

Resumen de teoremas para el final de Lenguajes Formales y Computabilidad

Agustín Curto, agucurto95@gmail.com
Francisco Nievas, frannievas@gmail.com

2017

Contents

1	Notación y conceptos básicos	2
2	Procedimientos efectivos	4
3	Funciones Σ -recursivas	5
4	El lenguaje S^Σ	17
5	Máquinas de Turing	26

0.1 Notación y conceptos básicos

Lemma 1. Sea $S \subseteq \omega \times \Sigma^*$, entonces S es rectangular si y solo si se cumple la siguiente propiedad:

$$Si (x, \alpha), (y, \beta) \in S \Rightarrow (x, \beta) \in S$$

Lemma 2. La relación $<$ es un orden total estricto sobre Σ^* .

Lemma 3. La función $s^< : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, definida recursivamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} s^<(\varepsilon) &= a_1 \\ s^<(\alpha a_i) &= \alpha a_{i+1}, \quad i < n \\ s^<(\alpha a_n) &= s^<(\alpha) a_1 \end{aligned}$$

tiene la siguiente propiedad:

$$s^<(\alpha) = \min\{\beta \in \Sigma^* : \alpha < \beta\}$$

Corollary 4. $s^<$ es inyectiva.

Lemma 5. Se tiene que:

1. $\varepsilon \neq s^<(\alpha)$, para cada $\alpha \in \Sigma^*$.
2. Si $\alpha \neq \varepsilon$, entonces $\alpha = s^<(\beta)$ para algún β .
3. Si $S \subseteq \Sigma^* \neq \emptyset \Rightarrow \exists \alpha \in S$ tal que $\alpha < \beta$, para cada $\beta \in S - \{\alpha\}$.

Lemma 6. Tenemos que:

$$\Sigma^* = \{ *^<(0), *^<(1), \dots \}$$

Mas aún la función $*^<$ es biyectiva.

Lemma 7. Sea $n \geq 1$ fijo, entonces cada $x \geq 1$ se escribe en forma única de la siguiente manera:

$$x = i_k n^k + i_{k-1} n^{k-1} + \dots + i_0 n^0$$

con $k \geq 0$ y $1 \leq i_k, i_{k-1}, \dots, i_0 \leq n$.

Lemma 8. La función $\#^<$ es biyectiva.

Lemma 9. Las funciones $\#^<$ y $*^<$ son una inversa de la otra.

Lemma 10. Si p, p_1, \dots, p_n son números primos y p divide a $p_1 \dots p_n$, entonces $p = p_i$, para algún i .

Theorem 11. Para cada $x \in \mathbf{N}$, hay una única sucesión $(s_1, s_2, \dots) \in \omega^{[\mathbf{N}]}$ tal que:

$$x = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$$

Notese que $\prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$ tiene sentido ya que es un producto que solo tiene una cantidad finita de factores no iguales a 1.

Lemma 12. *Las funciones:*

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &\rightarrow \omega^{[\mathbf{N}]} \\ x &\rightarrow ((x)_1, (x)_2, \dots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega^{[\mathbf{N}]} &\rightarrow \mathbf{N} \\ (s_1, s_2, \dots) &\rightarrow \langle s_1, s_2, \dots \rangle\end{aligned}$$

son biyecciones una inversa de la otra.

Lemma 13. *Para cada $x \in \mathbf{N}$:*

$$1. \quad Lt(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$2. \quad x = \prod_{i=1}^{Lt(x)} pr(i)^{(x)_i}$$

Cabe destacar entonces que la función $\lambda ix[(x)_i]$ tiene dominio igual a \mathbf{N}^2 y la función $\lambda ix[Lt(x)]$ tiene dominio igual a \mathbf{N} .

0.2 Procedimientos efectivos

Lemma 14. Sean $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^*$ conjuntos Σ -efectivamente enumerables, entonces $S_1 \cup S_2$ y $S_1 \cap S_2$ son Σ -efectivamente enumerables.

Lemma 15. Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^*$ es Σ -efectivamente computable entonces S es Σ -efectivamente enumerable.

Theorem 16. Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^*$. Son equivalentes:

- a) S es Σ -efectivamente computable.
- b) S y $(\omega^n \times \Sigma^*) - S$ son Σ -efectivamente enumerables.

Theorem 17. Dado $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^*$, son equivalentes:

1. S es Σ -efectivamente enumerable.
2. $S = \emptyset$ ó $S = I_F$, para alguna $F : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^*$ tal que cada F_i es Σ -efectivamente computable.
3. $S = I_F$, para alguna $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \omega^n \times \Sigma^*$ tal que cada F_i es Σ -efectivamente computable.
4. $S = D_f$, para alguna función f la cual es Σ -efectivamente computable.

0.3 Funciones Σ -recursivas

Lemma 18. Si f, f_1, \dots, f_{n+m} son Σ -efectivamente computables, entonces $f \circ (f_1, \dots, f_{n+m})$ lo es.

Proof. Sean $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_{n+m}$ procedimientos efectivos los cuales computen las funciones f, f_1, \dots, f_{n+m} , respectivamente. Usando estos procedimientos es fácil definir un procedimiento efectivo el cual compute a $f \circ (f_1, \dots, f_{n+m})$. \square

Lemma 19. Si f y g son Σ -efectivamente computables, entonces $R(f, g)$ lo es.

Proof. HACER!!!!!! \square

Lemma 20. Si f y cada \mathcal{G}_a son Σ -efectivamente computables, entonces $R(f, \mathcal{G})$ lo es.

Theorem 21. Si $f \in \text{PR}^\Sigma$, entonces f es Σ -efectivamente computable.

Proof. Dejamos al lector la prueba por inducción en k de que si $f \in \text{PR}_k^\Sigma$, entonces f es Σ -efectivamente computable, la cual sale en forma directa usando los lemas anteriores que garantizan que los constructores de composición y recursión primitiva preservan la computabilidad efectiva. \square

Lemma 22. 1. $\emptyset \in \text{PR}^\emptyset$.

2. $\lambda xy [x + y] \in \text{PR}^\emptyset$.

3. $\lambda xy [x.y] \in \text{PR}^\emptyset$.

4. $\lambda x [x!] \in \text{PR}^\emptyset$.

Proof. 1. Notese que $\emptyset = \text{Pred} \circ C_0^{0,0} \in \text{PR}_1^\emptyset$

2. Notar que:

$$\begin{aligned} \lambda xy [x + y] (0, x_1) &= x_1 = p_1^{1,0}(x_1) \\ \lambda xy [x + y] (t + 1, x_1) &= \lambda xy [x + y] (t, x_1) + 1 \\ &= (\text{Suc} \circ p_1^{3,0})(\lambda xy [x + y] (t, x_1), t, x_1) \end{aligned}$$

lo cual implica que $\lambda xy [x + y] = R(p_1^{1,0}, \text{Suc} \circ p_1^{3,0}) \in \text{PR}_2^\emptyset$.

3. Primero note que:

$$\begin{aligned} C_0^{1,0}(0) &= C_0^{0,0}(\diamond) \\ C_0^{1,0}(t + 1) &= C_0^{1,0}(t) \end{aligned}$$

lo cual implica que $C_0^{1,0} = R(C_0^{0,0}, p_1^{2,0}) \in \text{PR}_1^\emptyset$. También note que $\lambda tx [t.x] = R(C_0^{1,0}, \lambda xy [x + y] \circ (p_1^{3,0}, p_3^{3,0}))$, lo cual por (1) implica que $\lambda tx [t.x] \in \text{PR}_3^\emptyset$.

4. Note que:

$$\begin{aligned} \lambda x [x!] (0) &= 1 = C_1^{0,0}(\diamond) \\ \lambda x [x!] (t + 1) &= \lambda x [x!] (t). (t + 1) \end{aligned}$$

lo cual implica que: $\lambda x [x!] = R(C_1^{0,0}, \lambda xy [x.y] \circ (p_1^{2,0}, \text{Suc} \circ p_2^{2,0}))$.

Ya que $C_1^{0,0} = \text{Suc} \circ C_0^{0,0}$, tenemos que $C_1^{0,0} \in \text{PR}_1^\emptyset$. Por (2), tenemos que $\lambda xy [x.y] \circ (p_1^{2,0}, \text{Suc} \circ p_2^{2,0}) \in \text{PR}_4^\emptyset$, obteniendo que $\lambda x [x!] \in \text{PR}_5^\emptyset$. \square

Lemma 23. Supongamos $\Sigma \neq \emptyset$.

a) $\lambda\alpha\beta[\alpha\beta] \in \text{PR}^\Sigma$.

b) $\lambda\alpha[|\alpha|] \in \text{PR}^\Sigma$.

Proof. a) Ya que:

$$\begin{aligned}\lambda\alpha\beta[\alpha\beta](\alpha_1, \varepsilon) &= \alpha_1 = p_1^{0,1}(\alpha_1) \\ \lambda\alpha\beta[\alpha\beta](\alpha_1, \alpha a) &= d_a(\lambda\alpha\beta[\alpha\beta](\alpha_1, \alpha), a) \in \Sigma\end{aligned}$$

tenemos que $\lambda\alpha\beta[\alpha\beta] = R(p_1^{0,1}, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G}_a = d_a \circ p_3^{0,3}$, para cada $a \in \Sigma$.

b) Ya que:

$$\begin{aligned}\lambda\alpha[|\alpha|](\varepsilon) &= 0 = C_0^{0,0}(\diamond) \\ \lambda\alpha[|\alpha|](\alpha a) &= \lambda\alpha[|\alpha|](\alpha) + 1\end{aligned}$$

tenemos que $\lambda\alpha[|\alpha|] = R(C_0^{0,0}, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G}_a = \text{Suc} \circ p_1^{1,1}$, para cada $a \in \Sigma$. □

Lemma 24. a) $C_k^{n,m}, C_\alpha^{n,m} \in \text{PR}^\Sigma$, para $n, m, k \geq 0, \alpha \in \Sigma^*$.

b) $C_k^{n,0} \in \text{PR}^\emptyset$, para $n, k \geq 0$.

Lemma 25. 1. $\lambda xy[x^y] \in \text{PR}^\emptyset$.

2. $\lambda t\alpha[\alpha^t] \in \text{PR}^\Sigma$.

Proof. a) Note que: $\lambda tx[x^t] = R(C_1^{1,0}, \lambda xy[x.y] \circ (p_1^{3,0}, p_3^{3,0})) \in \text{PR}^\emptyset$.

Osea que $\lambda xy[x^y] = \lambda tx[x^t] \circ (p_2^{2,0}, p_1^{2,0}) \in \text{PR}^\emptyset$.

b) Note que: $\lambda t\alpha[\alpha^t] = R(C_\varepsilon^{0,1}, \lambda\alpha\beta[\alpha\beta] \circ (p_3^{1,2}, p_2^{1,2})) \in \text{PR}^\Sigma$. □

Lemma 26. Si $<$ es un orden total estricto sobre un alfabeto no vacío Σ , entonces $s^<, \#^<$ y $*^<$ pertenecen a PR^Σ .

Proof. Supongamos $\Sigma = \{a_1, \dots, a_k\}$ y $<$ dado por $a_1 < \dots < a_k$. Ya que:

$$\begin{aligned}s^<(\varepsilon) &= a_1 \\ s^<(\alpha a_i) &= \alpha a_{i+1}, \text{ para } i < k \\ s^<(\alpha a_k) &= s^<(\alpha) a_1\end{aligned}$$

tenemos que $s^< = R(C_{a_1}^{0,0}, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G}_{a_i} = d_{a_{i+1}} \circ p_1^{0,2}$, para $i = 1, \dots, k-1$ y $\mathcal{G}_{a_k} = d_{a_1} \circ p_2^{0,2}$. Osea que $s^< \in \text{PR}^\Sigma$. Ya que:

$$\begin{aligned}*^<(0) &= \varepsilon \\ *^<(t+1) &= s^<(*^<(t))\end{aligned}$$

podemos ver que $*^< \in \text{PR}^\Sigma$. Ya que:

$$\begin{aligned}\#^<(\varepsilon) &= 0 \\ \#^<(\alpha a_i) &= \#^<(\alpha).k + i, \text{ para } i = 1, \dots, k\end{aligned}$$

tenemos que $\#^< = R(C_0^{0,0}, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G}_{a_i} = \lambda xy [x + y] \circ (\lambda xy [x.y] \circ (p_1^{1,1}, C_k^{1,1}), C_i^{1,1})$, para $i = 1, \dots, k$.

Osea que $\#^< \in \text{PR}^\Sigma$. □

Lemma 27. a) $\lambda xy [x \dot{-} y] \in \text{PR}^\emptyset$.

b) $\lambda xy [\max(x, y)] \in \text{PR}^\emptyset$.

c) $\lambda xy [x = y] \in \text{PR}^\emptyset$.

d) $\lambda xy [x \leq y] \in \text{PR}^\emptyset$.

e) Si $\Sigma \neq \emptyset \Rightarrow \lambda \alpha \beta [\alpha = \beta] \in \text{PR}^\Sigma$.

Proof. a) Primero notar que $\lambda x [x \dot{-} 1] = R(C_0^{0,0}, p_2^{2,0}) \in \text{PR}^\emptyset$. También note que $\lambda tx [x \dot{-} t] = R(p_1^{1,0}, \lambda x [x \dot{-} 1] \circ p_1^{3,0}) \in \text{PR}^\emptyset$.

Osea que $\lambda xy [x \dot{-} y] = \lambda tx [x \dot{-} t] \circ (p_2^{2,0}, p_1^{2,0}) \in \text{PR}^\emptyset$.

b) Note que $\lambda xy [\max(x, y)] = \lambda xy [(x + (y \dot{-} x))]$.

c) Note que $\lambda xy [x = y] = \lambda xy [1 \dot{-} ((x \dot{-} y) + (y \dot{-} x))]$.

d) Note que $\lambda xy [x \leq y] = \lambda xy [1 \dot{-} (x \dot{-} y)]$.

e) Sea $<$ un orden total estricto sobre Σ . Ya que $\alpha = \beta$ sii $\#^<(\alpha) = \#^<(\beta)$, tenemos que $\lambda \alpha \beta [\alpha = \beta] = \lambda xy [x = y] \circ (\#^< \circ p_1^{0,2}, \#^< \circ p_2^{0,2})$.

Osea que podemos aplicar (c) y **Lema 28** implica que χ_S es Σ -PR. □

Lemma 28. Si $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ son predicados Σ -PR, entonces $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$ y $\text{not}P$ lo son también.

Proof. Note que:

$$\begin{aligned}\neg P &= \lambda xy [x \dot{-} y] \circ (C_1^{m,m}, P) \\ (P \wedge Q) &= \lambda xt [x.y] \circ (P, Q) \\ (P \vee Q) &= \neg(\neg P \wedge \neg Q)\end{aligned}$$

□

Lemma 29. Si $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son Σ -PR, entonces $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 - S_2$ lo son.

Proof. Note que:

$$\begin{aligned}\chi_{S_1 \cup S_2} &= (\chi_{S_1} \vee \chi_{S_2}) \\ \chi_{S_1 \cap S_2} &= (\chi_{S_1} \wedge \chi_{S_2}) \\ \chi_{S_1 - S_2} &= \lambda [x \dot{-} y] \circ (\chi_{S_1}, \chi_{S_2})\end{aligned}$$

□

Corollary 30. Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es finito, entonces S es Σ -PR.

