1 Máquinas de Turing

Lemma 1. *Este lemma no se evalua.*

Lemma 2. *El predicado* $\lambda dd' [d \vdash d']$ *es* $(\Gamma \cup Q)$*-PR.*

Proof. Note que $D_{\lambda dd'[d \vdash d']} = Des \times Des$. También nótese que los predicados

$$\lambda q\sigma p\gamma [(q, \sigma, L) \in \delta(p, \gamma)]$$
$$\lambda q\sigma p\gamma [(q, \sigma, R) \in \delta(p, \gamma)]$$
$$\lambda q\sigma p\gamma [(q, \sigma, K) \in \delta(p, \gamma)]$$

son $(\Gamma \cup Q)$-PR, ya que los tres tienen dominio igual a $Q \times \Gamma \times Q \times \Gamma$ el cual es finito por **Corollary 36**.

Sean:

$P_R : Des \times Des \times \Gamma \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Q \times Q \to \omega$
$P_R(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q) = 1 \Leftrightarrow (d = \alpha p \beta) \wedge ((q, \sigma, R) \in \delta(p, [\beta B]_1)) \wedge (d' = \lfloor \alpha\sigma q \frown \beta \rfloor)$

$P_L : Des \times Des \times \Gamma \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Q \times Q \to \omega$
$P_L(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q) = 1 \Leftrightarrow (d = \alpha p \beta) \wedge ((q, \sigma, L) \in \delta(p, [\beta B]_1)) \wedge (\alpha \neq \varepsilon) \wedge \left(d' = \left\lfloor \alpha^{\frown} q [\alpha]_{|\alpha|} \sigma^{\frown} \beta \right\rfloor\right)$

$P_K : Des \times Des \times \Gamma \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Q \times Q \to \omega$
$P_K(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q) = 1 \Leftrightarrow (d = \alpha p \beta) \wedge ((q, \sigma, K) \in \delta(p, [\beta B]_1)) \wedge (d' = \lfloor \alpha q \sigma^{\frown} \beta \rfloor)$

Veamos, por ejemplo, que P_L es $(\Gamma \cup Q)$-PR. Notar que:

$$P_L = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$$

donde P_1, P_2, P_3, P_4 son los siguientes predicados:

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda dd'\sigma\alpha\beta pq [d = \alpha p \beta] \\ &= \lambda\alpha\beta [\alpha = \beta] \circ (p_1^{0,7}, \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3 [\alpha_1\alpha_2\alpha_3] \circ (p_4^{0,7}, p_6^{0,7}, p_5^{0,7})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \lambda dd'\sigma\alpha\beta pq [(q, \sigma, L) \in \delta(p, [\beta B]_1)] \\ &= \lambda q\sigma p\gamma [(q, \sigma, L) \in \delta(p, \gamma)] \circ (p_7^{0,7}, p_3^{0,7}, p_6^{0,7}, \lambda i\alpha [[\alpha]_i] \circ (C_1^{0,7}, \lambda\alpha\beta [\alpha\beta] \circ (p_5^{0,7}, C_B^{0,7}))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= \lambda dd'\sigma\alpha\beta pq [\alpha \neq \varepsilon] \\ &= \lambda\alpha\beta [\alpha \neq \beta] \circ (p_4^{0,7}, C_\varepsilon^{0,7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4 &= \lambda dd'\sigma\alpha\beta pq \left[d' = \left\lfloor \alpha^{\frown} q [\alpha]_{|\alpha|} \sigma^{\frown} \beta \right\rfloor\right] \\ &= \lambda\alpha\beta [\alpha = \beta] \circ (p_2^{0,7}, \lambda\alpha [\lfloor \alpha \rfloor] \circ f) \end{aligned}$$

donde:

$$f = \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 [\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5] \circ (\lambda\alpha [\alpha^{\frown}] \circ p_4^{0,7}, p_7^{0,7}, \lambda i\alpha [[\alpha]_i] \circ (\lambda\alpha [|\alpha|] \circ p_4^{0,7}, p_4^{0,7}), p_3^{0,7}, \lambda\alpha [^{\frown}\alpha] \circ p_5^{0,7})$$

Luego, notar que P_1, P_2, P_3, P_4 son $(\Gamma \cup Q)$-PR, por lo tanto P_L es $(\Gamma \cup Q)$-PR. De manera similar, podemos ver que P_K y P_R son $(\Gamma \cup Q)$-PR.

