Definiciones de Lógica 2017

Agustín Curto

Part I

Estructuras algebráicas ordenadas

1 Posets

ORDEN PARCIAL: Sea $P \neq \emptyset$ cualquiera, una relación binaria $\leq$ sobre P será llamada un **orden parcial** sobre P si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\leq$ es **reflexiva**, i.e $a \leq a \;\; \forall a \in P$.
2. $\leq$ es **antisimétrica**, i.e si $a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a = b \;\; \forall a, b \in P$.
3. $\leq$ es **transitiva**, i.e si $a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \leq c \;\; \forall a, b, c \in P$.

POSET: Un conjunto parcialmente ordenado o **poset** será un par $(P, \leq)$ donde:

- $P \neq \emptyset$ cualquiera
- $\leq$ es un orden parcial sobre P

RELACIONES BINARIAS $<, \prec$: Dado un poset $(P, \leq)$ definimos , $\prec$ sobre P de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a < b &\;\;\Leftrightarrow\;\; a \leq b \text{ y } a \neq b \\ a \prec b &\;\;\Leftrightarrow\;\; a < b \text{ y } \nexists z \; a < z < b \end{aligned}$$

DEFINICIONES: Sea $(P, \leq)$ un poset, entonces:

- **Maximal:** $a \in P$ es un elemento maximal de $(P, \leq)$ si $a \nless b, \; \forall b \in P$.
- **Minimal:** $a \in P$ es un elemento minimal de $(P, \leq)$ si $b \nless a, \; \forall b \in P$.
- **Máximo:** $a \in P$ es el elemento máximo de $(P, \leq)$ si $b \leq a, \; \forall b \in P$.
- **Mínimo:** $a \in P$ es el elemento mínimo de $(P, \leq)$ si $a \leq b, \; \forall b \in P$.

  Dado $S \subseteq P$:

- **Cota superior:** $a \in P$ es cota superior de S en $(P, \leq)$ cuando $b \leq a, \; \forall b \in S$.
- **Cota inferior:** $a \in P$ es cota inferior de S en $(P, \leq)$ cuando $a \leq b, \; \forall b \in S$
- **Supremo:** $a \in P$ será llamado supremo de S en $(P, \leq)$ cuando se den las siguientes condiciones:
  1. a es a cota superior de S en $(P, \leq)$
  2. Para cada $b \in P$, si b es una cota superior de S en $(P, \leq) \Rightarrow a \leq b$.

- **Ínfimo:** $a \in P$ será llamado ínfimo de S en $(P, \leq)$ cuando se den las siguientes condiciones:

    1. a es a cota inferior de S en $(P, \leq)$
    2. Para cada $b \in P$, si b es una cota inferior de S en $(P, \leq) \Rightarrow b \leq a$.

HOMOMORFISMO E ISOMORFISMO DE POSETS: Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets

- Una función $F : P \rightarrow P'$ será llamada un **homomorfismo** de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ si $\forall x, y \in P$ se cumple que $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq' F(y)$.

- Una función $F : P \rightarrow P'$ será llamada un **isomorfismo** de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ si F es **biyectiva** y tanto F como F^{-1} son **homomorfismos**.

2 Reticulados

RETICULADO:

1. Un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ es un **reticulado** si $\forall a, b \in L$, existen $\sup(\{a, b\})$ e $\inf(\{a, b\})$. Se definen:
$$\begin{aligned} a \mathsf{\ s\ } b &= \sup(\{a, b\}) \\ a \mathsf{\ i\ } b &= \inf(\{a, b\}) \end{aligned}$$

2. Una terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$, donde $L \neq \emptyset$ cualquiera, $x, y, z \in L$ cualquieras y s e i son dos operaciones binarias sobre L será llamada **reticulado** cuando cumpla las siguientes identidades:

    (I1) $x \mathsf{\ s\ } x = x \mathsf{\ i\ } x = x$

    (I2) $x \mathsf{\ s\ } y = y \mathsf{\ s\ } x$

    (I3) $x \mathsf{\ i\ } y = y \mathsf{\ i\ } x$

    (I4) $(x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ s\ } z = x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ s\ } z)$

    (I5) $(x \mathsf{\ i\ } y) \mathsf{\ i\ } z = x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ i\ } z)$

    (I6) $x \mathsf{\ s\ } (x \mathsf{\ i\ } y) = x$

    (I7) $x \mathsf{\ i\ } (x \mathsf{\ s\ } y) = x$

SUBRETICULADO: Dado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ reticulado, diremos que $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ es **subreticulado** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ si:

