FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

ÁLGEBRA LINEAL

TEORÍA y PRÁCTICA

Elizabeth Vera de Payer   Magdalena Dimitroff

2020

Un especial agradecimiento al Ing. Alfredo Payer quien prestó conformidad para poner este material bajo lincencia Creative Commons, convencido de que esa hubiera sido la voluntad de la Ing. Elizabeth Vera de Payer.

Índice

1

Espacios Vectoriales

Dado un sistema de coordenadas en el plano, es sabido que se puede establecer una correspondencia uno a uno entre los vectores libres del plano y los pares ordenados de números reales $\mathbb{R}^2$. De igual forma sucede con los vectores libres del espacio y las ternas ordenadas de números reales $\mathbb{R}^3$. Esta correspondencia se extiende a las operaciones de suma de vectores y multiplicación de un vector por un número real, que se traduce en las operaciones usuales con los elementos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.
Nos proponemos generalizar el concepto de **vector** considerando conjuntos cuyos elementos pueden ser sumados y multiplicados por un escalar (elemento de un cuerpo) y que presenten un comportamiento similar al de los vectores geométricos respecto a dichas operaciones.

1.1 Espacios Vectoriales

Definición 1.1.1: Sea **K** un cuerpo y **V** un conjunto no vacío de objetos sobre los que están definidas dos operaciones:

- **Una operación interna** llamada **suma** o **adición**, que asigna a cada par $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ de elementos de **V**, un elemento de **V** denotado $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

- **Una operación externa** llamada **multiplicación por un escalar**, que asigna a cada par formado por un elemento $k \in \mathbf{K}$, y un elemento $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, un elemento de **V** denotado $k.\mathbf{v}$.

Satisfaciendo los siguientes axiomas para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ y $k, k' \in \mathbf{K}$:

Para la suma o adición:

A₁ : $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ **Asociatividad**

A₂ : $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$ **Conmutatividad**

A₃ : Existe un elemento de **V** denotado $\overline{\mathbf{0}}$ y llamado **vector nulo** o **vector cero** de **V** que verifica: $\mathbf{v}+\overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}}+\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

A₄ : Para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ existe un elemento de **V** denotado $-\mathbf{u}$ y llamado **opuesto de u** tal que: $\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = \overline{\mathbf{0}}$.

Para la multiplicación:

M1 :	$k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{v}$	**Distributividad respecto a la suma de vectores**
M2 :	$(k+k')\mathbf{u} = k\,\mathbf{u} + k'\mathbf{u}$	**Distributividad respecto a la suma de escalares**
M3 :	$(k'.k)\mathbf{u} = k'(k\,\mathbf{u})$	**Homogeneidad de la multiplicación por un escalar**
M4 :	$1.\mathbf{u} = \mathbf{u}$	**Al escalar 1 se lo llama identidad multiplicativa**

Entonces diremos: **V es un espacio vectorial sobre el cuerpo K**

A los elementos de **V** les llamaremos **vectores** mientras que a los elementos del cuerpo **K** les llamamos **escalares.**

Observación: Dependiendo de la aplicación, los escalares normalmente usados son los números reales $k \in \mathbb{R}$ o complejos $k \in \mathbb{C}$, lo que en correspondencia da origen a los espacios vectoriales reales o espacios vectoriales complejos. Salvo expresa mención de lo contrario, en lo que sigue se trabajará con espacios vectoriales reales.

Nota: Debe tenerse en cuenta que en la definición de espacio vectorial no se especifica la naturaleza de los elementos de **V** ni de las operaciones con ellos realizadas. El único requisito es que cumplan con los ocho axiomas de la Definición 1.1.1.

Ejemplos

Ejemplo 1

El conjunto $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,/\, x, y \in \mathbb{R}\}$ (pares ordenados de números reales) con las operaciones de adición y multiplicación por escalares ($k \in \mathbb{R}$) definidas en forma habitual, esto es:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$
$$k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$$

Constituye un espacio vectorial sobre los reales, llamado espacio vectorial real o $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Con el fin de mostrar que V es un espacio vectorial, debe comprobarse que satisface todos los axiomas de la Definición 1.1.1.. A modo de ejemplo veamos la demostración de los axiomas A_1, A_3 y M_2.

A1. Supongamos que $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ y $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ son elementos de $\mathbb{R}^2$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} &= \left[(x_1,x_2)+(y_1,y_2)\right]+(z_1,z_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)+(z_1,z_2)\\
&= \left((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2\right)=\left(x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2)\right)\\
&= (x_1,x_2)+(y_1+z_1,y_2+z_2)=(x_1,x_2)+\left[(y_1,y_2)+(z_1,z_2)\right]\\
&= \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})
\end{aligned}
$$

A3. Sea $\overline{\mathbf{0}}=(0,0)\in\mathbb{R}^2$. Entonces, para cualquier $\mathbf{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ se tiene,

$$\mathbf{x}+\overline{\mathbf{0}}=(x_1,x_2)+(0,0)=(x_1+0,x_2+0)=(x_1,x_2)=\mathbf{x}$$

M2. Sea $\mathbf{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ y sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{x} &= (\alpha+\beta)\cdot(x_1,x_2)=\left((\alpha+\beta)\,x_1,(\alpha+\beta)\,x_2\right)=\left(\alpha\,x_1+\beta\,x_1,\alpha\,x_2+\beta\,x_2\right)\\
&= (\alpha\,x_1,\alpha\,x_2)+(\beta\,x_1,\beta\,x_2)=\alpha\,(x_1,x_2)+\beta\,(x_1,x_2)\\
&= \alpha\,\mathbf{x}+\beta\,\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,/\,x_i\in\mathbb{R}\;i=1,2,\ldots n\}$ (n-uplas de números reales) con las operaciones:

$$
\begin{aligned}
(a_1,a_2,...,a_n)+(b_1,b_2,...,b_n) &= (a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n)\\
k\,(a_1,a_2,...,a_n) &= (ka_1,ka_2,...,ka_n)\quad con\;\; k\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$\mathbf{V}=\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3

El conjunto $\mathbf{K}^{m\times n}$ (matrices $m\times n$ sobre el cuerpo **K**) con las operaciones de adición y de multiplicación por un escalar definidas elemento a elemento:

$$
\begin{aligned}
[a_{ij}]+[b_{ij}] &= [a_{ij}+b_{ij}] \qquad i=1,2,\ldots,m \quad j=1,2,\ldots,n\\
k.\,[a_{ij}] &= [\,ka_{ij}\,]
\end{aligned}
$$

Es un espacio vectorial sobre el cuerpo **K**.

Notar que utilizaremos la notación $[a_{ij}]$ para indicar la matriz $m\times n$, cuyos elementos son a_{ij} con $i=1,2,\ldots,m$ y $j=1,2,\ldots,n$

$$[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4

El conjunto $\mathbb{R}[X]=\{\mathbf{p}=p(X)=a_o+a_1X+a_2X^2+\cdots+a_kX^k\,/\,a_i\in\mathbb{R}\}$ de todos los polinomios en X a coeficientes reales, con las operaciones de adición de polinomios y multiplicación de un polinomio por un número real, definidas de la forma habitual:

$$\mathbf{p} = a_o + a_1 X + \cdots + a_n X^n \;\; ; \;\; \mathbf{q} = b_o + b_1 X + \cdots + b_m X^m \quad con \;\; n < m$$
$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (a_o + b_o) + (a_1 + b_1) X + \cdots + (a_n + b_n) X^n + \cdots + b_m X^m$$
$$k \; \mathbf{p} = (ka_o) + (ka_1) X + \cdots + (ka_n) X^n$$

$\mathbb{R}[X]$ es un espacio vectorial real. Observar además que el "vector nulo" es el polinomio $\overline{\mathbf{0}} = 0 + 0X + \cdots + 0X^n$ mientras que el "vector opuesto" de un elemento $\mathbf{p} = a_o + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ está dado por $-\mathbf{p} = -a_o - a_1 X - \cdots - a_n X^n$.

Ejemplo 5

El conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f \,/\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ función} \}$ de todas las funciones a valores reales, con las operaciones:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(k\, f)(x) = k\, f(x) \qquad para \; k \in \mathbb{R}$$

Es un espacio vectorial real. Notar que se está viendo a cada función de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ como un elemento en el espacio vectorial y por lo tanto constituye un vector del mismo.

Observar que el "vector nulo" es la función nula $\mathbf{0} : x \to 0$ es decir $\mathbf{0}(x) = 0$, mientras que el "vector opuesto" de una función $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ es $(-f)$ es decir $(-f)(x) = -f(x)$.

Ejemplo 6

Sea $\mathbb{S}$ el conjunto de todas las sucesiones de números reales de la forma:

$$\{x_k\} = (.....x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, ...)$$

Si $\{y_k\}$ es otro elemento de $\mathbb{S}$, entonces la suma $\{x_k\} + \{y_k\}$ es la sucesión $\{x_k + y_k\} \in \mathbb{S}$ obtenida sumando los términos homólogos de las dos sucesiones dato. De forma similar. La multiplicación por escalar $\alpha.\{x_k\}$ es la sucesión $\{\alpha\, x_k\} \in \mathbb{S}$

$\mathbb{S}$ con las operaciones antes definidas es un espacio vectorial. Los axiomas de la Definición 1.1.1. se verifican de forma similar que para $\mathbb{R}^n$.

Los elementos de $\mathbb{S}$ aparecen en Ingeniería por ejemplo, siempre que una señal, sea eléctrica, mecánica, óptica, etc., se mide (o "muestrea") en tiempos discretos. En este contexto, se la llama a $\mathbb{S}$ el espacio de las señales a tiempo discreto. Una señal puede visualizarse con una gráfica como la de la Figura 1.1.

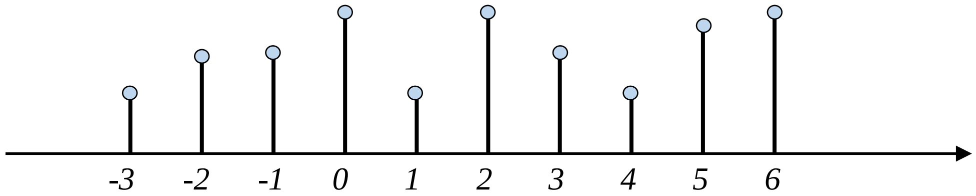


Figura 1.1: Una señal a tiempo discreto

Queda como ejercicio verificar en estos ejemplos el cumplimiento de los axiomas de la Definición 1.1.1..

Consecuencias de la Definición.

De la definición de Espacio Vectorial resultan inmediatas las siguientes propiedades:

Teorema 1.1.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo **K**. Se verifica:

a) $0.\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

b) $k.\overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}}$ para todo $k \in \mathrm{K}$.

c) Si $k.\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}}$**,** entonces $\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}}$ ó $k = 0$ (o ambos a la vez)**.**

d) $(-1).\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Demostración:

a) Teniendo en cuenta que $0 = 0 + 0$ planteamos

$$0.\mathbf{v} = (0+0).\mathbf{v} = 0.\mathbf{v} + 0.\mathbf{v} \quad \text{por axioma } \mathrm{M}_2$$

$$\Downarrow$$

$$0.\mathbf{v} = 0.\mathbf{v} + 0.\mathbf{v}$$

$$\Downarrow \quad \text{(sumando a ambos miembros } -(0.\mathbf{v}) \text{ y asociando convenientemente)}$$

$$-(0.\mathbf{v}) + 0.\mathbf{v} = \left[-(0.\mathbf{v}) + (0.\mathbf{v})\right] + (0.\mathbf{v})$$

$$\Downarrow \quad \text{según axioma } \mathrm{A}_4$$

$$\overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}} + 0.\mathbf{v}$$

$$\Downarrow \quad \text{según axioma } \mathrm{A}_3$$

$$\overline{\mathbf{0}} = 0.\mathbf{v}$$

b) Teniendo en cuenta que $\overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}} + \overline{\mathbf{0}}$ y según el axioma M_1 se tiene que $k.\overline{\mathbf{0}} = k.\overline{\mathbf{0}} + k.\overline{\mathbf{0}}$. La prueba sigue sumando a ambos miembros $-\left(k.\overline{\mathbf{0}}\right)$ y asociando convenientemente. Queda como ejercicio.

c) Sea $k.\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}}$. Si suponemos que $k \neq 0$ entonces existe su inverso k^{-1}, luego

$$k.\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}}$$

$$\Downarrow$$

$$k^{-1}.\left(k.\overline{\mathbf{0}}\right) = k^{-1}.\overline{\mathbf{0}}$$

$$\Downarrow \quad \text{por axioma } \mathrm{M}_3 \text{ y por b)}$$

$$\left(k^{-1}.k\right).\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}}$$

$$\Downarrow$$

$$1.\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}}$$

$$\Downarrow \quad \text{por axioma } \mathrm{M}_4$$

$$\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}}$$

Por lo tanto $k.\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}} \Rightarrow \mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}}$ ó $k = 0$.

d) La prueba queda como ejercicio. #

1.2 Subespacios

Definición 1.2.1.
Un subconjunto no vacío **W** de un espacio vectorial **V** se dice que es un subespacio vectorial de **V** si W es en sí mismo un espacio vectorial bajo las operaciones de adición y la multiplicación por escalar definidas en **V**.

En general, para verificar si un subconjunto **W** es un espacio vectorial es necesario verificar todas las condiciones exigidas a un conjunto para ser tal. Sin embargo, si **W** es parte de un conjunto más grande **V** del que se sabe es un espacio vectorial y las operaciones son las heredadas del conjunto **V**, entonces algunos axiomas se cumplen automáticamente en **W.**
Así, no hace falta verificar por ejemplo que $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ con $\mathbf{u},\mathbf{v}\in \mathbf{W}$ porque esta relación se cumple para $\mathbf{u},\mathbf{v}$ como vectores de **V**.

A continuación, se demostrará un resultado que hace que sea relativamente sencillo determinar si un subconjunto de V es o no un subespacio.

Teorema 1.2.1. Sea **V** espacio vectorial sobre el cuerpo **K,** $\mathbf{W}\subseteq\mathbf{V}$**;** **W** no vacío. **W** es un subespacio de **V** sí y solo sí

a) Si $\mathbf{u}\in\mathbf{W}$ y $\mathbf{v}\in\mathbf{W},$ entonces $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in\mathbf{W}$ (la suma de dos vectores de **W** pertenece a **W**).

b) Si $\mathbf{u}\in\mathbf{W}$ y $k\in\mathbf{K},$ entonces $k.\mathbf{u}\in\mathbf{W}$ (el producto de un vector **W** por cualquier escalar de **K** pertenece a **W**).

Demostración:

$\Rightarrow$**)** Si **W** es subespacio de **V**, por la definición es un espacio vectorial en sí mismo, luego **W** es cerrado bajo la suma de vectores y bajo la multiplicación por escalares.

$\Leftarrow$**)** Para mostrar que **W** es un espacio vectorial, es necesario mostrar que se cumplen los ocho axiomas de la Definición 1.1.1. teniendo en cuenta las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en **V**. Como los vectores de **W** están en **V** los axiomas A_1, A_2, M_1, M_2, M_3 y M_4 se cumplen. Si $\mathbf{u}\in\mathbf{W},$ entonces por b) se tiene $0.\mathbf{u}\in\mathbf{W}$ y como $0.\mathbf{u}=\overline{\mathbf{0}}$ entonces $\overline{\mathbf{0}}\in\mathbf{W}$ satisfaciéndose así el axioma A_3. Finalmente, por la parte b) $(-1).\mathbf{u}\in\mathbf{W}$ y como $(-1).\mathbf{u}=-\mathbf{u}$ entonces $-\mathbf{u}\in\mathbf{W}$ por lo que el axioma A_4 también se cumple, y con esto queda completa la demostración. #

Nota: Si se satisface la condición b) del enunciado, se tiene que:

Haciendo $k=0$ resulta: $0.\mathbf{u}=\overline{\mathbf{0}}$ luego el vector nulo pertenece a **W**.

Haciendo $k=-1$ resulta: $(-1).\mathbf{u}=-\mathbf{u}$ luego todo vector de **W** tiene su opuesto en **W**.A veces resulta útil por su sencillez verificar si el vector nulo del vectorial **V** está en **W** porque en caso negativo podemos asegurar que **W no es** un subespacio vectorial de **V.**

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea **V** un espacio vectorial sobre **K**.

- **V** es un subespacio de sí mismo.
- El subconjunto $\{\ \overline{\mathbf{0}}\ \}$ cuyo único elemento es el vector cero es un subespacio de **V** pues se verifica trivialmente que $\overline{\mathbf{0}} + \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}}$ y $k.\overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}}$ para todo escalar *k*.

El espacio vectorial **V** es el subespacio más amplio en el sentido de que incluye a cualquier otro subespacio de **V**.
$\mathbf{W} = \{\ \overline{\mathbf{0}}\ \}$ es el subespacio más pequeño, en el sentido de que está incluido en cualquier otro. Con frecuencia se le da el nombre de **subespacio trivial**.

Ejemplo 2

$\mathbf{V} = \mathbb{R}$. Los únicos subespacios son $\{\ \overline{\mathbf{0}}\ \}$ y el mismo $\mathbb{R}$.

Sea $\mathbf{W} \neq \{\ \overline{\mathbf{0}}\ \}$ un subespacio de $\mathbb{R}$. Entonces si $\alpha \neq 0$ es un elemento de **W**, luego $1 = \alpha^{-1}.\alpha \in \mathbf{W}$ y en consecuencia $\beta = 1.\beta \in \mathbf{W}$ para todo número real β. Por lo tanto $\mathbf{W} = \mathbb{R}$.

Ejemplo 3

Si $\mathbf{V} \neq \{\ \overline{\mathbf{0}}\ \}$ con $\mathbf{u}$ vector no nulo de **V**, el conjunto $\mathbf{W_u} = \{k.\mathbf{u}\ /\ k \in K\}$ es un subespacio de **V**. En efecto:

- si k_1, k_2 son dos escalares, los vectores $k_1.\mathbf{u}$ y $k_2.\mathbf{u}$ pertenecen a $\mathbf{W_u}$ y su suma $(k_1.\mathbf{u} + k_2.\mathbf{u}) = (k_1 + k_2).\mathbf{u}$ es también un vector de $\mathbf{W_u}$.

- para cualquier escalar α y cualquier vector $k.\mathbf{u}$ perteneciente a $\mathbf{W_u}$ se tiene que el vector $\alpha.(k.\mathbf{u}) = (\alpha.k).\mathbf{u}$ es también un vector de $\mathbf{W_u}$.

En consecuencia $\mathbf{W_u}$ es un subespacio de **V**.

Ejemplo 4

En $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$

- $\mathbf{W_u} = \{k.\mathbf{u}\ /\ k \in \mathbb{R} \text{ con } \mathbf{u} \neq (0,0)\} = \{(x, y)\ /\ y = kx\}$ que geométricamente representa el conjunto de puntos situados en una recta por el origen, **es** un **subespacio** de $\mathbb{R}^2$. Verifíquelo.

- Por otro lado, $\mathbf{W} = \{(x, y)\ /\ y = kx + b \text{ con } b \neq 0\}$ que geométricamente representa el conjunto de puntos que se encuentran sobre una recta que no pasa por el origen, **NO** es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. ¿Por qué?

Luego, los subespacios de $\mathbb{R}^2$ son: $\mathbb{R}^2$ mismo, el $\{(0,0)\}$ y cualquier recta por el origen. (Se prueba que éstos son los únicos subespacios de $\mathbb{R}^2$).

Ejemplo 5

En $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$, si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores no nulos y no paralelos entonces el conjunto $\mathbf{W}=\{\alpha\,\mathbf{u}+\beta\,\mathbf{v}\ \ /\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$, representa geométricamente un plano por el origen.
Es fácil mostrar que $\mathbf{W}$ es un subespacio (demuéstrelo!).

Luego los subespacios de $\mathbb{R}^3$ son: $\mathbb{R}^3$ mismo, el conjunto $\{(0,0,0)\}$, cualquier plano por el origen y cualquier recta por el origen.

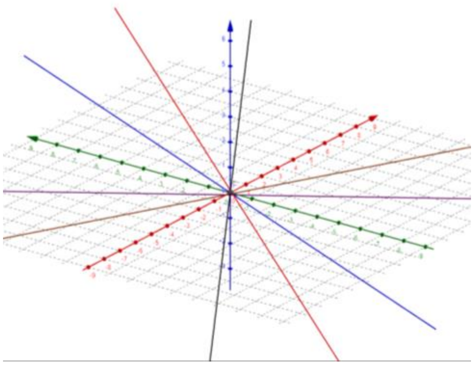


Figura **1**.2: Rectas por el origen en $\mathbb{R}^3$

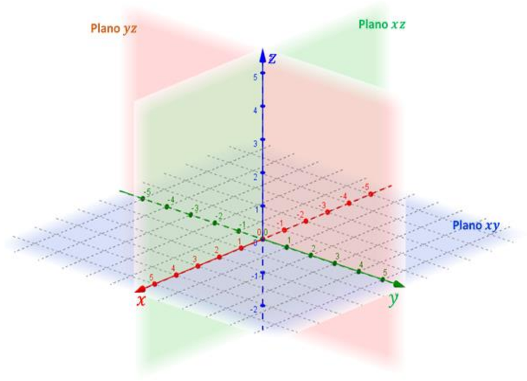


Figura **1**.3: Planos por el origen en $\mathbb{R}^3$

Nota: En $\mathbb{R}^3$, como ya se mencionó, el conjunto $\mathbf{W}=\{(s,t,0)\ \ /\ \ s,t\in\mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, pero **NO** es $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 6

Si $\mathbf{V}=\mathbb{R}^{2\times 2}$ el subconjunto $\mathbf{U}=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\ \ /\ \ a=1\right\}$ **no** es un subespacio de **V** ya que el elemento neutro de **V,** esto es la matriz nula $\overline{\mathbf{0}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$ no pertenece a **U.**

Ejemplo 7

Dada $\mathbf{A}\in\mathbf{K}^{m\times n}$ el conjunto $\mathbf{W}=\{\mathbf{X}\in\mathbf{K}^n\ /\ \mathbf{A}.\mathbf{X}=\mathbf{0}\}$ es un subespacio de $\mathbf{K}^n$ ó $\mathbf{W}=\{\mathbf{X}\in\mathbf{K}^{n\times 1}\ /\ \mathbf{A}.\mathbf{X}=\mathbf{0}\}$ es un subespacio de $\mathbf{K}^{n\times 1}$.
Es decir, el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneas con *"n"* incógnitas a coeficientes en el cuerpo **K**, $\mathbf{A}.\mathbf{X}=\mathbf{0}$, es un subespacio de $\mathbf{K}^n$ si se piensa cada solución como una n-upla, ó de $\mathbf{K}^{n\times 1}$ si se piensa cada solución como una matriz columna.

Notar que estamos utilizando notación matricial al expresar $\mathbf{X}\in\mathbf{K}^{n\times 1}$ tal que $\mathbf{A}.\mathbf{X}=\mathbf{0}$, esto es:

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\in\mathbf{K}^{n\times 1}\ \text{tal que}\ \underbrace{\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\dots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}}_{\mathbf{X}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

Verifiquemos que **W** es un subespacio. Suponiendo que $\mathbf{V}=\mathbf{K}^{n\times 1}$, consideramos que $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son elementos de **W**, es decir matrices columna solución del sistema $\mathbf{A.X=0}$ con $\mathbf{A}\in\mathbf{K}^{m\times n}$. Esto es, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ satisfacen $\mathbf{A.C=0}$ y $\mathbf{A.D=0}$, luego :

- $(\mathbf{C}+\mathbf{D})\in\mathbf{W}$ pues teniendo en cuenta propiedades de matrices, planteamos $\mathbf{A.(C+D)}=\mathbf{A.C+A.D=0}$ (**C**+**D** es una solución del sistema $\mathbf{A.X=0}$).

- Para cualquier escalar *k,* $k\,\mathbf{C}\in\mathbf{W}$ puesto que teniendo en cuenta propiedades de matrices $\mathbf{A}.\,(k\,\mathbf{C})=k(\mathbf{A}.\mathbf{C})=k\mathbf{0}=\mathbf{0}$ ($k\,\mathbf{C}$ es una solución del sistema $\mathbf{A.X=0}$).

Por lo tanto, el conjunto $\mathbf{W}=\left\{\mathbf{X}\in\mathbf{K}^{n\times 1}\,/\,\mathbf{A.X=0}\right\}$ es un subespacio al que se denomina **espacio nulo de A.**

> **Nota:** El conjunto de soluciones de un sistema no homogéneo **no** es un subespacio. ¿Por qué?

Ejemplo 8

En $\mathbf{V}=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el conjunto $\mathbf{W}=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,f(a)=0\right\}$ de las funciones que se anulan para $x=a$, es un subespacio.

En efecto:

- Si consideramos que f y g son funciones que se anulan en $x=a$, entonces se tiene que: $(f+g)(a)=f(a)+g(a)=0+0=0$ luego la función $f+g\in\mathbf{W}$.

- Para todo escalar $k\in\mathbb{R}$, la función $(k\,f)$ se anula en $x=a$, puesto que: $(k\,f)(a)=k.f(a)=k.0=0$ luego $(k\,f)\in\mathbf{W}$.

Ejemplo 9

En $\mathbf{V}=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el conjunto $\mathbf{W}=C\left[a,b\right]$ de todas las funciones de valor real definidas y continuas en el intervalo cerrado $\left[a,b\right]$ es un subespacio.

¿Qué propiedades de las funciones continuas deberían verificarse para demostrar esta última afirmación?

Ejemplo 10

Si $\mathbf{V} = \mathbb{R}[X]$, el conjunto de todos los polinomios en X a coeficientes reales de grado menor o igual que *n*, $\mathbf{P}_n = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}[X] \,/\, \mathbf{p} = p(X) = a_o + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_s X^s \text{ con } a_i \in \mathbb{R} \text{ y } s \leq n\}$ es un subespacio.

En efecto, sean $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{P}_n$ con $\mathbf{p} = a_o + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ y $\mathbf{q} = b_o + b_1 X + \cdots + b_n X^n$

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (a_o + b_o) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_n)X^n \quad \text{luego} \quad \mathbf{p} + \mathbf{q} \in \mathbf{P}_n$$

$$k\,\mathbf{p} = (ka_o) + (ka_1)X + \cdots + (ka_n)X^n \quad \text{luego} \quad k\,\mathbf{p} \in \mathbf{P}_n$$

Nota: El conjunto **U** de todos los polinomios en X a coeficientes reales de grado igual a *n* y el polinomio nulo, **no** es un subespacio de $\mathbf{V} = \mathbb{R}[X]$. ¿Por qué?

1.3 Intersección y Suma de Subespacios

Las operaciones usuales entre conjuntos son la unión "$\cup$", la intersección "$\cap$" y la suma "+".

Definición 1.3.1. Sean $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$ subconjuntos cualesquiera del vectorial **V**. Definimos:

- La unión de $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$: $\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2 = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} /\ \mathbf{v} \in \mathbf{S}_1 \text{ ó } \mathbf{v} \in \mathbf{S}_2\}$.
- La intersección de $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$: $\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2 = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} /\ \mathbf{v} \in \mathbf{S}_1 \text{ y } \mathbf{v} \in \mathbf{S}_2\}$.

Veamos que sucede cuando los conjuntos tienen la estructura algebraica de subespacio y realizamos estas operaciones con ellos.

Intersección de Subespacios

Teorema 1.3.1. Sea **V** espacio vectorial sobre el cuerpo **K**.

Si **U** y **W** subespacios de un espacio vectorial **V** entonces $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ es un subespacio del espacio vectorial **V**.

Demostración:

Por definición, la intersección de **U** y **W** está dada por $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \,/\, \mathbf{v} \in \mathbf{U} \ \wedge\ \mathbf{v} \in \mathbf{W}\}$.

Sean los vectores $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ y $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$, luego se tiene que:

$$\mathbf{v}_1 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}\mathbf{v}_1 \in \mathbf{U} \\ \mathbf{v}_2 \in \mathbf{U}\end{matrix}} \quad \text{y} \quad \boxed{\begin{matrix}\mathbf{v}_1 \in \mathbf{W} \\ \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}\end{matrix}}$$

$$\mathbf{v}_2 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W} \Rightarrow$$

Por hipótesis $\mathbf{U}$ es subespacio $\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$ Por hipótesis $\mathbf{W}$ es subespacio

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{U} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$$

Queda como ejercicio verificar que $\mathbf{v} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ y $k \in \mathbf{K}$ entonces $k\mathbf{v} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.#

Generalizando: la intersección de cualquier colección finita de subespacios es un subespacio.

Observación: la unión de subespacios no es, en general, un subespacio.

Suma de Subconjuntos de un Espacio Vectorial

Definición 1.3.2. Sean $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$ subconjuntos de un espacio vectorial $\mathbf{V}$.

El conjunto de todos los vectores que se obtienen sumando un vector de $\mathbf{S}_1$ y un vector de $\mathbf{S}_2$ se denomina suma de los subconjuntos $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$, y se denota $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$. $\qquad \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \,/\, \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \text{ con } \mathbf{v}_1 \in \mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \in \mathbf{S}_2\}$.

Es decir que para verificar si un vector **v** pertenece a la suma $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ es necesario encontrar o probar la existencia de un elemento $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{S}_1$ y un elemento $\mathbf{v}_2$ en $\mathbf{S}_2$, tal que: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ y consideremos $\mathbf{S}_1 = \{(0,2)\ (-1,3)\ (0,0)\}$ y $\mathbf{S}_2 = \{(4,0)\ (1,-1)\ (4,-2)\}$ conjuntos. Observar que:

- $(3,3) = (-1,3) + (4,0)$ por consiguiente $(3,3) \in \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$
- $(0,0) \notin \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ puesto que en $\mathbf{S}_2$ no existe el opuesto de ninguno de los elementos de $\mathbf{S}_1$.
- $(4,0) = (0,0) + (4,0)$ ó $(4,0) = (0,2) + (4,-2)$ en este caso es posible expresar un elemento de $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ en más de una forma, como suma de un elemento de $\mathbf{S}_1$ y un elemento de $\mathbf{S}_2$.

Queda como ejercicio construir el conjunto $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ y consideremos los conjuntos $\mathbf{S}_1 = \{(2,\ 1)\}$ y $\mathbf{S}_2 = \{(x,0)\ /\ 0 \le x \le 1\}$ luego

$$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \{(x,1)\ /\ 2 \le x \le 3\}$$

Observación: Cuando uno de los conjuntos se reduce a un único elemento **"p",** con la notación $\mathbf{p}+\mathbf{S}$ se indica la suma de los conjuntos $\{\mathbf{p}\}$ y $\mathbf{S}$.

Así, escribimos $(2,1) + \{(x,0)\ /\ 0 \le x \le 1\} = \{(x,1)\ /\ 2 \le x \le 3\}$.

Nota: En los dos ejemplos precedentes, el conjunto $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$, **no** es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. ¿Por qué?

El siguiente resultado establece una condición necesaria para que la suma de dos conjuntos de un vectorial sea subespacio.

Teorema 1.3.2. Sea **V** espacio vectorial sobre el cuerpo **K**.

Si **U** y **W** subespacios de un espacio vectorial **V** entonces $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ es un subespacio del espacio vectorial **V**.

Demostración:

Considerando que $\mathbf{U}+\mathbf{W} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}\ /\ \mathbf{v} = \mathbf{u}+\mathbf{w}\ \text{con}\ \mathbf{u} \in \mathbf{U} \wedge \mathbf{w} \in \mathbf{W}\}$, sean $\mathbf{v_1} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$ y $\mathbf{v_2} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$. Entonces, $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$ pues:

como $\mathbf{v_1} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$ entonces $\mathbf{v_1} = \mathbf{u_1} + \mathbf{w_1}$ con $\mathbf{u_1} \in \mathbf{U}$ y $\mathbf{w_1} \in \mathbf{W}$

y como $\mathbf{v_2} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$ entonces $\mathbf{v_2} = \mathbf{u_2} + \mathbf{w_2}$ con $\mathbf{u_2} \in \mathbf{U}$ y $\mathbf{w_2} \in \mathbf{W}$

Sumando miembro a miembro, aplicacndo propiedades del espacio vectorial y teniendo en cuenta que por hipótesis **U** y **W** son subespacios, se tiene que:

$$\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} = \underbrace{(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2})}_{\in \mathbf{U}} + \underbrace{(\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2})}_{\in \mathbf{W}}$$ entonces hemos verificado que $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$.

Queda como ejercicio verificar que si $\mathbf{v} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$ y $k \in \mathbf{K}$ entonces $k\mathbf{v} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$. #

1.4 Combinaciones Lineales

Definición 1.4.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K.** Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de **V** y $k_1, k_2, \ldots, k_r$ escalares de **K.** Se dice que un vector $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ según los escalares $k_1, k_2, \ldots, k_r$ sí y sólo si $\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r$.

Ejemplos

Ejemplo 1

$\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Si consideramos $\mathbf{v}_1 = (2,1,3)$ y $\mathbf{v}_2 = (-1,4,2)$ vectores de $\mathbb{R}^3$ y $k_1 = 2$; $k_2 = -3$ se tiene que $\mathbf{v} = 2\,(2,1,3) + (-3)\,(-1,4,2) = (7,-10,0)$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ según los escalares k_1, k_2.

Ejemplo 2

$\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sea $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

¿Es $\mathbf{v}$ combinación lineal de $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$? Para que la respuesta sea afirmativa, deben existir escalares k_1 y k_2 tales que: $k_1.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + k_2.\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Queda planteado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 0 \\ 2k_1 + 2k_2 = -2 \\ -1k_1 + k_2 = 3 \\ 3k_1 + 5k_2 = -1 \end{cases}$$ que tiene solución única $(k_1, k_2) = (-2,1)$

Luego el vector **v** es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ según los escalares k_1, k_2.

1.5 Subespacio Generado y Generadores

Teorema 1.5.1. Sea **V** espacio vectorial sobre **K.** Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de **V**. Si $\mathbf{W} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \ / \ \mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r \text{ con } k_i \in \mathbf{K} \ i = 1,2,\ldots,r\}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ se cumple:

a) **W** es un subespacio de **V.**

b) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son elementos de **W.**

c) Si $\mathbf{W'}$ es cualquier subespacio de **V** que contiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ entonces $\mathbf{W} \subset \mathbf{W'}$.

Demostración:

a) Sean **u** y **v** vectores pertenecientes a **W** es decir:

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_r\mathbf{v}_r \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + \cdots + y_r\mathbf{v}_r$$

Entonces se tiene que:

- $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (x_1+y_1)\mathbf{v}_1+(x_2+y_2)\mathbf{v}_2+\cdots+(x_r+y_r)\mathbf{v}_r$ luego $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathbf{W}$.
- $\forall k \in \mathbf{K}$, $k\mathbf{u} = (k\,x_1)\mathbf{v}_1+(k\,x_2)\mathbf{v}_2+\cdots+(k\,x_r)\mathbf{v}_r$ luego $k\mathbf{u} \in \mathbf{W}$.

Por lo tanto, **W** es un subespacio de **V**.

b) Para demostrar que $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r$ son elementos de **W** notemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= 1\mathbf{v}_1+0\mathbf{v}_2+\cdots+0\mathbf{v}_r && \text{luego} \quad \mathbf{v}_1 \in \mathbf{W}\\
\mathbf{v}_2 &= 0\mathbf{v}_1+1\mathbf{v}_2+\cdots+0\mathbf{v}_r && \text{luego} \quad \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}\\
&\vdots\\
\mathbf{v}_r &= 0\mathbf{v}_1+0\mathbf{v}_2+\cdots+1\mathbf{v}_r && \text{luego} \quad \mathbf{v}_r \in \mathbf{W}
\end{aligned}$$

c) Para demostrar esta afirmación, basta con probar que si $\mathbf{w}\in\mathbf{W} \Rightarrow \mathbf{w}\in\mathbf{W}'$.

Recordemos que $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$ sí y solo si $\mathbf{w} = x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+\cdots+x_r\mathbf{v}_r$.

Por hipótesis, $\mathbf{W}'$ un subespacio y $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r$ son elementos de $\mathbf{W}'$. Entonces $x_1\mathbf{v}_1,\ x_2\mathbf{v}_2,\ \ldots,\ x_r\mathbf{v}_r$ son elementos de $\mathbf{W}'$ y por consiguiente su suma $\mathbf{w} = x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+\cdots+x_r\mathbf{v}_r$ pertenece a $\mathbf{W}'$. #

Definición 1.5.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre **K**. Sean $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r$ vectores de **V**. Sea **W** el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r$. Llamaremos a **W** subespacio generado por $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r$ y lo denotaremos como $\mathbf{W}=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\rangle$.