Proof. Por el lema anterior, podemos suponer que:

$$S = \{(z_1, \dots, z_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m)\}$$

Noque χ_S es el siguiente predicado:

$$(\chi_{z_1} \circ p_1^{n,m} \wedge \dots \wedge \chi_{z_n} \circ p_n^{n,m} \wedge \chi_{\gamma_1} \circ p_{n+1}^{n,m} \wedge \dots \wedge \chi_{\gamma_m} \circ p_{n+m}^{n,m})$$

Ya que los predicados:

$$\chi_{z_i} = \lambda xy [x = y] \circ (p_1^{1,0}, C_{z_i}^{1,0}) \quad \chi_{\gamma_i} = \lambda \alpha \beta [\alpha = \beta] \circ (p_1^{0,1}, C_{\gamma_i}^{0,1})$$

son Σ -PR, el **Lema 28** implica que χ_S es Σ -PR. □

Lemma 31. Supongamos $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega, L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ son conjuntos no vacíos, entonces $S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ es Σ -PR sii $S_1, \dots, S_n, L_1, \dots, L_m$ son Σ -PR.

Proof. \Rightarrow Veremos por ejemplo que L_1 es Σ -PR. Sea $(z_1, \dots, z_n, z_1, \dots, z_m)$ un elemento fijo de $S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$. Note que: $\alpha \in L_1$ sii $(z_1, \dots, z_n, \alpha, z_2, \dots, z_m) \in S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$, lo cual implica que $\chi_{L_1} = \chi_{S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m} \circ (C_{z_1}^{0,1}, \dots, C_{z_n}^{0,1}, p_1^{0,1}, C_{z_2}^{0,1}, \dots, C_{z_m}^{0,1})$.

\Leftarrow Note que $\chi_{S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m}$ es el predicado $(\chi_{S_1} \circ p_1^{n,m} \wedge \dots \wedge \chi_{S_n} \circ p_n^{n,m} \wedge \chi_{L_1} \circ p_{n+1}^{n,m} \wedge \dots \wedge \chi_{L_m} \circ p_{n+m}^{n,m})$. □

Lemma 32. Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es Σ -PR, donde $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$. Si $S \subseteq D_f$ es Σ -PR, entonces $f|_S$ es Σ -PR.

Proof. Supongamos $O = \Sigma^*$, entonces $f|_S = \lambda x \alpha [\alpha^x] \circ (Suc \circ Pred \circ \chi_S, f)$ es Σ -PR. El caso $O = \omega$ es similar usando $\lambda xy [x^y]$ en lugar de $\lambda x \alpha [\alpha^x]$. □

Lemma 33. Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^* \rightarrow O$ es Σ -PR, entonces existe una función Σ PR. $\bar{f} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$, tal que $f = \bar{f}|_{D_f}$.

Proof. Es fácil ver por inducción en k que el enunciado se cumple para cada $f \in PR_k^\Sigma$. □

Proposition 34. Un conjunto S es Σ -PR sii S es el dominio de una función Σ -PR.

Proof. \Rightarrow Note que $S = D_{Pred \circ \chi_S}$.

\Leftarrow Probaremos por inducción en k que D_F es Σ -PR, para cada $F \in PR_k^\Sigma$. El caso $k = 0$ es fácil. Supongamos el resultado vale para un k fijo y supongamos $F \in PR_{k+1}^\Sigma$. Veremos entonces que D_F es Σ -PR. Hay varios casos.

$$1. \quad F = R(f, g)$$

$$\begin{aligned} f &: S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \Sigma^* \\ g &: \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \end{aligned}$$

con $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacíos y $f, g \in PR_k^\Sigma$. Notese que por definición de $R(f, g)$, tenemos que $D_F = \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$.

Por HI tenemos que $D_f = S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ es Σ -PR, lo cual por el **Lema 31** nos dice que los conjuntos $S_1, \dots, S_n, L_1, \dots, L_m$ son Σ -PR. Ya que ω es Σ -PR, el **Lema 31** nos dice que D_F es Σ -PR.

Los otros casos de recursión primitiva son dejados al lector.

2. $\boxed{F = g \circ (g_1, \dots, g_{n+m})}$

$$\begin{aligned} g & : D_g \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O \\ g_i & : D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \omega, i = 1, \dots, n \\ g_i & : D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \Sigma^*, i = n+1, \dots, n+m \end{aligned}$$

están en PR_k^Σ . Por **Lema 33**, hay funciones Σ -PR $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{n+m}$ las cuales son Σ -totales y cumplen $g_i = \bar{g}_i \upharpoonright_{D_{g_i}}$, para $i = 1, \dots, n+m$.

Por HI los conjuntos $D_g, D_{g_i}, i = 1, \dots, n+m$, son Σ -PR y por lo tanto $S = \bigcap_{i=1}^{n+m} D_{g_i}$ lo es. Notese que $\chi_{D_F} = (\chi_{D_g} \circ (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{n+m}) \wedge \chi_S)$ lo cual nos dice que D_F es Σ -PR.

□

Lemma 35: Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$, $i = 1, \dots, k$, son funciones Σ -p.r. tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces $f_1 \cup \dots \cup f_k$ es Σ -p.r..

Proof: Supongamos $O = \Sigma^*$ y $k = 2$. Sean

$f_i : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$, $i = 1, 2$,

funciones Σ -p.r. tales que $f_i|_{D_{f_i}} = f_i$, $i = 1, 2$ (Lema 33). Por Lema 34 los conjuntos D_{f_1} y D_{f_2} son Σ -p.r. y por lo tanto lo es $D_{f_1} \cup D_{f_2}$. Ya que $f_1 \cup f_2 = (\lambda\alpha\beta[\alpha\beta] \circ (\lambda x\alpha[\alpha^x] \circ (\chi_{D_{f_1}}, \bar{f}_1), \lambda x\alpha[\alpha^x] \circ (\chi_{D_{f_2}}, \bar{f}_2)))$ tenemos que $f_1 \cup f_2$ es Σ -p.r.. El caso $k > 2$ puede probarse por induccion ya que $f_1 \cup \dots \cup f_k = (f_1 \cup \dots \cup f_{k-1}) \cup f_k$.

□

Corollary 36: Supongamos f es una funcion Σ -mixta cuyo dominio es finito. Entonces f es Σ -p.r..

Proof: Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$, con $D_f = \{e_1, \dots, e_k\}$. Por el Corolario 30, cada $\{e_i\}$ es Σ -p.r. por lo cual el Lema 32 nos dice que $C_{f(e_i)}^{n,m}|_{\{e_i\}}$ es Σ -p.r.. O sea que

$f = C_{f(e_1)}^{n,m}|_{\{e_1\}} \cup \dots \cup C_{f(e_k)}^{n,m}|_{\{e_k\}}$
es Σ -p.r.. □

Lemma 37: $\lambda i\alpha [[\alpha]_i]$ es Σ -p.r..

Proof: Note que

$$[\varepsilon]_i = \varepsilon$$

$$[\alpha a]_i = \begin{cases} [\alpha]_i & \text{si } i \neq |\alpha| + 1 \\ a & \text{si } i = |\alpha| + 1 \end{cases}$$

lo cual dice que $\lambda i\alpha [[\alpha]_i] = R(C_\varepsilon^{1,0}, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G}_a : \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ es dada por $\mathcal{G}_a(i, \alpha, \zeta) = \begin{cases} \zeta & \text{si } i \neq |\alpha| + 1 \\ a & \text{si } i = |\alpha| + 1 \end{cases}$

O sea que solo resta probar que cada \mathcal{G}_a es Σ -p.r.. Primero note que los conjuntos $S_1 = \{(i, \alpha, \zeta) \in \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* : i \neq |\alpha| + 1\}$
 $S_2 = \{(i, \alpha, \zeta) \in \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* : i = |\alpha| + 1\}$

son Σ -p.r. ya que $\chi_{S_1} = \lambda xy [x \neq y] \circ (p_1^{1,2}, Suc \circ \lambda\alpha [[\alpha]] \circ p_2^{1,2})$
 $\chi_{S_2} = \lambda xy [x = y] \circ (p_1^{1,2}, Suc \circ \lambda\alpha [[\alpha]] \circ p_2^{1,2})$.

Ya que $\mathcal{G}_a = p_3^{1,2}|_{S_1} \cup C_a^{1,2}|_{S_2}$,

el Lema 35 nos dice que \mathcal{G}_a es Σ -p.r., para cada $a \in \Sigma$. □

Lemma 38: Sean $n, m \geq 0$. (a) Si $f : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega$ es Σ -p.r., con $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios, entonces lo son las funciones $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha} \left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ y $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha} \left[\prod_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$. (b) Si $f : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \Sigma^*$ es Σ -p.r., con $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios, entonces lo es la funcion $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha} \left[\bigcap_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$

Proof: (a) Sea $G = \lambda tx\vec{x}\vec{\alpha} \left[\sum_{i=x}^{i=t} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$. Ya que

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha} \left[\sum_{i=x}^{i=y} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] = G \circ (p_2^{n+2,m}, p_1^{n+2,m}, p_3^{n+2,m}, \dots, p_{n+m+2}^{n+2,m})$$

solo tenemos que probar que G es Σ -p.r.. Primero note que

$$G(0, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ f(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$G(t+1, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > t+1 \\ G(t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq t+1 \end{cases}$$

Sean $D_1 = \{(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x > 0\}$
 $D_2 = \{(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x = 0\}$
 $H_1 = \{(z, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x > t+1\}$
 $H_2 = \{(z, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x \leq t+1\}$.

Es facil de chequear que estos conjuntos son Σ -p.r.. Veamos que por ejemplo H_1 lo es. Es decir debemos ver que χ_{H_1} es Σ -p.r.. Ya que f es Σ -p.r. tenemos que $D_f = \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ es Σ -p.r., lo cual por el Lema 31 nos dice que los conjuntos $S_1, \dots, S_n, L_1, \dots, L_m$ son Σ -p.r.. Ya que ω es Σ -p.r., el Lema 31 nos dice que $R = \omega^3 \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ es Σ -p.r.. Notese que $\chi_{H_1} = (\chi_R \wedge \lambda z t x \vec{x} \vec{\alpha} [x > t + 1])$ por cual χ_{H_1} es Σ -p.r. ya que es la conjuncion de dos predicados Σ -p.r. Ademas note que $G = R(h, g)$, donde

$$\begin{aligned} h &= C_0^{n+1, m} \upharpoonright_{D_1 \cup \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [f(0, \vec{x}, \vec{\alpha})] \upharpoonright_{D_2}} \\ g &= C_0^{n+3, m} \upharpoonright_{H_1 \cup \lambda z t x \vec{x} \vec{\alpha} [z + f(t + 1, \vec{x}, \vec{\alpha})] \upharpoonright_{H_2}} \end{aligned}$$

O sea que los Lemas 35 y 32 garantizan que G es Σ -p.r.. \square

Lemma 39: Sean $n, m \geq 0$. (a) Sea $P : S \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega$ un predicado Σ -p.r. y supongamos $\bar{S} \subseteq S$ es Σ -p.r.. Entonces $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ y $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ son predicados Σ -p.r.. (Note que el dominio de estos predicados es $\omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$) (b) Sea $P : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times L \rightarrow \omega$ un predicado Σ -p.r. y supongamos $\bar{L} \subseteq L$ es Σ -p.r.. Entonces $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)]$ y $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)]$ son predicados Σ -p.r..

Proof: (a) Sea

$$\bar{P} = P \upharpoonright_{\bar{S} \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m} \cup C_1^{1+n, m} \upharpoonright_{(\omega - \bar{S}) \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m}$$

$$\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})] = \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{t=x} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

Notese que \bar{P} es Σ -p.r.. Ya que

$$= \lambda x y \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=x}^{t=y} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \circ (C_0^{1+n, m}, p_1^{1+n, m})$$

el Lema 38 implica que $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$ es Σ -p.r.. Finalmente note que

$$\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})] = \neg \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} \neg P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$$

es Σ -p.r.. (b) Sea $<$ un orden total estricto sobre Σ . Sea k el cardinal de Σ . Ya que

$$|\alpha| \leq x \text{ sii } \#^<(\alpha) \leq \sum_{i=1}^{i=x} k^i,$$

(ejercicio) tenemos que $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)] = \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall t \in \#^<(\bar{L}))_{t \leq \sum_{i=1}^{i=x} k^i} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, *^<(t))]$

Sea $H = \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} [P(\vec{x}, \vec{\alpha}, *^<(t))]$. Notese que H es Σ -p.r. y $D_H = \#^<(L) \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$

Ademas note que $\#^<(\bar{L})$ es Σ -p.r. (ejercicio), lo cual por (a) implica que $Q = \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall t \in \#^<(\bar{L}))_{t \leq x} H(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$

es Σ -p.r.. O sea que $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)] = Q \circ \left(\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[\sum_{i=1}^{i=x} k^i \right], p_1^{1+n, m}, \dots, p_{1+n+m}^{1+n, m} \right)$

es Σ -p.r.. \square

Lemma 40: (a) El predicado $\lambda x y [x \text{ divide } y]$ es \emptyset -p.r.. (b) El predicado $\lambda x [x \text{ es primo}]$ es \emptyset -p.r.. (c) El predicado $\lambda \alpha \beta [\alpha \text{ inicial } \beta]$ es Σ -p.r..

Proof: (a) Si tomamos $P = \lambda t x_1 x_2 [x_2 = t.x_1] \in \text{PR}^\emptyset$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda x_1 x_2 [x_1 \text{ divide } x_2] &= \lambda x_1 x_2 [(\exists t \in \omega)_{t \leq x_2} P(t, x_1, x_2)] \\ &= \lambda x x_1 x_2 [(\exists t \in \omega)_{t \leq x} P(t, x_1, x_2)] \circ (p_2^{2,0}, p_1^{2,0}, p_2^{2,0}) \end{aligned}$$

por lo que podemos aplicar el lema anterior. (b) Ya que

x es primo sii $x > 1 \wedge ((\forall t \in \omega)_{t \leq x} t = 1 \vee t = x \vee \neg(t \text{ divide } x))$

podemos usar un argumento similar al de la prueba de (a). (c) es dejado al lector. \square

Lemma 41: Si $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es un predicado Σ -efectivamente computable y D_P es Σ -efectivamente computable, entonces la funcion $M(P)$ es Σ -efectivamente computable.

Proof: Ejercicio \square

Theorem 42: Si $f \in \mathbb{R}^\Sigma$, entonces f es Σ -efectivamente computable.

Proof: Dejamos al lector la prueba por induccion en k de que si $f \in R_k^\Sigma$, entonces f es Σ -efectivamente computable. \square

Lemma 43: Sean $n, m \geq 0$. Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ un predicado Σ -p.r.. Entonces (a) $M(P)$ es Σ -recursiva. (b) Si hay una funcion Σ -p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ tal que $M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})$, para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$, entonces $M(P)$ es Σ -p.r..

Proof: (a) Sea $\bar{P} = P \upharpoonright_{D_P \cup C_0^{n+1, m} \upharpoonright_{(\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}) - D_P}}$. Dejamos al lector verificar cuidadosamente que $M(P) = M(\bar{P})$. Veremos entonces que $M(\bar{P})$ es Σ -recursiva. Note que \bar{P} es Σ -p.r. (por que?). Sea k tal que $\bar{P} \in PR_k^\Sigma$. Ya que \bar{P} es Σ -total y $\bar{P} \in PR_k^\Sigma \subseteq R_k^\Sigma$, tenemos que $M(\bar{P}) \in R_{k+1}^\Sigma$ y por lo tanto $M(\bar{P}) \in R^\Sigma$.

