Resumen para el final de Física

Agustín Curto, agucurto95@gmail.com

2017

Contents

Nota: Este resumen se corresponde con la materia dictada en el año 2017. Su desarollo está basado tanto en los libros: [1] y [2], como en el apunte de clase. El autor no se responsabiliza de posibles cambios que pudiesen realizarse en los temas dictados en la misma, así como tampoco de errores involuntarios que pudiesen existir en dicho resumen.

References

[1] Serway, R.: Física para ciencias e ingeniería, Volumen 2. Cengage Learning (2008)

[2] Serway, R.: Física para ciencias e ingeniería, Volumen 1. Cengage Learning (2015)

Por favor, mejorá este documento en github
https://github.com/ResumenesFaMAF/resumenFisica

Part I
Mecánica

1 Física y medición

1.1 Estándares de longitud, masa y tiempo

En mecánica, las tres cantidades fundamentales son longitud, masa y tiempo. Todas las otras cantidades en mecánica se pueden expresar en función de estas tres.
En 1960, un comité internacional estableció un conjunto de estándares para las cantidades fundamentales de la ciencia. Se llama **Sistema Internacional** (SI)) y sus unidades fundamentales de **longitud**, **masa** y **tiempo** son *metro, kilogramo y segundo*, respectivamente. Otros estándares para las unidades fundamentales SI establecidas por el comité son las de temperatura (el *kelvin*), corriente eléctrica (el *ampere*), etc.

- Longitud: La distancia entre dos puntos en el espacio se identifica como **longitud**. El **metro** se redefinió como la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un tiempo de 1/299 792 458 segundos.

- Masa: La unidad fundamental de masa en el SI, el **kilogramo** (kg), está definida como la masa de un cilindro de aleación platino–iridio específico.

- Tiempo: La unidad fundamental es el **segundo** que se define como 9 192 631 770 veces el periodo[1] de vibración de la radiación del átomo de cesio 133.

1.2 Cifras significativas

- Cuando se multiplican muchas cantidades, el número de cifras significativas en la respuesta final es el mismo que el número de cifras significativas en la cantidad que tiene el número más pequeño de cifras significativas. La misma regla aplica para la división.

- Cuando los números se sumen o resten, el número de lugares decimales en el resultado debe ser igual al número más pequeño de lugares decimales de cualquier término en la suma o resta.

2 Movimiento en una dimensión

2.1 Posición, velocidad y repidez

- La **posición** x de una partícula es la ubicación de la partícula respecto a un punto de referencia elegido que se considera el origen de un sistema coordenado. El movimiento de una partícula se conoce por completo si la posición de la partícula en el espacio se conoce en todo momento.

- El **desplazamiento** Δx de una partícula se define como su cambio en posición en algún intervalo de tiempo. Conforme la partícula se mueve desde una posición inicial x_i a una posición final x_f, su desplazamiento está dado por:

$$\Delta x \equiv x_f - x_i$$

[1] Intervalo de tiempo necesario para una vibración completa

- **Distancia** es la longitud de una trayectoria seguida por una partícula. La distancia siempre se representa como un número positivo, mientras que el desplazamiento puede ser positivo o negativo. 4

- La **velocidad promedio** $v_{x,prom}$ de una partícula se define como el desplazamiento x de la partícula dividido entre el intervalo de tiempo t durante el que ocurre dicho desplazamiento:
$$v_{x,prom} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- La **rapidez promedio** v_{prom} de una partícula, una cantidad escalar, se define como la distancia total recorrida dividida entre el intervalo de tiempo total requerido para recorrer dicha distancia:
$$v_{prom} \equiv \frac{d}{\Delta t}$$

2.2 Velocidad y rapidez instantáneas

- La **velocidad instantánea** v_x es igual al valor límite de la razón $\Delta x/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero, es decir, a la derivada de x respecto de t:
$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

- La **rapidez instantánea** de una partícula se define como la magnitud de su velocidad instantánea.

2.3 Aceleración

- La **aceleración promedio** $a_{x,prom}$ de la partícula se define como el cambio en velocidad Δv_x dividido entre el intervalo de tiempo t durante el que ocurre el cambio:
$$a_{x,prom} \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i}$$

- La **aceleración instantánea** como el límite de la aceleración promedio conforme Δt tiende a cero.
$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

2.4 Análisis de modelos

Análisis de modelo **Partícula bajo velocidad constante**

Imagínese un objeto en movimiento que puede ser modelado como una partícula. Si se mueve con rapidez constante por un desplazamiento Δx, en línea recta en un intervalo de tiempo Δt, su velocidad constante es

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \textbf{(2.6)}$$

La posición de la partícula como una función de tiempo está dada por

$$x_f = x_i + v_x t \qquad \textbf{(2.7)}$$

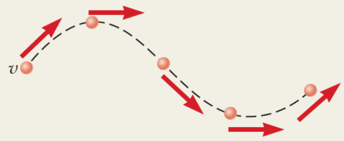
Ejemplos:

- un meteoroide viaja a través del espacio libre de gravedad
- un automóvil que viaja a una rapidez constante sobre una autopista recta
- un corredor que viaja a rapidez constante en un camino perfectamente recto
- un objeto que se mueve con rapidez terminal a través de un medio viscoso (capítulo 6)

Análisis de modelo — Partículas bajo rapidez constante

Imagínese un objeto en movimiento que puede ser modelado como una partícula. Si se mueve con una rapidez constante a través de una distancia d a lo largo de una línea recta o una trayectoria curva en un intervalo de tiempo Δt, su rapidez constante es

$$v = \frac{d}{\Delta t} \tag{2.8}$$



Ejemplos:

- un planeta que viaja alrededor de una órbita perfectamente circular
- un automóvil que viaja con una rapidez constante en una pista curva
- un corredor que viaja con rapidez constante en una trayectoria curva
- una partícula cargada que se mueve a través de un campo magnético uniforme (capítulo 29)

Análisis de modelo — Partículas bajo aceleración constante

Imagínese un objeto en movimiento que se puede modelar como una partícula. Si se comienza desde la posición inicial x_i y velocidad v_{xi} y se mueve en una línea recta con una aceleración constante a_x, su posición posterior y la velocidad se describen por las siguientes ecuaciones cinemáticas:

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \tag{2.13}$$

$$v_{x,\text{prom}} = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} \tag{2.14}$$

$$x_f = x_i + \tfrac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t \tag{2.15}$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \tag{2.16}$$

$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \tag{2.17}$$

Ejemplos

- un automóvil acelerando a un ritmo constante a lo largo de una autopista recta
- un objeto que cae en ausencia de resistencia del aire (sección 2.7)
- un objeto sobre el que actúa una fuerza neta constante (capítulo 5)
- una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme (capítulo 23)

2.5 Relaciones gráficas entre x, v_x y a_x

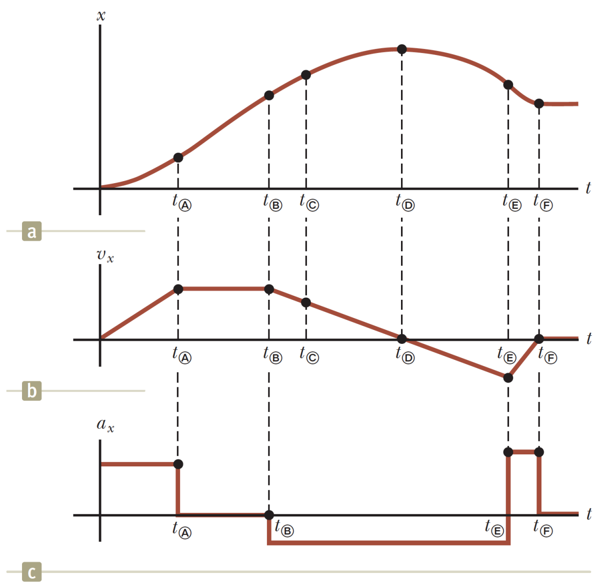


Figure 1: (a) Gráfica posición-tiempo para un objeto que se mueve a lo largo del eje x. (b) La gráfica velocidad-tiempo para el objeto se obtiene al medir la pendiente de la gráfica posición-tiempo en cada instante. (c) La gráfica aceleración-tiempo para el objeto se obtiene al medir la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo en cada instante.

2.6 Diagramas de movimiento

Con frecuencia los conceptos de **velocidad** y **aceleración** se confunden uno con otro, para que esto no ocurra, es útil usar una representación pictórica llamada *diagrama de movimiento* para describir la velocidad y la aceleración mientras un objeto está en movimiento.

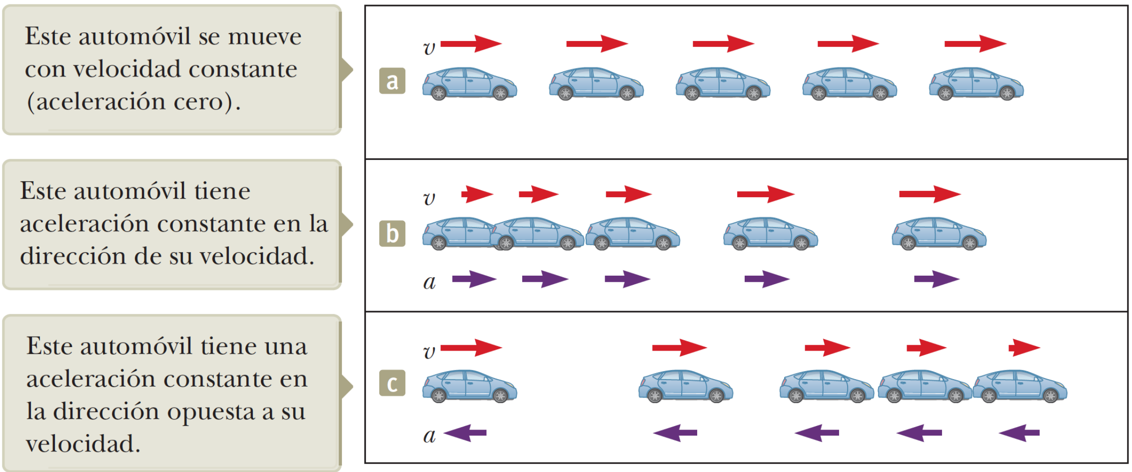


Figure 2: Diagramas de movimiento de un automóvil que se mueve a lo largo de una carretera recta en una sola dirección. La velocidad en cada instante está indicada por una flecha roja, y la aceleración constante se indica mediante una flecha de color morado.

2.7 Objetos en caída libre

En ausencia de resistencia del aire, todos los objetos que se dejan caer cerca de la superficie de la Tierra caen hacia ella con la misma aceleración constante bajo la influencia de la gravedad de la Tierra. A dicho movimiento se lo conoce como *caída libre.*
Un objeto en caída libre es cualquier objeto que se mueve libremente sólo bajo la influencia de la gravedad, sin importar su movimiento inicial. El movimiento de un objeto en caída libre que se mueve verticalmente es equivalente al movimiento de una partícula bajo aceleración constante en una dimensión.

3 Vectores

3.1 Sistemas coordenados

En el sistema de coordenadas polares (r, θ), r es la distancia desde el origen hasta el punto que tiene coordenadas cartesianas (x, y) y θ es el ángulo entre un eje fijo y una recta dibujada desde el origen hasta el punto. El eje fijo es el eje x positivo y θ se mide contra el sentido de las agujas del reloj.

$$x = r\ cos(\theta)$$
$$y = r\ sen(\theta)$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

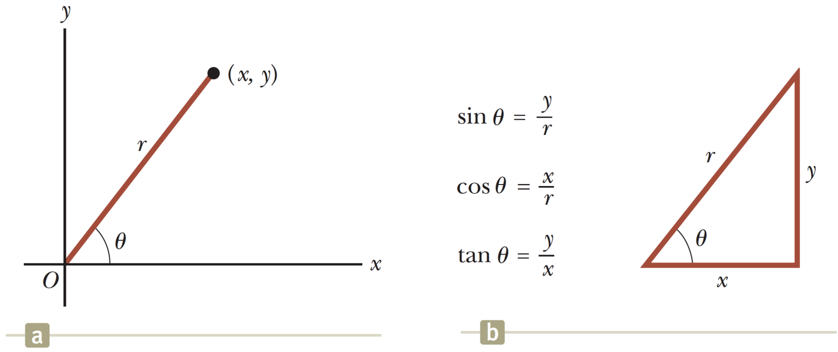


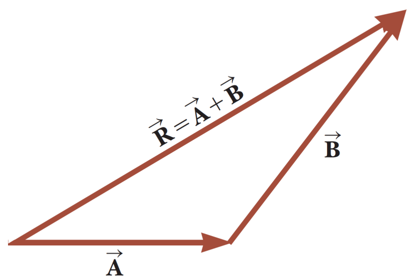
Figure 3: (a) Las coordenadas polares planas de un punto se representan mediante la distancia r y el ángulo u, donde u se mide contra el sentido de las manecillas del reloj a partir del eje x positivo. (b) El triángulo rectángulo se usa para relacionar (x, y) con (r, u).