El subespacio generado por los vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r$ puede ser el mismo **V**, en este caso diremos que el conjunto $\mathbf{S}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\}$ genera al espacio vectorial **V**, o bien que $\mathbf{S}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\}$ es un generador de **V**.

Definicion 1.5.2. Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**.

$\mathbf{S}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\}$ es un generador de **V** sí y solo si para todo $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ se tiene que $\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+\cdots+k_r\mathbf{v}_r$ donde $k_1,k_2,\ldots,k_r$ son escalares.

Notación: $\mathbf{V}=\langle\mathbf{S}\rangle=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\rangle$

Nota: las siguientes notaciones son equivalentes: $\langle\mathbf{S}\rangle=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\rangle = gen\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\}$.

Observación: Se han usado las palabras **generador** y **subespacio generado** cuyo significado preciso debe ser tenido en cuenta.

Un **generador** es un conjunto de vectores tales que todo vector del vectorial se puede expresar como combinación lineal de ellos.

Un **subespacio generado** es el conjunto formado por todas las combinaciones lineales que se pueden realizar con los vectores del generador.

Ejemplos

Ejemplo 1

Si $\mathbf{u}$ es un vector no nulo de $\mathbb{R}^2$ ó de $\mathbb{R}^3$, el subespacio generado $\mathbf{W} = \langle \mathbf{u} \rangle$ es la recta por el origen, con vector de dirección $\mathbf{u}$.

Ejemplo 2

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores no nulos y no paralelos de $\mathbb{R}^3$, el subespacio generado por ellos $\mathbf{W} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ es un plano por el origen.

Ejemplo 3

Si $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial arbitrario y $\mathbf{u} \neq \bar{\mathbf{0}}$ es un vector de **V.** El subespacio $\mathbf{W_u} = \{ k\,\mathbf{u} \,/\, k \in \mathbf{K} \}$ está generado por $\mathbf{u}$ y de acuerdo a la notación introducida $\mathbf{W}_\mathrm{u} = \langle \mathbf{u} \rangle$.

Ejemplo 4

Dada la matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m \times n}$ $\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

- Si consideramos las matrices formadas a partir de las filas de **A,** denominadas **vectores renglón o fila de A,**

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= [a_{11} \;\; a_{12} \;\; \dots \;\; a_{1n}] \\ \mathbf{A}_2 &= [a_{21} \;\; a_{22} \;\; \dots \;\; a_{2n}] \\ &\vdots \\ \mathbf{A}_m &= [a_{m1} \;\; a_{m2} \;\; \dots \;\; a_{mn}] \end{aligned}$$

Entonces $\mathbf{V} = \langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m \rangle$ el espacio generado por las matrices renglón de **A,** se llama **espacio renglón (o fila) de A.**

- Si consideramos las matrices formadas con las columnas de **A,** llamadas **vectores columna de A**,

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}; \quad \dots \quad \mathbf{A}^\mathrm{n} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

El espacio generado por las matrices columna de **A,** $\mathbf{V} = \langle \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^n \rangle$ se llama **espacio columna de A.**

Ejemplo 5

Todo vector $\mathbf{v} = (x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{e_1} = (1,0,0)$; $\mathbf{e_2} = (0,1,0)$; $\mathbf{e_3} = (0,0,1)$. En efecto

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Luego se tiene que $\mathbb{R}^3 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e_3} \rangle$

Ejemplo 6

$\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,0),\ (0,1,0),\ (2,3,0),\ (0,0,1) \rangle$. En efecto, todo $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se expresa como:

$$(x, y, z) = (x - 2k)(1,0,0) + (y - 3k)(0,1,0) + k(2,3,0) + z(0,0,1) \quad \text{para cualquier } k \in \mathbb{R}.$$

Notar que el vector $(2,3,0)$ es combinación lineal de $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Luego resulta que $\langle (1,0,0),\ (0,1,0),\ (2,3,0),\ (0,0,1) \rangle = \langle (1,0,0),\ (0,1,0), (0,0,1) \rangle$.

El siguiente teorema generaliza lo que acabamos de ver en el Ejemplo 6. Es decir, si un vector de un generador del espacio vectorial **V**, es combinación lineal de los otros vectores del generador, puede ser eliminado y los vectores restantes también generan a **V**.

Teorema 1.5.2. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de **V** y $\mathbf{W} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$ subespacio de **V**.
Si $\mathbf{v}_1$ es combinación lineal de $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r$ entonces

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle.$$

Demostración:
Debemos probar que: $\mathbf{W} \subset \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$ y $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle \subset \mathbf{W}$.

a) Veamos que $\mathbf{W} \subset \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$.

Sea $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, luego $\mathbf{w} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + x_r \mathbf{v}_r$. Por hipótesis se tiene que $\mathbf{v}_1 = y_2 \mathbf{v}_2 + y_3 \mathbf{v}_3 + \cdots + y_r \mathbf{v}_r$. Luego, reemplazando se tiene:

$$\mathbf{w} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + x_r \mathbf{v}_r = x_1(y_2 \mathbf{v}_2 + y_3 \mathbf{v}_3 + \cdots + y_r \mathbf{v}_r) + x_2 \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{v}_3 + \cdots + x_r \mathbf{v}_r$$
$$\mathbf{w} = (x_1 y_2 + x_2)\mathbf{v}_2 + (x_1 y_3 + x_3)\mathbf{v}_3 + \cdots + (x_1 y_r + x_r)\mathbf{v}_r$$

o sea que **w** es combinación lineal de $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r$ es decir que $\mathbf{w} \in \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$. Esto prueba que todo vector perteneciente a **W** es un elemento del subespacio $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$, es decir que $\mathbf{W} \subset \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$.

b) Veamos ahora que entonces $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle \subset \mathbf{W}$.

Como $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r$ son elementos de **W**, y éste es un subespacio, de la afirmación c) del **Teorema 1.5.1.** resulta $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle \subset \mathbf{W}$.

Luego, de lo demostrado en (a) y (b) resulta que: $\mathbf{W} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$. #

Ejemplos

Ejemplo 1

Sean $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\mathbf{W} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ subespacio de **V**.

El vector $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ya que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ puede ser eliminado del generador, resultando:

$$\mathbf{W} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_4$. Sea $\mathbf{W} = \langle 4+2X-2X^2+2X^3,\ 1+X+X^2,\ 3+X-X^2,\ -X-2X^2,\ X+2X^3 \rangle$ subespacio de **V**.

El vector $\mathbf{p} = 3+X-X^2$ es combinación lineal de $\mathbf{q} = 1+X+X^2$ y de $\mathbf{r} = -X-2X^2$ ya que $3+X-X^2 = 3\left(1+X+X^2\right) + 2\left(-X-2X^2\right)$.

Luego, $\mathbf{p} = 3+X-X^2$ puede ser eliminado del generador.

Asimismo, el vector $\mathbf{t} = 4+2X-2X^2+2X^3$ es combinación lineal de los demás.

Por lo tanto, resulta que $\mathbf{W} = \langle 1+X+X^2,\ -X-2X^2,\ X+2X^3 \rangle$.

Suma de Subespacios y Generadores

Sea **V** es un espacio vectorial sobre un cuerpo **K** y sean $\mathbf{W_1}, \mathbf{W_2}$ subespacios de **V**.
Cualquier subespacio que incluya a $\mathbf{W_1}$ y a $\mathbf{W_2}$ (es decir que incluya a $\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$) incluye también a $\mathbf{W_1} + \mathbf{W_2}$, pues la suma de vectores de un subespacio pertenece al mismo. De allí resulta que $\mathbf{W_1} + \mathbf{W_2}$ es el subespacio más pequeño que incluye a $\mathbf{W_1} \cup \mathbf{W_2}$.
Además, si

$\mathbf{S}_1 = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ es un generador de $\mathbf{W_1}$, esto es $\mathbf{W}_1 = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$

$\mathbf{S}_2 = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$ es un generador de $\mathbf{W_2}$, esto es $\mathbf{W}_2 = \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s \rangle$

todo vector de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es suma de una combinación lineal de vectores de $\mathbf{S}_1$ y de una combinación lineal de vectores de $\mathbf{S}_2$, en consecuencia:

$$\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s \rangle \quad \text{o sea} \quad \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \langle \mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2 \rangle .$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Si $\mathbf{W}_1 = \langle (1,0,0),\ (0,1,0) \rangle$ y $\mathbf{W}_2 = \langle (1,0,0),\ (0,0,1) \rangle$ son subespacios de $\mathbb{R}^3$. Se tiene que $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \langle (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1) \rangle$ y que $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \langle (1,0,0) \rangle$.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Si $\mathbf{W}_1 = \langle (2,1,0) \rangle$ y $\mathbf{W}_2 = \langle (3,0,1) \rangle$ son subespacios de $\mathbb{R}^3$. Resulta que $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \langle (2,1,0),\ (3,0,1) \rangle$ y $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{(0,0,0)\}$.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$. Sean $\mathbf{W}_1 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \ / \ (x,y,z,w) = (k,0,0,0)\}$ y $\mathbf{W}_2$ el espacio de soluciones del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ subespacios de **V**.

Si expresamos a $\mathbf{W}_1$ y a $\mathbf{W}_2$ como subespacios generados, tenemos que: $\mathbf{W}_1 = \langle (1,0,0,0) \rangle$ y que $\mathbf{W}_2 = \langle (2,-1,1,0),\ (-5,3,0,1) \rangle$.

Luego, un generador del subespacio suma se obtiene uniendo los generadores, esto es: $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \langle (1,0,0,0),\ (2,-1,1,0),\ (-5,3,0,1) \rangle$.

Por otro lado, el subespacio $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$ es el espacio de soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} .$$

Ejemplo 4

Sea el espacio vectorial $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\text{x}2}$. Sean los subespacios

$$\mathbf{W}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\text{x}2} \;\; / \;\; \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \right\} \text{ y } \mathbf{W}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -2k & k \\ k+t & t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\text{x}2} \;\; / \;\; k,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si expresamos a $\mathbf{W}_1$ y a $\mathbf{W}_2$ como subespacios generados, tenemos que:

$$\mathbf{W}_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ y } \mathbf{W}_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle .$$

Luego, un generador del subespacio suma se obtiene uniendo los generadores, esto es:

$$\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle .$$

Por otro lado, teneindo en cuenta las caracterizaciones de los subespacios $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ se tiene que:

$$\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\text{x}2} \;\; / \;\; \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\} .$$

1.6 Dependencia e Independencia Lineal de Vectores

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de un espacio vectorial $\mathbf{V}$.
Si $\mathbf{V} \neq \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$, no todo vector de $\mathbf{V}$ es combinación lineal de los vectores dados, sino solamente aquellos que pertenecen a $\mathbf{W} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$.
Pero para cualquier elección de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ (y para cualquier r) el vector $\bar{\mathbf{0}} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$; es decir que el vector cero es siempre combinación lineal de r vectores arbitrariamente elegidos. En efecto, basta escribir $\bar{\mathbf{0}} = 0\,\mathbf{v}_1 + 0\,\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\,\mathbf{v}_r$ o sea con todos los coeficientes iguales a cero a la cual llamaremos **combinación lineal trivial.**

Nos preguntamos si es posible escribir el vector cero como combinación lineal de los vectores dados en forma distinta a la trivial, es decir con coeficientes no todos nulos.

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ la respuesta depende de cuales son los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$. Así por ejemplo en $\mathbb{R}^3$ si: $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0)$; $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 0)$; $\mathbf{v}_3 = (1, 4, 0)$

$$(0,0,0) = 0\,(1,2,0) + 0\,(1,0,0) + 0\,(1,4,0)$$
$$(0,0,0) = (-2)\,(1,2,0) + 1(1,0,0) + 1(1,4,0)$$

El vector cero es combinación lineal de los vectores dados en más de una forma.

Mientras que si: $\mathbf{v}_1 = (1,0,0)$; $\mathbf{v}_2 = (1,1,1)$ son los vectores dados, el vector cero se expresa como combinación lineal de ellos en una sola forma, ya que:

$$(0,0,0) = k_1(1,0,0) + k_2(1,1,1) = (k_1 + k_2, k_2, k_2) \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = 0\ .$$

En el primer caso diremos que los vectores dados son **linealmente dependientes**, mientras que en casos como el segundo, que los vectores son **linealmente independientes.**

Definición 1.6.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo **K**. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de **V.** Diremos que:

los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$ son **linealmente dependientes** sí y sólo si

existen escalares $k_1, k_2, \ldots, k_r$ no todos nulos tal que $k_1\, \mathbf{v}_1 + k_2\, \mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\, \mathbf{v}_r = \bar{\mathbf{0}}$

Definición 1.6.2. Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo **K.** Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de **V.** Diremos que:

los vectores $\mathbf{v_1, v_2, ..., v_r}$ son **linealmente independientes** sí y sólo si $k_1\, \mathbf{v}_1 + k_2\, \mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\, \mathbf{v}_r = \bar{\mathbf{0}}$ se da únicamente con $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$.

Observación: Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes, el vector nulo se expresa de una sola forma como combinación lineal de estos vectores (forma trivial), mientras que si dichos vectores son linealmente dependientes, además de la forma trivial existen otras maneras de expresar al vector nulo como combinación lineal de ellos.

Teoremas de Caracterización

Teorema 1.6.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de **V.** Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes sí y sólo si todo $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ en una sola forma.

Demostración:

⇒) Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores linealmente independientes y sea $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$.
Supongamos que podemos escribir el vector **v** como sigue:

$$\mathbf{v} = x_1\, \mathbf{v}_1 + x_2\, \mathbf{v}_2 + \cdots + x_r\, \mathbf{v}_r$$

$$\mathbf{v} = y_1\, \mathbf{v}_1 + y_2\, \mathbf{v}_2 + \cdots + y_r\, \mathbf{v}_r$$

Restando miembro a miembro se obtiene

$$\bar{\mathbf{0}} = (x_1 - y_1)\mathbf{v}_1 + (x_2 - y_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (x_r - y_r)\mathbf{v}_r$$

$\Downarrow$ por hipótesis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes

$$x_i - y_i = 0 \quad \text{para} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, r)$$

$$\Downarrow$$

$$x_i = y_i \quad \text{para} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, r)$$

es decir **v** es combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ en una sola forma.

$\Leftarrow$**)** Si todo vector perteneciente a $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$ es combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ en una sola forma, la única combinación lineal que expresa el vector cero es $\bar{\mathbf{0}} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_r$ luego $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes. #

Teorema 1.6.2. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de **V** con $r \geq 2$.

Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente dependientes sí y sólo si alguno de ellos es combinación lineal de los demás.

Demostración:

$\Rightarrow$**)** Si los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente dependientes, se tiene:

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \bar{\mathbf{0}} \text{ con algún coeficiente distinto de cero.}$$

Sin perdida de generalidad, puesto que en este contexto el orden de los vectores carece de importancia, supongamos que $k_1 \neq 0$. En tal caso k_1 tiene inverso multiplicativo k_1^{-1} en **K** y entonces:

$$\mathbf{v}_1 = (-k_1^{-1}k_2)\mathbf{v}_2 + (-k_1^{-1}k_3)\mathbf{v}_3 + \cdots + (-k_1^{-1}k_r)\mathbf{v}_r$$

Luego $\mathbf{v}_1$ es combinación lineal de $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r$.

$\Leftarrow$**)** Supongamos que $\mathbf{v}_1$ es combinación de $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r$ entonces podemos escribir

$$\mathbf{v}_1 = x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + \cdots + x_r\mathbf{v}_r$$

por lo tanto

$$1\mathbf{v}_1 - x_2\mathbf{v}_2 - x_3\mathbf{v}_3 - \cdots - x_r\mathbf{v}_r = \bar{\mathbf{0}}$$

la combinación lineal que expresa así el vector cero es no trivial, pues el coeficiente de $\mathbf{v}_1$ es 1.

Luego $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente dependientes. #

Nota: La prueba de los siguientes enunciados queda como ejercicio para el lector.

Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K.**

1. Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. El vector **v** es linealmente independiente sí y sólo si $\mathbf{v} \neq \bar{\mathbf{0}}$.
2. Dos vectores **u** y **v** no nulos son linealmente dependientes sólo si $\mathbf{u} = k\,\mathbf{v}$.
3. Si entre los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ figura el vector nulo, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente dependientes.
4. Si entre los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ figuran dos vectores iguales entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente dependientes.
5. Si al conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ linealmente dependientes, se le agrega el vector **u**, los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}$ son linealmente dependientes.
6. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son vectores linealmente independientes, entonces los vectores $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes.
7. Si $\mathbf{V} = \mathbf{K}^n$, los vectores en “escalera” son linealmente independientes.

Ejemplos

Ejemplo 1

Los vectores de $\mathbb{R}^n : (1,0,0,0,\ldots,0);\ (0,1,0,0,\ldots,0);\ldots;(0,0,0,0,\ldots,1)$ están “en escalera” luego son linealmente independientes.

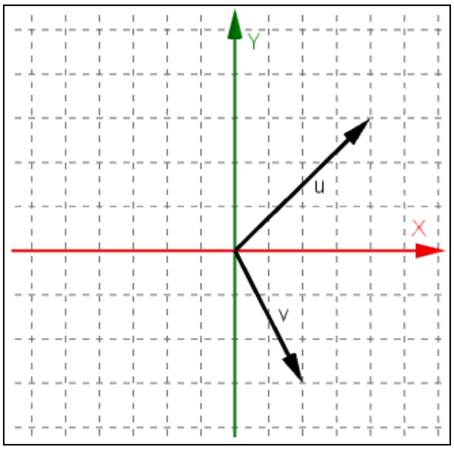
Ejemplo 2

En $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, las matrices $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$ satisfacen: $\mathbf{B} = 3.\mathbf{A}$ luego son dos vectores linealmente dependientes.

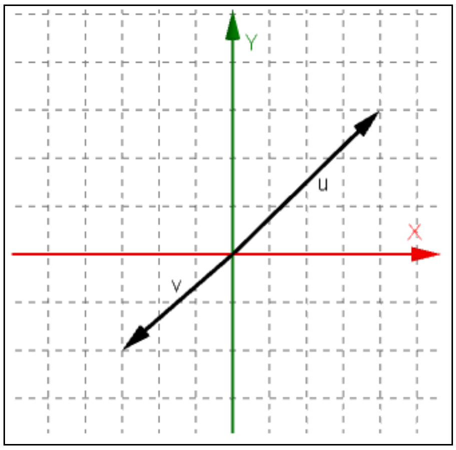
Interpretación Geométrica de la Dependencia e Independencia Lineal.

Resulta de utilidad interpretar geométricamente la dependencia e independencia lineal. Esto es factible cuando se visualizan los vectores en $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$.

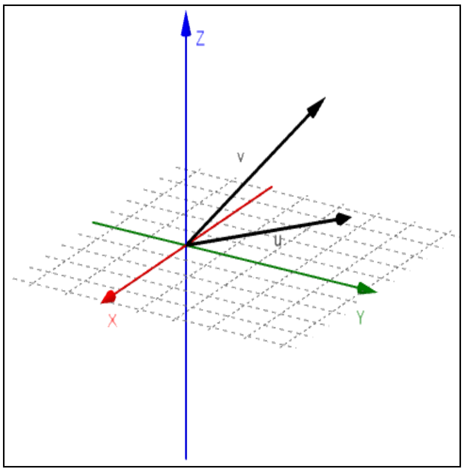
Entonces, dos vectores son linealmente independientes si al graficar los respectivos representantes con origen coincidente con el origen de coordenadas, no resultan ubicados sobre la misma recta según se observa en la Figura 1.4. ((a);(b);(c) y (d))



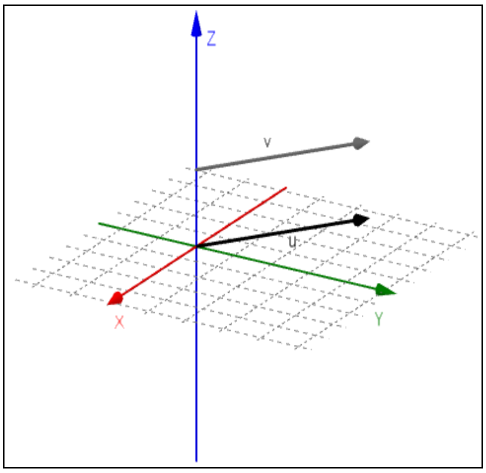
(a) vectores l.i. en $\mathbb{R}^2$.



(b) vectores l.d. en $\mathbb{R}^2$.



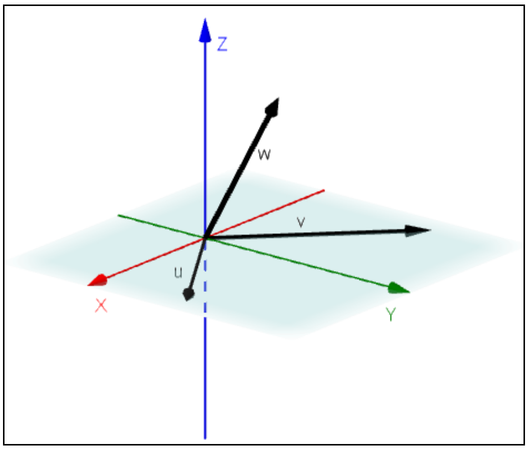
(c) vectores l.i. en $\mathbb{R}^3$.



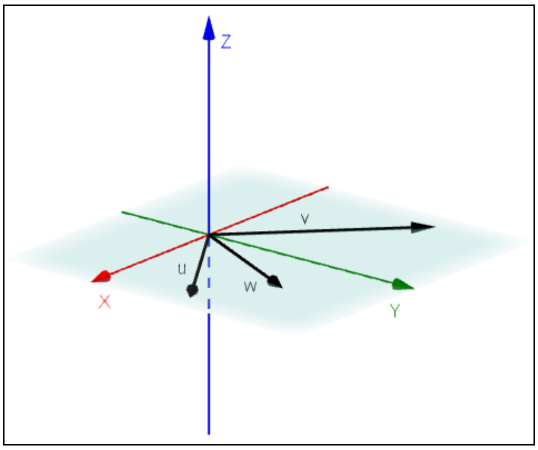
(d) vectores l.d. en $\mathbb{R}^3$.

Figura 1.4.

En el caso de tres vectores en $\mathbb{R}^3$, la independencia lineal implica que no están situados en el mismo plano (Figura 1.5. (a) y (b))



(a) vectores l.i. en $\mathbb{R}^3$.



(b) vectores l.d. en $\mathbb{R}^3$.

Figura 1.5.

1.7 Generadores y Dependencia Lineal

Teorema 1.7.1. Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sean $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$ y $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ elementos arbitrarios de **V.**

Si $n > m$, entonces, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ son linealmente dependientes.

Demostración:

Dado que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ generan a **V**, entonces es posible expresar a cada uno de los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ como combinación lineal de ellos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= a_{11}\,\mathbf{v}_1 + a_{21}\,\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{m1}\,\mathbf{v}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}\,\mathbf{v}_i \\
\mathbf{w}_2 &= a_{12}\,\mathbf{v}_1 + a_{22}\,\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{m2}\,\mathbf{v}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i2}\,\mathbf{v}_i \\
&\vdots \\
\mathbf{w}_n &= a_{1n}\,\mathbf{v}_1 + a_{2n}\,\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mn}\,\mathbf{v}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{in}\,\mathbf{v}_i
\end{aligned} \qquad (1)$$

Se quiere mostrar que los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ son linealmente dependientes. Se plantea entonces una combinación lineal de los mismos igualada al vector nulo. Luego, los vectores serán linealmente dependientes si existen escalares no todos nulos que la satisfagan:

$$x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{w}_n = \bar{\mathbf{0}}$$

Teniendo en cuenta las relaciones establecidas para $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ en (1), obtenemos:

$$\begin{aligned}
& x_1 \sum_{i=1}^{m} a_{i1}\,\mathbf{v}_i + x_2 \sum_{i=1}^{m} a_{i2}\,\mathbf{v}_i + \cdots + x_n \sum_{i=1}^{m} a_{in}\,\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{0}} \\
& x_1(a_{11}\,\mathbf{v}_1 + a_{21}\,\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{m1}\,\mathbf{v}_m) + x_2(a_{12}\,\mathbf{v}_1 + a_{22}\,\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{m2}\,\mathbf{v}_m) + \cdots + \\
& + x_n(a_{1n}\,\mathbf{v}_1 + a_{2n}\,\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mn}\,\mathbf{v}_m) = \bar{\mathbf{0}}
\end{aligned}$$

Poniendo en evidencia los coeficientes de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ se tiene:

$$(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)\,\mathbf{v}_1 + (a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n)\,\mathbf{v}_2 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)\,\mathbf{v}_m = \bar{\mathbf{0}}$$

Una condición **suficiente** para que se cumpla esta última relación es que sean cero los coeficientes de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ es decir:

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0
\end{cases}$$

Estas condiciones constituyen un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, con m ecuaciones y n incógnitas.
Por hipótesis $n > m$, es decir que es mayor el número de incógnitas que el de ecuaciones, entonces este sistema admite soluciones distintas de la solución trivial.

Por lo tanto existen escalares $x_1, x_2, ..., x_n$ no todos nulos tales que:

$$x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{w}_n = \bar{\mathbf{0}}$$

luego los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n$ son linealmente dependientes. #

Corolario 1.7.1. Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Si **V** tiene un generador de *n* elementos y se tienen *r* vectores de V que son linealmente independientes, entonces: $r \leq n$.

Demostración:

Queda como ejercicio para el lector. #

Observación: En el ejemplo 5 de la Sección 1.5., se mostró que $\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,0),\ (0,1,0), (0,0,1) \rangle$.

Luego cuatro vectores de $\mathbb{R}^3$ son siempre linealmente dependientes.

Teorema 1.7.2. Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de **V**. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes y $\mathbf{u} \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$ entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}$ son linealmente independientes.

Demostración:

Sean $x_1, x_2, ..., x_r, x$ escalares tales que:

$$x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_r\,\mathbf{v}_r + x\,\mathbf{u} = \bar{\mathbf{0}} \qquad \textbf{(1)}$$

Debe ser $x = 0$, ya que de lo contrario, **u** sería combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, en contradicción con la hipótesis que plantea que **u** no pertenece al subespacio generado por ellos. Por lo tanto, se tiene:

$$x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_r\,\mathbf{v}_r = \bar{\mathbf{0}}$$

Por ser $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ linealmente independientes debe ser: $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 0$

Es decir que la relación (1) se cumple solo si todos los coeficientes son cero. Por lo tanto $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}$ son linealmente independientes. #

1.8 Bases y Dimensión de un Espacio Vectorial

Entre los subconjuntos que generar un espacio vectorial **V** o un subespacio, estudiaremos aquellos que lo hacen de la manera más "eficiente" posible. Por ello en esta sección, juegan un papel fundamental aquellos subconjuntos de vectores que son linealmente independientes.
Por este motivo los distinguiremos con un nombre especial, como lo expresa la siguiente definición:

Definición 1.8.1. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo **K.** $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es una base de $\mathbf{V}$ sí y sólo si

a) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes.

b) $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle = \mathbf{V}$.

Notación: $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$

Ejemplos

Ejemplo 1

Los vectores $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$; $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$; $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ generan $\mathbb{R}^3$. Como están "en escalera" son linealmente independientes, luego forman una base de $\mathbb{R}^3$ la cual recibe el nombre particular de "base canónica" o "base estándar".

Ejemplo 2

De igual forma, en $\mathbb{R}^4$ el conjunto $\{(1,0,0,0); (0,1,0,0); (0,0,1,0); (0,0,0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

Ejemplo 3

Generalizando, en $\mathbb{R}^n$, la base estándar es el conjunto de n-uplas

$$\{(1,0,0,0,\ldots,0); (0,1,0,0,\ldots,0); (0,0,1,0,\ldots,0); \ldots; (0,0,0,0,\ldots,1)\}$$

Ejemplo 4

Consideremos el subespacio $\mathbf{W} = \langle (1,0,1),\ (2,1,3),\ (0,1,1),\ (1,1,2) \rangle$.

$(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, es un vector de $\mathbf{W}$ si se satisface que

$$\begin{aligned}(y_1, y_2, y_3) &= x_1(1,0,1) + x_2(2,1,3) + x_3(0,1,1) + x_4(1,1,2)\\ &= (x_1 + 2x_2 + x_4,\ x_2 + x_3 + x_4,\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4)\end{aligned}$$

Luego:

$$(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{W} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 = y_1 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = y_3 \end{cases}$$

Entonces, planteamos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & y_2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & y_3 \end{array}\right) \xrightarrow{fila3+(-1)\,fila1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & y_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & y_3 - y_1 \end{array}\right) \xrightarrow{fila3+(-1)\,fila2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 - y_1 - y_2 \end{array}\right)$$

Los vectores de $\mathbf{W}$ resultan caracterizados por la relación: $y_3 = y_1 + y_2$.

Por consiguiente:

$$(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{W} \quad \text{sí y sólo si} \quad (y_1, y_2, y_3) = k(1,0,1) + k'(0,1,1) \text{ con } k, k' \in \mathbb{R}.$$

Luego los vectores $(1,0,1)$ y $(0,1,1)$ generan a **W**. Dado que son linealmente independientes, constituyen una base de **W**. Por lo tanto: $\boldsymbol{B}_{\mathbf{W}} = \{(1,0,1);(0,1,1)\}$.

Ejemplo 5

Sea el subespacio $\mathbf{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 3x - y + 2z + w = 0\}$. Para hallar una base de **W** consideramos que: $(x, y, z, w) \in \mathbf{W}$ sí y sólo si $(x, y, z, w) = (x, 3x + 2z + w, z, w)$ con x, z y w arbitrarios.
Luego $(x, y, z, w) = (x, 3x + 2z + w, z, w) = x\,(1,3,0,0) + z\,(0,2,1,0) + w\,(0,0,0,1)$.
Por lo tanto $(1,3,0,0)$, $(0,2,1,0)$ y $(0,0,0,1)$ generan **W** y como resultan linealmente independientes, forman una base de **W**.

Ejemplo 6

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}[X]$, el espacio vectorial de los polinomios en **X** a coeficientes reales.
El conjunto $\{1, X, X^2, X^3, ...\}$ es una base de este espacio.
En efecto, todo polinomio de **V** se expresa de la forma: $\mathbf{p} = a_o + a_1X + \cdots + a_nX^n$. Esto es, como combinación lineal de los vectores $1, X, X^2, X^3, ...$.
Además, el polinomio nulo se expresa de forma única como: $\mathbf{0} = 01 + 0X + 0X^2 + \cdots$, lo que nos dice que los vectores $1, X, X^2, X^3, ...$ son linealmente independientes.
Luego constituyen una base de $\mathbf{V} = \mathbb{R}[X]$.

> **Teorema 1.8.1.** Sea **V** espacio vectorial sobre el cuerpo **K**.
>
> Si $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de **V** y $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, entonces existen escalares únicos $x_1, x_2, ..., x_n$ tales que $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$.

Demostración:

Supongamos que **v** puede expresarse en dos formas distintas como combinación lineal de los vectores de la base ***B***. Es decir, supongamos que:

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$$
$$\mathbf{v} = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n$$

Restando miembro a miembro se obtiene $\bar{\mathbf{0}} = (x_1 - y_1)\mathbf{v}_1 + (x_2 - y_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (x_n - y_n)\mathbf{v}_n$
Como $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independiente, por ser base, la ecuación se satisface si $x_i = y_i$ para $(i = 1, 2, 3, ..., n)$. Luego el teorema queda demostrado. #

El siguiente teorema prueba que todas las bases de un espacio vectorial **V** tienen el mismo número de vectores.

> **Teorema 1.8.2.** Sea **V** espacio vectorial sobre el cuerpo **K**. Si $\boldsymbol{B}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ y $\boldsymbol{B'}=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_m\}$ son bases de **V,** entonces $n=m$.

Demostración:

a) Supongamos que $m>n$. Por el **Teorema 1.7.1.**, los vectores $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_m$ serían linealmente dependientes, en contradicción con la hipótesis de que forman una base.

b) Supongamos que $n>m$. Por el mismo teorema mencionado anteriormente, los vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ serían linealmente dependientes, en contradicción con la hipótesis de que forman una base.

Por lo tanto $n=m$. #

Acabamos de demostrar que, si el espacio vectorial **V** tiene una base con *n* vectores, todas las bases de **V** tienen *n* vectores.

> **Definición 1.8.2.** Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K.**
>
> ***B***=$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ base de **V.** Se define la **dimensión** de **V** como el número (entero no negativo) de vectores de cualquiera de sus bases.
>
> Notación: $dim\,\mathbf{V}=n$.
>
> Asimismo, **V** recibe el nombre de **espacio vectorial de dimensión finita**. En el caso particular $\mathbf{V}=\{\bar{\mathbf{0}}\}$, se dice que **V** es de **dimensión cero**.

Ejemplos

Ejemplo 1

$\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial de dimensión dos.
Análogamente, $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial de dimensión tres y en consecuencia, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial de dimensión *n*.

Ejemplo 2

El espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tiene dimensión cuatro, pues: $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ es una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. La verificación queda como ejercicio para el lector.

Ejemplo 3

Situaciones similares al del espacio vectorial $\mathbf{V} = \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ el espacio vectorial de los polinomios a coeficientes reales, donde una base del mismo es $\{1, X, X^2, X^3, ...\}$ se denominan espacios vectoriales de dimensión infinita.

Nota: La prueba de los siguientes enunciados queda como ejercicio para el lector.

Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**, de dimensión finita *n*. Entonces se verifica:

a) Cualquier subconjunto de **V** con más de "*n*" elementos es linealmente dependiente.
b) Ningún subconjunto de **V** con menos de "*n*" elementos, genera a **V**.
c) Todo subconjunto de "*n*" vectores linealmente independientes es una base de **V**.
d) Todo generador de **V**, con "*n*" vectores es una base.

1.8.1 Existencia de Bases

Los siguientes teoremas garantizan la existencia de bases en un espacio vectorial de dimensión finita:

Teorema 1.8.1.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**, de dimensión finita "*n*". Todo subconjunto no vacío de *r* vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, linealmente independientes, es parte de una base.

Demostración:

Dado que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes entonces $r \leq n$.
Si $r = n$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ forman una base y no hay nada que demostrar.
Si $r < n$, los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ no generan al vectorial **V**, luego existe $\mathbf{v}_{r+1}$ tal que $\mathbf{v}_{r+1} \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$. Por el **Teorema 1.7.2.,** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}$ son linealmente independientes.
Reiterando el proceso a partir de este nuevo conjunto de vectores se llega, en un número finito de pasos, a tener "*n*" vectores linealmente independientes que constituyen una base del espacio vectorial **V**. #

Teorema 1.8.1.2. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K.**
Todo generador finito de **V**, incluye una base.

Demostración:

Queda como ejercicio para el lector. #

1.8.2 Bases y Dimensión de Subespacio de Soluciones del Sistema $\mathbf{A.X=0}$

Consideremos primero, el siguiente ejemplo.

Queremos hallar el subespacio de vectores de $\mathbb{R}^5$ que satisfacen la ecuación $\mathbf{A.X=0}$ siendo $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Es decir, buscamos hallar $\mathbf{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5$ talque $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{.}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

La matriz reducida de **A** es: $\mathbf{R_A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Observar que la dimensión del espacio filas de **A** es: r = 3. Por lo que el rango de la matriz **A** es 3.

Entonces los $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5$ que son solución del sistema $\mathbf{A.X=0}$ verifican:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-\alpha-2\beta,\ -3\alpha+\beta,-2\alpha,\alpha,\beta)=\alpha(-1,-3,-2,1,0)+\beta(-2,1,0,0,1)$$

Luego, toda solución $\mathbf{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5$ que satisface la ecuación $\mathbf{A.X=0}$, es combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}=(-1,-3,-2,1,0)$ y $\mathbf{v}=(-2,1,0,0,1)$.

Es decir que el subespacio de soluciones es **W**, llamado **espacio nulo** de la matriz **A**, está generado por los vectores **u** y **v**

$$\mathbf{W}=\left\langle(-1,-3,-2,1,0),\ (-2,1,0,0,1)\right\rangle$$

Como los vectores **u** y **v** son linealmente independientes, éstos forman una base del subespacio **W**, por lo tanto, la dimensión de **W** es k = 2 y se lo denomina **nulidad** de **A**.