(b) Primero veremos que $D_{M(\bar{P})}$ es un conjunto Σ -p.r.. Notese que

$$\chi_{D_{M(\bar{P})}} = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

$$\text{lo cual nos dice que } \chi_{D_{M(\bar{P})}} = \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \circ (f, p_1^{n, m}, \dots, p_{n+m}^{n, m})$$

Pero el Lema 39 nos dice que $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ es Σ -p.r. por lo cual tenemos que $\chi_{D_{M(\bar{P})}}$ lo es. Sea

$$P_1 = \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} \left[\bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \wedge (\forall j \in \omega)_{j \leq t} j = t \vee \neg \bar{P}(j, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

Note que P_1 es Σ -total. Dejamos al lector usando lemas anteriores probar que P_1 es Σ -p.r.. Ademas notese que para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tenemos que $P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$ si y solo si $t = M(\bar{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$

$$\text{Esto nos dice que } M(\bar{P}) = \left(\lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \right) \upharpoonright_{D_{M(\bar{P})}}$$

$$\text{por lo cual para probar que } M(\bar{P}) \text{ es } \Sigma\text{-p.r. solo nos resta probar que } F = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right]$$

$$\text{lo es. Pero } F = \lambda x y \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=x}^y t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \circ (C_0^{n, m}, f, p_1^{n, m}, \dots, p_{n+m}^{n, m})$$

y por lo tanto el Lema 38 nos dice que F es Σ -p.r.. De esta manera hemos probado que $M(\bar{P})$ es Σ -p.r. y por lo tanto $M(P)$ lo es. \square

Lemma 44: Las siguientes funciones son \emptyset -p.r.: (a) $Q : \omega \times \mathbf{N} \rightarrow \omega$
 $(x, y) \rightarrow \text{cociente de la division de } x \text{ por } y$
(b) $R : \omega \times \mathbf{N} \rightarrow \omega$
 $(x, y) \rightarrow \text{resto de la division de } x \text{ por } y$ (c) $pr : \mathbf{N} \rightarrow \omega$
 $n \rightarrow n\text{-esimo numero primo}$

Proof: (a) Veamos primero veamos que $Q = M(P)$, donde $P = \lambda t x y [(t+1).y > x]$. Notar que

$$\begin{aligned} D_{M(P)} &= \{(x, y) : (\exists t \in \omega) P(t, x, y) = 1\} \\ &= \{(x, y) : (\exists t \in \omega) (t+1).y > x\} \\ &= \omega \times \mathbf{N} \\ &= D_Q \end{aligned}$$

Dejamos al lector la facil verificacion de que para cada $(x, y) \in \omega \times \mathbf{N}$, se tiene que $Q(x, y) = M(P)(x, y) = \min_t (t+1).y > x$

Esto prueba que $Q = M(P)$. Ya que P es \emptyset -p.r. y $Q(x, y) \leq p_1^{2,0}(x, y)$, para cada $(x, y) \in \omega \times \mathbf{N}$

(b) del Lema 43 implica que $Q \in PR^\emptyset$. (b) Notese que

$$R = \lambda x y [x \dot{-} Q(x, y).y]$$

y por lo tanto $R \in PR^\emptyset$. (c) Para ver que pr es \emptyset -p.r., veremos que la extension $h : \omega \rightarrow \omega$, dada por $h(0) = 0$ y $h(n) = pr(n)$, $n \geq 1$, es \emptyset -p.r.. Primero note que

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(x+1) &= \min_t (t \text{ es primo} \wedge t > h(x)) \end{aligned}$$

O sea que $h = R(C_0^{0,0}, M(P))$, donde $P = \lambda t z x [t \text{ es primo} \wedge t > z]$

Es decir que solo nos resta ver que $M(P)$ es \emptyset -p.r.. Claramente P es \emptyset -p.r.. Veamos que para cada $(z, x) \in \omega^2$, tenemos que $M(P)(z, x) = \min_t (t \text{ es primo} \wedge t > z) \leq z! + 1$

Sea p primo tal que p divide a $z! + 1$. Es facil ver que entonces $p > z$. Pero esto claramente nos dice que $\min_t (t \text{ es primo} \wedge t > z) \leq p \leq z! + 1$

O sea que (b) del Lema 43 implica que $M(P)$ es \emptyset -p.r. ya que podemos tomar $f = \lambda z x [z! + 1]$. \square

Lemma 45: Las funciones $\lambda x i [(x)_i]$ y $\lambda x [Lt(x)]$ son \emptyset -p.r.

Proof: Note que $D_{\lambda x i [(x)_i]} = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Sea

$$P = \lambda t x i [\neg(pr(i)^{t+1} \text{ divide } x)]$$

Note que P es \emptyset -p.r. y que $D_P = \omega \times \omega \times \mathbf{N}$. Dejamos al lector la prueba de que $\lambda x i [(x)_i] = M(P)$. Ya que $(x)_i \leq x$, para todo $x \in \mathbf{N}$, (b) del Lema 43 implica que $\lambda x i [(x)_i]$ es \emptyset -p.r.. Veamos que $\lambda x [Lt(x)]$ es \emptyset -p.r.. Sea

$$Q = \lambda t x [(\forall i \in \mathbf{N})_{i \leq x} (i \leq t \vee (x)_i = 0)]$$

Notese que $D_Q = \omega \times \mathbf{N}$ y que ademas por el Lema 39 tenemos que Q es \emptyset -p.r. (dejamos al lector explicar como se aplica tal lema en este caso). Ademas notese que $\lambda x [Lt(x)] = M(Q)$ y que $Lt(x) \leq x$, para todo $x \in \mathbf{N}$

lo cual por (b) del Lema 43 nos dice que $\lambda x [Lt(x)]$ es \emptyset -p.r.. \square Para $x_1, \dots, x_n \in \omega$, escribiremos $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ en lugar de $\langle x_1, \dots, x_n, 0, \dots \rangle$.

Lemma 46: Sea $n \geq 1$. La funcion $\lambda x_1 \dots x_n [\langle x_1, \dots, x_n \rangle]$ es \emptyset -p.r.

Proof: Sea $f_n = \lambda x_1 \dots x_n [\langle x_1, \dots, x_n \rangle]$. Claramente f_1 es \emptyset -p.r.. Ademas note que para cada $n \geq 1$, tenemos

$$f_{n+1} = \lambda x_1 \dots x_{n+1} [(f_n(x_1, \dots, x_n) pr(n+1)^{x_{n+1}})]$$

O sea que podemos aplicar un argumento inductivo. \square

Lemma 47: Supongamos que $\Sigma \neq \emptyset$. Sea $<$ un orden total estricto sobre Σ , sean $n, m \geq 0$ y sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \rightarrow \omega$ un predicado Σ -p.r.. Entonces (a) $M^<(P)$ es Σ -recursiva. (b) Si existe una funcion Σ -p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ tal que $|M^<(P)(\vec{x}, \vec{\alpha})| = |\min_\alpha^< P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)| \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})$, para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M^<(P)}$, entonces $M^<(P)$ es Σ -p.r..

Proof: Sea $Q = P \circ (p_2^{1+n,m}, \dots, p_{1+n+m}^{1+n,m}, *^< \circ p_1^{1+n,m})$. Note que

$$M^<(P) = *^< \circ M(Q)$$

lo cual por (a) del Lema 43 implica que $M^<(P)$ es Σ -recursiva. Sea k el cardinal de Σ . Ya que

$$|*^<(M(Q)(\vec{x}, \vec{\alpha}))| = |M^<(P)(\vec{x}, \vec{\alpha})| \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}),$$

$$\text{para todo } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M^<(P)} = D_{M(Q)}, \text{ tenemos que } M(Q)(\vec{x}, \vec{\alpha}) \leq \sum_{i=1}^{i=f(\vec{x}, \vec{\alpha})} k^i, \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(Q)}.$$

O sea que por (a) del Lema 43, $M(Q)$ es Σ -p.r. y por lo tanto $M^<(P)$ lo es. \square

$$f : U \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$$

Lemma 48: Supongamos $g : \omega \times \omega \times U \rightarrow \omega$

$$h : \omega \times U \rightarrow \omega$$

son funciones tales que $h(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) = f(\vec{x}, \vec{\alpha})$, para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in U$

$h(x+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) = g(h^\downarrow(x, \vec{x}, \vec{\alpha}), x, \vec{x}, \vec{\alpha})$, para cada $x \in \omega$ y $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in U$.

Entonces h es Σ -p.r. si f y g lo son.

Proof: Supongamos f, g son Σ -p.r.. Primero veremos que h^\downarrow es Σ -p.r.. Notese que

$$\begin{aligned}
h^\downarrow(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) &= \langle h(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) \rangle \\
&= \langle f(\vec{x}, \vec{\alpha}) \rangle \\
&= 2^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} \\
h^\downarrow(x+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) &= h^\downarrow(x, \vec{x}, \vec{\alpha})pr(x+2)^{h(x+1, \vec{x}, \vec{\alpha})} \\
&= h^\downarrow(x, \vec{x}, \vec{\alpha})pr(x+2)^{g(h^\downarrow(x, \vec{x}, \vec{\alpha}), x, \vec{x}, \vec{\alpha})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{lo cual nos dice que } h^\downarrow = R(f_1, g_1) \text{ donde } f_1 &= \lambda \vec{x} \vec{\alpha} [2^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})}] \\
g_1 &= \lambda A x \vec{x} \vec{\alpha} [Apr(x+2)^{g(A, x, \vec{x}, \vec{\alpha})}]
\end{aligned}$$

O sea que h^\downarrow es Σ -p.r. ya que f_1 y g_1 lo son. Finalmente notese que $h = \lambda i x [(x)_i] \circ (Suc \circ p_1^{1+n, m}, h^\downarrow)$

lo cual nos dice que h es Σ -p.r.. \square

Lemma 49: Supongamos $\emptyset \neq \Sigma \subseteq \Gamma$. (a) Si $<$ es un orden total estricto sobre Σ , entonces las funciones $*^< : \omega \rightarrow \Sigma^*$ y $\#^< : \Sigma^* \rightarrow \omega$ son Γ -p.r.. (b) Si \prec es un orden total estricto sobre Γ , entonces las funciones $\#^\prec|_{\Sigma^*} : \Sigma^* \rightarrow \omega$ y $*^\prec|_{\#^\prec(\Sigma^*)} : \#^\prec(\Sigma^*) \rightarrow \Sigma^*$ son Σ -p.r..

Proof: (a) Supongamos $\Sigma = \{a_1, \dots, a_k\}$ y $<$ es dado por $a_1 < \dots < a_k$. Sea $s_e^< : \Gamma^* \rightarrow \Gamma^*$ dada por

$$\begin{aligned}
s_e^<(\varepsilon) &= a_1 \\
s_e^<(\alpha a_i) &= \alpha a_{i+1}, \text{ si } i < k \\
s_e^<(\alpha a_k) &= s_e^<(\alpha) a_1 \\
s_e^<(\alpha a) &= \varepsilon, \text{ si } a \in \Gamma - \Sigma.
\end{aligned}$$

Note que $s_e^<$ es Γ -p.r. y que $s_e^<|_{\Sigma^*} = s^<$. Ya que Σ^* es un conjunto Γ -p.r. tenemos que $s^<$ es Γ -p.r.. O sea que la recursion $*^<(0) = \varepsilon$
 $*^<(x+1) = s^<(*^<(x))$

implica que $*^<$ es Γ -p.r.. Para ver que $\#^< : \Sigma^* \rightarrow \omega$ es Γ -p.r., sea $\#_e^< : \Gamma^* \rightarrow \omega$ dada por

$$\begin{aligned}
\#_e^<(\varepsilon) &= 0 \\
\#_e^<(\alpha a_i) &= \#_e^<(\alpha).k + i \\
\#_e^<(\alpha a) &= 0, \text{ si } a \in \Gamma - \Sigma.
\end{aligned}$$

Ya que $\#_e^<$ es Γ -p.r., eso es $\#^< = \#_e^<|_{\Sigma^*}$. (b) Sea n el cardinal de Γ . Ya que

$$\begin{aligned}
\#^\prec|_{\Sigma^*}(\varepsilon) &= 0 \\
\#^\prec|_{\Sigma^*}(\alpha a) &= \#^\prec|_{\Sigma^*}(\alpha).n + \#^\prec(a), \text{ para cada } a \in \Sigma
\end{aligned}$$

la funcion $\#^\prec|_{\Sigma^*}$ es Σ -p.r.. O sea que el predicado $P = \lambda x \alpha [\#^\prec|_{\Sigma^*}(\alpha) = x]$ es Σ -p.r.. Sea $<$ un orden total estricto sobre Σ . Note que $*^\prec|_{\#^\prec(\Sigma^*)} = M^<(P)$, lo cual ya que $|*^\prec|_{\#^\prec(\Sigma^*)}(x)| \leq x$

nos dice que $*^\prec|_{\#^\prec(\Sigma^*)}$ es Σ -p.r. (Lema 47). \square

Lemma 50: Supongamos $\Gamma \neq \emptyset$ y sea $<$ un orden total estricto sobre Γ . Dada h una funcion Γ -mixta, son equivalentes (1) h es Γ -recursiva (resp. Γ -p.r.) (2) $h^{\#^<}$ es \emptyset -recursiva (resp. \emptyset -p.r.)

Proof: (2) \Rightarrow (1). Supongamos $h : D_h \subseteq \omega^n \times \Gamma^{*m} \rightarrow \Gamma^*$. Ya que $h^{\#^<}$ es Γ -recursiva (resp. Γ -p.r.) y

$$h = *^< \circ h^{\#^<} \circ (p_1^{n, m}, \dots, p_n^{n, m}, \#^< \circ p_{n+1}^{n, m}, \dots, \#^< \circ p_{n+m}^{n, m}),$$

tenemos que h es Γ -recursiva (resp. Γ -p.r.). (1) \Rightarrow (2). Probaremos por induccion en k que

(*) Si $h \in R_k^\Gamma$ (resp. $h \in PR_k^\Gamma$), entonces $h^{\#^<}$ es \emptyset -recursiva (resp. \emptyset -p.r.). El caso $k = 0$ es facil y dejado al lector. Supongamos (*) vale para un k fijo. Veremos que vale para $k + 1$. Sea $h \in R_{k+1}^\Gamma$ (resp. $h \in PR_{k+1}^\Gamma$). Hay varios casos

Caso 1. Supongamos $h = f \circ (f_1, \dots, f_n)$, con $f, f_1, \dots, f_n \in R_k^\Gamma$ (resp. $f, f_1, \dots, f_n \in PR_k^\Gamma$). Por hipotesis inductiva tenemos que $f^{\#^<}, f_1^{\#^<}, \dots, f_n^{\#^<}$ son \emptyset -recursivas (resp. \emptyset -p.r.). Ya que $h^{\#^<} = f^{\#^<} \circ (f_1^{\#^<}, \dots, f_n^{\#^<})$, tenemos que $h^{\#^<}$ es \emptyset -recursiva (resp. \emptyset -p.r.).

Caso 2. Supongamos $h = M(P)$, con $P : \omega \times \omega^n \times \Gamma^{*m} \rightarrow \omega$, un predicado en R_k^Γ . Ya que $h^{\#^<} = M(P^{\#^<})$, tenemos que $h^{\#^<}$ es \emptyset -recursiva.