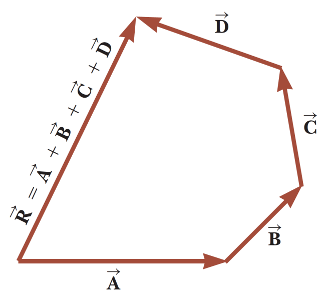
3.2 Cantidades vectoriales y escalares

- Una cantidad escalar se especifica por completo mediante un valor único con una unidad adecuada y no tiene dirección.
- Una cantidad vectorial se especifica por completo mediante un número y unidades apropiadas más una dirección.

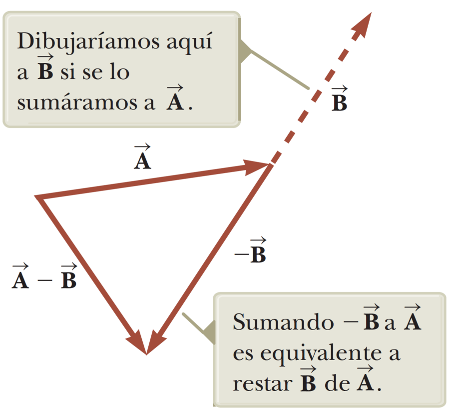
3.3 Propiedades de los vectores

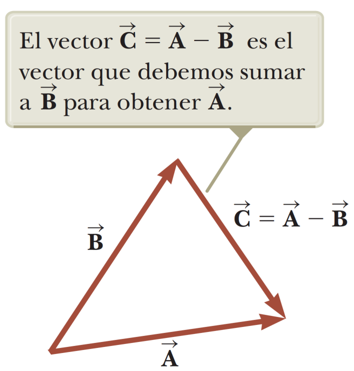
1. **Igualdad de dos vectores:** $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$ sii $A = B$ y $\vec{A}, \vec{B}$ apuntan en la misma dirección.
2. **Suma de vectores:** La suma de vectores es conmutativa y asociativa.





3. **Negativo de un vector:** El vector $-\vec{\mathbf{A}}$ tiene la misma magnitud y dirección opuesta a $\vec{\mathbf{A}}$.
4. **Resta de vectores:**

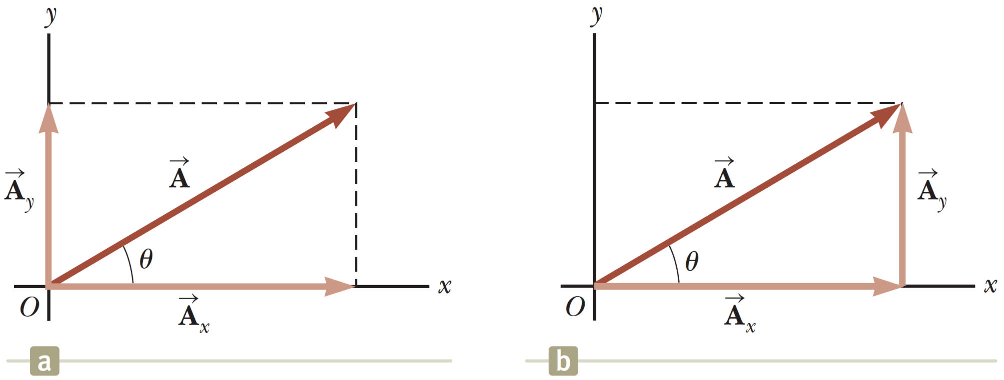




5. **Multiplicación de un vector por un escalar:** Si el vector $\vec{\mathbf{A}}$ se multiplica por una cantidad escalar m, el producto $m\vec{\mathbf{A}}$ es un vector que tiene la misma dirección que $\vec{\mathbf{A}}$ y magnitud mA.

3.4 Componentes de un vector y vectores unitarios

Un vector $\vec{\mathbf{A}}$ se puede expresar como la suma de otros dos vectores componentes $\vec{\mathbf{A_x}}$, que es paralelo al eje x, y $\vec{\mathbf{A_y}}$, que es paralelo al eje y, ie, $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A_x}} + \vec{\mathbf{A_y}}$ y sus componentes, utilizando las definiciones de sin y cos, son $A_x = A\cos\theta$ y $A_y = \sin\theta$.



3.4.1 Vectores unitarios

Un **vector unitario** es un vector sin dimensiones que tiene una magnitud de exactamente 1. Los símbolos $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ se utilizan para representar los vectores unitarios que apuntan en las direcciones x, y, z respectivamente. La notación en vectores unitarios para $\vec{\mathbf{A}}$ es:

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$$

La suma entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ en vectores unitarios es la siguiente:

$$\vec{\mathbf{R}} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath}$$

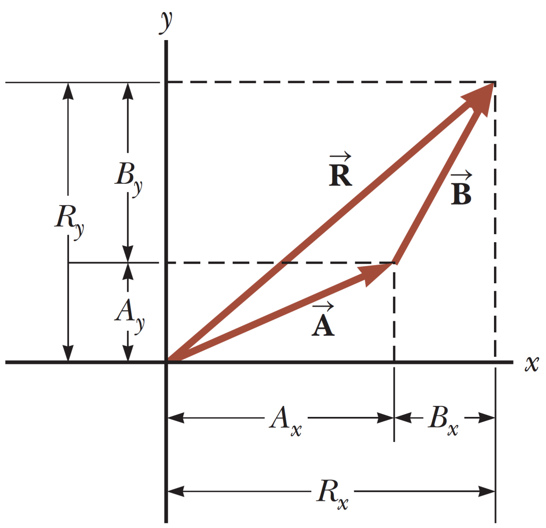


Figure 4: Esta construcción geométrica para la suma de dos vectores muestra la relación entre las componentes de la resultante $\vec{\mathbf{R}}$ y las componentes de los vectores individuales.

4 Movimiento en dos dimensiones

4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración

En dos dimensiones, la posición de una partícula se indica mediante su vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$, que se dibuja desde el origen de algún sistema coordenado a la posición de la partícula en el plano xy.

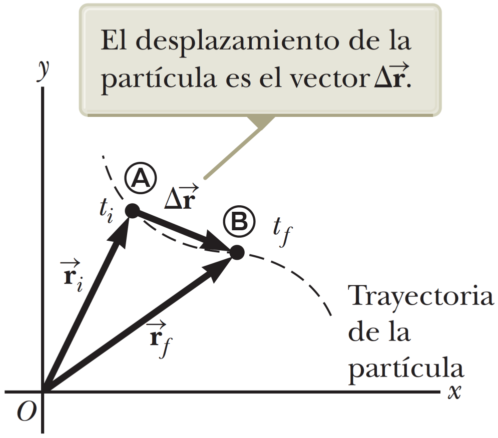


Figure 5: Una partícula que se mueve en el plano xy se ubica con el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$, que se dibuja desde el origen hasta la partícula.

- El **vector desplazamiento** $\vec{\mathbf{r}}$ para una partícula se define como la diferencia entre su vector de posición final y su vector de posición inicial:

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i$$

- La **velocidad promedio** $\vec{\mathbf{v}}_{prom}$ de una partícula durante el intervalo de tiempo Δt se define como el desplazamiento de la partícula dividido entre el intervalo de tiempo:

$$\vec{\mathbf{v}}_{prom} \equiv \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t}$$

- La **velocidad instantánea** $\vec{\mathbf{v}}$ se define como el límite de la velocidad promedio $\Delta\vec{\mathbf{r}}\ /\ \Delta t$ conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{v}} \equiv \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$$

  Esto es, la velocidad instantánea es igual a la derivada del vector de posición respecto del tiempo.

  La magnitud del vector velocidad instantánea $v = |\vec{\mathbf{v}}|$ de una partícula se llama *rapidez* de la partícula, que es una cantidad escalar.

- La **aceleración promedio** $\vec{\mathbf{a}}_{prom}$ de una partícula se define como el cambio en su vector velocidad instantánea $\vec{\mathbf{v}}$ dividido entre el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho cambio:

$$\vec{\mathbf{a}}_{prom} \equiv \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i}{t_f - t_i}$$

- La **aceleración instantánea** $\vec{\mathbf{a}}$ se define como el valor límite de la razón $\Delta\vec{\mathbf{v}}\ /\ \Delta t$ conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$$

4.2 Movimiento en dos dimensiones con aceleración constante

eEl movimiento en dos dimensiones se puede representar como dos movimientos independientes en cada una de las dos direcciones perpendiculares asociadas con los ejes x e y. Esto es: cualquier influencia en la dirección y no afecta el movimiento en la dirección x y viceversa.
El vector de posición para una partícula que se mueve en el plano xy se puede escribir

$$\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

donde x, y y $\vec{\mathbf{r}}$ cambian con el tiempo a medida que la partícula se mueve mientras los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ permanecen constantes.

- **Vector velocidad:**

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}t$$

- **Vector de posición:**

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$$

4.3 Movimiento de un proyectil

El **movimiento de proyectil** de un objeto es simple de analizar a partir de dos suposiciones:

- la aceleración de caída libre es constante en el intervalo de movimiento y se dirige hacia abajo
- el efecto de la resistencia del aire es despreciable

La expresión para el vector de posición del proyectil como función del tiempo, siendo su aceleración la de la gravedad, $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}}$ es:

$$\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}t^2$$

donde las componentes x e y de la velocidad inicial del proyectil son:

$$v_{xi} = v_i \cos(\theta) \qquad v_{yi} = v_i \sin(\theta)$$

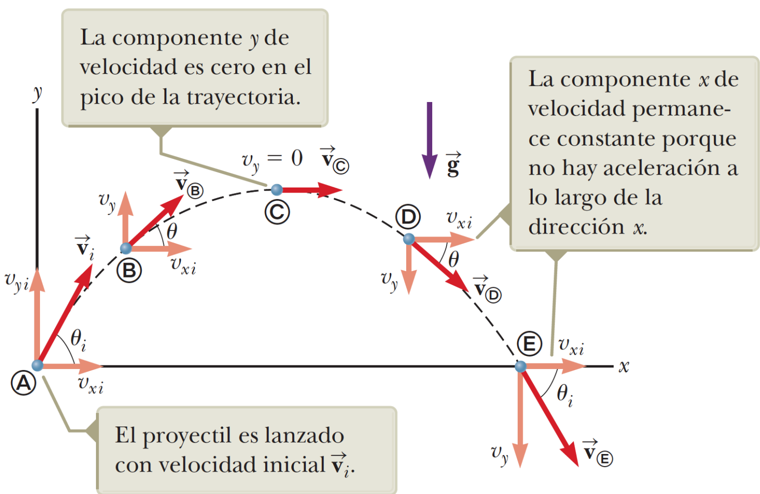


Figure 6: Trayectoria parabólica de un proyectil que sale del origen con velocidad $\vec{\mathbf{v}}_i$. El vector velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ cambia con el tiempo tanto en magnitud como en dirección. Este cambio es el resultado de la aceleración $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}}$ en la dirección y negativa.