Observar que la dimensión de **W** es el número de incógnitas no principales.

Este análisis puede generalizarse a cualquier sistema $\mathbf{A.X=0}$. Si el rango de la matriz **A** es *r*, y el número de incógnitas del sistema es *n*, el número de incógnitas no principales es $n-r$. Por lo tanto:

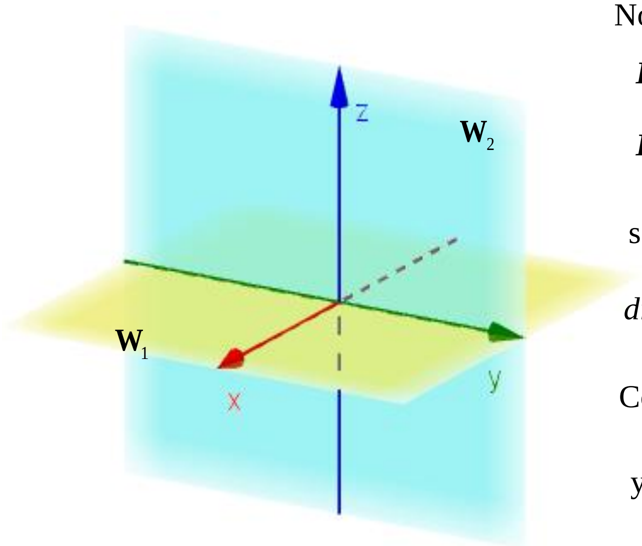
> Sea **A** es una matriz $m\times n$ sobre un cuerpo **K.** Si el rango de la matriz **A** es *r*, entonces la dimensión del espacio de soluciones del sistema $\mathbf{A.X=0}$ es $n-r$.

1.8.3 Base y Dimensión del Subespacio Suma

Consideremos el siguiente ejemplo:

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y sean los subespacios $\mathbf{W}_1 = \langle (1,0,0)\,(0,1,0) \rangle$ y $\mathbf{W}_2 = \langle (0,1,0)\,(0,0,1) \rangle$.

Luego el subespacio suma resulta $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \langle (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1) \rangle = \mathbb{R}^3$ siendo una base de dicho subespacio $\mathbf{B}_{\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2} = \boldsymbol{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ y por lo tanto $dim(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) = 3$.



Notar que

$$\boldsymbol{B}_{\mathbf{W}_1} = \{(1,0,0),\ (0,1,0)\} \quad y \quad dim\,\mathbf{W}_1 = 2$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathbf{W}_2} = \{(0,1,0),\ (0,1,0)\} \quad y \quad dim\,\mathbf{W}_2 = 2$$

se tiene entonces que

$dim(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) \neq dim\,\mathbf{W}_1 + dim\,\mathbf{W}_2$ ¿Por qué?

Como se puede observar, $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \langle (0,1,0) \rangle$

y $\boldsymbol{B}_{\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2} = \{(0,1,0)\}$ y $dim(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2) = 1$.

Como se puede observar en el ejemplo

$$\underbrace{dim(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2)}_{3} = \underbrace{dim\,\mathbf{W}_1}_{2} + \underbrace{dim\,\mathbf{W}_2}_{2} - \underbrace{dim(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2)}_{1}.$$

A continuación, se probará que este resultado es válido si se tiene un espacio vectorial $\mathbf{V}$ y subespacions $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ de dimensión finita.

Teorema 1.8.3.1. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbf{K}$.

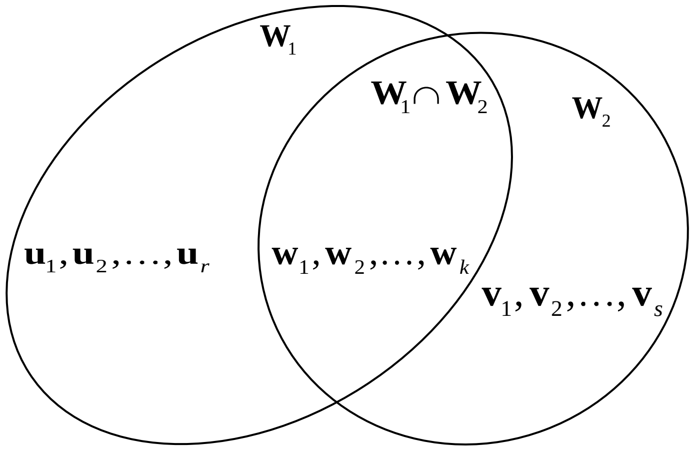
Si $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ son subespacios de dimensión finita, entonces $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es un subespacio de dimensión finita y se verifica:

$$dim\,(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) = dim\,\mathbf{W}_1 + dim\,\mathbf{W}_2 - dim\,(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2).$$

Demostración:

Supongamos en primer lugar que $dim\,(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2) = k > 0$. Sea $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{B}_{\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$

una base de $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$. Completamos la base $\boldsymbol{B}_0$ a una base de $\mathbf{W}_1$ y a una de $\mathbf{W}_2$ respectivamente.



Sean entonces $\boldsymbol{B}_1$ base de $\mathbf{W}_1$ y $\boldsymbol{B}_2$ base de $\mathbf{W}_2$ que incluyen a $\boldsymbol{B}_0$

$$\boldsymbol{B}_1 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}; \quad dim\,\mathbf{W}_1 = k + r$$
$$\boldsymbol{B}_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s\}; \quad dim\,\mathbf{W}_2 = k + s$$

Para probar el teorema deberemos encontrar una base de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ que tenga $k + r + s$ vectores. Afirmamos que:

$$\boldsymbol{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s\} \quad \text{es una base de } \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 .$$

Es inmediato que $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es generado por los elementos de $\boldsymbol{B}$.
Para ver que $\boldsymbol{B}$ es base hay que demostrar que los vectores de $\boldsymbol{B}$ son linealmente independientes. Consideremos entonces la relación:

$$x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_k\,\mathbf{w}_k + y_1\,\mathbf{u}_1 + y_2\,\mathbf{u}_2 + \cdots + y_r\,\mathbf{u}_r + z_1\,\mathbf{v}_1 + z_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + z_s\,\mathbf{v}_s = \bar{\mathbf{0}} \quad \mathbf{(1)}$$

que podemos reescribir en la forma:

$$\underbrace{x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_k\,\mathbf{w}_k + y_1\,\mathbf{u}_1 + y_2\,\mathbf{u}_2 + \cdots + y_r\,\mathbf{u}_r}_{\in \mathbf{W}_1} = \underbrace{-(z_1\,\mathbf{v}_1 + z_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + z_s\,\mathbf{v}_s)}_{\in \mathbf{W}_2}$$

La igualdad entre el primer miembro que es un vector de $\mathbf{W}_1$ y el segundo miembro que es un vector de $\mathbf{W}_2$ significa que ambos miembros representan el mismo vector y por ende éste debe pertenecer a $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$. Dicho vector puede escribirse como combinación lineal de los vectores de la base del subespacio $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$, o sea:

$$-(z_1\,\mathbf{v}_1 + z_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + z_s\,\mathbf{v}_s) = \alpha_1\,\mathbf{w}_1 + \alpha_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_k\,\mathbf{w}_k$$
$$\bar{\mathbf{0}} = \alpha_1\,\mathbf{w}_1 + \alpha_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_k\,\mathbf{w}_k + z_1\,\mathbf{v}_1 + z_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + z_s\,\mathbf{v}_s$$

Como los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ son linealmente independientes pues forman una base de $\mathbf{W}_2$, entonces: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = z_1 = \cdots = z_s = 0$.

Luego, la relación **(1)** se reduce a la siguiente:

$$x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_k\,\mathbf{w}_k + y_1\,\mathbf{u}_1 + y_2\,\mathbf{u}_2 + \cdots + y_r\,\mathbf{u}_r = \bar{\mathbf{0}}$$

Y como los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ son linealmente independientes pues forman una base de $\mathbf{W}_1$, resulta: $x_1 = \cdots = x_k = y_1 = \cdots = y_r = 0$.

Entonces, $x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_k\,\mathbf{w}_k + y_1\,\mathbf{u}_1 + y_2\,\mathbf{u}_2 + \cdots + y_r\,\mathbf{u}_r + z_1\,\mathbf{v}_1 + z_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + z_s\,\mathbf{v}_s = \bar{\mathbf{0}}$ si $x_1 = \cdots = x_k = y_1 = \cdots = y_r = z_1 = \cdots = z_s = 0$ con lo que queda probado que los vectores de ***B*** son linealmente independientes y que ***B*** es una base de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$.

Por lo tanto:

$$dim\,(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) = k + r + s = \underbrace{(k+r)}_{dim\,\mathbf{W}_1} + \underbrace{(k+s)}_{dim\,\mathbf{W}_2} - \underbrace{k}_{dim\,(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2)}$$

O sea:

$$dim\,(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) = dim\,\mathbf{W}_1 + dim\,\mathbf{W}_2 - dim\,(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2)$$

como queríamos demostrar. #

1.8.3.1 Suma Directa

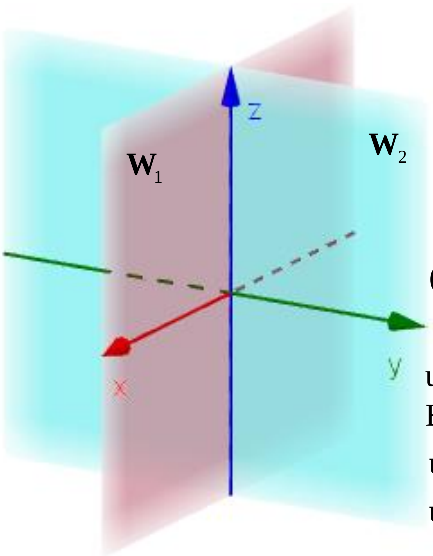
En esta sección estudiaremos qué sucede con la suma de subespacios si $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{\bar{\mathbf{0}}\}$.

Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Si $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ son subespacios, entonces $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es también un subespacio y sabemos que todo vector de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ se expresa como suma de un vector de $\mathbf{W}_1$ y de uno de $\mathbf{W}_2$. Puede ocurrir que cada vector de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ se exprese en más de una forma como suma de un elemento de $\mathbf{W}_1$ y de uno de $\mathbf{W}_2$ o que su expresión sea única.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sean $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y los subespacios $\mathbf{W}_1 = \langle (1,0,0)\,(0,0,1) \rangle$; $\mathbf{W}_2 = \langle (0,1,0)\,(0,0,1) \rangle$ del vectoril. El subespacio suma es $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \langle (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1) \rangle = \mathbb{R}^3$.



Todo vector de $\mathbb{R}^3$ se expresa, en muchas formas como suma de un vector de $\mathbf{W}_1$ y de un vector de $\mathbf{W}_2$ pues:

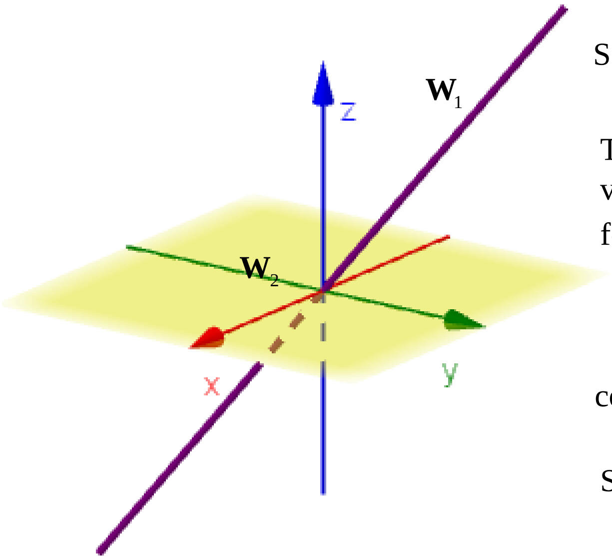
$$(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{(x_1, 0, x_3)}_{\in \mathbf{W}_1} + \underbrace{(0, x_2, 0)}_{\in \mathbf{W}_2} = \underbrace{(x_1, 0, 0)}_{\in \mathbf{W}_1} + \underbrace{(0, x_2, x_3)}_{\in \mathbf{W}_2}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{(x_1, 0, m)}_{\in \mathbf{W}_1} + \underbrace{(0, x_2, x_3 - m)}_{\in \mathbf{W}_2}$$ donde "m" representa un número real arbitrario.

Es decir, podemos encontrar elementos $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in \mathbf{W}_1$ y $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}_2$ con $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{v}_2$ tal que $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

Ejemplo 2

Sean $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y los subespacios $\mathbf{W}_1 = \langle (0,1,1) \rangle$; $\mathbf{W}_2 = \langle (1,0,0)\,(0,1,0) \rangle$ del vectorial $\mathbf{V}$.



Se tiene

$$\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \langle (0,1,1),\ (1,0,0),\ (0,1,0) \rangle = \mathbb{R}^3$$

Todo vector de $\mathbb{R}^3$ se expresa como suma de un vectorr de $\mathbf{W}_1$ y un vector de $\mathbf{W}_2$ de una única forma.

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, x_3, x_3) + (x_1, x_2 - x_3, 0)$$

con $(0, x_3, x_3) \in \mathbf{W}_1$ y $(x_1, x_2 - x_3, 0) \in \mathbf{W}_2$

Si suponemos $(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ con $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{W}_1$ y $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{W}_2$, es fácil ver que $\mathbf{u}_1 = (0, x_3, x_3)$ y que $\mathbf{u}_2 = (x_1, x_2 - x_3, 0)$.

Definición 1.8.3.1.1. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Sean $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ subespacios de $\mathbf{V}$. Diremos que la suma $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es directa sí y sólo si todo vector de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ se expresa en forma única como suma de un elemento de $\mathbf{W}_1$ y un elemento de $\mathbf{W}_2$.

Notación: $\mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$ indica que la suma de $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ es directa.

Esta definición es equivalente a decir que si: $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in \mathbf{W}_1$ y $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}_2$

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2.$$

Teorema 1.8.3.1.1. (Teorema de la Caracterización de la Suma Directa)

Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Sean $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ subespacios de $\mathbf{V}$.

La suma $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es directa sí y sólo si $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{\bar{\mathbf{0}}\}$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que la suma es directa.

Consideremos $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$ esto es $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_1$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2$. Luego $\mathbf{v}$ puede escribirse como:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} + \bar{\mathbf{0}} \quad \text{con} \quad \mathbf{v} \in \mathbf{W}_1 \ \text{ y } \ \bar{\mathbf{0}} \in \mathbf{W}_2$$
$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{0}} + \mathbf{v} \quad \text{con} \quad \bar{\mathbf{0}} \in \mathbf{W}_1 \ \text{ y } \ \mathbf{v} \in \mathbf{W}_2$$

Pero esto contradice la hipótesis, por lo tanto $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Es decir que $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{\bar{\mathbf{0}}\}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{\bar{\mathbf{0}}\}$.
Sea **v** un vector de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ y supongamos que se expresa en las siguientes formas:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \quad \text{con} \quad \mathbf{w}_1 \in \mathbf{W}_1 \ \text{ y } \ \mathbf{w}_2 \in \mathbf{W}_2$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_1' + \mathbf{w}_2' \quad \text{con} \quad \mathbf{w}_1' \in \mathbf{W}_1 \ \text{ y } \ \mathbf{w}_2' \in \mathbf{W}_2$$

Resulta entonces que:

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1' + \mathbf{w}_2'$$
$$\underbrace{\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_1'}_{\in \mathbf{W}_1} = \underbrace{\mathbf{w}_2' - \mathbf{w}_2}_{\in \mathbf{W}_2}$$

En la última igualdad se observa que los dos miembros representan al mismo vector: como elemento de $\mathbf{W}_1$ el primer miembro y como elemento de $\mathbf{W}_2$ el segundo miembro. Por lo tanto, el vector pertenece a $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$ y teniendo en cuenta la hipótesis resulta que:

$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_1' = \bar{\mathbf{0}} = \mathbf{w}_2' - \mathbf{w}_2$$

De donde se obtiene que: $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1'$ y $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_2'$. Por lo tanto, todo vector de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es suma de un vector de $\mathbf{W}_1$ y de un vector de $\mathbf{W}_2$ en una solo forma.

Luego la suma $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es directa. #

Corolario 1.8.3.1.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sean $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ subespacios de dimensión finita. Se verifica que:

a) La suma $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es directa sí y sólo si $dim\,(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) = dim\,\mathbf{W}_1 + dim\,\mathbf{W}_2$.

b) Si la suma $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es directa y se tienen $\boldsymbol{B}_1$ base de $\mathbf{W}_1$ y $\boldsymbol{B}_2$ base de $\mathbf{W}_2$, entonces $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 \cup \boldsymbol{B}_2$ es una base de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$.

Demostración:

Queda como ejercicio para el lector. #

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y sean los subespacios $\mathbf{W}_1 = \langle (1,0,0),(0,1,0) \rangle$ y $\mathbf{W}_2 = \langle (1,2,3),\ (0,1,2) \rangle$. ¿Es la suma de $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ directa?
$\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ son subespacios de dimensión dos (planos por el origen). La intersección de dos planos en $\mathbb{R}^3$ no es nunca un punto por lo tanto la suma no es directa.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y sean los subespacios $\mathbf{W}_1 = \langle (\text{-}1,1,1) \rangle$ y $\mathbf{W}_2 = \langle (1,2,3),\ (0,1,2) \rangle$. ¿Es la suma de $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ directa?
$\mathbf{W}_1$ es una recta por el origen y $\mathbf{W}_2$ es un plano también por el origen. Dado que $\mathbf{W}_1$ no es parte de $\mathbf{W}_2$. La intersección $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{\bar{\mathbf{0}}\}$. Luego la suma es directa.

1.8.3.2 Subespacios Complementarios

Definición 1.8.3.2.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sean **U** y **W** subespacios del espacio vectorial **V**. Diremos que **U** y **W** son **subespacios complementarios** sí y sólo si se verifica que $\mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbf{V}$ y que $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{\bar{\mathbf{0}}\}$.

Equivalentemente: **U** y **W** son **subespacios complementarios** sí y sólo si $\mathbf{U} \oplus \mathbf{W} = \mathbf{V}$.

Si $\mathbf{U} \oplus \mathbf{W} = \mathbf{V}$ decimos que **U** es un subespacio complementario de **W** y que **W** es un subespacio complementario de **U**.

En general un subespacio puede tener muchos subespacios complementarios.

Ejemplos

Ejemplo 1

En $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$, un subespacio complementario de $\mathbf{U} = \langle (1,0) \rangle$ es el subespacio $\mathbf{W}_1 = \langle (0,1) \rangle$. Pero también lo es el subespacio $\mathbf{W}_2 = \langle (2,3) \rangle$ y en general $\mathbf{W} = \langle (a,b) \rangle$ con $b \neq 0$ son subespacios complementarios de **U**.

Ejemplo 2

En un vectorial cualquiera **V**, los subespacios $\{\bar{\mathbf{0}}\}$ y **V** son subespacios complementarios.

Teorema 1.8.3.2.1. Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**, de dimensión finita. Si **U** es un subespacio de **V** entonces **U** tiene un subespacio complementario.

Demostración:

Queda como ejercicio para el lector. #

1.9 Coordenadas

Definición 1.9.1. Sea **V** un espacio vectorial de dimensión *n* sobre un cuerpo **K.** Diremos que una sucesión $\left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\right)$ de vectores de **V** es una **base ordenada** sí y sólo si los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes y generan al vectorial **V**.

Teniendo en cuenta que dos sucesiones $\left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\right)$ y $\left(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\right)$ son iguales sí y sólo si $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1,\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{v}_n = \mathbf{w}_n$ entonces dos bases ordenadas son iguales sí y sólo si están formadas por los mismos vectores y en el mismo orden.

Notación: $\mathbf{B} = \left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\right)$

En lo que sigue y salvo expresa mención en contrario trabajaremos con bases ordenadas.

Sea $\mathbf{B} = \left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\right)$ una base ordenada del espacio vectorial **V**.
Todo vector $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se expresa como combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en una sola forma. Esto es, dada la base **B** todo vector **v** determina una única n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de escalares, tales que:

$$\mathbf{v} = x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n$$

Los escalares $x_1, x_2, ..., x_n$ son las **coordenadas del vector v respecto de la base B**.

La n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ se denomina **vector coordenado** del vector **v** respecto de la base **B,** y se denota por

$$(\mathbf{v})_{\mathbf{B}} = (x_1, x_2, ..., x_n)\,.$$

También se puede representar al vector **v**, por la matriz columna cuyos elementos son sus coordenadas respecto de la base **B.** En tal caso escribiremos:

$$[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y sea el vector $\mathbf{v} = (2, -1, 3) \in \mathbf{V}$.

a) Tomando la base $\mathbf{B}_0 = \big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$ se tiene que:

$$(\mathbf{v})_{\mathbf{B}_0} = (2, -1, 3); \qquad [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

b) Tomando la base $\mathbf{B}_1 = \big((0,0,1), (1,0,0), (0,1,0)\big)$ se tiene que:

$$(\mathbf{v})_{\mathbf{B}_c} = (3, 2, -1); \qquad [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

c) Tomando la base $\mathbf{B}_2 = \big((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\big)$ se tiene que:

$$(2, -1, 3) = x_1(1,0,0) + x_2(1,1,0) + x_3(1,1,1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2 = x_1 + x_2 + x_3 \\ -1 = x_2 + x_3 \\ 3 = x_3 \end{cases}$$

Luego $x_1 = 3$, $x_2 = -4$ y $x_3 = 3$ en consecuencia $(\mathbf{v})_{\mathbf{B}_2} = (3, -4, 3)$; $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

Ejemplo 2

Sean $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\mathbf{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ base de **V**.

Consideramos $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -9 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}$, luego $(\mathbf{v})_{\mathbf{B}} = (-9, 2, 0, -1)$; $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -9 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales. Sea $\mathbf{p} = 3 + 5X + 2X^2 \in \mathbf{V}$

a) Tomando la base $\mathbf{B}_1 = \left(1,\ X,\ X^2\right)$ se tiene que:

$$(\mathbf{p})_{\mathbf{B}_1} = (3, 5, 2); \qquad [\mathbf{p}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

b) Si se considera la base $\mathbf{B_2} = \left(X^2, X, 1\right)$, se tiene que:

$$(\mathbf{p})_{\mathbf{B}_1} = (2, 5, 3); \qquad [\mathbf{p}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

c) Tomando la base $\mathbf{B}_3 = \left(1 + X,\ 1 + X^2,\ 1 + X + X^2\right)$:

$$\mathbf{p} = 3 + 5X + 2X^2 = \alpha\left(1 + X\right) + \beta\left(1 + X^2\right) + \gamma\left(1 + X + X^2\right) \ \Rightarrow\ \alpha = 1,\ \beta = -2,\ \gamma = 4 \ \text{ luego}$$

$$(\mathbf{p})_{\mathbf{B}_1} = (1, -2, 4); \qquad [\mathbf{p}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

En todo **V** espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo **K**, la n-upla de coordenadas asociada al vector $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ queda unívocamente determinada una vez elegida la base. Entonces, para cada base **B** del espacio vectorial **V** queda definida una aplicación del espacio vectorial **V** en el espacio vectorial $\mathbf{K}^n$, en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{B}} : \mathbf{V} &\to \mathbf{K}^n \\ \mathbf{v} &\to (\mathbf{v})_{\mathbf{B}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Análogamente, queda definida una aplicación del espacio vectorial **V** en el espacio vectorial $\mathbf{K}^{n\times 1}$ (matrices columnas de "*n*" elementos).

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{B}} : \mathbf{V} &\to \mathbf{K}^{n\times 1} \\ \mathbf{v} &\to [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Proposición 1.9.1. Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K,** $dim\,\mathbf{V} = n.$ Sean $\mathbf{u}; \mathbf{v} \in \mathbf{V}$; $\alpha \in \mathbf{K}$ y **B** base del espacio vectorial **V.** Si $\varphi_{\mathbf{B}}: \mathbf{V} \to \mathbf{K}^n$ es tal que $\varphi_{\mathbf{B}}(\mathbf{v}) = (\mathbf{v})_{\mathbf{B}}$ entonces se verifica que:

a) $(\mathbf{u} + \mathbf{v})_{\mathbf{B}} = (\mathbf{u})_{\mathbf{B}} + (\mathbf{v})_{\mathbf{B}}$ y $(\alpha\,\mathbf{u})_{\mathbf{B}} = \alpha(\mathbf{u})_{\mathbf{B}}$

b) $\varphi_{\mathbf{B}}: \mathbf{V} \to \mathbf{K}^n$ es una aplicación biyectiva.

Demostración:

Queda como ejercicio para el lector. #

La aplicación $\varphi_{\mathbf{B}}$ tiene la propiedad de "preservar" las operaciones vectoriales entre **V** y $\mathbf{K}^n$ (las operaciones de adición y multiplicación por escalar realizadas con vectores de **V** se traducen en operaciones análogas con los respectivos vectores coordenados).

Una aplicación biyectiva con esta propiedad se llama **isomorfismo** (*iso* viene del griego y significa *lo mismo* mientras que *morfos* es la palabra griega para *forma* o *estructura)* de los espacios vectoriales que vincula. Por lo tanto $\varphi_{\mathbf{B}}$ es un isomorfismo de los espacios vectoriales **V** y $\mathbf{K}^n$ o entre **V** y $\mathbf{K}^{n\times 1}$. En definitiva esto significa que todas las operaciones vectoriales en **V** se reproducen exactamente en $\mathbf{K}^n$.

La selección de una base $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ para el espacio vectorial **V** equivale a introducir un sistema de coordenadas en **V.** La función $\varphi_{\mathbf{B}}$ vincula el espacio **V** de dimensión *n,* con el espacio conocido $\mathbf{K}^n$ a partir de lo cual los vectores de **V** se identifican con su representación en $\mathbf{K}^n$ previa ubicación de un punto como origen de coordenadas (Figura 1.6.)

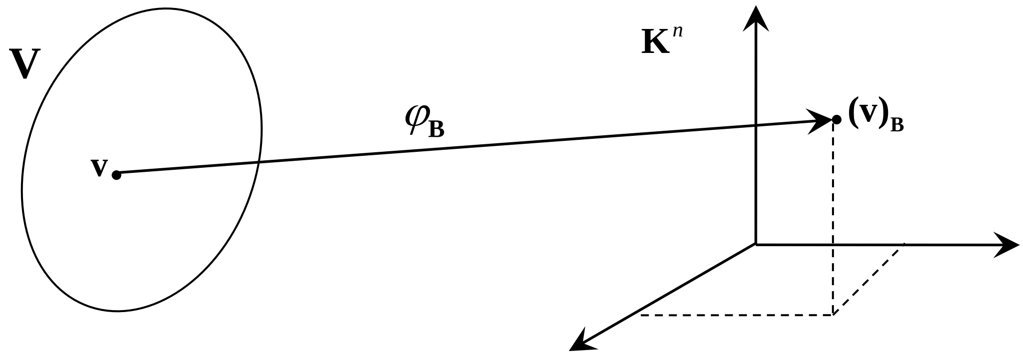


Figura 1.6: Vinculación entre los vectores del vectorial y las n-uplas.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K.** $dim\mathbf{V} = 3$. Sea $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ base ordenada de **V.** Los vectores coordenados de los siguientes vectores de **V**

a) $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ *b)* $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 - 6\mathbf{v}_3$

c) $\bar{\mathbf{0}}$ *d)* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

e) $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ *f)* $\mathbf{v}_1$; $\mathbf{v}_2$; $\mathbf{v}_3$

Son:

a) $[\mathbf{u}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ *b)* $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$ *c)* $[\bar{\mathbf{0}}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *d)*

$$[\mathbf{u}+\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = [\mathbf{u}]_{\mathbf{B}} + [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

e) $[3\mathbf{u}+2\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = 3[\mathbf{u}]_{\mathbf{B}} + 2[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ -15 \end{bmatrix}$ *f)* $[\mathbf{v}_1]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $[\mathbf{v}_2]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $[\mathbf{v}_3]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_3$ y sea $\mathbf{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canónica de **V.** Un elemento cualquiera $\mathbf{p} \in \mathbf{P}_3$ tiene la forma $\mathbf{p} = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. Por lo que: $[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$.

Luego la función de coordenadas $\varphi_{\mathbf{B}}: \mathbf{P}_3 \to \mathbb{R}^{4\times 1}$ es un isomorfismo de $\mathbf{P}_3$ y $\mathbb{R}^4$.
$\mathbf{p} \to [\mathbf{p}]_{\mathbf{B}}$

La identificación entre los vectores del vectorial **V** y las 4-uplas de $\mathbb{R}^4$, en este caso, permite estudiar propiedades importantes de los vectores sea en $\mathbb{R}^4$ o $\mathbb{R}^{4\times 1}$ y "traducir" los resultados al vectorial **V**.

Así, para comprobar si los polinomios $\mathbf{p} = 1 + 2X^3$; $\mathbf{q} = 4 + X + 5X^3$; $\mathbf{r} = 3 + 2X$ son linealmente dependientes en $\mathbf{P}_3$, podemos utilizar la función de coordenadas:

$$[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{q}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{r}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces para determinar su dependencia lineal, planteamos:

$$\alpha[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}} + \beta[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}} + \gamma[\mathbf{r}]_{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces

$\alpha[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}} + \beta[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}} + \gamma[\mathbf{r}]_{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{0}}$ podemos escribir la expresión como $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Reduciendo por filas la matriz ampliada $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, se tiene que es igual a $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Luego, los vectores coordenados $[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}}$; $[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}}$; $[\mathbf{r}]_{\mathbf{B}}$ son linealmente dependientes, por lo tanto también lo son los polinomios **p**, **q** y **r**.

Notar que considerando la reducida por filas de la matriz ampliada se tiene $\alpha = 5\gamma$ y $\beta = -2\gamma$.

Luego si $\gamma = 1$ se tiene $5[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}} + (-2)[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}} + [\mathbf{r}]_{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{r}]_{\mathbf{B}} = 2[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}} - 5[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}}$.

Más precisamente, $3 + 2X = 2\left(4 + X + 5X^3\right) - 5\left(1 + 2X^3\right)$.

Generalizando, se tiene el siguiente resultado

Teorema 1.9.1. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbf{K}$, de dimensión finita "n". Sea $\mathbf{B}$ una base del espacio vectorial $\mathbf{V}$ y sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ vectores de $\mathbf{V}$. Se verifica que:

a) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ son linealmente dependientes sí y sólo si sus vectores coordenados $[\mathbf{u}_1]_{\mathbf{B}}, [\mathbf{u}_2]_{\mathbf{B}}, \ldots, [\mathbf{u}_r]_{\mathbf{B}}$ lo son.

b) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ son linealmente independientes sí y sólo si sus vectores coordenados $[\mathbf{u}_1]_{\mathbf{B}}, [\mathbf{u}_2]_{\mathbf{B}}, \ldots, [\mathbf{u}_r]_{\mathbf{B}}$ lo son.

b) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ generan $\mathbf{V}$ sí y sólo si $[\mathbf{u}_1]_{\mathbf{B}}, [\mathbf{u}_2]_{\mathbf{B}}, \ldots, [\mathbf{u}_r]_{\mathbf{B}}$ generan $\mathbf{K}^{n\times 1}$.

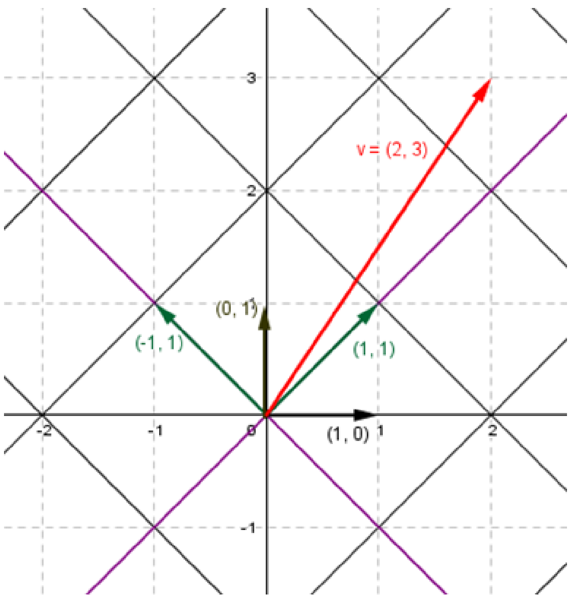
Demostración:

Queda como ejercicio para el lector. #

1.8.4 Cambio de Base

Como ya se mencionó con anterioridad, la representación de vectores de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ de dimensión finita por sus vectores de coordenadas **depende de la base elegida**. A continuación, nos proponemos estudiar como se relacionan los vectores de coordenadas de un mismo vector respecto a distintas bases.

Veamos primero un ejemplo sencillo en $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$.
Sea el vector $\mathbf{v} = (2,3) \in \mathbf{V}$.
Si se considera la base $\mathbf{B}_1 = \big((1,0),(0,1)\big)$ y la base es $\mathbf{B}_2 = \big((1,1),(-1,1)\big)$ ¿Cómo se relacionan los vectores de coordenadas $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1}$ y $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2}$? ¿Cómo se vinculan las bases $\mathbf{B}_1 = \big((1,0),(0,1)\big)$ y $\mathbf{B}_2 = \big((1,1),(-1,1)\big)$?



$\mathbf{v} = (2,3) \in \mathbb{R}^2$

Considerando $\mathbf{B}_1 = \big((1,0),(0,1)\big)$ se tiene:

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1) \Rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Considerando $\mathbf{B}_2 = \big((1,1),(-1,1)\big)$ se tiene:

$$(2,3) = \tfrac{5}{2}(1,1) + \tfrac{1}{2}(-1,1) \Rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Examinando la expresión anterioridad, el vector $\mathbf{v} = (2,3) = \tfrac{5}{2}(1,1) + \tfrac{1}{2}(-1,1)$ si se toma vector coordenado respecto a la base $\mathbf{B}_1$ resulta

$$[(2,3)]_{\mathbf{B}_1} = \left[\tfrac{5}{2}(1,1)+\tfrac{1}{2}(-1,1)\right]_{\mathbf{B}_1} = \tfrac{5}{2}[(1,1)]_{\mathbf{B}_1} + \tfrac{1}{2}[(-1,1)]_{\mathbf{B}_1} = \underbrace{\left[[(1,1)]_{\mathbf{B}_1} \quad [(-1,1)]_{\mathbf{B}_1}\right]}\cdot\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{array}{ccccc}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}\\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow\\ [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1} & = & \mathbf{P} & . & [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2}\end{array}$$

Los vectores de coordenadas $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1}$ y $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2}$ que representan al mismo vector (2,3) se relacionan a través de la matriz **P**.

A continuación, tomaremos un espacio vectorial **V** de dimensión finita y estudiaremos como se relacionan los vectores de coordenadas de un mismo vector respecto a distintas bases.

Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**, $dim\,\mathbf{V} = n$.

Sean $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ y $\mathbf{B}_2 = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \ldots, \mathbf{v}'_n)$ bases de **V.**

Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, luego **v** puede escribirse como combinación lineal de los vectores de las bases elegidas.

Respecto a la base $\mathbf{B}_1$: $\quad \mathbf{v}\in\mathbf{V} \;\Rightarrow\; \mathbf{v} = x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n \;\Rightarrow\; [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$

Respecto a la base $\mathbf{B}_2$: $\quad \mathbf{v}\in\mathbf{V} \;\Rightarrow\; \mathbf{v} = y_1\,\mathbf{v}'_1 + y_2\,\mathbf{v}'_2 + \cdots + y_n\,\mathbf{v}'_n \;\Rightarrow\; [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2} = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$

Ahora bien, considerando que: $\mathbf{v} = y_1\,\mathbf{v}'_1 + y_2\,\mathbf{v}'_2 + \cdots + y_n\,\mathbf{v}'_n$ y tomando vector coordenado respecto a la base $\mathbf{B}_1$ se tiene:

$$[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1} = [y_1\,\mathbf{v}'_1 + y_2\,\mathbf{v}'_2 + \cdots + y_n\,\mathbf{v}'_n]_{\mathbf{B}_1} = y_1[\mathbf{v}'_1]_{\mathbf{B}_1} + y_2[\mathbf{v}'_2]_{\mathbf{B}_1} + \cdots + y_n[\mathbf{v}'_n]_{\mathbf{B}_1}$$

Teniendo en cuenta propiedades de la multiplicación de matrices, se tiene que:

$$\underset{\Downarrow}{[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1}} = \underbrace{\left[[\mathbf{v}'_1]_{\mathbf{B}_1} \; [\mathbf{v}'_2]_{\mathbf{B}_1} \cdots [\mathbf{v}'_n]_{\mathbf{B}_1} \right]}_{\Downarrow} \cdot \underset{\Downarrow}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1} = \qquad \mathbf{P} \qquad [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2}$$

Luego

$[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1} = \mathbf{P}\ [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2}$ con $\mathbf{P} = \left[[\mathbf{v}'_1]_{\mathbf{B}_1} [\mathbf{v}'_2]_{\mathbf{B}_1} \cdots [\mathbf{v}'_n]_{\mathbf{B}_1} \right]$ la **matriz de cambio de base** de $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}_2$.