Caso 3. Supongamos $h = R(f, \mathcal{G})$, con

$$f : \omega^n \times \Gamma^{*m} \rightarrow \Gamma^*$$

$$\mathcal{G}_a : \omega^n \times \Gamma^{*m} \times \Gamma^* \times \Gamma^* \rightarrow \Gamma^*, a \in \Gamma$$

funciones en R_k^Γ (resp. PR_k^Γ). Sea $\Gamma = \{a_1, \dots, a_r\}$, con $a_1 < a_2 < \dots < a_r$. Por hipotesis in-

ductiva tenemos que $f^{\#<}$ y cada $\mathcal{G}_a^{\#<}$ son \emptyset -recursivas (resp. \emptyset -p.r.). Sea $i_0 : \omega \rightarrow \omega$ si r div y $x \rightarrow \begin{cases} r \\ R(x, r) \end{cases}$ caso co

y sea $B = \lambda x [Q(x \dot{-} i_0(x), r)]$

(R y Q son definidas en el Lema 44). Note que i_0 y B son \emptyset -p.r. y que $*^<(x) = *^<(B(x))a_{i_0(x)}$, para $x \geq 1$

$$\begin{aligned} h^{\#<}(\vec{x}, \vec{y}, t+1) &= \#^<(h(\vec{x}, *^<(\vec{y}), *^<(t+1))) \\ &= \#^<(h(\vec{x}, *^<(\vec{y}), *^<(B(t+1))a_{i_0(t+1)})) \\ &= \#^<(\mathcal{G}_{a_{i_0(t+1)}}(\vec{x}, *^<(\vec{y}), *^<(B(t+1))), h(\vec{x}, *^<(\vec{y}), *^<(t+1))) \\ &= \#^<(\mathcal{G}_{a_{i_0(t+1)}}(\vec{x}, *^<(\vec{y}), *^<(B(t+1))), *^<(h^{\#<}(\vec{x}, \vec{y}, t))) \\ &= \mathcal{G}_{a_{i_0(t+1)}}^{\#<}(\vec{x}, \vec{y}, B(t+1), h^{\#<}(\vec{x}, \vec{y}, B(t+1))) \end{aligned}$$

y ya que $B(t+1) < t+1$, tenemos que (**) $h^{\#<}(\vec{x}, \vec{y}, t+1) = \mathcal{G}_{a_{i_0(t+1)}}^{\#<}(\vec{x}, \vec{y}, B(t+1), h^{\#<}(\vec{x}, \vec{y}, B(t+1)))$

1), $\langle h^{\#<}(\vec{x}, \vec{y}, 0), \dots, h^{\#<}(\vec{x}, \vec{y}, t) \rangle$) A continuacion definamos

$$H = \lambda t \vec{x} \vec{y} [\langle h^{\#<}(\vec{x}, \vec{y}, 0), \dots, h^{\#<}(\vec{x}, \vec{y}, t) \rangle]$$

$$H(0, \vec{x}, \vec{y}) = \langle h^{\#<}(\vec{x}, \vec{y}, 0) \rangle = \langle f^{\#<}(\vec{x}, \vec{y}) \rangle = 2^{f^{\#<}(\vec{x}, \vec{y})}$$

Por (**) tenemos que

$$H(t+1, \vec{x}, \vec{y}) = \left((H(t, \vec{x}, \vec{y}) + 1) \cdot pr(t+2)^{\mathcal{G}_{a_{i_0(t+1)}}^{\#<}(\vec{x}, \vec{y}, B(t+1), (H(t, \vec{x}, \vec{y}))_{B(t+1)})} \right)$$

$$\text{O sea que si definimos } g : \omega \times \omega \times \omega^n \times \omega^m \rightarrow \omega \text{ por } g(z, t, \vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} ((z+1) \cdot pr(t+2)^{\mathcal{G}_{a_1}^{\#<}(\vec{x}, \vec{y}, B(t+1), (z)_{B(t+1)})}) \\ \vdots \\ ((z+1) \cdot pr(t+2)^{\mathcal{G}_{a_r}^{\#<}(\vec{x}, \vec{y}, B(t+1), (z)_{B(t+1)})}) \end{cases}$$

tenemos que $H = R(\lambda x [2^x] \circ f^{\#<}, g)$. Note que g es \emptyset -recursiva (resp. \emptyset -p.r.), ya que $g = f_1(z, t, \vec{x}, \vec{y})P_1(z, t, \vec{x}, \vec{y}) + \dots + f_r(z, t, \vec{x}, \vec{y})P_r(z, t, \vec{x}, \vec{y})$,

$$\begin{aligned} \text{con } f_i &= \lambda z t \vec{x} \vec{y} \left[((z+1) \cdot pr(t+2)^{\mathcal{G}_{a_i}^{\#<}(\vec{x}, \vec{y}, B(t+1), (z)_{B(t+1)})}) \right] \\ P_i &= \lambda z t \vec{x} \vec{y} [i_0(t+1) = i] \end{aligned}$$

y estas funciones son totales y \emptyset -recursivas (resp. \emptyset -p.r.). O sea que H es \emptyset -recursiva (resp. \emptyset -p.r.) y por lo tanto lo es $h^{\#<} = \lambda \vec{x} \vec{y} t [(H(t, \vec{x}, \vec{y}))_{t+1}]$

Los otros casos en los cuales h es obtenida por recursion primitiva son similares. \square

Theorem 51: Sean Σ y Γ alfabetos cualesquiera. (a) Supongamos una funcion f es Σ -mixta y Γ -mixta, entonces f es Σ -recursiva (resp. Σ -p.r.) sii f es Γ -recursiva (resp. Γ -p.r.). (b) Supongamos un conjunto S es Σ -mixto y Γ -mixto, entonces S es Σ -p.r. sii S es Γ -p.r..

Proof:(a) Ya que f es $(\Sigma \cap \Gamma)$ -mixta, podemos suponer sin perdida de generalidad que $\Sigma \subseteq \Gamma$. Primero haremos el caso en que $\Sigma = \emptyset$ y $\Gamma \neq \emptyset$. Sea $<$ un orden total estricto sobre Γ . Ya que f es \emptyset -mixta, tenemos $f = f^{\#<}$ y por lo tanto podemos aplicar el lema anterior.

Supongamos ahora que $\Sigma \neq \emptyset$. O sea que $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$, con $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$. Haremos el caso $O = \Sigma^*$. Supongamos f es Σ -recursiva (resp. Σ -p.r.). Sea \prec un orden total estricto sobre Γ . Ya que las funciones $\#^\prec|_{\Sigma^*}$ y $*^\prec|_{\#^\prec(\Sigma^*)}$ son Σ -p.r. (Lema 49) y

$$\begin{aligned} f^{\#^\prec} &= \#^\prec \circ f \circ (p_1^{n+m,0}, \dots, p_n^{n+m,0}, *^\prec \circ p_{n+1}^{n+m,0}, \dots, *^\prec \circ p_{n+m}^{n+m,0}) \\ &= \#^\prec|_{\Sigma^*} \circ f \circ (p_1^{n+m,0}, \dots, p_n^{n+m,0}, *^\prec|_{\#^\prec(\Sigma^*)} \circ p_{n+1}^{n+m,0}, \dots, *^\prec|_{\#^\prec(\Sigma^*)} \circ p_{n+m}^{n+m,0}) \end{aligned}$$

tenemos que $f^{\#^\prec}$ es Σ -recursiva (resp. Σ -p.r.). O sea que por el caso ya probado de (a), $f^{\#^\prec}$ es \emptyset -recursiva (resp. \emptyset -p.r.) lo cual por el lema anterior nos dice que f es Γ -recursiva

(resp. Γ -p.r.). Supongamos ahora que f es Γ -recursiva (resp. Γ -p.r.). Sea $<$ un orden total estricto sobre Σ . Ya que $\#^<$ y $*^<$ son Γ -p.r. (Lema 49), la funcion

$$f^{\#^<} = \#^< \circ f \circ (p_1^{n+m,0}, \dots, p_n^{n+m,0}, *^< \circ p_{n+1}^{n+m,0}, \dots, *^< \circ p_{n+m}^{n+m,0})$$

es Γ -recursiva (resp. Γ -p.r.). Por el caso ya probado de (a), $f^{\#^<}$ es \emptyset -recursiva (resp. \emptyset -p.r.), lo cual por el lema anterior nos dice que f es Σ -recursiva (resp. Σ -p.r.). (b) es dejado al lector (use (a)). \square

0.4 El lenguaje S^Σ

Lemma 52: Se tiene que: (a) Si $I_1 \dots I_n = J_1 \dots J_m$, con $I_1, \dots, I_n, J_1, \dots, J_m \in \text{Ins}^\Sigma$, entonces $n = m$ y $I_j = J_j$ para cada $j \geq 1$. (b) Si $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$, entonces existe una unica sucesion de instrucciones I_1, \dots, I_n tal que $\mathcal{P} = I_1 \dots I_n$

Proof:(a) Supongamos I_n es un tramo final propio de J_m . Notar que entonces $n > 1$. Es facil ver que entonces ya sea $J_m = L\bar{u}I_n$ para algun $u \in \mathbf{N}$, o I_n es de la forma GOTO $L\bar{n}$ y J_m es de la forma $w\text{IF } P\bar{k} \text{ BEGINS } a \text{ GOTO } L\bar{n}$ donde $w \in \{L\bar{n} : n \in \mathbf{N}\} \cup \{\varepsilon\}$. El segundo caso no puede darse porque entonces el anteultimo simbolo de I_{n-1} deberia ser S lo cual no sucede para ninguna instruccion. O sea que

$$I_1 \dots I_n = J_1 \dots J_{m-1} L\bar{u} I_n$$

lo cual dice que (*) $I_1 \dots I_{n-1} = J_1 \dots J_{m-1} L\bar{u}$. Es decir que $L\bar{u}$ es tramo final de I_{n-1} y por lo tanto GOTO $L\bar{u}$ es tramo final de I_{n-1} . Por (*), GOTO es tramo final de $J_1 \dots J_{m-1}$, lo cual es impossible. Hemos llegado a una contradiccion lo cual nos dice que I_n no es un tramo final propio de J_m . Por simetria tenemos que $I_n = J_m$, lo cual usando un razonamiento inductivo nos dice que $n = m$ y $I_j = J_j$ para cada $j \geq 1$.

(b) Es consecuencia directa de (a). \square

Theorem 53: Si f es Σ -computable, entonces f es Σ -efectivamente computable.

Proof:Supongamos por ejemplo que $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ es computada por $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$. Es claro que el procedimiento que consiste en realizar las sucesivas instrucciones de \mathcal{P} (partiendo de $((x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$) y eventualmente terminar en caso de que nos toque realizar la instruccion $n(\mathcal{P}) + 1$, y dar como salida el contenido de la variable N1, es un procedimiento efectivo que computa a f . \square

Proposition 54:

(a) Sea $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ una funcion Σ -computable. Entonces hay un macro $[V\bar{n} + 1 \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$ (b) Sea $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$ una funcion Σ -computable. Entonces hay un macro $[W\bar{m} + 1 \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$

Proof:(b) Sea \mathcal{P} un programa que compute a f . Tomemos un k tal que $k \geq n, m$ y tal que todas las variables y labels de \mathcal{P} estan en el conjunto

$$\{N1, \dots, N\bar{k}, P1, \dots, P\bar{k}, L1, \dots, L\bar{k}\}.$$

Sea \mathcal{P}' la palabra que resulta de reemplazar en \mathcal{P} : - la variable $N\bar{j}$ por $V\bar{n} + \bar{j}$, para cada $j = 1, \dots, k$ - la variable $P\bar{j}$ por $W\bar{m} + \bar{j}$, para cada $j = 1, \dots, k$ - el label $L\bar{j}$ por $A\bar{j}$, para cada $j = 1, \dots, k$ Notese que

$$V\bar{n} + 1 \leftarrow V1$$

$$\vdots$$

$$V\bar{n} + \bar{n} \leftarrow V\bar{n}$$

$$V\bar{n} + \bar{n} + 1 \leftarrow 0$$

$$\vdots$$

$$V\bar{n} + \bar{k} \leftarrow 0$$

$$W\bar{m} + 1 \leftarrow W1$$

$$\vdots$$

$$W\bar{m} + \bar{m} \leftarrow W\bar{m}$$

$$W\bar{m} + \bar{m} + 1 \leftarrow \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$W\bar{m} + \bar{k} \leftarrow \varepsilon$$

$$\mathcal{P}'$$

es el macro buscado, el cual tendra sus variables auxiliares y labels en la lista $V\bar{n} + 1, \dots, V\bar{n} + \bar{k}, W\bar{m} + 1, \dots, W\bar{m} + \bar{k}$

□

Proposition 55: Sea $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ un predicado Σ -computable. Entonces hay un macro [IF $P(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})$ GOTO A1]

Theorem 56: Si h es Σ -recursiva, entonces h es Σ -computable.

Proof: Probaremos por induccion en k que

(*) Si $h \in R_k^\Sigma$, entonces h es Σ -computable. El caso $k = 0$ es dejado al lector. Supongamos (*) vale para k , veremos que vale para $k + 1$. Sea $h \in R_{k+1}^\Sigma - R_k^\Sigma$. Hay varios casos

Caso 1. Supongamos $h = M(P)$, con $P : \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$, un predicado perteneciente a R_k^Σ . Por hipotesis inductiva, P es Σ -computable y por lo tanto tenemos un macro

[IF $P(V1, \dots, V\bar{n} + \bar{1}, W1, \dots, W\bar{m})$ GOTO A1]

L2 IF $P(\overline{N\bar{n} + \bar{1}}, N1, \dots, N\bar{n}, P1, \dots, P\bar{m})$ GOTO L1

$\overline{N\bar{n} + \bar{1}} \leftarrow \overline{N\bar{n} + \bar{1}} + 1$

GOTO L2

L1 $N1 \leftarrow \overline{N\bar{n} + \bar{1}}$

Es facil chequear que este programa computa h . Caso 2. Supongamos $h = R(f, \mathcal{G})$, con

$f : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \Sigma^*$

$\mathcal{G}_a : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*, a \in \Sigma$

elementos de R_k^Σ . Sea $\Sigma = \{a_1, \dots, a_r\}$. Por hipotesis inductiva, las funciones $f, \mathcal{G}_a, a \in \Sigma$, son Σ -computables y por lo tanto podemos hacer el siguiente programa via el uso de macros

[$\overline{P\bar{m} + 3} \leftarrow f(N1, \dots, N\bar{n}, P1, \dots, P\bar{m})$]

$\overline{Lr + \bar{1}}$ IF $\overline{P\bar{m} + \bar{1}}$ BEGINS a_1 GOTO L1

⋮

IF $\overline{P\bar{m} + \bar{1}}$ BEGINS a_r GOTO $\overline{L\bar{r}}$

GOTO $\overline{Lr + 2}$

L1 $\overline{P\bar{m} + \bar{1}} \leftarrow \neg \overline{P\bar{m} + \bar{1}}$

[$\overline{P\bar{m} + 3} \leftarrow \mathcal{G}_{a_1}(N1, \dots, N\bar{n}, P1, \dots, P\bar{m}, \overline{P\bar{m} + 2}, \overline{P\bar{m} + 3})$]

$\overline{P\bar{m} + 2} \leftarrow \overline{P\bar{m} + 2} a_1$

GOTO $\overline{Lr + \bar{1}}$

⋮

$\overline{L\bar{r}}$ $\overline{P\bar{m} + \bar{1}} \leftarrow \neg \overline{P\bar{m} + \bar{1}}$

$\overline{P\bar{m} + 3} \leftarrow \mathcal{G}_{a_r}(N1, \dots, N\bar{n}, P1, \dots, P\bar{m}, \overline{P\bar{m} + 2}, \overline{P\bar{m} + 3})$

$\overline{P\bar{m} + 2} \leftarrow \overline{P\bar{m} + 2} a_r$

GOTO $\overline{Lr + \bar{1}}$

$\overline{Lr + 2}$ $P1 \leftarrow \overline{P\bar{m} + 3}$

Es facil chequear que este programa computa h . El resto de los casos son dejados al lector.