5 Las leyes del movimiento

6 Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton

7 Energía de un sistema

8 Conservación de la energía

9 Cantidad de movimiento lineal y colisiones

10 Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo

11 Cantidad de movimiento angular

12 Equilibrio estático y elasticidad

13 Gravitación universal

Part II
Movimiento Oscilatorio

13.1 Movimiento de un objeto unido a un resorte

Posición de equilibrio: Cuando el resorte no está estirado ni comprimido el bloque queda en reposo.

Consideremos el siguiente modelo:

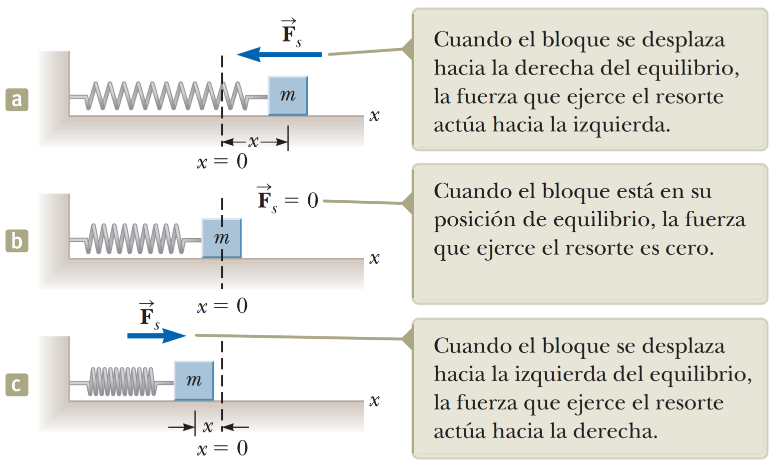


Figure 7: Bloque unido a un resorte móvil sobre una superficie sin fricción.

Cuando el bloque se desplaza a una posición x, el resorte ejerce sobre el bloque una fuerza que es proporcional a la posición y está dada por la **ley de Hooke**:

$$\underbrace{F_s}_{\text{fuerza restauradora}} = - \underbrace{k}_{\text{constante elástica}} \underbrace{x}_{\text{compresión}} \tag{1}$$

Cuando el bloque es desplazado desde el punto de equilibrio y se suelta, éste es una partícula bajo una fuerza neta y, en consecuencia, experimenta una aceleración. Al aplicar la segunda ley de Newton al movimiento del bloque, con la ecuación 1 que proporciona la fuerza neta en la dirección x, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Sigma\ F_x = ma_x &\rightarrow -kx = ma_x \\ a_x &= \frac{-k}{m}x \end{aligned}$$

Se dice que los sistemas en los cuales la aceleración del bloque es proporcional a su posición, y la dirección de la aceleración es opuesta a la dirección del desplazamiento del bloque desde el equilibrio exhiben **movimiento armónico simple**.
En ausencia de fricción este movimiento idealizado continuará por siempre porque la fuerza que ejerce el resorte es conservativa.

13.2 Partícula en movimiento armónico simple

La posición de un objeto actuando sobre una fuerza descrita por la *Ley de Hooke* esta dada por:

$$x(t) = A\cos(\omega t) \tag{2}$$

donde A, ω, son constantes y:

- Amplitud del movimiento (A): es simplemente el máximo valor de la posición de la partícula en la dirección x positiva o negativa.
- Frecuencia angular (ω): es una medida de qué tan rápido se presentan las oscilaciones; mientras más oscilaciones por unidad de tiempo haya, más alto es el valor.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3}$$

- Período del movimiento (T): es el intervalo de tiempo requerido para que la partícula pase a través de un ciclo completo de su movimiento.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{4}$$

- Frecuencia (f): representa el número de oscilaciones que experimenta la partícula por unidad de intervalo de tiempo.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5}$$

Ecuaciones de velocidad y de aceleración

$$\begin{aligned} v = \frac{dx}{dt} &= -\omega A\sin(\omega t) \\ a = \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega^2 A\cos(\omega t) \end{aligned}$$

Valores máximos

$$\begin{aligned} x_{max} &= A \\ v_{max} &= \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ a_{max} &= \omega^2 A = \frac{k}{m} A \end{aligned}$$

13.3 Energía del oscilador armónico simple

Energía cinética

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t) \tag{6}$$

Energía potencial

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t) \tag{7}$$

Energía total

Dado que K y U siempre son cantidades positivas o cero. Puesto que $\omega^2 = \frac{k}{m}$, la energía mecánica total del oscilador armónico simple se expresa como:

$$\begin{aligned} E &= K + U = \frac{1}{2} k A^2 [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] \\ &= \frac{1}{2} k A^2 \end{aligned}$$

Velocidad como una función de la posición
La velocidad del bloque en una posición arbitraria se obtiene al expresar la energía total del sistema en alguna posición arbitraria x como:

$$\begin{aligned} E &= K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \\ v &= \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \end{aligned}$$

13.4 Osciladores amortiguados

En muchos sistemas reales, fuerzas no conservativas como la fricción o la resistencia del aire retardan el movimiento del sistema. En consecuencia, la energía mecánica del sistema disminuye en el tiempo y se dice que el movimiento está amortiguado.

Consideremos el siguiente modelo:

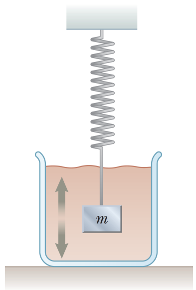


Figure 8: Ejemplo de un oscilador amortiguado es un objeto unido a un resorte y sumergido en un líquido viscoso.

Se puede escribir la segunda ley de Newton como:

$$\begin{aligned} \Sigma\ F_x &= -kx - \underbrace{b \overbrace{v}^{\text{coeficiente de amortiguamiento}}}_{\text{fuerza retardadora}} = ma_x \\ -kx - b\frac{dx}{dt} &= m\frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned}$$

Ecuación de la posición

$$x(t) = A\mathrm{e}^{\frac{-b}{2m}t}\cos(\omega t) \tag{8}$$

donde la frecuencia angular de oscilación es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \tag{9}$$

Es conveniente expresar la frecuencia angular de un oscilador amortiguado en la forma:

$$\omega = \sqrt{\omega_0 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \tag{10}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ representa la frecuencia angular en ausencia de una fuerza retardadora (el oscilador no amortiguado) y se llama **frecuencia natural** del sistema.

Tipos de amortiguamiento

- Subamortiguado: $\omega_0 > \frac{b}{2m}$
- Críticamente Amortiguado: $\omega_0 = \frac{b}{2m}$
- Sobreamortiguado: $\omega_0 < \frac{b}{2m}$

13.5 Oscilaciones forzadas

Se ha visto que la energía mecánica de un oscilador amortiguado disminuye en el tiempo como resultado de la fuerza retardadora. Es posible compensar esta disminución de energía al aplicar una fuerza externa que haga trabajo positivo sobre el sistema. En cualquier instante se puede transferir energía al sistema mediante una fuerza aplicada que actúe en la dirección de movimiento del oscilador.
Al modelar un oscilador con fuerzas retardadoras e impulsoras como una partícula bajo una fuerza neta, la segunda ley de Newton en esta situación produce:

$$\Sigma\ F_x = ma_x \to F_0 \sin(\omega t) - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{11}$$

Ecuación de la posición

$$x(t) = A\cos(\omega t) \tag{12}$$

donde

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 - \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \tag{13}$$

y donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del oscilador subamortiguado ($b = 0$).

Part III
Termodinámica

13.6 Temperatura y ley cero de la termodinámica

Contacto térmico: dos objetos están en contacto térmico mutuo si entre ellos pueden intercambiar energía mediante dichos procesos debido a una diferencia de temperatura.

Equilibrio térmico: es una situación en la que dos objetos no intercambian energía, por calor o por radiación electromagnética, si se colocan en contacto térmico.

Ley cero de la termodinámica
Si dos objetos A y B están por separado en equilibrio térmico con un tercer objeto C, entonces A y B están en equilibrio térmico entre sí.

Temperatura: propiedad que determina si un objeto está en equilibrio térmico con otros objetos.

13.7 Termómetros y escala de temperatura Celsius

Termométro: son dispositivos que sirven para medir la temperatura de un sistema.

El termómetro se calibra al colocarlo en contacto térmico con un sistema natural que permanezca a temperatura constante. Uno de dichos sistemas es una mezcla de hielo y agua en equilibrio térmico a presión atmosférica. En la **escala de temperatura Celsius**, esta mezcla se define que tiene una temperatura de cero grados Celsius, que se escribe como 0°C; esta temperatura se llama *punto de hielo del agua*. Otro sistema empleado comúnmente es una mezcla de agua y vapor en equilibrio térmico a presión atmosférica; su temperatura se define como 100°C, que es el *punto de vapor del agua*.

13.8 Escala absoluta de temperatura

Cero absoluto: se establece al valor −273.15°C para la **escala absoluta de temperatura**.

El tamaño de un grado en la escala absoluta de temperatura se elige como idéntica al tamaño de un grado en la escala Celsius. Por lo tanto, la conversión entre dichas temperaturas es:

$$T_C = T - 273.15$$

donde T_C es la temperatura Celsius y T es la temperatura absoluta.

Las escalas de temperatura Celsius, Fahrenheit y Kelvin
La *escala Fahrenheit* ubica la temperatura del punto de hielo en 32°F y la temperatura del punto de vapor en 212°F. La relación entre las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit es:

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32^oF$$

La relación entre los cambios de temperatura en las escalas Celsius, Kelvin y Fahrenheit:

$$\Delta T_C = \Delta T = \frac{5}{9}\Delta T_F$$

De estas tres escalas de temperatura, sólo la escala Kelvin se apoya en un verdadero valor cero de temperatura.

13.9 Expansión térmica de sólidos y líquidos

El estudio del termómetro líquido utiliza uno de los cambios mejor conocidos en una sustancia: a medida que aumenta su temperatura, su volumen se incrementa. Este fenómeno, conocido como **expansión térmica**, desempeña un importante papel en numerosas aplicaciones de ingeniería. La expansión térmica es una consecuencia del cambio en la separación promedio entre los átomos en un objeto.
Suponga que un objeto tiene una longitud inicial L_i a lo largo de alguna dirección en alguna temperatura, y la longitud aumenta en una cantidad ΔL para un cambio en temperatura ΔT. Es conveniente considerar el cambio fraccionario en longitud por cada grado de cambio de temperatura, entonces se define el *coeficiente de expansión lineal* promedio como:

$$\alpha \equiv \frac{\Delta L/L_i}{\Delta T}$$

Para fines de cálculo, esta ecuación se reescribe como:

$$\Delta L = \alpha L_i \Delta T$$

o en la forma:

$$L_f - L_i = \alpha L_i \left(T_f - T_i\right)$$

donde L_f es la longitud final, T_i y T_f son las temperaturas inicial y final, respectivamente, y la constante de proporcionalidad a es el coeficiente de expansión lineal promedio para un material dado y tiene unidades de $(^oC)^{-1}$.

Ya que las dimensiones lineales de un objeto cambian con la temperatura, se sigue que el área superficial y el volumen cambian. El cambio en volumen es proporcional al volumen inicial V_i y al cambio en temperatura de acuerdo con la relación:

$$\Delta V = \beta V_i \Delta T$$

Comunmente, se cumple que $\beta = 3\alpha$.

13.10 Descripción macroscópica de un gas ideal

La ecuación de expansión volumétrica $\Delta V = \beta V_i \Delta T$ se basa en la suposición de que el material tiene un volumen inicial V_i antes de que ocurra un cambio de temperatura. Tal es el caso para sólidos y líquidos, porque tienen un volumen fijo a una temperatura dada.
Para un gas, es útil saber cómo se relacionan las cantidades volumen V, presión P y temperatura T para una muestra de gas de masa m. En general, la ecuación que interrelaciona estas cantidades, llamada *ecuación de estado*, es muy complicada. Sin embargo, si el gas se mantiene a una presión muy baja (o densidad baja), la ecuación de estado es muy simple y se puede determinar a partir de resultados experimentales. Tal gas de densidad baja se refiere como un gas ideal. El modelo de gas ideal se puede emplear para efectuar predicciones que sean adecuadas para describir el comportamiento de gases reales a bajas presiones.

