

Definiciones de Lógica 2017

Agustín Curto

Part I

Estructuras algebraicas ordenadas

1 Posets

ORDEN PARCIAL: Sea $P \neq \emptyset$ cualquiera, una relación binaria \leq sobre P será llamada un **orden parcial** sobre P si se cumplen las siguientes condiciones:

1. \leq es **reflexiva**, i.e $a \leq a \quad \forall a \in P$.
2. \leq es **antisimétrica**, i.e si $a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in P$.
3. \leq es **transitiva**, i.e si $a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \leq c \quad \forall a, b, c \in P$.

POSET: Un conjunto parcialmente ordenado o **poset** será un par (P, \leq) donde:

- $P \neq \emptyset$ cualquiera
- \leq es un orden parcial sobre P

RELACIONES BINARIAS $<, \prec$: Dado un poset (P, \leq) definimos $<, \prec$ sobre P de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow a \leq b \text{ y } a \neq b \\ a \prec b &\Leftrightarrow a < b \text{ y } \nexists z \text{ tal que } a < z < b \end{aligned}$$

DEFINICIONES: Sea (P, \leq) un poset, entonces:

- **Maximal:** $a \in P$ es un elemento maximal de (P, \leq) si $a \not\leq b, \forall b \in P$.
- **Minimal:** $a \in P$ es un elemento minimal de (P, \leq) si $b \not\leq a, \forall b \in P$.
- **Máximo:** $a \in P$ es el elemento máximo de (P, \leq) si $b \leq a, \forall b \in P$.
- **Mínimo:** $a \in P$ es el elemento mínimo de (P, \leq) si $a \leq b, \forall b \in P$.

Dado $S \subseteq P$:

- **Cota superior:** $a \in P$ es cota superior de S en (P, \leq) cuando $b \leq a, \forall b \in S$.
- **Cota inferior:** $a \in P$ es cota inferior de S en (P, \leq) cuando $a \leq b, \forall b \in S$.
- **Supremo:** $a \in P$ será llamado supremo de S en (P, \leq) cuando se den las siguientes condiciones:
 1. a es a cota superior de S en (P, \leq)
 2. Para cada $b \in P$, si b es una cota superior de S en $(P, \leq) \Rightarrow a \leq b$.

- **Ínfimo:** $a \in P$ será llamado ínfimo de S en (P, \leq) cuando se den las siguientes condiciones:

1. a es a cota inferior de S en (P, \leq)
2. Para cada $b \in P$, si b es una cota inferior de S en $(P, \leq) \Rightarrow b \leq a$.

HOMOMORFISMO E ISOMORFISMO DE POSETS: Sean (P, \leq) y (P', \leq') posets

- Una función $F : P \rightarrow P'$ será llamada un **homomorfismo** de (P, \leq) en (P', \leq') si $\forall x, y \in P$ se cumple que $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq' F(y)$.
- Una función $F : P \rightarrow P'$ será llamada un **isomorfismo** de (P, \leq) en (P', \leq') si F es biyectiva y tanto F como F^{-1} son homomorfismos.

2 Reticulados

RETICULADO:

1. Un conjunto parcialmente ordenado (L, \leq) es un **reticulado** si $\forall a, b \in L$, existen $\sup(\{a, b\})$ e $\inf(\{a, b\})$. Se definen:

$$\begin{aligned} a \text{ s } b &= \sup(\{a, b\}) \\ a \text{ i } b &= \inf(\{a, b\}) \end{aligned}$$

2. Una terna (L, s, i) , donde $L \neq \emptyset$ cualquiera, $x, y, z \in L$ cualesquiera y s e i son dos operaciones binarias sobre L será llamada **reticulado** cuando cumpla las siguientes identidades:

$$(I1) \quad x \text{ s } x = x \text{ i } x = x$$

$$(I2) \quad x \text{ s } y = y \text{ s } x$$

$$(I3) \quad x \text{ i } y = y \text{ i } x$$

$$(I4) \quad (x \text{ s } y) \text{ s } z = x \text{ s } (y \text{ s } z)$$

$$(I5) \quad (x \text{ i } y) \text{ i } z = x \text{ i } (y \text{ i } z)$$

$$(I6) \quad x \text{ s } (x \text{ i } y) = x$$

$$(I7) \quad x \text{ i } (x \text{ s } y) = x$$

SUBRETICULADO: Dado (L, s, i) reticulado, diremos que $(L', \text{s}', \text{i}')$ es **subreticulado** de (L, s, i) si:

- $L \subseteq L'$
- $\text{s} = \text{s}'|_{L \times L}$ y $\text{i} = \text{i}'|_{L \times L}$

Un conjunto $\emptyset \neq S \subseteq L$ será llamado **subuniverso** de (L, s, i) si es cerrado bajo las operaciones s e i , es decir, $x \text{ s } y, x \text{ i } y \in S$. Es fácil notar si S es subuniverso de (L, s, i) entonces $(S, \text{s}|_{S \times S}, \text{i}|_{S \times S})$ es **subreticulado** de (L, s, i) .