- $L \subseteq L'$

- $\mathsf{s} = \mathsf{s}'|_{L \times L}$ y $\mathsf{i} = \mathsf{i}'|_{L \times L}$

.
Un conjunto $\emptyset \neq S \subseteq L$ será llamado **subuniverso** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ si es cerrado bajo las operaciones s e i, es decir, $x \mathsf{\ s\ } y, x \mathsf{\ i\ } y \in S$. Es fácil notar si S es subuniverso de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ entonces $(S, \mathsf{s}|_{S \times S}, \mathsf{i}|_{S \times S})$ es **subreticulado** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$.

HOMOMORFISMO E ISOMORFISMO DE RETICULADOS: Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados.

- Una función $F : L \rightarrow L'$ será llamada un **homomorfismo** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si $\forall x, y \in L$ se cumple que:
$$\begin{aligned} F(x \mathsf{\ s\ } y) &= F(x) \mathsf{\ s}' F(y) \\ F(x \mathsf{\ i\ } y) &= F(x) \mathsf{\ i}' F(y) \end{aligned}$$

- Una función $F : L \to L'$ será llamada un **isomorfismo** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si F es **biyectiva** y tanto F como F^{-1} son **homomorfismos**.

CONGRUENCIAS DE RETICULADOS: Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado, una **congruencia** sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ será una **relación de equivalencia** θ la cual cumpla:

$$x\theta x' \text{ y } y\theta y' \Rightarrow (x \mathsf{~s~} y)\theta(x' \mathsf{~s~} y') \text{ y } (x \mathsf{~i~} y)\theta(x' \mathsf{~i~} y')$$

Definimos, sobre L/θ, $\tilde{\mathsf{s}}$ e $\tilde{\imath}$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta &= (x \mathsf{~s~} y)/\theta \\ x/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; y/\theta &= (x \mathsf{~i~} y)/\theta \end{aligned}$$

KERNEL: Dada una función $F : A \to B$, llamaremos núcleo de F a la relación de equivalencia binaria:

$$\ker F = \{(a, b) \in A^2 : F(a) = F(b)\}$$

PROYECCIÓN CANÓNICA: Si R es una **relación de equivalencia** sobre un conjunto A, definimos la función:

$$\begin{aligned} \pi_R : \quad & A \to A/R \\ & a \to a/R \end{aligned}$$

3 Reticulados Acotados

RETICULADO ACOTADO: Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$, donde $L \neq \emptyset$, s e i operaciones binarias sobre L y $0, 1 \in L$, será llamada un **reticulado acotado** si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es un reticulado y además se cumplen las siguientes identidades:

(I8) $0 \mathsf{~s~} x = x$, para cada $x \in L$

(I9) $x \mathsf{~s~} 1 = 1$, para cada $x \in L$

SUBRETICULADO ACOTADO: Dado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ reticulado acotado, diremos que $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}'), 0', 1'$ es **subreticulado acotado** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ si:

- $L \subseteq L'$
- $0 = 0'$ y $1 = 1'$
- $\mathsf{s} = \mathsf{s}'|_{L \times L}$ y $\mathsf{i} = \mathsf{i}'|_{L \times L}$

.
Un conjunto $\emptyset \neq S \subseteq L$ será llamado **subuniverso** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ si es cerrado bajo las operaciones s e i, es decir, $x \mathsf{~s~} y, x \mathsf{~i~} y \in S$. Es fácil notar si S es subuniverso de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ entonces $(S, \mathsf{s}|_{S \times S}, \mathsf{i}|_{S \times S}, 0, 1)$ es **subreticulado** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$.

HOMOMORFISMO E ISOMORFISMO DE RETICULADOS ACOTADOS: Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ reticulados acotados.

- Una función $F : L \to L'$ será llamada un **homomorfismo** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ si $\forall x, y \in L$ se cumple que:

$$\begin{aligned} F(x \mathsf{~s~} y) &= F(x) \mathsf{~s}' F(y) \\ F(x \mathsf{~i~} y) &= F(x) \mathsf{~i}' F(y) \\ F(0) &= 0' \\ F(1) &= 1' \end{aligned}$$

- Una función $F : L \to L'$ será llamada un **isomorfismo** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ si F es **biyectiva** y tanto F como F^{-1} son **homomorfismos**.

