Resumen de teoremas para el final de Lenguajes Formales y Computabilidad

Agustín Curto, agucurto95@gmail.com
Francisco Nievas, frannievas@gmail.com

2017

Contents

1 Notación y conceptos básicos **2**

2 Procedimientos efectivos **3**

3 Funciones Σ-recursivas **5**

4 El lenguaje S^{Σ} **19**

5 Máquinas de Turing **20**

Nota: Este resumen se corresponde con la materia dictada en el año 2017. Los autores no se responsabilizan de posibles cambios que pudiesen realizarse en los temas dictados en la misma, así como tampoco de errores involuntarios que pudiesen existir en dicho resumen.

Por favor, mejorá este documento en github
https://github.com/acurto714/resumenLengForm

1 Notación y conceptos básicos

Lemma 1. *Sea $S \subseteq \omega \times \Sigma^*$, entonces S es rectangular si y solo si se cumple la siguiente propiedad:*

$$\text{Si } (x, \alpha),\ (y, \beta) \in S \Rightarrow (x, \beta) \in S$$

Lemma 2. *La relación $<$ es un orden total estricto sobre Σ^*.*

Lemma 3. *La función $s^< : \Sigma^* \to \Sigma^*$, definida recursivamente de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{rcll} s^<(\varepsilon) & = & a_1 & \\ s^<(\alpha a_i) & = & \alpha a_{i+1} & \quad \text{para } i < n \\ s^<(\alpha a_n) & = & s^<(\alpha) a_1 & \end{array}$$

tiene la siguiente propiedad:

$$s^<(\alpha) = \min\{\beta \in \Sigma^* : \alpha < \beta\}$$

Corollary 4. *$s^<$ es inyectiva.*

Lemma 5. *Se tiene que:*

1. *$s^<(\alpha) \neq \varepsilon$, para cada $\alpha \in \Sigma^*$.*
2. *Si $\alpha \neq \varepsilon$, entonces $\alpha = s^<(\beta)$ para algún β.*
3. *Si $S \subseteq \Sigma^* \neq \emptyset$, entonces $\exists \alpha \in S$ tal que $\alpha < \beta$, para cada $\beta \in S - \{\alpha\}$.*

Lemma 6. *Tenemos que:*

$$\Sigma^* = \{*^<(0), *^<(1), \dots\}$$

Mas aún la función $*^<$ es biyectiva.

Lemma 7. *Sea $n \geq 1$ fijo, entonces cada $x \geq 1$ se escribe en forma única de la siguiente manera:*

$$x = i_0 n^0 + \ldots + i_{k-1} n^{k-1} + i_k n^k$$

con $k \geq 0$ y $1 \leq i_0, \ldots, i_{k-1}, i_k \leq n$.

Lemma 8. *La función $\#^<$ es biyectiva.*

Lemma 9. *Las funciones $\#^<$ y $*^<$ son una inversa de la otra.*

Lemma 10. *Si $p, p_1, \ldots, p_n$ son números primos y p divide a $\prod_{i=1}^{n} p_i$, entonces $p = p_i$, para algún i.*

Theorem 11. *Para cada $x \in \mathbb{N}$, hay una única sucesión $(s_1, s_2, \dots) \in \omega^{[\mathbb{N}]}$ tal que:*

$$x = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$$

Notar que $\prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$ tiene sentido ya que es un producto que solo tiene una cantidad finita de factores no iguales a 1.

Lemma 12. *Las funciones:*

$$\begin{array}{cc} \mathbb{N} \to \omega^{[\mathbb{N}]} & \omega^{[\mathbb{N}]} \to \mathbb{N} \\ x \to ((x)_1, (x)_2, \dots) & (s_1, s_2, \dots) \to \langle s_1, s_2, \dots \rangle \end{array}$$

son biyecciones una inversa de la otra.

Lemma 13. *Recordemos, para cada $x \in \mathbb{N}$ se define:*

$$Lt(x) = \begin{cases} \max_i\ (x)_i \neq 0 & si\ x \neq 1 \\ 0 & si\ x = 1 \end{cases}$$

Luego, para cada $x \in \mathbb{N}$:

1. $Lt(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
2. $x = \prod_{i=1}^{Lt(x)} pr(i)^{(x)_i}$

Cabe destacar entonces que la función $\lambda ix[(x)_i]$ tiene dominio igual a $\mathbb{N}^2$ y la función $\lambda ix[Lt(x)]$ tiene dominio igual a $\mathbb{N}$.

2 Procedimientos efectivos

Lemma 14. *Sean $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ conjuntos Σ-efectivamente enumerables, entonces:*

a) $S_1 \cup S_2$ es Σ-efectivamente enumerable.

b) $S_1 \cap S_2$ es Σ-efectivamente enumerable.

Proof. El caso en el que alguno de los conjuntos es vacío es trivial. Supongamos que $S_1, S_2 \neq \emptyset$ y sean $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ procedimientos que enumeran a S_1 y S_2.

a) El siguiente procedimiento enumera al conjunto $S_1 \cup S_2$:

Si x es par: realizar $\mathbb{P}_1$ partiendo de $x/2$ y dar el elemento de S_1 obtenido como salida.
Si x es impar: realizar $\mathbb{P}_2$ partiendo de $(x-1)/2$ y dar el elemento de S_2 obtenido como salida.

b) Veamos ahora que $S_1 \cap S_2$ es Σ-efectivamente enumerable:

Si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$: entonces no hay nada que probar.

Si $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$: sea z_0 un elemento fijo de $S_1 \cap S_2$. Sea $\mathbb{P}$ un procedimiento efectivo el cual enumere a $\omega \times \omega$.

El siguiente procedimiento enumera al conjunto $S_1 \cap S_2$:

Etapa 1: Realizar $\mathbb{P}$ con dato de entrada x, para obtener un par $(x_1, x_2) \in \omega \times \omega$.

Etapa 2: Realizar $\mathbb{P}_1$ con dato de entrada x_1 para obtener un elemento $z_1 \in S_1$.

Etapa 3: Realizar $\mathbb{P}_2$ con dato de entrada x_2 para obtener un elemento $z_2 \in S_2$.

Etapa 4: Si $z_1 = z_2$, entonces dar como dato de salida z_1. En caso contrario dar como dato de salida z_0.

□

Lemma 15. *Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ-efectivamente computable entonces S es Σ-efectivamente enumerable.*

Proof. El caso en el que S es vacío es trivial. Supongamos $S \neq \emptyset$. Sea $(\vec{z}, \vec{\gamma}) \in S$, fijo. Recordemos que $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ-efectivamente enumerable. Sean:

- $\mathbb{P}_1$ un procedimiento efectivo que enumere a $\omega^n \times \Sigma^{*m}$
- $\mathbb{P}_2$ un procedimiento efectivo que compute a χ_S.

El siguiente procedimiento enumera a S:

Etapa 1: Realizar $\mathbb{P}_1$ con x de entrada para obtener $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$.
Etapa 2: Realizar $\mathbb{P}_2$ con $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ de entrada para obtener el valor *Booleano* e de salida.
Etapa 3: **Si** $e = 1$**:** dar como dato de salida $(\vec{x}, \vec{\alpha})$.
Si $e = 0$**:** dar como dato de salida $(\vec{z}, \vec{\gamma})$. □

Theorem 16. *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, son equivalentes:*

a) S es Σ-efectivamente computable.

b) S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ-efectivamente enumerables.

Proof. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Si S es Σ-efectivamente computable, por el **Lemma 15** tenemos que S es Σ-efectivamente enumerable. Notese además que, dado que S es Σ-efectivamente computable, $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ también lo es, es decir, que aplicando nuevamente el **Lemma 15** tenemos que $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ es Σ-efectivamente enumerable.

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Sean:

- $\mathbb{P}_1$ un procedimiento efectivo que enumere a S.
- $\mathbb{P}_2$ un procedimiento efectivo que enumere a $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$.

El siguiente procedimiento computa el predicado χ_S:

Etapa 1: Darle a la variable T el valor 0.
Etapa 2: Realizar $\mathbb{P}_1$ con el valor de T como entrada para obtener de salida la upla $(\vec{y}, \vec{\beta})$.
Etapa 3: Realizar $\mathbb{P}_2$ con el valor de T como entrada para obtener de salida la upla $(\vec{z}, \vec{\gamma})$.
Etapa 4: **Si** $(\vec{y}, \vec{\beta}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$**:** entonces detenerse y dar como dato de salida el valor 1.
Si $(\vec{z}, \vec{\gamma}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$**:** entonces detenerse y dar como dato de salida el valor 0.
Si no sucede ninguna de las dos posibilidades: aumentar en 1 el valor de la variable T y dirijirse a la Etapa 2. □

Theorem 17. *Dado $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, son equivalentes:*

1. *S es Σ-efectivamente enumerable.*
2. *$S = \emptyset$ ó $S = I_F$, para alguna $F : \omega \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada F_i es Σ-efectivamente computable.*
3. *$S = I_F$, para alguna $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada F_i es Σ-efectivamente computable.*
4. *$S = D_f$, para alguna función f la cual es Σ-efectivamente computable.*

3 Funciones Σ-recursivas

Lemma 18. *Si $f, f_1, \ldots, f_{n+m}$ son Σ-efectivamente computables, entonces $f \circ (f_1, \ldots, f_{n+m})$ lo es.*

Proof. Sean:

- $\mathbb{P}$ un procedimiento efectivo que compute a f.
- $\mathbb{P}_1$ un procedimiento efectivo que compute a f_1.
- $\mathbb{P}_2$ un procedimiento efectivo que compute a f_2.
- $\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
- $\mathbb{P}_{n+m}$ un procedimiento efectivo que compute a f_{n+m}.

El siguiente procedimiento $\mathbb{P}$ computa $f \circ (f_1, \ldots, f_{n+m})$:

Etapa 1: Realizar $\mathbb{P}_1$ con dato de entrada $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ para obtener de salida o_1.
Realizar $\mathbb{P}_2$ con dato de entrada $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ para obtener de salida o_2.
$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
Realizar $\mathbb{P}_{n+m}$ con dato de entrada $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ para obtener de salida o_{n+m}.
Etapa 2: Dar como dato de salida el resultado de $\mathbb{P}$ con dato de entrada $(o_1, o_2, \ldots, o_{n+m})$. $\square$

Lemma 19. *Si f y g son Σ-efectivamente computables, entonces $R(f, g)$ lo es.*

Proof. Sean:

- $\mathbb{P}_1$ un procedimiento efectivo que compute a f.
- $\mathbb{P}_2$ un procedimiento efectivo que compute a g.

El siguiente procedimiento computa la función $R(f, g)$:

Etapa 1: Darle a la variable T el valor 0.
Etapa 2: Realizar $\mathbb{P}_1$ con los valores $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ como entrada para obtener de salida A.
Etapa 3: **Si** $T = t$**:** entonces detenerse y dar como dato de salida el valor de A.
Si $T \neq t$**:** aumentar en 1 el valor de la variable T.
Etapa 4: **Si** $Im(f), Im(g) \subseteq \omega$**:** Realizar $\mathbb{P}_2$ con los valores $(A, T, \vec{x}, \vec{\alpha})$ como entrada y dirijirse a la Etapa 3.
Si $Im(f), Im(g) \subseteq \Sigma^*$**:** Realizar $\mathbb{P}_2$ con los valores $(T, \vec{x}, \vec{\alpha}, A)$ como entrada y dirijirse a la Etapa 3. $\square$

Lemma 20. *Si f y cada $\mathcal{G}_a$ son Σ-efectivamente computables, entonces $R(f, \mathcal{G})$ lo es.*

Theorem 21. *Si $f \in \mathrm{PR}^\Sigma$, entonces f es Σ-efectivamente computable.*

Proof. Recordemos que $PR^\Sigma = \bigcup_{k \geq 0} PR_k^\Sigma$. Supongamos que $f \in PR_k^\Sigma$, probaremos este teorema por inducción en k.

<u>Caso Base:</u> $\boxed{k = 0}$
Luego $f \in PR_0^\Sigma$, es decir $f \in \{Suc, Pred, C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\} \cup \{p_j^{n,m} : 1 \leq j \leq n + m\}$. Por lo tanto, f es Σ-efectivamente computable.

Caso Inductivo: $\boxed{k > 0}$
Supongamos ahora que si $f \in \mathrm{PR}_k^{\Sigma} \Rightarrow f$ es Σ-efectivamente computable, veamos que $f \in \mathrm{PR}_{k+1}^{\Sigma} \Rightarrow f$ es Σ-efectivamente computable.
Dado que las funciones de PR_k^{Σ} son Σ-efectivamente computable por hipótesis inductiva, y que el conjunto PR_{k+1}^{Σ} se contruye a partir de dichas funciones, a través de recursiones o composiciones, las cuales probamos son Σ-efectivamente computables en el **Lemma 18** y **Lemma 19**, concluimos entonces que f es Σ-efectivamente computable. □

Lemma 22. *a)* $\emptyset \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

b) $\lambda xy\,[x+y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

c) $\lambda xy\,[x.y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

d) $\lambda x\,[x!] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

Proof. a) Notese que $\emptyset = Pred \circ C_0^{0,0} \in \mathrm{PR}_1^{\emptyset}$, entonces $\emptyset \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

b) Notar que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda xy\,[x+y]\,(0,x_1) & = & x_1 = p_1^{1,0}(x_1) \\ \lambda xy\,[x+y]\,(t+1,x_1) & = & \lambda xy\,[x+y]\,(t,x_1)+1 \\ & = & Suc \circ p_1^{3,0} \end{array}$$

lo cual implica que $\lambda xy\,[x+y] = R(p_1^{1,0}, Suc \circ p_1^{3,0}) \in \mathrm{PR}_2^{\emptyset}$, entonces $\lambda xy\,[x+y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

c) Primero note que:

$$\begin{array}{rcl} C_0^{1,0}(0) & = & C_0^{0,0}(\Diamond) \\ C_0^{1,0}(t+1) & = & C_0^{1,0}(t) \end{array}$$

lo cual implica que $C_0^{1,0} = R(C_0^{0,0}, p_1^{2,0}) \in \mathrm{PR}_1^{\emptyset}$.
También note que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda xy\,[x.y]\,(0,x_1) & = & 0 = C_0^{1,0}(x_1) \\ \lambda xy\,[x.y]\,(t+1,x_1) & = & \lambda xy\,[x.y]\,(t,x_1)+x_1 \\ & = & \lambda xy\,[x+y] \circ (p_1^{3,0}, p_3^{3,0}) \end{array}$$

lo cual implica que $\lambda xy\,[x.y] = R(C_0^{1,0}, \lambda xy\,[x+y] \circ (p_1^{3,0}, p_3^{3,0})) \in \mathrm{PR}_4^{\emptyset}$, entonces $\lambda xy\,[x.y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

d) Notar que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda x\,[x!]\,(0) & = & 1 = C_1^{0,0}(\Diamond) \\ \lambda x\,[x!]\,(t+1) & = & \lambda x\,[x!]\,(t).(t+1) \\ & = & \lambda\,[x.y] \circ (p_1^{2,0}, Suc \circ p_2^{2,0}) \end{array}$$

lo cual implica que: $\lambda x\,[x!] = R(C_1^{0,0}, \lambda xy\,[x.y] \circ (p_1^{2,0}, Suc \circ p_2^{2,0}))$. Ya que $C_1^{0,0} = Suc \circ C_0^{0,0}$, tenemos que $C_1^{0,0} \in \mathrm{PR}_1^{\emptyset}$. Por (c), tenemos que $\lambda xy\,[x.y] \circ (p_1^{2,0}, Suc \circ p_2^{2,0}) \in \mathrm{PR}_5^{\emptyset}$, obteniendo que $\lambda x\,[x!] \in \mathrm{PR}_6^{\emptyset}$, entonces $\lambda x\,[x!] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