□

Lemma 57: Sea Σ un alfabeto cualquiera. Las funciones S y $-$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r..

Proof: Use el Teorema 51. □

Lemma 58: Para cada $n, x \in \omega$, tenemos que $|\bar{n}| \leq x$ si y solo si $n \leq 10^x - 1$

Lemma 59: Ins^Σ es un conjunto $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r..

Proof: Para simplificar la Proof asumiremos que $\Sigma = \{ @, \& \}$. Ya que Ins^Σ es union de los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{N\bar{k} \leftarrow N\bar{k} + 1 : k \in \mathbf{N}\} \\
L_2 &= \{N\bar{k} \leftarrow N\bar{k} - 1 : k \in \mathbf{N}\} \\
L_3 &= \{N\bar{k} \leftarrow N\bar{n} : k, n \in \mathbf{N}\} \\
L_4 &= \{N\bar{k} \leftarrow 0 : k \in \mathbf{N}\} \\
L_5 &= \{\text{IF } N\bar{k} \neq 0 \text{ GOTO } L\bar{m} : k, m \in \mathbf{N}\} \\
L_6 &= \{P\bar{k} \leftarrow P\bar{k}.@ : k \in \mathbf{N}\} \\
L_7 &= \{P\bar{k} \leftarrow P\bar{k}.\& : k \in \mathbf{N}\} \\
L_8 &= \{P\bar{k} \leftarrow \neg P\bar{k} : k \in \mathbf{N}\} \\
L_9 &= \{P\bar{k} \leftarrow P\bar{n} : k, n \in \mathbf{N}\} \\
L_{10} &= \{P\bar{k} \leftarrow \varepsilon : k \in \mathbf{N}\} \\
L_{10} &= \{\text{IF } P\bar{k} \text{ BEGINS } @ \text{ GOTO } L\bar{m} : k, m \in \mathbf{N}\} \\
L_{11} &= \{\text{IF } P\bar{k} \text{ BEGINS } \& \text{ GOTO } L\bar{m} : k, m \in \mathbf{N}\} \\
L_{12} &= \{\text{GOTO } L\bar{m} : m \in \mathbf{N}\} \\
L_{13} &= \{\text{SKIP}\} \\
L_{14} &= \{L\bar{k}\alpha : k \in \mathbf{N} \text{ y } \alpha \in L_1 \cup \dots \cup L_{13}\}
\end{aligned}$$

solo debemos probar que L_1, \dots, L_{14} son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Veremos primero por ejemplo que $L_{10} = \{\text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m} : k, m \in \mathbf{N}\}$

es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Primero notese que $\alpha \in L_{10}$ si y solo si existen $k, m \in \mathbf{N}$ tales que $\alpha = \text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m}$

Mas formalmente tenemos que $\alpha \in L_{10}$ si y solo si $(\exists k \in \mathbf{N})(\exists m \in \mathbf{N}) \alpha = \text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m}$

Ya que cuando existen tales k, m tenemos que \bar{k} y \bar{m} son subpalabras de α , el lema anterior nos dice que $\alpha \in L_{10}$ si y solo si $(\exists k \in \mathbf{N})_{k \leq 10|\alpha|} (\exists m \in \mathbf{N})_{m \leq 10|\alpha|} \alpha = \text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m}$

Sea $P = \lambda m k \alpha [\alpha = \text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m}]$

Ya que $D_{\lambda k [\bar{k}]} = \omega$, tenemos que $D_P = \omega \times (\Sigma \cup \Sigma_p)^* \times (\Sigma \cup \Sigma_p)^*$. Notese que $P = \lambda \alpha \beta [\alpha = \beta] \circ (p_3^{2,1}, f)$

donde $f = \lambda \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4] \circ (C_{\text{IFP}}^{2,1}, \lambda k [\bar{k}] \circ p_2^{2,1}, C_{\text{BEGINS@GOTOL}}^{2,1}, \lambda k [\bar{k}] \circ p_1^{2,1})$

lo cual nos dice que P es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Notese que

$$\chi_{L_{10}} = \lambda \alpha [(\exists k \in \mathbf{N})_{k \leq 10|\alpha|} (\exists m \in \mathbf{N})_{m \leq 10|\alpha|} P(m, k, \alpha)]$$

Esto nos dice que podemos usar dos veces el Lema 39 para ver que $\chi_{L_{10}}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Veamos como. Sea $Q = \lambda k \alpha [(\exists m \in \mathbf{N})_{m \leq 10|\alpha|} P(m, k, \alpha)]$

Por el Lema 39 tenemos que $\lambda x k \alpha [(\exists m \in \mathbf{N})_{m \leq x} P(m, k, \alpha)]$

es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. lo cual nos dice que $Q = \lambda x k \alpha [(\exists m \in \mathbf{N})_{m \leq x} P(m, k, \alpha)] \circ (\lambda \alpha [10|\alpha|] \circ p_2^{1,1}, p_1^{1,1}, p_2^{1,1})$

lo es. Ya que $\chi_{L_{10}} = \lambda \alpha [(\exists k \in \mathbf{N})_{k \leq 10|\alpha|} Q(k, \alpha)]$

podemos en forma similar aplicar el Lema 39 y obtener finalmente que $\chi_{L_{10}}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. En forma similar podemos probar que L_1, \dots, L_{13} son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Esto nos dice que $L_1 \cup \dots \cup L_{13}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Notese que $L_1 \cup \dots \cup L_{13}$ es el conjunto de las instrucciones basicas de \mathcal{S}^Σ . Llamemos InsBas^Σ a dicho conjunto. Para ver que L_{14} es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. notemos que

$$\chi_{L_{14}} = \lambda \alpha [(\exists k \in \mathbf{N})_{k \leq 10|\alpha|} (\exists \beta \in \text{InsBas}^\Sigma)_{|\beta| \leq |\alpha|} \alpha = L\bar{k}\beta]$$

lo cual nos dice que aplicando dos veces el Lema 39 obtenemos que $\chi_{L_{14}}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r..

Ya que $\text{Ins}^\Sigma = \text{InsBas}^\Sigma \cup L_{14}$ tenemos que Ins^Σ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. \square

Lemma 60: *Bas* y *Lab* son funciones $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.

Proof: Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Sigma \cup \Sigma_p$. Sea $L = \{L\bar{k} : k \in \mathbf{N}\} \cup \{\varepsilon\}$. Dejamos al lector probar que L es un conjunto $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Sea

$$P = \lambda I \alpha [\alpha \in \text{Ins}^\Sigma \wedge I \in \text{Ins}^\Sigma \wedge [\alpha]_1 \neq L \wedge (\exists \beta \in L) I = \beta \alpha]$$

Note que $D_P = (\Sigma \cup \Sigma_p)^{*2}$. Dejamos al lector probar que P es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Notese ademas que cuando $I \in \text{Ins}^\Sigma$ tenemos que $P(I, \alpha) = 1$ sii $\alpha = \text{Bas}(I)$. Dejamos al lector probar que $\text{Bas} = M^<(P)$ por lo que para ver que Bas es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r., solo nos falta ver que la funcion Bas es acotada por alguna funcion $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. y $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -total. Pero esto es trivial ya que $|\text{Bas}(I)| \leq |I| = p_1^{0,1}(I)$ para cada $I \in \text{Ins}^\Sigma$. Finalmente note que

$$\text{Lab} = M^<(\lambda I \alpha [\alpha \text{Bas}(I) = I])$$

lo cual nos dice que Lab es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. \square Recordemos que dado un programa \mathcal{P} habiamos definido $I_i^{\mathcal{P}} = \varepsilon$, para $i = 0$ o $i > n(\mathcal{P})$. O sea que la funcion $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -mixta $\lambda i \mathcal{P} [I_i^{\mathcal{P}}]$ tiene dominio igual a $\omega \times \text{Pro}^\Sigma$.

Lemma 61: (a) Pro^Σ es un conjunto $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. (b) $\lambda \mathcal{P} [n(\mathcal{P})]$ y $\lambda i \mathcal{P} [I_i^{\mathcal{P}}]$ son funciones $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r..

Proof: Ya que $\text{Pro}^\Sigma = D_{\lambda \mathcal{P} [n(\mathcal{P})]}$ tenemos que (b) implica (a). Para probar (b) sea $<$ un orden total estricto sobre $\Sigma \cup \Sigma_p$. Sea P el siguiente predicado

$$\lambda x [Lt(x) > 0 \wedge (\forall t \in \mathbf{N})_{t \leq Lt(x)} *^<((x)_t) \in \text{Ins}^\Sigma \wedge (\forall t \in \mathbf{N})_{t \leq Lt(x)} (\forall m \in \mathbf{N}) \neg (L\bar{m} \text{ t-final } *^<((x)_t)) \vee (\exists j \in \mathbf{N})_{j \leq Lt(x)} (\exists \alpha \in (\Sigma \cup \Sigma_p) - Num) L\bar{m} \alpha \text{ t-}$$

Notese que $D_P = \mathbf{N}$ y que $P(x) = 1$ sii $Lt(x) > 0$, $*^<((x)_t) \in \text{Ins}^\Sigma$, para cada $t = 1, \dots, Lt(x)$ y ademas $\bigcap_{t=1}^{t=Lt(x)} *^<((x)_t) \in \text{Pro}^\Sigma$. Para ver que P es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. solo nos falta acotar el cuantificador $(\forall m \in \mathbf{N})$ de la expresion lambda que define a P . Ya que nos interesan los valores de m para los cuales \bar{m} es posiblemente una subpalabra de alguna de las palabras $*^<((x)_j)$, el Lema 58 nos dice que una cota posible es $10^{\max\{|*^<((x)_j)|: 1 \leq j \leq Lt(x)\}} - 1$. Dejamos al lector los detalles de la Proof de que P es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Sea

$$Q = \lambda x \alpha [P(x) \wedge \alpha = \bigcap_{t=1}^{t=Lt(x)} *^<((x)_t)]$$

Note que $D_Q = \mathbf{N} \times (\Sigma \cup \Sigma_p)^*$. Claramente Q es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Ademas note que $D_{M(Q)} = \text{Pro}^\Sigma$. Notese que para $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$, tenemos que $M(Q)(\mathcal{P})$ es aquel numero tal que pensado como infinitupla (via mirar su secuencia de exponentes) codifica la secuencia de instrucciones que forman a \mathcal{P} . Es decir $M(Q)(\mathcal{P}) = \langle \#^<(I_1^{\mathcal{P}}), \#^<(I_2^{\mathcal{P}}), \dots, \#^<(I_{n(\mathcal{P})}^{\mathcal{P}}), 0, 0, \dots \rangle$

Por (b) del Lema 43, $M(Q)$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. ya que para cada $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ tenemos que

$$\begin{aligned} M(Q)(\mathcal{P}) &= \langle \#^<(I_1^{\mathcal{P}}), \#^<(I_2^{\mathcal{P}}), \dots, \#^<(I_{n(\mathcal{P})}^{\mathcal{P}}), 0, 0, \dots \rangle \\ &= \prod_{i=1}^{n(\mathcal{P})} pr(i) \#^<(I_1^{\mathcal{P}}) \\ &\leq \prod_{i=1}^{|\mathcal{P}|} pr(i) \#^<(\mathcal{P}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \mathcal{P} [n(\mathcal{P})] &= \lambda x [Lt(x)] \circ M(Q) \\ \lambda i \mathcal{P} [I_i^{\mathcal{P}}] &= *^< \circ g \circ (p_1^{1,1}, M(Q) \circ p_2^{1,1}) \end{aligned}$$

donde $g = C_0^{1,1} |_{\{0\} \times \omega} \cup \lambda i x [(x)_i]$, lo cual dice que $\lambda \mathcal{P} [n(\mathcal{P})]$ y $\lambda i \mathcal{P} [I_i^{\mathcal{P}}]$ son funciones $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. \square

Lemma 62: Dado un orden total estricto $<$ sobre $\Sigma \cup \Sigma_p$, las funciones s , $S_\#$ y S_* son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r..

Proof: Necesitaremos algunas funciones $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Dada una instruccion I en la cual al menos ocurre una variable, usaremos $\#Var1(I)$ para denotar el numero de la primer variable que ocurre en I . Por ejemplo

$$\#Var1(L\bar{n} \text{ IF } N\bar{k} \neq 0 \text{ GOTO } L\bar{m}) = k$$

Notese que $\lambda I [\#Var1(I)]$ tiene dominio igual a $\text{Ins}^\Sigma - L$, donde L es la union de los siguientes conjuntos

$$\{\text{GOTOL}\bar{m} : m \in \mathbf{N}\} \cup \{\text{L}\bar{k}\text{GOTOL}\bar{m} : k, m \in \mathbf{N}\} \cup \{\text{SKIP}\} \cup \{\text{L}\bar{k}\text{SKIP} : k \in \mathbf{N}\}$$

Dada una instruccion I en la cual ocurren dos variables, usaremos $\#Var2(I)$ para denotar el numero de la segunda variable que ocurre en I . Por ejemplo $\#Var2(N\bar{k} \leftarrow N\bar{m}) = m$

Notese que el dominio de $\lambda I[\#Var2(I)]$ es igual a la union de los siguientes conjuntos

$$\{N\bar{k} \leftarrow N\bar{m} : k, m \in \mathbf{N}\} \cup \{L\bar{j} N\bar{k} \leftarrow N\bar{m} : j, k, m \in \mathbf{N}\}$$

$$\{P\bar{k} \leftarrow P\bar{m} : k, m \in \mathbf{N}\} \cup \{L\bar{j} P\bar{k} \leftarrow P\bar{m} : j, k, m \in \mathbf{N}\}$$

Ademas notese que para una instruccion I tenemos que

$$\begin{aligned} \#Var1(I) &= \min_k (N\bar{k} \leftarrow \text{ocu } I \vee N\bar{k} \neq \text{ocu } I) \\ \#Var2(I) &= \min_k (N\bar{k} \text{ t-final } I \vee N\bar{k} + \text{ocu } I) \end{aligned}$$

Esto nos dice que si llamamos P al predicado $\lambda k \alpha [\alpha \in \text{Ins}^\Sigma \wedge (N\bar{k} \leftarrow \text{ocu } \alpha \vee N\bar{k} \neq \text{ocu } \alpha \vee P\bar{k} \leftarrow \text{ocu } \alpha]$ entonces $\lambda I[\#Var1(I)] = M(P)$ por lo cual $\lambda I[\#Var1(I)]$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. Similarmente se

puede ver que $\lambda I[\#Var2(I)]$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Sea $F_- : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \omega$

$$(x, j) \rightarrow \langle (x)_1, \dots, (x)_{j-1}, (x)_j - 1, (x)_{j+1}, \dots \rangle$$

Ya que $F_-(x, j) = \begin{cases} Q(x, pr(j)) & \text{si } pr(j) \text{ divide } x \\ x & \text{caso contrario} \end{cases}$

tenemos que F_- es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Sea $F_+ : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \omega$

$$(x, j) \rightarrow \langle (x)_1, \dots, (x)_{j-1}, (x)_j + 1, (x)_{j+1}, \dots \rangle$$