Tomemos el siguiente predicado:

$$P = (P_R \vee P_L \vee P_K)$$

Tenemos que P es $(\Gamma \cup Q)$-PR. Nótese que $\lambda dd' \, [d \vdash d']$ es igual al predicado:

$$\lambda dd' \, [(\exists \sigma \in \Gamma)(\exists \alpha, \beta \in \Gamma^*)(\exists p, q \in Q) \; P(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q)]$$

Luego, aplicando cinco veces el **Lemma 39** obtenemos que $\lambda dd' \, [d \vdash d']$ es $(\Gamma \cup Q)$-PR. Veamos esto. Notar primero que como $\beta, \alpha, \sigma, p, q$ son subpalabras de d y d' respectivamente, tenemos que $|\beta|, |\alpha|, |\sigma|, |p|, |q| \leq |d| + |d'|$.

$$\begin{aligned}
L_1 &= \lambda x dd' \sigma\alpha\beta p \left[(\exists q \in Q)_{|q| \leq x} \; P(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q)\right] \\
Q_1 &= \lambda dd' \sigma\alpha\beta p \left[(\exists q \in Q)_{|q| \leq |d|+|d'|} \; P(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q)\right] \\
&= L_1 \circ (\lambda xy \, [x+y] \circ (\lambda\alpha \, [|\alpha|] \circ p_1^{0,6}, \lambda\alpha \, [|\alpha|] \circ p_2^{0,6}), p_1^{0,6}, p_2^{0,6}, p_3^{0,6}, p_4^{0,6}, p_5^{0,6}, p_6^{0,6})
\end{aligned}$$

Por **Lemma 39** tenemos que L_1 es $(\Gamma \cup Q)$-PR y por ende Q_1 es $(\Gamma \cup Q)$-PR. De la misma manera podemos que el predicado Q_2 es $(\Gamma \cup Q)$-PR.

$$\begin{aligned}
L_2 &= \lambda x dd' \sigma\alpha\beta \left[(\exists p \in Q)_{|p| \leq x} \; Q_1(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p)\right] \\
Q_2 &= \lambda dd' \sigma\alpha\beta \left[(\exists p \in Q)_{|p| \leq |d|+|d'|} \; Q_1(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p)\right] \\
&= L_2 \circ (\lambda xy \, [x+y] \circ (\lambda\alpha \, [|\alpha|] \circ p_1^{0,5}, \lambda\alpha \, [|\alpha|] \circ p_2^{0,5}), p_1^{0,5}, p_2^{0,5}, p_3^{0,5}, p_4^{0,5}, p_5^{0,5})
\end{aligned}$$

finalmente, tenemos que Q_3, Q_4, Q_5 son $(\Gamma \cup Q)$-PR.

$$\begin{aligned}
L_3 &= \lambda x dd' \sigma\alpha \left[(\exists \beta \in \Gamma^*)_{|\beta| \leq x} \; Q_2(d, d', \sigma, \alpha, \beta)\right] \\
Q_3 &= \lambda dd' \sigma\alpha \left[(\exists \beta \in \Gamma^*)_{|\beta| \leq |d|+|d'|} \; Q_2(d, d', \sigma, \alpha, \beta)\right] \\
&= L_3 \circ (\lambda xy \, [x+y] \circ (\lambda\alpha \, [|\alpha|] \circ p_1^{0,4}, \lambda\alpha \, [|\alpha|] \circ p_2^{0,4}), p_1^{0,4}, p_2^{0,4}, p_3^{0,4}, p_4^{0,4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_4 &= \lambda x dd' \sigma \left[(\exists \alpha \in \Gamma^*)_{|\alpha| \leq x} \; Q_3(d, d', \sigma, \alpha)\right] \\
Q_4 &= \lambda dd' \sigma \left[(\exists \alpha \in \Gamma^*)_{|\alpha| \leq |d|+|d'|} \; Q_3(d, d', \sigma, \alpha)\right] \\
&= L_4 \circ (\lambda xy \, [x+y] \circ (\lambda\alpha \, [|\alpha|] \circ p_1^{0,3}, \lambda\alpha \, [|\alpha|] \circ p_2^{0,3}), p_1^{0,3}, p_2^{0,3}, p_3^{0,3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_5 &= \lambda x dd' \left[(\exists \sigma \in \Gamma)_{|\sigma| \leq x} \; Q_4(d, d', \sigma)\right] \\
Q_5 &= \lambda dd' \left[(\exists \sigma \in \Gamma)_{|\sigma| \leq |d|+|d'|} \; Q_4(d, d', \sigma)\right] \\
&= L_5 \circ (\lambda xy \, [x+y] \circ (\lambda\alpha \, [|\alpha|] \circ p_1^{0,2}, \lambda\alpha \, [|\alpha|] \circ p_2^{0,2}), p_1^{0,2}, p_2^{0,2})
\end{aligned}$$

Notar que $Q_5 = \lambda dd' \, [d \vdash d']$. Por lo tanto, $\lambda dd' \, [d \vdash d']$ es $(\Gamma \cup Q)$-PR. □