CONGRUENCIAS DE RETICULADOS ACOTADOS: Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado, una **congruencia** sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ será una **relación de equivalencia** θ la cual cumpla:

$$x\theta x' \text{ y } y\theta y' \Rightarrow (x \mathsf{ s } y)\theta(x' \mathsf{ s } y') \text{ y } (x \mathsf{ i } y)\theta(x' \mathsf{ i } y')$$

Definimos, sobre L/θ, $\tilde{\mathsf{s}}$ e $\tilde{\imath}$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta &= (x \mathsf{ s } y)/\theta \\ x/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; y/\theta &= (x \mathsf{ i } y)/\theta \end{aligned}$$

4 Reticulados Complementados

COMPLEMENTO: Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Dado $a \in L$, diremos que a es **complementado**, si $\exists b \in L$ tal que:

$$\begin{aligned} a \mathsf{ s } b &= 1 \\ a \mathsf{ i } b &= 0 \end{aligned}$$

RETICULADO COMPLEMENTADO: $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$, donde $L \neq \emptyset$, s e i son operaciones binarias sobre L, ^{c} es una operación unaria sobre L y $0, 1 \in L$, será llamada un **reticulado complementado** si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ es un reticulado acotado y además:

(I10) $x \mathsf{ s } x^c = 1$, para cada $x \in L$

(I11) $x \mathsf{ i } x^c = 0$, para cada $x \in L$

SUBRETICULADO COMPLEMENTADO: Dado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ reticulado complementado, diremos que $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}'), ^{c'}, 0', 1'$ es **subreticulado complementado** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ si:

- $L \subseteq L'$
- $0 = 0'$ y $1 = 1'$
- $\mathsf{s} = \mathsf{s}'|_{L \times L}$, $\mathsf{i} = \mathsf{i}'|_{L \times L}$ y $^c = ^{c'}|_L$

.
Un conjunto $\emptyset \neq S \subseteq L$ será llamado **subuniverso** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ si es cerrado bajo las operaciones s, i y ^{c}, es decir, $x \mathsf{ s } y, x \mathsf{ i } y, x^c \in S$. Es fácil notar si S es subuniverso de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, , ^c, 0, 1)$ entonces $(S, \mathsf{s}|_{S \times S}, \mathsf{i}|_{S \times S}, , ^c|_S, 0, 1)$ es **subreticulado** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$.

HOMOMORFISMO E ISOMORFISMO DE RETICULADOS COMPLEMENTADOS: Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ reticulados complementados.

- Una función $F : L \to L'$ será llamada un **homomorfismo** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ si $\forall x, y \in L$ se cumple que:

$$\begin{aligned} F(x \mathsf{ s } y) &= F(x) \mathsf{ s}' F(y) \\ F(x \mathsf{ i } y) &= F(x) \mathsf{ i}' F(y) \\ F(x^c) &= F(x)^{c'} \\ F(0) &= 0' \\ F(1) &= 1' \end{aligned}$$

- Una función $F : L \to L'$ será llamada un **isomorfismo** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ si F es **biyectiva** y tanto F como F^{-1} son **homomorfismos**.

CONGRUENCIAS DE RETICULADOS COMPLEMENTADO: Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ un reticulado, una **congruencia** sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ será una **relación de equivalencia** θ la cual cumpla:

1. $x\theta x'$ y $y\theta y' \Rightarrow (x \mathsf{\ s\ } y)\theta(x' \mathsf{\ s\ } y')$ y $(x \mathsf{\ i\ } y)\theta(x' \mathsf{\ i\ } y')$

2. $x/\theta = y/\theta \Rightarrow x^c/\theta = y^c/\theta$

Definimos, sobre L/θ, $\tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}}$ y $\tilde{\mathsf{c}}$, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta & = & (x \mathsf{\ s\ } y)/\theta \\ x/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; y/\theta & = & (x \mathsf{\ i\ } y)/\theta \\ (x/\theta)^{\tilde{\mathsf{c}}} & = & x^c/\theta \end{array}$$

5 Reticulados Distributivos

RETICULADO DISTRIBUTIVO: Un reticulado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$, se llamará **distributivo** cuando cumpla alguna de las siguiente propiedades, para $x, y, z \in L$ cualquieras:

1. $x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ s\ } z) = (x \mathsf{\ i\ } y) \mathsf{\ s\ } (x \mathsf{\ i\ } z)$

2. $x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ i\ } z) = (x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ i\ } (x \mathsf{\ s\ } z)$

FILTRO: Un **filtro** de un reticulado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ será un subconjunto $F \subseteq L$ tal que:

1. $F \neq \emptyset$

2. $x, y \in F \Rightarrow x \mathsf{\ i\ } y \in F$

3. $x \in F$ y $x \leq y \Rightarrow y \in F$.

