Resumen de la materia
Lenguajes y Compiladores

Agustín Curto, agucurto95@gmail.com

2019

Índice

Nota: Este resumen se corresponde con la materia dictada en el año 2019. El autor no se responsabiliza de posibles cambios que pudiesen realizarse en los temas dictados en la misma, así como tampoco de errores involuntarios que pudiesen existir en dicho resumen.

Por favor, mejorá este documento en github
https://github.com/ResumenesFaMAF/resumenCompiladores

1. Semántica

Gramáticas

$$\begin{array}{rcl} \langle intexp \rangle & ::= & 0 \mid 1 \mid 2 \mid \ldots \\ & & \langle \mathsf{var} \rangle \\ & & - \langle intexp \rangle \\ & & \langle intexp \rangle + \langle intexp \rangle \\ & & \langle intexp \rangle * \langle intexp \rangle \\ & & \langle intexp \rangle - \langle intexp \rangle \\ & & \langle intexp \rangle \,/\, \langle intexp \rangle \\ & & \langle intexp \rangle \,\%\, \langle intexp \rangle \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \langle assert \rangle & ::= & \mathbf{true} \mid \mathbf{false} \\ & & \langle intexp \rangle = \langle intexp \rangle \\ & & \langle intexp \rangle < \langle intexp \rangle \\ & & \langle intexp \rangle \leq \langle intexp \rangle \\ & & \langle intexp \rangle > \langle intexp \rangle \\ & & \langle intexp \rangle \geq \langle intexp \rangle \\ & & \neg \langle assert \rangle \\ & & \langle assert \rangle \vee \langle assert \rangle \\ & & \langle assert \rangle \wedge \langle assert \rangle \\ & & \exists \langle \mathsf{var} \rangle .\, \langle assert \rangle \\ & & \forall \langle \mathsf{var} \rangle .\, \langle assert \rangle \end{array}$$

Función Semántica

Es una función que a cada frase abstracta del lenguaje le asigna una denotación en un dominio determinado.

Todas las funciones son totales, es decir, que está definida para todas las expresiones.

Dirección por sintáxis

Un conjunto de ecuaciones es *dirigido por sintáxis* cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

- hay una ecuación por cada producción de la gramática abstracta
- cada ecuación que expresa el significado de una frase compuesta, lo hace puramente en función de los significados de sus subfrases inmediatas

Composicionalidad

Una semántica se dice que es *composicional* cuando el significado de una frase no depende de ninguna propiedad de sus subfrases, salvo de sus significados.
Podemos reemplazar una subfrase e_0 de e por otra de igual significado que e_0, sin alterar el significado de e.

Dirección por sintáxis $\Rightarrow$ composicionalidad

Ligadura

- Ocurrencia ligadora: es la que se encuentra directamente después de un cuantificador.
- Alcance de una ocurrencia ligadora: en $Qv.p$, el predicado p es el alcance de la ocurrencia ligadora de v.
- Ocurrencia ligada: cualquier ocurrencia de v en el alcance de una ocurrencia ligadora de v.
- Ocurrencia libre: ocurrencia que no es ligadora ni ligada.
- Variable libre: variable que tiene ocurrencias libres.
- Expresión cerrada: sin variables libres.

Sustitución

$$\begin{array}{rcl}
\Delta & = & \langle var\rangle \to \langle intexp\rangle \\
 & \in & \langle intexp\rangle \times \Delta \to \langle intexp\rangle \\
0/\delta & = & 0 \\
1/\delta & = & 1 \\
v/\delta & = & \sigma v \\
(-e)/\delta & = & -(e/\delta) \\
(e+f)/\delta & = & (e/\delta) + (f/\delta) \\
(Qv.b)/\delta & = & Qv_{new}.(b/[\delta|v : v_{new}]) \\
 & & \\
\text{donde } v_{new} & \notin & \bigcup\limits_{\omega \in FV(b-\{v\})} FV(\delta\omega)
\end{array}$$

Propiedades

- **Teorema de Coincidencia:** expresa que el significado de una frase no puede depender de variables que no ocurran libres en la misma.

  Enunciado: Si dos estados σ, σ' coinciden en las variables libres de p, entonces da lo mismo evaluar p en σ o σ'.
  $$(\forall \omega \in FV(p).\sigma\omega = \sigma'\omega) \Rightarrow [\![p]\!]\sigma = [\![p]\!]\sigma'$$

- **Teorema de Renombre:** asegura que el significado no depende de las variables ligadas de una frase.

  Enunciado: Los nombres de las variables ligadas no tienen importancia.
  $$u \notin FV(q) - \{v\} \Rightarrow [\![\forall u.q/v \to u]\!] = [\![\forall v.q]\!]$$

- **Teorema de Sustitución:** Si aplico la sustitución δ a p y luego evaluo en el estado σ, puedo obtener el mismo resultado a partir de p sin sustituir si evaluo en un estado que hace el trabajo de δ y de σ (en las variables libres de p).
  $$(\forall \omega \in FV(p).[\![\delta\ \omega]\!]\sigma = \sigma'\omega) \Rightarrow [\![p/\delta]\!]\sigma = [\![p]\!]\sigma'$$

2. Recursión

- **Orden parcial:** Relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- **Poset:** Par $(P, \leq)$, donde P es un conjunto y $\leq$ un orden parcial.
- **Orden Discreto:** $(X, =)$
- **Espacio ordenado de funciones:** $(Y,\ \leq_Y)$ poset $\Rightarrow (X \to Y,\ \leq)$ poset donde $f \leq g\ sii\ \forall x \in X.fx \leq gx$ para $f, g \in X \to Y$.
- **Lifting:** $(X,\ \leq_X)$ poset $\Rightarrow (X_\perp,\ \leq)$ poset donde $x \leq y\ sii\ x \leq_X y \vee x = \perp$