Proposition 3. $\lambda n dd' \left[d \overset{n}{\vdash} d'\right]$ *es* $(\Gamma \cup Q)$*-PR.*

Theorem 4. *Sea* $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ *una máquina de Turing, entonces* $L(M)$ *es* Σ*-recursivamente enumerable.*

Proof. Sea P el siguiente predicado $(\Gamma \cup Q)$-mixto:

$$P = \lambda n\alpha \left[(\exists d \in Des) \; \lfloor q_0 B\alpha \rfloor \overset{n}{\vdash} d \wedge St(d) \in F\right]$$

Nótese que $D_P = \omega \times \Gamma^*$. Veamos que P es $(\Gamma \cup Q)$-PR. Para ello tomemos:

$$P = P_1 \wedge P_2$$

donde P_1 y P_2:

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda n\alpha \left[(\exists d \in Des) \lfloor q_0 B\alpha \rfloor \overset{n}{\vdash} d \right] \\ P_2 &= \lambda n\alpha \left[St(d) \in F \right] \end{aligned}$$

Sabemos que el conjunto F es finito, por **Corollary 30**, F es $(\Gamma \cup Q)$-PR. Además χ_F es $(\Gamma \cup Q)$-PR, por lo tanto el predicado P_2 es $(\Gamma \cup Q)$-PR.
Definimos:

$$\begin{aligned} Q &= \lambda n\alpha d \left[\lfloor q_0 B\alpha \rfloor \overset{n}{\vdash} d \right] \\ &= \lambda n d d' \left[d \overset{n}{\vdash} d \right] \circ (\lambda\alpha \left[\lfloor \alpha \rfloor \right] \circ (\lambda\alpha\beta \left[\alpha\beta \right] \circ (C^{1,2}_{q_0 B}, p^{1,2}_2)), p^{1,2}_3) \end{aligned}$$

Por **Lemma 39** tenemos que:

$$L = \lambda x n\alpha \left[(\exists d \in Des)_{|d| \leq x} \, Q(n, \alpha, d) \right]$$

es $(\Gamma \cup Q)$-PR, es decir, solo nos falta acotar el cuantificador existencial, para poder aplicar el **Lemma 39**. Dado que cuando $d_1, \ldots, d_{n+1} \in Des$ son tales que $d_1 \vdash d_2 \vdash \ldots \vdash d_{n+1}$ tenemos que:

$$|d_i| \leq |d_1| + n, \text{ para } i = 1, \ldots, n$$

luego, una posible cota para dicho cuantificador es:

$$|d| \leq |\lfloor q_0 B\alpha \rfloor| + n$$

Por lo tanto, tenemos que el predicado P_1 es $(\Gamma \cup Q)$-PR. En definitiva P es $(\Gamma \cup Q)$-PR.
Sea:

$$P' = P \mid_{\omega \times \Sigma^*}$$

nótese que $P'(n, \alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha \in L(M)$ atestiguado por una computación de longitud n.
Por **Corollary 72**, P' es $(\Gamma \cup Q)$-PR, y además es Σ-mixto. Utilizando el **Theorem 51** tenemos que P' es Σ-PR.
Dado que $L(M) = D_{M(P')}$, el **Theorem 71** nos dice que $L(M)$ es Σ-recursivamente enumerable.

□

Theorem 5. *Supongamos $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-Turing computable, entonces f es Σ-recursiva.*

Proof. Supongamos $O = \Sigma^*$. Sean:

- $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, \shortmid, F)$ una máquina de Turing determinística con unit la cual compute a f.
- $<$ un orden total estricto sobre $\Gamma \cup Q$.
- $P : \mathbf{N} \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ dado por:

$$P = P_1 \wedge P_2$$

donde:

$$P_1 = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists q\in Q)\ \lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} B \dots B \shortmid^{x_n} B\alpha_1 B\dots B\alpha_m\rfloor \overset{(x)_1}{\vdash} \lfloor qB *^{<}((x)_2)\rfloor\right]$$
$$P_2 = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall d\in Des)_{|d|\leq |*^{<}((x)_2)|+2}\ \lfloor qB *^{<}((x)_2)\rfloor \not\vdash d\right]$$

Si tomamos Q_1 y Q_2 como:

$$Q_1 = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}q\left[\lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} B \dots B \shortmid^{x_n} B\alpha_1 B\dots B\alpha_m\rfloor \overset{(x)_1}{\vdash} \lfloor qB *^{<}((x)_2)\rfloor\right]$$
$$Q_2 = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}d\left[\lfloor qB *^{<}((x)_2)\rfloor \not\vdash d\right]$$

Tenemos que:

$$P_1 = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists q\in Q)\ Q_1(x,\vec{x},\vec{\alpha},q)\right]$$
$$P_2 = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall d\in Des)_{|d|\leq |*^{<}((x)_2)|+2}\ Q_2(x,\vec{x},\vec{\alpha},d)\right]$$

