(-a,0)(a,0)}$
Eje conjugado: $\overline{(0,-b)(0,b)}$
Se verifica que: $c^2=a^2+b^2$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$


</td>
<td>
Centro $(0,0)$
Eje focal: <u>eje y</u>
Corte con eje y: -----
Corte con eje y: $\mathbf{V_1}=(0,a)$ y $\mathbf{V_2}=(0,-a)$
Asíntotas: $y=\frac{a}{b}x$; $y=-\frac{a}{b}x$
Eje transversal: $\overline{(0,-a)(0,a)}$
Eje conjugado: $\overline{(-b,0)(b,0)}$
Se verifica que: $c^2=a^2+b^2$
$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$


</td>
</tr>
<tr>
<td>
Centro (x_0,y_0)
Eje focal <u>paralelo al eje x.</u>
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$


</td>
<td>
Centro (x_0,y_0)
Eje focal <u>paralelo al eje y.</u>
$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$


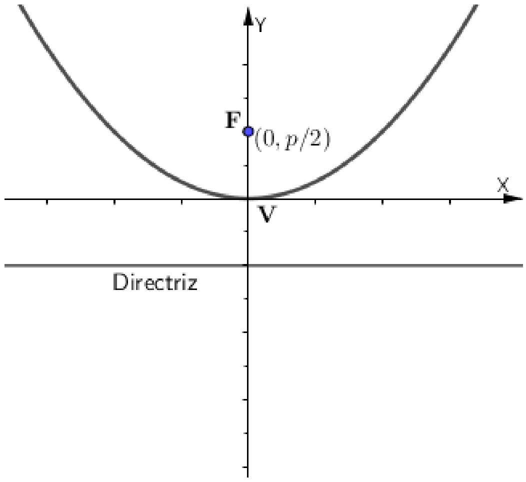
</td>
</tr>
</table>

Parábola

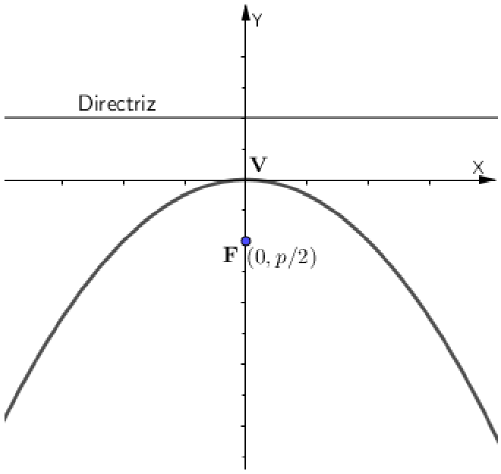
Vértice: $\mathbf{V} = (0,0)$ Foco: $\mathbf{F} = \left(0, \frac{p}{2}\right)$ Recta Directriz: $x = -\frac{p}{2}$

$$y = \left(\frac{1}{2p}\right) x^2$$

Si $p > 0$



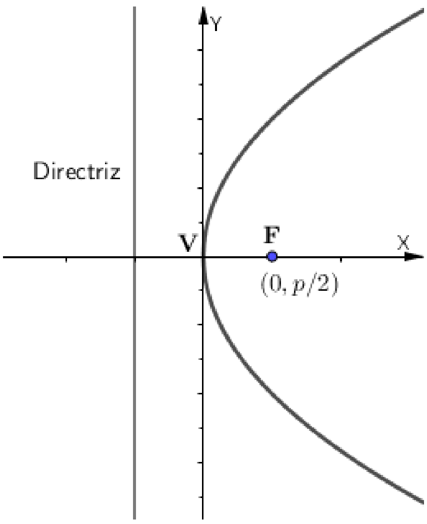
Si $p < 0$



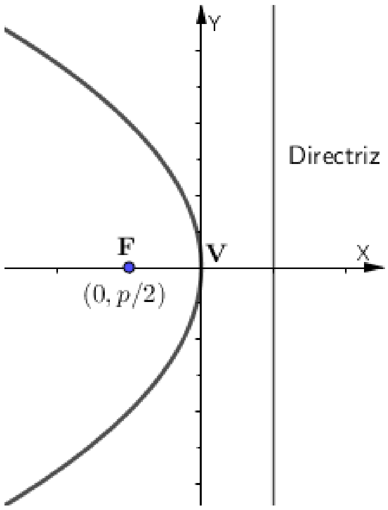
Vértice: $\mathbf{V} = (0,0)$ Foco: $\mathbf{F} = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ Recta Directriz: $y = -\frac{p}{2}$

$$x = \left(\frac{1}{2p}\right) y^2$$

Si $p > 0$



Si $p > 0$



Si el Vértice es: $\mathbf{V} = (x_0, y_0)$ las respectivas ecuaciones resultan:

$$(y - y_0) = a(x - x_0)^2 \quad \text{ó} \quad (x - x_0) = a(y - y_0)^2 \ \text{ siendo } a = \left(\frac{1}{2p}\right)$$

5.6. Identificación de Cuádricas

Una ecuación general completa de segundo grado en dos variables *x* e *y*, se puede expresar de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ donde } A, B \text{ y } C \text{ no son simultáneamente nulos } \mathbf{(I)}$$

Los tres primeros términos de **(I)** constituyen los *términos cuadráticos*. En particular, al término Bxy se lo denomina *término rectangular* o de producto cruzado. Los dos términos siguientes Dx, Ey son los *términos lineales*. Y finalmente, el témino *F*, se lo denomina término independiente.

En la sección anterior vimos que toda circunferencia, elipse, hipérbola y parábola (las tres últimas con ejes focales o directriz paralelas a los ejes coordenados) pueden ser descriptas por una ecuacion como (I). Se debe notar que en cada uno de los casos la ecuación cuadrática trabajada no presentaba témino rectangular B = 0.

De manera general se puede analizar la relación entre estas posibles posiciones de la cónica en el sistema coordenado xy, y los coeficientes de la ecuación cuadrática (I), esto es:

- ***Cónica en posición canónica o estándar***: cuando la sección cónica tiene *centro* (o *vértice* según corresponda), coincidente con el origen de coordenadas y sus ejes coinciden con los ejes coordenados.
  - En relación a la ecuación (I): no figura el término rectangular Bxy, (es decir $B=0$) y los términos lineales Dx; Ey no aparecen (esto es, $D=E=0$).