Si bien a veces se suele designar a **P** como la matriz de transición de $\mathbf{B}_2$ a $\mathbf{B}_1$, nosotros adoptaremos la primera denominación: **matriz de cambio de base** de $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}_2$.

Las columnas de la matriz **P** son, en su orden, las matrices columna correspondientes a los vectores coordenados de los vectores de la base $\mathbf{B}_2$ respecto a la base $\mathbf{B}_1$**:**

$$\mathbf{P}^j = \left[\mathbf{v}'_j \right]_{\mathbf{B}_1} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Las columnas de **P** son vectores linealmente independientes del vectorial $\mathbf{K}^{n\times 1}$ (por ser vectores coordenados de vectores de una base), por lo tanto la matriz **P** es inversible. Entonces $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2} = \mathbf{P}^{-1}[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1}$.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{B}_1 = \big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$; $\mathbf{B}_2 = \big((1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\big)$ bases de **V**.
Sea $\mathbf{v} = (3, 4, -2)$ se quiere hallar $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2}$.

Dado que se obtiene con facilidad $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, se buscará la matriz **P** de cambio de base $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}_2$ para así hallar $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2} = \mathbf{P}^{-1}[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1}$.

La matriz de cambio de base $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}_2$ es:

$$\mathbf{P} = \left[[\mathbf{v}'_1]_{\mathbf{B}_1} \; [\mathbf{v}'_2]_{\mathbf{B}_1} \; [\mathbf{v}'_3]_{\mathbf{B}_1} \right] = \left[[(1,1,1)]_{\mathbf{B}_1} \; [(0,1,1)]_{\mathbf{B}_1} \; [(0,0,1)]_{\mathbf{B}_1} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

P es inversible pues sus columnas son vectores linealmente independientes del vectorial $\mathbb{R}^{3\times 1}$, entonces se tiene que:

$$[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{B}_1 = \left((1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)\right)$ base de $\mathbf{V}$.

Se quiere hallar la base $\mathbf{B}_2$ sabiendo que la matriz de cambio de base $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}_2$ es $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Sea $\mathbf{B}_2 = \left(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\right)$ la base buscada.

Teniendo en cuenta que la matriz de cambio de base $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}_2$ es:

$$\mathbf{P} = \left[[\mathbf{v}'_1]_{\mathbf{B}_1} \ [\mathbf{v}'_2]_{\mathbf{B}_1} \ [\mathbf{v}'_3]_{\mathbf{B}_1} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{v}'_1]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ [\mathbf{v}'_2]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ [\mathbf{v}'_3]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\mathbf{v}'_1 = 1.(1,0,0) + (-2).(0,1,1) + 1.(1,1,1) = (2,-1,-1)$$

$$\mathbf{v}'_2 = 3.(1,0,0) + 1.(0,1,1) + 0.(1,1,1) = (3,1,1)$$

$$\mathbf{v}'_3 = 0.(1,0,0) + 0.(0,1,1) + 1.(1,1,1) = (1,1,1)$$

Por lo tanto la base buscada es $\mathbf{B}_2 = \left((2,-1,-1), (3,1,1), (1,1,1)\right)$.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_3$ y sea $\mathbf{B}_1 = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ la base canónica de $\mathbf{V}$. Se quiere hallar la base $\mathbf{B}_2$ tal que la matriz $\mathbf{P}$ de cambio de base $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}_2$ sea: $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Sea $\mathbf{B}_2 = \left(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3, \mathbf{v}'_4\right)$. Teniendo en cuenta que $\mathbf{P} = \left[[\mathbf{v}'_1]_{\mathbf{B}_1} [\mathbf{v}'_2]_{\mathbf{B}_1} [\mathbf{v}'_3]_{\mathbf{B}_1} [\mathbf{v}'_4]_{\mathbf{B}_1} \right]$ entonces

$$[\mathbf{v}'_1]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ [\mathbf{v}'_2]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ [\mathbf{v}'_3]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ [\mathbf{v}'_4]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego $\mathbf{v}'_1 = -1 + X^3$, $\mathbf{v}'_2 = 2 + X^2$, $\mathbf{v}'_3 = 2 + X + X^3$, $\mathbf{v}'_4 = 1 - X^2 + X^3$.

1.10 Ejercicios del Capítulo

Ejercicio 1

Sea **V** el conjunto de las matrices de las matrices 2x2, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ con las operaciones definidas de la forma usual. Mostrar que **V** es un espacio vectorial sobre los reales.

Ejercicio 2

Sea **V** el conjunto de pares ordenados de números reales y **K** el cuerpo de los números reales.

a) Si se definen en **V** las operaciones:

$$+ \ : \ (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 - 1, x_2 + y_2 - 1)$$
$$\bullet \ : \ \alpha \bullet (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

¿Es **V** con estas operaciones un espacio vectorial?

b) Ídem al caso anterior, pero definiendo al producto por escalares como:

$\alpha \bullet (x_1, x_2) = (\alpha x_1 - \alpha + 1, \alpha x_2 - 2\alpha + 2)$

¿Es **V** con estas operaciones un espacio vectorial?

Ejercicio 3

Sea **V** el conjunto de ternas ordenadas de números reales y **K** el cuerpo de los números reales.

a) Si se definen en **V** las operaciones:

$$+ \ : \ (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0)$$
$$\bullet \ : \ \alpha \bullet (x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, 0)$$

¿Es **V** con estas operaciones un espacio vectorial?

b) Si se definen en **V** las operaciones:

$$+ \ : \ (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$
$$\bullet \ : \ \alpha \bullet (x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, x_2, \alpha x_3)$$

¿Es **V** con estas operaciones un espacio vectorial?

Ejercicio 4

En cada uno de los casos siguientes analizar si los subconjuntos dados son subespacios del espacio vectorial **V** indicado.

1. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ donde } x_1 = 2x_2 \right\}$$

$$\mathbf{B} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ \mathbf{x} = (x_1, 0, x_3, x_4) \right\}$$

$$\mathbf{C} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ \mathbf{x} = (x_1, 1, x_3, x_4) \right\}$$

$$\mathbf{D} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ donde } x_4 \geq 0 \right\}$$

$$\mathbf{F} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ es solución de } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$\mathbf{G} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ es solución de } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

2. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \ / \ x_2 = x_1^2 \right\}$$

$$\mathbf{B} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \alpha\,(1,1,1,\ldots,1) \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbf{C} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \text{ donde } x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

3. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\mathbf{U} = \left\{ \begin{bmatrix} a & d \\ c & 0 \end{bmatrix} \right\}; \quad \mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}; \quad \mathbf{Y} = \left\{ \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ \mathrm{A} \text{ es simétrica} \right\};$$

$$\mathbf{Z} = \left\{ \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ \mathrm{A} \text{ es inversible} \right\}$$

4. $\mathbf{V} = \mathbb{R}[X]$

$$\mathbf{A} = \left\{ \text{polinomios de grado menor o igual a } n \text{ con térnimo independiente nulo} \right\}$$
$$= \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}[X] \ / \ \mathbf{p} = a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_s X^s \ con \ a_i \in \mathbb{R} \text{ y } s \leq n \right\}$$

$$\mathbf{B} = \left\{ \text{polinomios de grado igual a } n \right\} \cup \left\{ \text{polinomio nulo} \right\}$$

$$\mathbf{C} = \left\{ \text{polinomios de grado menor o igual a } n \right\} \cup \left\{ \text{polinomio nulo} \right\}$$

$$\mathbf{D} = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}[X] \ / \ \mathbf{p} = \left(X^2 + 2 \right) \bullet \mathbf{q} \quad \text{con} \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}[X] \right\}$$

5. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f \,/\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ función} \}$

$\mathbf{A} = \{ f \;/\; f(x) = k = \text{cte} \quad \forall x \in \mathbb{R} \}$

$\mathbf{B} = \{ f \;/\; f(-1) = f(1) = 0 \}$

$\mathbf{C} = \{ f \;/\; f(3) = 2 \}$

$\mathbf{C}[a,b] = \{ f \;/\; f \text{ es continua en el intervalo } [a,b] \}$

$\mathbf{C}^1(a,b) = \{ f \;/\; f \text{ es derivable con derivada continua en el intervalo } (a,b) \}$

Ejercicio 5

En cada uno de los casos siguientes, caracterizar los vectores de **W.**

a) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ $\quad \mathbf{W} = \langle (1,-1,0,0), (1,2,0,1), (3,0,0,-1) \rangle$

b) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad \mathbf{W} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$

c) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{4\times 1}$ $\quad \mathbf{W} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$

d) $\mathbf{V} = \mathbb{R}[X]$ $\quad \mathbf{W} = \langle 1+X,\ 1-X,\ X^2 \rangle$

Ejercicio 6

En cada uno de los casos siguientes, analizar cuáles de los conjuntos de vectores generan **V.**

a) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$

1) $(1,2);\ (-1,1)$ $\qquad$ 2) $(0,0);\ (1,1);\ (-2,-2)$

3) $(1,3);\ (2,-3);\ (0,2)$ $\qquad$ 4) $(2,4);\ (-1,2)$

b) $\mathbf{V} = \mathbf{P}_3$

1) $\{ X^2+1;\ X^2+X;\ X+1 \}$

2) $\{ X^2-1;\ X^2+2X-1 \}$

3) $\{ X^2+2;\ 2X^2-X+1;\ X+2;\ X^2+X+4 \}$

Ejercicio 7

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{3\times 4}$ y sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Encuentre la matriz $\mathbf{R_A}$, reducida por filas de **A.**

b) Sean $\mathbf{W_f\,(A)}$ el subespacio generado por las filas de **A** y $\mathbf{W_f}\left(\mathbf{R_A}\right)$ el subespacio generado por las filas de $\mathbf{R_A}$. Muestre que $\mathbf{W_f\,(A) = W_f}\left(\mathbf{R_A}\right)$**.**

c) El resultado anterior sugiere que una matriz y su reducida tienen el mismo subespacio de filas. Dé razones que justifiquen éste hecho.

d) Utilice la conclusión anterior para determinar si son iguales los siguientes subespacios

$$\mathbf{W_1} = \langle (1,-1,1),\ (4,-3,\ 1),\ (3,-2,0) \rangle$$
$$\mathbf{W_2} = \langle (1,-1,1),\ (-2,1,1),\ (5,-4,2) \rangle$$

Ejercicio 8

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$**. S**ean $\mathbf{S_1} = \{(1,-1,2);(0,1,3);(0,0,0)\}$ y $\mathbf{S_2} = \{(0,0,1);(1,1,3);(5,4,-7)\}$ conjuntos de **V.**

a) Analizar si cada uno de los siguientes puntos pertenecen a $\mathbf{S_1 + S_2}$:

$$(1,-1,2)\,;\quad (1,1,3)\,;\quad (6,3,5) \quad \text{y} \quad (0,0,0)$$

b) Definir el conjunto $\mathbf{S_1 + S_2}$. ¿Es $\mathbf{S_1 + S_2}$ un subespacio de **V**? Justifique su respuesta.

c) Analizar si $\mathbf{S_1 \subset S_1 + S_2}$ y/o $\mathbf{S_2 \subset S_1 + S_2}$.

Ejercicio 9

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ y sean $\mathbf{U} = \langle (1,2,3,6),\ (4,-1,3,6) \rangle$ $\quad \mathbf{W} = \langle (1,-1,1,1),\ (2,-1,4,5) \rangle$ subespacios.

a) Definir los subespacios **U** y **W** por medio de sistemas de ecuaciones lineales homogéneas.

b) Dar un conjunto de generadores y un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que definan el subespacio $\mathbf{U + W}$.

c) Dar un conjunto de generadores y un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que definan el subespacio $\mathbf{U \cap W}$.

Ejercicio 10

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ y sean $\mathbf{U} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ a = 0 \right\}$ subespacios.

a) Definir el subespacio **U** por medio de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

b) Dar un conjunto de generadores del subespacio **W.**

c) Dar un conjunto de generadores y un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que definan el subespacio $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

d) Dar un conjunto de generadores y un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que definan el subespacio $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.

Ejercicio 11

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_3$ y sean los subespacios

$$\mathbf{U} = \left\langle 1 + X^2, 1 - 2X + X^2 \right\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{W} = \left\{ a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbf{P}_3 \ / \ a_0 + a_1 = 0 \right\}$$

a) Definir el subespacio **U** por medio de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

b) Dar un conjunto de generadores del subespacio **W**.

c) Dar un conjunto de generadores y un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que definan el subespacio $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

d) Dar un conjunto de generadores y un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que definan el subespacio $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.

Ejercicio 12

¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes? Cuando lo sean, expresar un vector del conjunto como combinación lineal de los demás.

1. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$

a) $\mathbf{u_1} = (1, -2, 3, -1)$; $\mathbf{u_2} = (-2, 4, -6, 2)$

b) $\mathbf{u_1} = (1, 0, -1, 1)$; $\mathbf{u_2} = (2, 1, 1, 3)$; $\mathbf{u_3} = (0, -1, -3, 5)$

2. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$

a) $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$ $\quad \mathbf{v_1} = 2 + 5X - X^2$; $\mathbf{v_2} = -6 - 15X^2$

4. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

a) $f : x \to x^2$; $g : x \to sen(x)$; $h : x \to cos(x)$

b) $f : x \to cos(x)$; $g : x \to sen(x)$; $h : x \to e^x$

c) $f : x \to cos^2(x)$; $g : x \to sen^2(x)$; $h : x \to cos(2x)$

Ejercicio 13

¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base de **V**?

a) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ $\mathbf{B} = \{(1,1),\ (1,2)\}$

b) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ $\mathbf{B} = \{(1,0,1,1),\ (0,1,1,\text{-}1),\ (0,0,1,1),\ (0,0,1,\text{-}1)\}$

c) $\mathbf{V} = \mathbf{P_2}$ $\mathbf{B} = \{1+X,\ 1-X,\ 1+X+X^2\}$

Ejercicio 14

Encontrar la o las condiciones que debe satisfacer el escalar *a* para que los vectores:

$(1,a,1);\ (0,1,a);\ (a,1,0)$ formen una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 15

En cada una de las siguientes situaciones dar una base y la dimensión de **W**.

a) **W** es el subespacio de $\mathbb{R}^5$, definido como conjunto de soluciones del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

b) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ $\mathbf{W} = \langle (1,1,0),\ (2,1,1),\ (1,2,-1),\ (6,5,1) \rangle$.

c) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 3}$ $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a & b \\ a+b & b & b \end{bmatrix} \Big/ a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

d) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ $\mathbf{W} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \Big/ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Ejercicio 16

En cada uno de los casos siguientes dar una base del espacio vectorial que incluya a los vectores dados.

a) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ $\mathbf{v_1} = (2,1,5,3)$; $\mathbf{v_2} = (0,-1,3,5)$

b) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ejercicio 17

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$. Sean $\mathbf{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, 0) \right\}$ y $\mathbf{W} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ \mathbf{x} = (x_1, 0, 0, x_4) \right\}$ subespacios de **V.** Se pide:

a) Caracterizar los vectores de $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.

b) Dar una base de $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ y extenderla a una base de **U** y a una base de **W**.

c) Mostrar que $\mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbb{R}^4$ pero que la suma no es directa.

Ejercicio 18

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Sean

a) $\mathbf{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 = 0 \right\}$ $\mathbf{W} = \left\langle (1,-1,2), (2,1,1) \right\rangle$ subespacios de **V**. Mostrar que $\mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbb{R}^3$ pero la suma no es directa.

b) $\mathbf{U} = \left\langle (1,-1,2), (2,1,1) \right\rangle$ y **W** el conjunto de soluciones del sistema $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

Mostrar que $\mathbb{R}^3 = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$.

Ejercicio 19

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times2}$. Sean $\mathbf{U} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ b & b \end{bmatrix} \Big/ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ y $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a \\ 0 & -a \end{bmatrix} \Big/ a \in \mathbb{R} \right\}$ subespacios de **V**.

a) Mostrar que la suma $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ es directa.

b) Dar bases de **U**; **W** y de $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

Ejercicio 20

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times2}$. Sean $\mathbf{U} = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & -a \\ b & c \end{bmatrix} \Big/ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ y $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \Big/ a \in \mathbb{R} \right\}$ subespacios de **V**.

c) Mostrar que la suma $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ es directa.

d) Dar bases de **U**; **W** y de $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

Ejercicio 21

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Sean $\mathbf{U} = \left\langle (2,2,-1), \ (-1,2,2) \right\rangle$ y $\mathbf{W} = \left\langle (2,-1,2), \ (1,0,1) \right\rangle$ subespacios de **V**.

a) Teniendo en cuenta consideraciones de carácter geométrico, justifique que la suma de **U** y **W** no es directa.

b) Determine las dimensiones de $\mathbf{U}$; $\mathbf{W}$ y de $\mathbf{U}+\mathbf{W}$.

c) Muestre que $\mathbf{U}+\mathbf{W}=\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 22

En cada uno de los siguientes casos, dar dos subespacios complementarios del subespacio dado.

a) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$ $\quad \mathbf{W}=\langle (2,1,5,3),\ (0,-1,3,5)\rangle$.

b) $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ $\quad \mathbf{W}=\langle (1,1,0),\ (0,1,1)\rangle$.

Ejercicio 23

Sea **V** un espacio vectorial dimensión 3. Sea $\mathbf{B}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$ una base ordenada de **V**. Se pide:

a) Dar los vectores de coordenada, respecto a la base **B** de los siguientes vectores

$$\mathbf{u}_1=2\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+2\mathbf{v}_3;\quad \mathbf{u}_2=-\mathbf{v}_1+4\mathbf{v}_2;\quad \mathbf{u}_3=\bar{\mathbf{0}}$$

b) Si $[\mathbf{w}_1]_{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$; $[\mathbf{w}_2]_{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}2\\-1\\8\end{bmatrix}$; $[\mathbf{w}_3]_{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ dar $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ y $\mathbf{w}_3$.

c) Calcular $[\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2]_{\mathbf{B}}$; $[2\mathbf{w}_2]_{\mathbf{B}}$; $[\mathbf{w}_1-3\mathbf{w}_2+4\mathbf{w}_3]_{\mathbf{B}}$.

Ejercicio 24

Sea $\mathbf{V}=\mathbf{P}_2$ y sea $\mathbf{B}=(1,\ 1+X,\ 1+X^2)$ base ordenada de **V**. Sean

$$\mathbf{p}_1=2-3X+5X^2;\quad \mathbf{p}_2=3+X+X^2;\quad \mathbf{p}_3=2\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2;\quad \mathbf{p}_4=\bar{\mathbf{0}};\quad \mathbf{p}_5=1+X$$

Se pide:

a) Dar los vectores coordenados de: $\mathbf{p}_1$; $\mathbf{p}_2$; $\mathbf{p}_3$; $\mathbf{p}_4$ y $\mathbf{p}_5$ con respecto a la base **B**.

b) Dar los vectores coordenados de: $\mathbf{p}_1$; $\mathbf{p}_2$; $\mathbf{p}_3$; $\mathbf{p}_4$ y $\mathbf{p}_5$ con respecto a la base $\mathbf{B'}=(1,X,X^2)$.

c) Dar los vectores coordenados de: $\mathbf{p}_1$; $\mathbf{p}_2$; $\mathbf{p}_3$; $\mathbf{p}_4$ y $\mathbf{p}_5$ con respecto a la base $\mathbf{B''}=(1-X^2,\ X-X^2,\ 2-2X+X^2)$.

d) Si $\left[\mathbf{q_1}\right]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$; $\left[\mathbf{q}_2\right]_{\mathbf{B'}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\left[\mathbf{q}_3\right]_{\mathbf{B''}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ dar $\mathbf{q}_1$; $\mathbf{q}_2$ y $\mathbf{q}_3$.

Ejercicio 25

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ y sean las siguientes bases ordenadas de **V**

$$\mathbf{B}_1 = \big((1,1,0,0),\ (1,-1,0,0),\ (0,0,1,-1),\ (0,0,1,1)\big)$$
$$\mathbf{B}_2 = \big((0,0,0,1),\ (0,1,0,0),\ (1,0,0,0),\ (0,0,1,0)\big)$$
$$\mathbf{B}_3 = \text{ base canónica}$$

a) Dar los vectores coordenados, respecto a cada una de las bases, de los siguientes vectores:

$(3,1,2,0)$; $(0,0,1,1)$; $(0,0,0,0)$; $(4,-5,1,5)$

b) Hallar los respectivos vectores $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tales que

$$\left[\mathbf{v}_1\right]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix};\quad \left[\mathbf{v_2}\right]_{\mathbf{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix};\quad \left[\mathbf{v_3}\right]_{\mathbf{B}_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 26

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

a) Si $\mathbf{W} = \langle f_1,\ f_2 \rangle$ es el subespacio generado por las funciones definidas por:

$$f_1(x) = sen(x) \qquad f_2(x) = cos(x)$$

Probar que (f_1, f_2) es una base de **W** y dar los vectores de coordenadas de las siguientes funciones:

$$h_1 : x \to 2\ sen(x) + 3\ cos(x)$$
$$h_2 : x \to cos\left(x + \pi/2\right)$$
$$h_3 : x \to sen\left(x + \pi/4\right)$$

b) Sea $\mathbf{W'} = \langle g_1,\ g_2 \rangle$ el subespacio generado por las funciones definidas por:

$$g_1(x) = sen^2(x) \qquad g_2(x) = cos^2(x)$$

Probar que $\left(g_1, g_2\right)$ es una base de $\mathbf{W'}$ y dar el vector de coordenadas de la función $f : x \to cos(2x)$.

c) Teniendo en cuenta las bases hallas en los ítems a) y b) ¿cuál es la función cuyo vector de coordenadas en esta base es $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$?

Ejercicio 27

Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimensión dos. $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$ bases de $\mathbf{V}$. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 5\end{bmatrix}$ la matriz de cambio de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B'}$.

a) Si $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B'}} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, calcular $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$.

b) Si $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$, calcular $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B'}}$.

c) Si $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{B} = \left((1,1),\ (1,-1)\right)$ hallar la base $\mathbf{B'}$.

d) Si $\mathbf{V} = \mathbf{P}_1$ y $\mathbf{B} = \left(1 + X,\ -1 + X\right)$ hallar la base $\mathbf{B'}$.

Ejercicio 28

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$ y sean $\mathbf{B} = \left(1,\ 1 + X,\ 1 + X + X^2\right)$; $\mathbf{B'} = \left(X^2 + X + 1,\ X^2 - X - 2,\ X^2 + X - 1\right)$ bases de $\mathbf{V}$. Hallar la matriz $\mathbf{P}$ de cambio de base $\mathbf{B}$ a base $\mathbf{B'}$.

Ejercicio 29

Sean $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ y $\mathbf{B} = \left((1,1,1,1),\ (1,-1,1,1),\ (0,0,1,1),\ (0,0,1,-1)\right)$.

Si $\mathbf{P} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & 2\\1 & 0 & 1 & 0\\0 & 2 & 0 & 5\end{bmatrix}$ es la matriz de cambio de base $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B'}$, hallar la base $\mathbf{B'}$.

Ejercicio 30

Sean $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$ y sea $\mathbf{B} = \left(X^2, X, 1\right)$ base de V. Si $\mathbf{P} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & -2 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ es la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}_1$, hallar la base $\mathbf{B}_1$.

Ejercicio 31

Se define una matriz "en tablero de ajedrez" como una matriz cuadrada

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right] \text{ tal que } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j \text{ es par} \\ 0 & \text{si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$$

Encontrar el rango y la nulidad de las siguientes matrices "tablero de ajedrez":

a) 3×3 b) 4×4 c) $n \times n$

Ejercicio 32

Se define una matriz en **X** como una matriz cuadrada con un número impar de filas y de columnas. Con ceros en todas partes excepto en las dos diagonales, donde tiene unos.
Encontrar el rango y la nulidad de matrices en **X** a) 3×3 b) 5×5.

Ejercicio 33

Analice si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.
JUSTIFIQUE su respuesta (Esto es: si es verdadera demuéstrela y si es falsa de un contraejemplo o enuncie a qué teorema contradice).

a) Si en un conjunto de vectores linealmente dependientes se saca un vector, los vectores restantes son linealmente independientes.

b) Sean **U** y **W** subespacios de un vectorial **V**, $\mathbf{B_U}$ y $\mathbf{B_W}$ bases de los mismos. Entonces $\mathbf{B_U} \cup \mathbf{B_W}$ es una base de $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

c) Si la suma de dos subespacios **U** y **W** del mismo vectorial es directa entonces $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{\ \}$.

d) Sean **U** y **W** subespacios de un vectorial **V**. Entonces $\mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbf{U} \cup \mathbf{W}$.

e) Sean **U** y **W** subespacios de un vectorial **V**. Entonces $\mathbf{U} \cup \mathbf{W}$ es un subespacio.

f) Sea $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m \times p}$. El conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A.X} = \mathbf{0}$ es un subespacio de $\mathbf{K}^{p \times 1}$

g) Si **V** es un **K**-vectorial de dimensión *n*, entonces todo generador con *n* vectores es una base de **V**.

h) Sean **B** y **B'** bases de un espacio vectorial de dimensión *n* y **P** la matriz de cambio de base de **B** a **B'**. Entonces las filas de **P** son vectores linealmente independientes.

i) Si **V** es un espacio vectorial de dimensión finita y **U** un subespacio complementario del subespacio **W** entonces: $dim\,\mathbf{U} = dim\,\mathbf{V} - dim\,\mathbf{W}$.

1.11 Guía de Estudio

1) Defina **espacio vectorial**.

2) Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Demuestre que:

   - $-(-\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$.
   - Si $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

3) Defina **subespacio** de un **espacio vectorial.**

4) Muestre que si $\mathbf{W} = \{\text{combinaciones lineales de los vectores } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un subespacio. ¿A qué se llama **generador** del subespacio **W** ?.

5) Muestre que si $\mathbf{W} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$ y $\mathbf{v}_1$ es combinación lineal de $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r$ entonces $\mathbf{W} = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$.

6) Defina **Suma e Intersección de Subespacios**. Muestre que la suma de subespacios es un subespacio.

7) Defina vectores **Linealmente Independientes** y **Linealmente Dependientes**.

8) Muestre que si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ son linealmente dependientes entonces uno de ellos es combinación lineal de los demás.

9) Muestre que si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ son linealmente independientes todo $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$ se expresa como combinación lineal de ellos en una sola forma.

10) Muestre que si $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ y $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m \in \mathbf{V}$ con $m > n$ entonces $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ son linealmente dependientes.

11) Muestre que si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbf{V}$ son linealmente independientes y $\mathbf{u} \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$ entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}$ son linealmente independientes.

12) Defina **Base**, **Base ordenada** y **Dimensión** de un espacio vectorial.

13) Muestre que si $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ son subespacios del vectorial **V**, de dimensión finita, entonces $dim(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) = dim\,\mathbf{W}_1 + dim\,\mathbf{W}_2 - dim(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W})_2$.

14) Defina **Suma Directa.**

15) Muestre que $\mathbf{W_1 \oplus W_2} \Leftrightarrow \mathbf{W_1 \cap W_2 = \{\bar{0}\}}$.

16) Defina **Subespacios Complementarios.**

17) Defina **vector coordenado.**

18) Si **B** y **B'** son bases del vectorial de dimensión finita **V**, ¿Cómo se obtiene es la **matriz de cambio de base** de **B** a **B'**?.

2

Espacios con Producto Interno

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, los conceptos de longitud de un vector, distancia entre vectores, ángulo entre vectores y perpendicularidad, se expresan en forma conveniente mediante el **producto punto**. Estos mismos conceptos métricos pueden introducirse en cualquier espacio vectorial real a condición de que, en él, se defina un **producto interno** (también llamado **producto interior**), el cual asocia a cada par de vectores un número real, gozando de las mismas propiedades que caracterizan al producto punto.

2.1 Producto Interno

Definición 2.1.1. Sea **V** un espacio vectorial real. Diremos que **V** es un espacio con **producto interno** si se tiene una regla que asigne a cada par $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ de vectores de **V,** un número real, que denotaremos $(\mathbf{u}/\mathbf{v})$ de modo que se cumplan las siguientes propiedades:

1. Simetría $(\mathbf{u}/\mathbf{v}) = (\mathbf{v}/\mathbf{u})$.

2. Aditividad respecto de cada vector

$$((\mathbf{u}+\mathbf{u}')/\mathbf{v}) = (\mathbf{u}/\mathbf{v}) + (\mathbf{u}'/\mathbf{v})$$

$$(\mathbf{u}/(\mathbf{v}+\mathbf{v}')) = (\mathbf{u}/\mathbf{v}) + (\mathbf{u}/\mathbf{v}')$$

3. Homogeneidad respecto de cada vector

$$(k\,\mathbf{u}/\mathbf{v}) = k(\mathbf{u}/\mathbf{v})$$

$$(\mathbf{u}/k\,\mathbf{v}) = k(\mathbf{u}/\mathbf{v})$$

4. Positividad

$$(\mathbf{u}/\mathbf{u}) \geq 0$$

$$(\mathbf{u}/\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \bar{\mathbf{0}}$$

Para todos los $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}', \mathbf{v}' \in \mathbf{V}$ y para todos los $k \in \mathbf{K}$

Notación: $(\mathbf{V}, /)$ denotará a un espacio vectorial real **V** con **producto interno.**

Las propiedades (2) y (3) dicen que un producto interno es lineal con respecto a cada uno de los vectores. Este hecho se expresa diciendo que es **bilineal.**

Un producto interno puede describirse como una función

$$\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\ \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})\ \to(\mathbf{u}/\mathbf{v})$$

que tiene las propiedades de **simetría, bilinealidad** y **positividad**.

Ejemplos

Ejemplo 1

$\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con el **producto punto** son espacios con producto interno. Más generalmente, el "producto punto" puede definirse en $\mathbb{R}^n$.

Sean $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$; $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ se define

$$(\mathbf{x}/\mathbf{y})=\mathbf{x}\,.\,\mathbf{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

A este producto interno se lo llama usualmente **producto interno euclideano, canónico o estándar** en $\mathbb{R}^n$.

La verificación de las propiedades de producto interno no presenta dificultad, por ello se recomienda como ejercicio.

Es posible definir otros productos internos en $\mathbb{R}^n$ ponderando sus términos de manera diferente. Sean $p_1,p_2,\ldots,p_n$ números reales positivos a los que denominaremos **pesos**, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$; $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$. La expresión

$$(\mathbf{x}/\mathbf{y})=p_1x_1y_1+p_2x_2y_2+\cdots+p_nx_ny_n$$

define un producto interno en $\mathbb{R}^n$ al cual se lo llama producto **interno euclideano pesado** o **ponderado**.

La verificación de las propiedades de producto interno no presenta dificultad, por ello se recomienda como ejercicio.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$ y sean $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$; $\mathbf{y}=(y_1,y_2)$ vectores. Un caso particular de producto interno pesado es el que se define a continuación:

$$(\mathbf{x}/\mathbf{y})=\left((x_1,x_2)/(y_1,y_2)\right)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+\frac{5}{4}x_2y_2$$

Las propiedades 1), 2) y 3) se verifican trivialmente. Mostraremos que se cumple la positividad.

$$(\mathbf{x}/\mathbf{x})=\left((x_1,x_2)/(x_1,x_2)\right)=x_1^2-2x_1x_2+\frac{5}{4}x_2^2=\underbrace{(x_1-x_2)^2+\frac{1}{4}x_2^2}_{\geq 0}$$

Esta última expresión no es nunca negativa (es una suma de cuadrados) y sólo se anula para $(x_1,x_2)=(0,0)$.

Ejemplo 3

Sea **V=** $\mathbb{R}^{2\times1}$ y sean $\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ vectores de **V**.

Definimos:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X}/\,\mathbf{Y}) &= \mathbf{X}^T \,.\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}.\mathbf{Y} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
&= x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + \frac{5}{4}x_2y_2
\end{aligned}$$

Como puede observarse, este ejemplo, es en esencia igual al anterior identificando $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^{2\times1}$ en la forma natural.

Ejemplo 4

Puede mostrarse que el producto interior euclideano y el producto interior euclideano ponderado son casos especiales de una clase general de productos internos sobre $\mathbb{R}^n$.

Partiendo de la identificación de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{n\times1}$. El producto punto entre dos vectores de $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{x}\,.\,\mathbf{y}$ corresponde al producto matricial $\mathbf{X}^T\,.\,\mathbf{Y}$ de sus representaciones como matrices columna.

Sean $\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ vectores de $\mathbb{R}^{n\times1}$ y sea **A** una matriz $n\times n$ inversible. Entonces la fórmula $\mathbf{X}/\mathbf{Y} = (\mathbf{AX})^T\,\mathbf{AY} = \mathbf{X}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\,\mathbf{Y}$ define un producto interno en $\mathbb{R}^n$ generado por la matriz **A**.

En particular:

a) Si $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ **= I** (matriz unidad), luego el producto interno resultante es el estándar.

b) Si $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ el producto interno resultante es

$$\mathbf{X}/\ \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$$

se observa que corresponde a la forma de un producto interno euclideano ponderado con pesos $p_1 = 3$ y $p_2 = 2$.

Ejemplo 5

Sea el vectorial $\mathbf{V} = \mathbf{C}[a,b] = \{ f \ / \ f \text{ es continua en el intervalo } [a,b] \}$. Definimos:

$$(f/g) = \int_a^b f(x).g(x)\ dx$$

Las propiedades 1), 2) y 3) se verifican como consecuencia de las propiedades de la integral definida. Veamos que se cumple la positividad:

$$(f/f) = \int_a^b f(x).f(x)\ dx = \int_a^b f^2(x)\ dx \geq 0$$

Teniendo presente que si $h \in \mathbf{C}[a,b], h \geq 0$ en $[a,b]$ y $\int_a^b h(t)\ dt = 0,$ entonces $h = 0$ en $[a,b]$

se verifica entonces la propiedad.

Este producto constituye el producto interno estándar o canónico del espacio $\mathbf{C}[a,b]$.

Ejemplo 6

Sea **V** un espacio vectorial de dimensión finita, con base **B,** ponemos definir:

$$(\mathbf{u}/\mathbf{v}) = (\mathbf{u})_\mathbf{B}.(\mathbf{v})_\mathbf{B} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

es decir, el producto interior de dos vectores se define por el producto punto de sus n-uplas de coordenadas respecto de la base **B**.

Equivalentemente, puede escribirse: $(\mathbf{u}/\mathbf{v}) = [\mathbf{u}]_\mathbf{B}^T.[\mathbf{v}]_\mathbf{B}$ (producto matricial del vector de coordenadas de **u** transpuesto, por el vector de coordenadas de **v**).

Tendiendo en cuenta lo antes mencionado:

- Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\mathbf{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ es una base de **V**. Si se consideran $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ resulta:

$$\mathbf{(A/B)} = \mathbf{(A)_B.(B)_B} = \mathbf{(}a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}\mathbf{).(}b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}\mathbf{)} = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} b_{ij} \ .$$

- Sea $\mathbf{V = P}_2$. Considerando $\mathbf{p} = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ y $\mathbf{q} = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$ y las bases:

$\mathbf{B} = \left(1, X, X^2\right)$. Resulta: $\mathbf{(p/q)} = \mathbf{(p)_B.(q)_B} = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$.

$\mathbf{B'} = \left(1 + X, 1 - X, X^2\right)$. Resulta: $\mathbf{(p/q)} = \mathbf{(p)_{B'}.(q)_{B'}} = \frac{1}{2} a_0 b_0 + \frac{1}{2} a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Observación: En un espacio vectorial pueden definirse muchos productos internos. En particular en $\mathbb{R}^n$ pueden definirse productos internos distintos del producto punto y en $\mathbf{V = C}[a,b]$ productos internos distintos del definido por la integral.

