Resumen de teoremas para el final de Lenguajes Formales y Computabilidad

Agustín Curto, agucurto95@gmail.com
Francisco Nievas, frannievas@gmail.com

2017

Contents

1 Notación y conceptos básicos

Lemma 1. *Sea $S \subseteq \omega \times \Sigma^*$, entonces S es rectangular si y solo si se cumple la siguiente propiedad:*

$$\textit{Si } (x, \alpha),\ (y, \beta) \in S \Rightarrow (x, \beta) \in S$$

Lemma 2. *La relación $<$ es un orden total estricto sobre Σ^*.*

Lemma 3. *La función $s^< : \Sigma^* \to \Sigma^*$, definida recursivamente de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{rcll} s^<(\varepsilon) & = & a_1 & \\ s^<(\alpha a_i) & = & \alpha a_{i+1} & \quad \textit{para } i < n \\ s^<(\alpha a_n) & = & s^<(\alpha) a_1 & \end{array}$$

tiene la siguiente propiedad:

$$s^<(\alpha) = \min\{\beta \in \Sigma^* : \alpha < \beta\}$$

Corollary 4. *$s^<$ es inyectiva.*

Lemma 5. *Se tiene que:*

1. *$s^<(\alpha) \neq \varepsilon$, para cada $\alpha \in \Sigma^*$.*
2. *Si $\alpha \neq \varepsilon$, entonces $\alpha = s^<(\beta)$ para algún β.*
3. *Si $S \subseteq \Sigma^* \neq \emptyset$, entonces $\exists \alpha \in S$ tal que $\alpha < \beta$, para cada $\beta \in S - \{\alpha\}$.*

Lemma 6. *Tenemos que:*

$$\Sigma^* = \{*^<(0), *^<(1), \dots\}$$

Mas aún la función $*^<$ es biyectiva.

Lemma 7. *Sea $n \geq 1$ fijo, entonces cada $x \geq 1$ se escribe en forma única de la siguiente manera:*

$$x = i_0 n^0 + \ldots + i_{k-1} n^{k-1} + i_k n^k$$

con $k \geq 0$ y $1 \leq i_0, \ldots, i_{k-1}, i_k \leq n$.

Lemma 8. *La función $\#^<$ es biyectiva.*

Lemma 9. *Las funciones $\#^<$ y $*^<$ son una inversa de la otra.*

Lemma 10. *Si $p, p_1, \ldots, p_n$ son números primos y p divide a $\prod_{i=1}^{n} p_i$, entonces $p = p_i$, para algún i.*

Theorem 11. *Para cada $x \in \mathbb{N}$, hay una única sucesión $(s_1, s_2, \dots) \in \omega^{[\mathbb{N}]}$ tal que:*

$$x = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$$

Notar que $\prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$ tiene sentido ya que es un producto que solo tiene una cantidad finita de factores no iguales a 1.

Lemma 12. *Las funciones:*

$$\begin{array}{cc} \mathbb{N} \to \omega^{[\mathbb{N}]} & \omega^{[\mathbb{N}]} \to \mathbb{N} \\ x \to ((x)_1, (x)_2, \dots) & (s_1, s_2, \dots) \to \langle s_1, s_2, \dots \rangle \end{array}$$

son biyecciones una inversa de la otra.

Lemma 13. *Recordemos, para cada $x \in \mathbb{N}$ se define:*

$$Lt(x) = \begin{cases} \max_i \ (x)_i \neq 0 & si\ x \neq 1 \\ 0 & si\ x = 1 \end{cases}$$

Luego, para cada $x \in \mathbb{N}$:

1. $Lt(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

2. $x = \prod_{i=1}^{Lt(x)} pr(i)^{(x)_i}$

Cabe destacar entonces que la función $\lambda ix[(x)_i]$ tiene dominio igual a $\mathbb{N}^2$ y la función $\lambda ix[Lt(x)]$ tiene dominio igual a $\mathbb{N}$.

2 Procedimientos efectivos

Lemma 14. *Sean $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ conjuntos Σ-efectivamente enumerables, entonces:*

a) $S_1 \cup S_2$ es Σ-efectivamente enumerable.

b) $S_1 \cap S_2$ es Σ-efectivamente enumerable.

Proof. El caso en el que alguno de los conjuntos es vacío es trivial. Supongamos que $S_1, S_2 \neq \emptyset$ y sean $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ procedimientos que enumeran a S_1 y S_2.

a) El siguiente procedimiento enumera al conjunto $S_1 \cup S_2$:

   Si x es par: realizar $\mathbb{P}_1$ partiendo de $x/2$ y dar el elemento de S_1 obtenido como salida.
   Si x es impar: realizar $\mathbb{P}_2$ partiendo de $(x-1)/2$ y dar el elemento de S_2 obtenido como salida.

b) Veamos ahora que $S_1 \cap S_2$ es Σ-efectivamente enumerable:

   Si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$: entonces no hay nada que probar.

   Si $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$: sea z_0 un elemento fijo de $S_1 \cap S_2$. Sea $\mathbb{P}$ un procedimiento efectivo el cual enumere a $\omega \times \omega$.

   El siguiente procedimiento enumera al conjunto $S_1 \cap S_2$:

   Etapa 1: Realizar $\mathbb{P}$ con dato de entrada x, para obtener un par $(x_1, x_2) \in \omega \times \omega$.

   Etapa 2: Realizar $\mathbb{P}_1$ con dato de entrada x_1 para obtener un elemento $z_1 \in S_1$.

   Etapa 3: Realizar $\mathbb{P}_2$ con dato de entrada x_2 para obtener un elemento $z_2 \in S_2$.

   Etapa 4: Si $z_1 = z_2$, entonces dar como dato de salida z_1. En caso contrario dar como dato de salida z_0.

□

Lemma 15. *Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ-efectivamente computable entonces S es Σ-efectivamente enumerable.*

Proof. El caso en el que S es vacío es trivial. Supongamos $S \neq \emptyset$. Sea $(\vec{z}, \vec{\gamma}) \in S$, fijo. Recordemos que $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ-efectivamente enumerable. Sean:

- $\mathbb{P}_1$ un procedimiento efectivo que enumere a $\omega^n \times \Sigma^{*m}$
- $\mathbb{P}_2$ un procedimiento efectivo que compute a χ_S.

El siguiente procedimiento enumera a S:

Etapa 1: Realizar $\mathbb{P}_1$ con x de entrada para obtener $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$.
Etapa 2: Realizar $\mathbb{P}_2$ con $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ de entrada para obtener el valor *Booleano* e de salida.
Etapa 3: **Si** $e = 1$**:** dar como dato de salida $(\vec{x}, \vec{\alpha})$.
Si $e = 0$**:** dar como dato de salida $(\vec{z}, \vec{\gamma})$. □

Theorem 16. *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Son equivalentes:*

a) S es Σ-efectivamente computable.

b) S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ-efectivamente enumerables.

Proof. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Si S es Σ-efectivamente computable, por el **Lemma 15** tenemos que S es Σ-efectivamente enumerable. Notese además que, dado que S es Σ-efectivamente computable, $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ también lo es, es decir, que aplicando nuevamente el **Lemma 15** tenemos que $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ es Σ-efectivamente enumerable.

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Sean:

- $\mathbb{P}_1$ un procedimiento efectivo que enumere a S.
- $\mathbb{P}_2$ un procedimiento efectivo que enumere a $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$.

El siguiente procedimiento computa el predicado χ_S:

Etapa 1: Darle a la variable T el valor 0.
Etapa 2: Realizar $\mathbb{P}_1$ con el valor de T como entrada para obtener de salida la upla $(\vec{y}, \vec{\beta})$.
Etapa 3: Realizar $\mathbb{P}_2$ con el valor de T como entrada para obtener de salida la upla $(\vec{z}, \vec{\gamma})$.
Etapa 4: **Si** $(\vec{y}, \vec{\beta}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$**:** entonces detenerse y dar como dato de salida el valor 1.
Si $(\vec{z}, \vec{\gamma}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$**:** entonces detenerse y dar como dato de salida el valor 0.
Si no sucede ninguna de las dos posibilidades: aumentar en 1 el valor de la variable T y dirijirse a la Etapa 2. □

Theorem 17. *Dado $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, son equivalentes:*

1. *S es Σ-efectivamente enumerable.*
2. *$S = \emptyset$ ó $S = I_F$, para alguna $F : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada F_i es Σ-efectivamente computable.*
3. *$S = I_F$, para alguna $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada F_i es Σ-efectivamente computable.*
4. *$S = D_f$, para alguna función f la cual es Σ-efectivamente computable.*

3 Funciones Σ-recursivas

Lemma 18. *Si f y g son Σ-efectivamente computables, entonces $R(f,g)$ lo es.*

Proof. Sean:

- $\mathbb{P}_1$ un procedimiento efectivo que compute a f.
- $\mathbb{P}_2$ un procedimiento efectivo que compute a g.

El siguiente procedimiento computa la función $R(f,g)$:

Etapa 1: Darle a la variable T el valor 0.
Etapa 2: Realizar $\mathbb{P}_1$ con los valores $(\vec{x},\vec{\alpha})$ como entrada para obtener de salida A.
Etapa 3: **Si** $T = t$**:** entonces detenerse y dar como dato de salida el valor de A.
Si $T \neq t$**:** aumentar en 1 el valor de la variable T.
Etapa 4: **Si** $Im(f), Im(g) \subseteq \omega$**:** Realizar $\mathbb{P}_2$ con los valores $(A,T,\vec{x},\vec{\alpha})$ y dirijirse a la Etapa 3.
Si $Im(f), Im(g) \subseteq \Sigma^*$**:** Realizar $\mathbb{P}_2$ con los valores $(T,\vec{x},\vec{\alpha},A)$ y dirijirse a la Etapa 3. □

Lemma 19. *Si f y cada $\mathcal{G}_a$ son Σ-efectivamente computables, entonces $R(f,\mathcal{G})$ lo es.*

Theorem 20. *Si $f \in \mathrm{PR}^\Sigma$, entonces f es Σ-efectivamente computable.*

Proof. Recordemos que $PR^\Sigma = \bigcup_{k\geq 0} PR^\Sigma_k$. Supongamos que $f \in PR^\Sigma_k$, probaremos este teorema por inducción en k.