- ***Cónica trasladada:*** cuando la cónica tiene *centro* (o *vértice*, según corresponda*)* en un punto distinto del origen de coordenadas y sus ejes son paralelos a los ejes coordenados.
  - En relación a la ecuación (I): no figura el término rectangular Bxy, (es decir $B=0$) y aparece en la ecuación algún término lineal Dx o Ey o ambos (esto es, D y/o E no nulos)).

- ***Cónica rotada*****:** cuando sus ejes están girados o rotados respecto de los ejes coordenados y su *centro* (o *vértice*, según corresponda*)* coincide con el origen de coordenadas.

- ***Cónica roto-trasladada*****:** cuando sus ejes están girados o rotados respecto de los ejes coordenados y su *centro* (o *vértice*, según corresponda*)* no coincide con el origen de coordenadas.
  - En los dos casos anteriores y en relación a la ecuación (I): figura el término rectangular Bxy, (es decir $B \neq 0$).

Una técnica para identificar la gráfica de una cónica que no esté en su ***posición normal*** o ***estándar*** consiste en girar y trasladar los ejes coordenados xy a fin de obtener un sistema de coordenadas respecto al cual la cónica esté en su ***posición normal*** o ***estándar.*** A partir de este proceso, la ecuación de la cónica en el nuevo sistema de ejes coordenados puede identificarse fácilmente.

En lo que sigue, presentaremos diferentes ejemplos de ecuaciones cuadráticas en $\mathbb{R}^2$, donde buscaremos obtener un sistema de coordenadas respecto al cual la cónica esté en su ***posición normal*** o ***estándar*** y así poderla identifcar con facilidad.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la ecuación cuadrática en $\mathbb{R}^2$ dada por: $x^2+2y^2-4x+12y+10=0$

Como contiene los términos cuadráticos y lineales pero no contiene el término rectangular o de producto cruzado (en *x.y*) se trata de una cónica en $\mathbb{R}^2$ **trasladada** respecto al origen de coordenadas, pero no está rotada respecto de éstos.

Para la ubicación de la cónica en el plano nos basta encontrar la posición de su centro mediante el procedimiento de completar cuadrados

$$(x^2-4x+4)+2(y^2+6y+9)+10-4-18=0$$

$$(x-2)^2+2(y-3)^2=12$$

$$\frac{(x-2)^2}{12}+\frac{(y-3)^2}{6}=1$$

La cónica es una elipse centrada en el punto (2,3).

Ejemplo 2

Sea la ecuación cuadrática en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=1$$

El conjunto ***C*** de las soluciones es la imagen inversa del escalar $c=1$ por la forma cuadrática

$$\mathbf{q(x)}=\mathbf{q}\big((x_1,x_2)\big)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2$$

Como se mencionó en la Sección **5.5**, Si este conjunto $\boldsymbol{C}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2/\mathbf{q(x)}=1,\ 1\in\mathbb{R}\right\}$ es no vacío, entonces es una cuádrica de $\mathbb{R}^2$, es decir una **cónica.**

La existencia del término rectangular indica que la cónica se encuentra **rotada** respecto a su posición normal o estándar. La ausencia de términos lineales implica que no está trasladada respecto a su posición normal.

Nos proponemos entonces identificar esta cónica y graficarla en el plano cartesiano.

Sea la base canónica $\mathbf{B_0}$ de $\mathbb{R}^2$, la matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B_0}} = [\mathbf{b}_S]_{\mathbf{B_0}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ y podemos escribir

$$\mathbf{q(x)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ esto es } \mathbf{q(x)} = [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{T}} .\mathbf{A}. [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} .$$

Por tratarse de una matriz simétrica, sabemos que diagonaliza ortogonalmente, y la matriz **P** constituye la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a una nueva base $\mathbf{B}_1$ respecto a la cual la matriz de la forma cuadrática es diagonal. Por lo tanto, la ecuación cuadrática respecto al sistema de coordenadas determinado por $\mathbf{B}_1$ carecerá de término rectangular.

Luego el camino a seguir será diagonalizar la matriz **A**.

a) **Ecuación característica y valores propios de A.**

Planteamos entonces

$$0 = det(\lambda \mathbf{I}_2 - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2 + \frac{1}{4} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4}$$

Luego los valores propios de **A** son $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$ y $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$.

b) **Subespacios propios.**

$$\left(\frac{3}{2}\mathbf{I_2} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \mathbf{0} \qquad\qquad \left(\frac{1}{2}\mathbf{I_2} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego (considerando vectores propios unitarios) se tiene:

$$\mathbf{V}_{\lambda_1 = 3/2} = \mathbf{V}_{\lambda_1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle; \qquad \mathbf{V}_{\lambda_2 = 1/2} = \mathbf{V}_{\lambda_2} = \left\langle \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle.$$

c) **La matriz de cambio de la base – Matriz diagonal.**

La matriz **P** que diagonaliza ortogonalmente a **A** es también la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a la base $\mathbf{B}_1$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P}$ es ortogonal pues $\mathbf{B}_0$ y $\mathbf{B}_1$ son bases ortonormales.

Como su determinante es mayor que cero, la base $\mathbf{B}_1$ está positivamente orientada, y representa un giro en sentido antihorario. En efecto **P** puede escribirse

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{siendo } \alpha \text{ el ángulo girado; en este caso } \alpha=\frac{\pi}{4}.$$

Notar que se verifica que $\det \mathbf{P}=1$

Con respecto a la base $\mathbf{B}_1 = \left(\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right), \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)\right)$ resulta $\mathbf{D}=[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_1}=\begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ siento

$\mathbf{P^T}.\mathbf{A}.\mathbf{P}=\mathbf{D}$.

d) Ecuación de la cónica en la nueva base. Gráfica de la cónica.