Pero, al resolver problemas en $\mathbb{R}^n$ o en $\mathbf{V = C}[a,b]$, salvo expresa indicación en contrario, se supondrá que el producto interno es el canónico.

En todos los demás casos habrá que aclarar cuál es el producto interno considerado.

2.2 Definiciones Métricas

En cualquier espacio vectorial real **V** con producto interno se pueden definir **longitud** de un vector, **distancia** entre vectores, **ortogonalidad** y **proyección** de un vector sobre otro, mediante expresiones análogas a las obtenidas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ por medio del producto punto.

Definición 2.2.1. Sea $\left(\mathbf{V}, /\right)$ un espacio vectorial real con producto interno.
Se llama **norma, módulo o longitud** de $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ y se denota $\|\mathbf{u}\|$ al número $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{(u/u)}}$.
Además, diremos que $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ es un **vector unitario** sí y sólo si $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Observación: La positividad del producto interior garantiza que la longitud de cualquier vector esté siempre definida.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico y sea $\mathbf{v} = \mathbf{(}1, 2, -1, 0\mathbf{)}$. Se quiere hallar un vector unitario **u** paralelo a **v** ($\mathbf{u} = k\mathbf{v}$ con $k \in \mathbb{R}$).

Calculamos $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{((1,2,-1,0)\mathbf{.}(1,2,-1,0))} = \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{6}$, luego para obtener lo pedido planteamos

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{v} = \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{v} = \frac{\sqrt{6}}{6}(1,2,-1,0) = \left(\tfrac{\sqrt{6}}{6}, \tfrac{\sqrt{6}}{3}, -\tfrac{\sqrt{6}}{6}, 0\right).$$

Para verificar que **u** es un vector unitario, basta con probar que $\|\mathbf{u}\|^2 = 1$.

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \left(\tfrac{\sqrt{6}}{6}, \tfrac{\sqrt{6}}{3}, -\tfrac{\sqrt{6}}{6}, 0\right)\mathbf{.}\left(\tfrac{\sqrt{6}}{6}, \tfrac{\sqrt{6}}{3}, -\tfrac{\sqrt{6}}{6}, 0\right) = \left(\tfrac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(-\tfrac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + 0^2 = \tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{6} = 1.$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$ con el producto interno definido por:

$$\mathbf{(p/q)} = \mathbf{(p)_B.(q)_B} = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 \text{ donde } \mathbf{B} = \left(1, X, X^2\right)$$

Sea $\mathbf{p} = 1 + 2X - 2X^2$. Se quiere calcular la longitud del vector **p**.

$$\|\mathbf{p}\|^2 = \mathbf{(p/p)} = \mathbf{(p)_B.(p)_B} = 1 + 2^2 + (-2)^2 = 9 \text{ luego } \|\mathbf{p}\| = \sqrt{9} = 3.$$

> **Definición 2.2.2.** Sea $(\mathbf{V}, /)$ un espacio vectorial real con producto interno. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, se define la **distancia** de **u** a **v**, y se denota $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, al número
> $$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico y sean $\mathbf{u} = (3,2,-1,1)$ y $\mathbf{v} = (1,2,-1,0)$. Se quiere hallar la **distancia** de **u** a **v**, para ello planteamos

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = d\left((3,2,-1,1),(1,2,-1,0)\right) = \|(3,2,-1,1)-(1,2,-1,0)\| = \|(2,0,0,1)\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}.$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{C}[0,1] = \{f \ / \ f \text{ es continua en el intervalo } [0,1]\}$ con el producto interno definido por: $(f/g) = \int_0^1 f(x).g(x)\, dx$. Sean $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ elementos de **V**. Se quiere hallar la **distancia** de *f* a *g*, para ello planteamos primero $d^2(f,g) = \|f(x) - g(x)\|^2$

$$\|x - x^2\|^2 = \int_0^1 \left(x - x^2\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - 2x^3 + x^4\right) dx = \left[\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{2} + \tfrac{x^5}{5}\right]_0^1 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{30}$$

Luego $d(f,g) = \sqrt{\frac{1}{30}} = \frac{\sqrt{30}}{30}$.

Definición 2.2.3. Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial real con producto interno. Sean $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, se dice que **u** es **ortogonal** o perpendicular a **v**, y denotamos $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$, sí y sólo si $(\mathbf{u}/\mathbf{v})=0$.

Definición 2.2.4. Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial real con producto interno. Sean $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$. Si $\mathbf{v}\neq\overline{\mathbf{0}}$, se define la **proyección de u sobre v** y se denota $proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ al vector $proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}=\dfrac{(\mathbf{u}/\mathbf{v})}{(\mathbf{v}/\mathbf{v})}\mathbf{v}$.

Además, el vector $\mathbf{u}-proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ se denomina la **componente de u ortogonal a v**.

Ejemplos

Ejemplo 1

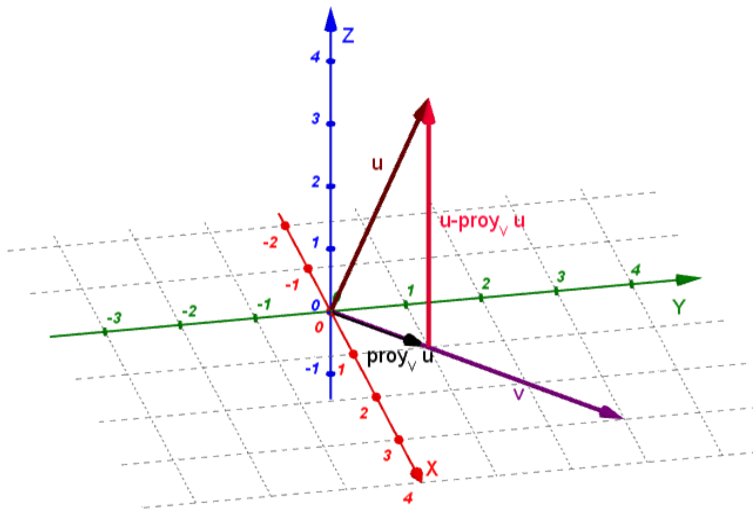
Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico y sean $\mathbf{u}=(1,1,4)$ y $\mathbf{v}=(3,3,0)$. Se quiere hallar la **proyección** de **u** sobre **v y** la **componente de u ortogonal a v**, para ello planteamos

- **Proyección** de $\mathbf{u}=(1,1,4)$ sobre $\mathbf{v}=(3,3,0)$**:**

$$\mathbf{u}_1=proy_{(3,3,0)}(1,1,4)=\frac{\big((1,1,4)/(3,3,0)\big)}{\big((3,3,0)/(3,3,0)\big)}(3,3,0)=\frac{6}{18}(3,3,0)=\frac{1}{3}(3,3,0)=(1,1,0).$$

- **Componente** de $\mathbf{u}=(1,1,4)$ **ortogonal a** $\mathbf{v}=(3,3,0)$**:**

$\mathbf{u}_2=(1,1,4)-proy_{(3,3,0)}(1,1,4)=(1,1,4)-(1,1,0)=(0,0,4)$. Se verifica que $\mathbf{u}_1\perp\mathbf{u}_2$:



Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico y sean $\mathbf{u}=(3,2,-1,1)$ y $\mathbf{v}=(1,2,-1,0)$. Se quiere hallar la **proyección** de **u** sobre **v y** la **componente de u ortogonal a v**, para ello planteamos

- **Proyección** de $\mathbf{u}=(3,2,-1,1)$ sobre $\mathbf{v}=(1,2,-1,0)$**:**

$$\mathbf{u}_1 = proy_{(1,2,-1,0)}(3,2,-1,1)=\frac{\big((3,2,-1,1)/(1,2,-1,0)\big)}{\big((1,2,-1,0)/(1,2,-1,0)\big)}(1,2,-1,0)=\frac{8}{6}(1,2,-1,0)=\frac{4}{3}(1,2,-1,0)$$

.

- **Componente** de $\mathbf{u}=(3,2,-1,1)$ **ortogonal a** $\mathbf{v}=(1,2,-1,0)$**:**

$$\mathbf{u}_2=(3,2,-1,1)-proy_{(1,2,-1,0)}(3,2,-1,1)=(3,2,-1,1)-\frac{4}{3}(1,2,-1,0)=\frac{1}{3}(5,-2,1,3).$$

- Para verificar, analizaremos si $\mathbf{u}_1\perp\mathbf{u}_2$:

$$\left(\mathbf{u}_1/\mathbf{u}_2\right)=\left(\frac{4}{3}(1,2,-1,0)\Big/\frac{1}{3}(5,-2,1,3)\right)=\frac{4}{9}\big((1,2,-1,0)/(5,-2,1,3)\big)=\frac{4}{9}(5-4-1+0)=0.$$

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V}=\mathbf{C}[0,1]=\{f\ /\ f\ \text{ es continua en el intervalo}\,[0,1]\}$ con el producto interno definido por: $(f/g)=\int_0^1 f(x).g(x)\,dx$. Sean $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$ elementos de **V**.

Se quiere hallar la **proyección** de *f* sobre *g* y la **componente de *f* ortogonal a** *g*. Planteamos:

- **Proyección** de $f(x)=x$ sobre $g(x)=x^2$**:**

$$f_1=proy_{x^2}\ x=\frac{\left(x/x^2\right)}{\left(x^2/x^2\right)}x^2=\frac{\int_0^1 x.x^2dx}{\int_0^1 x^2.x^2dx}x^2=\frac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1}{\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1}x^2=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}}x^2=\frac{5}{4}x^2.$$

- **Componente** de $f(x)=x$ **ortogonal a** $g(x)=x^2$**:** $\qquad f_2=x-proy_{x^2}\ x=x-\frac{5}{4}x^2.$

- Para verificar, analizaremos si $\mathbf{u}_1\perp\mathbf{u}_2$:

$$\left(f_1/f_2\right)=\left(\frac{5}{3}x^2\Big/x-\frac{5}{4}x^2\right)=\int_0^1\tfrac{5}{3}x^2.\left(x-\tfrac{5}{4}x^2\right)dx=\left[\tfrac{5x^4}{12}\right]_0^1-\left[\tfrac{5x^5}{12}\right]_0^1=\tfrac{5}{12}-\tfrac{5}{12}=0$$

Definición 2.2.5. Sea $(\mathbf{V}, /)$ un espacio vectorial real con producto interno. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Si $\mathbf{u} \neq \bar{\mathbf{0}}$ y $\mathbf{v} \neq \bar{\mathbf{0}}$, se define el ángulo entre **u** y **v** como el único número real $\alpha \in [0, \pi]$ tal que: $\mathbf{cos}\,\alpha = \dfrac{\mathbf{(u/v)}}{\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|}$.

Observación: La expresión $\dfrac{\mathbf{(u/v)}}{\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|}$ puede calcularse cualesquiera sean los vectores **u** y **v** no nulos. Sin embargo, para poder considerar a este resultado como el coseno de un ángulo, es necesario que el valor de este cociente esté comprendido entre –1 y 1, condición que está garantizada por la desigualdad de **Cauchy-Schwartz** que enunciaremos y demostraremos más adelante.

2.3 Consecuencias de la Definición

De las definiciones métricas precedentes resultan inmediatas las siguientes propiedades:

Teorema 2.3.1. Sea $(\mathbf{V}, /)$ un espacio vectorial real con producto interno. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ elementos de $\mathbf{V}$ y $k \in \mathbb{R}$. Se verifica:

a) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ con $\|\mathbf{u}\| = 0 \iff \mathbf{u} = \bar{\mathbf{0}}$.

b) $\|k\,\mathbf{u}\| = |k|.\|\mathbf{u}\|$ y en consecuencia $\|\mathbf{-u}\| = \|\mathbf{u}\|$.

c) Si $\mathbf{u} \neq \bar{\mathbf{0}}$ entonces existen dos únicos vectores unitarios paralelos a $\mathbf{u}$.

d) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$ con $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{v}$.

e) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

f) $d(k\,\mathbf{u}, k\,\mathbf{v}) = |k|\; d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

g) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{u+w}, \mathbf{v+w})$.

Demostración:

a) Por la positividad del producto interno $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{(u/u)} \geq 0$. Luego $\|\mathbf{u}\| = \mathbf{(u/u)} = 0 \iff \mathbf{u} = \bar{\mathbf{0}}$.

b) Teniendo en cuenta la definición de norma y las propiedades del producto interno, se tiene que $\|k\,\mathbf{u}\|^2 = (k\,\mathbf{u}/\,k\,\mathbf{u}) = k^2\mathbf{(u/u)} = k^2\,\|\mathbf{u}\|^2$. Luego $\|k\,\mathbf{u}\| = |k|.\|\mathbf{u}\|$, verificándose en consecuencia que el vector **u** y su opuesto tiene igual longitud.

c), d) y *e)* La prueba queda como ejercicio.

f) Teniendo en cuenta la definición de norma y las propiedades del producto interior, planteamos $d^2(k\,\mathbf{u}, k\,\mathbf{v}) = \|k\,\mathbf{u} - k\,\mathbf{v}\|^2 = \|k\mathbf{(u-v)}\|^2 = k^2\,\|\mathbf{(u-v)}\|^2 = k^2\; d^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Luego $d(k\,\mathbf{u},k\,\mathbf{v})=|k|\,d(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

g) Teniendo en cuenta la definición de distancia y las propiedades del producto interno, se tiene que $d^2(\mathbf{u},\mathbf{v})=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}+\mathbf{w}-\mathbf{w}-\mathbf{v}\|^2=\|(\mathbf{u}+\mathbf{w})-(\mathbf{v}+\mathbf{w})\|^2=d^2(\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w})$. #

Teorema 2.3.2. Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial real con producto interno.

Si $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}_1,\ \mathbf{u}\perp\mathbf{v}_2,\ \dots\ ,\mathbf{u}\perp\mathbf{v}_r$ y $\mathbf{v}\in\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_r\rangle$ entonces $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$.

Demostración:

Si $\mathbf{v}\in\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_r\rangle$ entonces $\mathbf{v}=\alpha_1\,\mathbf{v}_1+\alpha_2\,\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_r\,\mathbf{v}_r=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\,\mathbf{v}_i$. Luego

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}/\mathbf{u})&=\left(\alpha_1\,\mathbf{v}_1+\alpha_2\,\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_r\,\mathbf{v}_r/\mathbf{u}\right)\\&=\alpha_1(\mathbf{v}_1/\mathbf{u})+\alpha_2(\mathbf{v}_2/\mathbf{u})+\cdots+\alpha_r(\mathbf{v}_r/\mathbf{u})=0\end{aligned}$$

y en consecuencia $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$.#

Nota: Expresamos el hecho que **u** sea ortogonal a todo vector del subespacio $\mathbf{W}=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_r\rangle$ diciendo simplemente que **u** es ortogonal a **W** y lo denotamos $\mathbf{u}\perp\mathbf{W}$.

El siguiente teorema muestra que la proyección de **u** sobre **v** tiene las propiedades que caracterizan al vector proyección ortogonal definido en el plano o el espacio.

Teorema 2.3.3. Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial real con producto interno. Sean **u** y **v** elementos de **V**. Si $\mathbf{v}\neq\overline{\mathbf{0}}$ y $\mathbf{W}=\langle\mathbf{v}\rangle$ entonces:

1) $(\mathbf{u}-proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u})\perp\mathbf{W}$ en otras palabras: $(\mathbf{u}-proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u})\perp\mathbf{v}$.

2) $\mathbf{u}=k\,\mathbf{v}+\mathbf{w}'$ con $\mathbf{w}'\perp\mathbf{v}$ y $k\,\mathbf{v}=proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$

Demostración:

1) Se verifica que $(\mathbf{u}-proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u})\perp\mathbf{v}$ pues:

$$\left((\mathbf{u}-proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u})/\mathbf{v}\right)=\left(\left(\mathbf{u}-\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v})}{(\mathbf{v}/\mathbf{v})}\mathbf{v}\right)\Big/\mathbf{v}\right)=(\mathbf{u}/\mathbf{v})-\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v})}{(\mathbf{v}/\mathbf{v})}(\mathbf{v}/\mathbf{v})=0\,.$$

2) $\mathbf{u}=\mathbf{u}-proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}+proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}=proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}+\left(\mathbf{u}-proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}\right)$

Luego $\mathbf{u} = \underbrace{\frac{(\mathbf{u/v})}{(\mathbf{v/v})}}_{=k}\mathbf{v} + \underbrace{\left(\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u/v})}{(\mathbf{v/v})}\mathbf{v}\right)}_{\substack{\text{por ítem 1)} \\ \text{es ortogonal a } \mathbf{v}}} = k\,\mathbf{v} + \mathbf{w'}$ con $\mathbf{w'} = \left(\mathbf{u} - proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u}\right) \perp \mathbf{v}$ y $k\,\mathbf{v} = proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u}$.

Acabamos de probar que todo vector de **V** se expresa en forma única como la suma de un vector paralelo a **v** y un vector ortogonal a **v**. #

2.4 Desigualdad de Cauchy-Schwarz, Desigualdad del Triágulo y Teorema de Pitágoras Generalizado.

Se ha visto que en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, el ángulo α entre vectores **u** y **v** no nulos, se expresa, a través de su coseno, por la fórmula: $\mathbf{cos}(\alpha) = \frac{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|}$.

En cualquier espacio vectorial real con producto interior, puede calcularse la expresión $\frac{(\mathbf{u/v})}{\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|}$ para vectores **u** y **v** arbitrarios no nulos. No obstante, como ya se observó en la **Definición 2.2.5.**, para poder interpretar el resultado como el coseno de un ángulo es necesario que el valor numérico que resulte esté comprendido entre –1 y 1. Esta condición queda garantizada por el siguiente Teorema.

Teorema 2.4.1. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Sea $(\mathrm{V},/)$ un espacio vectorial real con producto interno. Si: **u** y **v** son vectores **V** entonces:

1) $|(\mathbf{u/v})| \leq \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|$.

2) $|(\mathbf{u/v})| = \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|$ sí y sólo si **u** y **v** son linealmente dependientes.

Demostración:

1) Si $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{0}}$, entonces $\|\mathbf{v}\| = 0$ y en consecuencia $(\mathbf{u/v}) = 0$, luego se verifica 1). Ahora supongamos que $\mathbf{v} \neq \bar{\mathbf{0}}$. Consideremos el vector $proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u/v})}{(\mathbf{v/v})}\mathbf{v}$ y planteemos:

$$\|\mathbf{u} - proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u}\|^2 = \left(\left(\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u/v})}{(\mathbf{v/v})}\mathbf{v}\right) \Big/ \left(\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u/v})}{(\mathbf{v/v})}\mathbf{v}\right)\right) = \left(\mathbf{u} \Big/ \left(\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u/v})}{(\mathbf{v/v})}\mathbf{v}\right)\right) - \left(\frac{(\mathbf{u/v})}{(\mathbf{v/v})}\mathbf{v} \Big/ \left(\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u/v})}{(\mathbf{v/v})}\mathbf{v}\right)\right)$$

$$= (\mathbf{u}/\mathbf{u}) - \left(\mathbf{u} \Big/ \frac{(\mathbf{u/v})}{(\mathbf{v/v})}\mathbf{v} \right) \quad \text{pues } 0 = \left(\frac{(\mathbf{u/v})}{(\mathbf{v/v})}\mathbf{v} \Big/ \left(\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u/v})}{(\mathbf{v/v})}\mathbf{v} \right) \right)$$

$$= (\mathbf{u}/\mathbf{u}) - \frac{(\mathbf{u/v})}{(\mathbf{v/v})}(\mathbf{u}/\mathbf{v}) = (\mathbf{u}/\mathbf{u}) - \frac{(\mathbf{u/v})^2}{(\mathbf{v/v})}$$

Luego $0 \le \|\mathbf{u} - proy_{\mathrm{v}}\, \mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{u/u}) - \dfrac{(\mathbf{u/v})^2}{(\mathbf{v/v})}$ y por lo tanto

$$0 \le \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{(\mathbf{u/v})^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{u/v})^2 \le \|\mathbf{u}\|^2 . \|\mathbf{v}\|^2 \quad \Rightarrow \quad |(\mathbf{u/v})| \le \|\mathbf{u}\| . \|\mathbf{v}\|$$

2) Si **u** o **v** son nulos la afirmación ve verifica trivialmente. Supongamos entonces que no lo son:

$\Rightarrow$**)** Si $|(\mathbf{u/v})| = \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|$ resulta $\|\mathbf{u} - proy_{\mathrm{v}}\, \mathbf{u}\|^2 = 0$. Luego $\mathbf{u} = proy_{\mathrm{v}}\, \mathbf{u}$ por lo que **u** es un múltiplo de **v**, es decir $\mathbf{u} = k.\mathbf{v}$ y por lo tanto $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente dependientes.

$\Leftarrow$**)** Recíprocamente, si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente dependientes, podemos pensar que $\mathbf{u} = k\,\mathbf{v}$. Luego

$$\left.\begin{array}{l} |(\mathbf{u/v})| = |(k\,\mathbf{v/v})| = |k|\|\mathbf{v}\|^2 \\ \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\| = \|k\,\mathbf{v}\|.\|\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow |(\mathbf{u/v})| = \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\| \qquad \#$$

Observación: La desigualdad de Cauchy-Schwarz garantiza que los valores que se obtienen por esta fórmula están comprendidos entre –1 y 1, esto es $-1 \le \dfrac{(\mathbf{u/v})}{\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|} \le 1$.

Luego, si α es un ángulo cuya medida en radianes varía de 0 a π, entonces $\cos(\alpha)$ asume todos los valores entre –1 y 1 (inclusive) exactamente una vez. Luego existe un ángulo α único, tal que

$$\mathbf{cos}(\alpha) = \frac{(\mathbf{u/\,v})}{\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|} \text{ con } 0 \le \alpha \le \pi \ .$$

Se define α como **el ángulo entre** los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Se denotará $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v})$.

Si $(\mathbf{u/v}) = 0$ resulta $\alpha = \frac{\pi}{2}$, es decir que, si dos vectores no nulos son ortogonales, el ángulo que definen es recto.

Haciendo uso del producto interno, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el concepto de ortogonalidad, es posible generalizar a espacios vectoriales generales algunos importantes teoremas de la Geometría Elemental, entre ellos la relación de longitudes de los lados de un triángulo que expresa que un lado es menor o a lo sumo igual que la suma de los otros dos y el teorema de Pitágoras referido a los lados de un triángulo rectángulo.

Teorema 2.4.2. (Desigualdad del Triángulo) Sea $(\mathbf{V}, /)$ un espacio vectorial real con producto interno. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores $\mathbf{V}$ entonces: $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$

Además: $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$ si y solo si $\mathbf{u}=k.\mathbf{v}$ o $\mathbf{v}=k.\mathbf{u}$ con $k \ge 0$

Demostración:

Si uno de los vectores es $\bar{\mathbf{0}}$, el teorema se verifica trivialmente.
Suponemos que $\mathbf{u} \ne \bar{\mathbf{0}}$; $\mathbf{v} \ne \bar{\mathbf{0}}$ y planteamos

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \left((\mathbf{u}+\mathbf{v})/(\mathbf{u}+\mathbf{v})\right) = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}/\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 \qquad (1)$$

Teniendo en cuenta que: $(\mathbf{u}/\mathbf{v}) \le |(\mathbf{u}/\mathbf{v})| \le \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|$ y reemplazando convenientemente en (1) resulta:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 \le \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = \left(\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|\right)^2$$

de donde se obtiene: $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ como queríamos demostrar.

Analicemos ahora el “además”.

Para que $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ se requiere el cumplimiento de las condiciones de igualdad de la expresión $(\mathbf{u}/\mathbf{v}) \le |(\mathbf{u}/\mathbf{v})| \le \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|$, es decir:

$$a)\ (\mathbf{u}/\mathbf{v}) = |(\mathbf{u}/\mathbf{v})| \iff (\mathbf{u}/\mathbf{v}) \ge 0 \qquad\qquad b)\ |(\mathbf{u}/\mathbf{v})| = \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\| \iff (\mathbf{u}=k.\mathbf{v}) \ \text{ o } \ (\mathbf{v}=k.\mathbf{u})$$

Supongamos que $\mathbf{v}=k.\mathbf{u}$; entonces resulta: $0 \le (\mathbf{u}/\mathbf{v}) = (\mathbf{u}/k.\mathbf{u}) = k(\mathbf{u}/\mathbf{u})$ como $(\mathbf{u}/\mathbf{u})$ es positivo: $k.(\mathbf{u}/\mathbf{u}) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad k \ge 0$.

Recíprocamente: si $\mathbf{v}=k.\mathbf{u}$ y $k \ge 0$ se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}+k.\mathbf{u}\| = |1+k|.\|\mathbf{u}\| \underset{\text{por ser } k\ge 0}{=} (1+k)\|\mathbf{u}\| \\ \\ \|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|+\|k\,\mathbf{u}\| = \left(1+|k|\right).\|\mathbf{u}\| \underset{\text{por ser } k\ge 0}{=} (1+k)\|\mathbf{u}\| \end{array}\right\} \text{Por lo tanto: } \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\| \quad \#$$

Teorema 2.4.3. (Teorema de Pitágoras Generalizado) Sea $(\mathbf{V}, /)$ un espacio vectorial real con producto interno. Si $\mathbf{u}\ y\ \mathbf{v}$ son vectores ortogonales en **V** entonces

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

Demostración:

Por hipótesis se tiene que los vectores $\mathbf{u}\ y\ \mathbf{v}$ son ortogonales, esto es $(\mathbf{u}/\mathbf{v}) = 0$. Planteamos

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})/(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\,(\mathbf{u}/\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\underbrace{(\mathbf{u}/\mathbf{v})}_{=0} + \|\mathbf{v}\|^2 .$$

Luego $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ que era lo que se quería demostrar. #

2.5 Conjuntos Ortogonales

Definición 2.5.1. Sea $(\mathbf{V}, /)$ un espacio vectorial con producto interno. Sea $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ un subconjunto de vectores no nulos. Diremos que **S** es un **conjunto ortogonal** si para todos los $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{S}$ se verifica: $(\mathbf{u}/\mathbf{v}) = 0$ siempre que $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

Si **S** es un conjunto ortogonal tal que: $(\mathbf{u}/\mathbf{u}) = 1$ para todos los $\mathbf{u} \in \mathbf{S}$, diremos que **S** es un **conjunto ortonormal**.

Observación: Un conjunto ortogonal está formado por vectores (no nulos) dos a dos ortogonales, mientras que un conjunto ortonormal es un conjunto ortogonal de vectores unitarios.

De la definición se desprende que, a partir de un conjunto ortogonal se obtiene un conjunto ortonormal reemplazando cada vector **u** por el vector $\dfrac{\mathbf{1}}{\|\mathbf{u}\|}.\mathbf{u}$. Este proceso se llama **normalización** y se dice que los vectores obtenidos están **normalizados**.

Si los vectores de una base de **V** forman un conjunto ortogonal decimos que es una **base ortogonal.** Si además los vectores son unitarios, decimos que la base es **ortonormal.**

Ejemplos

Ejemplo 1

Los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ forman un conjunto ortonormal para el producto punto o producto interno estándar.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$. Si $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ y se define el producto interno $(\mathbf{u}/\mathbf{v}) = u_1v_1+3\,u_2v_2$.
El conjunto $\{(1,0),\ (0,1)\}$ es una base ortogonal.
Pero No es ortonormal puesto que $\|(0,1)\|=\sqrt{3}$.
Normalizando se obtiene la base ortonormal $\left\{(1,0),\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico. El conjunto $\{(1,1,0,0),\ (0,0,2,0),\ (1,-1,0,3)\}$ claramente es ortogonal, pero No ortonormal.
Normalizando los vectores obtenemos el $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right), (0,0,1,0),\ \left(\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}},0,\frac{3}{\sqrt{11}}\right)\right\}$ que ahora es ortonormal.

Ejemplo 4

Sea $\mathbf{V}=\mathbf{C}[-1,1]=\{f\ /\ f \text{ es continua en el intervalo } [-1,1]\}$ con el producto interno definido por: $(f/g)=\int_{-1}^{1} f(x).g(x)\,dx$. Las funciones $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=x^2-\frac{1}{3}$ forman un conjunto ortogonal. Sin embargo, este conjunto no es ortonormal. En efecto

$$(f_1/f_2)=\int_{-1}^{1}1.x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1}=0 \qquad (f_1/f_3)=\int_{-1}^{1}1.\left(x^2-\frac{1}{3}x^2\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}x\right]_{-1}^{1}=0$$

$$(f_1/f_1)=\int_{-1}^{1}1.1\,dx=x\Big|_{-1}^{1}=2 \qquad (f_2/f_3)=\int_{-1}^{1}x.\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{6}\right]_{-1}^{1}=0$$

$$(f_2/f_2)=\int_{-1}^{1}x.x\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1}=\frac{2}{3} \qquad (f_3/f_3)=\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2dx=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2}{9}x^3+\frac{x}{9}\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{45}$$

El conjunto formado por las funciones $f_1'(x)=\frac{1}{2}$, $f_2'(x)=\frac{2}{3}x$, $f_3'(x)=\frac{8}{45}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$ resulta ortonormal.

2.5.1 Propiedades de los Conjuntos Ortogonales.

Teorema 2.5.1.1. Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial con producto interno. Si $\mathbf{S}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\}$ es un conjunto ortogonal y $\mathbf{W}=\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\rangle$ entonces se verifica que:

1) Los vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r$ son linealmente independientes.

2) Todo $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$ es suma de sus proyecciones sobre los vectores de **S**.

3) Para cualquier $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$, si $\mathbf{u}_1=\sum_{i=1}^{r}\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)}\mathbf{v}_i$ entonces el vector $\mathbf{u}_2=\mathbf{u}-\mathbf{u}_1$ es ortogonal a **W**.

Demostración:

1) Planteamos $x_1\,\mathbf{v}_1+\cdots+x_i\,\mathbf{v}_i+\cdots+x_r\,\mathbf{v}_r=\bar{\mathbf{0}}$.
Considerando el producto interno $(\mathbf{v}_i/(x_1\,\mathbf{v}_1+\cdots+x_i\,\mathbf{v}_i+\cdots+x_r\,\mathbf{v}_r))=0$ y operando convenientemente se tiene:

$$0=(\mathbf{v}_i/x_1\mathbf{v}_1)+\cdots+(\mathbf{v}_i/x_i\mathbf{v}_i)+\cdots+(\mathbf{v}_i/x_r\mathbf{v}_r)=x_1(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_1)+\cdots+x_i(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)+\cdots+x_r(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_r)$$

Como $(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_j)=0$ si $i\neq j$ resulta $x_j(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_j)=0$. Por ser $(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)\neq 0$ resulta $x_i=0$ para $i=1,2,...,r$.

2) Sea $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$, por lo tanto: $\mathbf{w}=y_1\,\mathbf{v}_1+\cdots+y_i\,\mathbf{v}_i+\cdots+y_r\,\mathbf{v}_r$. Realizando $(\mathbf{w}/\mathbf{v}_i)$ resulta:

$$(\mathbf{w}/\mathbf{v}_i)=y_1(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_i)+\cdots+y_i(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)+\cdots+y_r(\mathbf{v}_r/\mathbf{v}_i)$$

Por ser $\mathbf{S}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\}$ un conjunto ortogonal se tiene que $(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_j)=0$ si $i\neq j$. Por lo tanto

$$(\mathbf{w}/\mathbf{v}_i)=y_i(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)\ \Rightarrow\ y_i=\frac{(\mathbf{w}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)}\quad \text{para}\quad i=1,2,...,r$$

Luego se tiene que: $\mathbf{w}=\frac{(\mathbf{w}/\mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1+\cdots+\frac{(\mathbf{w}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)}\mathbf{v}_i+\cdots+\frac{(\mathbf{w}/\mathbf{v}_r)}{(\mathbf{v}_r/\mathbf{v}_r)}\mathbf{v}_r$.

Es decir que **w** es suma de sus proyecciones sobre los vectores del conjunto ortogonal **S** que genera a **W**.

3) Sea $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$. Consideramos $\mathbf{u}_2=\mathbf{u}-\mathbf{u}_1=\mathbf{u}-\left(\sum_{i=1}^{r}proy_{\mathbf{v}_i}\,\mathbf{u}\right)=\mathbf{u}-\sum_{i=1}^{r}\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)}\mathbf{v}_i$

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{u} - \left(\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1 + \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{v}_2/\mathbf{v}_2)}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)}\mathbf{v}_i + \cdots + \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_r)}{(\mathbf{v}_r/\mathbf{v}_r)}\mathbf{v}_r \right)$$

Para determinar que $\mathbf{u_2}$ es ortogonal a **W** basta probar que $\mathbf{u_2}$ es ortogonal a los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$. Realizando $(\mathbf{u}_2/\mathbf{v}_i)$ se tiene:

$$(\mathbf{u_2}/\mathbf{v}_i) = (\mathbf{u}/\mathbf{v}_i) - \left(\left(\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1 + \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{v}_2/\mathbf{v}_2)}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)}\mathbf{v}_i + \cdots + \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_r)}{(\mathbf{v}_r/\mathbf{v}_r)}\mathbf{v}_r \right) \Big/ \mathbf{v}_i \right) =$$

$$= (\mathbf{u}/\mathbf{v}_i) - \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_1)}(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_i) - \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{v}_2/\mathbf{v}_2)}(\mathbf{v}_2/\mathbf{v}_i) - \cdots - \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)}(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i) - \cdots - \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_r)}{(\mathbf{v}_r/\mathbf{v}_r)}(\mathbf{v}_r/\mathbf{v}_i) =$$

$$= (\mathbf{u}/\mathbf{v}_i) - \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)}(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i) = 0$$

Luego: $\mathbf{u_2} \perp \mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2, ..., r$ o sea $\mathbf{u_2} \perp \mathbf{W}$. #

Observaciones: El punto (1) que acabamos de demostrar, muestra que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$ forman una base ortogonal de **W.**

Por otro lado, lo demostrado en el punto (2) permite expresar fácilmente y en forma directa un vector de **W** como combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$.

Además, en el punto (3) demostramos que si se tiene $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ conjunto ortogonal, entonces cualquier vector $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ puede ser escrito como

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)}\mathbf{v}_i + \mathbf{u}_2 = proy_{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r \rangle}\mathbf{u} + \mathbf{u}_2 \quad \text{con } \mathrm{u}_2 \perp \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r \rangle .$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$. Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y el producto interno definido por $(\mathbf{u}/\mathbf{v}) = u_1 v_1 + 3\, u_2 v_2$. Se quiere expresar el vector $\mathbf{u} = (-1, 3)$ como combinación lineal de los vectores de la base ortogonal $\mathbf{B} = ((1,0), (0,1))$. Teniendo presente el resultado anterior, resulta:

$$(-1,3) = \frac{((-1,3)/(1,0))}{((1,0)/(1,0))}(1,0) + \frac{((-1,3)/(0,1))}{((0,1)/(0,1))}(0,1) = (-1).(1,0) + 3(0,1)$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico. Se quiere expresar el vector $\mathbf{u}=(-1,2,3)$ como combinación lineal de los vectores de la base ortogonal: $\mathbf{B}=\big((1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\big)$. Teniendo presente el teorema anterior, resulta:

$$(-1,2,3)=\frac{(-1,2,3).(1,1,0)}{(1,1,0).(1,1,0)}(1,1,0)+\frac{(-1,2,3).(1,-1,0)}{(1,-1,0).(1,-1,0)}(1,-1,0)+\frac{(-1,2,3).(0,0,1)}{(0,0,1).(0,0,1)}(0,0,1)$$

$$(-1,2,3)=\frac{1}{2}(1,1,0)-\frac{3}{2}(1,-1,0)+3(0,0,1)\,.$$

2.6 Bases Ortonormales

Trabajando en espacios vectoriales con producto interno, la solución de un problema a menudo se ve favorecida con la elección de una base adecuada. En particular, las bases ortonormales generalmente simplifican las expresiones con lo que disminuye la carga computacional.

