Resumen de teoremas para el final de Matemática Discreta II

Agustin Curto, agucurto95@gmail.com

2016

Índice general

Capítulo 1

Parte A

1.1. La complejidad de EDMONS-KARP

Teorema: La complejidad de $\langle E-K \rangle$ con $n = |V|$ y $m = |E|$ es $\mathcal{O}(nm^2)$.

Prueba: Sean: $f_0, f_1, f_2, \ldots$ la sucesión de flujos creados por $\langle E-K \rangle$. Es decir, el paso k crea f_k.

Para cada k definimos funciones:

- $d_k(x) =$ "distancia" entre s y x en el paso k en caso de existir, si no ∞.
- $b_k(x) =$ distancia entre x y t en el paso k en caso de existir, si no ∞.

"Distancia": longitud del menor camino aumentante entre dos vértices.

Observaciónes:

1. - $d_k(s) = 0$
   - $b_k(t) = 0$
2. Sabemos que las distancias de $\langle E-K \rangle$ no disminuyen en pasos sucesivos, como esto será útil en esta demostración llamaremos $\circledast$ a la demostración de:

$$d_k(x) \leq d_{k+1}(x)$$

Llamemos *crítico* a un lado disponible en el paso k pero no disponible en el paso *k+1*. Es decir, si xy es un lado $\Rightarrow$ xy se satura o yx se vacía en el paso k.

Supongamos que al construir f_k el lado xy se vuelve crítico, el camino: $s \cdots$ x,y $\cdots$ t se usa para construir f_k.

$$\begin{aligned} d_k(t) &= d_k(x) + b_k(x) \qquad (1.1) \\ &= d_k(x) + b_k(y) + 1 \end{aligned}$$

Para que xy pueda ser *crítico* nuevamente debe ser usado en la otra dirección (*i.e* yx). Sea j el paso posterior a k en el cual se usa el lado en la otra dirección, el camino $s \cdots$ y,x $\cdots$ t se usa para construir f_j.

$$\begin{aligned} d_j(t) &= d_j(x) + b_j(x) \qquad (1.2) \\ &= d_j(y) + 1 + b_j(x) \end{aligned}$$

Es decir:

$$\text{De } ① \text{ y } ② \Rightarrow \begin{cases} d_j(x) = d_j(y) + 1 \\ d_k(y) = d_k(x) + 1 \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
d_j(t) &= d_j(x) + b_j(x) && (1.3)\\
&= d_j(y) + 1 + b_j(x) && (1.4)\\
&\geq d_k(y) + 1 + b_k(x) && (1.5)\\
&= d_k(x) + 1 + 1 + b_k(x) && (1.6)\\
&= d_k(t) + 2 && (1.7)\\
\Rightarrow d_\ell(t) &\geq d_k(t) + 2 && (1.8)
\end{aligned}$$

Por lo tanto cuando un lado se vuelve crítico recien puede volver a saturarse cuando la distancia de s a t haya aumentado en por lo menos 2. Puede existir $\mathcal{O}(n/t)$ tales aumentos, es decir:

$$\#\text{ Veces que un lado puede volverse crítico} = \mathcal{O}(n).$$

$$\begin{aligned}
\therefore Complejidad(\langle E-K\rangle) &= (\#pasos) * Complej(paso)\\
&= (\#\text{veces que un lado se vuelve crítico}) * (\#lados) * Complej(BFS)\\
&= \mathcal{O}(n) * \mathcal{O}(m) * \mathcal{O}(m)\\
&= \mathcal{O}(nm^2)
\end{aligned}$$

1.2. Las distancias de Edmonds-Karp no disminuyen en pasos sucesivos

Lema interno: queremos probar que

1. $d_k(x) \leq d_{k+1}(x)$
2. $b_k(x) \leq b_{k+1}(x)$

Prueba: lo probaremos por inducción y solo para d_k ya que para b_k la prueba es análoga.

$$\text{HI: } H(i) = \{\forall_z : d_{k+1}(z) \leq i,\ d_k(z) \leq d_{k+1}(z)\}$$

1. $H(0) = \{\forall_z : d_{k+1}(z) \leq 0,\ d_k(z) \leq d_{k+1}(z)\}$
   Pero $d_{k+1} \leq 0 \Rightarrow$

1.3. La complejidad de DINIC

Teorema: La complejidad del algoritmo de Dinic es $\mathcal{O}(n^2m)$.

