

# Resumen de teoremas para el final de Lenguajes Formales y Computabilidad


Agustín Curto, agucurto95@gmail.com  
Francisco Nievas, frannievas@gmail.com

2017

## Contents

1	Notación y conceptos básicos	2
2	Procedimientos efectivos	3
3	Funciones $\Sigma$ -recursivas	5
4	El lenguaje $S^\Sigma$	19
5	Máquinas de Turing	20

**Nota:** Este resumen se corresponde con la materia dictada en el año 2017. Los autores no se responsabilizan de posibles cambios que pudiesen realizarse en los temas dictados en la misma, así como tampoco de errores involuntarios que pudiesen existir en dicho resumen.

Por favor, mejorá este documento en github   
<https://github.com/acurto714/resumenLengForm>

# 1 Notación y conceptos básicos

**Lemma 1.** Sea  $S \subseteq \omega \times \Sigma^*$ , entonces  $S$  es rectangular si y solo si se cumple la siguiente propiedad:

$$Si (x, \alpha), (y, \beta) \in S \Rightarrow (x, \beta) \in S$$

**Lemma 2.** La relación  $<$  es un orden total estricto sobre  $\Sigma^*$ .

**Lemma 3.** La función  $s^< : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ , definida recursivamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} s^<(\varepsilon) &= a_1 \\ s^<(\alpha a_i) &= \alpha a_{i+1} \quad \text{para } i < n \\ s^<(\alpha a_n) &= s^<(\alpha) a_1 \end{aligned}$$

tiene la siguiente propiedad:

$$s^<(\alpha) = \min\{\beta \in \Sigma^* : \alpha < \beta\}$$

**Corollary 4.**  $s^<$  es inyectiva.

**Lemma 5.** Se tiene que:

1.  $s^<(\alpha) \neq \varepsilon$ , para cada  $\alpha \in \Sigma^*$ .
2. Si  $\alpha \neq \varepsilon$ , entonces  $\alpha = s^<(\beta)$  para algún  $\beta$ .
3. Si  $S \subseteq \Sigma^* \neq \emptyset$ , entonces  $\exists \alpha \in S$  tal que  $\alpha < \beta$ , para cada  $\beta \in S - \{\alpha\}$ .

**Lemma 6.** Tenemos que:

$$\Sigma^* = \{s^<(0), s^<(1), \dots\}$$

Mas aún la función  $s^<$  es biyectiva.

**Lemma 7.** Sea  $n \geq 1$  fijo, entonces cada  $x \geq 1$  se escribe en forma única de la siguiente manera:

$$x = i_0 n^0 + \dots + i_{k-1} n^{k-1} + i_k n^k$$

con  $k \geq 0$  y  $1 \leq i_0, \dots, i_{k-1}, i_k \leq n$ .

**Lemma 8.** La función  $\#^<$  es biyectiva.

**Lemma 9.** Las funciones  $\#^<$  y  $s^<$  son una inversa de la otra.

**Lemma 10.** Si  $p, p_1, \dots, p_n$  son números primos y  $p$  divide a  $\prod_{i=1}^n p_i$ , entonces  $p = p_i$ , para algún  $i$ .

**Theorem 11.** Para cada  $x \in \mathbb{N}$ , hay una única sucesión  $(s_1, s_2, \dots) \in \omega^{[\mathbb{N}]}$  tal que:

$$x = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$$

Notar que  $\prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$  tiene sentido ya que es un producto que solo tiene una cantidad finita de factores no iguales a 1.

**Lemma 12.** *Las funciones:*

$$\begin{array}{ll} \mathbb{N} \rightarrow \omega^{[\mathbb{N}]} & \omega^{[\mathbb{N}]} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \rightarrow ((x)_1, (x)_2, \dots) & (s_1, s_2, \dots) \rightarrow \langle s_1, s_2, \dots \rangle \end{array}$$

*son biyecciones una inversa de la otra.*

**Lemma 13.** *Recordemos, para cada  $x \in \mathbb{N}$  se define:*

$$Lt(x) = \begin{cases} \max_i (x)_i \neq 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

*Luego, para cada  $x \in \mathbb{N}$ :*

$$1. Lt(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$2. x = \prod_{i=1}^{Lt(x)} pr(i)^{(x)_i}$$

*Cabe destacar entonces que la función  $\lambda ix[(x)_i]$  tiene dominio igual a  $\mathbb{N}^2$  y la función  $\lambda ix[Lt(x)]$  tiene dominio igual a  $\mathbb{N}$ .*

## 2 Procedimientos efectivos

**Lemma 14.** *Sean  $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$  conjuntos  $\Sigma$ -efectivamente enumerables, entonces:*

a)  $S_1 \cup S_2$  es  $\Sigma$ -efectivamente enumerable.

b)  $S_1 \cap S_2$  es  $\Sigma$ -efectivamente enumerable.

*Proof.* El caso en el que alguno de los conjuntos es vacío es trivial. Supongamos que  $S_1, S_2 \neq \emptyset$  y sean  $\mathbb{P}_1$  y  $\mathbb{P}_2$  procedimientos que enumeran a  $S_1$  y  $S_2$ .

a) El siguiente procedimiento enumera al conjunto  $S_1 \cup S_2$ :

**Si  $x$  es par:** realizar  $\mathbb{P}_1$  partiendo de  $x/2$  y dar el elemento de  $S_1$  obtenido como salida.

**Si  $x$  es impar:** realizar  $\mathbb{P}_2$  partiendo de  $(x-1)/2$  y dar el elemento de  $S_2$  obtenido como salida.

b) Veamos ahora que  $S_1 \cap S_2$  es  $\Sigma$ -efectivamente enumerable:

**Si  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ :** entonces no hay nada que probar.

**Si  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ :** sea  $z_0$  un elemento fijo de  $S_1 \cap S_2$ . Sea  $\mathbb{P}$  un procedimiento efectivo el cual enumere a  $\omega \times \omega$ .

El siguiente procedimiento enumera al conjunto  $S_1 \cap S_2$ :

**Etap 1:** Realizar  $\mathbb{P}$  con dato de entrada  $x$ , para obtener un par  $(x_1, x_2) \in \omega \times \omega$ .

**Etap 2:** Realizar  $\mathbb{P}_1$  con dato de entrada  $x_1$  para obtener un elemento  $z_1 \in S_1$ .

**Etap 3:** Realizar  $\mathbb{P}_2$  con dato de entrada  $x_2$  para obtener un elemento  $z_2 \in S_2$ .

**Etap 4:** Si  $z_1 = z_2$ , entonces dar como dato de salida  $z_1$ . En caso contrario dar como dato de salida  $z_0$ .

□

**Lemma 15.** Si  $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable entonces  $S$  es  $\Sigma$ -efectivamente enumerable.

*Proof.* El caso en el que  $S$  es vacío es trivial. Supongamos  $S \neq \emptyset$ . Sea  $(\vec{z}, \vec{\gamma}) \in S$ , fijo. Recordemos que  $\omega^n \times \Sigma^{*m}$  es  $\Sigma$ -efectivamente enumerable. Sean:

- $\mathbb{P}_1$  un procedimiento efectivo que enumere a  $\omega^n \times \Sigma^{*m}$
- $\mathbb{P}_2$  un procedimiento efectivo que compute a  $\chi_S$ .

El siguiente procedimiento enumera a  $S$ :

**Etap 1:** Realizar  $\mathbb{P}_1$  con  $x$  de entrada para obtener  $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ .

**Etap 2:** Realizar  $\mathbb{P}_2$  con  $(\vec{x}, \vec{\alpha})$  de entrada para obtener el valor *Booleano*  $e$  de salida.

**Etap 3:** Si  $e = 1$ : dar como dato de salida  $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ .

Si  $e = 0$ : dar como dato de salida  $(\vec{z}, \vec{\gamma})$ . □

**Theorem 16.** Sea  $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ , son equivalentes:

a)  $S$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable.

b)  $S$  y  $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$  son  $\Sigma$ -efectivamente enumerables.

*Proof.* (a)  $\Rightarrow$  (b) Si  $S$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable, por el **Lemma 15** tenemos que  $S$  es  $\Sigma$ -efectivamente enumerable. Notese además que, dado que  $S$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable,  $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$  también lo es, es decir, que aplicando nuevamente el **Lemma 15** tenemos que  $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$  es  $\Sigma$ -efectivamente enumerable.

(b)  $\Rightarrow$  (a) Sean:

- $\mathbb{P}_1$  un procedimiento efectivo que enumere a  $S$ .
- $\mathbb{P}_2$  un procedimiento efectivo que enumere a  $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ .

El siguiente procedimiento computa el predicado  $\chi_S$ :

**Etap 1:** Darle a la variable  $T$  el valor 0.

**Etap 2:** Realizar  $\mathbb{P}_1$  con el valor de  $T$  como entrada para obtener de salida la upla  $(\vec{y}, \vec{\beta})$ .

**Etap 3:** Realizar  $\mathbb{P}_2$  con el valor de  $T$  como entrada para obtener de salida la upla  $(\vec{z}, \vec{\gamma})$ .

**Etap 4:** Si  $(\vec{y}, \vec{\beta}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$ : entonces detenerse y dar como dato de salida el valor 1.

Si  $(\vec{z}, \vec{\gamma}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$ : entonces detenerse y dar como dato de salida el valor 0.

Si no sucede ninguna de las dos posibilidades: aumentar en 1 el valor de la variable  $T$  y dirigirse a la Etapa 2. □

**Theorem 17.** Dado  $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ , son equivalentes:

1.  $S$  es  $\Sigma$ -efectivamente enumerable.
2.  $S = \emptyset$  ó  $S = I_F$ , para alguna  $F : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$  tal que cada  $F_i$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable.
3.  $S = I_F$ , para alguna  $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$  tal que cada  $F_i$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable.
4.  $S = D_f$ , para alguna función  $f$  la cual es  $\Sigma$ -efectivamente computable.

### 3 Funciones $\Sigma$ -recursivas

**Lemma 18.** Si  $f, f_1, \dots, f_{n+m}$  son  $\Sigma$ -efectivamente computables, entonces  $f \circ (f_1, \dots, f_{n+m})$  lo es.

*Proof.* Sean:

- $\mathbb{P}$  un procedimiento efectivo que compute a  $f$ .
- $\mathbb{P}_1$  un procedimiento efectivo que compute a  $f_1$ .
- $\mathbb{P}_2$  un procedimiento efectivo que compute a  $f_2$ .
- $\vdots$
- $\mathbb{P}_{n+m}$  un procedimiento efectivo que compute a  $f_{n+m}$ .

El siguiente procedimiento  $\mathbb{P}$  computa  $f \circ (f_1, \dots, f_{n+m})$ :

**Etapas 1:** Realizar  $\mathbb{P}_1$  con dato de entrada  $(\vec{x}, \vec{\alpha})$  para obtener de salida  $o_1$ .

Realizar  $\mathbb{P}_2$  con dato de entrada  $(\vec{x}, \vec{\alpha})$  para obtener de salida  $o_2$ .

$\vdots$

Realizar  $\mathbb{P}_{n+m}$  con dato de entrada  $(\vec{x}, \vec{\alpha})$  para obtener de salida  $o_{n+m}$ .

**Etapas 2:** Dar como dato de salida el resultado de  $\mathbb{P}$  con dato de entrada  $(o_1, o_2, \dots, o_{n+m})$ .  $\square$

**Lemma 19.** Si  $f$  y  $g$  son  $\Sigma$ -efectivamente computables, entonces  $R(f, g)$  lo es.

*Proof.* Sean:

- $\mathbb{P}_1$  un procedimiento efectivo que compute a  $f$ .
- $\mathbb{P}_2$  un procedimiento efectivo que compute a  $g$ .