Definición 2.6.1. Sea $\mathbf{S}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\}$ un conjunto ortonormal. Sea $\mathbf{V}=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\rangle$. Diremos que $\mathbf{B}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r)$ es una base ortonormal de **V.**

Observar que todo vector $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ se expresa de una forma simple como combinación lineal de los vectores de la base **B:**

$$\mathbf{v}=(\mathbf{v}/\mathbf{v_1})\mathbf{v_1}+(\mathbf{v}/\mathbf{v_2})\mathbf{v_2}+\cdots+(\mathbf{v}/\mathbf{v}_r)\mathbf{v}_r$$

Otra propiedad importante de las bases ortonormales es la que desarrollada en el siguiente teorema.

Teorema 2.6.1. Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial con producto interno. Sea $\mathbf{B}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r)$ una base ortonormal de **V**.

Si $\mathbf{u}=x_1\,\mathbf{v}_1+\cdots+x_i\,\mathbf{v}_i+\cdots+x_n\,\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{v}=y_1\,\mathbf{v}_1+\cdots+y_i\,\mathbf{v}_i+\cdots+y_n\,\mathbf{v}_n$

entonces $(\mathbf{u}/\mathbf{v})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$.

Demostración:

Planteando la expresión:

$$(\mathbf{u}/\mathbf{v})=\big((x_1\,\mathbf{v}_1+\cdots+x_n\,\mathbf{v}_n)/(y_1\,\mathbf{v}_1+\cdots+y_n\,\mathbf{v}_n)\big)$$

y usando las propiedades del producto interior se tiene que:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}/\mathbf{v}) &= x_1y_1(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_1)+x_1y_2(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_2)+\cdots+x_1y_n(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_n)+\cdots+x_iy_1(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_1)+\cdots+x_iy_n(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_n)\\ &\quad+\cdots+x_ny_1(\mathbf{v}_n/\mathbf{v}_1)+x_ny_2(\mathbf{v}_n/\mathbf{v}_2)+\cdots+x_ny_n(\mathbf{v}_n/\mathbf{v}_n)\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que: $(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_j)=0$ si $i\neq j$ y que $(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_j)=1$ si $i=j$, se obtiene:

$$(\mathbf{u}/\mathbf{v})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \ . \quad \#$$

Observación: El Teorema que acabamos de demostrar dice que el producto interno de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es igual al producto punto de sus n-uplas de coordenadas respecto de una base ortonormal, es decir

$$(\mathbf{u}/\mathbf{v}) = \mathbf{(u)_B.(v)_B}$$

ó, equivalentemente, usando la representación por vectores columna se tiene que:

$$(\mathbf{u}/\mathbf{v})=[\mathbf{u}]_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}\,.\,[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$$

es decir que $(\mathbf{u}/\mathbf{v})$ se obtiene también como el producto matricial del vector coordenado de **u** transpuesto, por el vector coordenado de **v.**

2.6.1 El Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt

En cualquier espacio con producto interno de dimensión finita, se puede construir una base ortogonal a partir de una base cualquiera. Normalizando los vectores se obtiene una base ortonormal.

Teorema 2.6.1.1. (Teorema de Gram–Schmidt) Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial con producto interno. Si $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,...,\mathbf{u}_r\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes de **V** entonces existe un conjunto $\mathbf{S}=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,...,\mathbf{w}_r\}$ tal que:

1) **S** es ortogonal

2) $\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_i\rangle=\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_i\rangle$ con $i=1,2,\ldots,r$.

Siendo $\mathbf{w}_1=\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{w}_i=\mathbf{u}_i-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{(\mathbf{u}_i/\mathbf{w}_k)}{(\mathbf{w}_k/\mathbf{w}_k)}\mathbf{w}_k$ con $i=2,...,r$

Demostración:

Vamos a seguir un camino constructivo, esto es, partiendo del conjunto dato, encontraremos el conjunto **S**

a) Tomamos $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1$.

b) Hacemos $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 - proy_{\mathbf{w}_1}\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \dfrac{(\mathbf{u}_2/\mathbf{w}_1)}{(\mathbf{w}_1/\mathbf{w}_1)}\mathbf{w}_1$. Por construcción, se tiene que $\mathbf{w}_2 \perp \mathbf{w}_1$.

Además $\mathbf{w_2} \in \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle \;\Rightarrow\; \langle \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \rangle \subseteq \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle$ y por ser de igual dimensión son iguales.

c) Consideramos a continuación
$\mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_3 - proy_{\mathbf{w}_1}\mathbf{u}_3 - proy_{\mathbf{w}_2}\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \dfrac{(\mathbf{u}_3/\mathbf{w}_1)}{(\mathbf{w}_1/\mathbf{w}_1)}\mathbf{w}_1 - \dfrac{(\mathbf{u}_3/\mathbf{w}_2)}{(\mathbf{w}_2/\mathbf{w}_2)}\mathbf{w}_2$. Por ser $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ un conjunto ortogonal y dado que por **Teorema 2.5.1.1.** se verifica que $\mathbf{w}_3 \perp \mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_3 \perp \mathbf{w}_2$ entonces $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ es un conjunto ortogonal. Además $\mathbf{w}_3 \in \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$, luego $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle \subseteq \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$ y por tener igual dimensión, son iguales.

El proceso se repite hasta obtener $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ de tal forma que:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 \;\text{ y }\; \mathbf{w}_i = \mathbf{u}_i - \sum_{k=1}^{i\text{-}1} \frac{(\mathbf{u}_i/\mathbf{w}_k)}{(\mathbf{w}_k/\mathbf{w}_k)}\mathbf{w}_k \;\text{ con }\; i = 2, \ldots, r. \quad \#$$

Corolario 2.6.1.1. Sea $(\mathbf{V}, /)$ un espacio vectorial con producto interno. Se verifica que:

1) Todo subespacio de dimensión finita de **V**, tiene una base ortonormal.

2) Si **V** es de dimensión finita, entonces **V** tiene una base ortonormal.

Demostración:

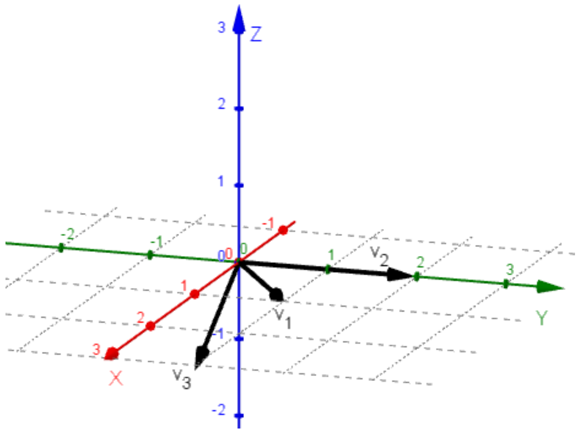
La prueba queda como ejercicio. #

Nota: El proceso de Gram-Schmidt seguido de la normalización de los vectores obtenidos, no sólo convierte a cualquier base $\mathbf{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ del vectorial **V** en una base ortonormal $\mathbf{B_o} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n)$ sino que también satisface para todo $k \geq 2$
1) $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k)$ es una base ortonormal para el subespacio generado por $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$.
2) $\mathbf{w}_k$ es ortogonal a $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{k-1} \rangle$

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ con producto punto, construiremos una base ortonormal a partir de la base $\mathbf{B} = \big((1,1,0),\ (0,2,0),\ (1,0,-1)\big)$.



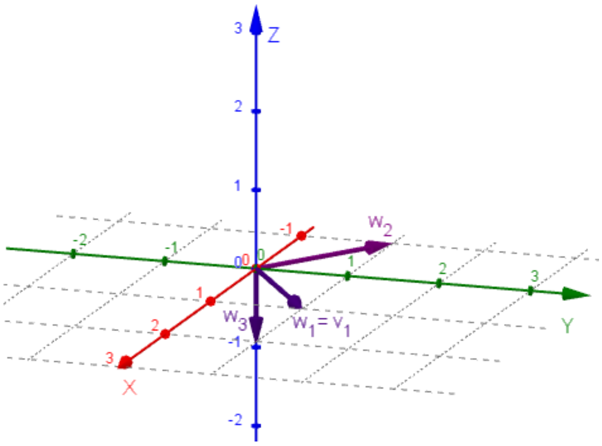
Tomamos $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1,1,0)$.

Hacemos $\mathbf{w}_2 = (0,2,0) - \dfrac{(0,2,0)(1,1,0)}{(1,1,0)(1,1,0)}(1,1,0) = (-1,1,0)$. Observar que $\mathbf{w}_2 \perp \mathbf{w}_1$.

Finalmente consideramos

$$\mathbf{w}_3 = (1,0,-1) - \frac{(1,0,-1)(1,1,0)}{(1,1,0)(1,1,0)}(1,1,0) + \frac{(1,0,-1)(-1,1,0)}{(-1,1,0)(-1,1,0)}(-1,1,0) = (0,0,-1).$$

Luego $\mathbf{B'} = \big((1,1,0),\ (-1,1,0),\ (0,0,-1)\big)$ es una base ortogonal de $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$.



Normalizando los vectores de $\mathbf{B'}$ se obtiene la base ortonormal $\mathbf{B''} = \Big(\big(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\big),\ \big(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\big),\ (0,0,-1)\Big)$.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ con producto interno definido por, $(\mathbf{x}/\mathbf{y}) = x_1y_1 - (x_1y_2 + x_2y_1) + \frac{5}{4}x_2y_2$ donde $\mathbf{x} = (x_1,x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1,y_2)$. Construiremos una base ortonormal a partir de $\mathbf{B} = ((1,0),(0,1))$.

Tomamos $\mathbf{w}_1 = (1,0)$.

Hacemos $\mathbf{w}_2 = (0,1) - \dfrac{((0,1)/(1,0))}{((1,0)/(1,0))}(1,0) = (0,1) - \dfrac{-1}{1}(1,0) = (-1,1)$.

Finalmente, considerando $\|\mathbf{w}_1\| = 1$ y $\|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{1-2+\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}$ tenemos que la base ortonormal buscada es $\mathbf{B'} = ((1,0),\ (-1/2,1/2))$.

Observación: El proceso de Gram–Schimdt puede aplicarse a conjuntos **numerables** de infinitos vectores linealmente independientes.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{C}[-1,1]$ con el producto interno definido por: $(f/g) = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\,dx$.

Se puede ortogonalizar el conjunto $\{1, X, X^2, X^3, X^4, ...\}$ y se obtiene el conjunto ortogonal $\left\{1,\ X, X^2 - \frac{1}{3},\ X^3 - \frac{3}{5}X,\ X^4 - \frac{6}{7}X^2 + \frac{3}{35}, \ldots\ldots\right\}$ cuyos elementos, salvo factores constantes, son los **polinomios de Legendre.**

Observación: Los polinomios de Legendre pueden ser considerados formando una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ si el producto interno está definido por $(f/g) = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\,dx$.

2.6.2 Descomposición QR

Supongamos tener una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ cuyos vectores columna son linealmente independientes. Si **Q** es la matriz con vectores columna ortonormales obtenidos de aplicar a los vectores columna de **A** el proceso de Gram-Schmidt y posterior normalización, se pretende establecer si existe alguna relación entre las matrices **A** y **Q**.
Llamando $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ a las columnas de la matriz **A**, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n$ a las columnas de la matriz **Q**, luego

$$\mathbf{A} = [\mathbf{u}_1\ \ \mathbf{u}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{u}_n] \qquad \mathbf{Q} = [\mathbf{w}_1\ \ \mathbf{w}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{w}_n]$$

Pero como por construcción $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$ y $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots.., \mathbf{w}_n)$ es un conjunto ortonormal resulta

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= (\mathbf{u}_1/\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{u}_1/\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{u}_1/\mathbf{w}_n)\mathbf{w}_n \\
\mathbf{u}_2 &= (\mathbf{u}_2/\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{u}_2/\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{u}_2/\mathbf{w}_n)\mathbf{w}_n \\
&\vdots \\
\mathbf{u}_n &= (\mathbf{u}_n/\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{u}_n/\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{u}_n/\mathbf{w}_n)\mathbf{w}_n
\end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \cdots & \mathbf{w}_n\end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} . \underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{u}_1/\mathbf{w}_1) & (\mathbf{u}_2/\mathbf{w}_1) & \cdots & (\mathbf{u}_n/\mathbf{w}_1) \\ (\mathbf{u}_1/\mathbf{w}_2) & (\mathbf{u}_2/\mathbf{w}_2) & \cdots & (\mathbf{u}_n/\mathbf{w}_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\mathbf{u}_1/\mathbf{w}_n) & (\mathbf{u}_2/\mathbf{w}_n) & \cdots & (\mathbf{u}_n/\mathbf{w}_n) \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}}$$

Esto es: $\mathbf{A} = \mathbf{Q}.\mathbf{R}$

Pero de la aplicación del proceso de Gram-Schmidt, se tiene que $\mathbf{w}_k$ es ortogonal a $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}$. Luego los elementos debajo de la diagonal de la matriz **R** son nulos y por lo tanto **R** es una matriz triangular superior. Además, se demuestra que los elementos de su diagonal son distintos de cero, por lo que **R** es una matriz inversible.

Lo arriba mencionado, puede sitentizarse en el siguiente teorema.

Teorema 2.6.2.1. (Descomposición QR) Sea **A** una matriz $m \times n$ con vectores columna linealmente independientes. Entonces **A** se puede factorizar como $\mathbf{A} = \mathbf{Q}.\mathbf{R}$ con **Q** una matriz $m \times n$ con vectores columna ortonomales y **R** una matriz triangular superior $n \times n$ inversible.

Observación: La condición de que los vectores columna de **A** sean linealmente independientes implica que debe ser $m \geq n$.

La descomposición **QR** es muy importante porque en ella se basan numerosos algoritmos relacionados con métodos numéricos del Álgebra Lineal.

2.7 Complemento Ortogonal

Definición 2.7.1. Sea $(\mathbf{V}, /)$ un espacio vectorial con producto interno, $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$. Se llama complemento ortogonal de **S** al conjunto denotado $\mathbf{S}^{\perp}$ formado por todos los vectores de **V** que son ortogonales a cada uno de los vectores de **S**.

$$\mathbf{S}^{\perp} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} / \mathbf{v} \perp \mathbf{u} \;\; \forall \mathbf{u} \in \mathbf{S}\}$$

Proposición 2.7.1. Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial con producto interno, $\mathbf{S}\subset\mathbf{V}$. Se verifica que:

1) $\mathbf{S}^{\perp}$ es un subespacio.

2) Si $\mathbf{W}$ es el subespacio generado por $\mathbf{S}$ (esto es $\mathbf{W}=\langle\mathbf{S}\rangle$) entonces $\mathbf{W}^{\perp}=\mathbf{S}^{\perp}$ (todo vector de $\mathbf{S}^{\perp}$ es también ortogonal a todo vector de **W**)

Demostración:

1) $\mathbf{S}^{\perp}$ es no vacío pues $\overline{\mathbf{0}}\in\mathbf{S}^{\perp}$. Sean $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in\mathbf{S}^{\perp}$ y $k\in\mathbf{K}$. Por la bilinealidad y homogeneidad del producto interno definido en **V** se tiene que

$$\left(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2/\mathbf{u}\right)=\left(\mathbf{v}_1/\mathbf{u}\right)+\left(\mathbf{v}_1/\mathbf{u}\right)=0 \quad \text{y} \quad \left(k\mathbf{v}_1/\mathbf{u}\right)=k\left(\mathbf{v}_1/\mathbf{u}\right)=0 \quad \text{para todo } \mathbf{u}\in\mathbf{S}$$

Luego $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ y $k\mathbf{v}_1$ también son elementos de $\mathbf{S}^{\perp}$.

2) Queda como ejercicio. #

Teorema 2.7.1. Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Si **W** es un subespacio de **V** entonces $\mathbf{V}=\mathbf{W}\oplus\mathbf{W}^{\perp}$. (**V** es suma directa de **W** y $\mathbf{W}^{\perp}$)

Demostración:

Sea $\mathbf{B}=\left(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,...,\mathbf{w}_r\right)$ una base ortogonal de **W**.

Para todo $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$ (por Teorema 2.5.1.1.) se tiene:

$$\mathbf{u_1}=\sum_{i=1}^{r}\frac{\left(\mathbf{u}/\mathbf{w}_i\right)}{\left(\mathbf{w}_i/\mathbf{w}_i\right)}\mathbf{w}_i\in\mathbf{W} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{u}_2=\mathbf{u}-\mathbf{u}_1\perp\mathbf{W}.$$

Por lo tanto, todo $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$ se expresa en la forma:

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2 \quad \text{con} \quad \begin{cases}\mathbf{u}_1\in\mathbf{W} \\ \mathbf{u}_2\perp\mathbf{W} \quad \textbf{(}\text{es decir } \mathbf{u_2}\in\mathbf{W}^{\perp}\textbf{)}\end{cases}$$

por lo tanto **V** es suma de **W** y $\mathbf{W}^{\perp}$.

Probaremos que la suma es directa mostrando que $\mathbf{W}\cap\mathbf{W}^{\perp}=\left\{\overline{\mathbf{0}}\right\}$.

Sea $\mathbf{w}\in\mathbf{W}\cap\mathbf{W}^{\perp}$, entonces se verifica $\left(\mathbf{w}/\mathbf{w}\right)=0$ luego se tiene que $\mathbf{w}=\overline{\mathbf{0}}$.

Por lo tanto $\mathbf{V}=\mathbf{W}\oplus\mathbf{W}^{\perp}$. #

Corolario 2.7.1. Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. **W** subespacio de **V**. Se verifica:

1) Para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, la expresión $\mathbf{u} = \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}$ con $\mathbf{u_1} \in \mathbf{W}$ y $\mathbf{u_2} \in \mathbf{W}^{\perp}$ es única.

2) $dim\,\mathbf{V} = dim\,\mathbf{W} + dim\,\mathbf{W}^{\perp}$.

3) $\left(\mathbf{W}^{\perp}\right)^{\perp} = \mathbf{W}$

Demostración:

La prueba queda como ejercicio. #

Observación: Según lo visto en el **Teorema 2.7.1.** para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ se tiene que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathbf{u}_1 \in \mathbf{W} \\ \mathbf{u_2} \in \mathbf{W}^{\perp} \end{cases}$$

Notar que el vector $\mathbf{u}_1 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{w}_i)}{(\mathbf{w}_i/\mathbf{w}_i)}\mathbf{w}_i$ es suma de las proyecciones de **u** sobre los vectores de una base ortogonal de **W**.

Luego, llamaremos a $\mathbf{u_1}$ **proyección de u sobre el subespacio W** y lo denotaremos $\mathbf{u}_1 = proy_{\mathbf{W}}\,\mathbf{u}$. Mientras que al vector $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$ lo llamaremos **componente de u ortogonal a W**.

Ejemplos

Ejemplo 1

$\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ con producto punto. Si $\mathbf{W} = \langle(1{,}0)\rangle$ entonces

$$\mathbf{W}^{\perp} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y).(1{,}0) = 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\right\} = \langle(0{,}1)\rangle .$$

Ejemplo 2

$\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ con producto punto. Si **W** es el plano $2x + y - 3z = 0$, entonces podemos escribir $\mathbf{W} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ 2x + y - 3z = 0\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ (x,y,z).(2{,}1,-3) = 0\right\}$.

Luego, $\mathbf{W}^{\perp}$ es la recta por el origen con vector de dirección $(2{,}1,-3)$.

Ejemplo 3

$\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con producto punto. Si $\mathbf{W} = \langle \mathbf{(}1,1,3,4\mathbf{)}, \mathbf{(}2,1,1,5\mathbf{)} \rangle$ entonces $\mathbf{W}^{\perp}$ es el espacio de soluciones del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$.

2.8 Distancia

Ayudados con nuestros conocimientos de Geometría elemental, es posible encontrar con el uso de regla y escuadra, el punto de una recta o un plano, más próximo a un punto dado y a partir de nuestra idea intuitiva de distancia, por simple medición determinar la distancia del punto a la recta o al plano.
Nos plantearemos ahora el mismo problema a fin de implementar mecanismos que nos permitan resolverlo en forma analítica en un espacio **V** con producto interno.

Definición 2.8.1. Sea $(\mathbf{V}, /)$ espacio vectorial con producto interno. Definimos la función distancia en **V**

$$d : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$$
$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

Observación: De la definición, la función distancia d resulta ser no negativa, simétrica e invariante frente a traslaciones. Es decir:

1) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$ y $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ sí y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{v}$

2) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$

3) $d(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

Definición 2.8.2. Sea $(\mathbf{V}, /)$ espacio vectorial con producto interno; d la función distancia definida en **V**. Sean $\mathbf{v_o} \in \mathbf{V}$ y $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$. Definimos la distancia de $\mathbf{v_o}$ a S como $d(\mathbf{v_o}, \mathbf{S}) = \textit{ínfimo}\{d(\mathbf{v_o}, \mathbf{v}) \ / \ \mathbf{v} \in \mathbf{S}\}$.

Definición 2.8.3. Sea $(\mathbf{V}, /)$ espacio vectorial con producto interno; d la función distancia definida en **V**. Sean $\mathbf{v_o} \in \mathbf{V}$ y $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$. Diremos que $\mathbf{u} \in \mathbf{S}$ es el punto de **S** más próximo de $\mathbf{v_o}$ sí y sólo si $d(\mathbf{v_o}, \mathbf{u}) \leq d(\mathbf{v_o}, \mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{S}$ o equivalentemente $d(\mathbf{v_o}, \mathbf{u}) = d(\mathbf{v_o}, \mathbf{S})$.

Observación: Siempre existe la distancia de un punto a un subconjunto, pero no siempre existe un punto de **S** más próximo del punto $\mathbf{v}_o$ dado, y en caso de existir puede no ser único, como lo muestran los siguientes ejemplos.

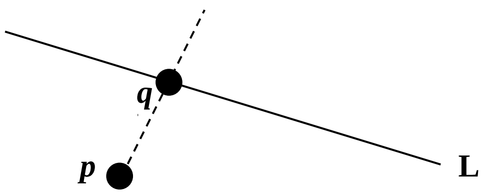
Ejemplos

Ejemplo 1

$$d\left(\boldsymbol{p}, \left]a,b\right[\right) = a - \boldsymbol{p}$$

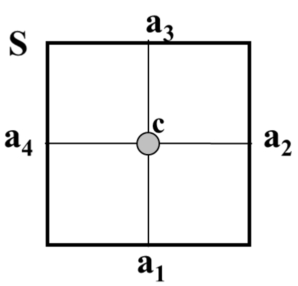
no existe en $\left]a,b\right[$ ningún punto que esté más próximo de ***p***.

Ejemplo 2



El punto de la recta **L** más próximo del punto ***p*** es el punto ***q*,** pie de la perpendicular a **L** trazada por ***p***.

Ejemplo 3



Sea **S** el borde de un cuadrado y **c** el centro del mismo

Los puntos medios **a1, a2, a3** y **a4** de los lados del cuadrado, son todos puntos más cercanos al centro **c**, luego el punto más próximo no es único:

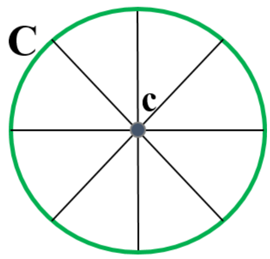
$$d(\mathbf{c}, \mathbf{S}) = d(\mathbf{c}, \mathbf{a}_1) = d(\mathbf{c}, \mathbf{a}_2) = d(\mathbf{c}, \mathbf{a}_3) = d(\mathbf{c}, \mathbf{a}_4)\,.$$

Ejemplo 4

Sea **C** el borde del círculo y **c** el centro del mismo.

Todos los puntos de la circunfecencia **C**, son todos puntos más cercanos al centro **c** (están a la misma distancia).

El punto más próximo no es único.



Observación: Los ejemplos anteriores, muestran que el punto de un conjunto **S** más próximo a un punto dado, puede no existir, ser único o haber varios puntos que cumplan la condición. Sin embargo, si **S** es un subespacio, entonces el punto más próximo es único tal como lo muestra el siguiente teorema:

> **Teorema 2.8.1.** Sea $(\mathbf{V}, /)$ espacio vectorial con producto interno. Sea **W** subespacio de **V** de dimensión finita ($dim\,\mathbf{W} = r$) y sea $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$.
>
> Si $\mathbf{u}_1 = proy_{\mathbf{W}}\,\mathbf{u}$ entonces $d(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{z})$ para todo $\mathbf{z} \in \mathbf{W}$.

Demostración:

Sea $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r)$ base ortogonal de **W**.

Si $\mathbf{u}_1 = proy_{\mathbf{W}}\,\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)} \mathbf{v}_i$, por **Teorema 2.5.1.1.** el vector $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$ es ortogonal a **W**.

Sea $\mathbf{z} \in \mathbf{W}$, por ser **W** subespacio $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{z}) \in \mathbf{W}$ y entonces se tiene que $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) \perp (\mathbf{u}_1 - \mathbf{z})$.

Luego, por el Teorema de Pitágoras

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 - \mathbf{z}\|^2 = \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) + (\mathbf{u}_1 - \mathbf{z})\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{z}\|^2 .$$

De aquí resulta $\|\mathbf{u} - \mathbf{z}\|^2 \geq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1\|^2 \Rightarrow d(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \geq d(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)$.#

Observación: Se demuestra fácilmente que $\mathbf{u}_1$ es el único vector de **W** con esta propiedad. Diremos que $\mathbf{u}_1$ es la **mejor aproximación** de **u** por vectores del subespacio **W**.

Ejemplos

Ejemplo 1

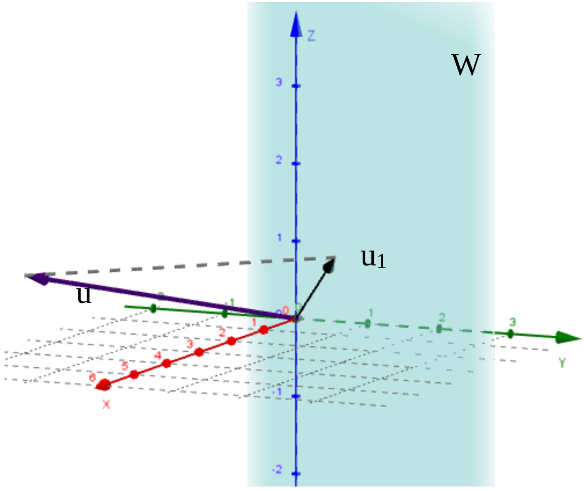
Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ con producto punto. Sea $\mathbf{u} = (4, -2, 1)$. Se quiere encontrar la mejor aproximación de **u** por vectores del subespacio $\mathbf{W} = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$.

Como el conjunto $\{(1,1,0), (0,0,1)\}$ es una base ortogonal de **W**, consideramos $\mathbf{u}_1 = proy_{\mathbf{W}}\,\mathbf{u}$, esto es:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{(4,-2,1).(1,1,0)}{(1,1,0).(1,1,0)}(1,1,0) + \frac{(4,-2,1).(0,0,1)}{(0,0,1).(0,0,1)}(0,0,1) = (1,1,1)$$

Luego, la mejor aproximación de **u** por vectores de **W** es $\mathbf{u}_1 = (1,1,1)$ y la distancia de **u** a **W** es la longitud del vector $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1)$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{W}) = d(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1\| = \|(3, -3, 0)\| = \sqrt{18}\,.$$



Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con producto punto. Sea $\mathbf{u} = (2,0,1,2)$. Se quiere encontrar la mejor aproximación de **u** por vectores del subespacio $\mathbf{W} = \langle (-1,0,2,1), (2,3,2,-2) \rangle$ y la distancia de **u** a **W**.

Como el conjunto $\{(-1,0,2,1), (2,3,2,-2)\}$ es una base ortogonal de **W**, planteamos $\mathbf{u}_1 = proy_{\mathbf{W}}\, \mathbf{u}$, esto es:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{(2,0,1,2).(-1,0,2,1)}{(-1,0,2,1).(-1,0,2,1)}(-1,0,2,1) + \frac{(2,0,1,2).(2,3,2,-2)}{(2,3,2,-2).(2,3,2,-2)}(2,3,2,-2) = \frac{1}{7}(-1,2,6,1)$$

Luego, la mejor aproximación de **u** por vectores de **W** es $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{7}(-1,2,6,1)$ y la distancia de **u** a **W** es la longitud del vector $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1)$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{W}) = d(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1\| = \left\| \frac{1}{7}(15, -2, 1, 13) \right\| = \frac{1}{7}\sqrt{399}\,.$$

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ con producto punto. Sea $\mathbf{u} = (2,0,1)$. Se quiere encontrar la mejor aproximación de **u** por vectores del subespacio $\mathbf{W} = \langle (-1,1,0), (1,0,1) \rangle$.

Como el conjunto $\{(-1,1,0), (1,0,1)\}$ no es ortogonal, aplicamos Gram–Schimdt para obtener una base ortogonal de **W**.

Tomamos $\mathbf{w}_1 = (-1,1,0)$.

Hacemos $\mathbf{w}_2 = (1,0,1) - \dfrac{(1,0,1).(-1,1,0)}{(-1,1,0).(-1,1,0)}(-1,1,0) = (1,0,1) - \left(-\dfrac{1}{2}\right)(-1,1,0) = \left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$.

Tenemos entonces que una base ortogonal de **W** es $\mathbf{B} = \left((-1,1,0),\ \left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)\right)$.

Ahora, la mejor aproximación de **u** por vectores de **W** es $\mathbf{u}_1 = proy_{\mathbf{W}}\,\mathbf{u}$ esto es:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{(2,0,1).(-1,1,0)}{(-1,1,0).(-1,1,0)}(-1,1,0) + \frac{(2,0,1).\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)}{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right).\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1\right) = (1,-1,0) + \left(\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}(5,-1,4).$$

Ejemplo 4

Definido en el espacio de las funciones continuas $\mathbf{V} = \mathbf{C}[-1,1]$ con el producto interno canónico $(f/g) = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\,dx$, es posible resolver el problema de aproximar una función dada por otra más simple. Si $\mathbf{W} = \left\langle 1, X, X^2 - \dfrac{1}{3} \right\rangle$, se desea aproximar la función $f(x) = e^x$ por una función del subespacio **W**.

Dado que los vectores que generan **W** forman un conjunto ortogonal, la mejor aproximación de f por vectores de **W** esta dada por:

$$f_1 = \frac{\int_{-1}^{1} e^x.1\,dx}{\int_{-1}^{1} 1.1\,dx}1 + \frac{\int_{-1}^{1} e^x.x\,dx}{\int_{-1}^{1} x.x\,dx}x + \frac{\int_{-1}^{1} e^x.\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx}{\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2 dx}\left(x^2-\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(e-\frac{1}{e}\right)}{2}1 + \frac{-\frac{2}{e}}{\frac{2}{3}}x + \frac{\frac{4}{e}}{\frac{8}{45}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

siendo f_1 una función polinómica de segundo grado.

2.9 Variedades Lineales

Hemos visto que si **V** es un espacio vectorial, $\mathbf{p} \in \mathbf{V}$ y **S** un subconjunto de **V**, el símbolo $\mathbf{p}+\mathbf{S}$ indica la suma del conjunto $\{\mathbf{p}\}$ y el conjunto **S**, esto es:

$$\mathbf{p}+\mathbf{S} = \{\, \mathbf{v} \in \mathbf{V} \;/\; existe\ \mathbf{u} \in \mathbf{S} : \mathbf{v} = \mathbf{p}+\mathbf{u} \}$$

Si consideramos la función $\begin{aligned}\mathbf{T_p} : \mathbf{V} &\to \mathbf{V}\\ \mathbf{u} &\to \mathbf{u}+\mathbf{p}\end{aligned}$ se llama **traslación de vector p**.

Por consiguiente $\mathbf{p}+\mathbf{S}$ puede pensarse como la imagen del conjunto **S** por la traslación de vector **p**.

Definición 2.9.1 Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbf{K}$; $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{V}$. Diremos que $\mathbf{A}$ es una variedad lineal sí y sólo si existen $\mathbf{p} \in \mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ subespacio de $\mathbf{V}$ tales que $\mathbf{A} = \mathbf{p} + \mathbf{W}$

Por consiguiente una variedad lineal es la imagen de un subespacio por una traslación, es decir $\mathbf{A} = \mathbf{T_p}(\mathbf{W})$.

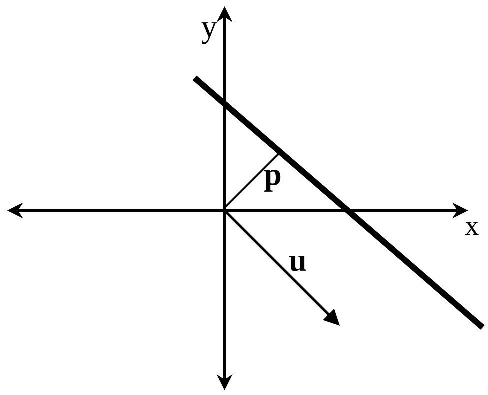
Ejemplos

Ejemplo 1

Toda recta de $\mathbb{R}^2$ (ó de $\mathbb{R}^3$) es una variedad lineal.

En efecto, la ecuación vectorial de la recta $\mathbf{L}$, definida por un punto $\mathbf{p}$ y el vector de dirección $\mathbf{u}$ es:

$$\mathbf{L} : \mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{L} : \mathbf{x} = \mathbf{p} + \langle \mathbf{u} \rangle$$



Ejemplo 2

Todo plano π de $\mathbb{R}^3$ es una variedad lineal. En efecto, la ecuación vectorial:

$$\pi : \mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}$$

describe a π como el conjunto de elementos de $\mathbb{R}^3$ que resultan de sumar a $\mathbf{p}$ cada uno de los vectores del subespacio $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Por lo tanto, podemos escribir:

$$\pi : \mathbf{x} = \mathbf{p} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle .$$

Ejemplo 3

Todo subespacio $\mathbf{W}$ de un espacio vectorial, es una variedad lineal. En efecto:

$$\mathbf{W} = \overline{\mathbf{0}} + \mathbf{W} = \mathbf{T}_{\overline{\mathbf{0}}}(\mathbf{W}).$$

Ejemplo 4

Si $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial y $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ entonces $\{\mathbf{v}\} = \mathbf{v} + \{\,\overline{\mathbf{0}}\,\}$ es una variedad lineal.

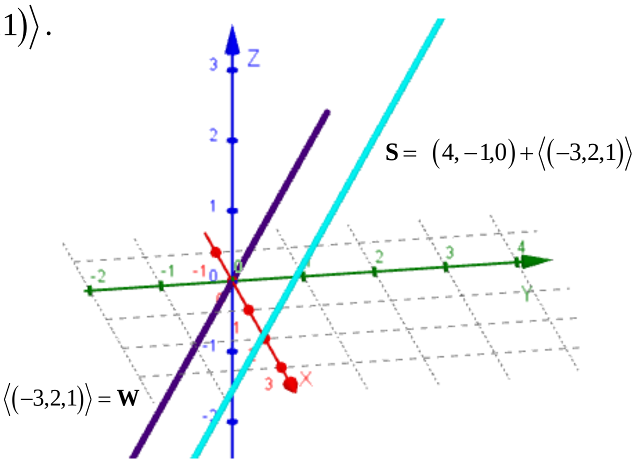
Ejemplo 5

El conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones lineales no homogéneo $\mathbf{A.X=H}$ es una variedad lineal.

a) Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Consideremos el sistema: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$ la solución general esta

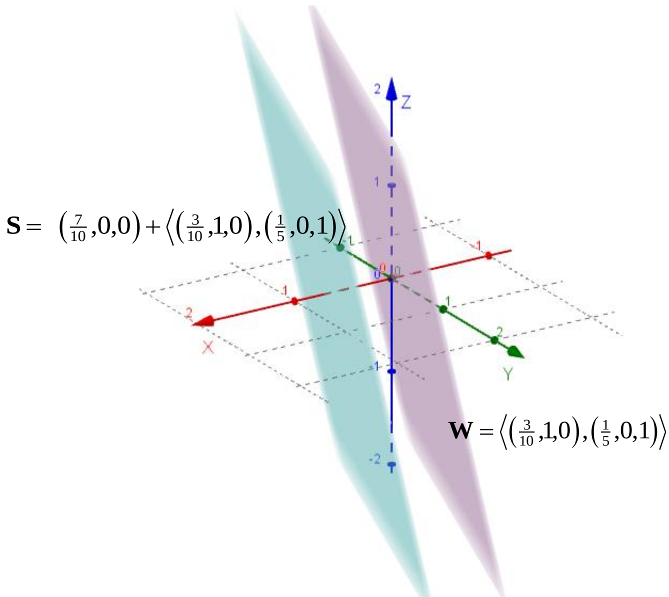
dada por: $(x_1, x_2, x_3) = (4, -1, 0) + a(-3, 2, 1)$ con $a \in \mathbb{R}$ que podemos escribir como:

$\mathbf{S} = (4, -1, 0) + \langle(-3, 2, 1)\rangle$.



b) Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Consideremos el sistema: $10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 7$. La solución general es:
$(x_1, x_2, x_3) = (\frac{7}{10}, 0, 0) + a(\frac{3}{10}, 1, 0) + b(\frac{1}{5}, 0, 1)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ que podemos escribir como:

$\mathbf{S} = (\frac{7}{10}, 0, 0) + \langle(\frac{3}{10}, 1, 0), (\frac{1}{5}, 0, 1)\rangle$.