Es fácil ver que Q_1 y Q_2 son $(\Gamma\cup Q)$-PR. Luego, aplicando el **Lemma 39** tenemos que P_1 y P_2 son $(\Gamma\cup Q)$-PR y por ende P es $(\Gamma\cup Q)$-PR. Dado que P es Σ-mixto, el **Theorem 51** nos dice que es Σ-PR. Nótese que:

$$f = \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[\left(\min_x\ P(x,\vec{x},\vec{\alpha})\right)_2\right]$$

lo cual nos dice que f es Σ-recursiva. □

Lemma 6. *Sea $\mathcal{P}\in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$ y sea k tal que las variables que ocurren en $\mathcal{P}$ están todas en la lista* $\mathrm{N}\bar{1},\dots,\mathrm{N}\bar{k},\mathrm{P}\bar{1},\dots,\mathrm{P}\bar{k}$. *Para cada $a\in\Sigma\cup\{\shortmid\}$, sean:*

- *$\tilde{a}$ un nuevo símbolo*
- $\Gamma = \Sigma\cup\{B,\shortmid\}\cup\{\tilde{a} : a\in\Sigma\cup\{\shortmid\}\}$

entonces existe una máquina de Turing determinística con unit $M = (Q,\Gamma,\Sigma,\delta,q_0,B,\shortmid,\{q_f\})$ la cual satisface:

1. *$\delta(q_f,\sigma)=\emptyset$, para cada $\sigma\in\Gamma$.*
2. *Cualesquiera sean $x_1,\dots,x_k\in\omega$ y $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\Sigma^*$, el programa $\mathcal{P}$ se detiene partiendo del estado:*
$$((x_1,\dots,x_k,0,\dots),(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\varepsilon,\dots))$$
si y sólo si M se detiene partiendo de la descripción instantánea:
$$\lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} B\dots B\shortmid^{x_k} B\alpha_1 B\dots B\alpha_k B\rfloor$$
3. *Si $x_1,\dots,x_k\in\omega$ y $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\Sigma^*$ son tales que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo del estado:*
$$((x_1,\dots,x_k,0,\dots),(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\varepsilon,\dots))$$
y llega al estado
$$((y_1,\dots,y_k,0,\dots),(\beta_1,\dots,\beta_k,\varepsilon,\dots))$$
entonces
$$\lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} B\dots B\shortmid^{x_k} B\alpha_1 B\dots B\alpha_k B\rfloor \overset{*}{\vdash} \lfloor q_f B \shortmid^{y_1} B\dots B\shortmid^{y_k} B\beta_1 B\dots B\beta_k B\rfloor$$

Proof. Dado un estado $((x_1, \dots, x_k, 0, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \varepsilon, \dots))$, dicho estado se representará en la cinta de la siguiente manera:

$$B \shortmid^{x_1} B \dots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k BBBB \dots$$

A continuación se describirán una serie de máquinas, las cuales simularán, vía la representación anterior, las distintas clases de instrucciones que pueden ocurrir en $\mathcal{P}$. Todas las máquinas definidas tendrán:

- $\shortmid$ como unit
- B como blanco
- Σ como su alfabeto terminal
- su alfabeto mayor será $\Gamma = \Sigma \cup \{B, \shortmid\} \cup \{\tilde{a} : a \in \Sigma \cup \{\shortmid\}\}$
- uno o dos estados finales con la propiedad de que si q es un estado final, entonces $\delta(q, \sigma) = \emptyset$, para cada $\sigma \in \Gamma$.

  Esta propiedad es importante ya que permitirá concatenar pares de dichas máquinas identificando algún estado final de la primera con el inicial de la segunda.

Para $1 \leq i \leq k$, sea M_i^+ una máquina tal que:

$$\begin{array}{lcl} B \shortmid^{x_1} B \dots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \shortmid^{x_1} B \dots B \shortmid^{x_{i-1}} B \shortmid^{x_i+1} B \shortmid^{x_{i+1}} \dots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_i^{\dot{-}}$ una máquina tal que:

$$\begin{array}{lcl} B \shortmid^{x_1} B \dots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \shortmid^{x_1} B \dots B \shortmid^{x_{i-1}} B \shortmid^{x_i \dot{-} 1} B \shortmid^{x_{i+1}} \dots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$ y $a \in \Sigma$, sea M_i^a una máquina tal que:

$$\begin{array}{lcl} B \shortmid^{x_1} B \dots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \shortmid^{x_1} B \dots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_{i-1} B\alpha_i a B\alpha_{i+1} B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_i^{\frown}$ una máquina tal que:

$$\begin{array}{lcl} B \shortmid^{x_1} B \dots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \shortmid^{x_1} B \dots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_{i-1} B {}^{\frown}\alpha_i B\alpha_{i+1} B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $j = 1, \dots, k$, y $a \in \Sigma$, sea IF_j^a una máquina con dos estados finales q_{si} y q_{no} tal que:
Si α_j comienza con a, entonces:

$$\begin{array}{lcl} B \shortmid^{x_1} B \dots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \shortmid^{x_1} B \dots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{si} \end{array}$$