□

Lemma 23. *Supongamos $\Sigma \neq \emptyset$, entonces:*

a) $\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

b) $\lambda\alpha\,[|\alpha|] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

Proof. a) Ya que:

$$\begin{array}{rcll} \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\,(\alpha_1,\varepsilon) & = & \alpha_1 = p_1^{0,1}(\alpha_1) & \\ \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\,(\alpha_1,\alpha a) & = & d_a(\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\,(\alpha_1,\alpha)) & \text{para a} \in \Sigma \end{array}$$

tenemos que $\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] = R(p_1^{0,1},\mathcal{G})$, donde $\mathcal{G}_a = d_a \circ p_3^{0,3}$, para cada $a \in \Sigma$. Luego, $\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

b) Ya que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda\alpha\,[|\alpha|]\,(\varepsilon) & = & 0 = C_0^{0,0}(\Diamond) \\ \lambda\alpha\,[|\alpha|]\,(\alpha a) & = & \lambda\alpha\,[|\alpha|]\,(\alpha) + 1 \end{array}$$

tenemos que $\lambda\alpha\,[|\alpha|] = R(C_0^{0,0},\mathcal{G})$, donde $\mathcal{G}_a = Suc \circ p_1^{0,1}$, para cada $a \in \Sigma$. Luego, $\lambda\alpha\,[|\alpha|] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

$\square$

Lemma 24. *a)* $C_k^{n,m}, C_\alpha^{n,m} \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$*, para* $n,m,k \geq 0$*, y* $\alpha \in \Sigma^*$.

b) $C_k^{n,0} \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$*, para* $n,k \geq 0$.

Lemma 25. *a)* $\lambda xy\,[x^y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

b) $\lambda t\alpha\,[\alpha^t] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

Proof. a) Notar que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda tx\left[x^t\right](0,x_1) & = & 0 = C_0^{1,0}(x_1) \\ \lambda tx\left[x^t\right](t+1,x_1) & = & \lambda tx\left[x^t\right](t,x_1).x_1 \\ & = & \lambda xy\,[x.y] \circ (p_1^{3,0},p_3^{3,0}) \end{array}$$

Osea que $\lambda tx\,[x^t] = R\left(C_1^{1,0}, \lambda tx\,[x^t] \circ (p_2^{2,0},p_1^{2,0}\right) \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

Por lo tanto, $\lambda xy\,[x^y] = \lambda tx\,[x^t] \circ (p_2^{2,0},p_1^{2,0})$.

b) Notar que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda t\alpha\left[\alpha^t\right](0,\alpha) & = & \varepsilon = C_\varepsilon^{0,1}(\alpha) \\ \lambda t\alpha\left[\alpha^t\right](t+1,\alpha) & = & \lambda t\alpha\left[\alpha^t\right](t,\alpha)\alpha \\ & = & \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ \left(p_3^{1,2},p_2^{1,2}\right) \end{array}$$

Por lo tanto, $\lambda t\alpha\,[\alpha^t] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

$\square$

Lemma 26. *Si $<$ es un orden total estricto sobre un alfabeto no vacío Σ, entonces:*

a) $s^{<} \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

b) $\#^{<} \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

c) $*^{<} \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

Proof. Supongamos $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_k\}$ y $<$ dado por $a_1 < \ldots < a_k$.

a) Ya que:

$$\begin{array}{rcll} s^{<}(\varepsilon) & = & a_1 & \\ s^{<}(\alpha a_i) & = & \alpha a_{i+1} & \quad \text{para } i < k \\ s^{<}(\alpha a_k) & = & s^{<}(\alpha)a_1 & \end{array}$$

tenemos que $s^{<} = R(C^{0,0}_{a_1}, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G} = \{\left(a_i, d_{a_{i+1}} \circ p^{0,2}_1\right), \left(a_k, d_{a_1} \circ p^{0,2}_2\right)\}$.

Luego, $s^{<} \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

b) Ya que:

$$\begin{array}{rcl} *^{<}(0) & = & \varepsilon \\ *^{<}(t+1) & = & s^{<}(*^{<}(t)) \end{array}$$

tenemos que $*^{<} = R(C^{0,0}_{\varepsilon}, s^{<} \circ p^{1,1}_2)$. Luego, $*^{<} \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

c) Ya que:

$$\begin{array}{rcl} \#^{<}(\varepsilon) & = & 0 \\ \#^{<}(\alpha a_i) & = & \#^{<}(\alpha).k + i \\ \text{para } i & = & 1, \ldots, k \end{array}$$

tenemos que $\#^{<} = R(C^{0,0}_0, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G}_{a_i} = \lambda xy\,[x+y] \circ (\lambda xy\,[x.y] \circ (p^{1,1}_1, C^{1,1}_k), C^{1,1}_i)$, para $i = 1, \ldots, k$. Luego, $\#^{<} \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

$\square$

Lemma 27. *a)* $\lambda xy\,[x \dot{-} y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

b) $\lambda xy\,[\max(x, y)] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

c) $\lambda xy\,[x = y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

d) $\lambda xy\,[x \leq y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

e) Si $\Sigma \neq \emptyset \Rightarrow \lambda\alpha\beta\,[\alpha = \beta] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

Proof. a) Primero notar que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda x\,[x \dot{-} 1]\,(0) & = & 0 = C^{0,0}_0(\Diamond) \\ \lambda x\,[x \dot{-} 1]\,(t+1) & = & t = p^{2,0}_2 \end{array}$$

es decir $\lambda x\,[x \dot{-} 1] = R(C^{0,0}_0, p^{2,0}_2) \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

También notar que:

$$\begin{array}{rcl}\lambda tx\,[x\dot{-}t]\,(0,x_1) & = & x_1 = p_1^{1,0}(x_1)\\ \lambda tx\,[x\dot{-}t]\,(t+1,x_1) & = & \lambda tx\,[x\dot{-}t]\,(t,x_1)\dot{-}1\\ & = & \lambda x\,[x\dot{-}1]\circ p_1^{3,0}\end{array}$$

es decir, $\lambda tx\,[x\dot{-}t] = R(p_1^{1,0}, \lambda x\,[x\dot{-}1]\circ p_1^{3,0}) \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

Por lo tanto, $\lambda xy\,[x\dot{-}y] = \lambda tx\,[x\dot{-}t]\circ(p_2^{2,0}, p_1^{2,0}) \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

b) Notar que:

$$\begin{array}{rcl}\lambda xy\,[\max(x,y)] & = & \lambda xy\,[(x+(y\dot{-}x)]\\ & = & \lambda xy\,[x+y]\circ\left(p_1^{2,0}, \lambda xy\,[x\dot{-}y]\circ(p_2^{2,0}, p_1^{2,0})\right)\end{array}$$

Por lo tanto, $\lambda xy\,[\max(x,y)] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

c) Notar que:

$$\begin{array}{rcl}\lambda xy\,[x=y] & = & \lambda xy\,[1\dot{-}((x\dot{-}y)+(y\dot{-}x))]\\ & = & \lambda xy\,[x\dot{-}y]\circ(C_1^{2,0}, \lambda xy\,[x+y]\circ(\lambda xy\,[x\dot{-}y]\circ(p_1^{2,0}, p_2^{2,0}), \lambda xy\,[x\dot{-}y]\circ(p_2^{2,0}, p_1^{2,0})))\end{array}$$

Por lo tanto, $\lambda xy\,[x=y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

d) Notar que:

$$\begin{array}{rcl}\lambda xy\,[x\leq y] & = & \lambda xy\,[1\dot{-}(x\dot{-}y)]\\ & = & \lambda xy\,[x\dot{-}y]\circ(C_1^{2,0}, \lambda xy\,[x\dot{-}y]\circ p_1^{2,0}, p_2^{2,0}))\end{array}$$

Por lo tanto, $\lambda xy\,[x\leq y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

e) Sea $<$ un orden total estricto sobre Σ. Ya que:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \#^{<}(\alpha) = \#^{<}(\beta)$$

tenemos que:

$$\lambda\alpha\beta\,[\alpha=\beta] = \lambda xy\,[x=y]\circ(\#^{<}\circ p_1^{0,2}, \#^{<}\circ p_2^{0,2})$$

Luego, utilizando el inciso (c) y el **Lemma 28** obtenemos que $\lambda\alpha\beta\,[\alpha=\beta] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

□

Lemma 28. *Si $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ son predicados Σ-PR, entonces $(P \vee Q), (P \wedge Q)$ y $\neg P$ lo son también.*

Proof. Notar que:

$$\begin{array}{rcl}\neg P & = & \lambda xy\,[x\dot{-}y]\circ(C_1^{n,m}, P)\\ (P\wedge Q) & = & \lambda xt\,[x.y]\circ(P,Q)\\ (P\vee Q) & = & \neg(\neg P\wedge\neg Q)\end{array}$$

□

Lemma 29. *Si $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son Σ-PR, entonces $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 - S_2$ lo son.*

Proof. Notar que:

$$\begin{array}{rcl} \chi_{S_1 \cup S_2} & = & (\chi_{S_1} \vee \chi_{S_2}) \\ \chi_{S_1 \cap S_2} & = & (\chi_{S_1} \wedge \chi_{S_2}) \\ \chi_{S_1 - S_2} & = & \lambda\left[x \dot{-} y\right] \circ (\chi_{S_1}, \chi_{S_2}) \end{array}$$

□

Corollary 30. *Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es finito, entonces S es Σ-PR.*

Proof. Se probará el caso $n = m = 1$, es decir, $S \subseteq \omega \times \Sigma^*$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, utilizando el **Lemma 29** que:

$$S = \{(z, \gamma)\}$$

Notar que χ_S es el siguiente predicado:

$$\left(\chi_z \circ p_1^{1,1} \wedge \chi_\gamma \circ p_2^{1,1}\right)$$

Ya que los predicados:

$$\chi_z = \lambda xy\left[x = y\right] \circ \left(p_1^{1,0}, C_z^{1,0}\right)$$
$$\chi_\gamma = \lambda\alpha\beta\left[\alpha = \beta\right] \circ \left(p_1^{0,1}, C_\gamma^{0,1}\right)$$

son Σ-PR, el **Lema 28** implica que χ_S es Σ-PR, por lo tanto S es Σ-PR. □

Lemma 31. *Supongamos $S_1, \ldots, S_n \subseteq \omega, L_1, \ldots, L_m \subseteq \Sigma^*$ son conjuntos no vacíos, entonces $S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m$ es Σ-PR $\Leftrightarrow S_1, \ldots, S_n, L_1, \ldots, L_m$ son Σ-PR.*

Proof. Se probará el caso $n = m = 1$, es decir, $S_1 \subseteq \omega$, $L_1 \subseteq \Sigma^*$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea (z_1, γ_1) un elemento fijo de $S_1 \times L_1$. Notar que:

$$x \in S_1 \Leftrightarrow (x, \gamma_1) \in S_1 \times L_1$$
$$\alpha \in L_1 \Leftrightarrow (z_1, \alpha) \in S_1 \times L_1$$

lo cual implica que:

$$\chi_{S_1} = \chi_{S_1 \times L_1} \circ \left(p_1^{1,0}, C_{\gamma_1}^{1,0}\right)$$
$$\chi_{L_1} = \chi_{S_1 \times L_1} \circ \left(C_{z_1}^{0,1}, p_1^{0,1}\right)$$

por lo tanto, L_1, S_1 son Σ-PR.

$\boxed{\Leftarrow}$ Notar que:

$$\chi_{S_1 \times L_1} = \left(\chi_{S_1} \circ p_1^{1,1} \wedge \chi_{L_1} \circ p_2^{1,1}\right)$$

luego, por el **Lemma 28**, $S_1 \times L_1$ es Σ-PR. □

Lemma 32. *Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-PR, donde $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$. Si $S \subseteq D_f$ es Σ-PR, entonces $f\mid_S$ es Σ-PR.*

Proof. $\boxed{O = \Sigma^*}$ Notar que:

$$f\mid_S = \lambda x\alpha\left[\alpha^x\right] \circ (Suc \circ Pred \circ \chi_S, f)$$

luego f es Σ-PR.
$\boxed{O = \omega}$ Notar que:

$$f\mid_S = \lambda xy\left[x^y\right] \circ (f, Suc \circ Pred \circ \chi_S)$$

luego f es Σ-PR.

Notar que $\boxed{Suc \circ Pred \circ \chi_S}$ funciona como un interruptor que evalua f, si el elemento pertenece a S, y que no evalua en caso contrario. $\square$

Lemma 33. *Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-PR, entonces existe una función Σ-PR $\bar{f} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, tal que $f = \bar{f}\mid_{D_f}$.*

Proposition 34. *Un conjunto S es Σ-PR $\Leftrightarrow$ S es el dominio de una función Σ-PR.*

Proof. $\boxed{\Rightarrow}$ Notar que $S = D_{Pred \circ \chi_S}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Probaremos por inducción en k que D_F es Σ-PR para cada $F \in PR_k^\Sigma$.

<u>Caso Base:</u> $\boxed{k = 0}$ es decir, $F \in PR_0^\Sigma$. Luego:

$$\begin{array}{rcl} F & \in & \{Suc, Pred, C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\} \cup \{p_j^{n,m} : 1 \leq j \leq n+m\} \\ D_F & \in & \{\omega, \mathbb{N}, \Sigma^*, \omega^n \times \Sigma^{*m}, \{\Diamond\}\} \end{array}$$

dado que $\omega, \mathbb{N}, \Sigma^*, \omega^n \times \Sigma^{*m}, \{\Diamond\}$ son conjuntos Σ-PR, entonces D_F es Σ-PR.

<u>Caso Inductivo:</u> Supongamos el resultado vale para un k fijo y supongamos $F \in \mathrm{PR}_{k+1}^\Sigma$, veremos entonces que D_F es Σ-PR. Existen varios casos, analizaremos cada uno por separado.

1. $\boxed{F = R(f, g)}$

   - Recursión primitiva sobre variable numérica.

     (a) Caso 1:

     $$\begin{array}{rcl} f & : & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega \\ g & : & \omega \times \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega \\ F & = & \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega \end{array}$$

     (b) Caso 2:

     $$\begin{array}{rcl} f & : & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \Sigma^* \\ g & : & \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times \Sigma^* \to \Sigma^* \\ F & = & \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \Sigma^* \end{array}$$

   - Recursión primitiva sobre variable alfabética.