Observación: El subespacio **W** es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado al sistema dado.

El siguiente teorema es una generalización de los ejemplos precedentes:

Teorema 2.9.1. Sean $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m \times n}$ y $\mathbf{H} \in \mathbf{K}^{m \times 1}$. Si el sistema $\mathbf{A.X=H}$ es compatible entonces su conjunto **S** de soluciones es una variedad lineal en $\mathbf{K}^{n \times 1}$ cuyo subespacio asociado es el conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A.X=0}$.

Demostración:

Por hipótesis el sistema es compatible, es decir que el conjunto **S** de soluciones es no vacío. Supongamos entonces que $s_0 \in \mathbf{S}$ esto es $\mathbf{A}.s_0 = \mathbf{H}$. Luego, probaremos que **S** es una variedad lineal $\mathbf{S} = s_0 + \mathbf{W}$ siendo **W** el conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A.X=0}$.

a). Veamos que $\mathbf{S} \subset s_0 + \mathbf{W}$.

$$\left.\begin{array}{l} s \in \mathbf{S} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}.s = \mathbf{H} \\ s_0 \in \mathbf{S} \;\Rightarrow \mathbf{A}.s_0 = \mathbf{H} \end{array}\right\} \Rightarrow\; \mathbf{A}.(s - s_0) = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; (s - s_0) = \mathbf{w} \in \mathbf{W} \;\Rightarrow s = s_0 + \mathbf{w} \Rightarrow s \in s_0 + \mathbf{W}$$

luego $\mathbf{S} \subset s_0 + \mathbf{W}$.

b). Veamos que $s_0 + \mathbf{W} \subset \mathbf{S}$.

$s \in s_0 + \mathbf{W} \Rightarrow\; s = s_0 + \mathbf{w}$ con $\mathbf{w} \in \mathbf{W} \Rightarrow \mathbf{A}.\mathbf{s} = \mathbf{A}.(s_0 + \mathbf{w}) = \mathbf{A}.s_0 + \mathbf{A}.\mathbf{w} = \mathbf{H} + \mathbf{0} = \mathbf{H} \;\Rightarrow\; s \in \mathbf{S}$

luego $s_0 + \mathbf{W} \subset \mathbf{S}$.

De a) y b) se tiene que $\mathbf{S} = s_0 + \mathbf{W}$.#

Observación: En el próximo capítulo presentaremos una demostración más sencilla del teorema precedente.

Proposición 2.9.1. (Propiedades) Sea **V** un espacio vectorial y sea $\mathbf{A} = \mathbf{p} + \mathbf{W}$ una variedad lineal en **V**. Entonces se verifica:

1. $\mathbf{p} \in \mathbf{A}$. (El vector **p** pertenece a la variedad lineal **A**)
2. Si $\mathbf{q} \in \mathbf{A}$ y $\mathbf{r} \in \mathbf{A}$ entonces $\mathbf{q} - \mathbf{r} \in \mathbf{W}$. (La diferencia entre dos vectores de la variedad lineal **A** es un vector del **W**)
3. Si $\mathbf{p} \in \mathbf{W}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{W}$.
4. Si $\mathbf{q} \in \mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{q} + \mathbf{W}$. (En la expresión $\mathbf{A} = \mathbf{p} + \mathbf{W}$, el vector **p** puede ser reemplazado por cualquier vector de **A**)
5. Hay un único subespacio **W** de **V** tal que para todo $\mathbf{p} \in \mathbf{A}$ se tiene que $\mathbf{A} = \mathbf{p} + \mathbf{W}$. Este subespacio se denomina subespacio "asociado" a la variedad lineal **A**.

Demostración:

1. $\mathbf{p} \in \mathbf{A}$ pues $\mathbf{p} = \mathbf{p} + \overline{\mathbf{0}}$ con $\overline{\mathbf{0}} \in \mathbf{W}$.

2. Si $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbf{A}$ se tiene que: $\left.\begin{array}{r} \mathbf{q} \in \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{w} \text{ con } \mathbf{w} \in \mathbf{W} \\ \mathbf{r} \in \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{p} + \mathbf{w}' \text{ con } \mathbf{w}' \in \mathbf{W} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{q} - \mathbf{r} = \mathbf{w} - \mathbf{w}' \in \mathbf{W}.$

3. Su demostración queda como ejercicio.

4. Si $\mathbf{q} \in \mathbf{A}$ se tiene que $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{w_0}$ con $\mathbf{w_0} \in \mathbf{W}$, luego $\mathbf{p} = \mathbf{q} - \mathbf{w_0}$. Entonces

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} + \mathbf{W} = (\mathbf{q} - \mathbf{w_0}) + \mathbf{W} = \{\mathbf{q} - \mathbf{w_0} + \mathbf{w} / \mathbf{w} \in \mathbf{W}\} = \mathbf{q} + \{-\mathbf{w_0} + \mathbf{w} / \mathbf{w} \in \mathbf{W}\} = \mathbf{q} + \mathbf{W}.$$

5. La variedad lineal **A** es la imagen de un subespacio por una traslación, es decir $\mathbf{T_p}(\mathbf{W}) = \mathbf{p} + \mathbf{W} = \mathbf{A}$.

Teniendo en cuenta que la **traslación de vector "p"**, $\begin{array}{l} \mathbf{T_p} : \mathbf{V} \to \mathbf{V} \\ \quad\ \mathbf{u} \to \mathbf{u} + \mathbf{p} \end{array}$ es una biyeción (su prueba queda como ejercicio) su aplicación inversa es la **traslación de vector "-p"** es decir $(\mathbf{T_p})^{-1} = \mathbf{T_{-p}}$. Luego el subespacio W es la imagen de A por la aplicación inversa $\mathbf{T_{-p}}(\mathbf{A}) = -\mathbf{p} + \mathbf{A} = -\mathbf{p} + \mathbf{p} + \mathbf{W} = \mathbf{W}$.

Supongamos que **A** puede expresarse en la forma $\mathbf{A} = \mathbf{p} + \mathbf{W}$ y $\mathbf{A} = \mathbf{p} + \mathbf{W}'$ aplicando $\mathbf{T_{-p}}$ se tiene que $\mathbf{T_{-p}}(\mathbf{A}) = -\mathbf{p} + \mathbf{A} = -\mathbf{p} + (\mathbf{p} + \mathbf{W}') = \mathbf{W}'$. Luego, $\mathbf{W} = \mathbf{W}'$ por estar univocamente determinada la imagen de un conjunto por un aplicación. #

> **Definición 2.9.2** Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**; $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{V}$ una variedad lineal. Llamaremos dimensión de la variedad lineal A a la dimensión del único subespacio **W** asociado a **A**.

Observación: Las rectas en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ son variedades lineales de dimensión uno. Análogamente si se tiene un espacio vectorial **V** cualquiera, las variedades lineales de dimensión *cero* se denominan **puntos,** las de dimensión *uno* se llamarán **rectas** y las de dimensión *dos*, **planos**.

Ahora si **V** es un espacio vectorial de dimensión $\boldsymbol{n}$, las variedades lineales de **V** de dimensión $\boldsymbol{n} - 1$ se llaman **hiperplanos**. Por lo tanto un hiperplano de $\mathbb{R}$ es un punto, una recta es un hiperplano de $\mathbb{R}^2$ y un plano es un hiperplano de $\mathbb{R}^3$.

2.9.1 Ecuaciones de una Variedad Lineal

Consideremos $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ o $\left(\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbf{n}\times 1}\right)$, mostraremos que toda variedad lineal de **V** se puede expresar como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

Sea $\mathbf{A} = \mathbf{p} + \mathbf{W} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ de dimensión r y sea $\mathbf{W} = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r \rangle$. Por lo tanto $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ sí y sólo si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ tales que

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha_1\, \mathbf{w}_1 + \alpha_2\, \mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_r\, \mathbf{w}_r \tag{1}$$

La expresión (1) se denomina **ecuación vectorial** de la variedad lineal.

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y $\mathbf{w}_{\mathrm{i}} = (w_{1i},\ w_{2i}, \ldots, w_{ni})$ para $i = 1, 2, \ldots, r.$ La ecuación (1) se puede escribir como:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (p_1, p_2, \ldots, p_n) + \alpha_1\,(w_{11},\ w_{21}, \ldots, w_{n1}) + \cdots + \alpha_r\,(w_{1r},\ w_{2r}, \ldots, w_{nr})$$

que es equivalente a las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + \alpha_1 w_{11} + \alpha_2 w_{12} + \cdots + \alpha_r w_{1r} \\ x_2 = p_2 + \alpha_1 w_{21} + \alpha_2 w_{22} + \cdots + \alpha_r w_{2r} \\ x_3 = p_3 + \alpha_1 w_{31} + \alpha_2 w_{32} + \cdots + \alpha_r w_{3r} \\ \quad\vdots \\ x_n = p_n + \alpha_1 w_{n1} + \alpha_2 w_{n2} + \cdots + \alpha_r w_{nr} \end{cases} \tag{2}$$

denominadas **ecuaciones paramétricas** de **A**.

Ahora, si pensamos al sistema (2) como un sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, entonces la o las condiciones que deben cumplir los escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para que el sistema (2) sea compatible, constituyen un sistema de **ecuaciones cartesianas** de la variedad lineal.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ y $\mathbf{A} = (1,2,3,0) + \langle (1,-2,1,-1) \rangle$ una recta de $\mathbb{R}^4$.

La ecuación vectorial de **A** está dada por: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,2,3,0) + \mathrm{t}(1,-2,1,-1)$.

Y un sistema de ecuaciones paramétricas de **A** es: $\begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 - 2t \\ x_3 = 3 + t \\ x_4 = \ \ -t \end{cases}$.

Ahora buscamos las condiciones de compatibilidad del sistema: $\begin{cases} t = x_1 - 1 \\ -2t = x_2 - 2 \\ t = x_3 - 3 \\ -t = x_4 \end{cases}$

$$\begin{array}{r|l} 1 & x_1-1 \\ -2 & x_2-2 \\ 1 & x_3-3 \\ -1 & x_4 \end{array} \xrightarrow[\substack{f_2+2f_1 \\ f_3-f_1 \\ f_4+f_1}]{} \begin{array}{r|l} 1 & x_1-1 \\ 0 & x_2+2x_1-4 \\ 0 & x_3-x_1-2 \\ 0 & x_4+x_1-1 \end{array}$$

entonces un sistema de ecuaciones cartesianas para la variedad lineal **A** es $\begin{cases} x_2+2x_1=4 \\ x_3-x_1=2 \\ x_4+x_1=1 \end{cases}$.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^5$ y $\mathbf{A}=(1,1,2,3,0)+\langle(1,2,-1,3,1),(2,-1,0,1,2)\rangle$. **A** es un plano de $\mathbb{R}^5$ y una ecuación vectorial de la variedad es:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(1,1,2,3,0)+a(1,2,-1,3,1)+b(2,-1,0,1,2).$$

Igualando componentes resulta un sistema de ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x_1=1+a+2b \\ x_2=1+2a-b \\ x_3=2-a \\ x_4=3+3a+b \\ x_5=a+2b \end{cases}$.

Para obtener las ecuaciones cartesianas debemos determinar las condiciones de compatibilidad de este sistema: $\begin{cases} a+2b=x_1-1 \\ 2a-b=x_2-1 \\ -a \quad =x_3-2 \\ 3a+b=x_4-3 \\ a+2b=x_5 \end{cases}$

$$\begin{array}{rr|l} 1 & 2 & x_1-1 \\ 2 & -1 & x_2-1 \\ -1 & 0 & x_3-2 \\ 3 & 1 & x_4-3 \\ 1 & 2 & x_5 \end{array} \xrightarrow[\substack{f_2+2f_3 \\ f_4+3f_3 \\ f_5-f_1}]{} \begin{array}{rr|l} 1 & 2 & x_1-1 \\ 0 & -1 & x_2+2x_3-5 \\ -1 & 0 & x_3-2 \\ 0 & 1 & x_4+3x_3-9 \\ 0 & 0 & x_5-x_1+1 \end{array} \xrightarrow[\substack{f_1+2f_2 \\ f_4+f_2}]{} \begin{array}{rr|l} 1 & 0 & x_1+2x_2+4x_3-11 \\ 0 & -1 & x_2+2x_3-5 \\ -1 & 0 & x_3-2 \\ 0 & 0 & x_4+5x_3+x_2-14 \\ 0 & 0 & x_5-x_1+1 \end{array} \xrightarrow[\substack{f_3+f_1 \\ -f_2}]{} \begin{array}{rr|l} 1 & 0 & x_1+2x_2+4x_3-11 \\ 0 & 1 & -x_2-2x_3+5 \\ 0 & 0 & x_1+2x_2+5x_3-13 \\ 0 & 0 & x_4+5x_3+x_2-14 \\ 0 & 0 & x_5-x_1+1 \end{array}$$

Por consiguiente un sistema de ecuaciones de esta variedad es: $\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=13 \\ x_2+5x_3+x_4=14 \\ x_1-x_5=1 \end{cases}$.

Observación: Notar que las ecuaciones vectoriales, paramétricas y cartesianas de una variedad lineal **A** no son únicas, es decir podemos tener distintas ecuaciones de cada tipo para una misma variedad.

Nota: Si consideramos **V** un espacio vectorial cualquiera de dimensión *n* y tenemos que $\mathbf{A}=\mathbf{p}+\langle \mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_r\rangle$ es una variedad lineal de **V**, entonces todo $\mathbf{x}\in\mathbf{A}$ se expresa de la forma

$$\mathbf{x}=\mathbf{p}+\alpha_1\,\mathbf{w}_1+\alpha_2\,\mathbf{w}_2+\cdots+\alpha_r\,\mathbf{w}_r \qquad (1)$$

Si $\mathbf{B}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n)$ es una base de **V** y tomamos vectores coordenados en (1) resulta

$$(\mathbf{x})_{\mathbf{B}}=(\mathbf{p})_{\mathbf{B}}+\alpha_1(\mathbf{w}_1)_{\mathbf{B}}+\alpha_2(\mathbf{w}_2)_{\mathbf{B}}+\cdots+\alpha_r(\mathbf{w}_r)_{\mathbf{B}}$$

Si $(\mathbf{x})_{\mathbf{B}}=(x_1,x_2,...,x_n)$, $(\mathbf{p})_{\mathbf{B}}=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ y $(\mathbf{w}_i)_{\mathbf{B}}=(w_{1i},\ w_{2i},\ldots,w_{ni})$ para $i=1,2,\ldots,r$

la ecuación (1) se puede escribir como:

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(p_1,p_2,\ldots,p_n)+\alpha_1(w_{11},\ w_{21},\ldots,w_{n1})+\cdots+\alpha_r(w_{1r},\ w_{2r},\ldots,w_{nr}) \qquad (2)$$

que es la ecuación vectorial de una variedad lineal en $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$. Esta variedad lineal representa a la variedad dada en el vectorial **V**, respecto a la base elegida **B**. Análogamente, los sistemas de ecuaciones paramétricas y cartesianas de (2) representan también a la variedad lineal **A** respecto de la base **B**.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V}=\mathbf{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq$ 2 con coeficientes reales. Sea la variedad lineal $\mathbf{A}=(2-3X^2)+\langle -2+3X\rangle$. Tomando la base $\mathbf{B}_1=(1,\ X,\ X^2)$ la variedad lineal **A** queda representada por la recta de $\mathbb{R}^3$

$$R=(2,0,-3)+\langle(-2,3,0)\rangle.$$

Una ecuación vectorial de R es $(x_1,x_2,x_3)=(2,0,-3)+t(-2,3,0)$

y un sistema de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x_1=2-2t \\ x_2=3t \\ x_3=-3 \end{cases}$.

Para cada valor del parámetro *t* en estas ecuaciones, se obtiene el vector de coordenadas de un vector de la variedad lineal **A**. Así por ejemplo, si $t=1$ se tiene $(x_1,x_2,x_3)=(0,3,-3)$ es decir $(0,3,-3)=(3X-3X^2)_{\mathbf{B}}$ con $\mathbf{q}=3X-3X^2\in\mathbf{A}$.

2.9.2 Hiperplanos en $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ (con producto punto)

El conjunto de soluciones de cualquier sistema de ecuaciones lineales homogéneas con *n* incógnitas es un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$. En particular, recordemos que el conjunto de soluciones de la ecuación

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0 \ \text{ con } (a_1,a_2,\ldots,a_n)\neq(0,0,\ldots,0)$$

es un subespacio de dimensión de dimensión n-1, que contiene al origen, un **hiperplano H0**.
El primer miembro de esta ecuación puede pensarse como el producto punto de los vectores $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ y $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, esto es

$$\underbrace{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\bullet(x_1,x_2,\ldots,x_n)}_{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}=0\,.$$

De esta manera, podemos describir a **H0** como el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$**,** ortogonales al vector **a.**
Por lo tanto

$$\mathbf{a}\,.\,\mathbf{x}=0 \qquad \forall\,\mathbf{x}\in\mathbf{H_0} \;\;\Rightarrow\;\; \mathbf{a}\perp\mathbf{H_0}$$

Ahora bien, si para $h\in\mathbb{R}$, planteamos la ecuación

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=h$$

el conjunto de soluciones de dicha ecuación, que llamaremos **H**, es una variedad lineal con subespacio asociado $\mathbf{H_0}$, resultando ser un hiperplano paralelo a $\mathbf{H_0}$.
Además, por ser $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ ortogonal a $\mathbf{H_0}$ también es ortogonal a **H**. Luego los coeficientes de las incógnitas en la ecuación de un hiperplano definen un vector perpendicular al mismo.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ con el producto punto y consideremos $\mathbf{a}=(2,-1,1)$ se quiere

1)Dar la ecuación del hiperplano que contiene al origen, perpendicular al vector **a**.
2)Dar la ecuación del hiperplano H perpendicular a a que pasa por el punto $\mathbf{p}=\mathbf{(}-2,2,2\mathbf{)}$

Solución:

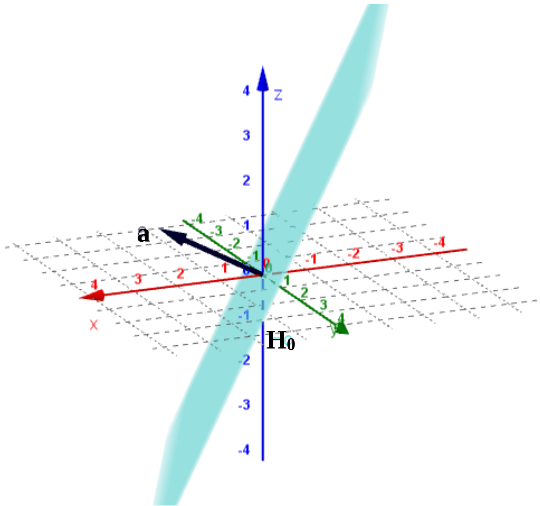
1) $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{H_0} \Leftrightarrow (2,-1,1)\mathbf{.}(x_1,x_2,x_3\mathbf{)}=0 \Leftrightarrow 2x_1-x_2+x_3=0$.

2) El hiperplano **H** perpendicular a $\mathbf{a}=(2,-1,1)$ que pasa por el punto $\mathbf{p}=\mathbf{(}-2,2,2\mathbf{)}$, es paralelo a $\mathbf{H_0}$, entonces su ecuación será de la forma:

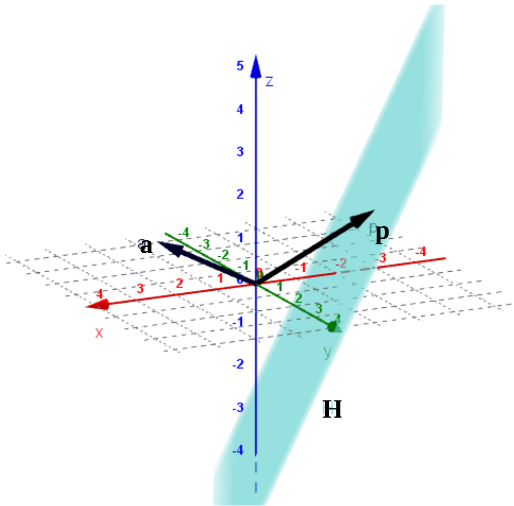
$$2x_1-x_2+x_3=h\,.$$

Para determinar h consideramos la condición de que el punto $\mathbf{p}=\mathbf{(}-2,2,2\mathbf{)}$ verifique la ecuación precedente, esto es: $h=2\mathbf{.(}-2\mathbf{)}-2+2=-4$
Luego del hiperplano **H** perpendicular a $(2,-1,1)$ que pasa por el punto $\mathbf{p}=\mathbf{(}-2,2,2\mathbf{)}$ es:

$$\mathbf{H:}\;2x_1-x_2+x_3=-4\,.$$



Hiperplano perpendicular a **a** que pasa por el origen



Hiperplano perpendicular a **a** que pasa por **p**

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto punto y consideremos $\mathbf{a} = (1,2,3,1)$ se quiere

1)Dar la ecuación del hiperplano que contiene al origen, perpendicular al vector **a**.

2)Dar la ecuación del hiperplano **H** perpendicular a **a** que pasa por el punto $\mathbf{p} = (1,-1,2,1)$

Solución:

1) $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{H_0} \Leftrightarrow (1,2,3,1).(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$.

2) El hiperplano **H** perpendicular a **a** que pasa por el punto $\mathbf{p} = (1,-1,2,1)$, es paralelo a $\mathbf{H_0}$, luego su ecuación será entonces de la forma: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = h$.

Para determinar h consideramos la condición de que el punto $\mathbf{p} = (1,-1,2,1)$ verifique la ecuación, esto es

$$h = 1.1 + 2.(-1) + 3.(2) + 1 = 6$$

Luego el hiperplano bscado es $\mathbf{H}: x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 6$.

Observación: $\mathbf{x} \in \mathbf{H} \Leftrightarrow \mathbf{a}.\mathbf{x} = h$ como $h = \mathbf{a}.\mathbf{p}$ entonces

$$\mathbf{x} \in \mathbf{H} \Leftrightarrow \mathbf{a}.\mathbf{x} = \mathbf{a}.\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{a}.(\mathbf{x}-\mathbf{p}) = 0$$

de donde el hiperplano **H** es ortogonal al vector **a** y pasa por el punto **p** es decir $\mathbf{H}: \mathbf{a}.(\mathbf{x}-\mathbf{p}) = 0$.

2.10 Paralelismo e Intersección de Variedades Lineales

Definición 2.10.1 Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Sean $\mathbf{A}=\mathbf{p}+\mathbf{W_A}$ y $\mathbf{B}=\mathbf{q}+\mathbf{W_B}$ variedades lineales en el espacio vectorial $\mathbf{V}$. Diremos que $\mathbf{A}\,//\mathbf{B}$ sí y sólo si $\mathbf{W_A}\subseteq\mathbf{W_B}$ ó $\mathbf{W_B}\subseteq\mathbf{W_A}$.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$. La recta $\mathbf{L}:\ (x_1,x_2,x_3,x_4)=(2,1,3,5)+\langle(1,2,3,0)\rangle$ es paralela al plano $\pi:\ (x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,1,5,8)+\langle(1,0,1,2),\ (0,1,1,-1)\rangle$ puesto que el vector de dirección de la recta $(1,2,3,0)$ es combinación lineal de los vectores que generan el plano $(1,0,1,2)$ y $(0,1,1,-1)$. En consecuencia, el subespacio asociado a la recta esta incluido en el subespacio asociado al plano. Luego $\mathbf{L}\,//\,\pi$.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$.
Sean las variedades lineales $\mathbf{A}=(1,2,5,0)+\langle(1,2,1,0),\ (0,1,3,1)\rangle$ y $\mathbf{B}=(0,1,1,2)+\langle(2,3,1,0)\rangle$

Como $(2,3,1,0)\notin\langle(1,2,1,0),\ (0,1,3,1)\rangle\Rightarrow\mathbf{W_B}\not\subset\mathbf{W_A}$.

Por otro lado $dim\,\mathbf{W_A}>dim\,\mathbf{W_B}\ \Rightarrow\ \mathbf{W_A}\not\subset\mathbf{W_B}$.

Luego **A** y **B** no son paralelas.

Analizaremos si **A** y **B** se intersectan. Supongamos $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ entonces se tiene que

$$\mathbf{x}\in\mathbf{A}\ \Leftrightarrow\ (x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,2,5,0)+a(1,2,1,0)+b(0,1,3,1)$$

$$\mathbf{x}\in\mathbf{B}\ \Leftrightarrow\ (x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,1,1,2)+c(2,3,1,0)$$

Para que $\mathbf{x}\in\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ se debe verificar que

$$(1,2,5,0)+a(1,2,1,0)+b(0,1,3,1)=(0,1,1,2)+c(2,3,1,0)$$

ecuación vectorial que puede escribirse también:

$$a(1,2,1,0)+b(0,1,3,1)-c(2,3,1,0)=(-1,-1,-4,2)$$

de donde resulta

$$\begin{cases} a-2c=-1\\ 2a+b-3c=-1\\ a+3b-c=-4\\ b=2 \end{cases}.$$

El sistema planteado es incompatible, por lo tanto $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\{\ \}$.
Las variedades lineales que no son paralelas ni se intersectan se denominan **alabeadas**.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$. El plano

$$\pi_1 : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,2,1,6) + \langle (3,2,1,2),\ (1,1,1,1) \rangle$$

no es paralelo al plano

$$\pi_2 : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,-1,2,3) + \langle (3,2,0,2),\ (2,3,0,3) \rangle$$

ya que los vectores que generan el plano π_1 no son combinación lineal de los vectores que generan el plano π_2.

Analicemos si los planos se intersecan. Para ello se buscan los puntos comunes a ambos:

$$(1,2,1,6) + t(3,2,1,2) + k(1,1,1,1) = (1,-1,2,3) + a(1,2,0,2) + b(2,3,0,3)$$

resultando que para los vectores de $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ debe verificarse:

$$\begin{cases} 3t + k - 3a - 2b = 0 \\ 2t + k - 2a - 3b = -3 \\ \ \ t + k = 1 \\ 2t + k - 2a - 3b = -3 \end{cases}$$

cuya solución es $(t,k,a,b) = (10,-9,7,0) + \langle (-5,5,-4,1) \rangle$.

Observación: La intersección de las dos variedades lineales (en el ejemplo: planos) es otra variedad lineal (en el ejemplo: recta).

Este resultado es general y se expresa en el siguiente Teorema.

> **Teorema 2.10.1** Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Sean $\mathbf{A = a + W_A}$ y $\mathbf{B = b + W_B}$ variedades lineales en el espacio vectorial $\mathbf{V}$.
>
> Si $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \{\ \}$ entonces $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ es una variedad lineal con subespacio asociado $\mathbf{W} = \mathbf{W_A} \cap \mathbf{W_B}$.

Demostración:

Si $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \{\ \}$ entonces existe un vector $\mathbf{s} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$.
Como $\mathbf{s} \in \mathbf{A}$ podemos escribir $\mathbf{A = s + W_A}$.
Como $\mathbf{s} \in \mathbf{B}$ podemos escribir $\mathbf{B = s + W_B}$.

Luego, basta probar que $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) - \mathbf{s} = \mathbf{W_A} \cap \mathbf{W_B}$.
Dado que $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) - \mathbf{s} = (\mathbf{A} - \mathbf{s}) \cap (\mathbf{B} - \mathbf{s})$ y teniendo en cuenta que $\mathbf{A} - \mathbf{s} = \mathbf{W_A}$ y que $\mathbf{B} - \mathbf{s} = \mathbf{W_B}$ resulta entonces que $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) - \mathbf{s} = \mathbf{W_A} \cap \mathbf{W_B}$.#

2.11 Distancia de un punto a una Variedad Lineal

Sea $(\mathbf{V}, /)$ un espacio vectorial con producto interno.

Sean **W** un subespacio de V de dimensión finita y $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{W}$ una variedad lineal asociada a $\mathbf{W}$.

Dado $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ ¿existe a "mejor aproximación" por vectores de **A**? De existir ¿es única?.

Para poder responder a estas preguntas, analicemos el siguiente esquema

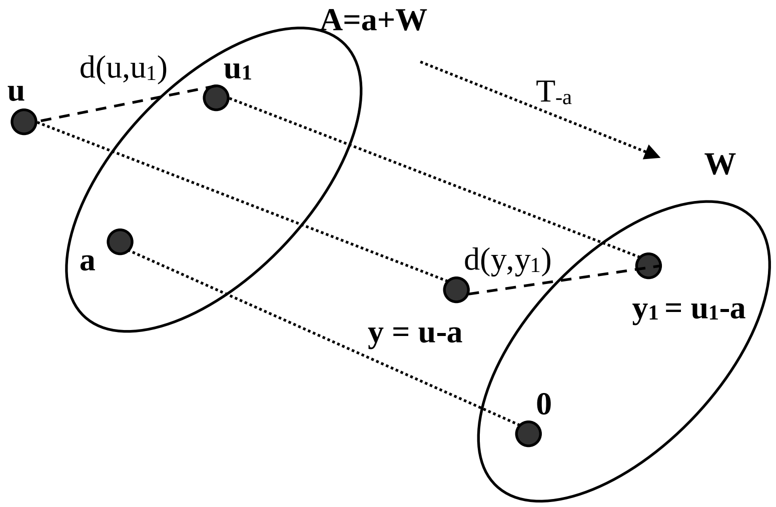


Figura 2.1

Considerando la traslación $\mathbf{T}_{-\mathbf{a}} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ y teniendo en cuenta que $\mathbf{T}_{-\mathbf{a}}(\mathbf{A}) = -\mathbf{a} + \mathbf{A} = \mathbf{W}$ y que la distancia es invariante por traslaciones (**Teorema 2.3.1** ítem (g)) se tiene que:

Sea $\mathbf{y}_1 \in \mathbf{W}$ el vector que es el "más próximo" a $\mathbf{y} = \mathbf{u} - \mathbf{a}$ (**Teorema 2.8.1**) entonces

$$\underbrace{d(\mathbf{u}-\mathbf{a},\mathbf{z}-\mathbf{a})}_{=d(\mathbf{u},\mathbf{z})} \geq \underbrace{d(\mathbf{u}-\mathbf{a},\mathbf{y}_1)}_{=d(\mathbf{u},\mathbf{y}_1+\mathbf{a})} \qquad \forall (\mathbf{z}-\mathbf{a}) \in \mathbf{W}$$

por ser la distancia invariante por traslaciones

$$\Downarrow$$

$$d(\mathbf{u},\mathbf{z}) \geq d(\mathbf{u},\mathbf{y}_1+\mathbf{a}) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{A}$$

Por lo tanto $\mathbf{u}_1 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{a}$ es el vector de **A** "más próximo" a **u**.

Además la distancia de **u** a **A** es igual a la distancia de $\mathbf{u} - \mathbf{a}$ al subespacio **W**.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto punto.

Sean $\mathrm{u}=(2,1,-1,0)$ y $\mathbf{A}=(1,1,1,1)+\langle(1,2,-1,0),(0,1,2,1)\rangle$. Se quiere hallar el vector de **A** "más próximo" de **u** y la distancia de **u** a la variedad.

Planteamos $\mathbf{y}=\mathbf{u}-\mathbf{a}=(2,1,-1,0)-(1,1,1,1)=(1,0,-2,-1)$.
Como $(1,2,-1,0)\perp(0,1,2,1)$ entonces $\mathbf{y}_1$ puede obtenerse como

$$\mathbf{y}_1=\frac{(1,0,-2,-1).(1,2,-1,0)}{(1,2,-1,0).(1,2,-1,0)}(1,2,-1,0)+\frac{(1,0,-2,-1).(0,1,2,1)}{(0,1,2,1).(0,1,2,1)}(0,1,2,1)=\frac{1}{6}(3,1,-13,-5)$$

Luego el vector de **A** "más próximo" de **u** es:

$$\mathbf{u}_1=\mathbf{y}_1+\mathbf{a}=\frac{1}{6}(3,1,-13,-5)+(1,1,1,1)=\frac{1}{6}(9,7,-7,1)$$

Además $d(\mathbf{u},\mathbf{A})=d(\mathbf{y},\mathbf{W})=\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_1\|=\left\|\tfrac{1}{6}(3,1,-3,-15)\right\|=\tfrac{1}{3}\sqrt{3}$.

Observación: Las consideraciones hechas con anterioridad permiten resolver el problema de encontrar la distancia de un punto a una variedad reduciéndolo al caso de distancia de un punto a un subespacio. Sin embargo, es posible resolver esto mediante otro camino más ágil que ha menudo brinda excelentes resultados.

Ya hemos visto que la intersección de dos variedades lineales, si no es vacío, es otra variedad lineal cuyo subespacio asociado es la intersección de los subespacios asociados a las dos variedades lineales. A continuación, veremos qué ocurre cuando los subespacios asociados son complementarios.

Teorema 2.10.2 Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sean $\mathbf{A}=\mathrm{a}+\mathbf{W_A}$ y $\mathbf{B}=\mathrm{b}+\mathbf{W_B}$ variedades lineales en el espacio vectorial **V**.

Si $\mathbf{W_A}$ y $\mathbf{W_B}$ son subespacios complementarios entonces $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\{\mathbf{p}\}$.

Demostración:

Por ser $\mathbf{W_A}$ y $\mathbf{W_B}$ son subespacios complementarios se tiene que $\mathbf{W_A}\oplus\mathbf{W_B}=\mathbf{V}$, entonces todo vector de **V** se expresa como suma de un elemento de $\mathbf{W_A}$ y uno de $\mathbf{W_B}$. Si en particular se toma el vector $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ se tiene que:

$$\mathbf{b}-\mathbf{a}=\mathbf{w}+\mathbf{w'} \quad \text{con} \quad \mathbf{w}\in\mathbf{W_A} \quad \text{y} \quad \mathbf{w'}\in\mathbf{W_B}$$

Por consiguiente $\mathbf{p}=\underbrace{\mathbf{a}+\mathbf{w}}_{\in\mathbf{A}}=\underbrace{\mathbf{b}-\mathbf{w'}}_{\in\mathbf{B}}$ es un punto de $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$. Luego $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ no es vacía y por lo tanto

$$\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\mathbf{p}+(\mathbf{W_A}\cap\mathbf{W_B})=\mathbf{p}+\{\overline{\mathbf{0}}\}=\{\mathbf{p}\}.\ \#$$

El teorema anterior permite asegurar el siguiente resultado.

> **Teorema 2.10.3** Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial con producto interno. Sea $\mathbf{b}\in\mathbf{V}$. Si $\mathbf{A}=\mathbf{a}+\mathbf{W}$ es una variedad lineal de **V** de dimensión finita entonces existe un único punto de **A** más próximo a **b**.

Demostración:

a) Existencia.
Dado $\mathbf{b}\in\mathbf{V}$ se construye $\mathbf{B}=\mathbf{b}+\mathbf{W}^{\perp}$ (ver Figura 2.3).
Como $\mathbf{W}\oplus\mathbf{W}^{\perp}=\mathrm{V}$ entonces por **Teorema 2.10.2** existe un único $\mathbf{p}\in\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$

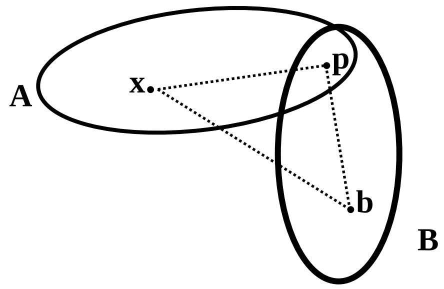


Figura 2.2

Vamos a mostrar que **p** es el único punto de **A** más próximo al punto **b**.