El siguiente procedimiento computa la función  $R(f, g)$ :

**Etapas 1:** Darle a la variable  $T$  el valor 0.

**Etapas 2:** Realizar  $\mathbb{P}_1$  con los valores  $(\vec{x}, \vec{\alpha})$  como entrada para obtener de salida  $A$ .

**Etapas 3:** Si  $T = t$ : entonces detenerse y dar como dato de salida el valor de  $A$ .

Si  $T \neq t$ : aumentar en 1 el valor de la variable  $T$ .

**Etapas 4:** Si  $Im(f), Im(g) \subseteq \omega$ : Realizar  $\mathbb{P}_2$  con los valores  $(A, T, \vec{x}, \vec{\alpha})$  como entrada y dirigirse a la Etapa 3.

Si  $Im(f), Im(g) \subseteq \Sigma^*$ : Realizar  $\mathbb{P}_2$  con los valores  $(T, \vec{x}, \vec{\alpha}, A)$  como entrada y dirigirse a la Etapa 3.  $\square$

**Lemma 20.** Si  $f$  y cada  $\mathcal{G}_a$  son  $\Sigma$ -efectivamente computables, entonces  $R(f, \mathcal{G})$  lo es.

**Theorem 21.** Si  $f \in PR^\Sigma$ , entonces  $f$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable.

*Proof.* Recordemos que  $PR^\Sigma = \bigcup_{k \geq 0} PR_k^\Sigma$ . Supongamos que  $f \in PR_k^\Sigma$ , probaremos este teorema por inducción en  $k$ .

Caso Base:  $k = 0$

Luego  $f \in PR_0^\Sigma$ , es decir  $f \in \{Suc, Pred, C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\} \cup \{p_j^{n,m} : 1 \leq j \leq n+m\}$ . Por lo tanto,  $f$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable.

Caso Inductivo:  $\boxed{k > 0}$

Supongamos ahora que si  $f \in \text{PR}_k^\Sigma \Rightarrow f$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable, veamos que  $f \in \text{PR}_{k+1}^\Sigma \Rightarrow f$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable.

Dado que las funciones de  $\text{PR}_k^\Sigma$  son  $\Sigma$ -efectivamente computable por hipótesis inductiva, y que el conjunto  $\text{PR}_{k+1}^\Sigma$  se contruye a partir de dichas funciones, a través de recursiones o composiciones, las cuales probamos son  $\Sigma$ -efectivamente computables en el **Lemma 18** y **Lemma 19**, concluimos entonces que  $f$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable.  $\square$

**Lemma 22.** a)  $\emptyset \in \text{PR}^\emptyset$ .

b)  $\lambda xy [x + y] \in \text{PR}^\emptyset$ .

c)  $\lambda xy [x.y] \in \text{PR}^\emptyset$ .

d)  $\lambda x [x!] \in \text{PR}^\emptyset$ .

*Proof.* a) Notese que  $\emptyset = \text{Pred} \circ C_0^{0,0} \in \text{PR}_1^\emptyset$ , entonces  $\emptyset \in \text{PR}^\emptyset$ .

b) Notar que:

$$\begin{aligned} \lambda xy [x + y] (0, x_1) &= x_1 = p_1^{1,0}(x_1) \\ \lambda xy [x + y] (t + 1, x_1) &= \lambda xy [x + y] (t, x_1) + 1 \\ &= \text{Suc} \circ p_1^{3,0} \end{aligned}$$

lo cual implica que  $\lambda xy [x + y] = R(p_1^{1,0}, \text{Suc} \circ p_1^{3,0}) \in \text{PR}_2^\emptyset$ , entonces  $\lambda xy [x + y] \in \text{PR}^\emptyset$ .

c) Primero note que:

$$\begin{aligned} C_0^{1,0}(0) &= C_0^{0,0}(\diamond) \\ C_0^{1,0}(t + 1) &= C_0^{1,0}(t) \end{aligned}$$

lo cual implica que  $C_0^{1,0} = R(C_0^{0,0}, p_1^{2,0}) \in \text{PR}_1^\emptyset$ .

También note que:

$$\begin{aligned} \lambda xy [x.y] (0, x_1) &= 0 = C_0^{1,0}(x_1) \\ \lambda xy [x.y] (t + 1, x_1) &= \lambda xy [x.y] (t, x_1) + x_1 \\ &= \lambda xy [x + y] \circ (p_1^{3,0}, p_3^{3,0}) \end{aligned}$$

lo cual implica que  $\lambda xy [x.y] = R(C_0^{1,0}, \lambda xy [x + y] \circ (p_1^{3,0}, p_3^{3,0})) \in \text{PR}_4^\emptyset$ , entonces  $\lambda xy [x.y] \in \text{PR}^\emptyset$ .

d) Notar que:

$$\begin{aligned} \lambda x [x!] (0) &= 1 = C_1^{0,0}(\diamond) \\ \lambda x [x!] (t + 1) &= \lambda x [x!] (t). (t + 1) \\ &= \lambda [x.y] \circ (p_1^{2,0}, \text{Suc} \circ p_2^{2,0}) \end{aligned}$$

lo cual implica que:  $\lambda x [x!] = R(C_1^{0,0}, \lambda xy [x.y] \circ (p_1^{2,0}, \text{Suc} \circ p_2^{2,0}))$ . Ya que  $C_1^{0,0} = \text{Suc} \circ C_0^{0,0}$ , tenemos que  $C_1^{0,0} \in \text{PR}_1^\emptyset$ . Por (c), tenemos que  $\lambda xy [x.y] \circ (p_1^{2,0}, \text{Suc} \circ p_2^{2,0}) \in \text{PR}_5^\emptyset$ , obteniendo que  $\lambda x [x!] \in \text{PR}_6^\emptyset$ , entonces  $\lambda x [x!] \in \text{PR}^\emptyset$ .  $\square$

**Lemma 23.** *Supongamos  $\Sigma \neq \emptyset$ , entonces:*

a)  $\lambda\alpha\beta[\alpha\beta] \in \text{PR}^\Sigma$ .

b)  $\lambda\alpha[|\alpha|] \in \text{PR}^\Sigma$ .

*Proof.* a) Ya que:

$$\begin{aligned}\lambda\alpha\beta[\alpha\beta](\alpha_1, \varepsilon) &= \alpha_1 = p_1^{0,1}(\alpha_1) \\ \lambda\alpha\beta[\alpha\beta](\alpha_1, \alpha a) &= d_a(\lambda\alpha\beta[\alpha\beta](\alpha_1, \alpha)) \quad \text{para } a \in \Sigma\end{aligned}$$

tenemos que  $\lambda\alpha\beta[\alpha\beta] = R(p_1^{0,1}, \mathcal{G})$ , donde  $\mathcal{G}_a = d_a \circ p_3^{0,3}$ , para cada  $a \in \Sigma$ .

Luego,  $\lambda\alpha\beta[\alpha\beta] \in \text{PR}^\Sigma$ .

b) Ya que:

$$\begin{aligned}\lambda\alpha[|\alpha|](\varepsilon) &= 0 = C_0^{0,0}(\diamond) \\ \lambda\alpha[|\alpha|](\alpha a) &= \lambda\alpha[|\alpha|](\alpha) + 1\end{aligned}$$

tenemos que  $\lambda\alpha[|\alpha|] = R(C_0^{0,0}, \mathcal{G})$ , donde  $\mathcal{G}_a = \text{Suc} \circ p_1^{0,1}$ , para cada  $a \in \Sigma$ .

Luego,  $\lambda\alpha[|\alpha|] \in \text{PR}^\Sigma$ .

□

**Lemma 24.** a)  $C_k^{n,m}, C_\alpha^{n,m} \in \text{PR}^\Sigma$ , para  $n, m, k \geq 0$ , y  $\alpha \in \Sigma^*$ .

b)  $C_k^{n,0} \in \text{PR}^\emptyset$ , para  $n, k \geq 0$ .

**Lemma 25.** a)  $\lambda xy[x^y] \in \text{PR}^\emptyset$ .

b)  $\lambda t\alpha[\alpha^t] \in \text{PR}^\Sigma$ .

*Proof.* a) Notar que:

$$\begin{aligned}\lambda tx[x^t](0, x_1) &= 0 = C_0^{1,0}(x_1) \\ \lambda tx[x^t](t+1, x_1) &= \lambda tx[x^t](t, x_1).x_1 \\ &= \lambda xy[x.y] \circ (p_1^{3,0}, p_3^{3,0})\end{aligned}$$

Osea que  $\lambda tx[x^t] = R(C_1^{1,0}, \lambda tx[x^t] \circ (p_2^{2,0}, p_1^{2,0})) \in \text{PR}^\emptyset$ .

Por lo tanto,  $\lambda xy[x^y] = \lambda tx[x^t] \circ (p_2^{2,0}, p_1^{2,0})$ .

b) Notar que:

$$\begin{aligned}\lambda t\alpha[\alpha^t](0, \alpha) &= \varepsilon = C_\varepsilon^{0,1}(\alpha) \\ \lambda t\alpha[\alpha^t](t+1, \alpha) &= \lambda t\alpha[\alpha^t](t, \alpha)\alpha \\ &= \lambda\alpha\beta[\alpha\beta] \circ (p_3^{1,2}, p_2^{1,2})\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\lambda t\alpha[\alpha^t] \in \text{PR}^\Sigma$ .

□

**Lemma 26.** *Si  $<$  es un orden total estricto sobre un alfabeto no vacío  $\Sigma$ , entonces:*

a)  $s^< \in \text{PR}^\Sigma$ .

b)  $\#^< \in \text{PR}^\Sigma$ .

c)  $*^< \in \text{PR}^\Sigma$ .

*Proof.* Supongamos  $\Sigma = \{a_1, \dots, a_k\}$  y  $<$  dado por  $a_1 < \dots < a_k$ .

a) Ya que:

$$\begin{aligned} s^<(\varepsilon) &= a_1 \\ s^<(\alpha a_i) &= \alpha a_{i+1} \quad \text{para } i < k \\ s^<(\alpha a_k) &= s^<(\alpha) a_1 \end{aligned}$$

tenemos que  $s^< = R(C_{a_1}^{0,0}, \mathcal{G})$ , donde  $\mathcal{G} = \{(a_i, d_{a_{i+1}} \circ p_1^{0,2}), (a_k, d_{a_1} \circ p_2^{0,2})\}$ .

Luego,  $s^< \in \text{PR}^\Sigma$ .

b) Ya que:

$$\begin{aligned} *^<(0) &= \varepsilon \\ *^<(t+1) &= s^<(*^<(t)) \end{aligned}$$

tenemos que  $*^< = R(C_\varepsilon^{0,0}, s^< \circ p_2^{1,1})$ . Luego,  $*^< \in \text{PR}^\Sigma$ .

c) Ya que:

$$\begin{aligned} \#^<(\varepsilon) &= 0 \\ \#^<(\alpha a_i) &= \#^<(\alpha).k + i \\ \text{para } i &= 1, \dots, k \end{aligned}$$

tenemos que  $\#^< = R(C_0^{0,0}, \mathcal{G})$ , donde  $\mathcal{G}_{a_i} = \lambda xy [x + y] \circ (\lambda xy [x.y] \circ (p_1^{1,1}, C_k^{1,1}), C_i^{1,1})$ , para  $i = 1, \dots, k$ . Luego,  $\#^< \in \text{PR}^\Sigma$ .