Caso contrario:

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}\,B\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1B\ldots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}\,B\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1B\ldots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no} \end{array}$$

Análogamente, para $j = 1, \ldots, k$, sea IF_j una máquina tal que:
Si $x_j \neq 0$, entonces:

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}\,B\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1B\ldots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}\,B\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1B\ldots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{si} \end{array}$$

Si $x_j = 0$, entonces:

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}\,B\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1B\ldots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}\,B\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1B\ldots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no} \end{array}$$

Para $1 \leq i, j \leq k$, sea $M^{*}_{i \leftarrow j}$ una máquina tal que:

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}\,B\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1B\ldots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}\,B\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1B\ldots B\alpha_{i-1}B\alpha_jB\alpha_{i+1}B\ldots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i, j \leq k$, sea $M^{\#}_{i \leftarrow j}$ una máquina tal que:

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}\,B\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1B\ldots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}\,B\ldots B\,|^{x_{i-1}}\,B\,|^{x_j}\,B\,|^{x_{i+1}}\,B\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1B\ldots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_{i \leftarrow 0}$ una máquina tal que:

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}\,B\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1B\ldots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}\,B\ldots B\,|^{x_{i-1}}\,BB\,|^{x_{i+1}}\,B\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1B\ldots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_{i \leftarrow \varepsilon}$ una máquina tal que:

$$\begin{array}{lcl} B\,|^{x_1}\,B\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1B\ldots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\,|^{x_1}\,B\ldots B\,|^{x_k}\,B\alpha_1B\ldots B\alpha_{i-1}BB\alpha_{i+1}B\ldots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Sean:

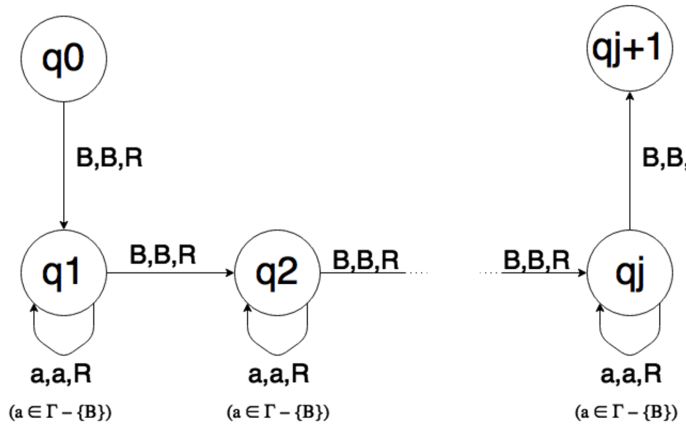
$$M_{\text{SKIP}} = (\{q_0, q_f\}, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, |, \{q_f\})$$

con $\delta(q_0, B) = \{(q_f, B, K)\}$ y $\delta = \emptyset$ en cualquier otro caso.

$$M_{\text{GOTO}} = (\{q_0, q_{si}, q_{no}\}, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, |, \{q_{si}, q_{no}\})$$

con $\delta(q_0, B) = \{(q_{si}, B, K)\}$ y $\delta = \emptyset$ en cualquier otro caso.

Para poder realizar concretamente las máquinas recién descriptas deberemos diseñar antes algunas máquinas auxiliares. Para cada $j \geq 1$, sean:



- D_j la siguiente máquina:

  Notar que:

$$\begin{array}{ccc} \alpha B\beta_1 B\beta_2 B\ldots B\beta_j B\gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha B\beta_1 B\beta_2 B\ldots B\beta_j B\gamma \\ \uparrow & & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow \\ q_0 & & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad q_f \end{array}$$

  siempre que $\alpha, \gamma \in \Gamma^*, \beta_1, \ldots, \beta_j \in (\Gamma - \{B\})^*$.