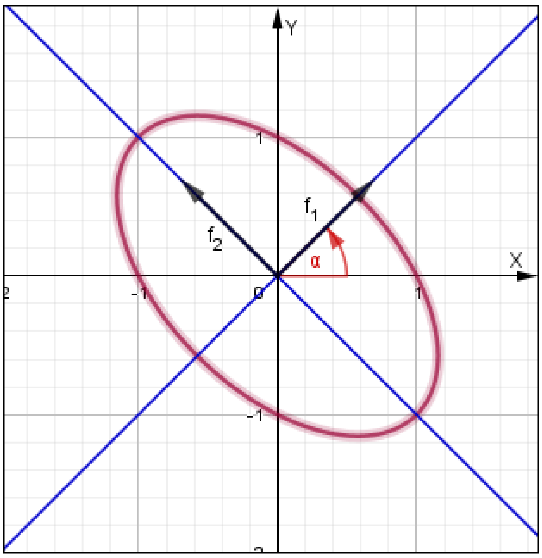
Por lo tanto, teniendo en cuenta que $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0}=\mathbf{P}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}$ donde $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ y $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ es decir que ahora

$$\mathbf{q}((y_1,y_2))=[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}^{\mathbf{T}}.\mathbf{D}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\frac{3}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2 .$$

y la ecuación $\mathbf{q}(\mathbf{x})=1$ resulta

$$\frac{3}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2=1$$

que es la ecuación de una elipse con su eje mayor en la dirección del vector $\mathbf{f}_2$ y su eje menor en la dirección de $\mathbf{f}_1$.



Ejemplo 3

Se da la ecuación

$$2x_1x_2 = 1$$

El conjunto $\boldsymbol{C}$ de las soluciones es la imagen inversa del escalar $c = 1$ por la forma cuadrática

$$\mathbf{q(x)} = \mathbf{q}\left((x_1, x_2)\right) = 2x_1x_2$$

Si el conjunto $\boldsymbol{C} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / \mathbf{q(x)} = 1,\ 1 \in \mathbb{R}\right\}$ es no vacío, entonces es una **cónica**.

La existencia del término rectangular indica que la cónica se encuentra **rotada** respecto a su posición normal o estándar y, por otro lado, la ausencia de términos lineales implica que no está trasladada respecto a su posición normal.

Nos proponemos entonces identificar esta cónica y graficarla en el plano cartesiano.

Sea la base canónica $\mathbf{B_0}$ de $\mathbb{R}^2$, la matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_0} = [\mathbf{b}_S]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y podemos escribir

$$\mathbf{q(x)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \text{esto es } \mathbf{q(x)} = [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{T}} .\mathbf{A}. [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} .$$

Como **A** es una matriz simétrica, sabemos que diagonaliza ortogonalmente, y la matriz **P** constituye la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a una nueva base $\mathbf{B}_1$ respecto a la cual la matriz de la forma cuadrática es diagonal. Por lo tanto, la ecuación cuadrática respecto al sistema de coordenadas determinado por $\mathbf{B}_1$ carecerá de término rectangular.

Luego el camino a seguir será diagonalizar la matriz **A**.

a) **Ecuación característica y valores propios de A.**

Planteamos entonces

$$0 = det\left(\lambda \mathbf{I}_2 - \mathbf{A}\right) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Luego los valores propios de **A** son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$.

b) **Subespacios propios.**

Para $\lambda_1 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \left(\mathbf{I_2} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow x_1 = x_2 \end{array}\right\} \quad \text{entonces } \mathbf{V}_{\lambda_1 = 1} = \mathbf{V}_{\lambda_1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle$$

Para $\lambda_2 = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \left((-1)\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow x_1 = -x_2 \end{array}\right\} \text{entonces } \mathbf{V}_{\lambda_2=-1} = \mathbf{V}_{\lambda_2} = \left\langle \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle$$

c) **La matriz de cambio de la base – Matriz diagonal.**

La matriz **P** que diagonaliza ortogonalmente a **A** es también la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a la base $\mathbf{B}_1$ **.**

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

P es ortogonal pues $\mathbf{B}_0$ y $\mathbf{B}_1$ son bases ortonormales. Además, se verifica que $det\,\mathbf{P} = 1$ y en este caso $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

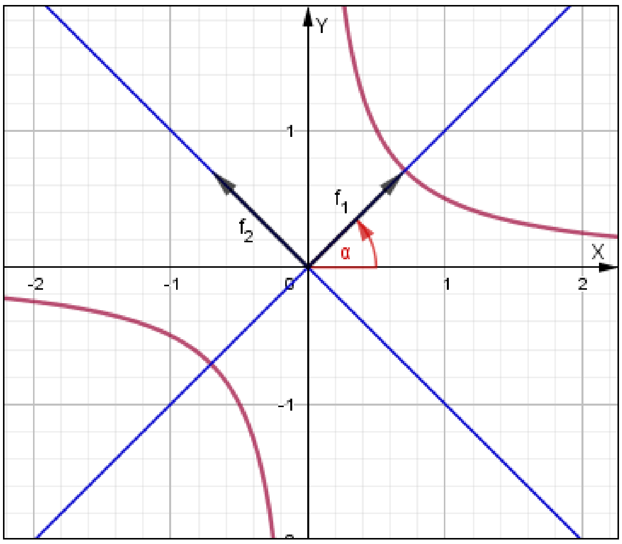
Con respecto a la base $\mathbf{B}_1 = \left(\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right), \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)\right)$ resulta $\mathbf{D} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ siento $\mathbf{P^T}.\mathbf{A}.\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

d) Ecuación de la cónica en la nueva base. Gráfica de la cónica.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \mathbf{P}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}$ donde $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ y $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ es decir que ahora

$$\mathbf{q}((y_1, y_2)) = [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}^{\mathbf{T}}.\mathbf{D}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y_1^2 - y_2^2 \; .$$

y la ecuación $\mathbf{q(x)} = 1$ resulta $y_1^2 - y_2^2 = 1$ que es la ecuación de una hipérbola con sus focos en la dirección del vector $\mathbf{f}_1$.



Ejemplo 4

Se desea identificar la cónica cuya ecuación es

$$2x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1 = 1$$

Consideremos la base canónica $\mathbf{B_0}$ de $\mathbb{R}^2$ y escribamos la ecuación anterior en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q(x)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\text{término lineal}} = 1 \qquad (*)$$

La matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_0} = [\mathbf{b}_S]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz simétrica. Sabemos que diagonaliza ortogonalmente, y la matriz **P** constituye la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a una nueva base $\mathbf{B}_1$ respecto a la cual la matriz de la forma cuadrática es diagonal. Por lo tanto, la ecuación cuadrática respecto al sistema de coordenadas determinado por $\mathbf{B}_1$ carecerá de término rectangular.