Ley de gas ideal

$$PV = cT$$

donde c, es una constante que se define como $c = nR$, con n el número de *moles* de la sustancia y R se llama **constante universal de los gases** y tiene el valor:

$$R = 0.082\ \frac{L\ atm}{mol\ K}$$

13.11 Calor y energía interna

La **energía interna** es toda la energía de un sistema que se asocia con sus componentes microscópicos, átomos y moléculas, cuando se observa desde un marco de referencia en reposo respecto al centro de masa del sistema.

El **calor** se define como un proceso de transferencia de energía a través de la frontera de un sistema debido a una diferencia de temperatura entre el sistema y sus alrededores. También es la cantidad de energía Q transferida mediante este proceso.

La **caloría** (cal), que se define como la cantidad de transferencia de energía necesaria para elevar legal temperatura de 1 g de agua de 14.5°C a 15.5°C.

Equivalente mécanico del calor

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$$

Un nombre más conveniente sería *equivalencia entre energía mecánica y energía interna*, pero el nombre histórico tiene mucha presencia en el lenguaje cotidiano, a pesar del uso incorrecto de la palabra calor.

13.12 Calor específico y calorimetría

La **capacidad térmica** (o calorífica) C de una muestra particular se define como la cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de dicha muestra en 1ºC. A partir de esta definición, se ve que si la energía Q produce un cambio ΔT en la temperatura de una muestra, entonces

$$Q = C\Delta T = C(T_f - T_i)$$

El **calor específico** c de una sustancia es la capacidad térmica por unidad de masa. Por lo tanto, si a una muestra de una sustancia con masa m se le transfiere energía Q y la temperatura de la muestra cambia en ΔT, el calor específico de la sustancia es:

$$c \equiv \frac{Q}{m\Delta T} \qquad \text{i.e} \qquad C = mc$$

donde

$$[c] = \frac{\text{cal}}{\text{g}^{\text{o}}\text{C}} = 4.186\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

El calor específico es en esencia una medida de qué tan insensible térmicamente es una sustancia a la adición de energía.

A partir de esta definición, es factible relacionar la energía Q transferida entre una muestra de masa m de un material y sus alrededores con un cambio de temperatura ΔT como:

$$Q = mc\Delta T$$

13.13 Calor latente

<u>Convención:</u> se utilizará el término *material de fase superior* para indicar que el material está a una temperatura alta, cuando se estudien dos fases de un material.

Considere un sistema que contiene una sustancia en dos fases en equilibrio, como hielo y agua. La cantidad inicial de material de fase superior, agua, en el sistema es m_i. Ahora imagine que al sistema entra la energía Q. Como resultado, la cantidad final de agua es m_f debido a la fusión de un poco de hielo. Por lo tanto, la cantidad de hielo derretido es igual a la cantidad de agua nueva: $\Delta m = m_f - m_i$. Para este cambio de fase, el calor latente se define como:

$$\text{L} \equiv \frac{\text{Q}}{\Delta m}$$

De la definición de calor latente, y de nuevo al elegir el calor como el mecanismo de transferencia de energía, la energía requerida para cambiar la fase de una sustancia pura es:

$$\text{Q} = \text{L}\ \Delta m$$

donde Δm es el cambio en masa del material de fase superior.

- **Calor latente de fusión** (L_f): es el término que se aplica cuando el cambio de fase es de sólido a líquido.
- **Calor latente de vaporización:** (L_v): es el término que se usa cuando el cambio de fase es de líquido a gas.

13.14 Mecanismos de transferencia de energía en procesos térmicos

El proceso de transferencia de energía por calor también se llama **conducción** o **conducción térmica**.

Consideremos el siguiente modelo:

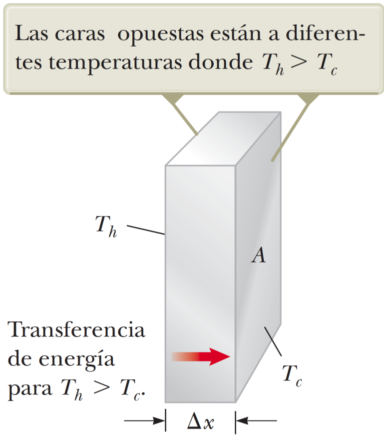


Figure 9: Transferencia de energía a través de una placa conductora con un área de sección transversal A y un espesor Δx.

La conducción se presenta sólo si hay una diferencia en temperatura entre dos partes del medio de conducción. Considere una placa de material de espesor Δx y área de sección transversal A. Una cara de la placa está a una temperatura T_c y la otra está a una temperatura $T_h > T_c$. Se encuentra que la energía Q se transfiere en un intervalo de tiempo Δt desde la cara más caliente hacia la más fría. La rapidez $P = \mathrm{Q}/\Delta t$ a la que ocurre esta transferencia de energía se encuentra que es proporcional al área de sección transversal y a la diferencia de temperatura $\Delta T = T_h - T_c$, e inversamente proporcional al espesor:

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{Q}}{\Delta t} \propto \mathrm{A}\frac{\Delta \mathrm{T}}{\Delta x}$$

Para una placa de espesor infinitesimal dx y diferencia de temperatura dT, se escribe la **ley de conducción térmica** como:

$$\mathrm{P} = k\mathrm{A}|\frac{d\mathrm{T}}{dx}|$$

donde la constante de proporcionalidad k es la conductividad térmica del material y $|\frac{dT}{dx}|$ es el gradiente de temperatura.

Suponga que una larga barra uniforme de longitud L se aísla térmicamente de modo que la energía no puede escapar por calor de su superficie, excepto en los extremos. Un extremo está en contacto térmico con un depósito de energía a temperatura T_c, y el otro extremo está en contacto térmico con un depósito a temperatura $T_h > T_c$. Cuando se logra un estado estable, la temperatura en cada punto a lo largo de la barra es constante en el tiempo. En este caso, si se supone que k no es una función de la temperatura, el gradiente de temperatura es el mismo en todas partes a lo largo de la barra y es:

$$|\frac{d\mathrm{T}}{dx}| = \frac{\mathrm{T}_h - \mathrm{T}_c}{\mathrm{L}}$$

Por lo tanto, la rapidez de transferencia de energía por conducción a través de la barra es:

$$\mathrm{P} = \frac{k\mathrm{A}}{\mathrm{L}}(\mathrm{T}_h - \mathrm{T}_c)$$

Resistencia térmica
El término L/k para una sustancia particular se conoce como el valor R del material. Por lo tanto

$$P = \frac{A\left(T_h - T_c\right)}{\sum_i R_i}$$

donde $R_i = L_i/k_i$.

Convección
Se dice que la energía transferida por el movimiento de una sustancia caliente se transfiere por convección, que es una forma de transferencia de materia.

$$P = hA\left(T - T_0\right)$$

donde h es la *constante de convección*, A es la *superficie de contacto* y T es la *temperatura del cuerpo*.

Radiación
El tercer medio de transferencia de energía que se analizará es la **radiación térmica**.
La rapidez a la que un objeto radia energía es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta de la superficie. Conocida como ley de Stefan, este comportamiento se expresa en forma de ecuación como:

$$P = \sigma A e T^4$$

donde P es la potencia en watts de las ondas electromagnéticas radiadas de la superficie del objeto, σ es una constante igual a 5.67 x 10^{-8} W/m^2K^4, A es el área superficial del objeto en metros cuadrados, e es la emisividad y T es la temperatura superficial en kelvins.
Si un objeto está a una temperatura T y sus alrededores están a una temperatura promedio T_0, la rapidez neta de energía ganada o perdida por el objeto como resultado de la radiación es:

$$P_{neta} = \sigma A e \left(T^4 - T_0^4\right)$$

Part IV
Electricidad y Magnetismo

14 Campos eléctricos

14.1 Propiedades de las cargas eléctricas

Propiedades:

- existen dos tipos de cargas eléctricas, *positiva* y *negativa*.
- cargas de un mismo signo se repelen y cargas de signos opuestos se atraen.
- en un sistema aislado la carga eléctrica siempre se conserva.
- las cargas eléctricas siempre se presentan como un entero múltiplo de una cantidad básica de carga e.
- la carga eléctrica se escribe $q = \pm Ne$ donde N es algún número entero.
- el electrón tiene una carga $-e$ y el protón una carga $+e$. El neutrón, no posee carga.

14.2 Objetos de carga mediante inducción

- Los **conductores** eléctricos son aquellos materiales en los cuales algunos de los electrones son libres no están unidos a átomos y pueden moverse con libertad a través del material.
- Los **aislantes** eléctricos son aquellos materiales en los cuales todos los electrones están unidos a átomos y no pueden moverse libremente a través del material.
- Los **semiconductores**, tienen propiedades eléctricas que se ubican entre las correspondientes a los aislantes y a los conductores.

14.3 Ley de Coulomb

Al generalizar las propiedades de la fuerza eléctrica entre dos partículas inmóviles con carga, se usa el término *carga puntual* que hace referencia a una partícula con carga de tamaño cero. Debido a observaciones experimentales es posible encontrar la magnitud de una fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales establecidas por la **Ley de Coulomb**:

$$F = k\,\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

donde k es una constante conocida como constante de Coulomb.
La fuerza eléctrica, como la fuerza de gravedad, es conservativa.
La unidad de carga del SI es el **coulomb (C)**. La constante de Coulomb k en unidades del SI tiene el valor:

$$k = 8.987 \text{ x } 10^9\,\frac{\mathrm{N}m^2}{\mathrm{C}^2}$$

Además esta constante se expresa como:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

donde la constante ε_0 se conoce como la *permitividad del vacío*, cuyo valor es:

$$\varepsilon_0 = 8.8542 \text{ x } 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}m^2}$$

La unidad de carga más pequeña, es la carga de un electrón $(-e)$ o de un protón (e), con una magnitud de:

$$e = 1.60218 \text{ x } 10^{-19}\mathrm{C}$$

La ley de Coulomb, expresada en forma vectorial para una fuerza eléctrica ejercida por una carga q_1 sobre una segunda carga q_2, rescrita como $\vec{F}_{12}$, es

$$\vec{F}_{12} = k\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{r}_{12}$$

donde $\hat{r}_{12}$ es un vector unitario dirigido de q_1 hacia q_2.

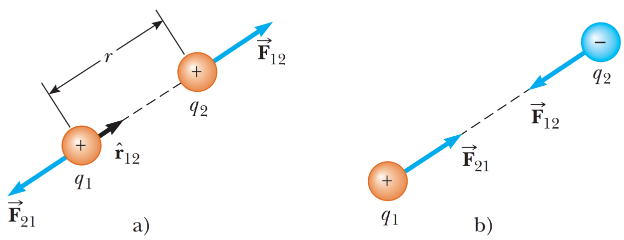


Figure 10: Dos cargas puntuales separadas por una distancia r ejercen una fuerza mutua que está determinada por la Ley de Coulomb.

Si q_1 y q_2 son del mismo signo, el producto $q_1 q_2$ es positivo. Si q_1 y q_2 son de signos opuestos, el producto $q_1 q_2$ es negativo. Estos signos indican la dirección *relativa* de la fuerza, pero no la dirección *absoluta*. Un producto negativo indica que se trata de una **fuerza de atracción**, por lo que cada una de las cargas experimenta una fuerza hacia la otra. Un producto positivo indica que se trata de una **fuerza de repulsión** tal que cada carga experimenta una fuerza que la separa de la otra. La dirección absoluta de la fuerza sobre una carga depende de la posición de la otra carga.

Cuando hay más de dos cargas presentes, la fuerza resultante de cualquiera de ellas es igual a la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por las otras cargas individuales. Por ejemplo, si están presentes cuatro cargas, la fuerza resultante ejercida por las partículas 2, 3 y 4 sobre la partícula 1 es de

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41}$$

14.4 El campo eléctrico

El concepto de campo fue desarrollado por Faraday en relación con las fuerzas eléctricas. En este planteamiento, existe un **campo eléctrico** en la región del espacio que rodea a un objeto con carga: la **carga fuente**. Cuando otro objeto con carga, la **carga de prueba**, entra en este campo eléctrico, una fuerza eléctrica actúa sobre él.