HOMOMORFISMO E ISOMORFISMO DE RETICULADOS: Sean (L, s, i) y $(L', \text{s}', \text{i}')$ reticulados.

- Una función $F : L \rightarrow L'$ será llamada un **homomorfismo** de (L, s, i) en $(L', \text{s}', \text{i}')$ si $\forall x, y \in L$ se cumple que:

$$\begin{aligned} F(x \text{ s } y) &= F(x) \text{ s}' F(y) \\ F(x \text{ i } y) &= F(x) \text{ i}' F(y) \end{aligned}$$

- Una función $F : L \rightarrow L'$ será llamada un **isomorfismo** de (L, s, i) en (L', s', i') si F es **biyectiva** y tanto F como F^{-1} son **homomorfismos**.

CONGRUENCIAS DE RETICULADOS: Sea (L, s, i) un reticulado, una **congruencia** sobre (L, s, i) será una **relación de equivalencia** θ la cual cumpla:

$$x\theta x' \text{ y } y\theta y' \Rightarrow (x \text{ s } y)\theta(x' \text{ s } y') \text{ y } (x \text{ i } y)\theta(x' \text{ i } y')$$

Definimos, sobre L/θ , \tilde{s} e \tilde{i} , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x/\theta \tilde{s} y/\theta &= (x \text{ s } y)/\theta \\ x/\theta \tilde{i} y/\theta &= (x \text{ i } y)/\theta \end{aligned}$$

KERNEL: Dada una función $F : A \rightarrow B$, llamaremos núcleo de F a la relación de equivalencia binaria:

$$\ker F = \{(a, b) \in A^2 : F(a) = F(b)\}$$

PROYECCIÓN CANÓNICA: Si R es una **relación de equivalencia** sobre un conjunto A , definimos la función:

$$\begin{aligned} \pi_R : \quad A &\rightarrow A/R \\ a &\rightarrow a/R \end{aligned}$$

3 Reticulados Acotados

RETICULADO ACOTADO: Sea $(L, s, i, 0, 1)$, donde $L \neq \emptyset$, s e i operaciones binarias sobre L y $0, 1 \in L$, será llamada un **reticulado acotado** si (L, s, i) es un reticulado y además se cumplen las siguientes identidades:

$$(I8) \quad 0 \text{ s } x = x, \text{ para cada } x \in L$$

$$(I9) \quad x \text{ s } 1 = 1, \text{ para cada } x \in L$$

SUBRETICULADO ACOTADO: Dado $(L, s, i, 0, 1)$ reticulado acotado, diremos que $(L', s', i'), 0', 1'$ es **subreticulado acotado** de $(L, s, i, 0, 1)$ si:

- $L \subseteq L'$
- $0 = 0'$ y $1 = 1'$
- $s = s'|_{L \times L}$ y $i = i'|_{L \times L}$

Un conjunto $\emptyset \neq S \subseteq L$ será llamado **subuniverso** de $(L, s, i, 0, 1)$ si es cerrado bajo las operaciones s e i , es decir, $x \text{ s } y, x \text{ i } y \in S$. Es fácil notar si S es subuniverso de $(L, s, i, 0, 1)$ entonces $(S, s|_{S \times S}, i|_{S \times S}, 0, 1)$ es **subreticulado** de $(L, s, i, 0, 1)$.

HOMOMORFISMO E ISOMORFISMO DE RETICULADOS ACOTADOS: Sean $(L, s, i, 0, 1)$ y $(L', s', i', 0', 1')$ reticulados acotados.

- Una función $F : L \rightarrow L'$ será llamada un **homomorfismo** de $(L, s, i, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$ si $\forall x, y \in L$ se cumple que:

$$\begin{aligned} F(x \text{ s } y) &= F(x) \text{ s}' F(y) \\ F(x \text{ i } y) &= F(x) \text{ i}' F(y) \\ F(0) &= 0' \\ F(1) &= 1' \end{aligned}$$

- Una función $F : L \rightarrow L'$ será llamada un **isomorfismo** de $(L, s, i, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$ si F es **biyectiva** y tanto F como F^{-1} son **homomorfismos**.

CONGRUENCIAS DE RETICULADOS ACOTADOS: Sea $(L, s, i, 0, 1)$ un reticulado, una **congruencia** sobre $(L, s, i, 0, 1)$ será una **relación de equivalencia** θ la cual cumpla:

$$x\theta x' \text{ y } y\theta y' \Rightarrow (x \text{ s } y)\theta(x' \text{ s } y') \text{ y } (x \text{ i } y)\theta(x' \text{ i } y')$$

Definimos, sobre L/θ , \tilde{s} e \tilde{i} , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x/\theta \tilde{s} y/\theta &= (x \text{ s } y)/\theta \\ x/\theta \tilde{i} y/\theta &= (x \text{ i } y)/\theta \end{aligned}$$