Ya que $F_+(x, j) = x.pr(j)$ tenemos que F_+ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Sea $F_{\leftarrow} : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \omega$

$$(x, j, k) \rightarrow \langle (x)_1, \dots, (x)_{j-1}, (x)_j, (x)_{j+1}, \dots \rangle$$

Ya que $F_{\leftarrow}(x, j, k) = Q(x, pr(j)^{(x)_j}).pr(j)^{(x)_k}$ tenemos que F_{\leftarrow} es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Sea $F_0 : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \omega$

$$(x, j) \rightarrow \langle (x)_1, \dots, (x)_{j-1}, \#^<(*^<((x)_j)) \rangle$$

Es facil ver que F_0 es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Para cada $a \in \Sigma$, sea $F_a : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \omega$

$$(x, j) \rightarrow \langle (x)_1, \dots, (x)_{j-1}, \#^<(*^<((x)_j)) \rangle$$

Es facil ver que F_a es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. En forma similar puede ser probado que $F_{\sim} : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \omega$

$$(x, j) \rightarrow \langle (x)_1, \dots, (x)_j \rangle$$

es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. Dado $(i, x, y, \mathcal{P}) \in \omega \times \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \text{Pro}^\Sigma$, tenemos varios casos en los cuales los valores $s(i, x, y, \mathcal{P})$, $S_{\#}(i, x, y, \mathcal{P})$ y $S_*(i, x, y, \mathcal{P})$ pueden ser obtenidos usando las funciones antes definidas:

- (1) CASO $i = 0 \vee i > n(\mathcal{P})$. Entonces $s(i, x, y, \mathcal{P}) = i$
 $S_{\#}(i, x, y, \mathcal{P}) = x$
 $S_*(i, x, y, \mathcal{P}) = y$
- (2) CASO $(\exists j \in \omega) Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = N\bar{j} \leftarrow N\bar{j} + 1$. Entonces $s(i, x, y, \mathcal{P}) = i + 1$
 $S_{\#}(i, x, y, \mathcal{P}) = F_+(x, \#Var1(I_i^{\mathcal{P}}))$
 $S_*(i, x, y, \mathcal{P}) = y$
- (3) CASO $(\exists j \in \omega) Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = N\bar{j} \leftarrow N\bar{j} - 1$. Entonces $s(i, x, y, \mathcal{P}) = i + 1$
 $S_{\#}(i, x, y, \mathcal{P}) = F_-(x, \#Var1(I_i^{\mathcal{P}}))$
 $S_*(i, x, y, \mathcal{P}) = y$
- (4) CASO $(\exists j, k \in \omega) Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = N\bar{j} \leftarrow N\bar{k}$. Entonces $s(i, x, y, \mathcal{P}) = i + 1$
 $S_{\#}(i, x, y, \mathcal{P}) = F_{\leftarrow}(x, \#Var1(I_i^{\mathcal{P}}), \#Var2(I_i^{\mathcal{P}}))$
 $S_*(i, x, y, \mathcal{P}) = y$
- (5) CASO $(\exists j, k \in \omega) Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = N\bar{j} \leftarrow 0$. Entonces $s(i, x, y, \mathcal{P}) = i + 1$
 $S_{\#}(i, x, y, \mathcal{P}) = F_0(x, \#Var1(I_i^{\mathcal{P}}))$
 $S_*(i, x, y, \mathcal{P}) = y$
- (6) CASO $(\exists j, m \in \omega) (Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \text{IF } N\bar{j} \neq 0 \text{ GOTO } L\bar{m} \wedge (x)_j = 0)$. Entonces $s(i, x, y, \mathcal{P}) = i - 1$
 $S_{\#}(i, x, y, \mathcal{P}) = x$
 $S_*(i, x, y, \mathcal{P}) = y$
- (7) CASO $(\exists j, m \in \omega) (Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \text{IF } N\bar{j} \neq 0 \text{ GOTO } L\bar{m} \wedge (x)_j \neq 0)$. Entonces $s(i, x, y, \mathcal{P}) = m$
 $S_{\#}(i, x, y, \mathcal{P}) = x$
 $S_*(i, x, y, \mathcal{P}) = y$

$$\begin{aligned}
(8) \text{ CASO } (\exists j \in \omega) \text{ Bas}(I_i^{\mathcal{P}}) = P\bar{j} \leftarrow P\bar{j}.a. \text{ Entonces } & \begin{aligned} s(i, x, y, \mathcal{P}) &= i + 1 \\ S_{\#}(i, x, y, \mathcal{P}) &= x \\ S_{*}(i, x, y, \mathcal{P}) &= F_a(y, \#Var1(I_i^{\mathcal{P}})) \end{aligned} \\
(9) \text{ CASO } (\exists j \in \omega) \text{ Bas}(I_i^{\mathcal{P}}) = P\bar{j} \leftarrow \neg P\bar{j}. \text{ Entonces } & \begin{aligned} s(i, x, y, \mathcal{P}) &= i + 1 \\ S_{\#}(i, x, y, \mathcal{P}) &= x \\ S_{*}(i, x, y, \mathcal{P}) &= F_{\neg}(y, \#Var1(I_i^{\mathcal{P}})) \end{aligned} \\
(10) \text{ CASO } (\exists j, k \in \omega) \text{ Bas}(I_i^{\mathcal{P}}) = P\bar{j} \leftarrow P\bar{k}. \text{ Entonces } & \begin{aligned} s(i, x, y, \mathcal{P}) &= i + 1 \\ S_{\#}(i, x, y, \mathcal{P}) &= x \\ S_{*}(i, x, y, \mathcal{P}) &= F_{\leftarrow}(y, \#Var1(I_i^{\mathcal{P}}), \#Var2(I_i^{\mathcal{P}})) \end{aligned} \\
(11) \text{ CASO } (\exists j \in \omega) \text{ Bas}(I_i^{\mathcal{P}}) = P\bar{j} \leftarrow \varepsilon. \text{ Entonces } & \begin{aligned} s(i, x, y, \mathcal{P}) &= i + 1 \\ S_{\#}(i, x, y, \mathcal{P}) &= x \\ S_{*}(i, x, y, \mathcal{P}) &= F_0(y, \#Var1(I_i^{\mathcal{P}})) \end{aligned} \\
(12) \text{ CASO } (\exists j, m \in \omega)(\exists a \in \Sigma) \left(\text{Bas}(I_i^{\mathcal{P}}) = \text{IF } P\bar{j} \text{ BEGINS } a \text{ GOTO } L\bar{m} \wedge [*^{<}((y)_j)]_1 \neq a \right). \\
\text{Entonces } & \begin{aligned} s(i, x, y, \mathcal{P}) &= i + 1 \\ S_{\#}(i, x, y, \mathcal{P}) &= x \\ S_{*}(i, x, y, \mathcal{P}) &= y \end{aligned} \\
(13) \text{ CASO } (\exists j, m \in \omega)(\exists a \in \Sigma) \left(\text{Bas}(I_i^{\mathcal{P}}) = \text{IF } P\bar{j} \text{ BEGINS } a \text{ GOTO } L\bar{m} \wedge [*^{<}((y)_j)]_1 = a \right). \\
\text{Entonces } & \begin{aligned} s(i, x, y, \mathcal{P}) &= \min_l \left(\text{Lab}(I_l^{\mathcal{P}}) \neq \varepsilon \wedge \text{Lab}(I_l^{\mathcal{P}}) \text{ t-final } I_i^{\mathcal{P}} \right) \\ S_{\#}(i, x, y, \mathcal{P}) &= x \\ S_{*}(i, x, y, \mathcal{P}) &= y \end{aligned} \\
(14) \text{ CASO } (\exists j \in \omega) \text{ Bas}(I_i^{\mathcal{P}}) = \text{GOTO } L\bar{j}. \text{ Entonces } & \begin{aligned} s(i, x, y, \mathcal{P}) &= \min_l \left(\text{Lab}(I_l^{\mathcal{P}}) \neq \varepsilon \wedge \text{Lab}(I_l^{\mathcal{P}}) \right) \\ S_{\#}(i, x, y, \mathcal{P}) &= x \\ S_{*}(i, x, y, \mathcal{P}) &= y \end{aligned} \\
(15) \text{ CASO } \text{Bas}(I_i^{\mathcal{P}}) = \text{SKIP}. \text{ Entonces } & \begin{aligned} s(i, x, y, \mathcal{P}) &= k + 1 \\ S_{\#}(i, x, y, \mathcal{P}) &= x \\ S_{*}(i, x, y, \mathcal{P}) &= y \end{aligned}
\end{aligned}$$

O sea que los casos anteriores nos permiten definir conjuntos S_1, \dots, S_{15} , los cuales son disjuntos de a pares y cuya union da el conjunto $\omega \times \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \text{Pro}^{\Sigma}$, de manera que cada una de las funciones $s, S_{\#}$ y S_{*} pueden escribirse como union disjunta de funciones $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. restringidas respectivamente a los conjuntos S_1, \dots, S_{15} . Ya que los conjuntos S_1, \dots, S_{15} son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. el Lema 35 nos dice que $s, S_{\#}$ y S_{*} lo son. \square

Lemma 63: Sean: ... hacer!!

Proof:Hacer

Proposition 64: Sean $n, m \leq 0$, las funciones $i^{n,m}, E_{\#j}^{n,m}, j = 1, 2, \dots$ son $\Sigma \cup \Sigma_p$ -PR.

Proof:Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Sigma \cup \Sigma_p$ y sean $s, S_{\#}, S$ las funciones previamente definidas en el Lemma 62, definamos:

$$\begin{aligned}
C_{\#}^{n,m} &= \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} \mathcal{P} \left[\left\langle E_{\#1}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), E_{\#2}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), \dots \right\rangle \right] \\
C_{*}^{n,m} &= \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} \mathcal{P} \left[\left\langle \#^{<}(E_{*1}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P})), \#^{<}(E_{*2}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P})), \dots \right\rangle \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i^{n,m}(0, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) &= 1 \\
C_{\#}^{n,m}(0, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) &= \langle x_1, \dots, x_n \rangle \\
C_{*}^{n,m}(0, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) &= \langle \#^{<}(\alpha_1), \dots, \#^{<}(\alpha_m) \rangle \\
\text{Notese que } i^{n,m}(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) &= s(i^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), C_{\#}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), C_{*}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P})) \\
C_{\#}^{n,m}(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) &= S_{\#}(i^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), C_{\#}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), C_{*}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P})) \\
C_{*}^{n,m}(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) &= S_{*}(i^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), C_{\#}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), C_{*}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}))
\end{aligned}$$

Por el Lema 63 tenemos que $i^{n,m}, C_{\#}^{n,m}$ y $C_{*}^{n,m}$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Ademas notese que

$$\begin{aligned}
E_{\#j}^{n,m} &= \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} \mathcal{P} \left[(C_{\#}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}))_j \right] \\
E_{*j}^{n,m} &= \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} \mathcal{P} \left[*^{<}((C_{*}^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}))_j) \right]
\end{aligned}$$

por lo cual las funciones $E_{\#j}^{n,m}$, $E_{*j}^{n,m}$, $j = 1, 2, \dots$, son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. \square

Theorem 65: Las funciones $\Phi_{\#}^{n,m}$ y $\Phi_{*}^{n,m}$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -recursivas.

Proof: Veremos que $\Phi_{\#}^{n,m}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -recursiva. Sea H el predicado $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -mixto

$$\lambda t \vec{x} \vec{\alpha} \mathcal{P} [i^{n,m}(t, x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \mathcal{P}) = n(\mathcal{P}) + 1].$$

Note que $D_H = \omega^{n+1} \times \Sigma^{*m} \times \text{Pro}^{\Sigma}$. Ya que the funciones $i^{n,m}$ y $\lambda \mathcal{P} [n(\mathcal{P})]$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r., H lo es. Notar que $D_{M(H)} = D_{\Phi_{\#}^{n,m}}$. Ademas para $(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) \in D_{M(H)}$, tenemos que $M(H)(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P})$ es la menor cantidad de pasos necesarios para que \mathcal{P} termine partiendo del estado $((x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$. Ya que H es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r., tenemos que $M(H)$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -r.. Notese que para $(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) \in D_{M(H)} = D_{\Phi_{\#}^{n,m}}$ tenemos que $\Phi_{\#}^{n,m}(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}) = E_{\#1}^{n,m}(M(H)(\vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}), \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P})$

lo cual con un poco mas de trabajo nos permite probar que $\Phi_{\#}^{n,m} = E_{\#1}^{n,m} \circ (M(H), p_1^{n,m+1}, \dots, p_{n+m+1}^{n,m+1})$

Ya que la funcion $E_{\#1}^{n,m}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -r., lo es $\Phi_{\#}^{n,m}$. \square

Corollary 66: Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es Σ -computable, entonces f es Σ -recursiva.

Proof: Haremos el caso $O = \Sigma^*$. Sea \mathcal{P}_0 un programa que compute a f . Primero veremos que f es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -recursiva. Note que

$$f = \Phi_{*}^{n,m} \circ (p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}_0}^{n,m})$$

donde cabe destacar que $p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m}$ son las proyecciones respecto del alfabeto $\Sigma \cup \Sigma_p$, es decir que tienen dominio $\omega^n \times (\Sigma \cup \Sigma_p)^{*m}$. Ya que $\Phi_{*}^{n,m}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -recursiva tenemos que f lo es. O sea que el Teorema 51 nos dice que f es Σ -recursiva. \square

Tesis de Church: Toda funcion Σ -efectivamente computable es Σ -recursiva.

Corollary 67: Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es Σ -recursiva, entonces existe un predicado Σ -p.r. $P : \mathbf{N} \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ y una funcion Σ -p.r. $g : \mathbf{N} \rightarrow O$ tales que $f = g \circ M(P)$.

Proof: Supongamos que $O = \Sigma^*$. Sea \mathcal{P}_0 un programa el cual compute a f . Sea $<$ un orden total estricto sobre Σ . Note que podemos tomar

$$P = \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} [i^{n,m}((t)_1, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}_0) = n(\mathcal{P}_0) + 1 \wedge (t)_2 = \#^{<} (E_{*1}^{n,m}((t)_1, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}_0))]$$

$$g = \lambda t [*^{<}((t)_2)].$$

(Justifique por que P es Σ -p.r..) \square

Lemma 68: Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$, $i = 1, \dots, k$, son funciones Σ -recursivas tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces la funcion $f_1 \cup \dots \cup f_k$ es Σ -recursiva.

Proof: Probaremos el caso $k = 2$ y $O = \Sigma^*$. Sean \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 programas que computen las funciones f_1 y f_2 , respectivamente. Sean

$$P_1 = \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} [i^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}_1) = n(\mathcal{P}_1) + 1]$$

$$P_2 = \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} [i^{n,m}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}_2) = n(\mathcal{P}_2) + 1]$$

Notese que $D_{P_1} = D_{P_2} = \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m}$ y que P_1 y P_2 son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Ya que son Σ -mixtos, el Teorema 51 nos dice que son Σ -p.r.. Tambien notese que $D_{M((P_1 \vee P_2))} = D_{f_1} \cup D_{f_2}$.

$$\begin{aligned} \text{Definamos } g_1 &= \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[E_{*1}^{n,m}(M((P_1 \vee P_2))(\vec{x}, \vec{\alpha}), \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}_1)^{P_i(M((P_1 \vee P_2))(\vec{x}, \vec{\alpha}), \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \\ g_2 &= \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[E_{*1}^{n,m}(M((P_1 \vee P_2))(\vec{x}, \vec{\alpha}), \vec{x}, \vec{\alpha}, \mathcal{P}_2)^{P_i(M((P_1 \vee P_2))(\vec{x}, \vec{\alpha}), \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \end{aligned}$$

Notese que g_1 y g_2 son Σ -recursivas y que $D_{g_1} = D_{g_2} = D_{f_1} \cup D_{f_2}$, Ademas notese que

$$g_1(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} f_1(\vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{f_1} \\ \varepsilon & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$g_2(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \begin{cases} f_2(\vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{f_2} \\ \varepsilon & \text{caso contrario} \end{cases}$$

O sea que $f_1 \cup f_2 = \lambda \alpha \beta [\alpha \beta] \circ (g_1, g_2)$ es Σ -recursiva. \square

Lemma 69: Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces Halt^{Σ} es no Σ -recursivo.