- I_j una máquina tal que:

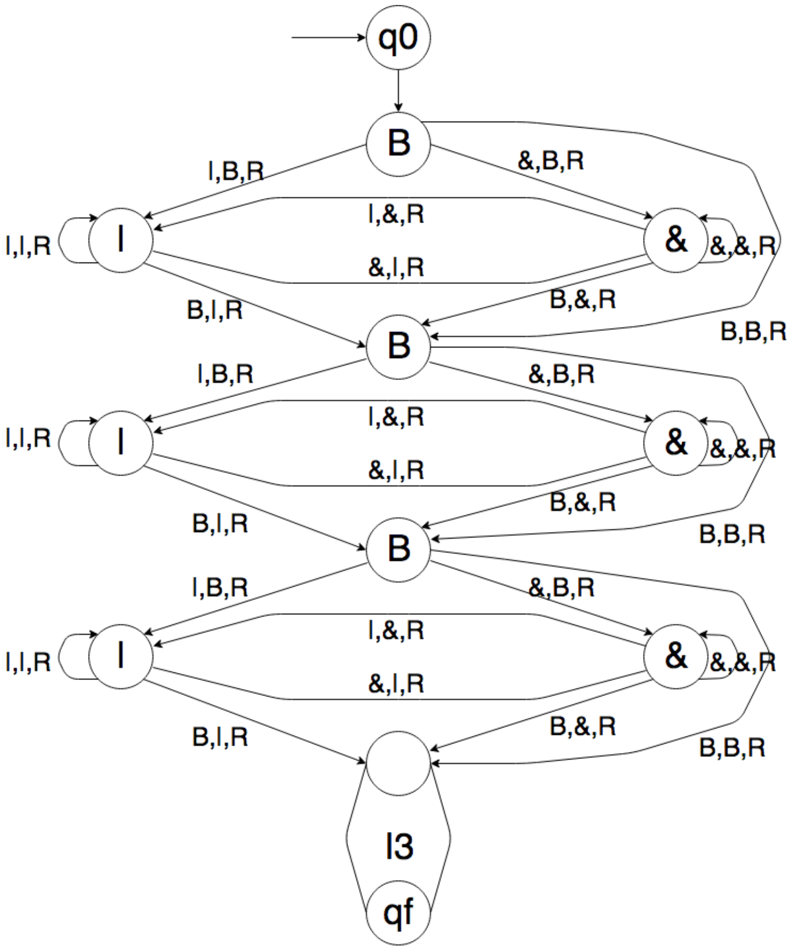
$$\begin{array}{ccc} \alpha B\beta_1 B\beta_2 B\ldots B\beta_j B\gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha B\beta_1 B\beta_2 B\ldots B\beta_j B\gamma \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow & & \uparrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad q_0 & & q_f \end{array}$$

  siempre que $\alpha, \gamma \in \Gamma^*, \beta_1, \ldots, \beta_j \in (\Gamma - \{B\})^*$.

- TD_j una máquina con un solo estado final q_f y tal que:

$$\begin{array}{ccc} \alpha B\gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha BB\gamma \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

  cada vez que $\alpha, \gamma \in \Gamma^*$ y γ tiene exactamente j ocurrencias de B, es decir, la máquina TD_j corre un espacio a la derecha todo el bloque γ y agrega un blanco en el espacio que se genera a la izquierda de dicho bloque. Por ejemplo, para el caso de $\Sigma = \{\&\}$ podemos tomar TD_3 igual a la siguiente máquina:

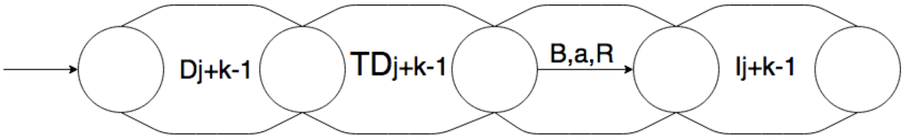


- TI_j una máquina tal que:

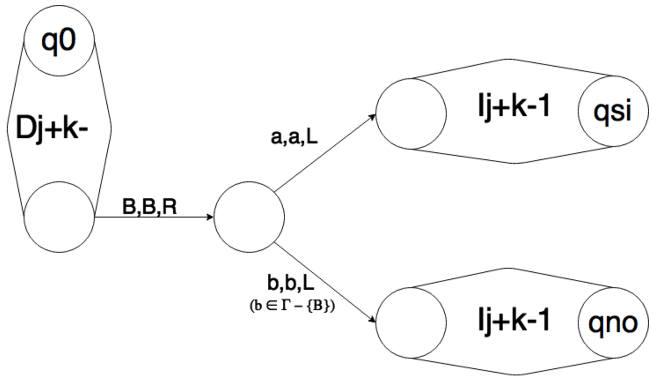
$$\begin{array}{ccc} \alpha B\sigma\gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha B\gamma \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

  cada vez que $\alpha \in \Gamma^*$, $\sigma \in \Gamma$ y γ tiene exactamente j ocurrencias de B, es decir la máquina TI_j corre un espacio a la izquierda todo el bloque γ (por lo cual en el lugar de σ queda el primer símbolo de γ).