□

**Lemma 27.** a)  $\lambda xy [x \dot{-} y] \in \text{PR}^\emptyset$ .

b)  $\lambda xy [\max(x, y)] \in \text{PR}^\emptyset$ .

c)  $\lambda xy [x = y] \in \text{PR}^\emptyset$ .

d)  $\lambda xy [x \leq y] \in \text{PR}^\emptyset$ .

e) Si  $\Sigma \neq \emptyset \Rightarrow \lambda \alpha \beta [\alpha = \beta] \in \text{PR}^\Sigma$ .

*Proof.* a) Primero notar que:

$$\begin{aligned} \lambda x [x \dot{-} 1] (0) &= 0 = C_0^{0,0}(\diamond) \\ \lambda x [x \dot{-} 1] (t+1) &= t = p_2^{2,0} \end{aligned}$$

es decir  $\lambda x [x \dot{-} 1] = R(C_0^{0,0}, p_2^{2,0}) \in \text{PR}^\emptyset$ .



También notar que:

$$\begin{aligned}\lambda tx [x \dot{-} t] (0, x_1) &= x_1 = p_1^{1,0}(x_1) \\ \lambda tx [x \dot{-} t] (t+1, x_1) &= \lambda tx [x \dot{-} t] (t, x_1) \dot{-} 1 \\ &= \lambda x [x \dot{-} 1] \circ p_1^{3,0}\end{aligned}$$

es decir,  $\lambda tx [x \dot{-} t] = R(p_1^{1,0}, \lambda x [x \dot{-} 1] \circ p_1^{3,0}) \in \text{PR}^\emptyset$ .

Por lo tanto,  $\lambda xy [x \dot{-} y] = \lambda tx [x \dot{-} t] \circ (p_2^{2,0}, p_1^{2,0}) \in \text{PR}^\emptyset$ .

b) Notar que:

$$\begin{aligned}\lambda xy [\max(x, y)] &= \lambda xy [(x + (y \dot{-} x))] \\ &= \lambda xy [x + y] \circ (p_1^{2,0}, \lambda xy [x \dot{-} y] \circ (p_2^{2,0}, p_1^{2,0}))\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\lambda xy [\max(x, y)] \in \text{PR}^\emptyset$ .

c) Notar que:

$$\begin{aligned}\lambda xy [x = y] &= \lambda xy [1 \dot{-} ((x \dot{-} y) + (y \dot{-} x))] \\ &= \lambda xy [x \dot{-} y] \circ (C_1^{2,0}, \lambda xy [x + y] \circ (\lambda xy [x \dot{-} y] \circ (p_1^{2,0}, p_2^{2,0}), \lambda xy [x \dot{-} y] \circ (p_2^{2,0}, p_1^{2,0})))\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\lambda xy [x = y] \in \text{PR}^\emptyset$ .

d) Notar que:

$$\begin{aligned}\lambda xy [x \leq y] &= \lambda xy [1 \dot{-} (x \dot{-} y)] \\ &= \lambda xy [x \dot{-} y] \circ (C_1^{2,0}, \lambda xy [x \dot{-} y] \circ p_1^{2,0}, p_2^{2,0})\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\lambda xy [x \leq y] \in \text{PR}^\emptyset$ .

e) Sea  $<$  un orden total estricto sobre  $\Sigma$ . Ya que:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \#^<(\alpha) = \#^<(\beta)$$

tenemos que:

$$\lambda \alpha \beta [\alpha = \beta] = \lambda xy [x = y] \circ (\#^< \circ p_1^{0,2}, \#^< \circ p_2^{0,2})$$

Luego, utilizando el inciso (c) y el **Lemma 28** obtenemos que  $\lambda \alpha \beta [\alpha = \beta] \in \text{PR}^\Sigma$ . □

**Lemma 28.** Si  $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$  y  $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$  son predicados  $\Sigma$ -PR, entonces  $(P \vee Q), (P \wedge Q)$  y  $\neg P$  lo son también.

*Proof.* Notar que:

$$\begin{aligned}\neg P &= \lambda xy [x \dot{-} y] \circ (C_1^{n,m}, P) \\ (P \wedge Q) &= \lambda xt [x.y] \circ (P, Q) \\ (P \vee Q) &= \neg(\neg P \wedge \neg Q)\end{aligned}$$

□

**Lemma 29.** Si  $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$  son  $\Sigma$ -PR, entonces  $S_1 \cup S_2$ ,  $S_1 \cap S_2$  y  $S_1 - S_2$  lo son.

*Proof.* Notar que:

$$\begin{aligned}\chi_{S_1 \cup S_2} &= (\chi_{S_1} \vee \chi_{S_2}) \\ \chi_{S_1 \cap S_2} &= (\chi_{S_1} \wedge \chi_{S_2}) \\ \chi_{S_1 - S_2} &= \lambda[x \dot{-} y] \circ (\chi_{S_1}, \chi_{S_2})\end{aligned}$$

□

**Corollary 30.** Si  $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$  es finito, entonces  $S$  es  $\Sigma$ -PR.

*Proof.* Se probará el caso  $n = m = 1$ , es decir,  $S \subseteq \omega \times \Sigma^*$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, utilizando el **Lemma 29** que:

$$S = \{(z, \gamma)\}$$

Notar que  $\chi_S$  es el siguiente predicado:

$$(\chi_z \circ p_1^{1,1} \wedge \chi_\gamma \circ p_2^{1,1})$$

Ya que los predicados:

$$\begin{aligned}\chi_z &= \lambda xy [x = y] \circ (p_1^{1,0}, C_z^{1,0}) \\ \chi_\gamma &= \lambda \alpha \beta [\alpha = \beta] \circ (p_1^{0,1}, C_\gamma^{0,1})\end{aligned}$$

son  $\Sigma$ -PR, el **Lema 28** implica que  $\chi_S$  es  $\Sigma$ -PR, por lo tanto  $S$  es  $\Sigma$ -PR. □

**Lemma 31.** Supongamos  $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega, L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$  son conjuntos no vacíos, entonces  $S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$  es  $\Sigma$ -PR  $\Leftrightarrow S_1, \dots, S_n, L_1, \dots, L_m$  son  $\Sigma$ -PR.

*Proof.* Se probará el caso  $n = m = 1$ , es decir,  $S_1 \subseteq \omega, L_1 \subseteq \Sigma^*$ .

⇒ Sea  $(z_1, \gamma_1)$  un elemento fijo de  $S_1 \times L_1$ . Notar que:

$$\begin{aligned}x \in S_1 &\Leftrightarrow (x, \gamma_1) \in S_1 \times L_1 \\ \alpha \in L_1 &\Leftrightarrow (z_1, \alpha) \in S_1 \times L_1\end{aligned}$$

lo cual implica que:

$$\begin{aligned}\chi_{S_1} &= \chi_{S_1 \times L_1} \circ (p_1^{1,0}, C_{\gamma_1}^{1,0}) \\ \chi_{L_1} &= \chi_{S_1 \times L_1} \circ (C_{z_1}^{0,1}, p_1^{0,1})\end{aligned}$$

por lo tanto,  $L_1, S_1$  son  $\Sigma$ -PR.

⇐ Notar que:

$$\chi_{S_1 \times L_1} = (\chi_{S_1} \circ p_1^{1,1} \wedge \chi_{L_1} \circ p_2^{1,1})$$

luego, por el **Lemma 28**,  $S_1 \times L_1$  es  $\Sigma$ -PR. □

**Lemma 32.** Supongamos  $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$  es  $\Sigma$ -PR, donde  $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ . Si  $S \subseteq D_f$  es  $\Sigma$ -PR, entonces  $f|_S$  es  $\Sigma$ -PR.

*Proof.*  $\boxed{O = \Sigma^*}$  Notar que:

$$f|_S = \lambda x \alpha [\alpha^x] \circ (Suc \circ Pred \circ \chi_S, f)$$

luego  $f$  es  $\Sigma$ -PR.

$\boxed{O = \omega}$  Notar que:

$$f|_S = \lambda xy [x^y] \circ (f, Suc \circ Pred \circ \chi_S)$$

luego  $f$  es  $\Sigma$ -PR.

Notar que  $\boxed{Suc \circ Pred \circ \chi_S}$  funciona como un interruptor que evalúa  $f$ , si el elemento pertenece a  $S$ , y que no evalúa en caso contrario.  $\square$

**Lemma 33.** Si  $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$  es  $\Sigma$ -PR, entonces existe una función  $\Sigma$ -PR  $\bar{f} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ , tal que  $f = \bar{f}|_{D_f}$ .

**Proposition 34.** Un conjunto  $S$  es  $\Sigma$ -PR  $\Leftrightarrow S$  es el dominio de una función  $\Sigma$ -PR.

*Proof.*  $\boxed{\Rightarrow}$  Notar que  $S = D_{Pred \circ \chi_S}$ .

$\boxed{\Leftarrow}$  Probaremos por inducción en  $k$  que  $D_F$  es  $\Sigma$ -PR para cada  $F \in PR_k^\Sigma$ .

Caso Base:  $\boxed{k = 0}$  es decir,  $F \in PR_0^\Sigma$ . Luego:

$$\begin{aligned} F &\in \{Suc, Pred, C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\} \cup \{p_j^{n,m} : 1 \leq j \leq n+m\} \\ D_F &\in \{\omega, \mathbb{N}, \Sigma^*, \omega^n \times \Sigma^{*m}, \{\diamond\}\} \end{aligned}$$

dado que  $\omega, \mathbb{N}, \Sigma^*, \omega^n \times \Sigma^{*m}, \{\diamond\}$  son conjuntos  $\Sigma$ -PR, entonces  $D_F$  es  $\Sigma$ -PR.

Caso Inductivo: Supongamos el resultado vale para un  $k$  fijo y supongamos  $F \in PR_{k+1}^\Sigma$ , veremos entonces que  $D_F$  es  $\Sigma$ -PR. Existen varios casos, analizaremos cada uno por separado.

1.  $\boxed{F = R(f, g)}$

- Recursión primitiva sobre variable numérica.

(a) Caso 1:

$$\begin{aligned} f &: S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega \\ g &: \omega \times \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega \\ F &= \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega \end{aligned}$$

(b) Caso 2:

$$\begin{aligned} f &: S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \Sigma^* \\ g &: \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \\ F &= \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \Sigma^* \end{aligned}$$

- Recursión primitiva sobre variable alfabética.

(a) Caso 1:

$$\begin{aligned} f &: S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega \\ \mathcal{G}_a &: \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \rightarrow \omega \\ F &= S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \rightarrow \omega \end{aligned}$$

(b) Caso 2:

$$\begin{aligned} f & : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \Sigma^* \\ \mathcal{G}_a & : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \\ F & = S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \end{aligned}$$

con  $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$  y  $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$  conjuntos no vacíos y  $f, g \in \text{PR}_k^\Sigma$ , para todos los casos anteriores.

Por hipótesis inductiva tenemos que  $D_f = S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$  es  $\Sigma$ -PR, lo cual por el **Lemma 31** nos dice que los conjuntos  $S_1, \dots, S_n, L_1, \dots, L_m$  son  $\Sigma$ -PR. Ya que  $\omega, \Sigma^*$  son  $\Sigma$ -PR, el **Lemma 31** nos dice que  $D_F$  es  $\Sigma$ -PR.