<u>Caso Base:</u> $\boxed{k = 0}$
Luego $f \in PR^\Sigma_0$, es decir $f \in \{Suc, Pred, C^{0,0}_0, C^{0,0}_\varepsilon\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\} \cup \{p^{n,m}_j : 1 \leq j \geq n+m\}$. Por lo tanto, f es Σ-efectivamente computable.

<u>Caso Inductivo:</u> $\boxed{k > 0}$
Supongamos ahora que si $f \in \mathrm{PR}^\Sigma_k \Rightarrow f$ es Σ-efectivamente computable, veamos que $f \in \mathrm{PR}^\Sigma_{k+1} \Rightarrow f$ es Σ-efectivamente computable.
Dado que las funciones de PR^Σ_k son Σ-efectivamente computable por hipótesis inductiva, y que PR^Σ_{k+1} se contruye a partir de las mismas, a través de recursiones y/o composiciones, las cuales probamos son Σ-efectivamente computables en el **Lemma 18** y **Lemma 19**, entonces concluimos que f es Σ-efectivamente computable. □

Lemma 21. *1.* $\emptyset \in \mathrm{PR}^\emptyset$.

2. $\lambda xy\,[x+y] \in \mathrm{PR}^\emptyset$.

3. $\lambda xy\,[x.y] \in \mathrm{PR}^\emptyset$.

4. $\lambda x\,[x!] \in \mathrm{PR}^\emptyset$.

Proof. 1. Notese que $\emptyset = Pred \circ C^{0,0}_0 \in \mathrm{PR}^\emptyset_1$, entonces $\emptyset \in \mathrm{PR}^\emptyset$.

2. Notar que:

$$\begin{aligned}
\lambda xy\,[x+y]\,(0,x_1) &= x_1 = p^{1,0}_1(x_1) \\
\lambda xy\,[x+y]\,(t+1,x_1) &= \lambda xy\,[x+y]\,(t,x_1)+1 \\
&= (Suc \circ p^{3,0}_1)(\lambda xy\,[x+y]\,(t,x_1),t,x_1)
\end{aligned}$$

lo cual implica que $\lambda xy\,[x+y] = R(p^{1,0}_1, Suc \circ p^{3,0}_1) \in \mathrm{PR}^\emptyset_2$, entonces $\lambda xy\,[x+y] \in \mathrm{PR}^\emptyset$.

3. Primero note que:

$$\begin{array}{rcl} C_0^{1,0}(0) & = & C_0^{0,0}(\Diamond) \\ C_0^{1,0}(t+1) & = & C_0^{1,0}(t) \end{array}$$

lo cual implica que $C_0^{1,0} = R(C_0^{0,0}, p_1^{2,0}) \in \mathrm{PR}_1^{\emptyset}$.

También note que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda xy\,[x.y]\,(0,x_1) & = & x_1 = p_1^{1,0}(x_1) \\ \lambda xy\,[x.y]\,(t+1,x_1) & = & \lambda xy\,[x.y]\,(t,x_1) + x_1 \\ & = & \lambda xy\,[x+y] \circ (p_1^{3,0}, p_3^{3,0}) \end{array}$$

lo cual implica que $\lambda xy\,[x.y] = R(C_0^{1,0}, \lambda xy\,[x+y] \circ (p_1^{3,0}, p_3^{3,0}))$, lo cual por (1) implica que $\lambda xy\,[x.y] \in \mathrm{PR}_4^{\emptyset}$, entonces $\lambda xy\,[x.y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

4. Notar que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda x\,[x!]\,(0) & = & 1 = C_1^{0,0}(\Diamond) \\ \lambda x\,[x!]\,(t+1) & = & \lambda x\,[x!]\,(t).(t+1) \end{array}$$

lo cual implica que: $\lambda x\,[x!] = R(C_1^{0,0}, \lambda xy\,[x.y] \circ (p_1^{2,0}, Suc \circ p_2^{2,0}))$. Ya que $C_1^{0,0} = Suc \circ C_0^{0,0}$, tenemos que $C_1^{0,0} \in \mathrm{PR}_1^{\emptyset}$. Por (2), tenemos que $\lambda xy\,[x.y] \circ (p_1^{2,0}, Suc \circ p_2^{2,0}) \in \mathrm{PR}_4^{\emptyset}$, obteniendo que $\lambda x\,[x!] \in \mathrm{PR}_5^{\emptyset}$, entonces $\lambda x\,[x!] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

□

Lemma 22. *Supongamos* $\Sigma \neq \emptyset$.

a) $\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

b) $\lambda\alpha\,[|\alpha|] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

Proof. a) Ya que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\,(\alpha_1,\varepsilon) & = & \alpha_1 = p_1^{0,1}(\alpha_1) \\ \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\,(\alpha_1,\alpha a) & = & d_a(\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\,(\alpha_1,\alpha), \qquad \text{para a} \in \Sigma \end{array}$$

tenemos que $\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] = R(p_1^{0,1}, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G}_a = d_a \circ p_3^{0,3}$, para cada $a \in \Sigma$. Luego, $\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

b) Ya que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda\alpha\,[|\alpha|]\,(\varepsilon) & = & 0 = C_0^{0,0}(\Diamond) \\ \lambda\alpha\,[|\alpha|]\,(\alpha a) & = & \lambda\alpha\,[|\alpha|]\,(\alpha) + 1 \end{array}$$

tenemos que $\lambda\alpha\,[|\alpha|] = R(C_0^{0,0}, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G}_a = Suc \circ p_1^{1,1}$, para cada $a \in \Sigma$. Luego, $\lambda\alpha\,[|\alpha|] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

□

Lemma 23. *a)* $C_k^{n,m}, C_\alpha^{n,m} \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$, *para* $n,m,k \geq 0$, *y* $\alpha \in \Sigma^*$.

b) $C_k^{n,0} \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$, *para* $n,k \geq 0$.

Lemma 24. *1.* $\lambda xy\,[x^y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

2. $\lambda t\alpha\,[\alpha^t] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

Proof. a) Notar que:

$$\begin{aligned}
\lambda tx\left[x^t\right](0,x_1) &= 0 = C_0^{1,0}(x_1)\\
\lambda tx\left[x^t\right](t+1,x_1) &= \lambda tx\left[x^t\right](t,x_1).x_1\\
&= \lambda xy\,[x.y]\circ(p_1^{3,0},p_3^{3,0})
\end{aligned}$$

Osea que $\lambda xy\,[x^y] = \lambda tx\,[x^t]\circ(p_2^{2,0},p_1^{2,0}) \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

b) Notar que:

$$\begin{aligned}
\lambda t\alpha\left[\alpha^t\right](t,\varepsilon) &= \varepsilon = C_\varepsilon^{0,1}(t)\\
\lambda t\alpha\left[\alpha^t\right](t,\alpha a) &= \lambda t\alpha\left[\alpha^t\right](t,\alpha)\alpha\\
&= \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\circ\left(p_3^{1,2},p_2^{1,2}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda t\alpha\,[\alpha^t] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

□

Lemma 25. *Si $<$ es un orden total estricto sobre un alfabeto no vacío Σ, entonces:*

a) $s^< \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

b) $\#^< \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

c) $*^< \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

Proof. Supongamos $\Sigma = \{a_1,\ldots,a_k\}$ y $<$ dado por $a_1 < \ldots < a_k$.

a) Ya que:

$$\begin{aligned}
s^<(\varepsilon) &= a_1\\
s^<(\alpha a_i) &= \alpha a_{i+1}, \text{ para } i<k\\
s^<(\alpha a_k) &= s^<(\alpha)a_1
\end{aligned}$$

tenemos que $s^< = R(C_{a_1}^{0,0},\mathcal{G})$, donde $\mathcal{G} = \{\left(a_i, d_{a_{i+1}}\circ p_1^{0,2}\right), \left(a_k, d_{a_1}\circ p_2^{0,2}\right)\}$. Luego, $s^< \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

b) Ya que:

$$\begin{aligned}
*^<(0) &= \varepsilon\\
^<(t+1) &= s^<(^<(t))
\end{aligned}$$

tenemos que $*^< = R(C_\varepsilon^{0,0}, s^<\circ p_1^{2,0})$. Luego, $*^< \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

c) Ya que:

$$\begin{array}{rcl} \#^{<}(\varepsilon) & = & 0 \\ \#^{<}(\alpha a_i) & = & \#^{<}(\alpha).k + i \\ \text{para } i & = & 1, \ldots, k \end{array}$$

tenemos que $\#^{<} = R(C_0^{0,0}, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G}_{a_i} = \lambda xy\,[x+y] \circ (\lambda xy\,[x.y] \circ (p_1^{1,1}, C_k^{1,1}), C_i^{1,1})$, para $i = 1, \ldots, k$. Luego, $\#^{<} \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

□

Lemma 26. *a)* $\lambda xy\,[x \dot{-} y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

b) $\lambda xy\,[\max(x,y)] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

c) $\lambda xy\,[x = y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

d) $\lambda xy\,[x \leq y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

e) Si $\Sigma \neq \emptyset \Rightarrow \lambda \alpha\beta\,[\alpha = \beta] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

Proof. a) Primero notar que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda x\,[x \dot{-} 1]\,(0) & = & 0 = C_0^{0,0} \\ \lambda x\,[x \dot{-} 1]\,(t+1) & = & t \\ & = & p_2^{2,0} \end{array}$$

es decir $\lambda x\,[x \dot{-} 1] = R(C_0^{0,0}, p_2^{2,0}) \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

También notar que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda tx\,[x \dot{-} t]\,(0, x_1) & = & x_1 = p_1^{1,0}(x_1) \\ \lambda tx\,[x \dot{-} t]\,(t+1, x_1) & = & \lambda tx\,[x \dot{-} t]\,(t, x_1) \dot{-} 1 \\ & = & \lambda x\,[x \dot{-} 1] \circ p_1^{3,0} \end{array}$$

es decir, $\lambda tx\,[x \dot{-} t] = R(p_1^{1,0}, \lambda x\,[x \dot{-} 1] \circ p_1^{3,0}) \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$. Por lo tanto, $\lambda xy\,[x \dot{-} y] = \lambda tx\,[x \dot{-} t] \circ (p_2^{2,0}, p_1^{2,0}) \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

b) Notar que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda xy\,[\max(x,y)] & = & \lambda xy\,[(x + (y \dot{-} x)] \\ & = & \lambda xy\,[x+y] \circ \left(p_1^{2,0}, \lambda xy\,[x \dot{-} y] \circ (p_2^{2,0}, p_1^{2,0})\right) \end{array}$$