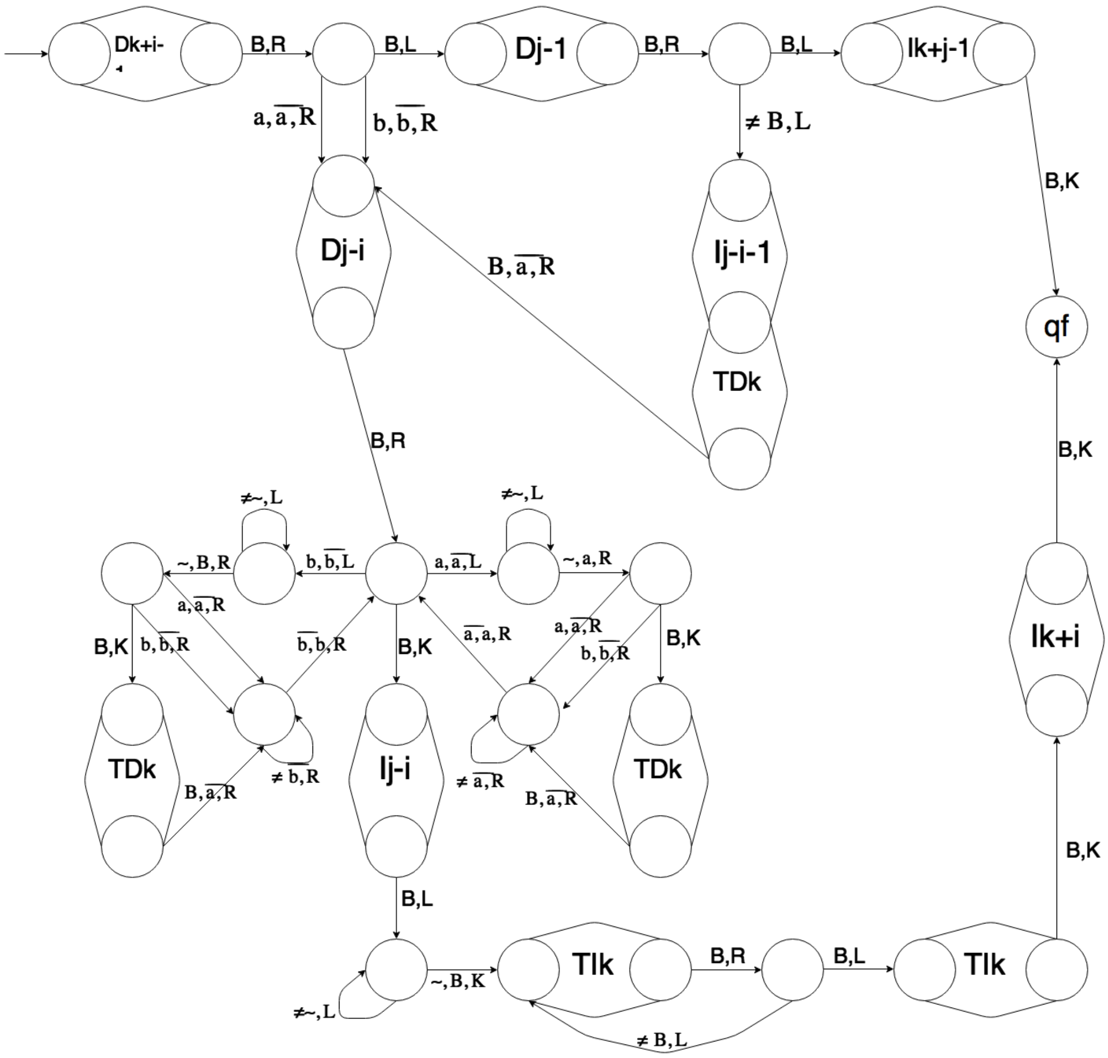
Teniendo las máquinas auxiliares antes definidas podemos combinarlas para obtener las máquinas simuladoras de instrucciones. Por ejemplo M_i^a puede ser la siguiente máquina:



En la siguiente máquina, tenemos una posible forma de diseñar la máquina IF_i^a.



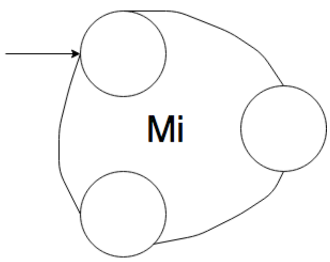
En la siguiente máquina tenemos una posible forma de diseñar la máquina $M^*_{i\leftarrow j}$ para el caso $\Sigma = \{a, b\}$ y $i < j$:



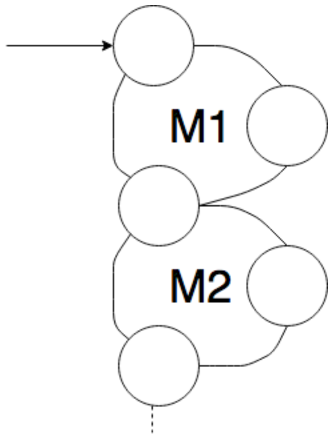
Supongamos ahora que $\mathcal{P} = I_1, \ldots, I_n$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, definiremos una máquina M_i que simulará la instrucción I_i. Luego uniremos adecuadamente dichas máquinas para formar la máquina que simulará a $\mathcal{P}$.