Teniendo en cuenta lo realizado en el ejemplo anterior, la matriz de cambio de base de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a la base $\mathbf{B}_1 = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)$ resulta $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ y por lo tanto $\mathbf{P^T.A.P} = \mathbf{D} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \mathbf{P}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}$ donde $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ y $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ podemos escribir la ecuación $(*)$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} . \underbrace{\mathbf{P^T} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \mathbf{P}}_{\mathbf{D}} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} . \mathbf{P} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 1$$

Operando se tiene

$$y_1^2 - y_2^2 + 2y_1 - 2y_2 = 1$$

Y mediante el procedimiento de completar cuadrados

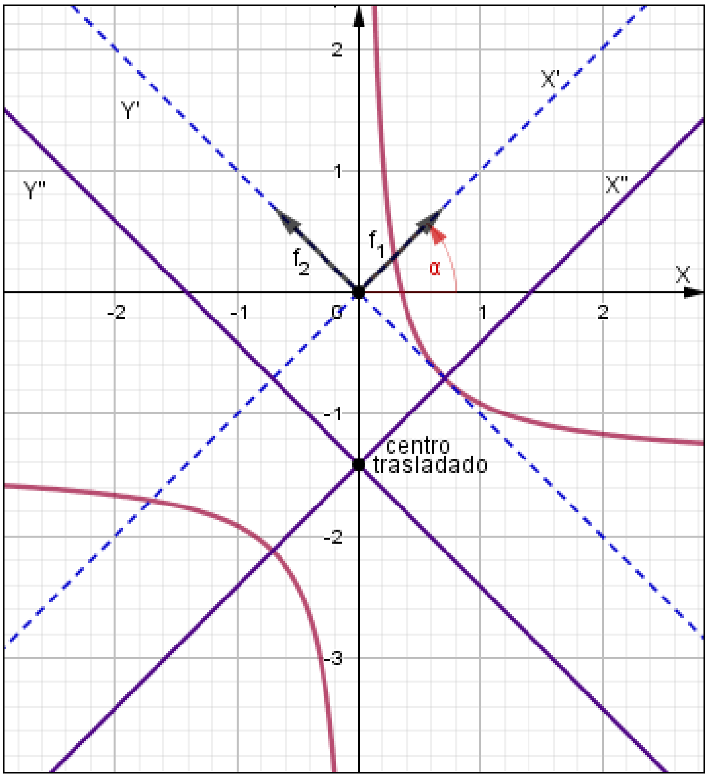
$$\left(y_1^2 + 2y_1 + 1 - 1 \right) - \left(y_2^2 + 2y_2 + 1 - 1 \right) = 1$$

$$\left(y_1 + 1 \right)^2 - \left(y_2 + 1 \right)^2 = 1$$

Resulta entonces que esta última ecuación es la ecuación de una hipérbola con sus focos en la dirección del vector $\mathbf{f}_1$ y su centro trasladado.

Las cooordenadas del centro respecto al nuevo sistema de coordenas (rotado) son $centro=(-1,-1)_{x'y'}$.

(Notar que considerando que $\mathbf{B}_1=\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ entonces las coordenadas del centro trasladado respecto de la base canónica estándar son $centro=\left(0,\sqrt{2}\right)_{xy}$).



Ejemplo 5

Se da la ecuación

$$x^2-2xy+y^2-4\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y=-8$$

Consideremos la base canónica $\mathbf{B_0}$ de $\mathbb{R}^2$ y escribamos la ecuación anterior en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}}_{\mathbf{q(x)}}+\underbrace{\begin{bmatrix}-4\sqrt{2} & -4\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}}_{\text{términos lineales}}=-8 \qquad (*)$$

La matriz $\mathbf{A}=[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_0}=[\mathbf{b}_S]_{\mathbf{B}_0}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ es una matriz simétrica. Sabemos que diagonaliza ortogonalmente, y la matriz **P** constituye la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a una nueva base $\mathbf{B}_1$ respecto a la cual la matriz de la forma cuadrática es diagonal. Por lo tanto, la ecuación cuadrática respecto al sistema de coordenadas determinado por $\mathbf{B}_1$ carecerá de término rectangular.

Luego el camino a seguir será diagonalizar la matriz **A**.

a) **Ecuación característica y valores propios de A.**

Planteamos entonces

$$0=det(\lambda\mathbf{I}_2-\mathbf{A})=\begin{bmatrix}\lambda-1 & 1\\ 1 & \lambda-1\end{bmatrix}=(\lambda-1)^2-1=\lambda^2-2\lambda$$

$0=\lambda(\lambda-2)$ es la ecuación característica de **A**.
Los valores propios de **A** son $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=2$.

b) **Subespacios propios.**

Para $\lambda_1=0$

$$\left.\begin{array}{l}(0\mathbf{I}_2-\mathbf{A}).\mathbf{X}=\mathbf{0}\\ \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow x=y\end{array}\right\}\quad \text{entonces } \mathbf{V}_{\lambda_1=0}=\mathbf{V}_{\lambda_1}=\left\langle\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\right\rangle$$

Para $\lambda_2=2$

$$\left.\begin{array}{l}(2\mathbf{I}_2-\mathbf{A}).\mathbf{X}=\mathbf{0}\\ \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow x=-y\end{array}\right\}\quad \text{entonces } \mathbf{V}_{\lambda_2=2}=\mathbf{V}_{\lambda_2}=\left\langle\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\right\rangle$$

c) **La matriz de cambio de la base – Matriz diagonal.**

La matriz **P** que diagonaliza ortogonalmente a **A** es también la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a la base $\mathbf{B}_1$ **.**

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

P es ortogonal pues $\mathbf{B}_0$ y $\mathbf{B}_1$ son bases ortonormales.

Con respecto a la base $\mathbf{B}_1 = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ resulta $\mathbf{D} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ siento $\mathbf{P}^{\mathbf{T}}.\mathbf{A}.\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

d) Ecuación de la cónica en la nueva base. Gráfica de la cónica.