El vector $\vec{E}$ del campo eléctrico en un punto en el espacio se define como la **fuerza eléctrica** $\vec{F}$, que actúa sobre una carga de prueba positiva q_0 colocada en ese punto, dividida entre la carga de prueba

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0}$$

El vector $\vec{E}$ está en unidades del SI, newtons por cada coulomb (N/C). Observe que $\vec{E}$ es el campo producido por una carga o distribución de carga separada de la carga de prueba; no es el campo producido por la propia carga de prueba, además observe que la existencia de un campo eléctrico es una propiedad de su fuente; la presencia de una carga de prueba no es necesaria para que el campo exista. La carga de prueba sirve como detector del campo eléctrico.

La dirección de $\vec{E}$, es la dirección de la fuerza que experimenta una carga de prueba positiva cuando es colocada en el campo; existe un campo eléctrico en un punto si una carga de prueba en dicho punto experimenta una fuerza eléctrica.

La fuerza ejercida sobre una partícula con carga q colocada en un campo eléctrico es

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Si q es positiva, la fuerza tiene la misma dirección que el campo. Si es negativa, la fuerza y el campo tienen direcciones opuestas.

Para determinar la dirección que tiene un campo eléctrico, considere una carga puntual q como carga fuente. Esta carga produce un campo eléctrico en todos los puntos del espacio que la rodea. En el punto P, a una distancia r de la carga fuente, se coloca una carga de prueba q_0. Imagine el uso de la carga de prueba para determinar la dirección de la fuerza eléctrica y, por lo tanto, la dirección del campo eléctrico. De acuerdo con la ley de Coulomb, la fuerza ejercida por q sobre la carga de prueba es

$$\vec{F} = k\,\frac{q q_0}{r^2}\,\hat{r}$$

dónde $\hat{r}$ es un vector unitario con dirección de q hacia q_0.

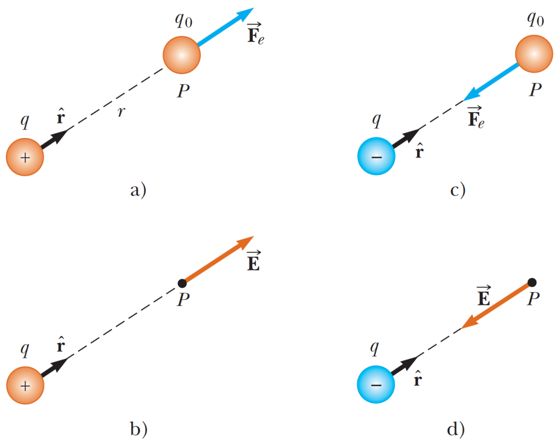


Figure 11: Una carga de prueba q_0 en el punto P está a una distancia r de la carga puntual q.

Ya que el campo eléctrico en P, que es la posición de la carga de prueba, queda definido por $\vec{E} = \vec{F}/q_0$, el campo eléctrico en P establecido por q es

$$\vec{E} = k\,\frac{q}{r^2}\,\hat{r}$$

El campo eléctrico en el punto P debido a un grupo de cargas fuente se expresa como la suma vectorial

$$\vec{E} = k\,\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\,\hat{r}_i$$

donde r_i es la distancia desde la i-ésima carga fuente q_i hasta el punto P y $\hat{r}^i$ es un vector unitario dirigido de q_i hacia P.

Dipolo eléctrico: se define como una carga positiva q y una carga negativa q separadas por una distancia $2d$. El dipolo eléctrico es un buen modelo de muchas moléculas. Los átomos y moléculas neutros se comportan como dipolos cuando se colocan en un campo eléctrico externo.

14.5 Campo eléctrico de una distribución de carga continua

Con mucha frecuencia, en un grupo de cargas, la distancia existente entre ellas es mucho más reducida que la distancia entre el grupo y el punto donde se desea calcular el campo eléctrico. En esta situación, el sistema de cargas se modela como si fuera continuo. Es decir, el sistema de cargas espaciadas en forma compacta es equivalente a una carga total que es distribuida de forma continua a lo largo de alguna línea, sobre alguna superficie, o por todo el volumen.

El campo eléctrico en P debido a un elemento de carga con una carga Δq es

$$\Delta\vec{E} = k\,\frac{\Delta q}{r^2}\,\hat{r}$$

donde r es la distancia desde el elemento de carga hasta el punto P y $\hat{r}$ es el vector unitario dirigido desde el elemento de carga hasta P. El campo eléctrico total en P debido a todos los elementos en la distribución de carga es aproximadamente

$$\vec{E} \approx k\,\sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2}\,\hat{r}_i$$

donde el índice i se refiere al i-ésimo elemento de orden i en la distribución. Ya que la distribución de carga ha sido modelada como continua, el campo total en P en el límite $\Delta q_i \to 0$

es

$$\vec{E} = k \lim_{\Delta q_i \to 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = k \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

donde la integración es sobre toda la distribución de carga. La integración de la ecuación anterior es una operación vectorial y debe ser tratada en forma apropiada.

Este tipo de cálculo se ilustra con varios ejemplos en los que la carga está distribuida a lo largo de una línea, sobre una superficie, o en todo un volumen. Cuando realice estos cálculos es conveniente que use el concepto de densidad de carga junto con las siguientes observaciones:

- Si una carga Q tiene una distribución uniforme en un volumen V, la **densidad de carga volumétrica** ρ se define como

  $$\rho \equiv \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{V}}$$

  donde *rho* está en C/m^3.

- Si una carga Q tiene una distribución uniforme sobre una superficie de área A, la **densidad de carga superficial** σ se define como

  $$\sigma \equiv \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{A}}$$

  donde *sigma* está en C/m^2.

- Si una carga Q tiene una distribución uniforme a lo largo de una línea de longitud l, la **densidad de carga lineal** λ se define como

  $$\lambda \equiv \frac{\mathrm{Q}}{l}$$

  donde *lambda* está en C/m.

- Si la carga no tiene distribución uniforme en un volumen, superficie o línea, las cantidades de cargas dq en un elemento pequeño de volumen, superficie o longitud son

  $$dq = \rho\ d\mathrm{V} \qquad dq = \sigma\ d\mathrm{A} \qquad dq = \lambda\ dl$$

14.6 Líneas de campo eléctrico

Una forma conveniente de visualizar los patrones de los campos eléctricos es el trazo de líneas conocidas como **líneas de campo eléctrico**, establecidas por primera vez por Faraday, las cuales relacionan el campo eléctrico con una región del espacio.

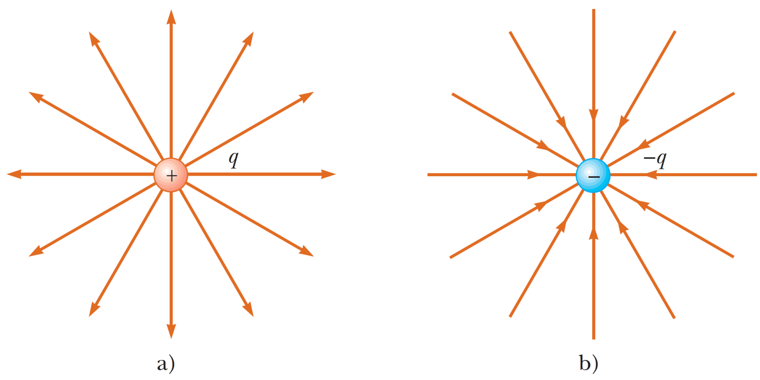


Figure 12: Líneas de campo eléctrico para una carga puntual.

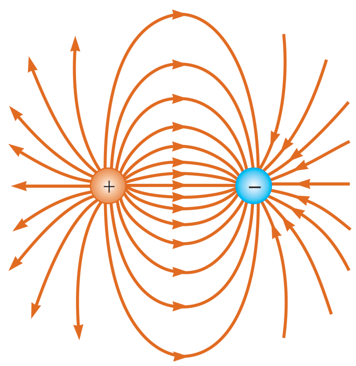


Figure 13: Líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales de igual magnitud y de signo opuesto.

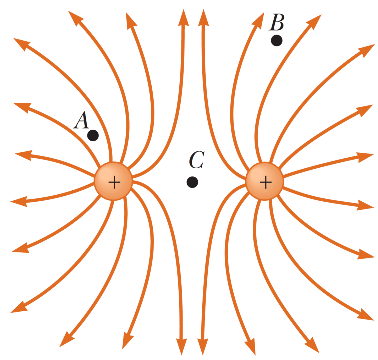


Figure 14: Líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales positivas.

15 Ley de Gauss

15.1 Flujo eléctrico

El total de líneas que penetran en la superficie es proporcional al producto EA. A este producto de la magnitud del campo eléctrico E y al área superficial A, perpendicular al campo, se le conoce como **flujo eléctrico** Φ.

$$\Phi = EA\cos(\theta)$$

Con base en las unidades del SI correspondientes a E y A, Φ se expresa en (N m^2/ C). El flujo eléctrico es proporcional al número de las líneas de campo eléctrico que penetran en una superficie.
Considere una superficie dividida en un gran número de elementos pequeños, cada uno de área ΔA. Es conveniente definir un vector $\Delta\vec{A}_i$ cuya magnitud representa el área del elemento i-ésimo sobre la superficie y cuya dirección está definida como perpendicular al elemento de superficie. El campo eléctrico $\vec{E}$ en la ubicación de este elemento forma un ángulo u_i con el vector $\Delta\vec{A}_i$. El flujo eléctrico $\Delta\Phi$ a través de este elemento es

$$\Delta\Phi = E_i\Delta A_i\cos(\theta_i) = \vec{E}\Delta\vec{A}_i$$

Al sumar las contribuciones de todos los elementos, obtiene el flujo total a través de la superficie.

$$\Phi \approx \sum \vec{E}_i\Delta\vec{A}_i$$

Si supone que el área de cada elemento se acerca a cero, en tal caso el número de elementos se acercaría al infinito y la suma se reemplaza por una integral. Debido a eso, la definición general del flujo eléctrico es

$$\Phi = \oint \vec{E}\ d\vec{A}$$

El flujo neto a través de la superficie es proporcional al número neto de líneas que salen de la superficie, donde número neto significa la cantidad de líneas que salen de la superficie menos la cantidad de líneas que entran.

15.2 Ley de Gauss

La Ley de Gauss se define como la correspondencia de tipo general entre el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada y la carga encerrada en la superficie.
Suponga de nuevo una carga puntual positiva q ubicada en el centro de una esfera de radio r. Se sabe que la magnitud del campo eléctrico en todos los puntos de la superficie de la esfera es $E = kq/r^2$. Las líneas de campo están dirigidas radialmente hacia afuera y por tanto son perpendiculares a la superficie en todos sus puntos. Es decir, en cada punto de la superficie, $\vec{E}$ es paralelo al vector $\Delta\vec{A}$ que representa un elemento de área local ΔA_i que rodea al punto en la superficie. Por lo tanto

$$\vec{E}\ \Delta\vec{A}_i = E\ \Delta A$$

y el flujo neto a través de la superficie gaussiana es igual a

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA$$

donde se ha retirado E afuera de la integral ya que, por simetría, E es constante en la superficie y se conoce por $E = kq/r^2$. Además, en vista de que la superficie es esférica, $\oint dA = A = 4\pi r^2$. Por lo tanto, el flujo neto a través de la superficie gaussiana es

$$\Phi = k\frac{q}{r^2}(4\pi r^2) = 4\pi kq$$

Dado que $k = 1/4\pi\varepsilon_0$, escribimos

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Observaciones

- el flujo neto a través de cualquier superficie cerrada que rodea a una carga puntual q tiene un valor de q/e_0 y es independiente de la forma de la superficie.

- el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada que no rodea a ninguna carga es igual a cero.