Sea $\mathbf{x}\in\mathbf{A}$ y planteamos $d^2(\mathbf{b},\mathbf{x})=\|\mathbf{b}-\mathbf{x}\|^2=\|(\mathbf{b}-\mathbf{p})+(\mathbf{p}-\mathbf{x})\|^2$

$(\mathbf{b}-\mathbf{p})\in\mathbf{W}^{\perp}$ (por ser diferencia de dos elementos de la valiedad lineal **B**)

$(\mathbf{p}-\mathbf{x})\in\mathbf{W}$ (por ser diferencia de dos elementos de la variedad lineal **A**)

Luego $(\mathbf{b}-\mathbf{p})\perp(\mathbf{p}-\mathbf{x})$ y en consecuencia por el teorema de Pitágoras resulta:

$$d^2(\mathbf{b},\mathbf{x})=\|\mathbf{b}-\mathbf{x}\|^2=\|(\mathbf{b}-\mathbf{p})+(\mathbf{p}-\mathbf{x})\|^2=\|\mathbf{b}-\mathbf{p}\|^2+\|\mathbf{p}-\mathbf{x}\|^2\geq\|\mathbf{b}-\mathbf{p}\|^2=d^2(\mathbf{b},\mathbf{p}) \qquad (1)$$

Lo cual prueba que **p** es un punto de **A**, más próximo de **b**.

b) Unicidad.
Si **q** es otro punto de **A** que está a la misma distancia de **b** que **p**, remplazando en (1) $\mathbf{x}=\mathbf{q}$ resulta:

$$d^2(\mathbf{b},\mathbf{q})=\|\mathbf{b}-\mathbf{q}\|^2=\|\mathbf{b}-\mathbf{p}\|^2+\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|^2=d^2(\mathbf{b},\mathbf{p})=\|\mathbf{b}-\mathbf{p}\|^2$$

en consecuencia $\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|^2=0 \Leftrightarrow \mathbf{p}=\mathbf{q}$.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto punto. Sea **A** el hiperplano definido por la ecuación

$$6x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 56.$$

Se quiere encontrar el punto $\mathbf{p} \in \mathbf{A}$ "más próximo" a $\mathbf{b} = (1,2,4,3)$ y calcular la distancia de **b** a **A**.

Para hallar el punto de **A** más próximo a **b**, construiremos primero la variedad lineal $\mathbf{B} = \mathbf{b} + \mathbf{W}^{\perp}$ para lo cual consideramos el subespacio **W** asociado a **A** que está definido por la ecuación

$$6x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0.$$

De allí que $\mathbf{W}^{\perp} = \langle (6,2,-2,2) \rangle$ y por lo tanto

$$\mathbf{B} = (1,2,4,3) + \langle (6,2,-2,2) \rangle.$$

Ahora debemos encontrar $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ (recordar que por **Teorema 2.10.2** sabemos que $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\mathbf{p}\}$) para ello plantemos que:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{B} \quad \text{sí y sólo si} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 + 6t,\ 2 + 2t,\ 4 - 2t,\ 3 + 2t)$$

Luego reemplazando en la ecuación de **A** se obtiene:

$$6(1 + 6t) + 2(2 + 2t) - 2(4 - 2t) + 2(3 + 2t) = 56 \ \Rightarrow\ 48t = 48 \ \Rightarrow\ t = 1$$

Por lo tanto $\mathbf{p} = (7,4,2,5)$ es el punto de **A** "más próximo" de **b**.
Además $d(\mathbf{b}, \mathbf{A}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{p}\| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto punto. Sea la variedad lineal

$$\mathbf{A} = (1,1,1,1) + \langle (1,2,-1,0),\ (0,1,2,1) \rangle.$$

Se desea encontrar el punto de **A** "más próximo" del punto $\mathbf{b} = (2,1,-1,0)$ y calcular además la $d(\mathbf{b}, \mathbf{A})$.

Construiremos primero la variedad lineal $\mathbf{B} = \mathbf{b} + \mathbf{W}^{\perp}$ para lo cual consideramos el subespacio **W** asociado a **A** que está dado por

$$\mathbf{W} = \langle (1,2,-1,0),\ (0,1,2,1) \rangle$$

por consiguiente $\mathbf{W}^{\perp}$ es el subespacio formado por los vectores que verifican el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Luego $\mathbf{B} = \mathbf{b} + \mathbf{W}^{\perp}$ es el conjunto de soluciones que se obtiene valuando en **b** los primeros miembros del sistema que define a $\mathbf{W}^{\perp}$, esto es

$$\mathbf{B}: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}.$$

Ahora debemos encontrar $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ (recordar que por **Teorema 2.10.2** sabemos que $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\mathbf{p}\}$) para ello plantemos que:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{A} \quad \text{sí y sólo si} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1+a,\ 1+2a+b,\ 1-a+2b,\ 1+b)$$

y reemplazando en el sistema de ecuaciones que define a **B** resulta:

$$\begin{cases} (1+a) + 2(1+2a+b) - (1-a+2b) = 5 \\ (1+2a+b) + 2(1-a+2b) + (1+b) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a = 3 \\ 6b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{-5}{6} \end{matrix}$$

Por lo tanto $\mathbf{p} = \left(1 + \frac{1}{2},\ 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-5}{6}\right),\ 1 - \frac{1}{2} + 2\left(\frac{-5}{6}\right),\ 1 + \left(\frac{-5}{6}\right)\right) = \frac{1}{6}(9, 7, -7, 1)$ es el punto de **A** "más próximo" de **b**.

Además $d(\mathbf{b}, \mathbf{A}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{p}\| = \frac{1}{6}\|(3, -1, 1, -1)\| = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Notar que se ha obtenido el mismo resultado que en el Ejemplo 1 de pag.103 pero en este caso se aplicaron los **Teoremas 2.10.2 y 2.10.3**..

2.12 Algunas Aplicaciones. Mínimos Cuadrados

En las distintas áreas de la Ingeniería y de la Ciencia en general, un problema básico es analizar y comprender las relaciones entre diversas cantidades que varían.

La relación más sencilla entre dos variables x e y es la ecuación lineal $y = \beta_0 + \beta_1 x$.

Los datos experimentales a menudo producen puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ que al graficarse parecen quedar cerca de una recta **L**

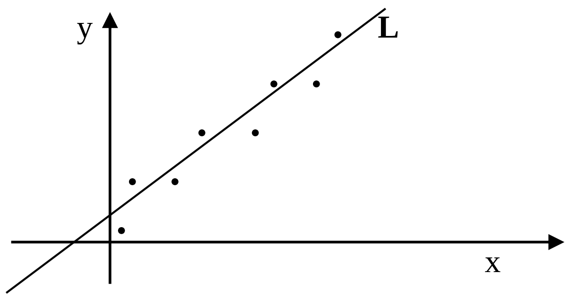


Figura 2.3

Se pretende determinar los parámetros β_0 y β_1 que hagan a la recta "**tan cercana**" de los puntos como sea posible.

Supongamos que β_0 y β_1 están fijos y consideremos la recta $y = \beta_0 + \beta_1 x$ como se muestra en la Figura 2.4.

Para cada punto de los datos , hay un punto correspondiente $(x_j, \beta_0 + \beta_1 x_j)$ sobre la recta con la misma coordenada x_j.

Llamamos y_j al valor observado de *y*, e $\hat{y}_j = \beta_0 + \beta_1 x_j$ al valor predicho de *y* (determinado por la recta). La diferencia $e_j = \hat{y}_j - y_j$ se llama error.

Hay varias maneras de medir que tan "cercana" está la recta **L** de los datos. La opción usual es considerar la suma de los cuadrados de los errores $\sum_{j=1}^{n} (e_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} (\hat{y}_j - y_j)^2$. (1)

La recta de mínimos cuadrados es $y = \beta_0 + \beta_1 x$ cuyos coeficientes son tales aquellos que minimizan la expresión (1).

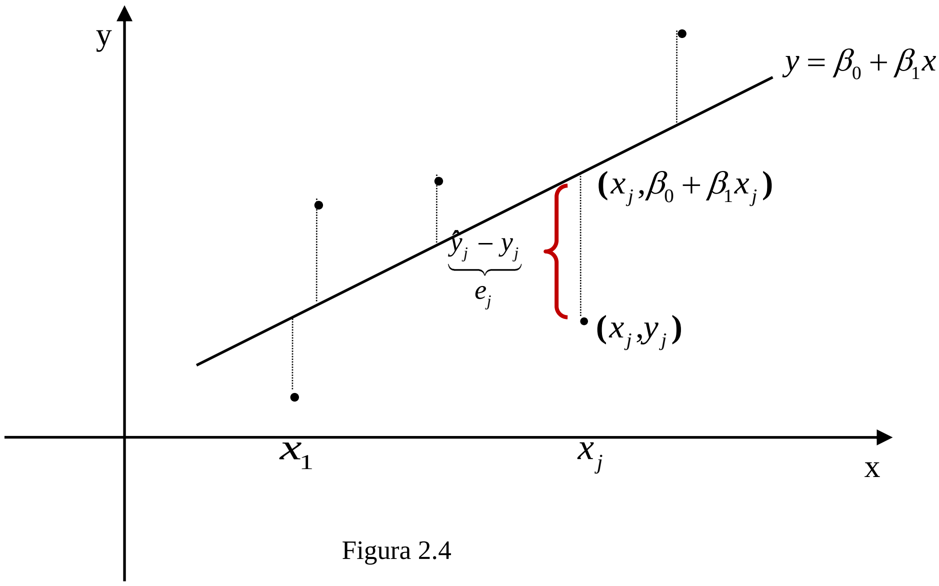


Figura 2.4

Si los puntos dato estuvieran sobre la recta **L**, los parámetros β_0 y β_1 satisfacerían las ecuaciones :

Valor predicho $\hat{y}_j = \beta_0 + \beta_1 x_j$		Valor observado y_j
$\beta_0 + \beta_1 x_1$	$=$	y_1
$\beta_0 + \beta_1 x_2$	$=$	y_2
$\vdots$		$\vdots$
$\beta_0 + \beta_1 x_n$	$=$	y_n

que puede escribirse en forma matricial

$$\mathbf{A.X} = \mathbf{b} \qquad (2)$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Por supuesto, si los puntos dato no están sobre la recta, entonces no hay parámetros β_0, β_1 que satisfagan la ecuación (2) y el sistema es incompatible.

Lo que se pretende es encontrar la recta **L** que **mejor aproxima** al conjunto de datos.
Consideremos entonces

$\mathbf{e} = \mathbf{A.X} - \mathbf{b}$ el **vector error** $\quad \mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$

Se busca minimizar el error, esto es se desea que $\|\mathbf{e}\|^2 = e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2$ sea mínimo.

El vector **X** que satisfaga esta condición, se llama solución por mínimos cuadrados.

Para resolver el problema consideremos que **W** es el espacio generado por las columnas de la matriz **A**. Para toda $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, el producto $\mathbf{A.X}$ es una combinación lineal de los vectores columna de **A**, luego para toda **X**, el vector $\mathbf{A.X} \in \mathbf{W}$.

Geométricamente, el resolver este problema de mínimos cuadrados equivale a encontrar un vector $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que $\mathbf{A.X}_0$ sea el vector de **W** más próximo a **b**.
Por el **Teorema 2.8.1**, el vector de **W** más próximo a **b** es la proyección ortogonal de **b** sobre **W** (Figura 2.5).

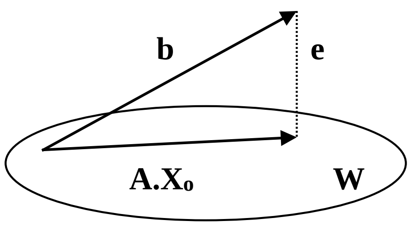


Figura 2.5

Ejemplos

Ejemplo 1

La Ley de Hooke establece que la longitud x de un resorte uniforme es una función lineal de la fuerza y que se aplica al resorte, respondiendo a la expresión $y = \beta_0 + \beta_1 x$ siendo β_1 la constante del resorte que depende del material del que está hecho el mismo (Figura 2.6)

Figura 2.6. Resorte (se supone amortiguamiento nulo)

Supongamos un resorte que sin estirar mide 6.1 cm de longitud (es decir cuando y =0). Luego al resorte se le aplican fuerzas de 2, 4 y 6 kilogramos, encontrándose que las longitudes correspondientes son 7.6 ; 8.7 y 10.4 cm respectivamente .

Se busca determinar la constante del resorte.

x_j	6.1	7.6	8.7	10.4
y_j	0	2	4	6

Se tiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6.1 \\ 1 & 7.6 \\ 1 & 8.7 \\ 1 & 10.4 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Las columnas de la matriz **A** generan el subespacio **W**. (Por comodidad trabajamos como si fueran n-uplas en vez de matrices columna)

Luego

$$\mathrm{W} = \left\langle (1,\ 1,1,1),\ (6.1, 7.6, 8.7, 10.4) \right\rangle.$$

Vamos a construir una base ortogonal para **W**.
Tomando

$$\mathbf{w}_1 = (1,1,1,1)$$

$$\mathbf{w}_2 = (6.1, 7.6, 8.7, 10.4) - \frac{(6.1, 7.6, 8.7, 10.4).(1,1,1,1)}{(1,1,1,1).(1,1,1,1)}(1,1,1,1) = (-2.1, -0.6, 0.5, 2.2)$$

de donde

$$\hat{\mathbf{b}} = proy_{\mathrm{W}}\, \mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}\,.\,\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1\,.\,\mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 + \frac{\mathbf{b}\,.\,\mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2\,.\,\mathbf{w}_2}\mathbf{w}_2 = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1.47\begin{bmatrix} -2.1 \\ -0.6 \\ 0.5 \\ 2.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.08 \\ 3.88 \\ 2.26 \\ -1.52 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema : $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \hat{\mathbf{b}}$ de donde resulta

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -8.6 \\ 1.4 \end{bmatrix}$$

Así el valor estimado de la constante del resorte es β_1 = 1.4 *Kg/cm*

Se ha resuelto el problema calculando primero la proyección de **b** en **W** : $\hat{\mathbf{b}} = proy_{\mathbf{W}}\,\mathbf{b}$ y luego resolviendo el sistema $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \hat{\mathbf{b}}$.

Sin embargo, es usual para la resolución de este tipo de situaciones hacer las siguientes consideraciones:

Por el Teorema de la proyección $\mathbf{b} - proy_{\mathbf{W}}\mathbf{b} = \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}.\mathbf{X_0}$ es un vector ortogonal a **W** luego $\left(\mathbf{A}^j\right)^{\mathrm{T}} .\, (\mathbf{b} - \mathbf{A}.\mathbf{X_0}) = 0$ con $\mathbf{A}^j$ columna *j* de la matriz **A** y $\mathbf{X_0}$ solución del sistema $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \hat{\mathbf{b}}$.

Pero $\left(\mathbf{A}^j\right)^{\mathrm{T}}$ es una fila de $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, luego $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{b} - \mathbf{A}.\mathbf{X_0}) = 0$ de donde:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{A}.\mathbf{X_0} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{b}$$

Esta última expresión se denomina sistema normal asociado con $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{b}$ y el problema de mínimos cuadrados se reduce a encontrar una solución exacta del mismo, esto es despejar $\mathbf{X_0}$.

Cabe señalar que en algunas aplicaciones es necesario ajustar los puntos dato a una curva distinta a una recta esto es, podría ser adecuado pretender alguna otra relación funcional entre *x* e *y*.

Así en general puede considerarse el problema de cómo ajustar los datos por medio de curvas que tienen la forma:

$$y = \beta_0\, f_0(x) + \beta_1\, f_1(x) + \cdots + \beta_k\, f_k(x) \qquad (3)$$

donde $f_0(x),\ f_1(x), \ldots, f_k(x)$ son funciones conocidas y los $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ son parámetros que deben determinarse.

Nótese que éste es un problema lineal, porque es lineal en los parámetros desconocidos.

Como antes, *y* de la ecuación (3) es el valor predicho. La diferencia entre el valor observado y el predicho es el error, de tal manera que los parámetros $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ se determinarán de forma tal que minimicen la suma de los cuadrados de los errores.

Ejemplo 2

Para medir el desempeño durante el despegue de un aeroplano, se midió la posición horizontal del avión cada segundo desde $t = 0$ a $t = 12$. Las posiciones (en pies) fueron:

tiempo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
posición	0	8.8	29.9	62.0	104.7	159.1	222.0	294.5	380.4	471.1	571.7	686.8	809.2

Se desea encontrar la curva cúbica de mínimos cuadrados $y = \beta_0 + \beta_1\, t + \beta_2\, t^2 + \beta_3\, t^3$ para los datos consignados.

Teniendo en cuenta los datos y la ecuación propuesta, escribimos las matrices **A**, **b**, **X**:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t^0 & t^1 & t^2 & t^3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \\ 1 & 8 & 64 & 512 \\ 1 & 9 & 81 & 729 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 \\ 1 & 11 & 121 & 1331 \\ 1 & 12 & 144 & 1728 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8.8 \\ 29.9 \\ 62.0 \\ 104.7 \\ 159.1 \\ 222.0 \\ 294.5 \\ 380.4 \\ 471.1 \\ 571.7 \\ 686.8 \\ 809.2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

que nos permite escribir el sistema $\mathbf{A.X = b}$ y su sistema asociado $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{.A}\right)\mathbf{.X} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{.b}$.

Para encontrar **X** se operó con las matrices usando el programa MATLAB

```
>> M = A´ * A;
>> K = M^(-1);
>> X = (K* A´)*b;
```

```
>> A = [1 0 0 0 ;1 1 1 1 ;1 2 4 8 ;1 3 9 27;1 4 16 64; 1 5 25 125;1 6 36 216;
      1 7 49 334;1 8 64 512;1 9 81 729;1 10 100 1000;1 11 121 1331;1 12 144 1728];
>> % la transpuesta se encuentra haciendo A'
>> A' ;
>> M = A'* A
M =
         13       78       650      6075
         78       650      6084     60647
         650      6084     60710    630267
         6075     60647    630267   6729857
>> % para encontrar la inversa de M se indica : M^(-1)
>> K = M^(-1)
K =
          0.7286  -0.4304   0.0683  -0.0032
         -0.4304   0.4100  -0.0777   0.0040
          0.0683  -0.0777   0.0160  -0.0009
         -0.0032   0.0040  -0.0009   0.0000

>> % luego X resulta de multiplicar K por A transpuesta por b

>> b = [0;8.8;29.9;62.0;104.7;159.1;222.0;294.5;380.4;471.1;571.7;686.8;809.2]
```

$>> \boldsymbol{X = (K * A') * b}$

$\boldsymbol{X} \;=\;$ -0.8672
4.7267
5.5473
-0.0268

Con lo cual la ecuación pedida toma la forma $y = -0.8672 + 4.7267\ t + 5.5473\ t^2 - 0.0268\ t^3$

$>>\ t\ = 0 : 0.1 : 14;$
$>>\ y = -0.8672 + 4.7267 * t + 5.5473 * (t.\wedge 2) - 0.02268 * (t.\wedge 3);$
$>>\ plot(t, y)$
$>>$ *xlabel(' tiempo en segundos')*
$>>$ *ylabel(' posicion horizontal del aeroplano en pies')*
$>>$ *title(' Ajuste de datos con parabola cubica')* (Figura 2.7)

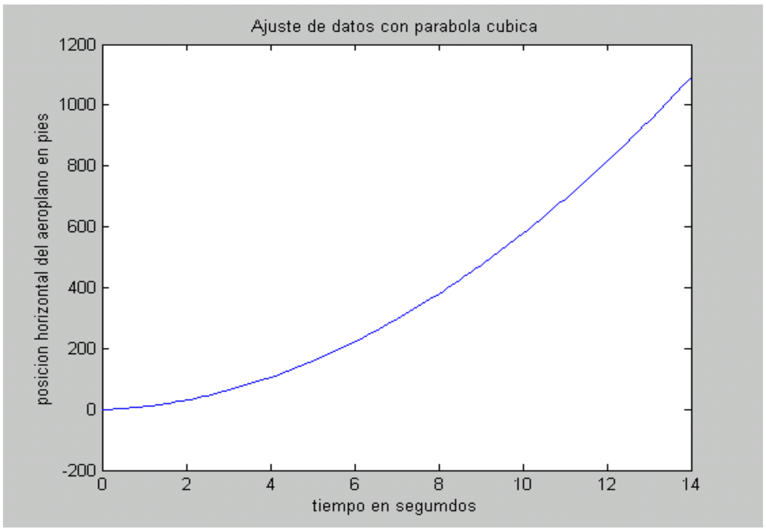


Figura 2.7

A partir de ella puede estimarse la velocidad del avión en un instante determinado, por ejemplo 4.5 segundos.

En efecto, recordando que $\mathbf{v} = \dfrac{dy}{dt}$ $\quad \hat{\mathbf{v}} = 4.72 + 11.09\ t - 0.08\ t^2 \ \Rightarrow\ \hat{\mathbf{v}}(4.5) = 53.02\ {}^{pies}\!/_{seg}$

Observar que construida la matríz $\mathbf{A}$ y $\mathbf{b}$ a partir de los datos, se ha resuelto el problema planteando el sistema asociado $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{b}$. Dado que en el ejemplo $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{A}\right)$ era inversible, fue posible despejar $\mathbf{X}$ y así encontrar la solución

$$\mathbf{X} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{A}\right)^{-1}.\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{b} \qquad (4)$$

La matriz $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{A}\right)^{-1}.\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{+}$ se denomina **matriz seudoinversa** de **A**.

Observar que $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{A}\right)$ es inversible sólo si las columnas de la matriz $\mathbf{A}$ son linealmente independientes, en cuyo caso el problema tiene una única solución por mínimos cuadrados dada por la ecuación (4).

2.13 Ejercicios del Capítulo

Ejercicio 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$. Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ vectores de $\mathbf{V}$ y sean además $\mathbf{u} = (1,0)$, $\mathbf{v} = (0,1)$ y $\mathbf{w} = (3,-1)$.

Considere también definida la regla $(\mathbf{x}/\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$.

a) Probar que la regla dada define un producto interno en $\mathbf{V}$.

b) Calcular $(\mathbf{u}/\mathbf{v})$, $\|\mathbf{v}\|$, $\|\mathbf{u}\|$ y $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v})$.

c) Calcular $proy_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$ y la componente de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathbf{v}$.

d) Verificar que los vectores obtenidos en el punto c) son ortogonales.

e) Analizar si $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$.

Ejercicio 2

Sea el espacio vectorial $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$, con producto interno canónico. Sean $\mathbf{u} = (2,1,3,-1)$ y $\mathbf{v} = (6,\text{-}2,2,4)$ vectores de $\mathbf{V}$.

a) Calcular $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v})$.

b) Expresar el vector **v**, como suma de un vector paralelo a **u** y un vector ortogonal a **u.**

c) Encontrar un vector **w**, tal que $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$ y $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$.

Ejercicio 3

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{C}[-1,1] = \{ f \ / \ f \text{ es continua en el intervalo } [-1,1] \}$ con el producto interno definido por: $(f/g) = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\, dx$. Sean $f(x) = 1 + x$ y $g(x) = 1 - x$ elementos de $\mathbf{V}$

a) Calcular (f/g).

b) Dar $proy_g\, f$.

c) Analizar si las funciones $h_1(x) = x$ y $h_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ son ortogonales.

Ejercicio 4

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales. Sea la base $\mathbf{B} = (1, X, X^2)$ y el producto interno definido de la siguiente manera

$$(\mathbf{p_1}/\mathbf{p_2}) = (\mathbf{p_1})_{\mathbf{B}} . (\mathbf{p_2})_{\mathbf{B}} \quad \text{con } \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbf{V} .$$

Dados $\mathbf{p} = -1 + 2X + X^2$ y $\mathbf{q} = 3 - 4X^2$ calcular $\|\mathbf{p}\|$, $\|\mathbf{q}\|$, $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v})$, $proy_{\mathbf{q}}\,\mathbf{p}$ y $d(\mathbf{p},\mathbf{q})$.

Ejercicio 5

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ con el producto interno definido por

$$\left(\mathbf{A}/\mathbf{B}\right) = \sum_{ij} a_{ij}\, b_{ij} \text{ siendo } \mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] \text{ y } \mathbf{B} = \left[b_{ij}\right].$$

Dadas $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ calcular: $\|\mathbf{A}\|$, $\|\mathbf{B}\|$, $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v})$ y $d(\mathbf{A},\mathbf{B})$.

Ejercicio 6

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{C}[0,\pi] = \left\{ f \ / \ f \text{ es continua en el intervalo } [0,\pi] \right\}$ con el producto interno definido por: $(f/g) = \int_0^{\pi} f(x).g(x)\, dx$.

Verificar que las siguientes funciones son ortogonales $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos(x)$ y $f_3(x) = \cos(2x)$.

Ejercicio 7

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{C}[0,1] = \left\{ f \ / \ f \text{ es continua en el intervalo } [0,1] \right\}$ con el producto interno definido por: $(f/g) = \int_0^{1} f(x).g(x)\, dx$. Encuentre la longitud de cada uno de los vectores $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = e^x$ y $h(x) = \mathbf{sen}(2\pi x)$.

Ejercicio 8

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ con el producto interno estándar. Encuentre los escalares k tal que $\|k.\mathbf{v}\| = 3$ siendo $\mathbf{v} = (1,2,4)$.

Ejercicio 9

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno estándar.
Encuentre dos vectores unitarios, ortogonales a $(2,1,-4,0)$ y $(1,-1,2,2)$.

Ejercicio 10

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno estándar. Dados los vectores

$$\mathbf{u_1} = (3,4,0,0),\ \mathbf{u_2} = (0,0,1,1),\ \mathbf{u_3} = (4,-3,0,0),\ \mathbf{u_4} = (0,0,-1,1).$$

a) Verifique que el conjunto $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}\}$ es un conjunto ortogonal y encuentre el conjunto ortonormal asociado a él.
b) ¿Es $\mathbf{B} = (\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4})$ una base de $\mathbf{V}$?. Justifique.
c) Hallar de ser posible $\left[(4,-2,2,4)\right]_{\mathbf{B}}$.

Ejercicio 11

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno estándar. Sea $\mathbf{W} = \left\langle (2,2,1,0),\ (1,0,1,0),\ (5,-1,1,0) \right\rangle$.

a) Encontrar una base ortogonal de **W** y extenderla a una base ortogonal de **V**.
b) Dar la base ortonormal asociada a la base hallada de **V**.

Ejercicio 12

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{C}[-1,1] = \{ f \ / \ f \text{ es continua en el intervalo } [-1,1] \}$ con el producto interno definido por: $(f/g) = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\, dx$.

Sea el subespacio $\mathbf{W} = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ donde $f_1(t) = 1,\ f_2(t) = t$ y $f_3(t) = t^2$.

a) Encuentre una base ortogonal de **W**.
b) Dar el coordenado de f_3 respecto a esa base.

Ejercicio 13

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno estándar.
Encontrar el complemento ortogonal de cada uno de los siguientes subespacios:

a) $\mathbf{H}:\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.
b) $\mathbf{U} = \left\langle (2,-1,1,1),\ (3,0,-1,-2),\ (0,-1,0,-1) \right\rangle$.
c) $\mathbf{W}: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$.

Ejercicio 14

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno estándar. Sea $\mathbf{u} = (2,-1,1,0)$.
En cada uno de los casos siguientes dar la “mejor aproximación” de **u** por vectores del subespacio **W** y la distancia de **u** a **W**.

a) $\mathbf{W} = \left\langle (1,1,2,1),\ (1,0,0,-1) \right\rangle$.
b) $\mathbf{W} = \left\langle (1,1,2,1), (2,0,0,1) \right\rangle$.

c) $\mathbf{W}: \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

d) $\mathbf{W}:\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$.

Ejercicio 15

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno estándar.

Definir la variedad lineal $\mathbf{A} = (2,0,3,-1) + \langle (1,2,0,2), (0,0,1,3) \rangle$ como conjunto solución de un adecuado sistema de ecuaciones.

Ejercicio 16

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno estándar. Sean los vectores $\mathbf{a} = (2,5,3,1)$ y $\mathbf{p} = (2,1,-1,3)$.

a) Encontrar la ecuación del hiperplano $\mathbf{H}_0$, perpendicular a $\mathbf{a}$ que incluye al origen.

b) Dar la ecuación de hiperplano $\mathbf{H}$, paralelo a $\mathbf{H}_0$ que incluye al punto **p**.

Ejercicio 17

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno estándar.

a) Dar una ecuación vectorial de la recta que incluye los puntos $\mathbf{p} = (-1,0,2,3)$ y $\mathbf{q} = (0,0,1,2)$.

b) Dar una ecuación vectorial del plano que incluye los puntos $\mathbf{r} = (1,0,0,0)$, $\mathbf{s} = (0,1,0,0)$ y $\mathbf{u} = (0,0,0,1)$.

c) Definir las variedades lineales anteriores por sistemas de ecuaciones lineales.

d) Verificar si las variedades lineales son paralelas, se intersecan o son alabeadas.

Ejercicio 18

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno estándar. Para cada una de las siguientes variedades lineales encontrar su "mejor aproximación" a $\mathbf{p} = (3,2,0,1)$ y calcular la distancia de **p** a cada una de ellas.

a) $\mathbf{A} = (1,1,1,1) + \langle (1,1,2,1) \rangle$.

b) $\mathbf{B}:\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 5$

c) $\mathbf{C}: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -2 \end{cases}$.

Ejercicio 19

Sea $\mathbf{V}=\mathbf{C}[0,1]=\{f \ / \ f \ \text{es continua en el intervalo}\,[0,1]\}$ con el producto interno definido por: $(f/g)=\int_0^1 f(x).g(x)\,dx$. Encontrar la función de primer grado que mejor aproxima a $g(x)=x^2+2$.

Ejercicio 20

Sea $\mathbf{V}=\mathbf{C}[0,1]=\{f \ / \ f \ \text{es continua en el intervalo}\,[0,1]\}$ con el producto interno definido por: $(f/g)=\int_0^1 f(x).g(x)\,dx$.

a) Si $\mathbf{W}=\langle f\rangle$ con $f(x)=1+x$ encuentre la función de **W** más próxima de $g(x)=3+x-x^2$.

b) Encuentre la función cuadrática que mejor aproxima a $h(x)=\sqrt{x}$.

Ejercicio 21

Para cada uno de los casos siguientes donde se da el subespacio **W** y un vector **v**,

1. $\mathbf{W}\subseteq\mathbb{R}^2$ tal que $ax+by=0$ y $\mathbf{v}=(a,b)$.
2. $\mathbf{W}\subseteq\mathbb{R}^3$ tal que $ax+by+cz=0$ $\mathbf{v}=(a,b,c)$, $\mathbf{v}\neq 0$.
3. $\mathbf{W}\subseteq\mathbb{R}^4$ tal que $\begin{cases} x=y \\ w=3y \end{cases}$ y $\mathbf{v}=(-1,2,3,1)$.

Se pide:

a) La proyección de **v** sobre **W**.

b) Una base ortonormal para $\mathbf{W}^{\perp}$.

c) La expresión de **v** como suma de un vector en **W** y un vector de $\mathbf{W}^{\perp}$ en cada caso.

Ejercicio 22

Encuentre la recta que da el mejor ajuste para los datos: $(1,4)$, $(-2,5)$, $(3,-1)$ y $(4,1)$.

Ejercicio 23

Encuentre el mejor ajuste cuadrático para los datos del ejercicio 22.

Ejercicio 24

Analice si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. JUSTIFIQUE su respuesta (Esto es: si es verdadera demuéstrela y si es falsa de un contraejemplo o enuncie a qué teorema contradice).

a) Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ espacio vectorial. Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ y sean los vectores de **V** $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. La expresión $x_1(u_1.v_1) + x_2(u_2.v_2) + x_3(u_3.v_3)$ determina un producto interno.

b) Sea **V** un espacio con producto interno y $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ entonces se verifica que $\left(\mathbf{u}/\bar{\mathbf{0}}\right) = 0$.

c) Si **u** y **v** son elementos de un espacio vectorial **V** con producto interno, entonces se verifica que $\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\| = |(\mathbf{u}/\mathbf{v})|$.

d) Sea **V** un espacio vectorial con producto interno. Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ y φ representa el ángulo entre **u** y **v** entonces $\cos\varphi < \dfrac{\mathbf{u}/\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$.

e) Sean **u** y **v** elementos de un espacio vectorial con producto interno y sea $k \in \mathbb{R}$. Si d es la función distancia entonces $d(k\,\mathbf{u}, k\,\mathbf{v}) = k\,d(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

f) En un espacio vectorial con producto interno, se cumple que $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

g) Un hiperplano cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, se representa por la ecuación $(\mathbf{x}-\mathbf{p}).\mathbf{a} = 0$ donde $\mathbf{p} \in \mathbf{H}$ y $\mathbf{a} \perp \mathbf{H}$.

h) Sean **u** y **v** elementos de un vectorial con producto interno. Si $\mathbf{u} = k\,\mathbf{v}$ entonces $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

i) Sea **V** un espacio vectorial con producto interno. Si $\mathbf{W} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$ y $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ entonces **u** se expresa como suma de sus proyecciones sobre $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$.

j) Sea **V** un espacio vectorial con producto interno. Sea **B** una base ortonormal de **V**. Si **u** y **v** elementos arbitrarios de **V** entonces $(\mathbf{u}/\mathbf{v}) = [\mathbf{u}]_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$.

k) Si **W** un subespacio de un espacio vectorial **V** con producto interno. Entonces $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}^{\perp} = \{\bar{\mathbf{0}}\}$.

Ejercicio 25

Se conocen los siguientes datos sobre consumo de combustible en mpg (millas por galón) para vehículos de pasajeros:

año	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
mpg	29.5	30.4	33.3	34.2	34.9	36.2	37.8	39.2	40.0

a) Encuentre una recta de ajuste por mínimos cuadrados y grafíquela ($x = 0$ representa 2010, $x = 8$ representa 2018, etc). Analice si la recta parece un ajuste razonable para los datos.

b) Suponiendo que la tendencia continúa, utilice la ecuación de la recta para predecir el año en que el promedio de mpg será de 43.

Ejercicio 26

Un diseñador industrial está interesado en saber que efecto tiene la temperatura sobre la resistencia de un producto. Como los costos involucrados son altos, se dispone de una cantidad reducida de datos:

temperatura	600	600	700	700	700	900	950	950
Nivel de resistencia	40	44	48	46	50	48	46	45

Encuentre una recta de mínimos cuadrados que se ajuste y una curva cuadrática de mínimos cuadrados que se ajuste. Grafique ambas.
A partir de este análisis argumente si cree que hay evidencia de que la temperatura tiene algún efecto sobre la resistencia y, si es así, diga qué temperatura recomendaría para fabricar el producto más fuerte. (Valores mayores de nivel de resistencia indican un producto más fuerte).

2.14 Guía de Estudio

1) Defina **producto interno** y de las Definiciones Métricas referidas a: **distancia**, **ortogonalidad** y **proyección**.

2) Muestre que dado $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ con **V:** vectorial con producto interno y $\mathbf{v} \neq \bar{\mathbf{0}}$ entonces todo $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ se expresa de forma única como suma de un vector paralelo a **v** y otro ortogonal a **v**.

3) ¿Cual es la ecuación del hiperplano que pasa por **p** y es ortogonal al vector **a**?.

4) Enuncie y demuestre la **Desigualdad de Cauchy-Schwarz**. ¿Cómo se la vincula al concepto de ángulo entre dos vectores?.

5) Enuncie y demuestre la **Desigualdad del Triángulo**.

6) ¿Qué dice el **Teorema de Pitágoras Generalizado**? Demuéstrelo.

7) ¿Qué entiende por **conjunto ortogonal**? Enuncie y demuestre propiedades de los conjuntos ortogonales.

8) ¿Qué es una **base ortonormal**? ¿Qué ventajas tiene tomar como referencia una base ortonormal?.

9) Describa el **proceso de ortogonalización de Gram – Schmidt**.

10) ¿A que se llama **descomposición QR** de una matriz?.

11) Defina **complemento ortogonal**. Muestre que $\mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^{\perp} = \mathbf{V}$ **.**

12) ¿Cómo se define la **distancia** entre un vector y un conjunto **S**?

13) Defina Variedad Lineal. ¿Cuándo dos variedades lineales son paralelas? Si dos variedades lineales se intersecan, ¿qué característica tiene la intersección? Demuéstrelo.

14) ¿Cómo se puede determinar el **punto más próximo** de una variedad lineal a un punto dado? ¿por qué?.