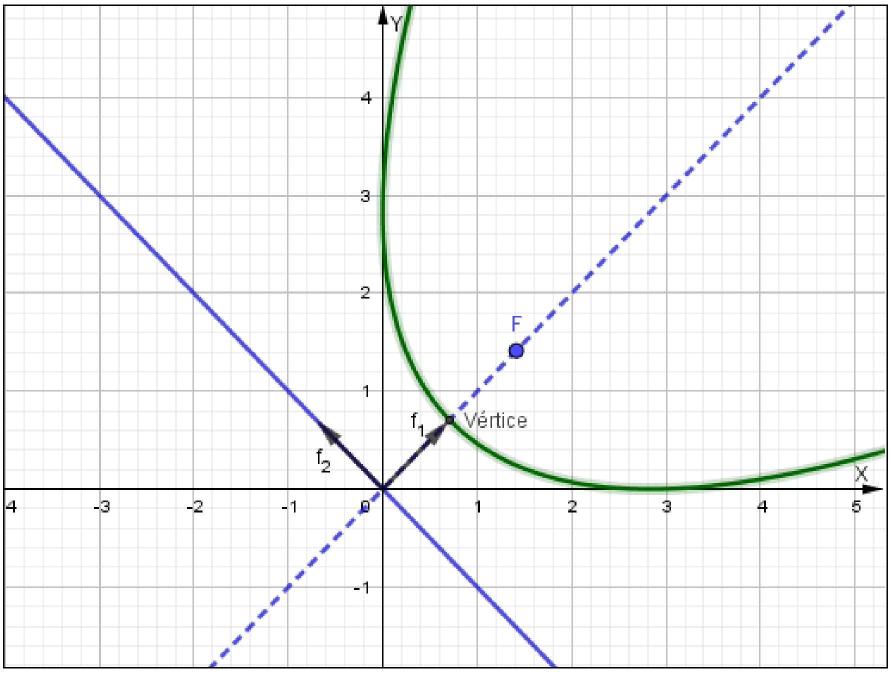
Por lo tanto, teniendo en cuenta que $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \mathbf{P}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}$ donde $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ podemos reescribir la ecuación $(*)$

$$[x' \quad y'].\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = -8$$

$$2(y')^2 + [-4 \quad 0].\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = -8 \qquad .$$

$$2(y')^2 + -4x' = -8$$

Luego se tiene $\frac{1}{2}(y')^2 + 2 = x'$ que es la ecuación de una parábola con su foco en la dirección del vector $\mathbf{f}_1$.



Cuádricas en $\mathbb{R}^3$

Lo dicho respecto a la técnica para analizar las ecuaciones cuadráticas e identificar el conjunto solución (cónica) en $\mathbb{R}^2$ también es válido para $\mathbb{R}^3$, donde algunas de las cuádricas en su forma normal o estándar se presentan a continuación (Figura 5.10).

1)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Elipsoide (Esfera si $a=b=c$)
2)	$ax^2+by^2-z=0$	Paraboloide Elíptico (Paraboloide de Revolución si $a=b$)
3)	$ax^2-by^2-z=0$	Paraboloide Hiperbólico (silla de montar)
4)	$ax^2+by^2-cz^2=0$	Superficie Cónica

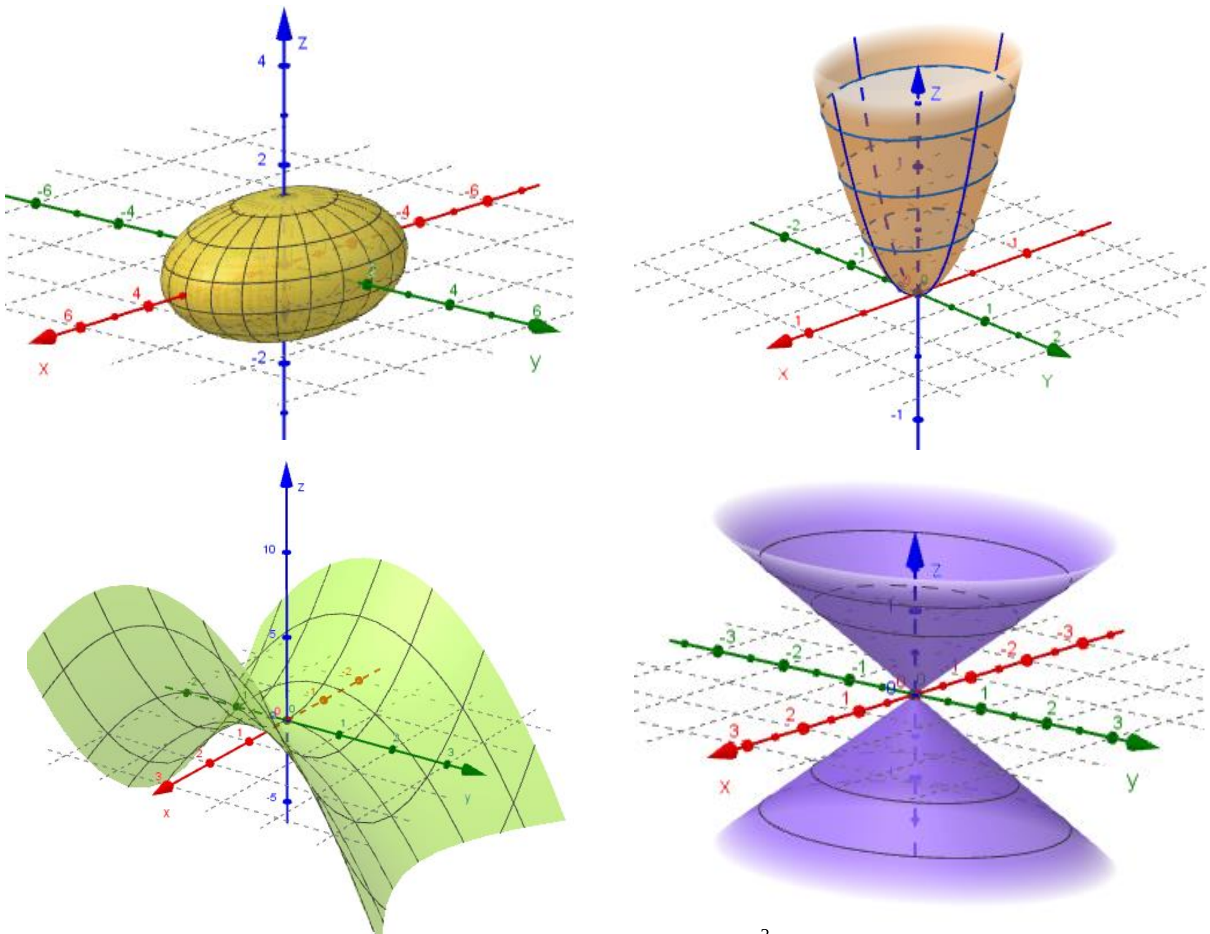


Figura 5.10 Cuádricas en $\mathbb{R}^3$

Ejemplos

Ejemplo 1

Se da la ecuación

$$3x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2+x_3^2=1$$

El conjunto $\boldsymbol{C}$ de soluciones (si no es vacío) es una superficie (cuádrica) de $\mathbb{R}^3$.