15.3 Conductores en equilibrio estático

Un buen conductor eléctrico contiene cargas (electrones) que no se encuentran unidas a ningún átomo y debido a eso tienen la libertad de moverse en el interior del material. Cuando dentro de un conductor no existe ningún movimiento neto de carga, el conductor está en **equilibrio electrostático**. Un conductor en equilibrio electrostático tiene las siguientes propiedades:

- En el interior del conductor el campo eléctrico es cero, si el conductor es sólido o hueco.

- Si un conductor aislado tiene carga, ésta reside en su superficie.

- El campo eléctrico justo fuera de un conductor con carga es perpendicular a la superficie del conductor y tiene una magnitud s/e_0, donde s es la densidad de carga superficial en ese punto.
- En un conductor de forma irregular, la densidad de carga superficial es máxima en aquellos puntos donde el radio de curvatura de la superficie es el menor.

16 Potencial eléctrico

Cuando se coloca una carga de prueba q_0 en un campo eléctrico $\vec{E}$ producido por alguna distribución de carga fuente, la fuerza eléctrica que actúa sobre ella es $q_0\vec{E}$. La fuerza $q_0\vec{E}$ es conservativa, ya que la fuerza entre cargas descrita por la ley de Coulomb es conservativa. Cuando se traslada la carga de prueba por algún agente externo en el campo, el trabajo consumido por el campo en la carga es igual al trabajo invertido por el agente externo que origina el desplazamiento, pero con signo negativo.

Al analizar los campos eléctricos y magnéticos, es común utilizar la notación $d\vec{s}$ para representar un vector de desplazamiento infinitesimal que tiene una orientación tangente a una trayectoria a través del espacio. Esta trayectoria puede ser recta o curva, y la integral calculada a lo largo de esta trayectoria se conoce como integral de la trayectoria, o bien, integral de línea.

Para un desplazamiento infinitesimal $d\vec{s}$ de una carga puntual q_0 inmersa en un campo eléctrico, el trabajo realizado por un campo eléctrico sobre la misma es $\vec{F}d\vec{s} = q_0\vec{E}ds$. Conforme el campo consume esta cantidad de trabajo, la energía potencial del sistema carga-campo cambia en una cantidad $dU = -q_0\vec{E}d\vec{s}$. Para un desplazamiento finito de la carga desde el punto A al punto B, el cambio en energía potencial del sistema $\Delta U = U_B - U_A$ es

$$\Delta U = -q_0 \int_A^B \vec{E}\ d\vec{s}$$

La integración se lleva a cabo a lo largo de la trayectoria que q_0 sigue al pasar de A a B. Porque la fuerza $q_0\vec{E}$ es conservativa, la integral de línea no depende de la trayectoria de A a B.

Al dividir la energía potencial entre la carga de prueba se obtiene una cantidad física que depende sólo de la distribución de carga fuente y tiene un valor en cada uno de los puntos de un campo eléctrico. Esta cantidad se conoce como **potencial eléctrico** (V):

$$V = \frac{U}{q_0}$$

Si la carga de prueba es desplazada entre las posiciones A y B en un campo eléctrico, el sistema carga-campo experimenta un cambio en su energía potencial. La **diferencia de potencial** $\Delta V = V_B - V_A$ entre los puntos A y B de un campo eléctrico se define como el cambio en energía potencial en el sistema al mover una carga de prueba q_0 entre los puntos, dividido entre la carga de prueba:

$$\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_A^B \vec{E}\ d\vec{s}$$

Si un agente externo traslada una carga de prueba de A a B sin modificar la energía cinética de ésta, el agente realiza un trabajo que modifica la energía potencial del sistema: $W = \Delta U$. Imagine una carga q arbitraria localizada en un campo eléctrico. El trabajo consumido por un agente externo al desplazar una carga q a través de un campo eléctrico con una velocidad constante es

$$W = q\Delta V$$

Ya que el potencial eléctrico es una medida de la energía potencial por unidad de carga, la unidad del SI, tanto del potencial eléctrico como de la diferencia de potencial, es joules por cada coulomb, que se define como un **volt** (V):

$$1 \text{ V} \equiv 1 \ \frac{\text{J}}{\text{C}}$$

Como conclusión, el campo eléctrico es una medida de la relación de cambio en función de la posición del potencial eléctrico.

17 Capacitancia y materiales dieléctricos

17.1 Definición de capacitancia

La combinación de dos conductores se conoce como **capacitor**. Los conductores son las placas. Si los conductores llevan carga de igual magnitud y signo opuesto existe una diferencia de potencial ΔV entre ellos.

La cantidad de carga Q en un capacitor es linealmente proporcional a la diferencia de potencial entre los conductores; es decir, $Q \propto V$. La constante de proporcionalidad depende de la forma y separación de los conductores. Esta relación se escribe como $Q = C\Delta V$ si define la capacitancia de la siguiente manera:

Definición: La **capacitancia** C de un capacitor se define como la relación de la magnitud de la carga en cualquiera de los conductores a la magnitud de la diferencia de potencial entre dichos conductores:

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V}$$

La capacitancia siempre es una cantidad positiva. Además, la carga Q y la diferencia de potencial ΔV siempre se expresan como cantidades positivas.

En unidades del SI la capacitancia se expresa en coulombs por cada volt. La unidad del SI para capacitancia es el *farad* (F).

$$1 \text{ F} = 1 \ \frac{\text{C}}{\text{V}}$$

Piense en un capacitor formado por un par de placas paralelas, cada placa está conectada a una de las terminales de una batería, que actúa como fuente de diferencia de potencial. Si al inicio el capacitor no está cargado, la batería establece una campo eléctrico en los alambres de conexión cuando se cierra el circuito. La diferencia de potencial entre las capas del capacitor es la misma que existe entre las terminales de la batería.

17.2 Cálculo de la capacitancia

Es posible deducir una expresión para la capacitancia producida por un par de conductores de cargas opuestas con una carga de magnitud Q, de la siguiente manera: primero calcule la diferencia de potencial. A continuación utilice la expresión $C = Q/\Delta V$ a fin de evaluar la capacitancia.
Sin embargo, la situación más común es que de dos conductores, solo un conductor también tenga capacitancia. Por ejemplo, imagine un conductor esférico con carga. Las líneas del campo eléctrico alrededor de este conductor son exactamente las mismas que si se tratara de una cubierta conductora, esférica de radio infinito, concéntrico con la esfera, y con una carga de la misma magnitud pero de signo opuesto. Por lo tanto, identifique esta cubierta imaginaria

como el segundo conductor de un capacitor de dos conductores. El potencial eléctrico de una esfera de radio r es simplemente kQ/a, y si $V = 0$ en el caso de la cubierta infinitamente grande, tiene

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{kQ/a} = \frac{r}{k} = 4\pi\epsilon_0 r$$

Esta expresión muestra que la capacitancia de una esfera con carga y aislada es proporcional a su radio y es independiente tanto de la carga de la esfera como de la diferencia de potencial. La capacitancia de un par de conductores se ilustra mediante tres geometrías comunes, sobre todo, placas paralelas, cilindros concéntricos y esferas concéntricas. En estos ejemplos, suponga que los conductores cargados están separados por un espacio vacío.

17.2.1 Capacitor de placas paralelas

Dos placas metálicas paralelas de igual área A están separadas por una distancia d. Una placa tiene una carga $+Q$ y la otra tiene una carga $-Q$. La densidad de carga superficial en cada placa es $\sigma = Q/A$. El valor del campo eléctrico entre las placas es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

Ya que el campo entre las placas es uniforme, la magnitud de la diferencia de potencial entre las placas es igual a Ed, por lo tanto

$$\Delta V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

Luego, la capacitancia es

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Qd/\epsilon_0 A} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Es decir, la capacitancia de un capacitor de placas paralelas es proporcional al área de sus placas e inversamente proporcional a la separación de las placas.

17.3 Combinaciones de capacitores

En los circuitos eléctricos con frecuencia se combinan dos o más capacitores. Es posible calcular la capacitancia equivalente de ciertas combinaciones, en donde supondrá que los capacitores a combinar están inicialmente descargados.

17.3.1 Combinación en paralelo

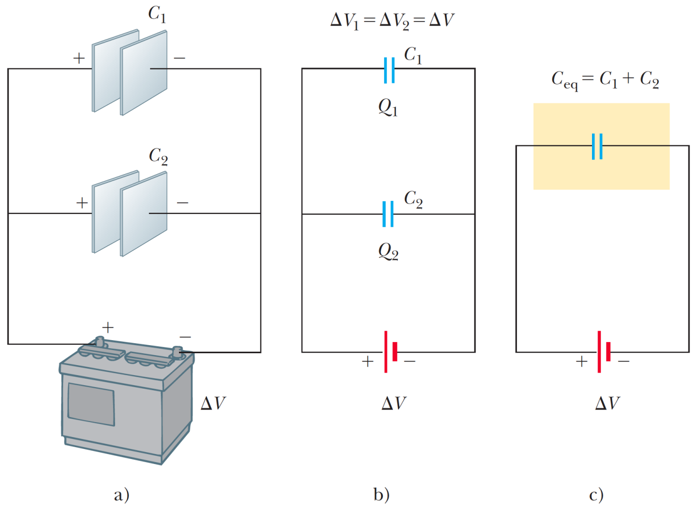


Figure 15: a) Una combinación en paralelo de dos capacitores en un circuito eléctrico en el cual la diferencia de potencial entre las terminales de la batería, es igual a V. b) Diagrama de circuito para esta combinación en paralelo. c) La capacitancia equivalente.

Las diferencias de potencial individuales a través de capacitores conectados en paralelo son las mismas e iguales a la diferencia de potencial aplicada a través de la combinación. Es decir,

$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$$

donde ΔV es el voltaje de terminal de la batería.

Después de que la batería se une al circuito, los capacitores rápidamente alcanzan su carga máxima. Sean las cargas máximas en los dos capacitores Q_1 y Q_2. La carga total Q_{tot} almacenada por los dos capacitores es

$$Q_{tot} = Q_1 + A_2$$

Es decir, la carga total en capacitores conectados en paralelo es la suma de las cargas en los capacitores individuales.

Suponga que quiere sustituir estos dos capacitores por un capacitor equivalente que tenga una capacitancia C_{eq}. El efecto que este capacitor equivalente tiene sobre el circuito debe ser exactamente el mismo que el efecto de la combinación de los dos capacitores individuales. Es decir: el capacitor equivalente debe almacenar carga Q_{tot} cuando se conecte a la batería. El voltaje a través del capacitor equivalente es ΔV porque el capacitor equivalente se conecta directamente a través de las terminales de la batería. Por lo tanto, para el capacitor equivalente,

$$Q_{tot} = C_{eq}\ \Delta V$$

Luego

$$C_{eq}\ \Delta V = C_1\ \Delta V_1 = C_2\ \Delta V_2$$
$$C_{eq} = C_1 + C_2 \text{ (combinaciones en paralelo)}$$

donde se cancelan los voltajes porque todos son iguales. Si este tratamiento se extiende a tres o más capacitores conectados en paralelo, se encuentra que la capacitancia equivalente

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots \text{ (combinaciones en paralelo)}$$

17.3.2 Combinación en serie

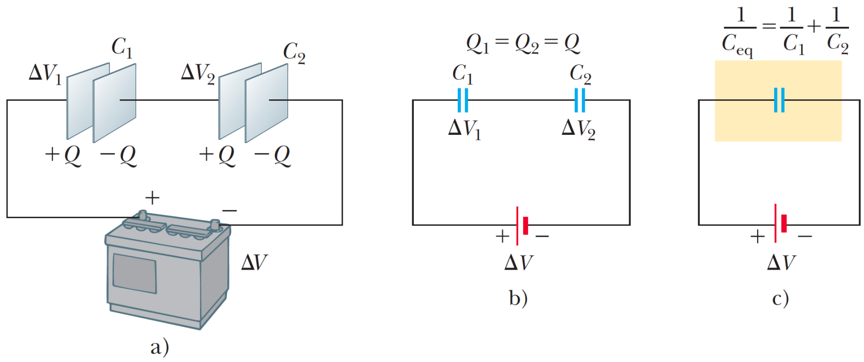


Figure 16: a) Combinación en serie de dos capacitores. Las cargas en ambos capacitores son iguales. b) Diagrama del circuito para la combinación en serie. c) La capacitancia equivalente.