Por lo tanto, $\lambda xy\,[\max(x,y)] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

c) Note que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda xy\,[x = y] & = & \lambda xy\,[1 \dot{-} ((x \dot{-} y) + (y \dot{-} x))] \\ & = & \lambda xy\,[x \dot{-} y] \circ (C_1^{2,0}, \lambda xy\,[x+y] \circ (\lambda xy\,[x \dot{-} y] \circ p_1^{2,0}, p_2^{2,0}, \lambda xy\,[x \dot{-} y] \circ p_2^{2,0}, p_1^{2,0})) \end{array}$$

Por lo tanto, $\lambda xy\,[x = y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

d) Note que:

$$\begin{aligned}\lambda xy\,[x \leq y] &= \lambda xy\,[1\dot{-}(x\dot{-}y)]\\ &= \lambda xy\,[x\dot{-}y] \circ (C_1^{2,0}, \lambda xy\,[x\dot{-}y] \circ p_1^{2,0}, p_2^{2,0}))\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda xy\,[x \leq y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

e) Sea $<$ un orden total estricto sobre Σ. Ya que:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \#^{<}(\alpha) = \#^{<}(\beta)$$

tenemos que:

$$\lambda\alpha\beta\,[\alpha = \beta] = \lambda xy\,[x = y] \circ (\#^{<} \circ p_1^{0,2}, \#^{<} \circ p_2^{0,2})$$

Luego, utilizando el inciso (c) y el **Lemma 28** obtenemos que $\lambda\alpha\beta\,[\alpha = \beta] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

□

Lemma 27. *Si $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ son predicados Σ-PR, entonces $(P \vee Q), (P \wedge Q)$ y $\neg P$ lo son también.*

Proof. Notar que:

$$\begin{aligned}\neg P &= \lambda xy\,[x\dot{-}y] \circ (C_1^{n,m}, P)\\ (P \wedge Q) &= \lambda xt\,[x.y] \circ (P, Q)\\ (P \vee Q) &= \neg(\neg P \wedge \neg Q)\end{aligned}$$

□

Lemma 28. *Si $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son Σ-PR, entonces $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 - S_2$ lo son.*

Proof. Notar que:

$$\begin{aligned}\chi_{S_1 \cup S_2} &= (\chi_{S_1} \vee \chi_{S_2})\\ \chi_{S_1 \cap S_2} &= (\chi_{S_1} \wedge \chi_{S_2})\\ \chi_{S_1 - S_2} &= \lambda\,[x\dot{-}y] \circ (\chi_{S_1}, \chi_{S_2})\end{aligned}$$

□

Corollary 29. *Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es finito, entonces S es Σ-PR.*

Proof. Se probará el caso $n = m = 1$, es decir, $S \subseteq \omega \times \Sigma^*$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, utilizando el **Lemma 29** que:

$$S = \{(z, \gamma)\}$$

Notar que χ_S es el siguiente predicado:

$$\left(\chi_z \circ p_1^{1,1} \wedge \chi_\gamma \circ p_2^{1,1}\right)$$

Ya que los predicados:

$$\chi_z = \lambda xy\,[x = y] \circ \left(p_1^{1,0}, C_z^{1,0}\right)$$
$$\chi_\gamma = \lambda\alpha\beta\,[\alpha = \beta] \circ \left(p_1^{0,1}, C_\gamma^{0,1}\right)$$

son Σ-PR, el **Lema 28** implica que χ_S es Σ-PR, por lo tanto S es Σ-PR. $\square$

Lemma 30. *Supongamos $S_1, \ldots, S_n \subseteq \omega, L_1, \ldots, L_m \subseteq \Sigma^*$ son conjuntos no vacíos, entonces $S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m$ es Σ-PR $\Leftrightarrow S_1, \ldots, S_n, L_1, \ldots, L_m$ son Σ-PR.*

Proof. Se probará el caso $n = m = 1$, es decir, $S \subseteq \omega$, $L \subseteq \Sigma^*$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Veremos que L_1, S_1 es Σ-PR. Sea (z_1, γ_1) un elemento fijo de $S_1 \times L_1$. Notar que:

$$x \in S_1 \Leftrightarrow (x, \gamma_1) \in S_1 \times L_1$$
$$\alpha \in L_1 \Leftrightarrow (z_1, \alpha) \in S_1 \times L_1$$

lo cual implica que:

$$\chi_{S_1} = \chi_{S_1 \times L_1} \circ \left(p_1^{1,0}, C_{\gamma_1}^{0,1}\right)$$
$$\chi_{L_1} = \chi_{S_1 \times L_1} \circ \left(C_{z_1}^{0,1}, p_1^{0,1}\right)$$

por lo tanto, L_1, S_1 es Σ-PR.

$\boxed{\Leftarrow}$ Notar que:

$$\chi_{S_1 \times L_1} = \left(\chi_{S_1} \circ p_1^{1,1} \wedge \chi_{L_1} \circ p_2^{1,1}\right)$$

luego, por el **Lemma 28**, $S_1 \times L_1$ son Σ-PR. $\square$

Lemma 31. *Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-PR, donde $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$. Si $S \subseteq D_f$ es Σ-PR, entonces $f\,|_S$ es Σ-PR.*

Proof. $\boxed{O = \Sigma^*}$ Notar que:

$$f\,|_S = \lambda x\alpha\,[\alpha^x] \circ (Suc \circ Pred \circ \chi_S, f)$$

luego f es Σ-PR.
$\boxed{O = \omega}$ Notar que:

$$f\,|_S = \lambda xy\,[x^y] \circ (f, Suc \circ Pred \circ \chi_S)$$

luego f es Σ-PR.

Notar que $\boxed{Suc \circ Pred \circ \chi_S}$ funciona como un interruptor que evalua f, si el elemento pertenece a S, y que no evalua en caso contrario. $\square$

Lemma 32. *Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^* \to O$ es Σ-PR, entonces existe una función Σ-PR $\bar{f} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, tal que $f = \bar{f}\,|_{D_f}$.*

Proposition 33. *Un conjunto S es Σ-PR $\Leftrightarrow S$ es el dominio de una función Σ-PR.*

Proof. $\boxed{\Rightarrow}$ Notar que $S = D_{Pred \circ \chi_S}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Probaremos por inducción en k que D_F es Σ-PR para cada $F \in PR_k^\Sigma$.

<u>Caso Base:</u> $\boxed{k = 0}$ es decir, $F \in PR_0^\Sigma$. Luego:

$$\begin{array}{rcl} F & \in & \{Suc, Pred, C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\} \cup \\ & & \{p_j^{n,m} : 1 \leq j \geq n+m\} \\ D_F & \in & \{\omega, \mathbb{N}\} \end{array}$$

luego, S es Σ-PR.

<u>Caso Inductivo:</u> Supongamos el resultado vale para un k fijo y supongamos $F \in \mathrm{PR}_{k+1}^\Sigma$, veremos entonces que D_F es Σ-PR. Existen varios casos, analizaremos cada uno por separado.

1. $\boxed{F = R(f, g)}$

   - Recursión primitiva sobre variable numérica.

     (a) Caso 1:

     $$\begin{array}{rcl} f & : & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega \\ g & : & \omega \times \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega \\ F & = & \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega \end{array}$$

     (b) Caso 2:

     $$\begin{array}{rcl} f & : & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \Sigma^* \\ g & : & \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times \Sigma^* \to \Sigma^* \\ F & = & \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \Sigma^* \end{array}$$

   - Recursión primitiva sobre variable alfabética.

     (a) Caso 1:

     $$\begin{array}{rcl} f & : & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega \\ \mathcal{G}_a & : & \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times \Sigma^* \to \omega \\ F & = & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times \Sigma^* \to \omega \end{array}$$

     (b) Caso 2:

     $$\begin{array}{rcl} f & : & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \Sigma^* \\ \mathcal{G}_a & : & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^* \\ F & = & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times \Sigma^* \to \Sigma^* \end{array}$$

   con $S_1, \ldots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \ldots, L_m \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacíos y $f, g \in \mathrm{PR}_k^\Sigma$, para todos los casos anteriores.

   Por hipótesis inductiva tenemos que $D_f = S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m$ es Σ-PR, lo cual por el **Lemma 31** nos dice que los conjuntos $S_1, \ldots, S_n, L_1, \ldots, L_m$ son Σ-PR. Ya que ω es Σ-PR, el **Lemma 31** nos dice que D_F es Σ-PR.

2. $\boxed{F = g \circ (g_1, \ldots, g_{n+m})}$ donde:

$$\begin{array}{rcll} g & : & D_g \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O & \\ g_i & : & D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega & i = 1, \ldots, n \\ g_i & : & D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \Sigma^* & i = n+1, \ldots, n+m \end{array}$$

están en PR_k^Σ. Por **Lemma 33**, hay funciones Σ-PR $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_{n+m}$ las cuales son Σ-totales y cumplen:

$$\begin{array}{rcl} g_i & = & \bar{g}_i \mid_{D_{g_i}} \\ \text{para } i & = & 1, \ldots, n+m \end{array}$$

Por hipótesis inductiva, los conjuntos D_g, D_{g_i}, para $i = 1, \ldots, n+m$, son Σ-PR y por lo tanto:

$$S = \bigcap_{i=1}^{n+m} D_{g_i}$$

lo es. Notese además, que:

$$\chi_{D_F} = \Big((\chi_{D_g} \circ (\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_{n+m})) \wedge \chi_S \Big)$$

lo cual nos dice que D_F es Σ-PR.