FILTRO GENERADO: Dado reticulado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$, un conjunto $S \subseteq L$, el **filtro generado por S** será el siguiente conjunto:

$$[S) = \{y \in L : y \geq s_1 \mathsf{\ i\ } \dots \mathsf{\ i\ } s_n, \text{ para algunos } s_1, \dots, s_n \in S, n \geq 1\}$$

CADENA: Sea $(P, \leq)$ un poset. Un subconjunto $C \subseteq P$ será llamando una **cadena**, si para cada $x, y \in C$, se tiene que $x \leq y$ ó $y \leq x$.

FILTRO PRIMO: Un filtro F de un reticulado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ será llamado **primo** cuando se cumplan:

1. $F \neq L$

2. $x \mathsf{\ s\ } y \in F \Rightarrow x \in F$ o $y \in F$.

ÁLGEBRA DE BOOLE: Un **Álgebra de Boole** será un reticulado complementado y distributivo.

Part II

Términos y fórmulas

6 Términos

TIPO: Por un **tipo** (de primer orden), entenderemos una 4-upla $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$, donde a los elementos de $\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}$ les llamaremos *nombres de constante*, *nombres de función* y *nombres de relación* respectivamente, tal que:

(1) Hay alfabetos finitos Σ_1, Σ_2 y Σ_3 tales:

  (a) $\mathcal{C} \subseteq \Sigma_1^+, \mathcal{F} \subseteq \Sigma_2^+$ y $\mathcal{R} \subseteq \Sigma_3^+$

  (b) Σ_1, Σ_2 y Σ_3 son disjuntos de a pares.

  (c) $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ no contiene ningún símbolo de la lista

$$\forall \; \exists \; \neg \; \vee \; \wedge \; \rightarrow \leftrightarrow \; (\;) \; , \; \equiv \mathsf{X} \; \mathit{0} \; \mathit{1} \; \ldots \; \mathit{9} \; \mathbf{0} \; \mathbf{1} \; \ldots \; \mathbf{9}$$

(2) $a : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}$ es una función que a cada $p \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ le asocia un número natural $a(p)$, llamado la aridad de p. Dado $n \geq 1$, definimos:

$$\mathcal{F}_n = \{f \in \mathcal{F} : a(f) = n\}$$
$$\mathcal{R}_n = \{r \in \mathcal{R} : a(r) = n\}$$

(3) Ninguna palabra de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$) es subpalabra propia de otra palabra de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$).

TÉRMINOS DE TIPO τ:

$$\begin{aligned} T_0^\tau &= Var \cup \mathcal{C} \\ T_{k+1}^\tau &= T_k^\tau \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) : f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, t_1, \ldots, t_n \in T_k^\tau\} \\ T^\tau &= \bigcup_{k \geq 0} T_k^\tau \end{aligned}$$

SUBTERMINOS:
Sean $s, t \in T^\tau$, diremos que s es **subtérmino** (propio) de t, si no es igual a t y y es subpalabra de t.

7 Fórmulas

FÓRMULAS DE TIPO τ:

$$\begin{aligned} F_0^\tau &= \{(t \equiv s) : t, s \in T^\tau\} \cup \{r(t_1, \ldots, t_n) : r \in \mathcal{R}_n, n \geq 1, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau\} \\ F_{k+1}^\tau &= F_k^\tau \cup \{\neg\varphi : \varphi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \vee \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \wedge \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \\ &\quad \{(\varphi \rightarrow \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \leftrightarrow \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \{\forall v\varphi : \varphi \in F_k^\tau, v \in Var\} \cup \\ &\quad \{\exists v\varphi : \varphi \in F_k^\tau, v \in Var\} \\ F^\tau &= \bigcup_{k \geq 0} F_k^\tau \end{aligned}$$

SUBFORMULAS:
Una fórmula φ será llamada **subfórmula** (propia) de una fórmula ψ, cuando φ sea no igual a ψ y tenga alguna ocurrencia en ψ.

Part III
Estructuras

Part IV
Teorias de primer orden

Part V
Aritmética de Peano