Las cargas de los capacitores conectados en serie son iguales.

$$Q = Q_1 = Q_2$$

donde Q es la carga que se movió entre un alambre y la placa exterior conectada de uno de los capacitores.
El voltaje total V_{tot} a través de la combinación se divide entre los dos capacitores:

$$\Delta V_{tot} = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

donde V_1 y V_2 son las diferencias de potencial presentes en los capacitores C_1 y C_2, respectivamente. En general, la diferencia de potencial total aplicada a cualquier cantidad de capacitores conectados en serie es la suma de las diferencias de potencial presentes entre cada uno de los capacitores individuales.

Suponga que el simple capacitor individual equivalente ejerce un efecto idéntico sobre el circuito que la combinación en serie cuando está conectado a la batería. Una vez que está totalmente cargado, el capacitor equivalente deberá tener una carga igual a $-Q$ en su placa derecha y una carga de $+Q$ en su placa izquierda. Al aplicar la definición de capacitancia se tiene

$$\Delta V_{tot} = \frac{Q}{C_{eq}}$$
$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

Se cancelan las cargas porque son las mismas

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \text{ (combinaciones en serie)}$$

Cuando es aplicado este análisis a una combinación de tres o más capacitores conectados en serie, la correspondencia para la capacitancia equivalente es

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots \text{ (combinaciones en serie)}$$

17.4 Energía almacenada en un capacitor con carga

Ya que las cargas positiva y negativa están separadas en el sistema de dos conductores en un capacitor, en el sistema se almacena energía potencial eléctrica.

Suponga que q es la carga del capacitor en un determinado instante durante el proceso de carga. En ese mismo momento, la diferencia de potencial a través del capacitor es $\Delta V = q/C$. Se sabe que el trabajo necesario para transferir un incremento de carga dq de la placa que tiene una carga $-q$ a la placa que tiene una carga $+q$ es

$$dW = \Delta V \; dq = \frac{q}{C} \; dq$$

El trabajo total requerido para cargar el capacitor desde $q = 0$ hasta una carga final $q = Q$ es

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} \; dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q \; dq = \frac{Q^2}{2C}$$

El trabajo invertido al cargar el capacitor se presenta como una energía potencial eléctrica U almacenada en el mismo. Es posible expresar la energía potencial almacenada en el capacitor con carga como:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q \; \Delta V = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2$$

Este resultado es aplicable a cualquier capacitor, sea cual fuere su geometría. Para una capacitancia determinada, la energía almacenada aumenta al incrementarse la carga y la diferencia de potencial.

Considere la energía almacenada en un capacitor como si estuviera almacenada en el campo eléctrico producido entre las placas al cargar el capacitor. En el caso de un capacitor de placas paralelas, la diferencia de potencial está relacionada con el campo eléctrico mediante la correspondencia $\Delta V = Ed$. Además, su capacitancia es $C = \epsilon_0 A/d$. Si sustituyen estas expresiones, se obtiene

$$U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} (E^2 d^2) = \frac{1}{2} (\epsilon_0 A d) E^2$$

En vista de que el volumen ocupado por el campo eléctrico es Ad, la energía por cada unidad de volumen $u_E = U/Ad$, conocida como *densidad de energía*, es

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Esta expresión es válida de manera general, independientemente de la fuente del campo eléctrico. Es decir, la densidad de energía en cualquier campo eléctrico en un punto dado es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico.

17.5 Capacitores con material dieléctrico

Un **dieléctrico** es un material no conductor. Consideremos un capacitor de placas paralelas que, sin dieléctrico, tiene una carga Q_0 y una capacitancia C_0. La diferencia de potencial en las terminales del capacitor es $V_0 = Q_0/C_0$. Si ahora se inserta un material dieléctrico entre las placas, el voltímetro indica que el voltaje entre las placas disminuye un valor ΔV. Los voltajes con y sin dieléctrico están relacionados mediante el factor k como sigue:

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{k}$$

Ya que $\Delta V < \Delta V_0$, se ve que $k > 1$. El factor adimensional k se llama constante dieléctrica del material, la cual varía de un material a otro.

Ya que la carga Q_0 en el capacitor no cambia, la capacitancia debe cambiar al valor

$$C = \frac{Q_0}{\Delta V} = \frac{Q_0}{\Delta V_0 k} = k \ \frac{Q_0}{\Delta V_0} = kC_0$$

Es decir, la capacitancia aumenta en un factor k cuando el material dieléctrico llena por completo la región entre placas. En el caso de un capacitor de placas paralelas, donde $C_0 = \epsilon_0 A/d$, se expresa la capacitancia cuando el capacitor está lleno de material dieléctrico como sigue:

$$C = k \ \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

18 Corriente y resistencia

18.1 Corriente eléctrica

La cantidad de flujo de las cargas eléctricas depende del material a través del cual pasan las cargas y de la diferencia de potencial que existe de un extremo al otro del material. Siempre que hay un flujo neto de carga a través de alguna región, se dice que existe una corriente eléctrica. Para definir la corriente con mayor precisión, suponga que las cargas tienen un movimiento perpendicular a una superficie A. La corriente es la proporción a la cual circula la carga a través de esta superficie. Si Q es la cantidad de carga que pasa a través de esta superficie en un intervalo de tiempo t, la corriente promedio I_{prom} es igual a la carga que pasa a través de A por unidad de tiempo:

$$I_{prom} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Si la proporción a la que circula la carga varía en el tiempo, entonces, la corriente también varía en el tiempo; se define de la corriente instantánea I como el límite diferencial de la corriente promedio:

$$I \equiv \frac{dQ}{dt}$$

La unidad del SI para la corriente es el **ampere** (A):

$$1 \text{ A} = 1 \ \frac{\text{C}}{\text{s}}$$

Las partículas con carga que pasan a través de la superficie pueden ser positivas, negativas, o ambas. Es una regla convencional asignar a la corriente la misma dirección que la del flujo de la carga positiva. En los conductores eléctricos, como cobre o aluminio, la corriente está ocasionada por el movimiento de electrones con carga negativa. Por lo tanto, en cualquier conductor, la dirección de la corriente es la opuesta a la dirección del flujo de los electrones. Es común referirse a una carga en movimiento (positiva o negativa) como un portador de carga móvil.

18.2 Resistencia

Piense en un conductor de área de sección transversal A que transporta una corriente I. La densidad de corriente J en el conductor se define como la corriente por unidad de área. La densidad de corriente es igual a

$$J \equiv \frac{I}{A}$$

donde J tiene unidades en el SI de amperes por cada metro cuadrado. Esta expresión es válida sólo si la densidad de corriente es uniforme y sólo si la superficie del área de sección transversal A es perpendicular a la dirección de la corriente.
Tan pronto como se mantiene una diferencia de potencial a través del conductor se establece una densidad de corriente y un campo eléctrico. En algunos materiales, la densidad de corriente es proporcional al campo eléctrico:

$$J = \sigma E$$

donde la constante de proporcionalidad σ se conoce como conductividad del conductor.
Los materiales que obedecen la ley de Ohm y por tanto cumplen esta simple correspondencia entre E y J, se conocen como materiales *óhmicos*. Sin embargo, se ha encontrado experimentalmente que no todos los materiales tienen esta propiedad.
Si consideramos un segmento de alambre recto de área de sección transversal uniforme Ay de longitud l, obtendrá una ecuación que resulte útil en aplicaciones prácticas. De un extremo al otro del alambre se mantiene una diferencia de potencial $\Delta V = V_b - V_a$, lo que genera en el alambre un campo eléctrico y una corriente. Si supone que el campo es uniforme, la diferencia de potencial está relacionada con el campo mediante la relación

$$\Delta V = El$$

Por lo tanto, la densidad de corriente en el alambre se expresa en la forma

$$J = \sigma E = \sigma \frac{\Delta V}{l}$$

Ya que $J = I/A$, la diferencia de potencial a través del alambre es

$$\Delta V = \frac{l}{\sigma}\ J = \left(\frac{l}{\sigma A}\right)\ I = RI$$

La cantidad $R = l/\sigma A$ se conoce como la resistencia del conductor que es definida como la relación de la diferencia de potencial aplicada a un conductor entre la corriente que pasa por el mismo:

$$R \equiv \frac{\Delta V}{I}$$

Al estudiar los circuitos eléctricos utilizará esta ecuación una y otra vez. Con este resultado se observa que la resistencia tiene unidades del SI de volts por ampere. Un volt por ampere se define como un **ohm** (Ω):

$$1\ \Omega = 1\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$$

La mayoría de los circuitos eléctricos usan elementos llamados **resistores** para controlar la corriente en las diferentes partes del circuito.
El recíproco de la conductividad es la **resistividad** ρ:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

donde *rho* está en ohms-metros (Ωm). Ya que $R = l/\sigma A$, es posible expresar la resistencia a lo largo de la longitud de un bloque uniforme de material de la forma

$$R = \rho\ \frac{l}{A}$$

18.3 Resistencia y temperatura

En un intervalo limitado de temperatura, la resistividad de un conductor varía prácticamente de manera lineal con la temperatura, de acuerdo con la expresión

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \alpha(T - T_0)\right]$$

donde ρ es la resistividad a cierta temperatura T (en grados Celsius), ρ_0 la resistividad en alguna temperatura de referencia T_0 (por lo general 20°C), y α el **coeficiente de temperatura de resistividad**. El coeficiente de temperatura de resistividad se expresa como

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta\rho}{\Delta T}$$

donde $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ es el cambio en la resistividad durante el intervalo de temperatura $\Delta T = T - T_0$.

Ya que la resistencia es proporcional a la resistividad, la variación en la resistencia de una muestra es

$$R = R_0 \left[1 + \alpha(T - T_0)\right]$$

donde R_0 es la resistencia a la temperatura T_0.

Superconductores

Existe una clase de metales y de compuestos cuya resistencia disminuye hasta cero cuando llegan a una cierta temperatura T_c, conocida como temperatura crítica. Estos materiales se conocen como **superconductores**.

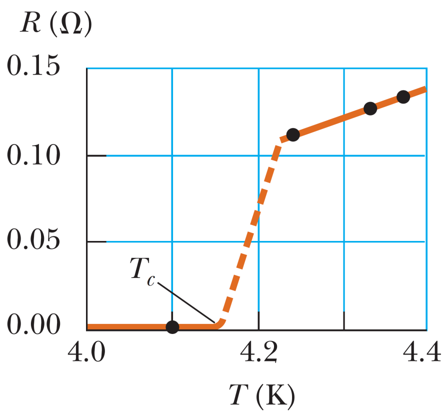


Figure 17: Resistencia en función de la temperatura para una muestra de mercurio (Hg).

18.4 Potencia eléctrica

En los circuitos eléctricos típicos, la energía se transfiere de una fuente, como una batería, a algún dispositivo, como sería una lámpara o un receptor de radio. Por ello conviene determinar una expresión que permita calcular la rapidez de transferencia de esta energía.

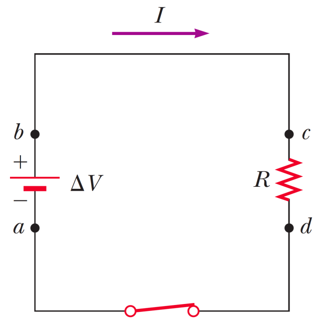


Figure 18: Circuito constituido por un resistor de resistencia R y una batería con una diferencia de potencial ΔV entre sus terminales. La carga positiva fluye en dirección de las manecillas del reloj.