Proof: Supongamos Halt^{Σ} es Σ -recursivo y por lo tanto Σ -computable. Por la proposicion de existencia de macros tenemos que hay un macro

[IF $Halt^\Sigma(W1)$ GOTO A1]

Sea \mathcal{P}_0 el siguiente programa de \mathcal{S}^Σ L1 [IF $Halt^\Sigma(P1)$ GOTO L1]

Note que - \mathcal{P}_0 termina partiendo desde $((0, 0, \dots), (\mathcal{P}_0, \varepsilon, \varepsilon, \dots))$ sii $Halt^\Sigma(\mathcal{P}_0) = 0$, lo cual produce una contradiccion si tomamos en (*) $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$. \square

Theorem 70: Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Entonces S es Σ -efectivamente enumerable sii S es Σ -recursivamente enumerable

Proof:(\Rightarrow) Use la Tesis de Church.

(\Leftarrow) Use el Theorem 42. \square

Theorem 71: Dado $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, son equivalentes (1) S es Σ -recursivamente enumerable (2) $S = I_F$, para alguna $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada F_i es Σ -recursiva. (3) $S = D_f$, para alguna funcion Σ -recursiva f (4) $S = \emptyset$ o $S = I_F$, para alguna $F : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada F_i es Σ -p.r.

Proof:(2) \Rightarrow (3). Para $i = 1, \dots, n + m$, sea \mathcal{P}_i un programa el cual computa a F_i y sea $<$ un orden total estricto sobre Σ . Sea $P : \mathbf{N} \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ dado por $P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$ sii se cumplen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} i^{k,l}(((t)_{k+l+1}, (t)_1, \dots, (t)_k, *^<((t)_{k+1}), \dots, *^<((t)_{k+l})), \mathcal{P}_1) &= n(\mathcal{P}_1) + 1 \\ &\vdots \\ i(((t)_{k+l+1}, (t)_1 \dots (t)_k, *^<((t)_{k+1}) \dots *^<((t)_{k+l})), \mathcal{P}_{n+m}) &= n(\mathcal{P}_{n+m}) + 1 \\ E_{\#1}^{k,l}(((t)_{k+l+1}, (t)_1, \dots, (t)_k, *^<((t)_{k+1}), \dots, *^<((t)_{k+l})), \mathcal{P}_1) &= x_1 \\ &\vdots \\ E_{\#1}^{k,l}(((t)_{k+l+1}, (t)_1, \dots, (t)_k, *^<((t)_{k+1}), \dots, *^<((t)_{k+l})), \mathcal{P}_n) &= x_n \\ E_{*1}^{k,l}(((t)_{k+l+1}, (t)_1, \dots, (t)_k, *^<((t)_{k+1}), \dots, *^<((t)_{k+l})), \mathcal{P}_{n+1}) &= \alpha_1 \\ &\vdots \\ E_{*1}^{k,l}(((t)_{k+l+1}, (t)_1, \dots, (t)_k, *^<((t)_{k+1}), \dots, *^<((t)_{k+l})), \mathcal{P}_{n+m}) &= \alpha_m \end{aligned}$$

Note que P es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. y por lo tanto P es Σ -p.r.. Pero entonces $M(P)$ es Σ -r. lo cual nos dice que se cumple (3) ya que $D_{M(P)} = I_F = S$. (3) \Rightarrow (4). Supongamos $S \neq \emptyset$. Sea $(z_1, \dots, z_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m) \in S$ fijo. Sea \mathcal{P} un programa el cual compute a f y sea $<$ un orden total estricto sobre Σ . Sea $P : \mathbf{N} \rightarrow \omega$ dado por $P(x) = 1$ sii

$$i^{n,m}((x)_{n+m+1}, (x)_1, \dots, (x)_n, *^<((x)_{n+1}), \dots, *^<((x)_{n+m})), \mathcal{P}) = n(\mathcal{P}) + 1$$

Es facil ver que P es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. por lo cual es Σ -p.r.. Sea $\bar{P} = P \cup C_0^{1,0} \upharpoonright_{\{0\}}$. Para $i = 1, \dots, n$, definamos $F_i : \omega \rightarrow \omega$ de la siguiente manera $F_i(x) = \begin{cases} (x)_i & \text{si } \bar{P}(x) = 1 \\ z_i & \text{si } \bar{P}(x) \neq 1 \end{cases}$

Para $i = n + 1, \dots, n + m$, definamos $F_i : \omega \rightarrow \Sigma^*$ de la siguiente manera $F_i(x) = \begin{cases} *^<((x)_i) & \text{si } \bar{P}(x) = 1 \\ \gamma_{i-n} & \text{si } \bar{P}(x) \neq 1 \end{cases}$

Por el lema de division por casos, cada F_i es Σ -p.r.. Es facil ver que $F = (F_1, \dots, F_{n+m})$ cumple (4). \square

Corollary 72: Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es Σ -recursiva y $S \subseteq D_f$ es Σ -r.e., entonces $f \upharpoonright_S$ es Σ -recursiva.

Proof:Supongamos $O = \Sigma^*$. Por el Theorem anterior $S = D_g$, para alguna funcion Σ -recursiva g . Notese que componiendo adecuadamente podemos suponer que $I_g = \{\varepsilon\}$. O sea que tenemos $f \upharpoonright_S = \lambda \alpha \beta [\alpha \beta] \circ (f, g)$. \square

Corollary 73: Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es Σ -recursiva y $S \subseteq I_f$ es Σ -r.e., entonces $f^{-1}(S) = \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) : f(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in S\}$ es Σ -r.e..

Proof:Por el Theorem anterior $S = D_g$, para alguna funcion Σ -recursiva g . O sea que $f^{-1}(S) = D_{g \circ f}$ es Σ -r.e.. \square

Corollary 74: Supongamos $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ -r.e.. Entonces $S_1 \cap S_2$ es Σ -r.e..

Proof: Por el Theorem anterior $S_i = D_{g_i}$, con g_1, g_2 funciones Σ -recursivas. Notese que podemos suponer que $I_{g_1}, I_{g_2} \subseteq \omega$ por lo que $S_1 \cap S_2 = D_{\lambda xy[xy] \circ (g_1, g_2)}$ es Σ -r.e.. \square

Corollary 75: Supongamos $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ -r.e.. Entonces $S_1 \cup S_2$ es Σ -r.e..

Proof: Supongamos $S_1 \neq \emptyset \neq S_2$. Sean $F, G : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tales que $I_F = S_1$, $I_G = S_2$ y las funciones F_i 's y G_i 's son Σ -recursivas. Sean $f = \lambda x [Q(x, 2)]$ y $g = \lambda x [Q(x-1, 2)]$. Sea $H : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$ dada por

$$H_i = (F_i \circ f)|_{\{x:x \text{ es par}\}} \cup (G_i \circ g)|_{\{x:x \text{ es impar}\}}$$

Por el Corollary 72 y el Lema 68, cada H_i es Σ -recursiva. Ya que $I_H = S_1 \cup S_2$, tenemos que $S_1 \cup S_2$ es Σ -r.e. \square

Theorem 76: Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Entonces S es Σ -efectivamente computable sii S es Σ -recursivo **Proof:** (\Rightarrow) Use la Tesis de Church.

(\Leftarrow) Use el Teorema 42. \square

Theorem 77: Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Son equivalentes (a) S es Σ -recursivo (b) S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ -recursivamente enumerables

Proof: (a) \Rightarrow (b). Note que $S = D_{Pred \circ \chi_S}$.

(b) \Rightarrow (a). Note que $\chi_S = C_1^{n,m}|_S \cup C_0^{n,m}|_{\omega^n \times \Sigma^{*m} - S}$. \square

Lemma 78: Supongamos que $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $A = \{\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma : \text{Halt}^\Sigma(\mathcal{P})\}$

es Σ -r.e. y no es Σ -recursivo. Mas aun el conjunto $N = \{\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma : \neg \text{Halt}^\Sigma(\mathcal{P})\}$ no es Σ -r.e.

Proof: Sea $P = \lambda t \mathcal{P} [i^{0,1}(t, \mathcal{P}, \mathcal{P}) = n(\mathcal{P}) + 1]$. Note que P es Σ -p.r. por lo que $M(P)$ es Σ -r.. Ademas note que $D_{M(P)} = A$, lo cual implica que A es Σ -r.e.. Ya que Halt^Σ es no Σ -recursivo (Lema 69) y

$$\text{Halt}^\Sigma = C_1^{0,1}|_A \cup C_0^{0,1}|_N$$

el Lema 68 nos dice que N no es Σ -r.e.. Finalmente supongamos A es Σ -recursivo. Entonces el conjunto $N = (\Sigma^* - A) \cap \text{Pro}^\Sigma$

deberia serlo, lo cual es absurdo. \square

0.5 Máquinas de Turing

Lemma 79: Sea $L \subseteq \Sigma^*$, entonces $L = L(M)$ para alguna máquina de Turing $M \Leftrightarrow L = H(M)$ para alguna máquina de Turing $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$.

Proof: \Rightarrow Dada una máquina $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ construiremos una máquina $M_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, \tilde{q}_0, B, \emptyset)$ tal que $L(M) = H(M_1)$. Tomaremos $\Gamma_1 = \Gamma \cup \{X\}$, con X un símbolo nuevo no perteneciente a Γ . Para cada $a \in \Sigma$, sea q_a un estado nuevo, no perteneciente a Q . Sean $\tilde{q}_0, q_r, q_d, q_B$ estados nuevos no pertenecientes a Q . Tomemos entonces:

$$Q_1 = Q \cup \{\tilde{q}_0, q_r, q_d, q_B\} \cup \{q_a : a \in \Sigma\}$$

Finalmente definamos δ_1 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} rcl\delta_1(\tilde{q}_0, B) &= \{(q_B, X, R)\} \\ \delta_1(q_B, a) &= \{(q_a, B, R)\}, \text{ para } a \in \Sigma \\ \delta_1(q_B, B) &= \{(q_0, B, K)\} \\ \delta_1(q_a, b) &= \{(q_b, a, R)\}, \text{ para } a, b \in \Sigma \\ \delta_1(q_a, B) &= \{(q_r, a, L)\}, \text{ para } a \in \Sigma \\ \delta_1(q_r, a) &= \{(q_r, a, L)\}, \text{ para } a \in \Sigma \\ \delta_1(q_r, B) &= \{(q_0, B, K)\} \\ \delta_1(q, X) &= \{(q, X, K)\}, \text{ para } q \in Q \\ \delta_1(q, \sigma) &= \delta(q, \sigma) \cup \{(q_d, \sigma, K)\}, \text{ para } q \in F \text{ y } \sigma \in \Gamma \\ \delta_1(q, \sigma) &= \delta(q, \sigma), \text{ para } q \in Q - F \text{ y } \sigma \in \Gamma \\ \delta_1(q_d, \sigma) &= \emptyset, \text{ para } \sigma \in \Gamma \end{aligned}$$

Nota: δ_1 se define igual a vacío para los casos no contemplados arriba.

\Leftarrow Dada $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, dejamos al lector la construcción de una máquina $M_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, \tilde{q}_0, B, \emptyset)$ tal que $H(M) = L(M_1)$.

Q.E.D.

Lemma 80: El predicado $\lambda n d d' [d \vdash d']$ es $(\Gamma \cup Q)$ -PR.

Proof: Note que $D_{\lambda d d' [d \vdash d']} = Des \times Des$. También notese que los predicados

$$\begin{aligned} \lambda p \sigma q \gamma [(p, \sigma, L) \in \delta(q, \gamma)] \\ \lambda p \sigma q \gamma [(p, \sigma, R) \in \delta(q, \gamma)] \\ \lambda p \sigma q \gamma [(p, \sigma, K) \in \delta(q, \gamma)] \end{aligned}$$

son $(\Gamma \cup Q)$ -p.r. ya que los tres tienen dominio igual a $Q \times \Gamma \times Q \times \Gamma$ el cual es finito (Corolario 36). Sea $P_R : Des \times Des \times \Gamma \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Q \times Q \rightarrow \omega$ definido por $P_R(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q) = 1$ sii $d = \alpha p \beta \wedge (q, \sigma, R) \in \delta(p, [\beta B]_1) \wedge d' = \alpha \sigma q \frown \beta$

Sea $P_L : Des \times Des \times \Gamma \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Q \times Q \rightarrow \omega$ definido por $P_L(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q) = 1$ sii $d = \alpha p \beta \wedge (q, \sigma, L) \in \delta(p, [\beta B]_1) \wedge \alpha \neq \varepsilon \wedge d' = [\alpha \frown q [\alpha]_{|\alpha|} \sigma \frown \beta]$

Sea $P_K : Des \times Des \times \Gamma \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Q \times Q \rightarrow \omega$ definido por $P_K(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q) = 1$ sii $d = \alpha p \beta \wedge (q, \sigma, K) \in \delta(p, [\beta B]_1) \wedge d' = [\alpha q \sigma \frown \beta]$

Se deja al lector la verificación de que estos predicados son $(\Gamma \cup Q)$ -p.r.. Notese que $\lambda d d' [d \vdash d']$ es igual al predicado $\lambda d d' [(\exists \sigma \in \Gamma)(\exists \alpha, \beta \in \Gamma^*)(\exists p, q \in Q)(P_R \vee P_L \vee P_K)(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q)]$ lo cual por el Lema 39 nos dice que $\lambda d d' [d \vdash d']$ es $(\Gamma \cup Q)$ -p.r. \square

Proposition 81: $\lambda n d d' [d \vdash^n d']$ es $(\Gamma \cup Q)$ -p.r..

Proof: Sea $Q = \lambda dd' [d \vdash d'] \cup C_0^{0,2} \mid_{(\Gamma \cup Q)^{*2} - Des^2}$ es decir Q es el resultado de extender con el valor 0 al predicado $\lambda dd' [d \vdash d']$ de manera que este definido en todo $(\Gamma \cup Q)^{*2}$. Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Gamma \cup Q$ y sea $Q_1 : \mathbf{N} \times Des \times Des \rightarrow \omega$ definido por $Q_1(x, d, d') = 1$ sii

$$\left((\forall i \in \mathbf{N})_{i \leq Lt(x)} *^<((x)_i) \in Des \right) \wedge *^<((x)_1) = d \wedge \\ *^<((x)_{Lt(x)}) = d' \wedge \left((\forall i \in \mathbf{N})_{i \leq Lt(x)-1} Q(*^<((x)_i), *^<((x)_{i+1})) \right)$$

Notese que dicho rapidamente $Q_1(x, d, d') = 1$ sii x codifica una computacion que parte de d y llega a d' . Se deja al lector la verificacion de que este predicado es $(\Gamma \cup Q)$ -p.r.. Notese que

$$\lambda n dd' \left[d \vdash^n d' \right] = \lambda n dd' [(\exists x \in \mathbf{N}) Lt(x) = n + 1 \wedge Q_1(x, d, d')]$$

Es decir que solo nos falta acotar el cuantificador existencial, para poder aplicar el lema de cuantificacion acotada. Ya que cuando $d_1, \dots, d_{n+1} \in Des$ son tales que $d_1 \vdash d_2 \vdash \dots \vdash d_{n+1}$ tenemos que $|d_i| \leq |d_1| + n$, para $i = 1, \dots, n$

una posible cota para dicho cuantificador es $\prod_{i=1}^{n+1} pr(i)^{|\Gamma \cup Q|^{d_i+n}}$.