□

Lemma 34. *Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O, i = 1, \ldots, k$, son funciones Σ-PR tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces $f_1 \cup \ldots \cup f_k$ es Σ-PR.*

Proof. Vamos a probar solo el caso en que $k = 2$ y $O = \omega$. Sean:

$$\begin{array}{ll} \bar{f}_1 : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^* & \text{tal que } \bar{f}_1 \mid_{D_{f_1}} = f_1 \\ \bar{f}_2 : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^* & \text{tal que } \bar{f}_2 \mid_{D_{f_2}} = f_2 \end{array}$$

funciones Σ-PR por **Lemma 33**). Luego, por el **Lemma 34** los conjuntos D_{f_1} y D_{f_2} son Σ-PR y por lo tanto lo es $D_{f_1} \cup D_{f_2}$. Ya que:

$$\begin{array}{rcl} f_1 \cup f_2 & = & \left(\bar{f}_1^{\,\chi_{D_{f_1}}} . \bar{f}_2^{\,\chi_{D_{f_2}}} \right) \mid_{D_{f_1} \cup D_{f_2}} \\ & = & \lambda xy\,[x.y] \circ \Big(\lambda xy\,[x^y] \circ (\bar{f}_1, \chi_{D_{f_1}}), \lambda xy\,[x^y] \circ (\bar{f}_2, \chi_{D_{f_2}}) \Big) \mid_{D_{f_1} \cup D_{f_2}} \end{array}$$

Por lo tanto, $f_1 \cup f_2$ es Σ-PR. □

Corollary 35. *Supongamos f es una función Σ-mixta cuyo dominio es finito, entonces f es Σ-PR.*

Lemma 36. $\lambda i \alpha\,[[\alpha]_i]$ *es Σ-PR.*

Lemma 37. *Sean $n, m \geq 0$.*

a) Si $f : \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega$ es Σ-PR, con $S_1, \ldots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \ldots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacíos, entonces lo son las funciones:

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$$
$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$$

b) Si $f : \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \Sigma^*$ es Σ-PR, con $S_1, \ldots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \ldots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacíos, entonces lo es la función:

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\subset_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$$

Proof. Se probará solamente el inciso (a). Sea $G = \lambda tx\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=t} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$. Ya que:

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=y} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] = G \circ \left(p_2^{n+2,m}, p_1^{n+2,m}, p_3^{n+2,m}, \ldots, p_{n+m+2}^{n+2,m}\right)$$

solo tenemos que probar que G es Σ-PR. Primero note que:

$$\begin{aligned}
G(0, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ f(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x = 0 \end{cases} \\
G(t+1, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x > t+1 \\ G(t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq t+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Sean:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \{(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m : x > 0\} \\
P_2 &= \{(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m : x = 0\} \\
Q_1 &= \left\{(z, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m : x > t+1\right\} \\
Q_2 &= \left\{(z, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m : x \leq t+1\right\}
\end{aligned}$$

Notar que P_1, P_2, Q_1, Q_2 son conjuntos Σ-PR, probaremos solo P_1. Debemos ver que χ_{P_1} es Σ-PR.

$$\begin{aligned}
f \text{ es } \Sigma - PR &\Rightarrow D_f = \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \text{ es } \Sigma - PR & \textbf{Proposition 34} \\
&\Rightarrow S_1, \ldots, S_n, L_1, \ldots, L_m \text{ son } \Sigma - PR & \textbf{Lemma 31}
\end{aligned}$$

$$\omega \text{ es } \Sigma - PR \Rightarrow R = \omega^3 \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \text{ es } \Sigma - PR$$

Notar que:

$$\chi_{P_1} = (\chi_R \wedge \lambda ztx\vec{x}\vec{\alpha}\,[x > t+1])$$

por cual χ_{P_1} es Σ-PR ya que es la conjunción de dos predicados Σ-PR.
Además notar que $G = R(g, h)$, donde:

$$\begin{array}{rcl} g & = & C_0^{n+1,m} \mid_{P_1} \cup \lambda x\vec{x}\vec{\alpha} \left[f(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \mid_{P_2} \\ h & = & C_0^{n+3,m} \mid_{Q_1} \cup \lambda ztx\vec{x}\vec{\alpha} \left[z + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \mid_{Q_2} \end{array}$$

Por lo tanto, el **Lemma 35** y el **Lemma 32** garantizan que G es Σ-PR. □

Lemma 38. *Sean $n, m \geq 0$.*

a) Sea $P : S \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega$ un predicado Σ-PR y supongamos $\bar{S} \subseteq S$ es Σ-PR, entonces:

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha} \left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} \; P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$
$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha} \left[(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x} \; P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

son predicados Σ-PR.

b) Sea $P : S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times L \to \omega$ un predicado Σ-PR y supongamos $\bar{L} \subseteq L$ es Σ-PR, entonces:

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha} \left[(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} \; P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) \right]$$
$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha} \left[(\exists \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} \; P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha) \right]$$

son predicados Σ-PR.

Proof. Se probará solamente el inciso (a). Sea:

$$\bar{P} = P \mid_{\bar{S} \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m} \cup \, C_1^{1+n,m} \mid_{(\omega - \bar{S}) \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m}$$

Notese que $\bar{P}$ es Σ-PR. Ya que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda x\vec{x}\vec{\alpha} \left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} \; P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] & = & \lambda x\vec{x}\vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{t=x} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \\ & = & \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha} \left[\prod_{t=x}^{t=y} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \circ \left(C_0^{1+n,m}, p_1^{1+n,m}, \ldots, p_{1+n+m}^{1+n,m} \right) \end{array}$$

el **Lemma 38** implica que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha} \left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} \; P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ es Σ-PR.
Finalmente note que:

$$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha} \left[(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x} \; P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] = \neg \lambda x\vec{x}\vec{\alpha} \left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} \; \neg P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

es Σ-PR. □

Lemma 39. *a) El predicado $\lambda xy \, [x \text{ divide } y]$ es $\emptyset$-PR.*

b) El predicado $\lambda x \, [x \text{ es primo}]$ es $\emptyset$-PR.

c) El predicado $\lambda\alpha\beta\,[\alpha \text{ inicial } \beta]$ *es* Σ*-PR.*

Proof. a) Si tomamos $P = \lambda t x_1 x_2\,[x_2 = t.x_1] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\lambda x_1 x_2\,[x_1 \text{ divide } x_2] &= \lambda x_1 x_2\,[(\exists t \in \omega)_{t \leq x_2}\; P(t, x_1, x_2)] \\ &= \lambda x x_1 x_2\,[(\exists t \in \omega)_{t \leq x}\; P(t, x_1, x_2)] \circ \left(p_2^{2,0}, p_1^{2,0}, p_2^{2,0}\right)\end{aligned}$$

por el **Lemma 39**, $\lambda xy\,[x \text{ divide } y]$ es $\emptyset$-PR.

b) Ya que:

$$x \text{ es primo sii } x > 1 \wedge ((\forall t \in \omega)_{t \leq x}\; t = 1 \vee t = x \vee \neg(t \text{ divide } x))$$

tomamos $P = \lambda t x\,[t = 1 \vee t = x \vee (t \text{ divide } x)]$. Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned}\lambda x\,[x \text{ es primo}] &= \lambda x\,[x > 1] \wedge \lambda x\,[(\forall t \in \omega)_{t \leq x}\; P(t, x)] \\ &= \lambda x\,[x > 1] \wedge \lambda x_1 x_2\,[(\forall t \in \omega)_{t \leq x_1}\; P(t, x_2)] \circ (p_1^{1,0}, p_1^{1,0})\end{aligned}$$

por lo tanto, $\lambda x\,[x \text{ es primo}]$ es $\emptyset$-PR.

c) Sea $P = \lambda\alpha\beta\gamma\,[\beta = \alpha\gamma]$, entonces:

$$\lambda\alpha\beta\,[\alpha \text{ inicial } \beta] = \lambda\alpha\beta\left[(\exists \gamma \in \Sigma^*)_{|\gamma| \leq |\beta|}\; P(\alpha, \beta, \gamma)\right]$$

luego, $\lambda\alpha\beta\,[\alpha \text{ inicial } \beta]$ es Σ-PR.

□

Lemma 40. *Si* $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ *es un predicado* Σ*-EC y* D_P *es* Σ*-EC, entonces la función* $M(P)$ *es* Σ*-EC.*

Proof. Sea $\mathbb{P}$ un procedimiento efectivo que compute al predicado P. El siguiente procedimiento computa $M(P)$:

Etapa 1: Darle a la variable T el valor 0.
Etapa 2: **Si** $T \in D_P$**:** entonces realizar $\mathbb{P}$ con el valor de T como entrada para obtener el valor *Booleano* e de salida.
Etapa 3: **Si** $T \notin D_P$**:** entonces aumentar en 1 el valor de T, y dirigirse a la Etapa 2.
Etapa 4: **Si** $e = 1$**:** dar como dato de salida T.
Si $e = 0$**:** aumentar en 1 el valor de T, y dirigirse a la Etapa 2. □

Theorem 41. *Si* $f \in \mathrm{R}^{\Sigma}$*, entonces* f *es* Σ*-efectivamente computable.*

Proof. Recordemos que $R^{\Sigma} = \bigcup\limits_{k \geq 0} R_k^{\Sigma}$. Supongamos que $f \in R_k^{\Sigma}$, probaremos este teorema por inducción en k.

Caso Base: $\boxed{k = 0}$
Luego $f \in R_0^{\Sigma} = PR_0^{\Sigma}$, es decir $f \in \{Suc, Pred, C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\} \cup \{p_j^{n,m} : 1 \leq j \geq n + m\}$. Por lo tanto, f es Σ-efectivamente computable.

Caso Inductivo: $\boxed{k > 0}$

Supongamos ahora que si $f \in \mathrm{R}_k^\Sigma \Rightarrow f$ es Σ-efectivamente computable, veamos que $f \in \mathrm{R}_{k+1}^\Sigma \Rightarrow$ f es Σ-efectivamente computable.

Dado que las funciones de R_k^Σ son Σ-efectivamente computable por hipótesis inductiva, y que R_{k+1}^Σ se contruye a partir de las mismas, a través de recursiones, composiciones y/o minimizaciones, las cuales probamos son Σ-efectivamente computables en el **Lemma 18**, **Lemma 19**, y **Lemma 41** respectivamente, entonces concluimos que f es Σ-efectivamente computable. $\square$

Lemma 42. *Sean $n, m \geq 0$. Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ un predicado Σ-PR, entonces:*

a) $M(P)$ es Σ-R.

b) Si hay una función Σ-PR $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ tal que:

$$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$$

entonces $M(P)$ es Σ-PR.

Proof. a) Sea $\bar{P} = P\mid_{D_P} \cup\, C_0^{n+1,m}\mid_{(\omega^{n+1}\times\Sigma^{*m})-D_P}$.