  Ejemplo: $\mathbb{Z}_\perp$
  $$\begin{array}{ccccccccc}
  \dots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\
   & \dots & & \backslash & | & / & \dots & & \\
   & & & & \perp & & & &
  \end{array}$$

- **Infinito:** $(X,\ \leq_X)$ poset $\Rightarrow (X^\infty,\ \leq)$ poset donde $x \leq y$ *sii* $x \leq_X y \vee y = \infty$

  Ejemplo: $\mathbb{N}^\infty$

$$\begin{array}{c}\infty\\ \vdots\\ 3\\ 2\\ 1\\ 0\end{array}$$

- **Supremo:** Sea $Q \subseteq P$ donde $(P,\ \leq)$ poset, el supremo se define:
  - $\forall q \in Q.q \leq sup(Q)$
  - $\forall p \in P.(\forall q \in Q.q \leq p) \Rightarrow sup(Q) \leq p$
- **Cadenas:** $p_0 \leq p_1 \leq p_2 \ldots$
  - Interesantes: si $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ es infinita.
  - No interesantes: si $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ es finita o repite infinitamente un elemento.
- **Predominios:** es un poset donde todas las cadenas (interesantes) tienen supremo.

  Si Y es predominio entonces $X \rightarrow Y$ también lo es.
- **Dominios:** es un predominio con elemento mínimo.

  Si D es dominio entonces $X \rightarrow D$ también lo es.
- **Monotonía:** Sean $(P,\ \leq_P)$ poset y $(Q,\ \leq_Q)$ poset, y $f \in P \rightarrow Q$, f es *monótona* si:

$$x \leq_P y \Rightarrow fx \leq_Q fy \qquad \text{(preserva orden)}$$

- **Continuidad:** Sean P, Q con $\leq_P, \leq_Q$ y sup_P, sup_Q predominios y $f \in P \rightarrow Q$, se dice que f es *continua* si preserva supremos de cadenas, es decir, si $p_0 \leq_P p_1 \ldots \leq_P p_n$ entonces el supremo $sup_Q(\{fp_i | i \in \mathbb{N}\})$ existe y $sup_Q(\{fp_i | i \in \mathbb{N}\}) = f sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$
- **Funciones Estrictas:** Sean D, D' dominios con $\perp, \perp'$ respectivamente. Se dice que la función $f \in D \rightarrow D'$ es *estricta* si f preserva el elemento mínimo, es decir, $f\perp = \perp'$.

PROPIEDADES:

- **Proposición 1:** Si f es monótona, f aplicada a los elementos de una cadena devuelve una cadena.
- **Proposición 2:** Si f es monótona, entonces f preserva el supremo de cadenas no interesantes.
- **Proposición 3:** Si la función $f \in P \rightarrow Q$ entre predominios es monótona entonces $sup_Q(\{fp_i | i \in \mathbb{N}\})$ existe y $sup_Q(\{fp_i | i \in \mathbb{N}\}) \leq_Q f\ sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$
- **Proposición 4:** Si f es continua, entonces f es monótona.

  La inversa, es decir, f monótona entonces f continua, solo vale para las cadenas no interesantes. Para las interesantes vale $sup_Q(\{fp_i | i \in \mathbb{N}\}) \leq_Q f sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$
- **Corolario:** Sean P, Q con $\leq_P, \leq_Q$ y sup_P, sup_Q predominios y $f \in P \rightarrow Q$ monótona, entonces f es continua sii si para toda cadena interesante $p_0 \leq_P p_1 \ldots \leq_P p_n \leq_P \ldots$, la desigualdad $f\ sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\}) \leq sup_Q(\{fp_i | i \in \mathbb{N}\})$ también vale.

TEOREMA DEL MENOR PUNTO FIJO

Teorema: Sea D un dominio, y $F \in D \to D$ continua, entonces $sup(F^i \bot)$ existe y es el menor punto fijo de F.
Prueba: Como $\bot$ es el elemento mínimo, $\bot \leq F\ \bot$. Como F es continua, F es monótona. Aplicando F a ambos lados obtenemos

$$F\ \bot \leq F\ (F\ \bot) = F^2\ \bot$$

Iterando esto obtenemos $\bot \leq F\ \bot \leq F^2\ \bot \leq F^3\ \bot \leq \ldots$, es decir que $\{F^i\ \bot | i \in \mathbb{N}\}$ es una cadena y por lo tanto el supremo $x = \sup(\{F^i\ \bot | i \in \mathbb{N}\})$ existe.
Veamos que es punto fijo de F, es decir, que $F\ x = x$:

$$\begin{aligned} F\ x &= F\ \sup(\{F^i\ \bot | i \in \mathbb{N}\}) \\ &= \sup(\{F\ (F^i\ \bot) | i \in \mathbb{N}\}) \\ &= \sup(\{F^{i+1}\ \bot | i \in \mathbb{N}\}) \\ &= \sup(\{F^i\ \bot | i \in \mathbb{N}\}) \\ &= x \end{aligned}$$

Veamos que es el menor de ellos. Sea y punto fijo de F, es decir $F\ y = y$. Veamos que $x \leq y$. Claramente $\bot \leq y$ por ser elemento mínimo. Como F es monótona, se obtiene $F\ \bot \leq F\ y = y$. Iterando, obtenemos $F^i\ \bot \leq y$ para todo i. Es decir, y es cota superior de la cadena $\{F^i\ \bot | i \in \mathbb{N}\}$. Como el supremo es la menor de esas cotas,

$$\begin{aligned} x &= \sup(\{F^i\ \bot | i \in \mathbb{N}\}) \\ &\leq y \end{aligned}$$