     (a) Caso 1:

     $$\begin{array}{rcl} f & : & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega \\ \mathcal{G}_a & : & \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times \Sigma^* \to \omega \\ F & = & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times \Sigma^* \to \omega \end{array}$$

(b) Caso 2:

$$\begin{array}{rcl} f & : & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \Sigma^* \\ \mathcal{G}_a & : & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^* \\ F & = & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times \Sigma^* \to \Sigma^* \end{array}$$

con $S_1, \ldots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \ldots, L_m \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacíos y $f, g \in \mathrm{PR}_k^\Sigma$, para todos los casos anteriores.

Por hipótesis inductiva tenemos que $D_f = S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m$ es Σ-PR, lo cual por el **Lemma 31** nos dice que los conjuntos $S_1, \ldots, S_n, L_1, \ldots, L_m$ son Σ-PR. Ya que ω, Σ^* son Σ-PR, el **Lemma 31** nos dice que D_F es Σ-PR.

2. $\boxed{F = g \circ (g_1, \ldots, g_{n+m})}$ donde:

$$\begin{array}{rcll} g & : & D_g \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O & \\ g_i & : & D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega & \quad i = 1, \ldots, n \\ g_i & : & D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \Sigma^* & \quad i = n+1, \ldots, n+m \end{array}$$

están en PR_k^Σ. Por **Lemma 33**, existen funciones Σ-PR $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_{n+m}$ las cuales son Σ-totales y cumplen:

$$\begin{array}{rcl} g_i & = & \bar{g}_i \mid_{D_{g_i}} \\ \text{para } i & = & 1, \ldots, n+m \end{array}$$

Por hipótesis inductiva, los conjuntos D_g, D_{g_i}, para $i = 1, \ldots, n+m$, son Σ-PR y por lo tanto:

$$S = \bigcap_{i=1}^{n+m} D_{g_i}$$

lo es. Notese además, que:

$$\chi_{D_F} = \Big((\chi_{D_g} \circ (\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_{n+m})) \wedge \chi_S \Big)$$

lo cual nos dice que D_F es Σ-PR.

□

Lemma 35. *Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O, i = 1, \ldots, k$, son funciones Σ-PR tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces $f_1 \cup \ldots \cup f_k$ es Σ-PR.*

Proof. Vamos a probar solo el caso en que $k = 2$ y $O = \omega$. Sean:

$$\begin{array}{ll} \bar{f}_1 : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^* & \quad \text{tal que } \bar{f}_1 \mid_{D_{f_1}} = f_1 \\ \bar{f}_2 : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^* & \quad \text{tal que } \bar{f}_2 \mid_{D_{f_2}} = f_2 \end{array}$$

funciones Σ-PR por **Lemma 33**. Luego, por el **Lemma 34** los conjuntos D_{f_1} y D_{f_2} son Σ-PR y por lo tanto lo es $D_{f_1} \cup D_{f_2}$. Ya que:

$$\begin{array}{rcl} f_1 \cup f_2 & = & \left(\bar{f}_1{}^{\chi_{D_{f_1}}} . \bar{f}_2{}^{\chi_{D_{f_2}}} \right) \mid_{D_{f_1} \cup D_{f_2}} \\ & = & \lambda xy\,[x.y] \circ \Big(\lambda xy\,[x^y] \circ (\bar{f}_1, \chi_{D_{f_1}}), \lambda xy\,[x^y] \circ (\bar{f}_2, \chi_{D_{f_2}}) \Big) \mid_{D_{f_1} \cup D_{f_2}} \end{array}$$

Por lo tanto, $f_1 \cup f_2$ es Σ-PR. □

Corollary 36. *Supongamos f es una función Σ-mixta cuyo dominio es finito, entonces f es Σ-PR.*

Lemma 37. $\lambda i\alpha\,[[\alpha]_i]$ *es Σ-PR.*

Lemma 38. *Sean $n, m \geq 0$.*

a) Si $f : \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega$ es Σ-PR, con $S_1, \ldots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \ldots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacíos, entonces lo son las funciones:

$$\textbf{\textit{Sumatoria:}}\ \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$$

$$\textbf{\textit{Productoria:}}\ \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{t=y} f(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$$

b) Si $f : \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \Sigma^*$ es Σ-PR, con $S_1, \ldots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \ldots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacíos, entonces lo es la función:

$$\textbf{\textit{Concatenatoria:}}\ \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[C_{t=x}^{t=y} f(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$$

Proof. Se probará solamente el inciso (a).
Sea $G = \lambda tx\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=t} f(i,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$. Ya que:

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=y} f(i,\vec{x},\vec{\alpha})\right] = G \circ \left(p_2^{n+2,m}, p_1^{n+2,m}, p_3^{n+2,m}, \ldots, p_{n+m+2}^{n+2,m}\right)$$

solo tenemos que probar que G es Σ-PR. Primero note que:

$$\begin{aligned} G(0,x,\vec{x},\vec{\alpha}) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ f(0,\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } x = 0 \end{cases} \\ G(t+1,x,\vec{x},\vec{\alpha}) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x > t+1 \\ G(t,x,\vec{x},\vec{\alpha}) + f(t+1,\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } x \leq t+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Sean:

$$\begin{aligned} P_1 &= \{(x,\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m : x > 0\} \\ P_2 &= \{(x,\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m : x = 0\} \\ Q_1 &= \left\{(z,t,x,\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m : x > t+1\right\} \\ Q_2 &= \left\{(z,t,x,\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m : x \leq t+1\right\} \end{aligned}$$

Notar que P_1, P_2, Q_1, Q_2 son conjuntos Σ-PR, probaremos solo Q_1. Debemos ver que χ_{Q_1} es Σ-PR.

$$\begin{aligned} f \text{ es } \Sigma - PR &\Rightarrow D_f = \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \text{ es } \Sigma - PR && \textbf{Proposition 34} \\ &\Rightarrow S_1, \ldots, S_n, L_1, \ldots, L_m \text{ son } \Sigma - PR && \textbf{Lemma 31} \end{aligned}$$

$$\omega \text{ es } \Sigma - PR \Rightarrow R = \omega^3 \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \text{ es } \Sigma - PR$$

Notar que:

$$\chi_{Q_1} = (\chi_R \wedge \lambda ztx\vec{x}\vec{\alpha}\,[x > t+1])$$

por cual χ_{Q_1} es Σ-PR ya que es la conjunción de dos predicados Σ-PR.
Además notar que $G = R(g,h)$, donde:

$$\begin{aligned} g &= C_0^{n+1,m}\,|_{P_1} \cup \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\,[f(0,\vec{x},\vec{\alpha})]\,|_{P_2} \\ h &= C_0^{n+3,m}\,|_{Q_1} \cup \lambda ztx\vec{x}\vec{\alpha}\,[z + f(t+1,\vec{x},\vec{\alpha})]\,|_{Q_2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el **Lemma 35** y el **Lemma 32** garantizan que G es Σ-PR. □

Lemma 39. *Sean $n, m \geq 0$.*

a) Sea $P : S \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega$ un predicado Σ-PR y supongamos $\bar{S} \subseteq S$ es Σ-PR, entonces:

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x}\, P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$$
$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x}\, P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$$

son predicados Σ-PR.

b) Sea $P : S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times L \to \omega$ un predicado Σ-PR y supongamos $\bar{L} \subseteq L$ es Σ-PR, entonces:

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x}\, P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)\right]$$
$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x}\, P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)\right]$$

son predicados Σ-PR.

Proof. Se probará solamente el inciso (a). Sea:

$$\bar{P} = P\,|_{\bar{S}\times S_1\times\ldots\times S_n\times L_1\times\ldots\times L_m} \cup C_1^{1+n,m}\,|_{(\omega-\bar{S})\times S_1\times\ldots\times S_n\times L_1\times\ldots\times L_m}$$

Notese que $\bar{P}$ es Σ-PR. Ya que:

$$\begin{aligned} \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x}\, P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right] &= \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=0}^{t=x} \bar{P}(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right] \\ &= \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{t=y} \bar{P}(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right] \circ \left(C_0^{1+n,m}, p_1^{1+n,m}, \ldots, p_{1+n+m}^{1+n,m}\right) \end{aligned}$$

el **Lemma 38** implica que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x}\, P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$ es Σ-PR.
Finalmente note que:

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x}\, P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right] = \neg\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x}\, \neg P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$$

es Σ-PR. □

Lemma 40. *a) El predicado $\lambda xy\,[x \text{ divide } y]$ es $\emptyset$-PR.*

b) El predicado $\lambda x\,[x \text{ es primo}]$ es $\emptyset$-PR.

c) El predicado $\lambda\alpha\beta\,[\alpha \text{ inicial } \beta]$ es Σ-PR.

Proof. a) Si tomamos $P = \lambda t x_1 x_2 [x_2 = t.x_1] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\lambda x_1 x_2 [x_1 \text{ divide } x_2] &= \lambda x_1 x_2 [(\exists t \in \omega)_{t \le x_2} P(t, x_1, x_2)] \\ &= \lambda x x_1 x_2 [(\exists t \in \omega)_{t \le x} P(t, x_1, x_2)] \circ \left(p_2^{2,0}, p_1^{2,0}, p_2^{2,0}\right)\end{aligned}$$

por el **Lemma 39**, $\lambda xy [x \text{ divide } y]$ es $\emptyset$-PR.

b) Ya que:

$$x \text{ es primo } \Leftrightarrow x > 1 \wedge ((\forall t \in \omega)_{t \le x}\ t = 1 \vee t = x \vee \neg(t \text{ divide } x))$$

tomamos $P = \lambda t x [t = 1 \vee t = x \vee (t \text{ divide } x)]$. Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned}\lambda x [x \text{ es primo}] &= \lambda x [x > 1] \wedge \lambda x [(\forall t \in \omega)_{t \le x} P(t, x)] \\ &= \lambda x [x > 1] \wedge \lambda x_1 x_2 [(\forall t \in \omega)_{t \le x_1} P(t, x_2)] \circ (p_1^{1,0}, p_1^{1,0})\end{aligned}$$

por lo tanto, $\lambda x [x \text{ es primo}]$ es $\emptyset$-PR.

c) Sea $P = \lambda \alpha \beta \gamma [\beta = \alpha \gamma]$, entonces:

$$\begin{aligned}\lambda \alpha \beta [\alpha \text{ inicial } \beta] &= \lambda \alpha \beta \left[(\exists \gamma \in \Sigma^*)_{|\gamma| \le |\beta|} P(\alpha, \beta, \gamma)\right] \\ &= \lambda x \alpha \beta \left[(\exists \gamma \in \Sigma^*)_{|\gamma| \le x} P(\alpha, \beta, \gamma)\right] \circ (\lambda \alpha [|\alpha|] \circ p_2^{0,2}, p_1^{0,2}, p_2^{0,2})\end{aligned}$$

luego, $\lambda \alpha \beta [\alpha \text{ inicial } \beta]$ es Σ-PR.

□

Lemma 41. *Si $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ es un predicado Σ-efectivamente computable y D_P es Σ-efectivamente computable, entonces la función $M(P)$ es Σ-efectivamente computable.*

Proof. Sean:

- $\mathbb{P}_1$ un procedimiento efectivo que compute χ_{D_P}.
- $\mathbb{P}_2$ un procedimiento efectivo que compute el predicado P.

El siguiente procedimiento computa $M(P)$:

Etapa 1: Darle a la variable T el valor 0.
Etapa 2: Realizar el procedimiento $\mathbb{P}_1$ con entrada $(T, \vec{x}, \vec{\alpha})$ para obtener el valor *Booleano* p de salida.
Etapa 3: **Si** $p = 1$**:** realizar $\mathbb{P}_2$ con entrada $(T, \vec{x}, \vec{\alpha})$ para obtener el valor *Booleano* e de salida.
Si $p = 0$**:** aumentar en 1 el valor de T, y dirigirse a la Etapa 2.
Etapa 4: **Si** $e = 1$**:** dar como dato de salida T.
Si $e = 0$**:** aumentar en 1 el valor de T, y dirigirse a la Etapa 2. □

Theorem 42. *Si $f \in \mathrm{R}^{\Sigma}$, entonces f es Σ-efectivamente computable.*

Proof. Recordemos que $R^{\Sigma} = \bigcup\limits_{k \ge 0} R_k^{\Sigma}$. Supongamos que $f \in R_k^{\Sigma}$, probaremos este teorema por inducción en k.

Caso Base: $\boxed{k = 0}$
Luego $f \in R_0^{\Sigma} = PR_0^{\Sigma}$, es decir:

$$f \in \{Suc, Pred, C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\} \cup \{p_j^{n,m} : 1 \leq j \leq n+m\}$$

Por lo tanto, f es Σ-efectivamente computable.

Caso Inductivo: $\boxed{k > 0}$

Supongamos ahora que si $f \in \mathrm{R}_k^\Sigma \Rightarrow f$ es Σ-efectivamente computable, veamos que $f \in \mathrm{R}_{k+1}^\Sigma \Rightarrow f$ es Σ-efectivamente computable.

Dado que las funciones de R_k^Σ son Σ-efectivamente computable por hipótesis inductiva, y que R_{k+1}^Σ se contruye a partir de las mismas, a través de recursiones, composiciones o minimizaciones, las cuales probamos son Σ-efectivamente computables en el **Lemma 18**, **Lemma 19**, y **Lemma 41** respectivamente, entonces concluimos que f es Σ-efectivamente computable. □

Lemma 43. *Sean $n, m \geq 0$. Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ un predicado Σ-PR, entonces:*

a) $M(P)$ es Σ-R.

b) Si existe una función Σ-PR $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ tal que:

$$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$$

entonces $M(P)$ es Σ-PR.

Proof. Sea $\bar{P} = P\mid_{D_P} \cup\, C_0^{n+1,m}\mid_{(\omega^{n+1}\times\Sigma^{*m})-D_P}$.

a) Veamos primero que $M(P) = M(\bar{P})$, es decir, que los dominios y las reglas de asignación son las mismas.

$$\begin{array}{rcl} D_{M_P} & = & \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists t \in \omega)\ P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\} \\ D_{M_{\bar{P}}} & = & \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists t \in \omega)\ \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\} \end{array}$$

notar que:

$$\boxed{\bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \Leftrightarrow P\mid_{D_P} = 1}\ (\star)$$

Luego, $D_{M(P)} = D_{M(\bar{P})}$ y $M(P) = M(\bar{P})$. Veamos ahora que $M(\bar{P})$ es Σ-R.