Veamos primero que $M(P) = M(\bar{P})$, es decir, que los dominios y las reglas de asignación son las mismas.

$$\begin{array}{rcl} D_{M_P} & = & \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists t \in \omega)\ P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\} \\ D_{M_{\bar{P}}} & = & \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists t \in \omega)\ \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\} \end{array}$$

notar que:

$$\boxed{\bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \Leftrightarrow P\mid_{D_P} = 1}\ (\star)$$

Luego, $D_{M(P)} = D_{M(\bar{P})}$ y $M(P) = M(\bar{P})$. Veamos ahora que $M(\bar{P})$ es Σ-R.

Sea k tal que $\bar{P} \in \mathrm{PR}_k^\Sigma$, ya que $\bar{P}$ es Σ-total y $\bar{P} \in \mathrm{PR}_k^\Sigma \subseteq \mathrm{R}_k^\Sigma$, tenemos que $M(\bar{P}) \in \mathrm{R}_{k+1}^\Sigma$ y por lo tanto $M(\bar{P}) \in \mathrm{R}^\Sigma$.

b) Primero veremos que $D_{M(\bar{P})}$ es un conjunto Σ-PR. Notese que:

$$\chi_{D_{M(\bar{P})}} = \lambda \vec{x}\vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq f(\vec{x},\vec{\alpha})}\ \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$$

lo cual nos dice que:

$$\chi_{D_{M(\bar{P})}} = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq x}\ \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] \circ (f, p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m})$$

pero el **Lemma 39** nos dice que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq x}\ \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ es Σ-PR por lo cual tenemos que $\chi_{D_{M(\bar{P})}}$ lo es.

Sea:

$$Q = \lambda t\vec{x}\vec{\alpha} \left[\bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \wedge (\forall j \in \omega)_{j \leq t}\ j = t \vee \neg\bar{P}(j, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$$

notar que Q es Σ-total, veamos que es Σ-PR. Sea:

$$R = \lambda jt\vec{x}\vec{\alpha}\left[j = t \ \vee \neg\bar{P}(j,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$$

luego, por el **Lemma 39**:

$$\lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall j \in \omega)_{j\leq t}\ R(j,t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$$

es Σ-PR y por lo tanto Q es Σ-PR. Además notese que para cada $(\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tenemos:

$$Q(t,\vec{x},\vec{\alpha}) = 1 \Leftrightarrow t = M(\bar{P})(\vec{x},\vec{\alpha})$$

Esto nos dice que

$$M(\bar{P}) = \left(\lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x},\vec{\alpha})} t^{P_1(t,\vec{x},\vec{\alpha})}\right]\right)|_{D_{M(\bar{P})}}$$

por lo cual para probar que $M(\bar{P})$ es Σ-PR solo nos resta probar que

$$F = \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x},\vec{\alpha})} t^{P_1(t,\vec{x},\vec{\alpha})}\right]$$

es Σ-PR. Pero

$$F = \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{y} t^{P_1(t,\vec{x},\vec{\alpha})}\right] \circ (C_0^{n,m}, f, p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m})$$

y por lo tanto el **Lemma 38** nos dice que F es Σ-PR. De esta manera hemos probado que $M(\bar{P})$ es Σ-PR y por lo tanto $M(P)$ lo es.

□

Lemma 43. *Las siguientes funciones son $\emptyset$-PR:*

a) $$\begin{array}{rcl} Q : \omega \times \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ (x,y) & \rightarrow & \text{cociente de la division de } x \text{ por } y \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcl} R : \omega \times \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ (x,y) & \rightarrow & \text{resto de la division de } x \text{ por } y \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcl} pr : \mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ n & \rightarrow & n\text{-esimo numero primo} \end{array}$$

Proof. a) Veamos primero veamos que $Q = M(P)$, donde $P = \lambda txy\left[(t+1).y > x\right]$. Notar que:

$$\begin{array}{rcl} D_{M(P)} & = & \{(x,y) : (\exists t \in \omega)\ P(t,x,y) = 1\} \\ & = & \{(x,y) : (\exists t \in \omega)\ (t+1).y > x\} \\ & = & \omega \times \mathbf{N} \\ & = & D_Q \end{array}$$

Luego, para cada $(x,y) \in \omega \times \mathbf{N}$, se tiene que:

$$Q(x,y) = M(P)(x,y) = \min_t \, (t+1).y > x$$

esto prueba que $Q = M(P)$. Ya que P es $\emptyset$-PR y además:

$$Q(x,y) \leq p_1^{2,0}(x,y), \text{para cada } (x,y) \in \omega \times \mathbb{N}$$

el inciso (b) del **Lemma 43** implica que $Q \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

b) Notese que:

$$\begin{array}{rcl} R & = & \lambda xy \, [x \dot{-} Q(x,y).y] \\ & = & \lambda xy \, [x \dot{-} y] \circ (p_1^{2,0}, \lambda xy \, [x.y] \circ (Q \circ (p_1^{2,0}, p_2^{2,0}), p_2^{2,0})) \end{array}$$

y por lo tanto $R \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

c) Para ver que pr es $\emptyset$-PR, veremos que la extensión $h : \omega \to \omega$, dada por $h(0) = 0$ y $h(n) = pr(n)$, $n \geq 1$, es $\emptyset$-PR. Primero notar que:

$$\begin{array}{rcl} h(0) & = & 0 \\ h(x+1) & = & \min_t \, (t \text{ es primo} \wedge t > h(x)) \end{array}$$

Osea que $h = R\left(C_0^{0,0}, M(P)\right)$, donde:

$$P = \lambda tzx \, [t \text{ es primo} \wedge t > z]$$

Es decir que solo nos resta ver que $M(P)$ es $\emptyset$-PR, veamos esto:

$$M(P) = \lambda x_1 x_2 \, [(\exists t \in \omega)_{t \leq x_1} P(t, X_2)] \circ (p_1^{1,0}, p_1^{1,0})$$

por lo tanto, por el **Lemma 39** $M(P)$ es $\emptyset$-PR.
Veamos que para cada $(z,x) \in \omega^2$, tenemos que:

$$M(P)(z,x) = \min_t \, (t \text{ es primo} \wedge t > z) \leq z! + 1$$

Sea p primo tal que p divide a $z!+1$, luego $p > z$. Esto nos dice que:

$$\min_t \, (t \text{ es primo} \wedge t > z) \leq p \leq z! + 1$$

Luego, $f = \lambda zx \, [z! + 1]$ y utilizando el **Lemma 43** tenemos que $M(P)$ es $\emptyset$-PR.

$\square$

Lemma 44. *Las funciones $\lambda xi \, [(x)_i]$ y $\lambda x \, [Lt(x)]$ son $\emptyset$-PR.*

Lemma 45. *Este lema no se evalua.*

Lemma 46. *Supongamos que $\Sigma \neq \emptyset$. Sea $<$ un orden total estricto sobre Σ. Sean $n, m \geq 0$ y sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \to \omega$ un predicado Σ-PR, entonces:*

a) $M^{<}(P)$ *es* Σ*-R.*

b) *Si existe una función* Σ*-PR* $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ *tal que:*

$$|M^{<}(P)(\vec{x},\vec{\alpha})| = |\min_{\alpha}^{<} P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)| \leq f(\vec{x},\vec{\alpha})$$

para cada $(\vec{x},\vec{\alpha}) \in D_{M^{<}(P)}$ *entonces* $M^{<}(P)$ *es* Σ*-PR.*

Lemma 47. *Este lema no se evalua.*

Lemma 48. *Este lema no se evalua.*

Lemma 49. *Este lema no se evalua.*

Theorem 50. *Sean* Σ *y* Γ *alfabetos cualesquiera.*

a) *Supongamos una función* f *es* Σ*-mixta y* Γ*-mixta, entonces* f *es* Σ*-R (respectivamente* Σ*-PR) sii* f *es* Γ*-R (respectivamente* Γ*-PR).*

b) *Supongamos un conjunto* S *es* Σ*-mixto y* Γ*-mixto, entonces* S *es* Σ*-PR sii* S *es* Γ*-PR.*

4 El lenguaje S^{Σ}

Theorem 51. *Sea* $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$*, entonces* S *es* Σ*-efectivamente enumerable* $\Leftrightarrow$ S *es* Σ*-recursivamente enumerable.*

Proof. $\boxed{\Rightarrow}$
Use la Tesis de Church.
$\boxed{\Leftarrow}$
Use el Theorem 42. □

Corollary 52. *Supongamos* $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ *es* Σ*-recursiva y* $S \subseteq D_f$ *es* Σ*-RE, entonces* $f\mid_S$ *es* Σ*-recursiva.*

Proof. Supongamos $O = \Sigma^*$. Por el **Teorema 71** $S = D_g$, para alguna función Σ-recursiva g. Nótese que componiendo adecuadamente podemos suponer que $I_g = \{\varepsilon\}$. O sea que tenemos $f\mid_S = \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ (f, g)$. □

Corollary 53. *Este corolario no se evalua.*

Corollary 54. *Supongamos* $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ *son conjuntos* Σ*-RE, entonces* $S_1 \cap S_2$ *es* Σ*-RE.*

Proof. Por el **Teorema 71** $S_i = D_{g_i}$, con g_1, g_2 funciones Σ-recursivas. Nótese que podemos suponer que $I_{g_1}, I_{g_2} \subseteq \Sigma^*$ por lo que $S_1 \cap S_2 = D_{\lambda\alpha\beta[\alpha\beta]\circ(g_1,g_2)}$ es Σ-r.e.. □

Corollary 55. *Supongamos* $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ *son conjuntos* Σ*-RE, entonces* $S_1 \cup S_2$ *es* Σ*-RE.*

Proof. Supongamos $S_1 \neq \emptyset \neq S_2$. Sean $F, G : \omega \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tales que $I_F = S_1$, $I_G = S_2$ y las funciones F_i´s y G_i´s son Σ-recursivas. Sean $f = \lambda x\,[Q(x,2)]$ y $g = \lambda x\,[Q(x \dot{-} 1, 2)]$. Sea $H : \omega \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ dada por

$$H_i = (F_i \circ f)|_{\{x : x \text{ es par}\}} \cup (G_i \circ g)|_{\{x : x \text{ es impar}\}}$$

Por el **Corollary 72** (restriccion de una funcion) y el **Lemma 68** (union de funciones), cada H_i es Σ-recursiva. Ya que $I_H = S_1 \cup S_2$. tenemos que $S_1 \cup S_2$ es Σ-r.e. □

Theorem 56. *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, entonces S es Σ-efectivamente computable $\Leftrightarrow$ S es Σ-recursivo.*

Proof. ($\Rightarrow$) Use la Tesis de Church.
($\Leftarrow$) Use el Teorema 42. □ □

Theorem 57. *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, son equivalentes:*

a) S es Σ-recursivo.

b) S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ -recursivamente enumerables.