Escribimos la ecuación en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 1$$

Buscaremos diagonalizar la matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_0} = [\mathbf{b}_S]_{\mathbf{B}_0}$.

a) Ecuación característica y valores propios de A.

$$det(\lambda \mathbf{I}_3 - \mathbf{A}) = det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = (x-1)^2 (x-5) = 0$$

Los valores propios de **A** son

$\lambda_1 = 5$ (raíz simple) $\lambda_2 = 1$ (raíz doble), .

b) Subespacios propios.

$$\mathbf{V}_{\lambda_1 = 5} = \left\langle \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad \mathbf{V}_{\lambda_2 = 1} = \left\langle \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

c) La matriz de cambio de la base – **Matriz diagonal.**

La matriz **P** que diagonaliza **A** es también la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a la base $\mathbf{B}_1$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego la nueva base de referencia es

$$\mathbf{B}_1 = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = \left(\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0 \right), \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0 \right), (0, 0, 1) \right)$$

Con respecto a la base $\mathbf{B}_1$ resulta

$$\mathbf{D} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Ecuación de la cuádrica en la nueva base.

Sean x_1', x_2' y x_3' las coordenadas del vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ con respecto a la base $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = \left(\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0 \right), \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0 \right), (0, 0, 1) \right)$, es decir $\mathbf{x} = x_1' \mathbf{f}_1 + x_2' \mathbf{f}_2 + x_3' \mathbf{f}_3$.

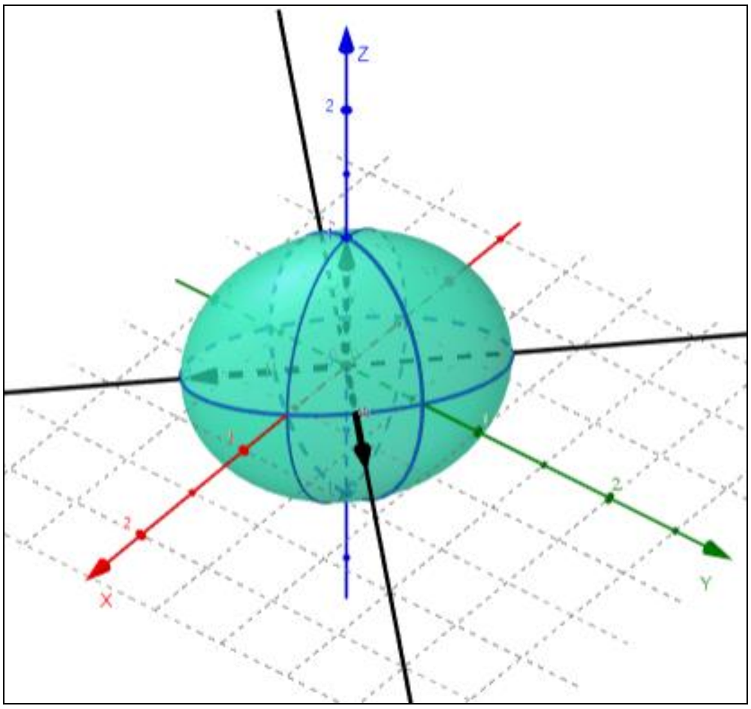
Ahora **q(x)** se expresa en la forma

$$\mathbf{q(x)} = \begin{bmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$$

y la ecuación $\mathbf{q(x)} = 1$ resulta

$$5\left(x_1'\right)^2 + 1\left(x_2'\right)^2 + \left(x_3'\right)^2 = 1$$

Esta ecuación representa un elipsoide con ejes principales en las direcciones de los vectores $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$.



Ejemplo 2

Se da la ecuación

$$x_2^2 + 4x_1x_3 = 0$$

El conjunto ***C*** de soluciones (si no es vacío) es una superficie (cuádrica) de $\mathbb{R}^3$.

Escribimos la ecuación en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Buscaremos diagonalizar la matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_0} = [\mathbf{b}_S]_{\mathbf{B}_0}$.

a) Ecuación característica y valores propios de A.

$$det(\lambda\,\mathbf{I}_3 - \mathbf{A}) = det\begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda-3)\left(\lambda^2-1\right) = 0$$

Los valores propios de **A** son

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1 .$$

b) Subespacios propios.

$$\mathbf{V}_{\lambda_1=1} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad \mathbf{V}_{\lambda_2=-2} = \left\langle \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad \mathbf{V}_{\lambda_3=2} = \left\langle \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle$$

c) La matriz de cambio de la base – **Matriz diagonal.**

La matriz **P** que diagonaliza **A** es también la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a la base $\mathbf{B}_1$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Luego la nueva base de referencia es

$$\mathbf{B}_1 = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = \left((0,1,0),\ \left(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\right),\ \left(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\right)\right)$$

Con respecto a la base $\mathbf{B}_1$ resulta

$$\mathbf{D} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

d) Ecuación de la cuádrica en la nueva base.

Sean x_1', x_2' y x_3' las coordenadas del vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ con respecto a la base $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = \left((0,1,0),\ \left(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\right),\ \left(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\right)\right)$, es decir $\mathbf{x} = x_1'\,\mathbf{f}_1 + x_2'\,\mathbf{f}_2 + x_3'\,\mathbf{f}_3$.