2.  $\boxed{F = g \circ (g_1, \dots, g_{n+m})}$  donde:

$$\begin{aligned} g & : D_g \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O \\ g_i & : D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \omega \quad i = 1, \dots, n \\ g_i & : D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \Sigma^* \quad i = n+1, \dots, n+m \end{aligned}$$

están en  $\text{PR}_k^\Sigma$ . Por **Lemma 33**, existen funciones  $\Sigma$ -PR  $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{n+m}$  las cuales son  $\Sigma$ -totales y cumplen:

$$\begin{aligned} g_i & = \bar{g}_i \upharpoonright_{D_{g_i}} \\ \text{para } i & = 1, \dots, n+m \end{aligned}$$

Por hipótesis inductiva, los conjuntos  $D_g, D_{g_i}$ , para  $i = 1, \dots, n+m$ , son  $\Sigma$ -PR y por lo tanto:

$$S = \bigcap_{i=1}^{n+m} D_{g_i}$$

lo es. Notese además, que:

$$\chi_{D_F} = ((\chi_{D_g} \circ (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{n+m})) \wedge \chi_S)$$

lo cual nos dice que  $D_F$  es  $\Sigma$ -PR. □

**Lemma 35.** Supongamos  $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O, i = 1, \dots, k$ , son funciones  $\Sigma$ -PR tales que  $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$  para  $i \neq j$ , entonces  $f_1 \cup \dots \cup f_k$  es  $\Sigma$ -PR.

*Proof.* Vamos a probar solo el caso en que  $k = 2$  y  $O = \omega$ . Sean:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 & : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^* \quad \text{tal que } \bar{f}_1 \upharpoonright_{D_{f_1}} = f_1 \\ \bar{f}_2 & : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^* \quad \text{tal que } \bar{f}_2 \upharpoonright_{D_{f_2}} = f_2 \end{aligned}$$

funciones  $\Sigma$ -PR por **Lemma 33**. Luego, por el **Lemma 34** los conjuntos  $D_{f_1}$  y  $D_{f_2}$  son  $\Sigma$ -PR y por lo tanto lo es  $D_{f_1} \cup D_{f_2}$ . Ya que:

$$\begin{aligned} f_1 \cup f_2 & = (\bar{f}_1^{\chi_{D_{f_1}}} \cdot \bar{f}_2^{\chi_{D_{f_2}}}) \upharpoonright_{D_{f_1} \cup D_{f_2}} \\ & = \lambda xy [x.y] \circ (\lambda xy [x^y] \circ (\bar{f}_1, \chi_{D_{f_1}}), \lambda xy [x^y] \circ (\bar{f}_2, \chi_{D_{f_2}})) \upharpoonright_{D_{f_1} \cup D_{f_2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f_1 \cup f_2$  es  $\Sigma$ -PR. □

**Corollary 36.** Supongamos  $f$  es una función  $\Sigma$ -mixta cuyo dominio es finito, entonces  $f$  es  $\Sigma$ -PR.

**Lemma 37.**  $\lambda i \alpha [[\alpha]_i]$  es  $\Sigma$ -PR.

**Lemma 38.** Sean  $n, m \geq 0$ .

a) Si  $f : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega$  es  $\Sigma$ -PR, con  $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$  y  $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$  no vacíos, entonces lo son las funciones:

$$\textbf{Sumatoria: } \lambda xy \vec{x} \vec{\alpha} \left[ \sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

$$\textbf{Productoria: } \lambda xy \vec{x} \vec{\alpha} \left[ \prod_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

b) Si  $f : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \Sigma^*$  es  $\Sigma$ -PR, con  $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$  y  $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$  no vacíos, entonces lo es la función:

$$\textbf{Concatenatoria: } \lambda xy \vec{x} \vec{\alpha} \left[ C_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

*Proof.* Se probará solamente el inciso (a).

Sea  $G = \lambda tx \vec{x} \vec{\alpha} \left[ \sum_{i=x}^{i=t} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ . Ya que:

$$\lambda xy \vec{x} \vec{\alpha} \left[ \sum_{i=x}^{i=y} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] = G \circ \left( p_2^{n+2,m}, p_1^{n+2,m}, p_3^{n+2,m}, \dots, p_{n+m+2}^{n+2,m} \right)$$

solo tenemos que probar que  $G$  es  $\Sigma$ -PR. Primero note que:

$$\begin{aligned} G(0, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ f(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x = 0 \end{cases} \\ G(t+1, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x > t+1 \\ G(t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq t+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Sean:

$$\begin{aligned} P_1 &= \{(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x > 0\} \\ P_2 &= \{(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x = 0\} \\ Q_1 &= \{(z, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x > t+1\} \\ Q_2 &= \{(z, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x \leq t+1\} \end{aligned}$$

Notar que  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  son conjuntos  $\Sigma$ -PR, probaremos solo  $Q_1$ . Debemos ver que  $\chi_{Q_1}$  es  $\Sigma$ -PR.

$$\begin{aligned} f \text{ es } \Sigma - PR &\Rightarrow D_f = \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \text{ es } \Sigma - PR && \textbf{Proposition 34} \\ &\Rightarrow S_1, \dots, S_n, L_1, \dots, L_m \text{ son } \Sigma - PR && \textbf{Lemma 31} \end{aligned}$$

$$\omega \text{ es } \Sigma - PR \Rightarrow R = \omega^3 \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \text{ es } \Sigma - PR$$

Notar que:

$$\chi_{Q_1} = (\chi_R \wedge \lambda z t x \vec{x} \vec{\alpha} [x > t + 1])$$

por cual  $\chi_{Q_1}$  es  $\Sigma$ -PR ya que es la conjunción de dos predicados  $\Sigma$ -PR.  
Además notar que  $G = R(g, h)$ , donde:

$$\begin{aligned} g &= C_0^{n+1, m} \mid_{P_1} \cup \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [f(0, \vec{x}, \vec{\alpha})] \mid_{P_2} \\ h &= C_0^{n+3, m} \mid_{Q_1} \cup \lambda z t x \vec{x} \vec{\alpha} [z + f(t + 1, \vec{x}, \vec{\alpha})] \mid_{Q_2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el **Lemma 35** y el **Lemma 32** garantizan que  $G$  es  $\Sigma$ -PR.  $\square$

**Lemma 39.** Sean  $n, m \geq 0$ .

a) Sea  $P : S \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \rightarrow \omega$  un predicado  $\Sigma$ -PR y supongamos  $\bar{S} \subseteq S$  es  $\Sigma$ -PR, entonces:

$$\begin{aligned} \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})] \\ \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})] \end{aligned}$$

son predicados  $\Sigma$ -PR.

b) Sea  $P : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times L \rightarrow \omega$  un predicado  $\Sigma$ -PR y supongamos  $\bar{L} \subseteq L$  es  $\Sigma$ -PR, entonces:

$$\begin{aligned} \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)] \\ \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)] \end{aligned}$$

son predicados  $\Sigma$ -PR.

*Proof.* Se probará solamente el inciso (a). Sea:

$$\bar{P} = P \mid_{\bar{S} \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m} \cup C_1^{1+n, m} \mid_{(\omega - \bar{S}) \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m}$$

Notese que  $\bar{P}$  es  $\Sigma$ -PR. Ya que:

$$\begin{aligned} \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})] &= \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[ \prod_{t=0}^{t=x} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \\ &= \lambda x y \vec{x} \vec{\alpha} \left[ \prod_{t=x}^{t=y} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \circ (C_0^{1+n, m}, p_1^{1+n, m}, \dots, p_{1+n+m}^{1+n, m}) \end{aligned}$$

el **Lemma 38** implica que  $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$  es  $\Sigma$ -PR.

Finalmente note que:

$$\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})] = \neg \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} \neg P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$$

es  $\Sigma$ -PR.  $\square$

**Lemma 40.** a) El predicado  $\lambda x y [x \text{ divide } y]$  es  $\emptyset$ -PR.

b) El predicado  $\lambda x [x \text{ es primo}]$  es  $\emptyset$ -PR.

c) El predicado  $\lambda \alpha \beta [\alpha \text{ inicial } \beta]$  es  $\Sigma$ -PR.

*Proof.* a) Si tomamos  $P = \lambda t x_1 x_2 [x_2 = t.x_1] \in \text{PR}^\emptyset$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \lambda x_1 x_2 [x_1 \text{ divide } x_2] &= \lambda x_1 x_2 [(\exists t \in \omega)_{t \leq x_2} P(t, x_1, x_2)] \\ &= \lambda x x_1 x_2 [(\exists t \in \omega)_{t \leq x} P(t, x_1, x_2)] \circ (p_2^{2,0}, p_1^{2,0}, p_2^{2,0}) \end{aligned}$$

por el **Lemma 39**,  $\lambda x y [x \text{ divide } y]$  es  $\emptyset$ -PR.

b) Ya que:

$$x \text{ es primo} \Leftrightarrow x > 1 \wedge ((\forall t \in \omega)_{t \leq x} t = 1 \vee t = x \vee \neg(t \text{ divide } x))$$

tomamos  $P = \lambda t x [t = 1 \vee t = x \vee (t \text{ divide } x)]$ . Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lambda x [x \text{ es primo}] &= \lambda x [x > 1] \wedge \lambda x [(\forall t \in \omega)_{t \leq x} P(t, x)] \\ &= \lambda x [x > 1] \wedge \lambda x_1 x_2 [(\forall t \in \omega)_{t \leq x_1} P(t, x_2)] \circ (p_1^{1,0}, p_1^{1,0}) \end{aligned}$$

por lo tanto,  $\lambda x [x \text{ es primo}]$  es  $\emptyset$ -PR.

c) Sea  $P = \lambda \alpha \beta \gamma [\beta = \alpha \gamma]$ , entonces:

$$\begin{aligned} \lambda \alpha \beta [\alpha \text{ inicial } \beta] &= \lambda \alpha \beta [(\exists \gamma \in \Sigma^*)_{|\gamma| \leq |\beta|} P(\alpha, \beta, \gamma)] \\ &= \lambda x \alpha \beta [(\exists \gamma \in \Sigma^*)_{|\gamma| \leq x} P(\alpha, \beta, \gamma)] \circ (\lambda \alpha [|\alpha|] \circ p_2^{0,2}, p_1^{0,2}, p_2^{0,2}) \end{aligned}$$

luego,  $\lambda \alpha \beta [\alpha \text{ inicial } \beta]$  es  $\Sigma$ -PR. □

**Lemma 41.** Si  $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$  es un predicado  $\Sigma$ -efectivamente computable y  $D_P$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable, entonces la función  $M(P)$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable.

*Proof.* Sean:

- $\mathbb{P}_1$  un procedimiento efectivo que compute  $\chi_{D_P}$ .
- $\mathbb{P}_2$  un procedimiento efectivo que compute el predicado  $P$ .

El siguiente procedimiento computa  $M(P)$ :

**Etapas:** Darle a la variable  $T$  el valor 0.

**Etapas:** Realizar el procedimiento  $\mathbb{P}_1$  con entrada  $(T, \vec{x}, \vec{\alpha})$  para obtener el valor *Booleano*  $p$  de salida.

**Etapas:** Si  $p = 1$ : realizar  $\mathbb{P}_2$  con entrada  $(T, \vec{x}, \vec{\alpha})$  para obtener el valor *Booleano*  $e$  de salida.  
Si  $p = 0$ : aumentar en 1 el valor de  $T$ , y dirigirse a la Etapa 2.

**Etapas:** Si  $e = 1$ : dar como dato de salida  $T$ .

Si  $e = 0$ : aumentar en 1 el valor de  $T$ , y dirigirse a la Etapa 2. □

**Theorem 42.** Si  $f \in R^\Sigma$ , entonces  $f$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable.

*Proof.* Recordemos que  $R^\Sigma = \bigcup_{k \geq 0} R_k^\Sigma$ . Supongamos que  $f \in R_k^\Sigma$ , probaremos este teorema por inducción en  $k$ .