Sea k tal que $\bar{P} \in \mathrm{PR}_k^\Sigma$, ya que $\bar{P}$ es Σ-total y $\bar{P} \in \mathrm{PR}_k^\Sigma \subseteq \mathrm{R}_k^\Sigma$, tenemos que $M(\bar{P}) \in \mathrm{R}_{k+1}^\Sigma$ y por lo tanto $M(\bar{P}) \in \mathrm{R}^\Sigma$, es decir, $M(P)$ es Σ-R.

b) Primero veremos que $D_{M(\bar{P})}$ es un conjunto Σ-PR. Notese que:

$$\chi_{D_{M(\bar{P})}} = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})}\ \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

lo cual nos dice que:

$$\chi_{D_{M(\bar{P})}} = \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq x}\ \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \circ (f, p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m})$$

pero el **Lemma 39** nos dice que $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq x}\ \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ es Σ-PR por lo cual tenemos que $\chi_{D_{M(\bar{P})}}$ lo es.

Sea:

$$Q = \lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\left[\bar{P}(t,\vec{x},\vec{\alpha}) \wedge (\forall j \in \omega)_{j\leq t}\; j = t \vee \neg\bar{P}(j,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$$

notar que Q es Σ-total, veamos que es Σ-PR. Sea:

$$R = \lambda jt\vec{x}\vec{\alpha}\left[j = t\; \vee \neg\bar{P}(j,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$$

luego, por el **Lemma 39**:

$$\lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall j \in \omega)_{j\leq t}\; R(j,t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$$

es Σ-PR y por lo tanto Q es Σ-PR. Además notese que para cada $(\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tenemos:

$$Q(t,\vec{x},\vec{\alpha}) = 1 \Leftrightarrow t = M(\bar{P})(\vec{x},\vec{\alpha})$$

Esto nos dice que

$$M(\bar{P}) = \left(\lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x},\vec{\alpha})} t^{Q(t,\vec{x},\vec{\alpha})}\right]\right)|_{D_{M(\bar{P})}}$$

por lo cual para probar que $M(\bar{P})$ es Σ-PR solo nos resta probar que

$$F = \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x},\vec{\alpha})} t^{Q(t,\vec{x},\vec{\alpha})}\right]$$

es Σ-PR. Pero

$$F = \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{y} t^{Q(t,\vec{x},\vec{\alpha})}\right] \circ (C_0^{n,m}, f, p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m})$$

y por lo tanto el **Lemma 38** nos dice que F es Σ-PR. De esta manera hemos probado que $M(\bar{P})$ es Σ-PR y por lo tanto $M(P)$ lo es.

□

Lemma 44. *Las siguientes funciones son $\emptyset$-PR:*

a)
$$\begin{array}{rcl} Q : \omega \times \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ (x,y) & \rightarrow & \textit{cociente de la division de } x \textit{ por } y \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcl} R : \omega \times \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ (x,y) & \rightarrow & \textit{resto de la division de } x \textit{ por } y \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcl} pr : \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ n & \rightarrow & n\textit{-esimo numero primo} \end{array}$$

Proof. a) Veamos primero veamos que $Q = M(P)$, donde $P = \lambda txy\left[(t+1).y > x\right]$. Notar que:

$$\begin{array}{rcl} D_{M(P)} & = & \{(x,y) : (\exists t \in \omega)\; P(t,x,y) = 1\} \\ & = & \{(x,y) : (\exists t \in \omega)\; (t+1).y > x\} \\ & = & \omega \times \mathbf{N} \\ & = & D_Q \end{array}$$

Es fácil notar que para cada $(x,y) \in \omega \times \mathbb{N}$, se tiene que:

$$Q(x,y) = M(P)(x,y) = \min_t (t+1).y > x$$

Es decir, que $Q = M(P)$. Ya que P es $\emptyset$-PR y además:

$$Q(x,y) \leq p_1^{2,0}(x,y), \text{para cada } (x,y) \in \omega \times \mathbb{N}$$

el inciso (b) del **Lemma 43** implica que $Q \in \text{PR}^{\emptyset}$.

b) Notese que:

$$\begin{array}{rcl} R & = & \lambda xy \left[x \dot{-} Q(x,y).y\right] \\ & = & \lambda xy \left[x \dot{-} y\right] \circ (p_1^{2,0}, \lambda xy \left[x.y\right] \circ (Q \circ (p_1^{2,0}, p_2^{2,0}), p_2^{2,0})) \end{array}$$

y por lo tanto $R \in \text{PR}^{\emptyset}$.

c) Para ver que pr es $\emptyset$-PR, veremos que la extensión $h : \omega \to \omega$, dada por:

$$\begin{array}{rcl} h(0) & = & 0 \\ h(n) & = & pr(n),\ n \geq 1 \end{array}$$

es $\emptyset$-PR. Primero notar que:

$$\begin{array}{rcl} h(0) & = & 0 \\ h(x+1) & = & \min_t (t \text{ es primo} \wedge t > h(x)) \end{array}$$

Osea que $h = R\left(C_0^{0,0}, M(P)\right)$, donde:

$$P = \lambda tzx \left[t \text{ es primo} \wedge t > z\right]$$

Solo resta ver que $M(P)$ es $\emptyset$-PR. Claramente, P es $\emptyset$-PR.
Veamos que para cada $(z,x) \in \omega^2$, tenemos que:

$$M(P)(z,x) = \min_t (t \text{ es primo} \wedge t > z) \leq z! + 1$$

Sea p primo tal que p divide a $z!+1$, luego $p > z$. Esto nos dice que:

$$\min_t (t \text{ es primo} \wedge t > z) \leq p \leq z! + 1$$

Luego, $f = \lambda zx \left[z!+1\right]$ y utilizando el **Lemma 43** tenemos que $M(P)$ es $\emptyset$-PR.

$\square$

Lemma 45. *Las funciones $\lambda xi \left[(x)_i\right]$ y $\lambda x \left[Lt(x)\right]$ son $\emptyset$-PR.*

Lemma 46. *Este lema no se evalua.*

Lemma 47. *Supongamos que $\Sigma \neq \emptyset$. Sea $<$ un orden total estricto sobre Σ. Sean $n, m \geq 0$ y sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \to \omega$ un predicado Σ-PR, entonces:*

a) $M^<(P)$ es Σ-R.

b) *Si existe una función Σ-PR* $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ *tal que:*

$$|M^{<}(P)(\vec{x},\vec{\alpha})| = |\min_{\alpha}^{<} P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)| \leq f(\vec{x},\vec{\alpha})$$

para cada $(\vec{x},\vec{\alpha}) \in D_{M^{<}(P)}$ *entonces* $M^{<}(P)$ *es Σ-PR.*

Lemma 48. *Este lema no se evalua.*

Lemma 49. *Este lema no se evalua.*

Lemma 50. *Este lema no se evalua.*

Theorem 51. *Sean* Σ *y* Γ *alfabetos cualesquiera.*

a) *Supongamos una función* f *es Σ-mixta y Γ-mixta, entonces* f *es Σ-R (respectivamente Σ-PR)* $\Leftrightarrow$ f *es Γ-R (respectivamente Γ-PR).*

b) *Supongamos un conjunto* S *es Σ-mixto y Γ-mixto, entonces* S *es Σ-PR* $\Leftrightarrow$ S *es Γ-PR.*

4 El lenguaje S^{Σ}

Lemma 52. *Se tiene que:*

a) *Si* $I_1, \ldots, I_n = J_1, \ldots, J_m$*, con* $I_1, \ldots, I_n, J_1, \ldots, J_m \in \mathrm{Ins}^{\Sigma}$*, entonces* $n = m$ *y* $I_j = J_j$ *para cada* $j \geq 1$*.*

b) *Si* $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$*, entonces existe una única sucesión de instrucciones* $I_1, \ldots, I_n$ *tal que* $\mathcal{P} = I_1 \ldots, I_n$

Theorem 53. *Si* f *es Σ-computable, entonces* f *es Σ-efectivamente computable.*

Proof. Sea $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ una función computada por $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$. El procedimiento que consiste en realizar las sucesivas instrucciones de $\mathcal{P}$, partiendo de $((x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots), (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \varepsilon, \varepsilon, \ldots$ terminando eventualmente en caso de que nos toque realizar la instrucción $n(\mathcal{P})+1$, y dar como salida el contenido de la variable N1, es un procedimiento efectivo que computa a f. □

Proposition 54. a) *Sea* $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ *una función Σ-computable, entonces existe un macro:*

$$[\mathrm{V}\overline{n+1} \leftarrow f(\mathrm{V}1, \ldots, \mathrm{V}\bar{n}, \mathrm{W}1, \ldots, \mathrm{W}\bar{m})]$$

b) *Sea* $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$ *una función Σ-computable, entonces existe un macro:*

$$[\mathrm{W}\overline{m+1} \leftarrow f(\mathrm{V}1, \ldots, \mathrm{V}\bar{n}, \mathrm{W}1, \ldots, \mathrm{W}\bar{m})]$$

Proposition 55. *Sea* $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ *un predicado Σ-computable, entonces existe un macro:*

$$[\mathrm{IF}\ P(\mathrm{V}1, \ldots, \mathrm{V}\bar{n}, \mathrm{W}1, \ldots, \mathrm{W}\bar{m})\ \mathrm{GOTO\ A1}]$$

Theorem 56. *Si* h *es Σ-recursiva, entonces* h *es Σ-computable.*

Proof. Como h es Σ-R $\Rightarrow \exists k$ tal que $h \in \mathrm{R}_k^\Sigma$, probaremos entonces por inducción en k que si $h \in \mathrm{R}_k^\Sigma$, entonces h es Σ-computable.

Caso Base: $\boxed{k = 0}$
Luego $h \in R_0^\Sigma = PR_0^\Sigma$, es decir:

$$h \in \{Suc, Pred, C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\} \cup \{p_j^{n,m} : 1 \leq j \leq n+m\}$$

Por lo tanto, h es Σ-computable, dado que exiten programas que computan dichas funciones.

Caso Inductivo: $\boxed{k > 0}$
Supongamos ahora que si $h \in \mathrm{R}_k^\Sigma \Rightarrow h$ es Σ-computable, veamos que $h \in \mathrm{R}_{k+1}^\Sigma \Rightarrow h$ es Σ-computable.
Sea $h \in \mathrm{R}_{k+1}^\Sigma - \mathrm{R}_k^\Sigma$. Supongamos $\Sigma = \{@, \$\}$. Existen varios casos, probaremos el caso $h = R(f, \mathcal{G})$, con:

$$\begin{aligned}
f &: S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \Sigma^* \\
\mathcal{G}_@ &: S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^* \\
\mathcal{G}_\$ &: S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*
\end{aligned}$$

elementos de R_k^Σ. Por hipótesis inductiva, las funciones f, $\mathcal{G}_@$, $\mathcal{G}_\$$, son Σ-computables y por lo tanto podemos hacer el siguiente programa utilizando macros:

$$\begin{array}{ll}
 & [\mathrm{P}\overline{m+3} \leftarrow f(\mathrm{N}1, \ldots, \mathrm{N}\bar{n}, \mathrm{P}1, \ldots, \mathrm{P}\bar{m})] \\
\mathrm{L}3: & \mathrm{IF\ P}\overline{m+1}\ \mathrm{BEGINS}\ @\ \mathrm{GOTO\ L}1 \\
 & \mathrm{IF\ P}\overline{m+1}\ \mathrm{BEGINS}\ \$\ \mathrm{GOTO\ L}2 \\
 & \mathrm{GOTO\ L}4 \\
\mathrm{L}1: & \mathrm{P}\overline{m+1} \leftarrow {}^\frown\mathrm{P}\overline{m+1} \\
 & [\mathrm{P}\overline{m+3} \leftarrow \mathcal{G}_@(\mathrm{N}1, \ldots, \mathrm{N}\bar{n}, \mathrm{P}1, \ldots, \mathrm{P}\bar{m}, \mathrm{P}\overline{m+2}, \mathrm{P}\overline{m+3})] \\
 & \mathrm{P}\overline{m+2} \leftarrow \mathrm{P}\overline{m+2}.@ \\
 & \mathrm{GOTO\ L}3 \\
\mathrm{L}2: & \mathrm{P}\overline{m+1} \leftarrow {}^\frown\mathrm{P}\overline{m+1} \\
 & [\mathrm{P}\overline{m+3} \leftarrow \mathcal{G}_\$(\mathrm{N}1, \ldots, \mathrm{N}\bar{n}, \mathrm{P}1, \ldots, \mathrm{P}\bar{m}, \mathrm{P}\overline{m+2}, \mathrm{P}\overline{m+3})] \\
 & \mathrm{P}\overline{m+2} \leftarrow \mathrm{P}\overline{m+2}.\$ \\
 & \mathrm{GOTO\ L}3 \\
\mathrm{L}4: & \mathrm{P}1 \leftarrow \mathrm{P}\overline{m+3}
\end{array}$$

Luego se tiene que el programa computa a h, entonces h es Σ-computable. □

Lemma 57. *Sea Σ un alfabeto cualquiera. Las funciones S y — son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR.*

Lemma 58. *Para cada $n, x \in \omega$, tenemos que $|\bar{n}| \leq x \Leftrightarrow n \leq 10^x - 1$.*

Lemma 59. Ins^Σ *es un conjunto $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR.*

Proof. Para simplificar la prueba asumiremos que $\Sigma = \{@, \&\}$. Dado que Ins^Σ es unión de los siguientes conjuntos:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \left\{\mathrm{N}\bar{k} \leftarrow \mathrm{N}\bar{k}+1 : k \in \mathbb{N}\right\} \\
L_2 &= \left\{\mathrm{N}\bar{k} \leftarrow \mathrm{N}\bar{k}\dot{-}1 : k \in \mathbb{N}\right\} \\
L_3 &= \left\{\mathrm{N}\bar{k} \leftarrow \mathrm{N}\bar{n} : k, n \in \mathbb{N}\right\} \\
L_4 &= \left\{\mathrm{N}\bar{k} \leftarrow 0 : k \in \mathbb{N}\right\} \\
L_5 &= \left\{\text{IF N}\bar{k} \neq 0 \text{ GOTO L}\bar{m} : k, m \in \mathbb{N}\right\} \\
L_6 &= \left\{\mathrm{P}\bar{k} \leftarrow \mathrm{P}\bar{k}.@ : k \in \mathbb{N}\right\} \\
L_7 &= \left\{\mathrm{P}\bar{k} \leftarrow \mathrm{P}\bar{k}.\& : k \in \mathbb{N}\right\} \\
L_8 &= \left\{\mathrm{P}\bar{k} \leftarrow {}^\frown\mathrm{P}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\right\} \\
L_9 &= \left\{\mathrm{P}\bar{k} \leftarrow \mathrm{P}\bar{n} : k, n \in \mathbb{N}\right\} \\
L_{10} &= \left\{\mathrm{P}\bar{k} \leftarrow \varepsilon : k \in \mathbb{N}\right\} \\
L_{11} &= \left\{\text{IF P}\bar{k} \text{ BEGINS @ GOTO L}\bar{m} : k, m \in \mathbb{N}\right\} \\
L_{12} &= \left\{\text{IF P}\bar{k} \text{ BEGINS \& GOTO L}\bar{m} : k, m \in \mathbb{N}\right\} \\
L_{13} &= \{\text{GOTO L}\bar{m} : m \in \mathbb{N}\} \\
L_{14} &= \{\text{SKIP}\} \\
L_{15} &= \left\{\mathrm{L}\bar{k}\alpha : k \in \mathbf{N} \text{ y } \alpha \in L_1 \cup \ldots \cup L_{14}\right\}
\end{aligned}
$$

solo debemos probar que $L_1, \ldots, L_{15}$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR. Puesto que las pruebas son análogas probaremos solamente que:

$$L_{11} = \left\{\text{IF P}\bar{k} \text{ BEGINS @ GOTO L}\bar{m} : k, m \in \mathbb{N}\right\}$$

es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR. Primero nótese que $\alpha \in L_{11} \Leftrightarrow \exists k, m \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\alpha = \text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m}$$