Considere ahora la rapidez a la cual el sistema pierde energía potencial eléctrica conforme la carga Q pasa a través del resistor:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Q\ \Delta V\right) = \frac{dQ}{dt}\ \Delta V = I\ \Delta V$$

donde I es la corriente en el circuito. El sistema recupera su energía potencial cuando la carga pasa a través de la batería, a expensas de la energía química de la misma. La rapidez a la cual el sistema pierde energía potencial conforme la carga pasa a través del resistor es igual a la rapidez a la cual el sistema adquiere energía interna en el resistor. Por lo tanto, la potencia $\mathcal{P}$ que representa la rapidez a la cual se entrega energía al resistor, es

$$\mathcal{P} = I\ \Delta V$$

Se deduce este resultado si considera una batería que entrega energía a un resistor. Para calcular la potencia entregada por una fuente de voltaje a cualquier dispositivo que tenga una corriente I y esté sujeto a una diferencia de potencial ΔV entre sus terminales. Apartir de que un resistor $\Delta V = IR$, la potencia entregada al resistor tiene una expresión alterna

$$\mathcal{P} = I^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

Cuando I se expresa en amperes, ΔV en volts y R en ohms, la unidad del SI para la potencia es el **watt**. El proceso mediante el que se pierde potencia en forma de energía interna en un conductor de resistencia R, a menudo se llama *calentamiento joule*.

19 Circuitos de corriente directa

19.1 Fuerza electromotriz

Dado que en un circuito particular la diferencia de potencial en las terminales de la batería es constante, la corriente en el circuito es constante en magnitud y dirección y recibe el nombre de corriente directa. A la batería se le conoce como fuente de fuerza electromotriz, o más comúnmente, *fuente de fem*. (Lo que se conoce como **fuerza electromotriz** es un desafortunado equívoco histórico, pues describe no una fuerza, sino una diferencia de potencial en volts.) La fem ε de una batería es el voltaje máximo posible que ésta puede suministrar entre sus terminales.

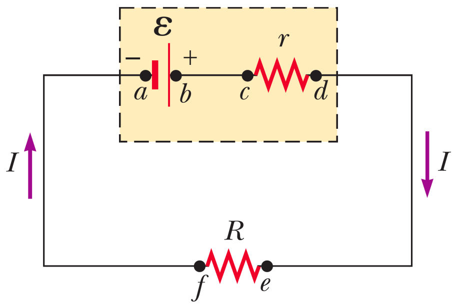


Figure 19: Diagrama de un circuito de una fuente de fem ε (en este caso, una batería), de resistencia interna r, conectada a un resistor externo, de resistencia R.

La terminal positiva de la batería se encuentra a un potencial más alto que la negativa. Puesto que una batería está hecha de materia, existe una resistencia al flujo de las cargas dentro de la misma. Esta resistencia recibe el nombre de **resistencia interna** r. En el caso de una batería ideal con una resistencia interna igual a cero, la diferencia de potencial a través de la batería (conocida como voltaje entre las terminales) es igual a su fem. El el voltaje entre las terminales de la batería $\Delta V = V_d - V_a$ es:

$$\Delta V = \varepsilon - Ir$$

Notar que ε es equivalente al **voltaje en circuito abierto**, es decir, el voltaje entre las terminales cuando la corriente es igual a cero. La diferencia de potencial real entre las terminales de la batería depende de la corriente en la misma.

El voltaje entre las terminales ΔV debe ser igual a la diferencia de potencial de un extremo a otro de la resistencia externa R, conocida como **resistencia de carga**. El resistor representa una carga en la batería porque ésta debe suministrar energía para que el aparato que contiene la resistencia funcione. La diferencia de potencial de un extremo a otro de la resistencia de carga es $\Delta V = IR$.

$$\varepsilon = IR + Ir$$

Al resolver en función de la corriente

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

Esta ecuación muestra que la corriente en este circuito simple depende tanto de la resistencia de carga R externa a la batería como de la resistencia interna r. Si R es mucho mayor que r, como es el caso de muchos circuitos útiles en la vida cotidiana, ignore r, es decir:

$$\varepsilon = IR$$

19.2 Resistores en serie y en paralelo

19.2.1 Resistores en serie

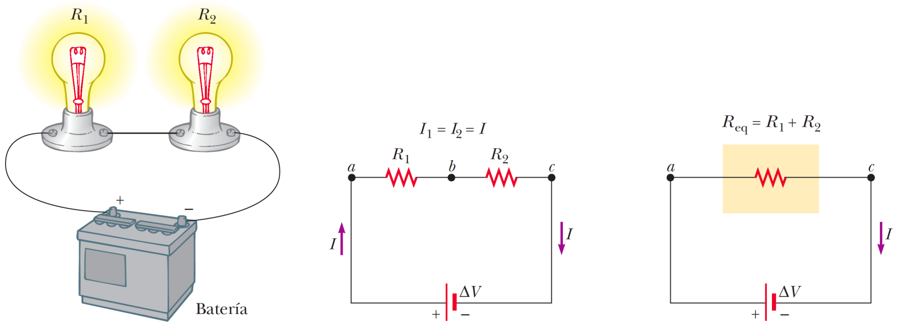


Figure 20: Diagrama de un circuito de una fuente de fem ε (en este caso, una batería), de resistencia interna r, conectada a un resistor externo, de resistencia R.

Cuando dos o más resistores están interconectados como los de la figura anterior, se dice que están en una **combinación en serie**. En una conexión en serie, si una cantidad de carga Q sale de un resistor R_1, deberá también entrar en el segundo resistor R_2. Por lo tanto, en un intervalo determinado de tiempo, la misma cantidad de carga pasa a través de ambos resistores.

$$I = I_1 = I_2$$

donde I es la corriente de la batería, I_1 es la corriente en el resistor R_1 e I_2 es la corriente en el resistor R_2.

La diferencia de potencial que se aplica a una combinación en serie de resistores se dividirá entre éstos. En la figura, ya que la caída de voltaje de a a b es igual a I_1R_1 y la caída de voltaje de b a c es

$$\Delta V = I_1R_1 + I_2R_2$$

La diferencia de potencial entre las terminales de la batería también está aplicada a la resistencia equivalente R_{eq}:

$$\Delta V = IR_{eq}$$

donde la resistencia equivalente tiene el mismo efecto en el circuito que en la combinación en serie porque resulta de la misma corriente I en la batería. Al combinar estas ecuaciones para ΔV se sustituyen los dos resistores en serie por una sola resistencia equivalente, cuyo valor es la *suma* de las resistencias equivalentes:

$$\Delta V = IR_{eq} = I_1R_1 + I_2R_2 \rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2$$

La resistencia equivalente de tres o más resistores conectados en serie es

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

Esta correspondencia indica que **la resistencia equivalente de una combinación en serie de resistores es la suma numérica de las resistencias individuales y siempre es mayor que cualquier resistencia individual**.

19.2.2 Resistores en paralelo

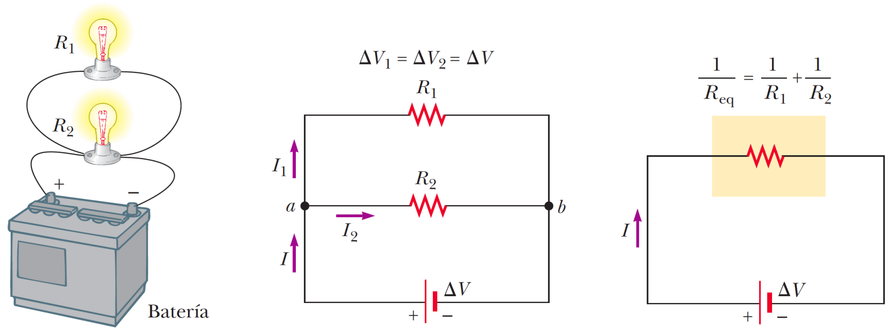


Figure 21: Diagrama de un circuito de una fuente de fem ε (en este caso, una batería), de resistencia interna r, conectada a un resistor externo, de resistencia R.

En una **combinación en paralelo**, las diferencias de potencial a través de los resistores son las mismas:

$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$$

donde ΔVes el voltaje entre las terminales de la batería.

Cuando las cargas llegan al punto a en la figura b), se dividen en dos; una parte pasa a través de R_1 y el resto a través de R_2. Una unión es cualquier punto en un circuito donde una corriente puede dividirse. Esta división resulta en menos corriente en cada resistor de la que sale de la batería. Debido a que la carga eléctrica se conserva, la corriente I que entra al punto a debe ser igual a la corriente total que sale del mismo:

$$I = I_1 + I_2$$

donde I_1 es la corriente en R_1 e I_2 es la corriente en R_2.

La corriente en la resistencia equivalente R_{eq} es

$$I = \frac{\Delta V}{R_{eq}}$$

donde la resistencia equivalente tiene el mismo efecto en el circuito que las dos resistencias en paralelo, por lo que la resistencia equivalente de dos resistores en paralelo se conoce por

$$I = \frac{\Delta V}{R_{eq}} = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2} \rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Una extensión de esta explicación a tres o más resistores en paralelo da:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots$$

De esta expresión se ve que **el inverso de la resistencia equivalente de dos o más resistores conectados en una combinación en paralelo es igual a la suma de los inversos de las resistencias individuales. Además, la resistencia equivalente siempre es menor que la resistencia más pequeña en el grupo**.

19.3 Leyes de Kirchhoff

Es posible simplificar y explicar combinaciones de resistores aplicando la expresión $\Delta V = IR$ y las reglas para las combinaciones en serie y en paralelo de los resistores. Muy a menudo, sin embargo, no es posible simplificar un circuito en una sola espira. El procedimiento para explicar circuitos más complejos se hace posible si se utilizan dos principios conocidos como leyes de Kirchhoff:

- **Ley de la unión:** En cualquier unión, la suma de las corrientes debe ser igual a cero:

$$\sum_{union} I = 0$$

- **Ley de la espira:** La suma de las diferencias de potencial a través de todos los elementos alrededor de cualquier espira de un circuito cerrado debe ser igual a cero:

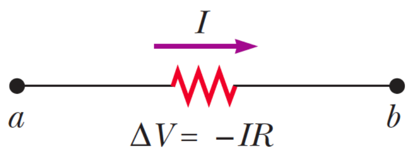
$$\sum_{espira} \Delta V = 0$$

La primera ley de Kirchhoff es un enunciado de la conservación de la carga eléctrica. La segunda ley de Kirchhoff es una consecuencia de la ley de conservación de energía.

Las siguientes son reglas para determinar las diferencias de potencial a través de un resistor y de una batería, utilizando la segunda ley y bajo la supoción de que la batería no tiene resistencia interna. Cada elemento del circuito se recorre de a hasta b, de izquierda a derecha.

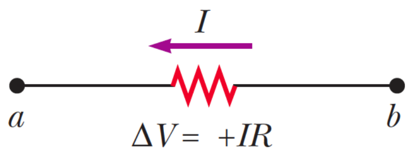
- las cargas se mueven del extremo de potencial alto de un resistor hacia el extremo de potencial bajo; si un resistor se atraviesa en la dirección de la corriente, la diferencia de potencial ΔV a través del resistor es $-IR$ (figura a)).

a)



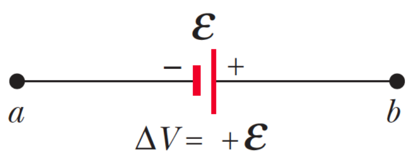
- si un resistor se recorre en la dirección opuesta a la corriente, la diferencia de potencial ΔV a través del resistor es $+IRR$ (figura b)).

b)



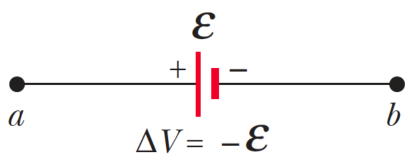
- Si una fuente de fem (suponiendo que tenga una resistencia interna igual a cero) es recorrida en la dirección de la fem (de negativo a positivo), la diferencia de potencial ΔV es $+\varepsilon$ (figura c)).

c)



- si una fuente de fem (suponiendo que tenga una resistencia interna igual a cero) es recorrida en la dirección opuesta a la fem (de positivo a negativo), la diferencia de potencial ΔV es $-\varepsilon$ (figura d)).

d)



En general, para resolver un problema de circuito en particular, el número de ecuaciones independientes que se necesitan para obtener las dos leyes es igual al número de corrientes desconocidas.