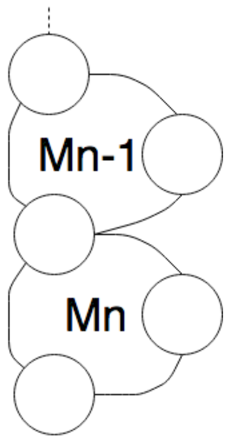
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{j} + 1$ tomaremos $M_i = M_j^+$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{j} \dot{-} 1$ tomaremos $M_i = M_j^{\dot{-}}$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow 0$ tomaremos $M_i = M_{j \leftarrow 0}$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{m}$ tomaremos $M_i = M_{j \leftarrow m}^{\#}$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{IF\ N}\bar{j} \neq 0 \mathrm{\ GOTO\ L}\bar{m}$ tomaremos $M_i = IF_j$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \mathrm{P}\bar{j}.a$ tomaremos $M_i = M_j^a$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow\ ^{\frown}\mathrm{P}\bar{j}$ tomaremos $M_i = M_j^{\frown}$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \varepsilon$ tomaremos $M_i = M_{j \leftarrow \varepsilon}$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \mathrm{P}\bar{m}$ tomaremos $M_i = M_{j \leftarrow m}^{*}$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{IF\ P}\bar{j}\ \mathrm{BEGINS}\ a\ \mathrm{GOTO\ L}\bar{m}$ tomaremos $M_i = IF_j^a$
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{SKIP}$ tomaremos $M_i = M_{\mathrm{SKIP}}$.
- Si $Bas(I_i) = \mathrm{GOTO\ L}\bar{m}$ tomaremos $M_i = M_{\mathrm{GOTO}}$

Dado que la máquina M_i puede tener uno o dos estados finales, se representará como se muestra en la siguiente figura:



entendiendo que en el caso en que M_i tiene un solo estado final, este esta representado por el circulo de abajo a la izquierda y en el caso en que M_i tiene dos estados finales, el estado final corresponde al estado q_{si} y el otro al estado q_{no}.
Para armar la máquina que simulará a $\mathcal{P}$, primero unimos las máquinas $M_1, \ldots, M_n$ como lo muestra la siguiente figura:





Luego para cada i tal que $Bas(I_i)$ es de la forma α GOTO L$\bar{m}$, ligamos con una flecha de la forma:

$$\xrightarrow{\quad B, B, K \quad}$$

el estado final q_{si} de la M_i con el estado inicial de la M_h, donde h es tal que I_h es la primer instrucción que tiene label L$\bar{m}$. Es intuitivamente claro que la máquina así obtenida cumple con lo requerido aunque una prueba formal de esto puede resultar extremadamente tediosa. $\square$

Theorem 7. *Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-recursiva, entonces f es Σ-Turing computable.*

Proof. Dado que f es Σ-computable, existe $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$ el cual computa f. Se probará solamente el caso $O = \Sigma^*$. Notar que cuando $\mathcal{P}$ termina, en el estado alcanzado, las variables numéricas tienen todas el valor 0 y las alfabéticas distintas de P1 todas el valor ε.
Sean:

- M la máquina de Turing con unit dada por el **Lemma 84**, donde elegimos el número k con la propiedad adicional de ser mayor que n y m.
- M_1 una máquina tal que para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$

  $$\lfloor q_0 B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_n} B\alpha_1 B \dots B\alpha_m B \rfloor \overset{*}{\vdash} \left\lfloor qB \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_n} B^{k-n} B\alpha_1 B \dots B\alpha_m B \right\rfloor$$

  donde q_0 es el estado inicial de M_1 y q es un estado tal que $\delta(q, \sigma) = \emptyset$, para cada σ.
- M_2 una máquina tal que para cada $\alpha \in \Sigma^*$

  $$\left\lfloor q_0 B^{k+1} \alpha \right\rfloor \overset{*}{\vdash} \lfloor qB\alpha \rfloor$$

  donde q_0 es el estado inicial de M_2 y q es un estado tal que $\delta(q, \sigma) = \emptyset$, para cada σ.

Notar que la concatenación de M_1, M y M_2, en ese orden, produce una máquina de Turing la cual computa f. $\square$

Theorem 8. *Este teorema no se evalua.*