Más formalmente tenemos que $\alpha \in L_{11}$ si y solo si:

$$(\exists k \in \mathbb{N}), (\exists m \in \mathbb{N}) : \alpha = \text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m}$$

Ya que cuando existen tales k, m tenemos que $\bar{k}$ y $\bar{m}$ son subpalabras de α, el **Lemma 58** nos dice que $\alpha \in L_{11}$ si y solo si:

$$(\exists k \in \mathbb{N})_{k \leq 10^{|\alpha|}} (\exists m \in \mathbb{N})_{m \leq 10^{|\alpha|}} \ \alpha = \text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m}$$

Sea:

$$P = \lambda mk\alpha \left[\alpha = \text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m}\right]$$

Ya que $D_{\lambda k[\bar{k}]} = \omega$, tenemos que $D_P = \omega \times \omega \times (\Sigma \cup \Sigma_p)^*$. Notar que:

$$P = \lambda\alpha\beta\,[\alpha = \beta] \circ \left(p_3^{2,1}, f\right)$$

donde:

$$f = \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\,[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4] \circ \left(C^{2,1}_{\text{IFP}}, \lambda k\left[\bar{k}\right] \circ p_2^{2,1}, C^{2,1}_{\text{BEGINS@GOTOL}}, \lambda k\left[\bar{k}\right] \circ p_1^{2,1}\right)$$

lo cual nos dice que P es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR.
Nótese que:

$$\chi_{L_{11}} = \lambda\alpha\left[(\exists k \in \mathbb{N})_{k \leq 10^{|\alpha|}}(\exists m \in \mathbb{N})_{m \leq 10^{|\alpha|}}\ P(m,k,\alpha)\right]$$

Utilizando dos veces el **Lemma 39** veremos que $\chi_{L_{11}}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR. Sea:

$$Q = \lambda k\alpha\left[(\exists m \in \mathbb{N})_{m \leq 10^{|\alpha|}}\ P(m,k,\alpha)\right]$$

Por el **Lemma 39** tenemos que:

$$\lambda xk\alpha\left[(\exists m \in \mathbb{N})_{m \leq x}\ P(m,k,\alpha)\right]$$

es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR, lo cual nos dice que:

$$Q = \lambda xk\alpha\left[(\exists m \in \mathbb{N})_{m \leq x}\ P(m,k,\alpha)\right] \circ (\lambda\alpha\left[10^{|\alpha|}\right] \circ p_2^{1,1}, p_1^{1,1}, p_2^{1,1})$$

lo es. Ya que:

$$\chi_{L_{11}} = \lambda\alpha\left[(\exists k \in \mathbb{N})_{k \leq 10^{|\alpha|}}\ Q(k,\alpha)\right]$$

nuevamente, aplicando el **Lemma 39** obtenemos que $\chi_{L_{11}}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR.
En forma similar podemos probar que $L_1, \ldots, L_{14}$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR. Por lo tanto, $L_1 \cup \ldots \cup L_{14}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR. Nótese que $L_1 \cup \ldots \cup L_{14}$ es el conjunto de las instrucciones básicas de $\mathcal{S}^{\Sigma}$. Llamemos InsBas^{Σ} a dicho conjunto, resta ver que L_{15} es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR, notemos que:

$$\chi_{L_{15}} = \lambda\alpha\left[(\exists k \in \mathbb{N})_{k \leq 10^{|\alpha|}}(\exists \beta \in \mathrm{InsBas}^{\Sigma})_{|\beta| \leq |\alpha|}\ \alpha = \mathrm{L}\bar{k}\beta\right]$$

lo cual nos dice que aplicando dos veces el **Lemma 39** obtenemos que $\chi_{L_{15}}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR. Ya que $\mathrm{Ins}^{\Sigma} = \mathrm{InsBas}^{\Sigma} \cup L_{15}$ tenemos que Ins^{Σ} es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR. □

Lemma 60. *Bas y Lab son funciones* $(\Sigma \cup \Sigma_p)$*-PR.*

Proof. Sean:

- $<$ un orden total estricto sobre $\Sigma \cup \Sigma_p$
- $L = \{\mathrm{L}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\varepsilon\}$

Veamos que L es $\Sigma \cup \Sigma_p$-PR. Notar que:

$$\alpha \in L \Leftrightarrow \alpha = \varepsilon \vee (\exists k \in \mathbb{N})\ \alpha = \mathrm{L}\bar{k}$$

Dado que cuando existe k tenemos que $\bar{k}$ es una subpalabra de α, utilizando el **Lemma 58** tenemos que:

$$\alpha \in L \Leftrightarrow \alpha = \varepsilon \vee (\exists k \in \mathbb{N})_{k \leq 10^{|\alpha|}}\ \alpha = \mathrm{L}\bar{k}$$

Sean:

$$\begin{aligned} Q &= \lambda k\alpha\left[\alpha = \mathrm{L}\bar{k}\right] \\ &= \lambda\alpha\beta\left[\alpha = \beta\right] \circ \left(p_2^{1,1}, \lambda\alpha\beta\left[\alpha\beta\right] \circ \left(C_L^{1,1}, \lambda k\left[\bar{k}\right] \circ p_1^{1,1}\right)\right) \\ &\Rightarrow Q \text{ es } (\Sigma \cup \Sigma_p) - PR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= \lambda\alpha\left[(\exists k \in \mathbb{N})_{k \leq 10^{|\alpha|}}\ Q(k,\alpha)\right] \\ &= \lambda x\alpha\left[(\exists k \in \mathbb{N})_{k \leq x}\ Q(k,\alpha)\right] \circ \left(\lambda\alpha\left[10^{|\alpha|}\right] \circ p_1^{0,1}, p_1^{0,1}\right) \\ &\Rightarrow R \text{ es } (\Sigma \cup \Sigma_p) - PR \end{aligned}$$

Luego:

$$\chi_L = \lambda\alpha\,[\alpha = \varepsilon] \vee R$$

es Σ-PR y por lo tanto L lo es. Sea:

$$P = \lambda I\alpha\left[\alpha \in \mathrm{Ins}^{\Sigma} \wedge I \in \mathrm{Ins}^{\Sigma} \wedge [\alpha]_1 \neq \mathrm{L} \wedge (\exists\beta \in L)\ I = \beta\alpha\right]$$

Veamos que P es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR. Note que $D_P = (\Sigma \cup \Sigma_p)^{*2}$ y además:

$$P = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$$

donde:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \lambda I\alpha\left[\alpha \in \mathrm{Ins}^{\Sigma}\right]\\
P_2 &= \lambda I\alpha\left[I \in \mathrm{Ins}^{\Sigma}\right]\\
P_3 &= \lambda I\alpha\,[[\alpha]_1 \neq \mathrm{L}]\\
P_4 &= \lambda I\alpha\,[(\exists\beta \in L)\ I = \beta\alpha]
\end{aligned}$$

Es fácil ver que P_1, P_2 y P_3 son $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-PR. Veamos que P_4 es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-PR, para ello definamos el siguiente predicado:

$$T = \lambda I\alpha\beta\,[I = \beta\alpha]$$

Tenemos que:

$$P_4 = \lambda I\alpha\,[(\exists\beta \in L)\ T(I, \alpha, \beta)]$$

Notar que, como β es una subpalabra de I, tenemos que $|\beta| \leq |I|$

$$P_4 = \lambda I\alpha\left[(\exists\beta \in L)_{|\beta|\leq|I|} R(I, \alpha, \beta)\right]$$

Utilizando el **Lemma 39** tenemos que:

$$\lambda xI\alpha\left[(\exists\beta \in L)_{|\beta|\leq x}\ R(m, \alpha)\right]$$

es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR. Lo cual nos dice que:

$$P_4 = \lambda xI\alpha\left[(\exists\beta \in L)_{|\beta|\leq x}\ R(m, \alpha)\right] \circ (\lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ p_1^{0,2}, p_1^{0,2}, p_2^{0,2})$$

lo es. Por lo tanto P es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR.

Nótese que cuando $I \in \mathrm{Ins}^{\Sigma}$ tenemos que $P(I, \alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha = Bas(I)$. Además, notar que $Bas = M^{<}(P)$, por lo que para ver que Bas es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR, solo resta encontrar un función cota $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR y $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-total para Bas. Notar que $|Bas(I)| \leq |I| = p_1^{0,1}(I)$, para cada $I \in \mathrm{Ins}^{\Sigma}$. Luego, Bas $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR.

Finalmente note que:

$$Lab = M^{<}(\lambda I\alpha\,[\alpha Bas(I) = I])$$

lo cual nos dice que Lab es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR. □

Lemma 61. *a)* Pro^{Σ} *es un conjunto* $(\Sigma \cup \Sigma_p)$*-PR.*

b) $\lambda\mathcal{P}\,[n(\mathcal{P})]$ *y* $\lambda i\mathcal{P}\left[I_i^{\mathcal{P}}\right]$ *son funciones* $(\Sigma \cup \Sigma_p)$*-PR.*

Lemma 62. *Este lemma no se evalua.*

Lemma 63. *Este lemma no se evalua.*

Proposition 64: Sin prueba.

Proposition 64. *Sean $n, m \geq 0$, las funciones $i^{n,m}, E_{\#j}^{n,m}, E_{\star j}^{n,m}$ con $j = 1, 2, \ldots,$ son $\Sigma \cup \Sigma_p$-PR.*

Theorem 65. *Las funciones $\Phi_{\#}^{n,m}$ y $\Phi_{*}^{n,m}$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-recursivas.*

Proof. $\boxed{\Phi_{\#}^{n,m} \text{ es } (\Sigma \cup \Sigma_p)\text{-recursiva}}$
Sea P el siguiente predicado $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-mixto:

$$\lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\mathcal{P}\left[i^{n,m}(t, x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \mathcal{P}) = n(\mathcal{P}) + 1\right]$$

Note que $D_P = \omega^{n+1} \times \Sigma^{*m} \times \text{Pro}^{\Sigma}$. Ya que las funciones $i^{n,m}$ y $\lambda\mathcal{P}\left[n(\mathcal{P})\right]$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR, P lo es.
Notar que $D_{M(P)} = D_{\Phi_{\#}^{n,m}}$. Además para $(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) \in D_{M(P)}$, tenemos que $M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P})$ es la menor cantidad de pasos necesarios para que $\mathcal{P}$ termine partiendo del estado $((x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots),$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \varepsilon, \varepsilon, \ldots))$. Ya que P es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR, tenemos que $M(P)$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-recursiva. Nótese que para $(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) \in D_{M(P)} = D_{\Phi_{\#}^{n,m}}$ tenemos que:

$$\Phi_{\#}^{n,m}(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) = E_{\#1}^{n,m}\left(M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}\right)$$

es decir,

$$\Phi_{\#}^{n,m} = E_{\#1}^{n,m} \circ \left(M(P), p_1^{n,m+1}, \ldots, p_{n+m+1}^{n,m+1}\right)$$

Ya que la función $E_{\#1}^{n,m}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-recursiva, lo es $\Phi_{\#}^{n,m}$.

□

Corollary 66. *Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-computable, entonces f es Σ-recursiva.*

Proof. Sea $\mathcal{P}_0$ un programa que compute a f. Primero veremos que f es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-recursiva. Note que:

$$\begin{aligned} O = \omega \quad &\Rightarrow \quad f = \Phi_{\#}^{n,m} \circ \left(p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}_0}^{n,m}\right) \\ O = \Sigma^* \quad &\Rightarrow \quad f = \Phi_{*}^{n,m} \circ \left(p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}_0}^{n,m}\right) \end{aligned}$$

donde cabe destacar que $p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m}$ son las proyecciones respecto del alfabeto $\Sigma \cup \Sigma_p$, es decir que tienen dominio $\omega^n \times (\Sigma \cup \Sigma_p)^{*m}$. Dado que, $\Phi_{\#}^{n,m}, \Phi_{*}^{n,m}$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-recursivas tenemos que f es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-recursiva. Luego, utilizando el **Theorem 51** tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ es } \Sigma\text{-mixta} \\ f \text{ es } (\Sigma \cup \Sigma_p)\text{-mixta} \\ f \text{ es } (\Sigma \cup \Sigma_p)\text{-R} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ es } \Sigma\text{-R}$$

□

<u>Tésis de Church:</u> Toda función Σ-efectivamente computable es Σ-recursiva.