Caso Base:  $k = 0$

Luego  $f \in R_0^\Sigma = PR_0^\Sigma$ , es decir:

$$f \in \{Suc, Pred, C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\} \cup \{p_j^{n,m} : 1 \leq j \leq n+m\}$$

Por lo tanto,  $f$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable.

Caso Inductivo:  $\boxed{k > 0}$

Supongamos ahora que si  $f \in R_k^\Sigma \Rightarrow f$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable, veamos que  $f \in R_{k+1}^\Sigma \Rightarrow f$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable.

Dado que las funciones de  $R_k^\Sigma$  son  $\Sigma$ -efectivamente computable por hipótesis inductiva, y que  $R_{k+1}^\Sigma$  se contruye a partir de las mismas, a través de recursiones, composiciones o minimizaciones, las cuales probamos son  $\Sigma$ -efectivamente computables en el **Lemma 18**, **Lemma 19**, y **Lemma 41** respectivamente, entonces concluimos que  $f$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable.  $\square$

**Lemma 43.** Sean  $n, m \geq 0$ . Sea  $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$  un predicado  $\Sigma$ -PR, entonces:

a)  $M(P)$  es  $\Sigma$ -R.

b) Si existe una función  $\Sigma$ -PR  $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$  tal que:

$$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$$

entonces  $M(P)$  es  $\Sigma$ -PR.

*Proof.* Sea  $\bar{P} = P \upharpoonright_{D_P \cup C_0^{m+1,m}} \upharpoonright_{(\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}) - D_P}$ .

a) Veamos primero que  $M(P) = M(\bar{P})$ , es decir, que los dominios y las reglas de asignación son las mismas.

$$\begin{aligned} D_{M_P} &= \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists t \in \omega) P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\} \\ D_{M_{\bar{P}}} &= \{(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m} : (\exists t \in \omega) \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\} \end{aligned}$$

notar que:

$$\boxed{\bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \Leftrightarrow P \upharpoonright_{D_P} = 1} \quad (\star)$$

Luego,  $D_{M(P)} = D_{M(\bar{P})}$  y  $M(P) = M(\bar{P})$ . Veamos ahora que  $M(\bar{P})$  es  $\Sigma$ -R.

Sea  $k$  tal que  $\bar{P} \in PR_k^\Sigma$ , ya que  $\bar{P}$  es  $\Sigma$ -total y  $\bar{P} \in PR_k^\Sigma \subseteq R_k^\Sigma$ , tenemos que  $M(\bar{P}) \in R_{k+1}^\Sigma$  y por lo tanto  $M(\bar{P}) \in R^\Sigma$ , es decir,  $M(P)$  es  $\Sigma$ -R.

b) Primero veremos que  $D_{M(\bar{P})}$  es un conjunto  $\Sigma$ -PR. Notese que:

$$\chi_{D_{M(\bar{P})}} = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[ (\exists t \in \omega)_{t \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

lo cual nos dice que:

$$\chi_{D_{M(\bar{P})}} = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[ (\exists t \in \omega)_{t \leq x} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \circ (f, p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m})$$

pero el **Lemma 39** nos dice que  $\lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[ (\exists t \in \omega)_{t \leq x} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$  es  $\Sigma$ -PR por lo cual tenemos que  $\chi_{D_{M(\bar{P})}}$  lo es.

Sea:



$$Q = \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} \left[ \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \wedge (\forall j \in \omega)_{j \leq t} j = t \vee \neg \bar{P}(j, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

notar que  $Q$  es  $\Sigma$ -total, veamos que es  $\Sigma$ -PR. Sea:

$$R = \lambda j t \vec{x} \vec{\alpha} \left[ j = t \vee \neg \bar{P}(j, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

luego, por el **Lemma 39**:

$$\lambda t \vec{x} \vec{\alpha} [(\forall j \in \omega)_{j \leq t} R(j, t, \vec{x}, \vec{\alpha})]$$

es  $\Sigma$ -PR y por lo tanto  $Q$  es  $\Sigma$ -PR. Además notese que para cada  $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$  tenemos:

$$Q(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \Leftrightarrow t = M(\bar{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$$

Esto nos dice que

$$M(\bar{P}) = \left( \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[ \prod_{t=0}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} t^{Q(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \right) \upharpoonright_{D_{M(\bar{P})}}$$

por lo cual para probar que  $M(\bar{P})$  es  $\Sigma$ -PR solo nos resta probar que

$$F = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[ \prod_{t=0}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} t^{Q(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right]$$

es  $\Sigma$ -PR. Pero

$$F = \lambda x y \vec{x} \vec{\alpha} \left[ \prod_{t=x}^y t^{Q(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \circ (C_0^{n,m}, f, p_1^{n,m}, \dots, p_{n+m}^{n,m})$$

y por lo tanto el **Lemma 38** nos dice que  $F$  es  $\Sigma$ -PR. De esta manera hemos probado que  $M(\bar{P})$  es  $\Sigma$ -PR y por lo tanto  $M(P)$  lo es.

□

**Lemma 44.** *Las siguientes funciones son  $\emptyset$ -PR:*

- a)  $Q : \omega \times \mathbb{N} \rightarrow \omega$   
 $(x, y) \rightarrow$  *cociente de la division de  $x$  por  $y$*
- b)  $R : \omega \times \mathbb{N} \rightarrow \omega$   
 $(x, y) \rightarrow$  *resto de la division de  $x$  por  $y$*
- c)  $pr : \mathbb{N} \rightarrow \omega$   
 $n \rightarrow$   *$n$ -esimo numero primo*

*Proof.* a) Veamos primero veamos que  $Q = M(P)$ , donde  $P = \lambda t x y [(t+1).y > x]$ . Notar que:

$$\begin{aligned} D_{M(P)} &= \{(x, y) : (\exists t \in \omega) P(t, x, y) = 1\} \\ &= \{(x, y) : (\exists t \in \omega) (t+1).y > x\} \\ &= \omega \times \mathbb{N} \\ &= D_Q \end{aligned}$$

Es fácil notar que para cada  $(x, y) \in \omega \times \mathbb{N}$ , se tiene que:

$$Q(x, y) = M(P)(x, y) = \min_t (t + 1).y > x$$

Es decir, que  $Q = M(P)$ . Ya que  $P$  es  $\emptyset$ -PR y además:

$$Q(x, y) \leq p_1^{2,0}(x, y), \text{ para cada } (x, y) \in \omega \times \mathbb{N}$$

el inciso (b) del **Lemma 43** implica que  $Q \in \text{PR}^\emptyset$ .

b) Notese que:

$$\begin{aligned} R &= \lambda xy [x \dot{-} Q(x, y).y] \\ &= \lambda xy [x \dot{-} y] \circ (p_1^{2,0}, \lambda xy [x.y] \circ (Q \circ (p_1^{2,0}, p_2^{2,0}), p_2^{2,0})) \end{aligned}$$

y por lo tanto  $R \in \text{PR}^\emptyset$ .

c) Para ver que  $pr$  es  $\emptyset$ -PR, veremos que la extensión  $h : \omega \rightarrow \omega$ , dada por:

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(n) &= pr(n), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

es  $\emptyset$ -PR. Primero notar que:

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(x+1) &= \min_t (t \text{ es primo} \wedge t > h(x)) \end{aligned}$$

Osea que  $h = R(C_0^{0,0}, M(P))$ , donde:

$$P = \lambda t z x [t \text{ es primo} \wedge t > z]$$

Solo resta ver que  $M(P)$  es  $\emptyset$ -PR. Claramente,  $P$  es  $\emptyset$ -PR.

Veamos que para cada  $(z, x) \in \omega^2$ , tenemos que:

$$M(P)(z, x) = \min_t (t \text{ es primo} \wedge t > z) \leq z! + 1$$

Sea  $p$  primo tal que  $p$  divide a  $z! + 1$ , luego  $p > z$ . Esto nos dice que:

$$\min_t (t \text{ es primo} \wedge t > z) \leq p \leq z! + 1$$

Luego,  $f = \lambda z x [z! + 1]$  y utilizando el **Lemma 43** tenemos que  $M(P)$  es  $\emptyset$ -PR. □

**Lemma 45.** Las funciones  $\lambda xi [(x)_i]$  y  $\lambda x [Lt(x)]$  son  $\emptyset$ -PR.

**Lemma 46.** Este lema no se evalua.

**Lemma 47.** Supongamos que  $\Sigma \neq \emptyset$ . Sea  $<$  un orden total estricto sobre  $\Sigma$ . Sean  $n, m \geq 0$  y sea  $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \rightarrow \omega$  un predicado  $\Sigma$ -PR, entonces:

a)  $M^<(P)$  es  $\Sigma$ -R.

b) Si existe una función  $\Sigma$ -PR  $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$  tal que:

$$|M^<(P)(\vec{x}, \vec{\alpha})| = |\min_{\alpha}^< P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)| \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})$$

para cada  $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M^<(P)}$  entonces  $M^<(P)$  es  $\Sigma$ -PR.

**Lemma 48.** Este lema no se evalua.

**Lemma 49.** Este lema no se evalua.

**Lemma 50.** Este lema no se evalua.

**Theorem 51.** Sean  $\Sigma$  y  $\Gamma$  alfabetos cualesquiera.

a) Supongamos una función  $f$  es  $\Sigma$ -mixta y  $\Gamma$ -mixta, entonces  $f$  es  $\Sigma$ -R (respectivamente  $\Sigma$ -PR)  $\Leftrightarrow f$  es  $\Gamma$ -R (respectivamente  $\Gamma$ -PR).

b) Supongamos un conjunto  $S$  es  $\Sigma$ -mixto y  $\Gamma$ -mixto, entonces  $S$  es  $\Sigma$ -PR  $\Leftrightarrow S$  es  $\Gamma$ -PR.

## 4 El lenguaje $S^\Sigma$

**Theorem 52.** Sea  $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ , entonces  $S$  es  $\Sigma$ -efectivamente enumerable  $\Leftrightarrow S$  es  $\Sigma$ -recursivamente enumerable.

*Proof.*  $\Rightarrow$

Use la Tesis de Church.

$\Leftarrow$

Use el Theorem 42. □

**Corollary 53.** Supongamos  $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$  es  $\Sigma$ -recursiva y  $S \subseteq D_f$  es  $\Sigma$ -RE, entonces  $f|_S$  es  $\Sigma$ -recursiva.

*Proof.* Supongamos  $O = \Sigma^*$ . Por el **Teorema 71**  $S = D_g$ , para alguna función  $\Sigma$ -recursiva  $g$ . Nótese que componiendo adecuadamente podemos suponer que  $I_g = \{\varepsilon\}$ . O sea que tenemos  $f|_S = \lambda\alpha\beta [\alpha\beta] \circ (f, g)$ . □

**Corollary 54.** Este corolario no se evalua.

**Corollary 55.** Supongamos  $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$  son conjuntos  $\Sigma$ -RE, entonces  $S_1 \cap S_2$  es  $\Sigma$ -RE.

*Proof.* Por el **Teorema 71**  $S_i = D_{g_i}$ , con  $g_1, g_2$  funciones  $\Sigma$ -recursivas. Nótese que podemos suponer que  $I_{g_1}, I_{g_2} \subseteq \Sigma^*$  por lo que  $S_1 \cap S_2 = D_{\lambda\alpha\beta [\alpha\beta] \circ (g_1, g_2)}$  es  $\Sigma$ -r.e.. □

**Corollary 56.** Supongamos  $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$  son conjuntos  $\Sigma$ -RE, entonces  $S_1 \cup S_2$  es  $\Sigma$ -RE.