Prueba: Como la distancia entre s y t en networks auxiliares consecutivos aumenta y puede ir a lo sumo entre 1 y $n-1$ entonces hay a lo sumo $\mathcal{O}(n)$ networks auxiliares.

Notación: llamemos PB al proceso de hallar paso bloqueante en un network auxiliar con Dinic.

Luego la complejidad de Dinic es $\mathcal{O}(n)$ compl(PB). Para probar que la complejidad de Dinic es $\mathcal{O}(n^2m)$ debemos probar que compl(PB) $= \mathcal{O}(nm)$.

Para hallar un flujo bloqueante:

1. Crear un NA: Como es con BFS es $\mathcal{O}(m)$
2. Hallar bloqueante, denotemos:
   - A: avanzar
   - R: retorceder
   - I: inicializar e incrementar

El paso bloqueante de Dinic luce de la forma:

$$\text{AA...AIAAARA...AIAARAAARR...IA...}$$

subdiviadmoslo en palabras del tipo:

- AA...AI
- AA...AR

donde las primeras son todas A pudiendo ser 0 la cantidad de la misma.

Debemos determinar:

1. Cual es la complejidad de cada subpalabra.

   Recordemos que:

   - A: { $P[i+1] =$ algún elemento de $\Gamma^+(P[i])$
     $i = i+1$
     $\Rightarrow$ A es $\mathcal{O}(1)$
   - R: { borrar $P[i-1]$ del NA
     $i = i-1$
     $\Rightarrow$ R es $\mathcal{O}(1)$
   - I: { Recorre dos veces un camino de longitud $d = d(t)$
     $\Rightarrow$ R es $\mathcal{O}(d)$

   Por lo tanto:

   $$compl(A...AR) = \mathcal{O}(1) + ...\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(j) \tag{1.9}$$

   Pero como cada A hace $i = i+1$ y tenemos $0 \leq i \leq d \Rightarrow j \leq d$.

   $$\therefore compl(A...AR) = \mathcal{O}(d)$$

Similarmente:

$$compl(A...AI) = \mathcal{O}(1) + ...\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(d) + \mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d) \tag{1.10}$$

Pero como cada A hace $i = i + 1$ y tenemos $0 \leq i \leq d \Rightarrow j \leq d$.

$$\therefore compl(A...AR) = \mathcal{O}(d)$$

2. Cuantas palabras hay de cada tipo.

1.4. La complejidad de WAVE

1.5. La distancia entre NA sucesivos aumenta

Capítulo 2

Parte B

2.1. 2-COLOR es polinomial

2.2. Probar que:

2.2.1. El valor de todo flujo es menor o igual que la capacidad de todo corte.

2.2.2. Si el valor de un flujo es igual a la capacidad de un corte entonces el flujo es maximal y el corte minimal.

2.2.3. Si un flujo es maximal entonces existe un corte con capacidad igual al valor del flujo.

2.3. Complejidad del Hungaro es $\mathcal{O}(n^4)$

2.4. Teorema de Hall

2.5. Teorema del matrimonio

2.6. Si G es bipartito $\Rightarrow \chi'(G) = \Delta$

2.7. Teorema cota de Hamming

2.8. Sea H una matriz de chequeo de un código C, pruebe que:

2.8.1. $\delta(C) =$ mínimo número de columnas linealmente dependientes de H

2.8.2. Si H no tiene la columna cero ni columnas respetidas $\Rightarrow$ C corrige al menos un error

2.9. Sea C un código cíclico de dimensión k y longitud n y sea $g(x)$ su polinomio generador, probar que:

2.9.1. C está formado por los múltiplos de $g(x)$ de grado menor a n

2.9.2. El grado de $g(x)$ es $n-k$

Capítulo 3

Parte C

3.1. 4-COLOR $\leq_p$ SAT

3.2. 3-SAT es NP-Completo

3.3. 3-COLOR es NP-Completo

Bibliografía

[1] Curto Agustín , «Matemática Discreta II, apuntes de clase», *FaMAF, UNC*.

[2] Maximiliano Illbele, «Resumen de Discreta II, 16 de agosto de 2012», *FaMAF, UNC*.