Corollary 67. *Este corolario no se evalua.*

Lemma 68. *Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O, i = 1, \ldots, k,$ son funciones Σ-recursivas tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces la función $f_1 \cup \ldots \cup f_k$ es Σ-recursiva.*

Proof. Probaremos solo el caso en que $k = 2$. Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ programas que computen las funciones f_1 y f_2, respectivamente. Sean:

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\left[i^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}_1) = n(\mathcal{P}_1)+1\right] \\ P_2 &= \lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\left[i^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}_2) = n(\mathcal{P}_2)+1\right] \end{aligned}$$

Notese que $D_{P_1} = D_{P_2} = \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m}$ y que P_1 y P_2 son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR. Además, utilizando el **Theorem 51** tenemos que son Σ-PR. También notar que $D_{M((P_1 \vee P_2))} = D_{f_1} \cup D_{f_2}$. Definimos:
$\boxed{O = \omega}$

$$\begin{aligned} g_1 &= \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[E^{n,m}_{\#1}(M\left(P_1 \vee P_2\right)(\vec{x},\vec{\alpha}),\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}_1)^{P_1(M(P_1\vee P_2)(\vec{x},\vec{\alpha}),\vec{x},\vec{\alpha})}\right] \\ g_2 &= \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[E^{n,m}_{\#1}(M\left(P_1 \vee P_2\right)(\vec{x},\vec{\alpha}),\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}_2)^{P_2(M(P_1\vee P_2)(\vec{x},\vec{\alpha}),\vec{x},\vec{\alpha})}\right] \end{aligned}$$

$\boxed{O = \Sigma^*}$

$$\begin{aligned} h_1 &= \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[E^{n,m}_{*1}(M\left(P_1 \vee P_2\right)(\vec{x},\vec{\alpha}),\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}_1)^{P_1(M(P_1\vee P_2)(\vec{x},\vec{\alpha}),\vec{x},\vec{\alpha})}\right] \\ h_2 &= \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[E^{n,m}_{*1}(M\left(P_1 \vee P_2\right)(\vec{x},\vec{\alpha}),\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}_2)^{P_2(M(P_1\vee P_2)(\vec{x},\vec{\alpha}),\vec{x},\vec{\alpha})}\right] \end{aligned}$$

Nótese que g_1, g_2, h_1 y h_2 son Σ-recursivas y que $D_{g_1} = D_{g_2} = D_{h_1} = D_{h_2} = D_{f_1} \cup D_{f_2}$. Además nótese que:

$$g_1(\vec{x},\vec{\alpha}) = \begin{cases} f_1(\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } (\vec{x},\vec{\alpha}) \in D_{f_1} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \qquad g_2(\vec{x},\vec{\alpha}) = \begin{cases} f_2(\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } (\vec{x},\vec{\alpha}) \in D_{f_2} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$h_1(\vec{x},\vec{\alpha}) = \begin{cases} f_1(\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } (\vec{x},\vec{\alpha}) \in D_{f_1} \\ \varepsilon & \text{caso contrario} \end{cases} \qquad h_2(\vec{x},\vec{\alpha}) = \begin{cases} f_2(\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } (\vec{x},\vec{\alpha}) \in D_{f_2} \\ \varepsilon & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Osea, que:

$$f_1 \cup f_2 = \begin{cases} \lambda xy\,[x.y] \circ (g_1, g_2) & \text{Si } O = \omega \\ \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ (h_1, h_2) & \text{Si } O = \Sigma^* \end{cases}$$

es Σ-recursiva. □

Lemma 69. *Supongamos $\Sigma_p \subseteq \Sigma$, entonces $Halt^{\Sigma}$ es no Σ-recursivo.*

Proof. Supongamos $Halt^{\Sigma}$ es Σ-recursivo y por lo tanto Σ-computable. Recordemos que:

$$\boxed{Halt(\mathcal{P}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{P} \text{ se detiene partiendo del estado } ((0,0,\dots),(\mathcal{P},\varepsilon,\varepsilon,\dots))}\ (\star)$$

Por la **Proposition 55** tenemos que existe un macro:

$$\left[\text{IF } Halt^{\Sigma}(\text{W1}) \text{ GOTO A1}\right]$$

Sea $\mathcal{P}_0$ el siguiente programa de $\mathcal{S}^{\Sigma}$

$$\text{L1 } \left[\text{IF } Halt^{\Sigma}(\text{P1}) \text{ GOTO L1}\right]$$

Note que:

$$\mathcal{P}_0 \text{ termina partiendo desde } ((0,0,\dots),(\mathcal{P}_0,\varepsilon,\varepsilon,\dots)) \Leftrightarrow Halt^{\Sigma}(\mathcal{P}_0) = 0$$

lo cual produce una contradicción si tomamos en $(\star) : \mathcal{P} = \mathcal{P}_0$. □

Theorem 70. *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, entonces S es Σ-efectivamente enumerable $\Leftrightarrow$ S es Σ-recursivamente enumerable.*

Proof. $\boxed{\Rightarrow}$

S es Σ-efectivamente enumerable	$\Rightarrow$	S es Σ-efectivamente computable	Por **Theorem 16**
	$\Rightarrow$	S es Σ-recursivo	Por **Tésis de Church**
	$\Rightarrow$	S es Σ-recursivamente enumerable	Por **Theorem 77**

$\boxed{\Leftarrow}$

S es Σ-recursivamente enumerable	$\Rightarrow$	S es Σ-recursivo	Por **Theorem 77**
	$\Rightarrow$	S es Σ-efectivamente computable	Por **Theorem 42**
	$\Rightarrow$	S es Σ-efectivamente enumerable	Por **Theorem 16**

□

Theorem 71. *Dado $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, son equivalentes:*

1. *S es Σ-recursivamente enumerable.*
2. *$S = I_F$, para alguna $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada F_i es Σ-recursiva.*
3. *$S = D_f$, para alguna función Σ-recursiva f.*
4. *$S = \emptyset$ ó $S = I_F$, para alguna $F : \omega \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada F_i es Σ-PR.*

Corollary 72. *Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-recursiva y $S \subseteq D_f$ es Σ-RE, entonces $f\mid_S$ es Σ-recursiva.*

Proof. Por el **Theorem 71** $S = D_g$, para alguna función Σ-recursiva g. Nótese que componiendo adecuadamente podemos suponer que:

- $I_g = \{1\}$, si $O = \omega$
- $I_g = \{\varepsilon\}$, si $O = \Sigma^*$

Luego, tenemos:

$$f\mid_S = \begin{cases} \lambda xy\,[x.y] \circ (f, g) & \text{Si } O = \omega \\ \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ (f, g) & \text{Si } O = \Sigma^* \end{cases}$$

□

Corollary 73. *Este corolario no se evalua.*

Corollary 74. *Supongamos $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ-RE, entonces $S_1 \cap S_2$ es Σ-RE.*

Proof. Por el **Theorem 71** $S_1 = D_{g_1}, S_2 = D_{g_2}$, con g_1, g_2 funciones Σ-recursivas. Notar que podemos suponer que $I_{g_1}, I_{g_2} \subseteq \Sigma^*$ por lo que $S_1 \cap S_2 = D_{\lambda\alpha\beta[\alpha\beta]\circ(g_1,g_2)}$ es Σ-RE. □

Corollary 75. *Supongamos $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ-RE, entonces $S_1 \cup S_2$ es Σ-RE.*

Proof. Supongamos $S_1, S_2 \neq \emptyset$. Utilizando el **Lemma 71**, tomamos $F, G : \omega \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tales que $I_F = S_1$, $I_G = S_2$ y las funciones $F_i's$ y $G_i's$ son Σ-recursivas. Sean:

- $f = \lambda x\,[Q(x, 2)]$

- $g = \lambda x\,[Q(x \dot{-} 1, 2)]$
- $H : \omega \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$, dada por:

$$H_i = (F_i \circ f)|_{\{x:x \text{ es par}\}} \cup (G_i \circ g)|_{\{x:x \text{ es impar}\}}$$

Por el **Corollary 72** y el **Lemma 68**, cada H_i es Σ-recursiva. Dado que $I_H = S_1 \cup S_2$, tenemos que $S_1 \cup S_2$ es Σ-RE. □

Theorem 76. *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, entonces S es Σ-efectivamente computable $\Leftrightarrow$ S es Σ-recursivo.*

Proof. $\boxed{\Rightarrow}$
Utilizando la **Tésis de Church** tenemos que si S es Σ-efectivamente computable entonces es Σ-recursivo.

$\boxed{\Leftarrow}$

Utilizando el **Theorem 42** tenemos que si S es Σ-recursivo entonces es Σ-efectivamente computable como queriamos probar. □

Theorem 77. *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, son equivalentes:*

a) S es Σ-recursivo.

b) S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ-recursivamente enumerables.

Proof. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$
Notar que:

- $S = D_{Pred \circ \chi_S}$
- $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S = D_{Pred \circ \chi_{(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S}}$

Dado que $Pred \circ \chi_S$ y $Pred \circ \chi_{(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S}$ son Σ-recursivas, utilizando el **Theorem 71** tenemos que S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ-recursivamente enumerables, donde $\chi_{(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S} = \lambda xy\,[x \dot{-} y] \circ (C_1^{1,0}, \chi_S)$.

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$

Notar que:

$$\chi_S = C_1^{n,m}|_S \cup C_0^{n,m}|_{\omega^n \times \Sigma^{*m} - S}$$

Luego, utilizando el **Theorem 72** y el **Lemma 68**, tenemos que S es Σ-recursivo. □

Lemma 78: Con prueba.

Lemma 78. *Supongamos que $\Sigma_p \subseteq \Sigma$, entonces:*

$$A = \left\{ \mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma : Halt^\Sigma(\mathcal{P}) \right\}$$

es Σ-RE y no es Σ-recursivo. Más aán el conjunto:

$$N = \left\{ \mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma : \neg Halt^\Sigma(\mathcal{P}) \right\}$$

no es Σ-RE.

Proof. Sea:

$$P = \lambda t\mathcal{P}\left[i^{0,1}(t,\mathcal{P},\mathcal{P}) = n(\mathcal{P})+1\right]$$

Note que P es Σ-PR, por lo que $M(P)$ es Σ-recursiva. Además note que $D_{M(P)} = A$, lo cual, utilizando el **Theorem 71**, implica que A es Σ-RE. Dado que $Halt^{\Sigma}$ es no Σ-recursivo por **Lemma 69**, y dado que:

$$Halt^{\Sigma} = C_1^{0,1}\mid_A \cup\, C_0^{0,1}\mid_N$$

tomando la contrarecíproca del **Lemma 68** y el **Theorem 71** nos dice que N no es Σ-RE. Finalmente, supongamos A es Σ-recursivo, entonces el conjunto:

$$N = (\Sigma^* - A)\cap \mathrm{Pro}^{\Sigma}$$

debería serlo, lo cual es absurdo. Por lo tanto, A no es Σ-recursivo. □

5 Máquinas de Turing

Lemma 79. *Este lemma no se evalua.*

Lemma 80. *El predicado $\lambda dd'\left[d \vdash d'\right]$ es $(\Gamma\cup Q)$-PR.*

Proof. Note que $D_{\lambda dd'[d\, \vdash d']} = Des \times Des$. También nótese que los predicados

$$\begin{gathered}\lambda q\sigma p\gamma\left[(q,\sigma,L)\in\delta(p,\gamma)\right]\\ \lambda q\sigma p\gamma\left[(q,\sigma,R)\in\delta(p,\gamma)\right]\\ \lambda q\sigma p\gamma\left[(q,\sigma,K)\in\delta(p,\gamma)\right]\end{gathered}$$

son $(\Gamma\cup Q)$-PR, ya que los tres tienen dominio igual a $Q\times\Gamma\times Q\times\Gamma$ el cual es finito por **Corolario 36**.

Sean:

$P_R : Des\times Des\times\Gamma\times\Gamma^*\times\Gamma^*\times Q\times Q\to\omega$
$P_R(d,d',\sigma,\alpha,\beta,p,q) = 1 \Leftrightarrow (d=\alpha p\beta)\wedge((q,\sigma,R)\in\delta\left(p,[\beta B]_1\right))\wedge(d'=\alpha\sigma q\frown\beta)$

$P_L : Des\times Des\times\Gamma\times\Gamma^*\times\Gamma^*\times Q\times Q\to\omega$
$P_L(d,d',\sigma,\alpha,\beta,p,q) = 1 \Leftrightarrow (d=\alpha p\beta)\wedge((q,\sigma,L)\in\delta\left(p,[\beta B]_1\right))\wedge(\alpha\neq\varepsilon)\wedge\left(d' = \left\lfloor \alpha\frown q\,[\alpha]_{|\alpha|}\,\sigma\frown\beta\right\rfloor\right)$

$P_K : Des\times Des\times\Gamma\times\Gamma^*\times\Gamma^*\times Q\times Q\to\omega$
$P_K(d,d',\sigma,\alpha,\beta,p,q) = 1 \Leftrightarrow (d=\alpha p\beta)\wedge((q,\sigma,K)\in\delta\left(p,[\beta B]_1\right))\wedge(d'=\lfloor\alpha q\sigma\frown\beta\rfloor)$

Veamos, por ejemplo, que P_L es $(\Gamma\cup Q)$-PR. Notar que:

$$P_L = P_1\wedge P_2\wedge P_3\wedge P_4$$

donde P_1,P_2,P_3,P_4 son los siguientes predicados:

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda dd'\sigma\alpha\beta pq\,[d = \alpha p\beta] \\ &= \lambda\alpha\beta\,[\alpha = \beta] \circ (p_1^{0,7}, \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3\,[\alpha_1\alpha_2\alpha_3] \circ (p_4^{0,7}, p_6^{0,7}, p_5^{0,7})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \lambda dd'\sigma\alpha\beta pq\,[(q,\sigma,L) \in \delta\,(p, [\beta B]_1)] \\ &= \lambda q\sigma p\gamma\,[(q,\sigma,L) \in \delta(p,\gamma)] \circ (p_7^{0,7}, p_3^{0,7}, p_6^{0,7}, \lambda i\alpha\,[[\alpha]_i] \circ (C_1^{0,7}, \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ (p_5^{0,7}, C_B^{0,7}))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= \lambda dd'\sigma\alpha\beta pq\,[\alpha \neq \varepsilon] \\ &= \lambda\alpha\beta\,[\alpha \neq \beta] \circ (p_4^{0,7}, C_\varepsilon^{0,7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4 &= \lambda dd'\sigma\alpha\beta pq\left[d' = \left\lfloor \alpha^\frown q\,[\alpha]_{|\alpha|}\,\sigma^\frown\beta \right\rfloor\right] \\ &= \lambda\alpha\beta\,[\alpha = \beta] \circ (p_2^{0,7}, \lambda\alpha\,[\lfloor\alpha\rfloor] \circ f) \end{aligned}$$

donde:

$$f = \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\,[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5] \circ (\lambda\alpha\,[\alpha^\frown] \circ p_4^{0,7}, p_7^{0,7}, \lambda i\alpha\,[[\alpha]_i] \circ (\lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ p_4^{0,7}, p_4^{0,7}), p_3^{0,7}, \lambda\alpha\,[^\frown\alpha] \circ p_5^{0,7})$$

Luego, notar que P_1, P_2, P_3, P_4 son $(\Gamma \cup Q)$-PR, por lo tanto P_L es $(\Gamma \cup Q)$-PR. De manera similar, podemos ver que P_K y P_R son $(\Gamma \cup Q)$-PR.
Tomemos el siguiente predicado:

$$P = (P_R \vee P_L \vee P_K)$$

Tenemos que P es $(\Gamma \cup Q)$-PR. Nótese que $\lambda dd'\,[d \vdash d']$ es igual al predicado:

$$\lambda dd'\,[(\exists\sigma \in \Gamma)(\exists\alpha,\beta \in \Gamma^*)(\exists p,q \in Q)\ P(d,d',\sigma,\alpha,\beta,p,q)]$$

Luego, aplicando cinco veces el **Lemma 39** obetenemos que $\lambda dd'\,[d \vdash d']$ es $(\Gamma \cup Q)$-PR. Veamos esto. Notar primero que como β,α,σ,p,q son subpalabras de d y d' respectivamente tenemos que $|\beta|,|\alpha|,|\sigma|,|p|,|q| \leq |d| + |d'|$.

$$\begin{aligned} L_1 &= \lambda xdd'\sigma\alpha\beta p\left[(\exists q \in Q)_{|q| \leq x}\ P(d,d',\sigma,\alpha,\beta,p,q)\right] \\ Q_1 &= \lambda dd'\sigma\alpha\beta p\left[(\exists q \in Q)_{|q| \leq |d|+|d'|}\ P(d,d',\sigma,\alpha,\beta,p,q)\right] \\ &= L_1 \circ (\lambda xy\,[x+y] \circ (\lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ p_1^{0,6}, \lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ p_2^{0,6}), p_1^{0,6}, p_2^{0,6}, p_3^{0,6}, p_4^{0,6}, p_5^{0,6}, p_6^{0,6}) \end{aligned}$$