*Proof.* Supongamos  $S_1 \neq \emptyset \neq S_2$ . Sean  $F, G : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$  tales que  $I_F = S_1$ ,  $I_G = S_2$  y las funciones  $F_i$ 's y  $G_i$ 's son  $\Sigma$ -recursivas. Sean  $f = \lambda x [Q(x, 2)]$  y  $g = \lambda x [Q(x-1, 2)]$ . Sea  $H : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$  dada por

$$H_i = (F_i \circ f)|_{\{x:x \text{ es par}\}} \cup (G_i \circ g)|_{\{x:x \text{ es impar}\}}$$

Por el **Corollary 72** (restriccion de una funcion) y el **Lemma 68** (union de funciones), cada  $H_i$  es  $\Sigma$ -recursiva. Ya que  $I_H = S_1 \cup S_2$ . tenemos que  $S_1 \cup S_2$  es  $\Sigma$ -r.e. □

**Theorem 57.** Sea  $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ , entonces  $S$  es  $\Sigma$ -efectivamente computable  $\Leftrightarrow S$  es  $\Sigma$ -recursivo.

*Proof.*  $(\Rightarrow)$  Use la Tesis de Church.

$(\Leftarrow)$  Use el Teorema 42.  $\square$

**Theorem 58.** Sea  $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ , son equivalentes:

a)  $S$  es  $\Sigma$ -recursivo.

b)  $S$  y  $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$  son  $\Sigma$ -recursivamente enumerables.

*Proof.* (a) $\Rightarrow$ (b). Note que  $S = D_{Pred} \circ \chi_S$ . Luego, por **Teorema 71**  $S$  es  $\Sigma$ -recursivamente enumerable. De igual manera podemos ver que  $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S = D_{Pred} \circ \chi_{(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S}$  es  $\Sigma$ -recursivamente enumerable. Donde  $\chi_{(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S} = \lambda xy [x \dot{-} y] \circ (C_1^{1,0}, \chi_S)$

(b) $\Rightarrow$ (a). Note que  $\chi_S = C_1^{m,m}|_S \cup C_0^{m,m}|_{\omega^n \times \Sigma^{*m} - S}$ .  $\square$

**Lemma 59.** Supongamos que  $\Sigma_p \subseteq \Sigma$ , entonces:

$$A = \{\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma : \text{Halt}^\Sigma(\mathcal{P})\}$$

es  $\Sigma$ -RE y no es  $\Sigma$ -recursivo. Más aún el conjunto:

$$N = \{\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma : \neg \text{Halt}^\Sigma(\mathcal{P})\}$$

no es  $\Sigma$ -RE.

*Proof.* Sea  $P = \lambda t \mathcal{P} [i^{0,1}(t, \mathcal{P}, \mathcal{P}) = n(\mathcal{P}) + 1]$ . Note que  $P$  es  $\Sigma$ -PR. por lo que  $M(P)$  es  $\Sigma$ -r.. Además note que  $D_{M(P)} = A$ , lo cual implica que  $A$  es  $\Sigma$ -r.e.. Ya que  $\text{Halt}^\Sigma$  es no  $\Sigma$ -recursivo por **Lemma 69** y

$$\text{Halt}^\Sigma = C_1^{0,1}|_A \cup C_0^{0,1}|_N$$

el Lemma 68 nos dice que  $N$  no es  $\Sigma$ -r.e.. Finalmente supongamos  $A$  es  $\Sigma$ -recursivo. Entonces el conjunto

$$N = (\Sigma^* - A) \cap \text{Pro}^\Sigma$$

debería serlo, lo cual es absurdo.  $\square$

## 5 Máquinas de Turing

**Lemma 60.** Este lemma no se evalua.

**Lemma 61.** El predicado  $\lambda dd' [d \vdash d']$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR.

*Proof.* Note que  $D_{\lambda dd' [d \vdash d']} = Des \times Des$ . También nótese que los predicados

$$\lambda q \sigma p \gamma [(q, \sigma, L) \in \delta(p, \gamma)]$$

$$\lambda q \sigma p \gamma [(q, \sigma, R) \in \delta(p, \gamma)]$$

$$\lambda q \sigma p \gamma [(q, \sigma, K) \in \delta(p, \gamma)]$$

son  $(\Gamma \cup Q)$ -PR, ya que los tres tienen dominio igual a  $Q \times \Gamma \times Q \times \Gamma$  el cual es finito por **Corolario 36**.

Sean:

$$P_R : Des \times Des \times \Gamma \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Q \times Q \rightarrow \omega$$

$$P_R(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q) = 1 \Leftrightarrow (d = \alpha p \beta) \wedge ((q, \sigma, R) \in \delta(p, [\beta B]_1)) \wedge (d' = \alpha \sigma q \frown \beta)$$

$$P_L : Des \times Des \times \Gamma \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Q \times Q \rightarrow \omega$$

$$P_L(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q) = 1 \Leftrightarrow (d = \alpha p \beta) \wedge ((q, \sigma, L) \in \delta(p, [\beta B]_1)) \wedge (\alpha \neq \varepsilon) \wedge (d' = \lfloor \alpha \frown q [\alpha]_{|\alpha|} \sigma \frown \beta \rfloor)$$

$$P_K : Des \times Des \times \Gamma \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Q \times Q \rightarrow \omega$$

$$P_K(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q) = 1 \Leftrightarrow (d = \alpha p \beta) \wedge ((q, \sigma, K) \in \delta(p, [\beta B]_1)) \wedge (d' = \lfloor \alpha q \sigma \frown \beta \rfloor)$$

Veamos, por ejemplo, que  $P_L$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR. Notar que:

$$P_L = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$$

donde  $P_1, P_2, P_3, P_4$  son los siguientes predicados:

$$P_1 = \lambda d d' \sigma \alpha \beta p q [d = \alpha p \beta]$$

$$= \lambda \alpha \beta [\alpha = \beta] \circ (p_1^{0,7}, \lambda \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3] \circ (p_4^{0,7}, p_6^{0,7}, p_5^{0,7}))$$

$$P_2 = \lambda d d' \sigma \alpha \beta p q [(q, \sigma, L) \in \delta(p, [\beta B]_1)]$$

$$= \lambda q \sigma p \gamma [(q, \sigma, L) \in \delta(p, \gamma)] \circ (p_7^{0,7}, p_3^{0,7}, p_6^{0,7}, \lambda i \alpha [[\alpha]_i] \circ (C_1^{0,7}, \lambda \alpha \beta [\alpha \beta] \circ (p_5^{0,7}, C_B^{0,7})))$$

$$P_3 = \lambda d d' \sigma \alpha \beta p q [\alpha \neq \varepsilon]$$

$$= \lambda \alpha \beta [\alpha \neq \beta] \circ (p_4^{0,7}, C_\varepsilon^{0,7})$$

$$P_4 = \lambda d d' \sigma \alpha \beta p q [d' = \lfloor \alpha \frown q [\alpha]_{|\alpha|} \sigma \frown \beta \rfloor]$$

$$= \lambda \alpha \beta [\alpha = \beta] \circ (p_2^{0,7}, \lambda \alpha [\lfloor \alpha \rfloor] \circ f)$$

donde:

$$f = \lambda \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5] \circ (\lambda \alpha [\alpha \frown] \circ p_4^{0,7}, p_7^{0,7}, \lambda i \alpha [[\alpha]_i] \circ (\lambda \alpha [\lfloor \alpha \rfloor] \circ p_4^{0,7}, p_4^{0,7}), p_3^{0,7}, \lambda \alpha [\frown \alpha] \circ p_5^{0,7})$$

Luego, notar que  $P_1, P_2, P_3, P_4$  son  $(\Gamma \cup Q)$ -PR, por lo tanto  $P_L$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR. De manera similar, podemos ver que  $P_K$  y  $P_R$  son  $(\Gamma \cup Q)$ -PR.

Tomemos el siguiente predicado:

$$P = (P_R \vee P_L \vee P_K)$$

Tenemos que  $P$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR. Nótese que  $\lambda d d' [d \vdash d']$  es igual al predicado:

$$\lambda d d' [(\exists \sigma \in \Gamma)(\exists \alpha, \beta \in \Gamma^*)(\exists p, q \in Q) P(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q)]$$

Luego, aplicando cinco veces el **Lemma 39** obetemos que  $\lambda d d' [d \vdash d']$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR. Veamos esto. Notar primero que como  $\beta, \alpha, \sigma, p, q$  son subpalabras de  $d$  y  $d'$  respectivamente tenemos que  $|\beta|, |\alpha|, |\sigma|, |p|, |q| \leq |d| + |d'|$ .

$$L_1 = \lambda x d d' \sigma \alpha \beta p [(\exists q \in Q)_{|q| \leq x} P(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q)]$$

$$Q_1 = \lambda d d' \sigma \alpha \beta p [(\exists q \in Q)_{|q| \leq |d| + |d'|} P(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q)]$$

$$= L_1 \circ (\lambda x y [x + y] \circ (\lambda \alpha [\lfloor \alpha \rfloor] \circ p_1^{0,6}, \lambda \alpha [\lfloor \alpha \rfloor] \circ p_2^{0,6}), p_1^{0,6}, p_2^{0,6}, p_3^{0,6}, p_4^{0,6}, p_5^{0,6}, p_6^{0,6})$$

Luego, utilizando el **Lemma 39** obtenemos que  $L_1$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR y por ende  $Q_1$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR. De la misma manera podemos que el predicado  $Q_2$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR.

$$\begin{aligned} L_2 &= \lambda x d d' \sigma \alpha \beta \left[ (\exists p \in Q)_{|p| \leq x} Q_1(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p) \right] \\ Q_2 &= \lambda d d' \sigma \alpha \beta \left[ (\exists p \in Q)_{|p| \leq |d| + |d'|} Q_1(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p) \right] \\ &= L_2 \circ (\lambda x y [x + y] \circ (\lambda \alpha [|\alpha|] \circ p_1^{0,5}, \lambda \alpha [|\alpha|] \circ p_2^{0,5}), p_1^{0,5}, p_2^{0,5}, p_3^{0,5}, p_4^{0,5}, p_5^{0,5}) \end{aligned}$$

finalmente, tenemos que  $Q_3, Q_4, Q_5$  son  $(\Gamma \cup Q)$ -PR.

$$\begin{aligned} L_3 &= \lambda x d d' \sigma \alpha \left[ (\exists \beta \in \Gamma^*)_{|\beta| \leq x} Q_2(d, d', \sigma, \alpha, \beta) \right] \\ Q_3 &= \lambda d d' \sigma \alpha \left[ (\exists \beta \in \Gamma^*)_{|\beta| \leq |d| + |d'|} Q_2(d, d', \sigma, \alpha, \beta) \right] \\ &= L_3 \circ (\lambda x y [x + y] \circ (\lambda \alpha [|\alpha|] \circ p_1^{0,4}, \lambda \alpha [|\alpha|] \circ p_2^{0,4}), p_1^{0,4}, p_2^{0,4}, p_3^{0,4}, p_4^{0,4}) \\ L_4 &= \lambda x d d' \sigma \left[ (\exists \alpha \in \Gamma^*)_{|\alpha| \leq x} Q_3(d, d', \sigma, \alpha) \right] \\ Q_4 &= \lambda d d' \sigma \left[ (\exists \alpha \in \Gamma^*)_{|\alpha| \leq |d| + |d'|} Q_3(d, d', \sigma, \alpha) \right] \\ &= L_4 \circ (\lambda x y [x + y] \circ (\lambda \alpha [|\alpha|] \circ p_1^{0,3}, \lambda \alpha [|\alpha|] \circ p_2^{0,3}), p_1^{0,3}, p_2^{0,3}, p_3^{0,3}) \\ L_5 &= \lambda x d d' \left[ (\exists \sigma \in \Gamma)_{|\sigma| \leq x} Q_4(d, d', \sigma) \right] \\ Q_5 &= \lambda d d' \left[ (\exists \sigma \in \Gamma)_{|\sigma| \leq |d| + |d'|} Q_4(d, d', \sigma) \right] \\ &= L_5 \circ (\lambda x y [x + y] \circ (\lambda \alpha [|\alpha|] \circ p_1^{0,2}, \lambda \alpha [|\alpha|] \circ p_2^{0,2}), p_1^{0,2}, p_2^{0,2}) \end{aligned}$$

Notar que  $Q_5 = \lambda d d' [d \vdash d']$ . Por lo tanto,  $\lambda d d' [d \vdash d']$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR.  $\square$

**Proposition 62.**  $\lambda n d d' \left[ d \vdash^n d' \right]$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR.