O sea que, por el lema de cuantificacion acotada, tenemos que el predicado $\lambda n dd' \left[d \vdash^n d' \right]$ es $(\Gamma \cup Q)$ -p.r. \square

Theorem 82: Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ una maquina de Turing. Entonces $L(M)$ es Σ -recursivamente enumerable.

Proof: Sea P el siguiente predicado $(\Gamma \cup Q)$ -mixto

$$\lambda n \alpha \left[(\exists d \in Des) [q_0 B \alpha] \vdash^n d \wedge St(d) \in F \right]$$

Notese que $D_P = \omega \times \Gamma^*$. Dejamos al lector probar que P es $(\Gamma \cup Q)$ -p.r.. Sea $P' = P \mid_{\omega \times \Sigma^*}$. Notese que $P'(n, \alpha) = 1$ sii $\alpha \in L(M)$ atestiguado por una computacion de longitud n . Ya que P' es $(\Gamma \cup Q)$ -p.r. (por que?) y ademas es Σ -mixto, el Teorema 51 nos dice que P' es Σ -p.r.. Ya que $L(M) = D_{M(P')}$, el Teorema 71 nos dice que $L(M)$ es Σ -r.e.. \square

Theorem 83: Supongamos $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es Σ -Turing computable. Entonces f es Σ -recursiva.

Proof: Supongamos $O = \Sigma^*$ y sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, \vdash, F)$ una maquina de Turing deterministica con unit la cual compute a f . Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Gamma \cup Q$. Sea $P : \mathbf{N} \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ dado por $P(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$ sii

$(\exists q \in Q) [q_0 B \vdash^{x_1} \dots B \vdash^{x_n} B \alpha_1 \dots B \alpha_m] \vdash^{(x)_1} [q B *^<((x)_2)] \wedge$
 $Des)_{|d| \leq |*^<((x)_2)|+2} [q B *^<((x)_2)] \not\vdash d$ Es facil ver que P es $(\Gamma \cup Q)$ -p.r. por lo que P es Σ -p.r. ya que es Σ -mixto. Notese que

$$f = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[\left(\min_x P(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right)_2 \right],$$

lo cual nos dice que f es Σ -recursiva. \square

Lemma 84: Sea $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ y sea k tal que las variables que ocurren en \mathcal{P} estan todas en la lista $N1, \dots, N\bar{k}, P1, \dots, P\bar{k}$. Para cada $a \in \Sigma \cup \{ \vdash \}$, sea \tilde{a} un nuevo simbolo. Sea $\Gamma = \Sigma \cup \{ B, \vdash \} \cup \{ \tilde{a} : a \in \Sigma \cup \{ \vdash \} \}$. Entonces hay una maquina de Turing deterministica con unit $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \vdash, \{ q_f \})$ la cual satisface (1) $\delta(q_f, \sigma) = \emptyset$, para cada $\sigma \in \Gamma$. (2) Cualesquiera sean $x_1, \dots, x_k \in \omega$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Sigma^*$, el programa \mathcal{P} se detiene partiendo del estado $((x_1, \dots, x_k, 0, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \varepsilon, \dots))$

sii M se detiene partiendo de la descripcion instantanea $[q_0 B \vdash^{x_1} B \dots B \vdash^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k B]$

(3) Si $x_1, \dots, x_k \in \omega$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Sigma^*$ son tales que \mathcal{P} se detiene partiendo del estado $((x_1, \dots, x_k, 0, \dots), (\alpha_1, \dots, \dots))$ y llega al estado $((y_1, \dots, y_k, 0, \dots), (\beta_1, \dots, \beta_k, \varepsilon, \dots))$

entonces $[q_0 B \vdash^{x_1} B \dots B \vdash^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k B] \vdash^* [q_f B \vdash^{y_1} B \dots B \vdash^{y_k} B \beta_1 B \dots B \beta_k B]$

Proof: Dado un estado $((x_1, \dots, x_k, 0, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \varepsilon, \dots))$ lo representaremos en la cinta de

la siguiente manera

$$B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k B B B B \dots$$

A continuacion describiremos una serie de maquinas las cuales simularan, via la representacion anterior, las distintas clases de instrucciones que pueden ocurrir en \mathcal{P} . Todas las maquinas definidas tendran a \mid como unit y a B como blanco, tendran a Σ como su alfabeto terminal y su alfabeto mayor sera $\Gamma = \Sigma \cup \{B, \mid\} \cup \{\tilde{a} : a \in \Sigma \cup \{\mid\}\}$. Ademas tendran uno o dos estados finales con la propiedad de que si q es un estado final, entonces $\delta(q, \sigma) = \emptyset$, para cada $\sigma \in \Gamma$. Esta propiedad es importante ya que nos permitira concatenar pares de dichas maquinas identificando algun estado final de la primera con el inicial de la segunda. Para $1 \leq i \leq k$, sea M_i^+ una maquina tal que

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_{i-1}} B \mid^{x_{i+1}} B \mid^{x_{i+1}} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Es claro que la maquina M_i^+ simula la instruccion $N\bar{i} \leftarrow N\bar{i} + 1$. Para $1 \leq i \leq k$, sea M_i^- una maquina tal que

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_{i-1}} B \mid^{x_{i-1}} B \mid^{x_{i+1}} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$ y $a \in \Sigma$, sea M_i^a una maquina tal que

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$, sea M_i^\curvearrowright una maquina tal que

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_{i-1} B \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $j = 1, \dots, k$, y $a \in \Sigma$, sea IF_j^a una maquina con dos estados finales q_{si} y q_{no} tal que si

α_j comienza con a , entonces

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{si} \end{array}$$

y en caso contrario

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no} \end{array}$$

Analogamente para $j = 1, \dots, k$, sea IF_j una maquina tal que si $x_j \neq 0$, entonces

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_0 \end{array}$$

y si $x_j = 0$, entonces

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no} \end{array}$$

Para $1 \leq i, j \leq k$, sea $M_{i \leftarrow j}^*$ una maquina tal que

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_{i-1} B \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i, j \leq k$, sea $M_{i \leftarrow j}^\#$ una maquina tal que

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_{i-1}} B \mid^{x_j} B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_{i \leftarrow 0}$ una maquina tal que

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} \dots B \mid^{x_{i-1}} B B \mid^{x_{i+1}} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_{i \leftarrow \varepsilon}$ una maquina tal que

$$\begin{array}{ccc} B \vdash^{x_1} \dots B \vdash^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \vdash^{x_1} \dots B \vdash^{x_k} B\alpha_1 \dots B\alpha_{i-1} E \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Sea $M_{\text{SKIP}} = (\{q_0, q_f\}, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \vdash, \{q_f\})$,

con $\delta(q_0, B) = \{(q_f, B, K)\}$ y $\delta = \emptyset$ en cualquier otro caso. Finalmente sea

$M_{\text{GOTO}} = (\{q_0, q_{si}, q_{no}\}, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \vdash, \{q_{si}, q_{no}\})$,

con $\delta(q_0, B) = \{(q_{si}, B, K)\}$ y $\delta = \emptyset$ en cualquier otro caso. Para poder hacer concretamente las maquinas recién descritas deberemos diseñar antes algunas maquinas auxiliares. Para cada $j \geq 1$, sea D_j la maquina descrita en la Figura 1. Notese que

$$\begin{array}{ccc} \alpha B\beta_1 B\beta_2 B \dots B\beta_j B\gamma & \vdash^* & \alpha B\beta_1 B\beta_2 B \dots B\beta_j B\gamma \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

siempre que $\alpha, \gamma \in \Gamma^*$, $\beta_1, \dots, \beta_j \in (\Gamma - \{B\})^*$. Análogamente tenemos definidas las maquinas I_j . Para $j \geq 1$, sea TD_j una maquina con un solo estado final q_f y tal que

$$\begin{array}{ccc} \alpha B\gamma & \vdash^* & \alpha BB\gamma \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

cada vez que $\alpha, \gamma \in \Gamma^*$ y γ tiene exactamente j ocurrencias de B . Es decir la maquina TD_j corre un espacio a la derecha todo el bloque γ y agrega un blanco en el espacio que se genera a la izquierda de dicho bloque. Por ejemplo, para el caso de $\Sigma = \{\&\}$ podemos tomar TD_3 igual a la maquina de la Figura 3. Análogamente, para $j \geq 1$, sea TI_j una maquina tal que

$$\begin{array}{ccc} \alpha B\sigma\gamma & \vdash^* & \alpha B\gamma \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

cada vez que $\alpha \in \Gamma^*$, $\sigma \in \Gamma$ y γ tiene exactamente j ocurrencias de B . Es decir la maquina TI_j corre un espacio a la izquierda todo el bloque γ (por lo cual en el lugar de σ queda el primer simbolo de γ). Teniendo las maquinas auxiliares antes definidas podemos combinarlas para obtener las maquinas simuladoras de instrucciones. Por ejemplo M_i^a puede ser la maquina descrita en la Figura 4. En la Figura 2 tenemos una posible forma de diseñar la maquina IF_i^a . En la Figura 7 tenemos una posible forma de diseñar la maquina $M_{i \leftarrow j}^*$ para el caso $\Sigma = \{a, b\}$ y $i < j$.

Supongamos ahora que $\mathcal{P} = I_1 \dots I_n$. Para cada $i = 1, \dots, n$, definiremos una maquina M_i que simulara la instruccion I_i . Luego uniremos adecuadamente estas maquinas para formar la maquina que simulara a \mathcal{P}

- Si $Bas(I_i) = N\bar{j} \leftarrow N\bar{j} + 1$ tomaremos $M_i = M_j^+$ - Si $Bas(I_i) = N\bar{j} \leftarrow N\bar{j} - 1$ tomaremos $M_i = M_j^-$ - Si $Bas(I_i) = N\bar{j} \leftarrow 0$ tomaremos $M_i = M_{j \leftarrow 0}$. - Si $Bas(I_i) = N\bar{j} \leftarrow N\bar{m}$ tomaremos $M_i = M_{j \leftarrow m}^\#$. - Si $Bas(I_i) = IF \ N\bar{j} \neq 0 \ GOTO \ L\bar{m}$ tomaremos $M_i = IF_j$. - Si $Bas(I_i) = P\bar{j} \leftarrow P\bar{j}.a$ tomaremos $M_i = M_j^a$. - Si $Bas(I_i) = P\bar{j} \leftarrow \neg P\bar{j}$ tomaremos $M_i = M_j^\neg$. - Si $Bas(I_i) = P\bar{j} \leftarrow \varepsilon$ tomaremos $M_i = M_{j \leftarrow \varepsilon}$. - Si $Bas(I_i) = P\bar{j} \leftarrow P\bar{m}$ tomaremos $M_i = M_{j \leftarrow m}^*$. - Si $Bas(I_i) = IF \ P\bar{j} \ BEGINS \ a \ GOTO \ L\bar{m}$ tomaremos $M_i = IF_j^a$. - Si $Bas(I_i) = SKIP$ tomaremos $M_i = M_{\text{SKIP}}$. - Si $Bas(I_i) = GOTO \ L\bar{m}$ tomaremos $M_i = M_{\text{GOTO}}$. Ya que la maquina M_i puede tener uno o dos estados finales, la representaremos como se muestra en la Figura 5, entendiendo que en el caso en que M_i tiene un solo estado final, este esta representado por el circulo de abajo a la izquierda y en el caso en que M_i tiene dos estados finales, el estado final representado con líneas punteadas corresponde al estado q_{si} y el otro al estado q_{no} .

Para armar la maquina que simulara a \mathcal{P} hacemos lo siguiente. Primero unimos las maquinas M_1, \dots, M_n como lo muestra la Figura 6. Luego para cada i tal que $Bas(I_i)$ es de la forma $\alpha GOTO \ L\bar{m}$, ligamos con una flecha de la forma

$$\xrightarrow{B, B, K}$$

el estado final q_{si} de la M_i con el estado inicial de la M_h , donde h es tal que I_h es la primer instruccion que tiene label $L\bar{m}$. Es intuitivamente claro que la maquina asi obtenida cumple con lo requerido aunque una Proof formal de esto puede resultar extremadamente tediosa. \square

Theorem 85: Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es Σ -recursiva, entonces f es Σ -Turing computable.

Proof: Supongamos $O = \Sigma^*$. Ya que f es Σ -computable, existe $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ el cual computa f . Note que podemos suponer que \mathcal{P} tiene la propiedad de que cuando \mathcal{P} termina, en el estado alcanzado las variables numericas tienen todas el valor 0 y las alfabeticas distintas de P1 todas el valor ε . Sea M la maquina de Turing con unit dada por el lema anterior, donde elejimos el numero k con la propiedad adicional de ser mayor que n y m . Sea M_1 una maquina tal que para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$,

$$[q_0 B \text{ } ^{x_1} B \dots B \text{ } ^{x_n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_n B] \vdash^* [q B \text{ } ^{x_1} B \dots B \text{ } ^{x_n} B^{k-n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_n B]$$

donde q_0 es el estado inicial de M_1 y q es un estado tal que $\delta(q, \sigma) = \emptyset$, para cada σ . Sea M_2 una maquina tal que para cada $\alpha \in \Sigma^*$, $[q_0 B^{k+1} \alpha] \vdash^* [q B \alpha]$

donde q_0 es el estado inicial de M_2 y q es un estado tal que $\delta(q, \sigma) = \emptyset$, para cada σ . Note que la concatenacion de M_1 , M y M_2 (en ese orden) produce una maquina de Turing la cual computa f . \square

Theorem 86: Si $L \subseteq \Sigma^*$ es Σ -r.e., entonces $L = L(M) = H(M)$ para alguna maquina de Turing deterministica M .


Proof: Por el Teorema 71 hay una funcion $f : L \rightarrow \omega$, la cual es Σ -recursiva. Sea \mathcal{P} un programa el cual compute a f . Sea M la maquina de Turing deterministica dada en el lema anterior. Sea M_1 una maquina de Turing deterministica tal que para todo $\alpha \in \Sigma^*$,

$$[q_0 B \alpha] \vdash^* [q B^{k+1} \alpha]$$

donde q_0 es el estado inicial de M y q es un estado tal que $\delta(q, \sigma) = \emptyset$, para cada σ . Note que la concatenacion de M_1 con M (en ese orden) produce una maquina de Turing deterministica M_2 tal que $H(M_2) = L(M_2) = L$. \square

Bibliography

- [1] DIEGO VAGGIONE, «Apunte de Clase, 2017», *FaMAF, UNC*.
- [2] AGUSTÍN CURTO, «Carpeta de Clase, 2017», *FaMAF, UNC*.

Por favor, mejorá este documento en github 
<https://github.com/acurto714/resumenLengForm>