4 Reticulados Complementados

COMPLEMENTO: Sea $(L, s, i, 0, 1)$ un reticulado acotado. Dado $a \in L$, diremos que a es **complementado**, si $\exists b \in L$ tal que:

$$\begin{aligned} a \text{ s } b &= 1 \\ a \text{ i } b &= 0 \end{aligned}$$

RETICULADO COMPLEMENTADO: $(L, s, i, ^c, 0, 1)$, donde $L \neq \emptyset$, s e i son operaciones binarias sobre L , c es una operación unaria sobre L y $0, 1 \in L$, será llamada un **reticulado complementado** si $(L, s, i, 0, 1)$ es un reticulado acotado y además:

$$(I10) \quad x \text{ s } x^c = 1, \text{ para cada } x \in L$$

$$(I11) \quad x \text{ i } x^c = 0, \text{ para cada } x \in L$$

SUBRETICULADO COMPLEMENTADO: Dado $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ reticulado complementado, diremos que $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ es **subreticulado complementado** de $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ si:

- $L \subseteq L'$
- $0 = 0'$ y $1 = 1'$
- $s = s'|_{L \times L}$, $i = i'|_{L \times L}$ y $^c = ^{c'}|_L$

Un conjunto $\emptyset \neq S \subseteq L$ será llamado **subuniverso** de $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ si es cerrado bajo las operaciones s , i y c , es decir, $x \text{ s } y, x \text{ i } y, x^c \in S$. Es fácil notar si S es subuniverso de $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ entonces $(S, s|_{S \times S}, i|_{S \times S}, ^c|_S, 0, 1)$ es **subreticulado** de $(L, s, i, ^c, 0, 1)$.

HOMOMORFISMO E ISOMORFISMO DE RETICULADOS COMPLEMENTADOS: Sean $(L, s, i, ^c, 0, 1)$ y $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ reticulados complementados.

- Una función $F : L \rightarrow L'$ será llamada un **homomorfismo** de $(L, s, i, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$ si $\forall x, y \in L$ se cumple que:

$$\begin{aligned} F(x \text{ s } y) &= F(x) \text{ s}' F(y) \\ F(x \text{ i } y) &= F(x) \text{ i}' F(y) \\ F(x^c) &= F(x)^{c'} \\ F(0) &= 0' \\ F(1) &= 1' \end{aligned}$$

- Una función $F : L \rightarrow L'$ será llamada un **isomorfismo** de $(L, s, i, c, 0, 1)$ en $(L', s', i', c', 0', 1')$ si F es **biyectiva** y tanto F como F^{-1} son **homomorfismos**.

CONGRUENCIAS DE RETICULADOS COMPLEMENTADO: Sea $(L, s, i, c, 0, 1)$ un reticulado, una **congruencia** sobre $(L, s, i, c, 0, 1)$ será una **relación de equivalencia** θ la cual cumpla:

1. $x\theta x'$ y $y\theta y' \Rightarrow (x \text{ s } y)\theta(x' \text{ s } y')$ y $(x \text{ i } y)\theta(x' \text{ i } y')$
2. $x/\theta = y/\theta \Rightarrow x^c/\theta = y^c/\theta$

Definimos, sobre L/θ , \tilde{s} , \tilde{i} y \tilde{c} , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x/\theta \tilde{s} y/\theta &= (x \text{ s } y)/\theta \\ x/\theta \tilde{i} y/\theta &= (x \text{ i } y)/\theta \\ (x/\theta)^{\tilde{c}} &= x^c/\theta \end{aligned}$$

5 Reticulados Distributivos

RETICULADO DISTRIBUTIVO: Un reticulado (L, s, i) , se llamará **distributivo** cuando cumpla alguna de las siguiente propiedades, para $x, y, z \in L$ cualesquiera:

1. $x \text{ i } (y \text{ s } z) = (x \text{ i } y) \text{ s } (x \text{ i } z)$
2. $x \text{ s } (y \text{ i } z) = (x \text{ s } y) \text{ i } (x \text{ s } z)$

FILTRO: Un **filtro** de un reticulado (L, s, i) será un subconjunto $F \subseteq L$ tal que:

1. $F \neq \emptyset$
2. $x, y \in F \Rightarrow x \text{ i } y \in F$
3. $x \in F$ y $x \leq y \Rightarrow y \in F$.

FILTRO GENERADO: Dado reticulado (L, s, i) , un conjunto $S \subseteq L$, el **filtro generado por S** será el siguiente conjunto:

$$[S] = \{y \in L : y \geq s_1 \text{ i } \dots \text{ i } s_n, \text{ para algunos } s_1, \dots, s_n \in S, n \geq 1\}$$

CADENA: Sea (P, \leq) un poset. Un subconjunto $C \subseteq P$ será llamando una **cadena**, si para cada $x, y \in C$, se tiene que $x \leq y$ ó $y \leq x$.

FILTRO PRIMO: Un filtro F de un reticulado (L, s, i) será llamado **primo** cuando se cumplan:

1. $F \neq L$
2. $x \text{ s } y \in F \Rightarrow x \in F$ o $y \in F$.

ÁLGEBRA DE BOOLE: Un **Álgebra de Boole** será un reticulado complementado y distributivo.

Part II

Términos y fórmulas

Part III

Estructuras

Part IV

Teorías de primer orden

Part V

Aritmética de Peano