**Theorem 63.** Sea  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$  una máquina de Turing, entonces  $L(M)$  es  $\Sigma$ -recursivamente enumerable.

*Proof.* Sea  $P$  el siguiente predicado  $(\Gamma \cup Q)$ -mixto:

$$P = \lambda n \alpha \left[ (\exists d \in Des) \ [q_0 B \alpha] \vdash^n d \wedge St(d) \in F \right]$$

Nótese que  $D_P = \omega \times \Gamma^*$ . Veamos que  $P$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR. Para ello definamos:

$$P = P_1 \wedge P_2$$

donde  $P_1$  y  $P_2$ :

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda n \alpha [(\exists d \in Des) Q(n, \alpha, d)] \\ Q &= \lambda n \alpha d \left[ [q_0 B \alpha] \vdash^n d \right] \\ &= \lambda n d d' \left[ d \vdash^n d \right] \circ (\lambda \alpha [|\alpha|] \circ (\lambda \alpha \beta [\alpha \beta] \circ (C_{q_0 B}^{1,2}, p_2^{1,2})), p_3^{1,2}) \\ P_2 &= \lambda n \alpha [St(d) \in F] \end{aligned}$$

Sabemos que el conjunto  $F$  es finito, por **Corollary 30**,  $F$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR. También sabemos que  $\chi_F$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR, por lo tanto el predicado  $P_2$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR.

Por **Lema 39** tenemos que:

$$L = \lambda x n \alpha \left[ (\exists d \in Des)_{|d| \leq x} Q(n, \alpha, d) \right]$$

es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR, es decir, solo nos falta acotar el cuantificador existencial, para poder aplicar el **Lema 39**. Dado que cuando  $d_1, \dots, d_{n+1} \in Des$  son tales que  $d_1 \vdash d_2 \vdash \dots \vdash d_{n+1}$  tenemos que:

$$|d_i| \leq |d_1| + n, \text{ para } i = 1, \dots, n$$

luego, una posible cota para dicho cuantificador es:

$$|d| \leq |[q_0 B \alpha]| + n$$

Por lo tanto, tenemos que el predicado  $P_1$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR. En definitiva  $P$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR. Sea:

$$P' = P \upharpoonright_{\omega \times \Sigma^*}$$

nótese que  $P'(n, \alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha \in L(M)$  atestiguado por una computación de longitud  $n$ .

Por **Corollary 72**  $P'$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR, y además es  $\Sigma$ -mixto. Utilizando el **Teorema 51** tenemos que  $P'$  es  $\Sigma$ -PR.

Dado que  $L(M) = D_{M(P')}$ , el **Teorema 71** nos dice que  $L(M)$  es  $\Sigma$ -recursivamente enumerable.  $\square$

**Theorem 64.** *Supongamos  $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$  es  $\Sigma$ -Turing computable, entonces  $f$  es  $\Sigma$ -recursiva.*

*Proof.* Supongamos  $O = \Sigma^*$ . Sean:

- $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, \iota, F)$  una máquina de Turing determinística con unit la cual compute a  $f$ .
- $<$  un orden total estricto sobre  $\Gamma \cup Q$ .
- $P : \mathbf{N} \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$  dado por:

$$P = P_1 \wedge P_2$$

donde:

$$P_1 = \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[ (\exists q \in Q) \ [q_0 B \iota^{x_1} B \dots B \iota^{x_n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m] \stackrel{(x)_1}{\vdash} [q B *^< ((x)_2)] \right]$$

$$P_2 = \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[ (\forall d \in Des)_{|d| \leq |*^<((x)_2)|+2} [q B *^< ((x)_2)] \not\vdash d \right]$$

Si tomamos  $Q_1$  y  $Q_2$  como:

$$Q_1 = \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} q \left[ [q_0 B \iota^{x_1} B \dots B \iota^{x_n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m] \stackrel{(x)_1}{\vdash} [q B *^< ((x)_2)] \right]$$

$$Q_2 = \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} d \left[ [q B *^< ((x)_2)] \not\vdash d \right]$$

Tenemos que:

$$P_1 = \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[ (\exists q \in Q) Q_1(x, \vec{x}, \vec{\alpha}, q) \right]$$

$$P_2 = \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[ (\forall d \in Des)_{|d| \leq |*^<((x)_2)|+2} Q_2(x, \vec{x}, \vec{\alpha}, d) \right]$$

Es fácil ver que  $Q_1$  y  $Q_2$  son  $(\Gamma \cup Q)$ -PR. Luego, aplicando el **Lema 39** tenemos que  $P_1$  y  $P_2$  son  $(\Gamma \cup Q)$ -PR y por ende  $P$  es  $(\Gamma \cup Q)$ -PR, dado que es  $\Sigma$ -mixto, el **Teorema 51** nos dice que es  $\Sigma$ -PR. Nótese que:

$$f = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[ \left( \min_x P(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right)_2 \right]$$

lo cual nos dice que  $f$  es  $\Sigma$ -recursiva.  $\square$

**Lemma 65.** Sea  $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$  y sea  $k$  tal que las variables que ocurren en  $\mathcal{P}$  están todas en la lista  $N1, \dots, N\bar{k}, P1, \dots, P\bar{k}$ . Para cada  $a \in \Sigma \cup \{\bar{\imath}\}$ , sean:

- $\tilde{a}$  un nuevo símbolo
- $\Gamma = \Sigma \cup \{B, \bar{\imath}\} \cup \{\tilde{a} : a \in \Sigma \cup \{\bar{\imath}\}\}$

entonces existe una máquina de Turing determinística con unit  $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \bar{\imath}, \{q_f\})$  la cual satisface:

1.  $\delta(q_f, \sigma) = \emptyset$ , para cada  $\sigma \in \Gamma$ .
2. Cualesquiera sean  $x_1, \dots, x_k \in \omega$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Sigma^*$ , el programa  $\mathcal{P}$  se detiene partiendo del estado:

$$((x_1, \dots, x_k, 0, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \varepsilon, \dots))$$

si y sólo si  $M$  se detiene partiendo de la descripción instantánea:

$$[q_0 B \bar{\imath}^{x_1} B \dots B \bar{\imath}^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k B]$$

3. Si  $x_1, \dots, x_k \in \omega$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Sigma^*$  son tales que  $\mathcal{P}$  se detiene partiendo del estado:

$$((x_1, \dots, x_k, 0, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \varepsilon, \dots))$$

y llega al estado

$$((y_1, \dots, y_k, 0, \dots), (\beta_1, \dots, \beta_k, \varepsilon, \dots))$$

entonces

$$[q_0 B \bar{\imath}^{x_1} B \dots B \bar{\imath}^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k B] \stackrel{*}{\vdash} [q_f B \bar{\imath}^{y_1} B \dots B \bar{\imath}^{y_k} B \beta_1 B \dots B \beta_k B]$$

*Proof.* Dado un estado  $((x_1, \dots, x_k, 0, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \varepsilon, \dots))$ , dicho estado se representará en la cinta de la siguiente manera:

$$B \bar{\imath}^{x_1} B \dots B \bar{\imath}^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k B B B B \dots$$

A continuación se describirán una serie de máquinas, las cuales simularán, vía la representación anterior, las distintas clases de instrucciones que pueden ocurrir en  $\mathcal{P}$ . Todas las máquinas definidas tendrán:

- $\bar{\imath}$  como unit
- $B$  como blanco
- $\Sigma$  como su alfabeto terminal
- su alfabeto mayor será  $\Gamma = \Sigma \cup \{B, \bar{\imath}\} \cup \{\tilde{a} : a \in \Sigma \cup \{\bar{\imath}\}\}$
- uno o dos estados finales con la propiedad de que si  $q$  es un estado final, entonces  $\delta(q, \sigma) = \emptyset$ , para cada  $\sigma \in \Gamma$ .

Esta propiedad es importante ya que permitirá concatenar pares de dichas máquinas identificando algún estado final de la primera con el inicial de la segunda.



Para  $1 \leq i \leq k$ , sea  $M_i^+$  una máquina tal que:

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_{i-1}} B \mid^{x_i+1} B \mid^{x_{i+1}} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para  $1 \leq i \leq k$ , sea  $M_i^-$  una máquina tal que:

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_{i-1}} B \mid^{x_i-1} B \mid^{x_{i+1}} \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para  $1 \leq i \leq k$  y  $a \in \Sigma$ , sea  $M_i^a$  una máquina tal que:

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_{i-1} B\alpha_i a B\alpha_{i+1} B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para  $1 \leq i \leq k$ , sea  $M_i^\curvearrowright$  una máquina tal que:

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_{i-1} B^\curvearrowright \alpha_i B\alpha_{i+1} B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para  $j = 1, \dots, k$ , y  $a \in \Sigma$ , sea  $IF_j^a$  una máquina con dos estados finales  $q_{si}$  y  $q_{no}$  tal que:  
Si  $\alpha_j$  comienza con  $a$ , entonces:

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{si} \end{array}$$

Caso contrario:

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no} \end{array}$$

Análogamente, para  $j = 1, \dots, k$ , sea  $IF_j$  una máquina tal que:

Si  $x_j \neq 0$ , entonces:

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{si} \end{array}$$

Si  $x_j = 0$ , entonces:

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no} \end{array}$$

Para  $1 \leq i, j \leq k$ , sea  $M_{i \leftarrow j}^*$  una máquina tal que:

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_{i-1} B\alpha_j B\alpha_{i+1} B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para  $1 \leq i, j \leq k$ , sea  $M_{i \leftarrow j}^\#$  una máquina tal que:

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_{i-1}} B \mid^{x_j} B \mid^{x_{i+1}} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para  $1 \leq i \leq k$ , sea  $M_{i \leftarrow 0}$  una máquina tal que:

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_{i-1}} B B \mid^{x_{i+1}} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para  $1 \leq i \leq k$ , sea  $M_{i \leftarrow \varepsilon}$  una máquina tal que:

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_{i-1} B B \alpha_{i+1} B \dots B \alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Sean:

$$M_{\text{SKIP}} = (\{q_0, q_f\}, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \mid, \{q_f\})$$

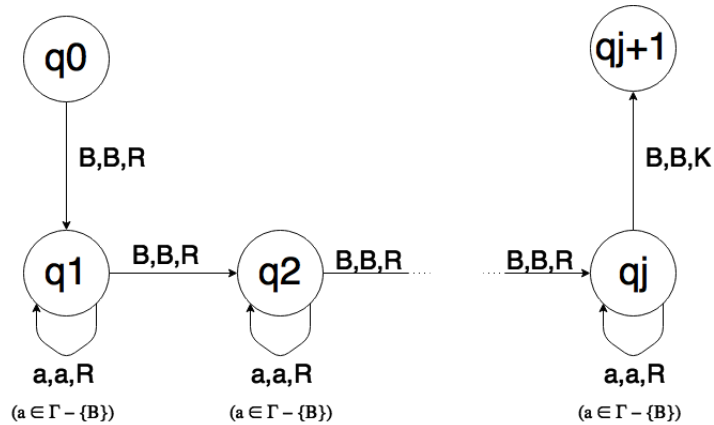
con  $\delta(q_0, B) = \{(q_f, B, K)\}$  y  $\delta = \emptyset$  en cualquier otro caso.

$$M_{\text{GOTO}} = (\{q_0, q_{si}, q_{no}\}, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \mid, \{q_{si}, q_{no}\})$$

con  $\delta(q_0, B) = \{(q_{si}, B, K)\}$  y  $\delta = \emptyset$  en cualquier otro caso.