Luego, utilizando el **Lemma 39** obtenemos que L_1 es $(\Gamma \cup Q)$-PR y por ende Q_1 es $(\Gamma \cup Q)$-PR. De la misma manera podemos que el predicado Q_2 es $(\Gamma \cup Q)$-PR.

$$\begin{aligned} L_2 &= \lambda xdd'\sigma\alpha\beta\left[(\exists p \in Q)_{|p| \leq x}\ Q_1(d,d',\sigma,\alpha,\beta,p)\right] \\ Q_2 &= \lambda dd'\sigma\alpha\beta\left[(\exists p \in Q)_{|p| \leq |d|+|d'|}\ Q_1(d,d',\sigma,\alpha,\beta,p)\right] \\ &= L_2 \circ (\lambda xy\,[x+y] \circ (\lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ p_1^{0,5}, \lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ p_2^{0,5}), p_1^{0,5}, p_2^{0,5}, p_3^{0,5}, p_4^{0,5}, p_5^{0,5}) \end{aligned}$$

finalmente, tenemos que Q_3, Q_4, Q_5 son $(\Gamma \cup Q)$-PR.

$$\begin{aligned}
L_3 &= \lambda x d d' \sigma\alpha \left[(\exists \beta \in \Gamma^*)_{|\beta| \leq x}\ Q_2(d, d', \sigma, \alpha, \beta)\right] \\
Q_3 &= \lambda d d' \sigma\alpha \left[(\exists \beta \in \Gamma^*)_{|\beta| \leq |d|+|d'|}\ Q_2(d, d', \sigma, \alpha, \beta)\right] \\
&= L_3 \circ (\lambda xy\,[x+y] \circ (\lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ p_1^{0,4}, \lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ p_2^{0,4}), p_1^{0,4}, p_2^{0,4}, p_3^{0,4}, p_4^{0,4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_4 &= \lambda x d d' \sigma \left[(\exists \alpha \in \Gamma^*)_{|\alpha| \leq x}\ Q_3(d, d', \sigma, \alpha)\right] \\
Q_4 &= \lambda d d' \sigma \left[(\exists \alpha \in \Gamma^*)_{|\alpha| \leq |d|+|d'|}\ Q_3(d, d', \sigma, \alpha)\right] \\
&= L_4 \circ (\lambda xy\,[x+y] \circ (\lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ p_1^{0,3}, \lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ p_2^{0,3}), p_1^{0,3}, p_2^{0,3}, p_3^{0,3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_5 &= \lambda x d d' \left[(\exists \sigma \in \Gamma)_{|\sigma| \leq x}\ Q_4(d, d', \sigma)\right] \\
Q_5 &= \lambda d d' \left[(\exists \sigma \in \Gamma)_{|\sigma| \leq |d|+|d'|}\ Q_4(d, d', \sigma)\right] \\
&= L_5 \circ (\lambda xy\,[x+y] \circ (\lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ p_1^{0,2}, \lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ p_2^{0,2}), p_1^{0,2}, p_2^{0,2})
\end{aligned}$$

Notar que $Q_5 = \lambda d d'\,[d \vdash d']$. Por lo tanto, $\lambda d d'\,[d \vdash d']$ es $(\Gamma \cup Q)$-PR. □

Proposition 81. *$\lambda n d d' \left[d \overset{n}{\vdash} d'\right]$ es $(\Gamma \cup Q)$-PR.*

Theorem 82. *Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ una máquina de Turing, entonces $L(M)$ es Σ-recursivamente enumerable.*

Proof. Sea P el siguiente predicado $(\Gamma \cup Q)$-mixto:

$$P = \lambda n\alpha \left[(\exists d \in Des)\ \lfloor q_0 B \alpha \rfloor \overset{n}{\vdash} d \wedge St(d) \in F\right]$$

Nótese que $D_P = \omega \times \Gamma^*$. Veamos que P es $(\Gamma \cup Q)$-PR. Para ello definamos:

$$P = P_1 \wedge P_2$$

donde P_1 y P_2:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \lambda n\alpha\,[(\exists d \in Des)\ Q(n, \alpha, d)] \\
Q &= \lambda n\alpha d \left[\lfloor q_0 B \alpha \rfloor \overset{n}{\vdash} d\right] \\
&= \lambda n d d' \left[d \overset{n}{\vdash} d\right] \circ (\lambda\alpha\,[\lfloor\alpha\lfloor] \circ (\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ (C^{1,2}_{q_0 B}, p_2^{1,2})), p_3^{1,2})
\end{aligned}$$

$$P_2 = \lambda n\alpha\,[St(d) \in F]$$

Sabemos que el conjunto F es finito, por **Corollary 30**, F es $(\Gamma \cup Q)$-PR. También sabemos que χ_F es $(\Gamma \cup Q)$-PR, por lo tanto el predicado P_2 es $(\Gamma \cup Q)$-PR.
Por **Lema 39** tenemos que:

$$L = \lambda x n\alpha \left[(\exists d \in Des)_{|d| \leq x}\ Q(n, \alpha, d)\right]$$

es $(\Gamma \cup Q)$-PR, es decir, solo nos falta acotar el cuantificador existencial, para poder aplicar el **Lema 39**. Dado que cuando $d_1, \ldots, d_{n+1} \in Des$ son tales que $d_1 \vdash d_2 \vdash \ldots \vdash d_{n+1}$ tenemos que:

$$|d_i| \leq |d_1| + n, \text{ para } i = 1, \ldots, n$$

luego, una posible cota para dicho cuantificador es:

$$|d| \leq |\lfloor q_0 B\alpha \rfloor| + n$$

Por lo tanto, tenemos que el predicado P_1 es $(\Gamma \cup Q)$-PR. En definitiva P es $(\Gamma \cup Q)$-PR.
Sea:

$$P' = P\mid_{\omega \times \Sigma^*}$$

nótese que $P'(n, \alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha \in L(M)$ atestiguado por una computación de longitud n.
Por **Corollary 72** P' es $(\Gamma \cup Q)$-PR, y además es Σ-mixto. Utilizando el **Teorema 51** tenemos que P' es Σ-PR.
Dado que $L(M) = D_{M(P')}$, el **Teorema 71** nos dice que $L(M)$ es Σ-recuersivamente enumerable. □

Theorem 83. *Supongamos $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-Turing computable, entonces f es Σ-recursiva.*

Proof. Supongamos $O = \Sigma^*$. Sean:

- $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, \shortmid, F)$ una máquina de Turing determinística con unit la cual compute a f.
- $<$ un orden total estricto sobre $\Gamma \cup Q$.
- $P : \mathbf{N} \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ dado por:

$$P = P_1 \wedge P_2$$

donde:

$$P_1 = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists q \in Q)\ \lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} B \ldots B \shortmid^{x_n} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_m \rfloor \overset{(x)_1}{\vdash} \lfloor qB *^{<}((x)_2) \rfloor\right]$$
$$P_2 = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall d \in Des)_{|d| \leq |*^{<}((x)_2)|+2}\ \lfloor qB *^{<}((x)_2) \rfloor \nvdash d\right]$$

Si tomamos Q_1 y Q_2 como:

$$Q_1 = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}q\left[\lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} B \ldots B \shortmid^{x_n} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_m \rfloor \overset{(x)_1}{\vdash} \lfloor qB *^{<}((x)_2) \rfloor\right]$$
$$Q_2 = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}d\left[\lfloor qB *^{<}((x)_2) \rfloor \nvdash d\right]$$

Tenemos que:

$$P_1 = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists q \in Q)\ Q_1(x, \vec{x}, \vec{\alpha}, q)\right]$$
$$P_2 = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall d \in Des)_{|d| \leq |*^{<}((x)_2)|+2}\ Q_2(x, \vec{x}, \vec{\alpha}, d)\right]$$

Es fácil ver que Q_1 y Q_2 son $(\Gamma \cup Q)$-PR. Luego, aplicando el **Lema 39** tenemos que P_1 y P_2 son $(\Gamma \cup Q)$-PR y por ende P es $(\Gamma \cup Q)$-PR, dado que es Σ-mixto, el **Teorema 51** nos dice que es Σ-PR. Nótese que:

$$f = \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[\left(\min_x\ P(x, \vec{x}, \vec{\alpha})\right)_2\right]$$

lo cual nos dice que f es Σ-recursiva. □

Lemma 84. *Sea $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$ y sea k tal que las variables que ocurren en $\mathcal{P}$ están todas en la lista* $\mathrm{N}1, \ldots, \mathrm{N}\bar{k}, \mathrm{P}1, \ldots, \mathrm{P}\bar{k}$. *Para cada $a \in \Sigma \cup \{\shortmid\}$, sean:*

- $\tilde{a}$ *un nuevo símbolo*

- $\Gamma = \Sigma \cup \{B, \shortmid\} \cup \{\tilde{a} : a \in \Sigma \cup \{\shortmid\}\}$

entonces existe una máquina de Turing determinística con unit $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \shortmid, \{q_f\})$ *la cual satisface:*

1. $\delta(q_f, \sigma) = \emptyset$, *para cada* $\sigma \in \Gamma$.

2. *Cualesquiera sean* $x_1, \ldots, x_k \in \omega$ *y* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Sigma^*$, *el programa* $\mathcal{P}$ *se detiene partiendo del estado:*
$$((x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots), (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \varepsilon, \ldots))$$
si y sólo si M *se detiene partiendo de la descripción instantánea:*
$$\lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} B \ldots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k B \rfloor$$

3. *Si* $x_1, \ldots, x_k \in \omega$ *y* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Sigma^*$ *son tales que* $\mathcal{P}$ *se detiene partiendo del estado:*
$$((x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots), (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \varepsilon, \ldots))$$
y llega al estado
$$((y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots), (\beta_1, \ldots, \beta_k, \varepsilon, \ldots))$$
entonces
$$\lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} B \ldots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k B \rfloor \overset{*}{\vdash} \lfloor q_f B \shortmid^{y_1} B \ldots B \shortmid^{y_k} B\beta_1 B \ldots B\beta_k B \rfloor$$

Proof. Dado un estado $((x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots), (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \varepsilon, \ldots))$, dicho estado se representará en la cinta de la siguiente manera:

$$B \shortmid^{x_1} B \ldots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k BBBB \ldots$$

A continuación se describirán una serie de máquinas, las cuales simularán, vía la representación anterior, las distintas clases de instrucciones que pueden ocurrir en $\mathcal{P}$. Todas las máquinas definidas tendrán:

- $\shortmid$ como unit

- B como blanco

- Σ como su alfabeto terminal

- su alfabeto mayor será $\Gamma = \Sigma \cup \{B, \shortmid\} \cup \{\tilde{a} : a \in \Sigma \cup \{\shortmid\}\}$

- uno o dos estados finales con la propiedad de que si q es un estado final, entonces $\delta(q, \sigma) = \emptyset$, para cada $\sigma \in \Gamma$.

  Esta propiedad es importante ya que permitirá concatenar pares de dichas máquinas identificando algún estado final de la primera con el inicial de la segunda.

Para $1 \leq i \leq k$, sea M_i^{+} una máquina tal que:

$$\begin{array}{lcl} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_{i-1}} B \mid^{x_i+1} B \mid^{x_{i+1}} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_i^{\dot{-}}$ una máquina tal que:

$$\begin{array}{lcl} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_{i-1}} B \mid^{x_i \dot{-} 1} B \mid^{x_{i+1}} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$ y $a \in \Sigma$, sea M_i^{a} una máquina tal que:

$$\begin{array}{lcl} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_{i-1} B\alpha_i a B\alpha_{i+1} B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_i^{\frown}$ una máquina tal que:

$$\begin{array}{lcl} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_{i-1} B^{\frown}\alpha_i B\alpha_{i+1} B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $j = 1, \dots, k$, y $a \in \Sigma$, sea IF_j^a una máquina con dos estados finales q_{si} y q_{no} tal que:
Si α_j comienza con a, entonces:

$$\begin{array}{lcl} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{si} \end{array}$$

Caso contrario:

$$\begin{array}{lcl} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no} \end{array}$$

Análogamente, para $j = 1, \dots, k$, sea IF_j una máquina tal que:
Si $x_j \neq 0$, entonces:

$$\begin{array}{lcl} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{si} \end{array}$$

Si $x_j = 0$, entonces:

$$\begin{array}{lcl} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no} \end{array}$$

Para $1 \leq i, j \leq k$, sea $M_{i \leftarrow j}^{*}$ una máquina tal que:

$$\begin{array}{lcl} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_{i-1} B\alpha_j B\alpha_{i+1} B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i, j \leq k$, sea $M^{\#}_{i \leftarrow j}$ una máquina tal que:

$$\begin{array}{lcl} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_{i-1}} B \mid^{x_j} B \mid^{x_{i+1}} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_{i \leftarrow 0}$ una máquina tal que:

$$\begin{array}{lcl} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_{i-1}} BB \mid^{x_{i+1}} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_{i \leftarrow \varepsilon}$ una máquina tal que:

$$\begin{array}{lcl} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_{i-1} BB\alpha_{i+1} B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Sean:

$$M_{\text{SKIP}} = (\{q_0, q_f\}, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \mid, \{q_f\})$$

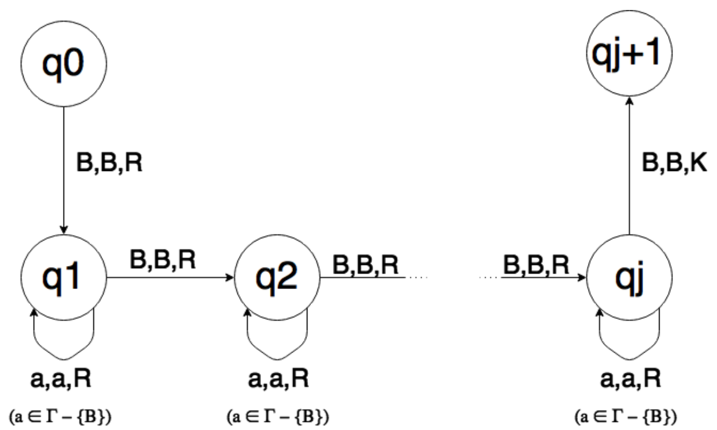
con $\delta(q_0, B) = \{(q_f, B, K)\}$ y $\delta = \emptyset$ en cualquier otro caso.

$$M_{\text{GOTO}} = (\{q_0, q_{si}, q_{no}\}, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \mid, \{q_{si}, q_{no}\})$$

con $\delta(q_0, B) = \{(q_{si}, B, K)\}$ y $\delta = \emptyset$ en cualquier otro caso.

Para poder realizar concretamente las máquinas recién descriptas deberemos diseñar antes algunas máquinas auxiliares. Para cada $j \geq 1$, sean:

- D_j la siguiente máquina:



Notar que:

$$\begin{array}{lcl} \alpha B \beta_1 B \beta_2 B \dots B \beta_j B \gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha B \beta_1 B \beta_2 B \dots B \beta_j B \gamma \\ \uparrow & & \hphantom{\alpha B \beta_1 B \beta_2 B \dots B \beta_j} \uparrow \\ q_0 & & \hphantom{\alpha B \beta_1 B \beta_2 B \dots B \beta_j} q_f \end{array}$$

siempre que $\alpha, \gamma \in \Gamma^*, \beta_1, \dots, \beta_j \in (\Gamma - \{B\})^*$.