Proof. (a)$\Rightarrow$(b). Note que $S = D_{Pred\ \circ\ \chi_S}$. Luego, por **Teorema 71** S es Σ-recursivamente enumerable. De igual manera podemos ver que $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S = D_{Pred\ \circ\ \chi_{(\omega^n \times \Sigma^{*m})-S}}$ es Σ-recursivamente enumerable. Donde $\chi_{(\omega^n \times \Sigma^{*m})-S} = \lambda xy\,[x \dot{-} y] \circ\ (C_1^{1,0}, \chi_S)$
(b)$\Rightarrow$(a). Note que $\chi_S = C_1^{n,m}|_S \cup C_0^{n,m}|_{\omega^n \times \Sigma^{*m} - S}$. □

Lemma 58. *Supongamos que $\Sigma_p \subseteq \Sigma$, entonces:*

$$A = \left\{\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma : Halt^\Sigma(\mathcal{P})\right\}$$

es Σ-RE y no es Σ-recursivo. Más aán el conjunto:

$$N = \left\{\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma : \neg Halt^\Sigma(\mathcal{P})\right\}$$

no es Σ-RE.

Proof. Sea $P = \lambda t\mathcal{P}\,[i^{0,1}(t, \mathcal{P}, \mathcal{P}) = n(\mathcal{P}) + 1]$. Note que P es Σ-PR. por lo que $M(P)$ es Σ-r.. Ademas note que $D_{M(P)} = A$, lo cual implica que A es Σ-r.e.. Ya que $Halt^\Sigma$ es no Σ-recursivo por **Lemma 69** y

$$Halt^\Sigma = C_1^{0,1} \mid_A \cup C_0^{0,1} \mid_N$$

el Lemma 68 nos dice que N no es Σ-r.e.. Finalmente supongamos A es Σ-recursivo. Entonces el conjunto

$$N = (\Sigma^* - A) \cap \text{Pro}^\Sigma$$

debería serlo, lo cual es absurdo. □

5 Máquinas de Turing

Lemma 59. *Este lemma no se evalua.*

Lemma 60. *El predicado $\lambda ndd'\,[d \vdash d']$ es $(\Gamma \cup Q)$-PR.*

Proof. Note que $D_{\lambda dd'[d\ \vdash d']} = Des \times Des$. También nótese que los predicados

$$\lambda q\sigma p\gamma\,[(q, \sigma, L) \in \delta(p, \gamma)]$$
$$\lambda q\sigma p\gamma\,[(q, \sigma, R) \in \delta(p, \gamma)]$$
$$\lambda q\sigma p\gamma\,[(q, \sigma, K) \in \delta(p, \gamma)]$$

son $(\Gamma{\cup}Q)$-PR. ya que los tres tienen dominio igual a $Q{\times}\Gamma{\times}Q{\times}\Gamma$ el cual es finito por **Corolario 36**. Sea $P_R : Des \times Des \times \Gamma \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Q \times Q \to \omega$ definido por $P_R(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q) = 1$ sii

$$d = \alpha p\beta \wedge (q, \sigma, R) \in \delta\,(p, [\beta B]_1) \wedge d' = \alpha\sigma q\frown\beta$$

Sea $P_L : Des \times Des \times \Gamma \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Q \times Q \to \omega$ definido por $P_L(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q) = 1$ sii

$$d = \alpha p\beta \wedge (q, \sigma, L) \in \delta\left(p, [\beta B]_1\right) \wedge \alpha \neq \varepsilon \wedge d' = \left\lfloor \alpha^\frown q\, [\alpha]_{|\alpha|}\, \sigma^\frown \beta \right\rfloor$$

Sea $P_K : Des \times Des \times \Gamma \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Q \times Q \to \omega$ definido por $P_K(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q) = 1$ sii

$$d = \alpha p\beta \wedge (q, \sigma, K) \in \delta\left(p, [\beta B]_1\right) \wedge d' = \lfloor \alpha q \sigma^\frown \beta \rfloor$$

Veamos que P_L es $(\Gamma \cup Q)$-PR. Notar que

$$P_L = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$$

donde P_1, P_2, P_3, P_4 son los siguientes predicados

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda dd'\sigma\alpha\beta pq\, [d = \alpha p\beta] \\ &= \lambda\alpha\beta\, [\alpha = \beta] \circ (p_1^{0,7}, \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3\, [\alpha_1\alpha_2\alpha_3] \circ (p_4^{0,7}, p_6^{0,7}, p_5^{0,7})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \lambda dd'\sigma\alpha\beta pq\, [(q, \sigma, L) \in \delta\left(p, [\beta B]_1\right)] \\ &= \lambda q\sigma p\gamma\, [(q, \sigma, L) \in \delta(p, \gamma)] \circ (p_7^{0,7}, p_3^{0,7}, p_6^{0,7}, \lambda i\alpha\, [[\alpha]_i] \circ (C_1^{0,7}, \lambda\alpha\beta\, [\alpha\beta] \circ (p_5^{0,7}, C_B^{0,7}))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= \lambda dd'\sigma\alpha\beta pq\, [\alpha \neq \varepsilon] \\ &= \neg\lambda\alpha\beta\, [\alpha = \beta] \circ (p_4^{0,7}, C_\varepsilon^{0,7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4 &= \lambda dd'\sigma\alpha\beta pq \left[d' = \left\lfloor \alpha^\frown q\, [\alpha]_{|\alpha|}\, \sigma^\frown \beta \right\rfloor\right] \\ &= \lambda\alpha\beta\, [\alpha = \beta] \circ (p_2^{0,7}, \lambda\alpha\, [\lfloor \alpha \rfloor] \circ f) \end{aligned}$$

donde

$$f = \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\, [\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5] \circ (\lambda\alpha\, [\alpha^\frown] \circ p_4^{0,7}, p_7^{0,7}, \lambda i\alpha\, [[\alpha]_i] \circ (\lambda\alpha\, [|\alpha|] \circ p_4^{0,7}, p_4^{0,7}), p_3^{0,7}, \lambda\alpha\, [{}^\frown\alpha] \circ p_5^{0,7})$$

Luego, es facil ver que P_1, P_2, P_3, P_4 son $(\Gamma \cup Q)$-PR, por lo tanto P_L es $(\Gamma \cup Q)$-PR. De manera similar, podemos ver que P_K y P_R son $(\Gamma \cup Q)$-PR.
Tomemos el siguiente predicado

$$P = (P_R \vee P_L \vee P_K)$$

Tenemos que P es $(\Gamma \cup Q)$-PR. Nótese que $\lambda dd'\, [d \vdash d']$ es igual al predicado

$$\lambda dd'\, [(\exists\sigma \in \Gamma)(\exists\alpha, \beta \in \Gamma^*)(\exists p, q \in Q)(P_R \vee P_L \vee P_K)(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q)]$$

lo cual aplicando 5 veces el **Lema 39** nos dice que $\lambda dd'\, [d \vdash d']$ es $(\Gamma \cup Q)$-PR. Veamos como El **Lema 39** nos dice que

$$L_1 = \lambda xdd'\sigma\alpha\beta p \left[(\exists q \in Q)_{|q| \leq x}\, P(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q)\right]$$

es $(\Gamma \cup Q)$-PR. Como $\beta, \alpha, \sigma, p, q$ son subpalabras de d y d' respectivamente tenemos que $|\beta|, |\alpha|, |\sigma|, |p|, |q| \leq |d| + |d'|$. Lo cual nos dice que el predicado Q_1 es $(\Gamma \cup Q)$-PR.

$$\begin{aligned} Q_1 &= \lambda dd'\sigma\alpha\beta p \left[(\exists q \in Q)_{|q| \leq |d| + |d'|}\, P(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q)\right] \\ &= L_1 \circ (\lambda xy\, [x + y] \circ (\lambda\alpha\, [|\alpha|] \circ (p_1^{0,6}), \lambda\alpha\, [|\alpha|] \circ (p_2^{0,6})), p_1^{0,6}, p_2^{0,6}, p_3^{0,6}, p_4^{0,6}, p_5^{0,6}, p_6^{0,6}) \end{aligned}$$

De misma manera podemos que el predicado Q_2 es $(\Gamma \cup Q)$-PR.

$$L_2 = \lambda x d d' \sigma\alpha\beta \left[(\exists p \in Q)_{|p|\leq x}\ Q_1(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p)\right]$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \lambda d d' \sigma\alpha\beta \left[(\exists p \in Q)_{|p|\leq |d|+|d'|}\ Q_1(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p)\right] \\ &= L_2 \circ (\lambda xy\,[x+y] \circ (\lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ (p_1^{0,5}), \lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ (p_2^{0,5})), p_1^{0,5}, p_2^{0,5}, p_3^{0,5}, p_4^{0,5}, p_5^{0,5}) \end{aligned}$$

finalmente, tenemos que Q_3, Q_4, Q_5 es $(\Gamma \cup Q)$-PR

$$L_3 = \lambda x d d' \sigma\alpha \left[(\exists \beta \in \Gamma^*)_{|\beta|\leq x}\ Q_2(d, d', \sigma, \alpha, \beta)\right]$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= \lambda d d' \sigma\alpha \left[(\exists \beta \in \Gamma^*)_{|\beta|\leq |d|+|d'|}\ Q_2(d, d', \sigma, \alpha, \beta)\right] \\ &= L_3 \circ (\lambda xy\,[x+y] \circ (\lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ (p_1^{0,4}), \lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ (p_2^{0,4})), p_1^{0,4}, p_2^{0,4}, p_3^{0,4}, p_4^{0,4}) \end{aligned}$$

$$L_4 = \lambda x d d' \sigma \left[(\exists \alpha \in \Gamma^*)_{|\alpha|\leq x}\ Q_3(d, d', \sigma, \alpha)\right]$$

$$\begin{aligned} Q_4 &= \lambda d d' \sigma \left[(\exists \alpha \in \Gamma^*)_{|\alpha|\leq |d|+|d'|}\ Q_3(d, d', \sigma, \alpha)\right] \\ &= L_4 \circ (\lambda xy\,[x+y] \circ (\lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ (p_1^{0,3}), \lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ (p_2^{0,3})), p_1^{0,3}, p_2^{0,3}, p_3^{0,3}) \end{aligned}$$

$$L_5 = \lambda x d d' \left[(\exists \sigma \in \Gamma)_{|\sigma|\leq x}\ Q_4(d, d', \sigma)\right]$$

$$\begin{aligned} Q_5 &= \lambda d d' \left[(\exists \sigma \in \Gamma)_{|\sigma|\leq |d|+|d'|}\ Q_4(d, d', \sigma)\right] \\ &= L_5 \circ (\lambda xy\,[x+y] \circ (\lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ (p_1^{0,2}), \lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ (p_2^{0,2})), p_1^{0,2}, p_2^{0,2},) \end{aligned}$$