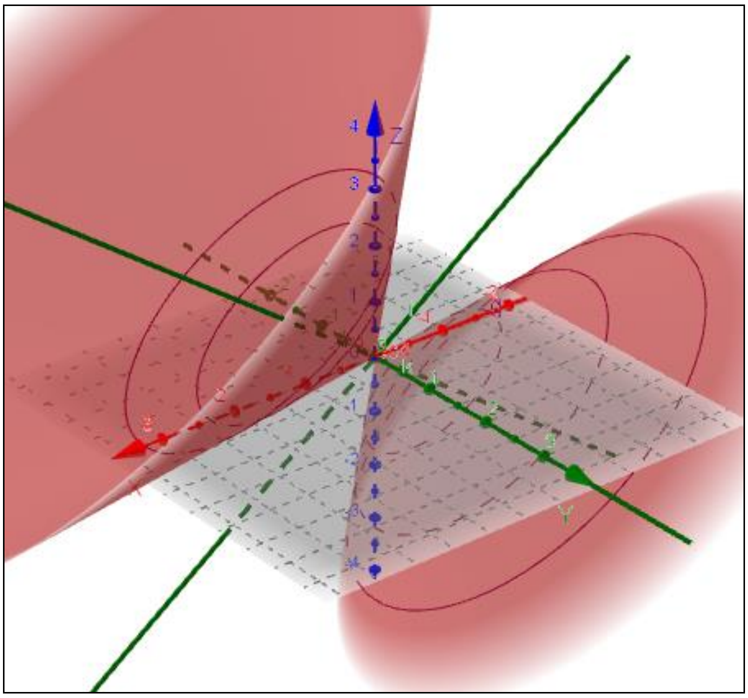
Ahora **q(x)** se expresa en la forma

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$$

y la ecuación $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = 0$ resulta

$$3\left(x_1^{'}\right)^2 - 1\left(x_2^{'}\right)^2 + 1\left(x_3^{'}\right)^2 = 0$$

Esta ecuación representa un cono con eje en la dirección del vectores $\mathbf{f}_3$.



5.7. Ejercicios del Capítulo

Ejercicio 1

Determinar cuáles de las siguientes funciones $\mathbf{f}:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ son bilineales.

a) $\mathbf{f(x,y)} = 2x_1y_1+3x_1y_2-x_2y_2$

b) $\mathbf{f(x,y)} = 1$

c) $\mathbf{f(x,y)} = (x_1+y_1)^2-(x_2-y_2)^2$

d) $\mathbf{f(x,y)} = 2x_1y_1+5x_2y_2{}^2$

e) $\mathbf{f(x,y)} = 2x_1y_1+3x_2y_2+3$

Ejercicio 2

Dada la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & -3\\ 5 & -6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$. Se pide

a) $\mathbf{b}\big((1,2),(-1,4)\big)$.

b) Expresar **b** en forma polinómica.

Ejercicio 3

Dada la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$. Se pide

a) $\mathbf{b}\big((1,2),(1,-1)\big)$.

b) Expresar **b** en forma polinómica.

Ejercicio 4

Se da la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1+3x_1y_2-x_1y_3+4x_2y_1-6x_2y_2+x_3y_1+x_3y_2-x_3y_3$$

Se pide:

a) $\mathbf{b}\big((1,4,0),\ (-1,0,3)\big)$.

b) Expresar **b** en forma matricial.

Ejercicio 4

Se da la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -x_1y_1+3x_1y_2-x_1y_3+4x_2y_1-6x_2y_2-x_3y_2+x_3y_3$$

Se pide:

a) $\mathbf{b}\big((1,1,0),\ (-1,0,3)\big)$.

b) Expresar **b** en forma matricial.

Ejercicio 5

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de la forma bilineal **b** sobre $\mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica. Se pide:

a) Indicar para qué pares (e_i, e_j) de vectores de la base se verifican cada una de las condiciones siguientes $\mathbf{b}(e_i,e_j) = \mathbf{b}(e_j,e_i)$, $\mathbf{b}(e_i,e_j) = -\mathbf{b}(e_j,e_i)$ y $\mathbf{b}(e_i,e_j) = 0$.

b) Dar la matriz de **b** respecto de la base $\mathbf{B_1} = \big((1,1,0), (0,1,0), (1,1,1)\big)$.

c) Expresar **b** en forma polinómica.

Ejercicio 6

En los siguientes casos dar la matriz de la forma bilineal **b** con respecto a cada una de las bases indicadas.

1. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$; $\mathbf{B}_1 = \big((1,2), (3,4)\big)$; $\mathbf{B}_2 = \big((1,0), (0,1)\big)$

   a) $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$.

   b) $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1 - 5x_1y_2 + 2x_2y_1$

   c) $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}\right)$.

   d) $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (2x_1 + 3x_2)(-3y_1 + y_2)$

   e) $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (2x_1 - x_2)(2y_1 - y_2)$

2. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$; $\mathbf{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canónica

   a) $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_1y_3 + 4x_2y_1 - 6x_2y_2 + x_3y_1 + x_3y_2 - x_3y_3$.

   b) $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + 6x_2y_2 - x_3y_3$.

   c) $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2 - 5x_2y_3 - 5x_3y_2 - x_3y_3$.

3. **V** es el subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ generado por las funciones $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ definidas por: $\boldsymbol{f}_1(t) = 1$; $\boldsymbol{f}_2(t) = t$; $\boldsymbol{f}_3(t) = t^2$.

$$\mathbf{b}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = \int_0^1 \boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{g}(t)dt$$

Ejercicio 7

Sea S el espacio vectorial de todas las sucesiones de números reales:

$$\mathbf{y} = \{y_k\}, \quad \mathbf{z} = \{z_k\} \in \ \mathbf{S}, \ p \in \mathbb{R} \qquad\qquad \mathbf{f(y\,,z)} = \sum_{k=1}^{p} y_k \mathbf{.} z_k$$

Muestre que **f** es una forma bilineal simétrica sobre el espacio **S** de todas las sucesiones.

Ejercicio 8

Dar la forma cuadrática correspondiente a cada una de las siguientes formas bilineales

a) $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - 3x_2y_1 + x_2y_2, \quad \mathbf{V} = \mathbb{R}^2$

b) $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2, \quad \mathbf{V} = \mathbb{R}^2$

c) $\mathbf{b(x,y)} = x_1y_1 + 2x_1y_3 - 4x_2y_1 + x_2y_3 + 6x_3y_1 - 3x_3y_2 + 2x_3y_3, \quad \mathbf{V} = \mathbb{R}^3$

d) $\mathbf{b(x,y)} = x_1y_1 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 - 3x_3y_2 - x_3y_3, \quad \mathbf{V} = \mathbb{R}^3$

Ejercicio 9

En cada uno de los casos siguientes, se pide:

a) Dar dos formas bilineales no simétricas, que tengan a **q** como forma cuadrática asociada.

b) Dar la forma bilineal simétrica correspondiente a **q**.

c) Dar la matriz **A** de la forma cuadrática respecto de la base canónica $\mathbf{B}_0$.

d) Dar la expresión matricial de las formas cuadráticas.