- I_j la siguiente máquina. Notar que:

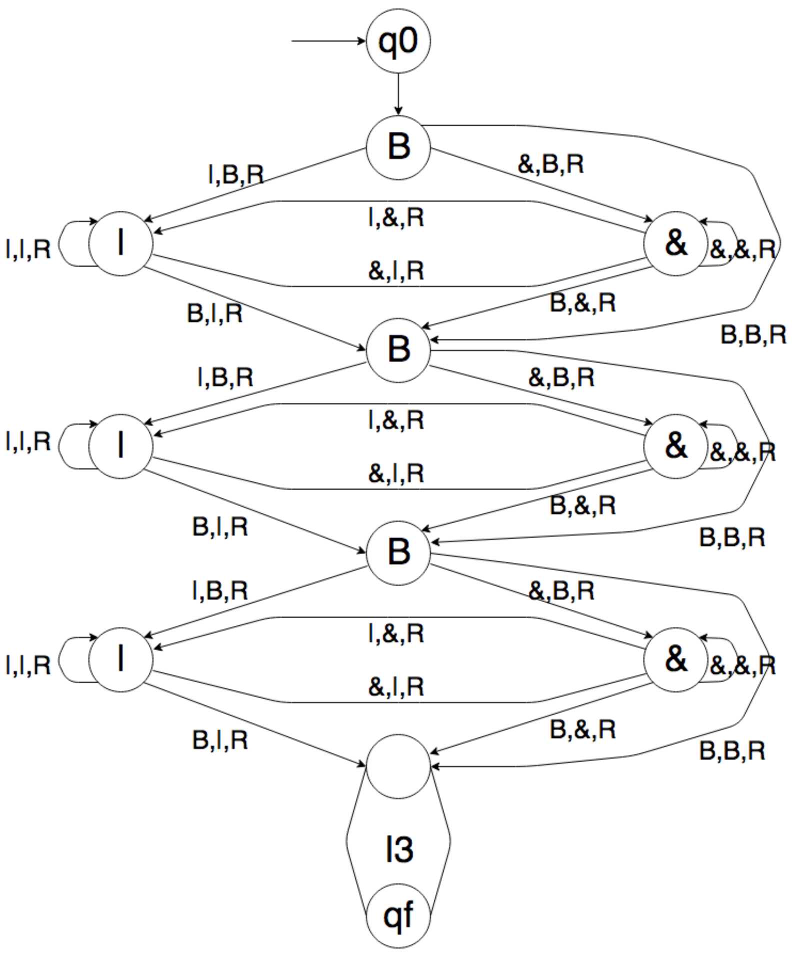
$$\begin{array}{ccc} \alpha B\beta_1 B\beta_2 B\dots B\beta_j B\gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha B\beta_1 B\beta_2 B\dots B\beta_j B\gamma \\ \qquad\qquad\quad\ \uparrow & & \uparrow\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\ \qquad\qquad\quad\ q_0 & & q_f\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \end{array}$$

siempre que $\alpha, \gamma \in \Gamma^*, \beta_1, \dots, \beta_j \in (\Gamma - \{B\})^*$.

- TD_j una máquina con un solo estado final q_f y tal que:

$$\begin{array}{ccc} \alpha B\gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha BB\gamma \\ \uparrow & & \ \ \uparrow \\ q_0 & & \ \ q_f \end{array}$$

cada vez que $\alpha, \gamma \in \Gamma^*$ y γ tiene exactamente j ocurrencias de B, es decir, la máquina TD_j corre un espacio a la derecha todo el bloque γ y agrega un blanco en el espacio que se genera a la izquierda de dicho bloque. Por ejemplo, para el caso de $\Sigma = \{\&\}$ podemos tomar TD_3 igual a la siguiente máquina:

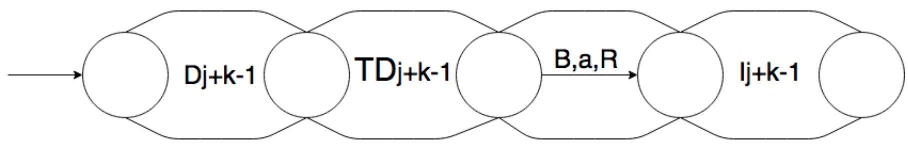


- TI_j una máquina tal que:

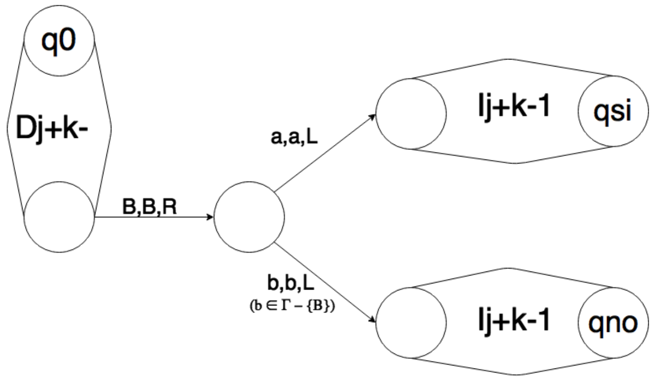
$$\begin{array}{ccc} \alpha B\sigma\gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha B\gamma \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

  cada vez que $\alpha \in \Gamma^*$, $\sigma \in \Gamma$ y γ tiene exactamente j ocurrencias de B, es decir la máquina TI_j corre un espacio a la izquierda todo el bloque γ (por lo cual en el lugar de σ queda el primer símbolo de γ).

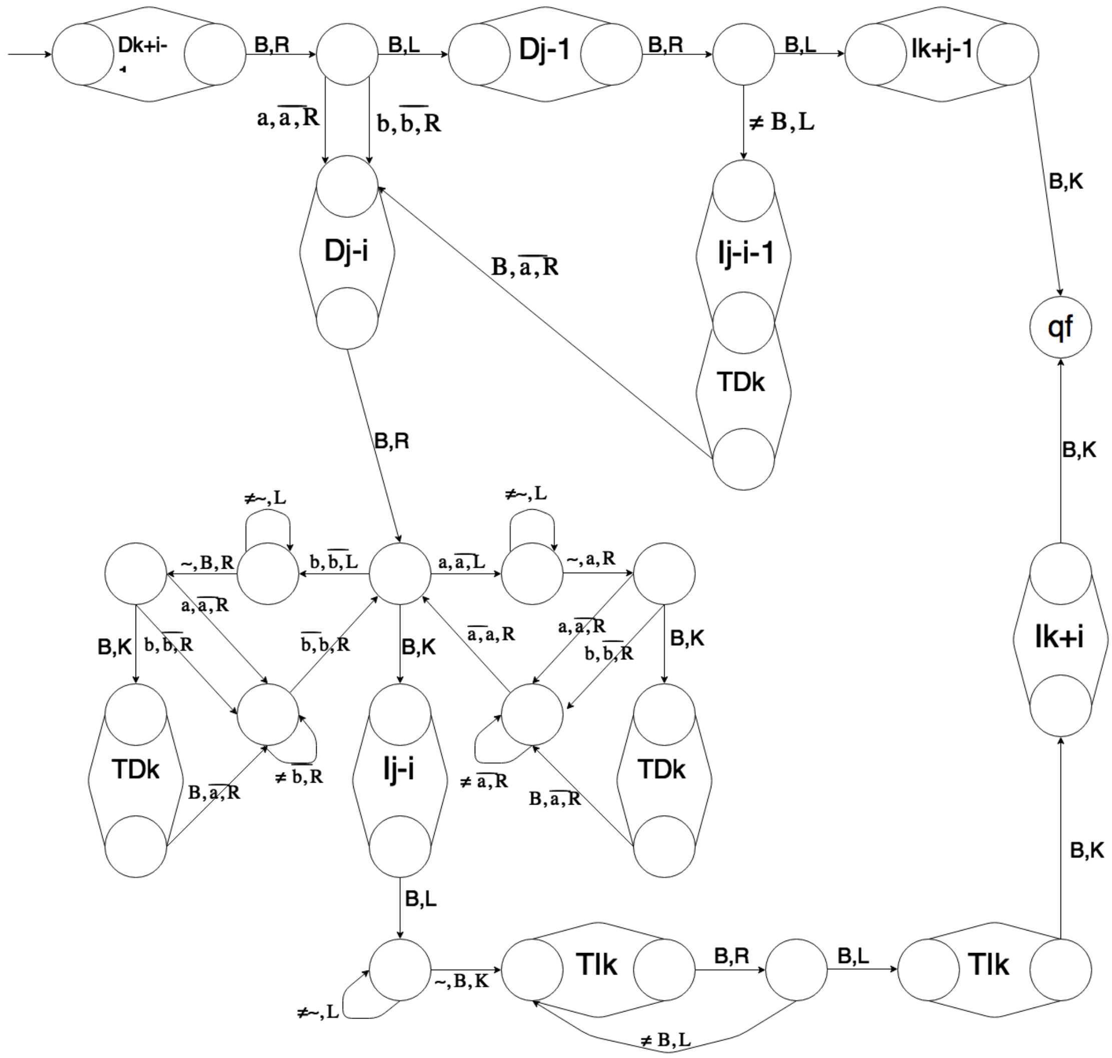
Teniendo las máquinas auxiliares antes definidas podemos combinarlas para obtener las máquinas simuladoras de instrucciones. Por ejemplo M_i^a puede ser la siguiente máquina:



En la siguiente máquina, tenemos una posible forma de diseñar la máquina IF_i^a.



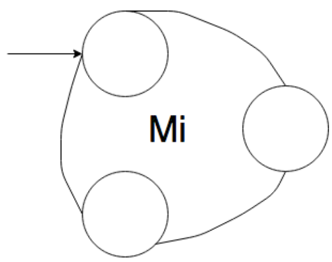
En la siguiente máquina tenemos una posible forma de diseñar la máquina $M^*_{i\leftarrow j}$ para el caso $\Sigma = \{a, b\}$ y $i < j$:



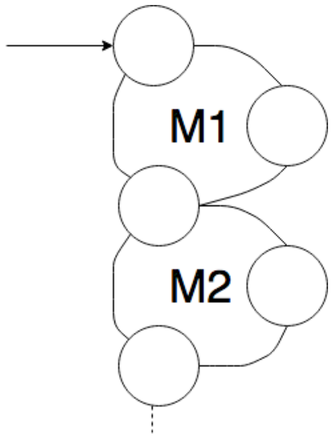
Supongamos ahora que $\mathcal{P} = I_1, \dots, I_n$. Para cada $i = 1, \dots, n$, definiremos una máquina M_i que simulará la instrucción I_i. Luego uniremos adecuadamente dichas máquinas para formar la máquina que simulará a $\mathcal{P}$.

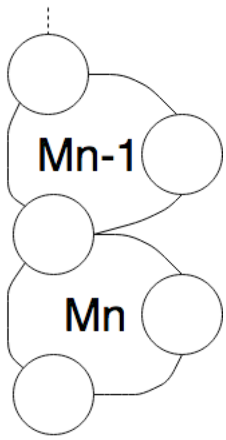
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{j} + 1$ tomaremos $M_i = M_j^+$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{j} \dot{-} 1$ tomaremos $M_i = M_j^{\dot{-}}$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow 0$ tomaremos $M_i = M_{j \leftarrow 0}$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{m}$ tomaremos $M_i = M_{j \leftarrow m}^{\#}$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{IF\ N}\bar{j} \neq 0 \mathrm{\ GOTO\ L}\bar{m}$ tomaremos $M_i = IF_j$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \mathrm{P}\bar{j}.a$ tomaremos $M_i = M_j^a$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow {}^\frown\mathrm{P}\bar{j}$ tomaremos $M_i = M_j^{\frown}$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \varepsilon$ tomaremos $M_i = M_{j \leftarrow \varepsilon}$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \mathrm{P}\bar{m}$ tomaremos $M_i = M_{j \leftarrow m}^*$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{IF\ P}\bar{j}\ \mathrm{BEGINS}\ a\ \mathrm{GOTO\ L}\bar{m}$ tomaremos $M_i = IF_j^a$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{SKIP}$ tomaremos $M_i = M_{\mathrm{SKIP}}$.
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{GOTO\ L}\bar{m}$ tomaremos $M_i = M_{\mathrm{GOTO}}$

Dado que la máquina M_i puede tener uno o dos estados finales, se representará como se muestra en la siguiente figura:



entendiendo que en el caso en que M_i tiene un solo estado final, este esta representado por el circulo de abajo a la izquierda y en el caso en que M_i tiene dos estados finales, el estado final corresponde al estado q_{si} y el otro al estado q_{no}.
Para armar la máquina que simulará a $\mathcal{P}$, primero unimos las máquinas $M_1, \dots, M_n$ como lo muestra la siguiente figura:





Luego para cada i tal que $Bas(I_i)$ es de la forma α GOTO L$\bar{m}$, ligamos con una flecha de la forma:

$$\xrightarrow{\quad B,B,K \quad}$$

el estado final q_{si} de la M_i con el estado inicial de la M_h, donde h es tal que I_h es la primer instrucción que tiene label L$\bar{m}$. Es intuitivamente claro que la máquina así obtenida cumple con lo requerido aunque una prueba formal de esto puede resultar extremadamente tediosa. $\square$

Theorem 85. *Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-recursiva, entonces f es Σ-Turing computable.*

Proof. Dado que f es Σ-computable, existe $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma}$ el cual computa f. Se probará solamente el caso $O = \Sigma^*$. Notar que cuando $\mathcal{P}$ termina, en el estado alcanzado, las variables numéricas tienen todas el valor 0 y las alfabéticas distintas de P1 todas el valor ε.
Sean:

- M la máquina de Turing con unit dada por el **Lemma 84**, donde elegimos el número k con la propiedad adicional de ser mayor que n y m.
- M_1 una máquina tal que para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$:

$$\left\lfloor q_0 B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_n} B\alpha_1 B \dots B\alpha_m B \right\rfloor \overset{*}{\vdash} \left\lfloor qB \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_n} B^{k-n} B\alpha_1 B \dots B\alpha_m B \right\rfloor$$

  donde q_0 es el estado inicial de M_1 y q es un estado tal que $\delta(q, \sigma) = \emptyset$, para cada σ.
- M_2 una máquina tal que para cada $\alpha \in \Sigma^*$:

$$\left\lfloor q_0 B^{k+1} \alpha \right\rfloor \overset{*}{\vdash} \lfloor qB\alpha \rfloor$$

  donde q_0 es el estado inicial de M_2 y q es un estado tal que $\delta(q, \sigma) = \emptyset$, para cada σ.

Notar que la concatenación de M_1, M y M_2, en ese orden, produce una máquina de Turing la cual computa f. □

Theorem 86. *Este teorema no se evalua.*