Notar que $Q_5 = \lambda d d'\,[d \vdash d']$. Por lo tanto, $\lambda d d'\,[d \vdash d']$ es $(\Gamma \cup Q)$-PR. □

Proposition 61. $\lambda n d d' \left[d \overset{n}{\vdash} d'\right]$ *es* $(\Gamma \cup Q)$*-PR.*

Theorem 62. *Sea* $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ *una máquina de Turing, entonces* $L(M)$ *es* Σ*-recursivamente enumerable.*

Proof. Sea P el siguiente predicado $(\Gamma \cup Q)$-mixto

$$P = \lambda n\alpha \left[(\exists d \in Des)\ \lfloor q_0 B\alpha \rfloor \overset{n}{\vdash} d \wedge St(d) \in F\right]$$

Nótese que $D_P = \omega \times \Gamma^*$. Veamos que P es $(\Gamma \cup Q)$-PR. Para ello definamos

$$P = P_1 \wedge P_2$$

donde P_1 y P_2

$$P_1 = \lambda n\alpha\,[(\exists d \in Des)\ Q(n, \alpha, d)]$$

$$\begin{aligned} Q &= \lambda n\alpha d \left[\lfloor q_0 B\alpha \rfloor \overset{n}{\vdash} d\right] \\ &= \lambda n d d' \left[d \overset{n}{\vdash} d\right] \circ (\lambda\alpha\,[\lfloor\alpha\rfloor] \circ (\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ (C_{q_0B}^{1,2}, p_2^{1,2})), p_1^{1,2}) \end{aligned}$$

$$P_2 = \lambda n\alpha\,[St(d) \in F]$$

Sabemos que el conjunto F es finito, por **Corollary 30** (finito es PR) , F es $(\Gamma \cup Q)$-PR.
Tambien sabemos que χ_F es $(\Gamma \cup Q)$-PR, por lo tanto el predicado P_2 es $(\Gamma \cup Q)$-PR.
Por **Lema 39** sabemos que

$$L = \lambda xn\alpha \left[(\exists d \in Des)_{|d| \leq x} \, Q(n, \alpha, d) \right]$$

es $(\Gamma \cup Q)$-PR. Es decir que solo nos falta acotar el cuantificador existencial, para poder aplicar el **Lema 39** de cuantificacion acotada. Ya que cuando $d_1, ..., d_{n+1} \in Des$ son tales que $d_1 \vdash d_2 \vdash ... \vdash d_{n+1}$ tenemos que

$$|d_i| \leq |d_1| + n, \text{ para } i = 1, ..., n$$

una posible cota para dicho cuantificador es

$$|d| \leq |\lfloor q_0 B \alpha \rfloor| + n$$

O sea que, por el **Lema 39** de cuantificacion acotada, tenemos que el predicado P_1 es $(\Gamma \cup Q)$-PR. En definitiva P es $(\Gamma \cup Q)$-PR. Sea

$$P' = P \mid_{\omega \times \Sigma^*} .$$

Nótese que $P'(n, \alpha) = 1$ sii $\alpha \in L(M)$ atestiguado por una computación de longitud n.
Por **Corollary 72** (restriccion de una funcion) P' es $(\Gamma \cup Q)$-PR, y ademas es Σ-mixto.
El **Teorema 51** (independencia del alfabeto) nos dice que P' es Σ-PR.
Ya que $L(M) = D_{M(P')}$, el **Teorema 71** nos dice que $L(M)$ es Σ-r.e. □

Theorem 63. *Supongamos $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-Turing computable, entonces f es Σ-recursiva.*

Proof. Supongamos $O = \Sigma^*$ y sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, \shortmid, F)$ una máquina de Turing determinística con unit la cual compute a f. Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Gamma \cup Q$. Sea $P : \mathbf{N} \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ dado por $P(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$ sii

$$\begin{aligned} (\exists q \in Q) \ \lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} ... B \shortmid^{x_n} B\alpha_1 ... B\alpha_m \rfloor \overset{(x)_1}{\vdash} \lfloor qB *^{<} ((x)_2) \rfloor \wedge \\ (\forall d \in Des)_{|d| \leq |*^{<}((x)_2)|+2} \ \lfloor qB *^{<} ((x)_2) \rfloor \nvdash d \end{aligned}$$

Es fácil ver que P es $(\Gamma \cup Q)$-PR. Tomemos predicados P_1 y P_2 tales que

$$P = P_1 \wedge P_2$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda x\vec{x}\vec{\alpha} \left[(\exists q \in Q) \ \lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} ... B \shortmid^{x_n} B\alpha_1 ... B\alpha_m \rfloor \overset{(x)_1}{\vdash} \lfloor qB *^{<} ((x)_2) \rfloor \right] \\ P_2 &= \lambda x\vec{x}\vec{\alpha} \left[(\forall d \in Des)_{|d| \leq |*^{<}((x)_2)|+2} \ \lfloor qB *^{<} ((x)_2) \rfloor \nvdash d \right] \end{aligned}$$

Si tomamos Q_1 y Q_2 como

$$\begin{aligned} Q_1 &= \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}q \left[\lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} ... B \shortmid^{x_n} B\alpha_1 ... B\alpha_m \rfloor \overset{(x)_1}{\vdash} \lfloor qB *^{<} ((x)_2) \rfloor \right] \\ Q_2 &= \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}d \left[\lfloor qB *^{<} ((x)_2) \rfloor \nvdash d \right] \end{aligned}$$

Tenemos que

$$P_1 = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\,[(\exists q \in Q)\ Q_1(x, \vec{x}, \vec{\alpha}, q)]$$
$$P_2 = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall d \in Des)_{|d| \leq |*^{<}((x)_2)|+2}\ Q_2(x, \vec{x}, \vec{\alpha}, d)\right]$$

Es facil ver que Q_1 y Q_2 son $(\Gamma \cup Q)$-PR.
Aplicando el **Lema 39** de cuantificacion acotada tenemos que P_1 y P_2 son $(\Gamma \cup Q)$-PR.
Finalmente, P es $(\Gamma \cup Q)$-PR.
Ya que es Σ-mixto, el **Teorema 51** (independencia del alfabeto) nos dice que es Σ-PR. Nótese que

$$f = \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[\left(\min_x P(x, \vec{x}, \vec{\alpha})\right)_2\right],$$

lo cual nos dice que f es Σ-recursiva. □

Lemma 64. *Sea* $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$ *y sea* k *tal que las variables que ocurren en* $\mathcal{P}$ *están todas en la lista* $\mathrm{N}1, \ldots, \mathrm{N}\bar{k}, \mathrm{P}1, \ldots, \mathrm{P}\bar{k}$. *Para cada* $a \in \Sigma \cup \{\shortmid\}$, *sean:*

- $\tilde{a}$ *un nuevo símbolo*
- $\Gamma = \Sigma \cup \{B, \shortmid\} \cup \{\tilde{a} : a \in \Sigma \cup \{\shortmid\}\}$

entonces hay una máquina de Turing determinística con unit $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \shortmid, \{q_f\})$ *la cual satisface:*

1. $\delta(q_f, \sigma) = \emptyset$, *para cada* $\sigma \in \Gamma$.
2. *Cualesquiera sean* $x_1, \ldots, x_k \in \omega$ *y* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Sigma^*$, *el programa* $\mathcal{P}$ *se detiene partiendo del estado:*

$$((x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots), (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \varepsilon, \ldots))$$

sii M *se detiene partiendo de la descripción instantánea:*

$$\lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} B \ldots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k B\rfloor$$

3. *Si* $x_1, \ldots, x_k \in \omega$ *y* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Sigma^*$ *son tales que* $\mathcal{P}$ *se detiene partiendo del estado:*

$$((x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots), (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \varepsilon, \ldots))$$

y llega al estado

$$((y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots), (\beta_1, \ldots, \beta_k, \varepsilon, \ldots))$$

entonces

$$\lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} B \ldots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k B\rfloor \overset{*}{\vdash} \lfloor q_f B \shortmid^{y_1} B \ldots B \shortmid^{y_k} B\beta_1 B \ldots B\beta_k B\rfloor$$

Proof. Dado un estado $((x_1,...,x_k,0,...),(\alpha_1,...,\alpha_k,\varepsilon,...))$ lo representaremos en la cinta de la siguiente manera

$$B\,|^{x_1}...B\,|^{x_k}\,B\alpha_1...B\alpha_k BBBB....$$

A continuación describiremos una serie de maquinas las cuales simularan, vía la representación anterior, las distintas clases de instrucciones que pueden ocurrir en $\mathcal{P}$. Todas las maquinas definidas tendrán a $|$ como unit y a B como blanco, tendrán a Σ como su alfabeto terminal y su alfabeto mayor sera $\Gamma = \Sigma \cup \{B,|\} \cup \{\tilde{a} : a \in \Sigma \cup \{|\}\}$. Ademas tendrán uno o dos estados finales con la propiedad de que si q es un estado final, entonces $\delta(q,\sigma) = \emptyset$, para cada $\sigma \in \Gamma$. Esta propiedad es importante ya que nos permitirá concatenar pares de dichas maquinas identificando algún estado final de la primera con el inicial de la segunda.