1. $\mathbf{q}(x_1,x_2) = 3x_1x_2 + 2x_2^{\,2}$
2. $\mathbf{q}(x_1,x_2) = -x_1^{\,2} + 2x_1x_2 + x_2^{\,2}$
3. $\mathbf{q}(x_1,x_2) = 2x_1^{\,2} + 3x_1x_2 + x_2^{\,2}$
4. $\mathbf{q}(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^{\,2} - 4x_1x_2 + 9x_2^{\,2} + 6x_1x_3 + x_3^{\,2}$
5. $\mathbf{q}(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^{\,2} - 3x_1x_2 + 3x_1x_3 - 4x_3^{\,2}$

Ejercicio 10

Dadas las formas cuadráticas del Ejercicio 9, se pide:

a) Encuentre la matriz **P** que diagonalice **A**.

b) Considerando a **P** como la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a la base $\mathbf{B}_1$**.**

c) Dar $[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_1}$.

d) Grafique en los casos 1), 2) y 3) la posición relativa de los vectores de la base $\mathbf{B}_1$ respecto a los vectores de la base $\mathbf{B}_0$. ¿Qué comentarios puede hacer?.

e) Siendo **P** una matriz ortogonal, su determinante es igual a +1 ó -1 (demuéstrelo). Se dice que la base $\mathbf{B}_1$ está positivamente orientada (tiene igual orientación que la base canónica) si $det\,(\mathbf{P}) = 1$. En caso de que $\mathbf{B}_1$ no lo sea, ¿cómo puede encontrar a partir de ella una que si cumpla este último requisito?.

Ejercicio 11

Sea la ecuación $\mathbf{q(x)} = c$, como se indica en cada uno de los casos siguientes. Se pide:

1) Una base ortonormal $\mathbf{B}_1$, positivamente orientada, que diagonalice a **q**.
2) La ecuación referida a esta base.
3) Graficar e identificar la cónica, ubicando los ejes definidos por la base $\mathbf{B}_1$ con respecto al sistema original.

a) $5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 = 4$

b) $x_1^2 + 9x_1x_2 - 9x_2^2 = 0$

c) $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 6$

d) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$

e) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 6$

f) $9x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 = 4$

g) $9x_1^2 + 12x_1x_2 + 4x_2^2 = 52$

h) $17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2 = 20$

i) $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 = -8$

j) $4x_1^2 - 20x_1x_2 + 25x_2^2 = 20$

k) $9x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 5 = 0$

l) $-25x_1^2 + 9x_2^2 + 225 = 0$

m) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 2$

n) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$

o) $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 = 0$

Ejercicio 12

Sea la ecuación $\mathbf{q(x)} = c$, como se indica en cada uno de los casos siguientes. Se pide:

a) Una base ortonormal $\mathbf{B}_1$, positivamente orientada, que diagonalice a **q**.

b) La ecuación de la cuádrica referida a esta base.

c) Identificar la cuádrica.

1) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$

2) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 5yz = 3$

3) $xy + xz + yz = 1$

4) $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz = 1$

5) $2xy + 2xz + 2yz = 9$

Ejercicio 13

Diagonalizar las formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}^3$ representadas en base canónica por cada una de las matrices siguientes. En cada caso dar la matriz de cambio de base y resolver la ecuación $\mathbf{X^T A\, X} = 6$

$$\text{a) } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{b) } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{c) } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 14

Se dice que una forma cuadrática es **definida positiva** si $\mathbf{q(x)} \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{q(x) =} 0$ solo si $\mathbf{x = 0}$. Demuestre que **q** es definida positiva si y sólo si su matriz simétrica asociada tiene todos los valores propios positivos.

Ejercicio 15

Se dice que una forma cuadrática es **semidefinida positiva** si $\mathbf{q(x)} \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que **q** es semidefinida positiva si y sólo si los valores propios de su matriz asociada son todos no negativos.

Las definiciones de **definida negativa** y **semidefinida negativa** son similares cambiando $\geq$ por $\leq$. Una forma cuadrática es **indefinida** si no es de ninguno de los tipos anteriores. Clasifique las formas cuadráticas del Ejercicio 8 de acuerdo a este criterio.

Ejercicio 15

Es posible determinar si una forma cuadrática es definida positiva, siguiendo un mecanismo distinto que el de la determinación de sus valores propios y que consiste en el análisis del signo de los determinantes de las submatrices superiores izquierdas de la matriz que la representa respecto a alguna base. Si son todos positivos, entonces la forma cuadrática es definida positiva.

Analizar las formas cuadráticas siguientes usando este último criterio:

$$\text{a) } \mathbf{q(x)} = \mathbf{X^T} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{.X} \qquad \text{b) } \mathbf{q(x)} = x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 \qquad \text{c) } \mathbf{q(x) = X^T .} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{.X}$$

Ejercicio 16

Mostrar que si **A** es definida positiva, también lo es $\mathbf{A}^2$ y $\mathbf{A^{-1}}$.

5.8. Guía de Estudio

1) Defina **forma lineal**. Muestre que toda forma lineal en un vectorial real **V** de dimensión finita se puede expresar de la forma $\mathbf{L(v) = a . x}$.

2) Defina **forma bilineal**. Dé su expresión polinómica y matricial.

3) ¿Como se construye la **matriz de una forma bilineal** en la base **B**?.

4) ¿Cómo cambia la **matriz de una forma bilineal** cuando cambia la base de referencia?.

5) Defina forma **bilineal simétrica.** ¿Que característica tiene su matriz respecto a una base **B**?.

6) Defina **forma cuadrática**. ¿A qué se denomina **matriz** de la forma cuadrática?.

7) ¿Cuál es la forma general de una ecuación cuadrática en $\mathbb{R}^n$? ¿Qué da por resultado trabajando en $\mathbb{R}^2$? ¿y en $\mathbb{R}^3$?.

8) ¿Qué efecto tiene en el conjunto de soluciones la existencia en la ecuación cuadrática de términos rectangulares? ¿y la presencia simultanea de un término en x^2 y x?.

9) Indique una técnica de cálculo que permite identificar el conjunto de soluciones de una ecuación cuadrática.