Para $1 \leq i \leq k$, sea M_i^+ una máquina tal que

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}...B\,|^{x_k}\,B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}...B\,|^{x_{i-1}}\,B\,|^{x_i+1}\,B\,|^{x_{i+1}}...B\,|^{x_k}\,B\alpha_1...B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Es claro que la máquina M_i^+ simula la instrucción $\mathrm{N}\bar{\imath} \leftarrow \mathrm{N}\bar{\imath} + 1$.

Para $1 \leq i \leq k$, sea M_i^- una máquina tal que

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}...B\,|^{x_k}\,B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}...B\,|^{x_{i-1}}\,B\,|^{x_i \dot{-} 1}\,B\,|^{x_{i+1}}...B\,|^{x_k}\,B\alpha_1...B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$ y $a \in \Sigma$, sea M_i^a una máquina tal que

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}...B\,|^{x_k}\,B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}...B\,|^{x_k}\,B\alpha_1...B\alpha_{i-1}B\alpha_i a B\alpha_{i+1}...B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_i^{\frown}$ una máquina tal que

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}...B\,|^{x_k}\,B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}...B\,|^{x_k}\,B\alpha_1...B\alpha_{i-1}B^{\frown}\alpha_i B\alpha_{i+1}...B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $j = 1,...,k$, y $a \in \Sigma$, sea IF_j^a una máquina con dos estados finales q_{si} y q_{no} tal que si α_j comienza con a , entonces

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}...B\,|^{x_k}\,B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}...B\,|^{x_k}\,B\alpha_1...B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{si} \end{array}$$

y en caso contrario

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}...B\,|^{x_k}\,B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}...B\,|^{x_k}\,B\alpha_1...B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no} \end{array}$$

Análogamente para $j = 1,...,k$, sea IF_j una máquina tal que si $x_j \neq 0$, entonces

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}...B\,|^{x_k}\,B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}...B\,|^{x_k}\,B\alpha_1...B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{si} \end{array}$$

y si $x_j = 0$, entonces

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1\ldots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1\ldots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no} \end{array}$$

Para $1 \leq i, j \leq k$, sea $M^{*}_{i\leftarrow j}$ una máquina tal que

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1\ldots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1\ldots B\alpha_{i-1}B\alpha_j B\alpha_{i+1}\ldots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i, j \leq k$, sea $M^{\#}_{i\leftarrow j}$ una máquina tal que

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1\ldots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}\ldots B\,|^{x_{i-1}}\,B\,|^{x_j}\,B\,|^{x_{i+1}}\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1\ldots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_{i\leftarrow 0}$ una máquina tal que

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1\ldots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}\ldots B\,|^{x_{i-1}}\,BB\,|^{x_{i+1}}\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1\ldots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_{i\leftarrow\varepsilon}$ una máquina tal que

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1\ldots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1\ldots B\alpha_{i-1}BB\alpha_{i+1}\ldots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Sea
$M_{\text{SKIP}} = (\{q_0, q_f\}, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, |, \{q_f\})$,
con $\delta(q_0, B) = \{(q_f, B, K)\}$ y $\delta = \emptyset$ en cualquier otro caso.

Finalmente sea

$$M_{\text{GOTO}} = (\{q_0, q_{si}, q_{no}\}, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, |, \{q_{si}, q_{no}\}),$$

con $\delta(q_0, B) = \{(q_{si}, B, K)\}$ y $\delta = \emptyset$ en cualquier otro caso.

Para poder hacer concretamente las maquinas recién descriptas deberemos diseñar antes algunas máquinas auxiliares. Para cada $j \geq 1$, sea D_j la máquina descripta en la Figura 1. Notese que

$$\begin{array}{lcl} \alpha B\beta_1 B\beta_2 B\ldots B\beta_j B\gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha B\beta_1 B\beta_2 B\ldots B\beta_j B\gamma \\ \ \uparrow & & \qquad\qquad\qquad\quad\ \uparrow \\ \ q_0 & & \qquad\qquad\qquad\quad\ q_f \end{array}$$

siempre que $\alpha, \gamma \in \Gamma^*$, $\beta_1, \ldots, \beta_j \in (\Gamma - \{B\})^*$. Analogamente tenemos definidas las maquinas I_j.

Para $j \geq 1$, sea TD_j una máquina con un solo estado final q_f y tal que

$$
\begin{array}{ccc}
\alpha B\gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha BB\gamma \\
\uparrow & & \uparrow \\
q_0 & & q_f
\end{array}
$$

cada vez que $\alpha, \gamma \in \Gamma^*$ y γ tiene exactamente j ocurrencias de B. Es decir la máquina TD_j corre un espacio a la derecha todo el bloque γ y agrega un blanco en el espacio que se genera a la izquierda de dicho bloque. Por ejemplo, para el caso de $\Sigma = \{\&\}$ podemos tomar TD_3 igual a la máquina de la Figura 3.

Análogamente, para $j \geq 1$, sea TI_j una máquina tal que

$$
\begin{array}{ccc}
\alpha B\sigma\gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha B\gamma \\
\uparrow & & \uparrow \\
q_0 & & q_f
\end{array}
$$

cada vez que $\alpha \in \Gamma^*$, $\sigma \in \Gamma$ y γ tiene exactamente j ocurrencias de B. Es decir la máquina TI_j corre un espacio a la izquierda todo el bloque γ (por lo cual en el lugar de σ queda el primer símbolo de γ). Teniendo las maquinas auxiliares antes definidas podemos combinarlas para obtener las maquinas simuladoras de instrucciones. Por ejemplo M_i^a puede ser la máquina descripta en la Figura 4. En la Figura 2 tenemos una posible forma de diseñar la máquina IF_i^a. En la Figura 7 tenemos una posible forma de diseñar la máquina $M_{i\leftarrow j}^*$ para el caso $\Sigma = \{a, b\}$ y $i < j$.

Supongamos ahora que $\mathcal{P} = I_1 ... I_n$. Para cada $i = 1, ..., n$, definiremos una máquina M_i que simulara la instrucción I_i. Luego uniremos adecuadamente estas maquinas para formar la máquina que simulara a $\mathcal{P}$

- Si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{j} + 1$ tomaremos $M_i = M_j^+$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{j} \dot{-} 1$ tomaremos $M_i = M_j^{\dot{-}}$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow 0$ tomaremos $M_i = M_{j\leftarrow 0}$.
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{m}$ tomaremos $M_i = M_{j\leftarrow m}^{\#}$.
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{IF}\ \mathrm{N}\bar{j} \neq 0\ \mathrm{GOTO}\ \mathrm{L}\bar{m}$ tomaremos $M_i = IF_j$.
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \mathrm{P}\bar{j}.a$ tomaremos $M_i = M_j^a$.
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow {}^\frown\mathrm{P}\bar{j}$ tomaremos $M_i = M_j^\frown$.
- $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \varepsilon$ tomaremos $M_i = M_{j\leftarrow\varepsilon}$.
- $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \mathrm{P}\bar{m}$ tomaremos $M_i = M_{j\leftarrow m}^*$.
- $Bas(I_i) = \mathrm{IF}\ \mathrm{P}\bar{j}\ \mathrm{BEGINS}\ a\ \mathrm{GOTO}\ \mathrm{L}\bar{m}$ tomaremos $M_i = IF_j^a$.
- $Bas(I_i) = \mathrm{SKIP}$ tomaremos $M_i = M_{\mathrm{SKIP}}$.
- $Bas(I_i) = \mathrm{GOTO}\ \mathrm{L}\bar{m}$ tomaremos $M_i = M_{\mathrm{GOTO}}$.

Ya que la máquina M_i puede tener uno o dos estados finales, la representaremos como se muestra en la Figura 5, entendiendo que en el caso en que M_i tiene un solo estado final, este esta representado por el circulo de abajo a la izquierda y en el caso en que M_i tiene dos estados finales, el estado final representado con lineas punteadas corresponde al estado q_{si} y el otro al estado q_{no}.

Para armar la máquina que simulara a $\mathcal{P}$ hacemos lo siguiente. Primero unimos las maquinas $M_1, ..., M_n$ como lo muestra la Figura 6. Luego para cada i tal que $Bas(I_i)$ es de la forma αGOTO L$\bar{m}$, ligamos con una flecha de la forma

$$\xrightarrow{B,B,K}$$

el estado final q_{si} de la M_i con el estado inicial de la M_h, donde h es tal que I_h es la primer instrucción que tiene label L$\bar{m}$. Es intuitivamente claro que la máquina así obtenida cumple con lo requerido aunque una Proof formal de esto puede resultar extremadamente tediosa. □

Theorem 65. *Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-recursiva, entonces f es Σ-Turing computable.*

Proof. Supongamos $O = \Sigma^*$. Ya que f es Σ-computable, existe $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$ el cual computa f. Note que podemos suponer que $\mathcal{P}$ tiene la propiedad de que cuando $\mathcal{P}$ termina, en el estado alcanzado las variables numéricas tienen todas el valor 0 y las alfabéticas distintas de P1 todas el valor ε. Sea M la máquina de Turing con unit dada por el lema anterior, donde elegimos el numero k con la propiedad adicional de ser mayor que n y m. Sea M_1 una máquina tal que para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$,

$$\lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} B...B \shortmid^{x_n} B\alpha_1 B...B\alpha_n B \rfloor \overset{*}{\vdash} \left\lfloor qB \shortmid^{x_1} B...B \shortmid^{x_n} B^{k-n} B\alpha_1 B...B\alpha_m B \right\rfloor$$

donde q_0 es el estado inicial de M_1 y q es un estado tal que $\delta(q, \sigma) = \emptyset$, para cada σ. Sea M_2 una máquina tal que para cada $\alpha \in \Sigma^*$,

$$\left\lfloor q_0 B^{k+1} \alpha \right\rfloor \overset{*}{\vdash} \lfloor qB\alpha \rfloor$$

donde q_0 es el estado inicial de M_2 y q es un estado tal que $\delta(q, \sigma) = \emptyset$, para cada σ. Note que la concatenación de M_1, M y M_2 (en ese orden) produce una máquina de Turing la cual computa f. □

Theorem 66. *Este teorema no se evalua.*

References

[1] Diego Vaggione, «Apunte de Clase, 2017», *FaMAF, UNC.*

[2] Agustín Curto, «Carpeta de Clase, 2017», *FaMAF, UNC.*

Por favor, mejorá este documento en github
https://github.com/acurto714/resumenLengForm