Para poder realizar concretamente las máquinas recién descritas deberemos diseñar antes algunas máquinas auxiliares. Para cada  $j \geq 1$ , sean:

- $D_j$  la siguiente máquina:



Notar que:

$$\begin{array}{ccc} \alpha B \beta_1 B \beta_2 B \dots B \beta_j B \gamma & \vdash^* & \alpha B \beta_1 B \beta_2 B \dots B \beta_j B \gamma \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

siempre que  $\alpha, \gamma \in \Gamma^*$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_j \in (\Gamma - \{B\})^*$ .

- $I_j$  la siguiente máquina. Notar que:

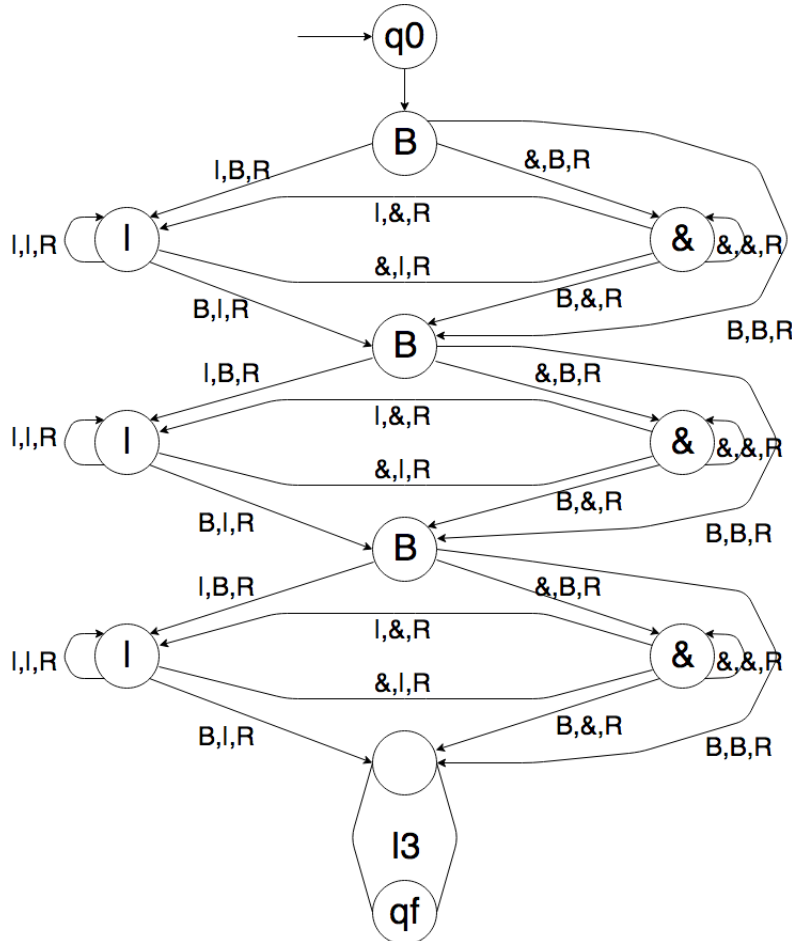
$$\begin{array}{ccc} \alpha B \beta_1 B \beta_2 B \dots B \beta_j B \gamma & \vdash^* & \alpha B \beta_1 B \beta_2 B \dots B \beta_j B \gamma \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

siempre que  $\alpha, \gamma \in \Gamma^*$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_j \in (\Gamma - \{B\})^*$ .

- $TD_j$  una máquina con un solo estado final  $q_f$  y tal que:

$$\begin{array}{ccc} \alpha B \gamma & \vdash^* & \alpha B B \gamma \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

cada vez que  $\alpha, \gamma \in \Gamma^*$  y  $\gamma$  tiene exactamente  $j$  ocurrencias de  $B$ , es decir, la máquina  $TD_j$  corre un espacio a la derecha todo el bloque  $\gamma$  y agrega un blanco en el espacio que se genera a la izquierda de dicho bloque. Por ejemplo, para el caso de  $\Sigma = \{\&\}$  podemos tomar  $TD_3$  igual a la siguiente máquina:

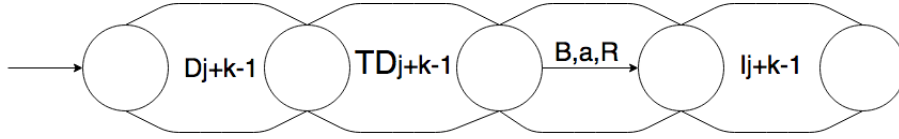


- $TI_j$  una máquina tal que:

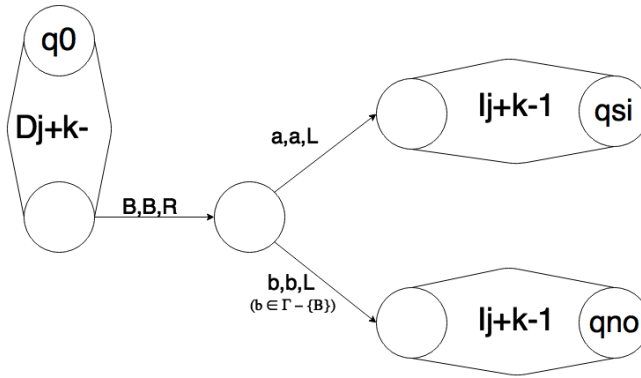
$$\begin{array}{ccc} \alpha B \sigma \gamma & \stackrel{*}{\vdash} & \alpha B \gamma \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

cada vez que  $\alpha \in \Gamma^*$ ,  $\sigma \in \Gamma$  y  $\gamma$  tiene exactamente  $j$  ocurrencias de  $B$ , es decir la máquina  $TI_j$  corre un espacio a la izquierda todo el bloque  $\gamma$  (por lo cual en el lugar de  $\sigma$  queda el primer símbolo de  $\gamma$ ).

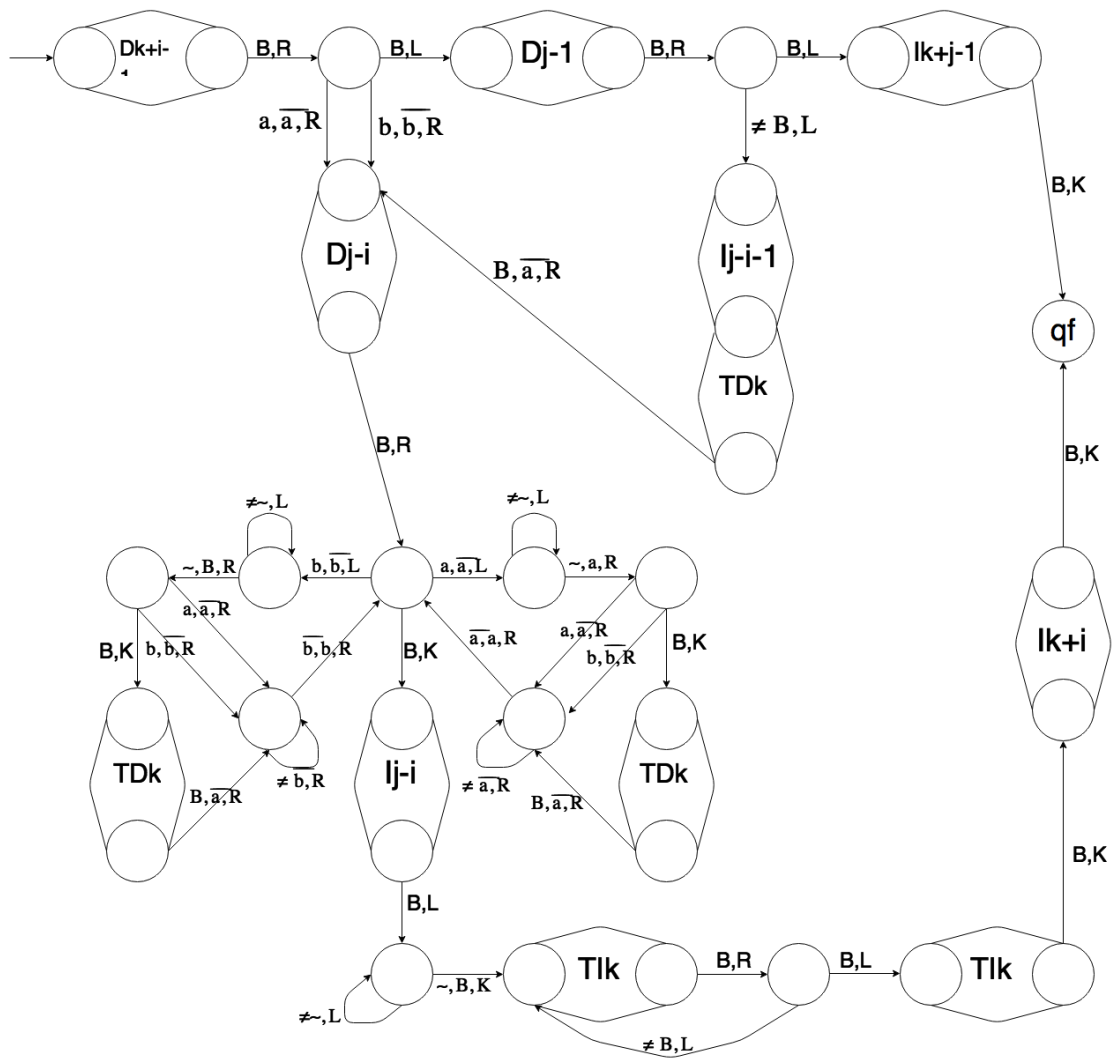
Teniendo las máquinas auxiliares antes definidas podemos combinarlas para obtener las máquinas simuladoras de instrucciones. Por ejemplo  $M_i^a$  puede ser la siguiente máquina:



En la siguiente máquina, tenemos una posible forma de diseñar la máquina  $IF_i^a$ .



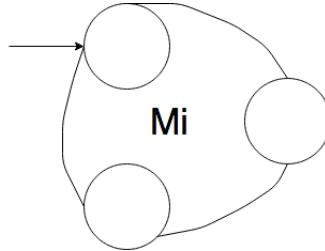
En la siguiente máquina tenemos una posible forma de diseñar la máquina  $M_{i \leftarrow j}^*$  para el caso  $\Sigma = \{a, b\}$  y  $i < j$ :



Supongamos ahora que  $\mathcal{P} = I_1, \dots, I_n$ . Para cada  $i = 1, \dots, n$ , definiremos una máquina  $M_i$  que simulará la instrucción  $I_i$ . Luego uniremos adecuadamente dichas máquinas para formar la máquina que simulará a  $\mathcal{P}$ .

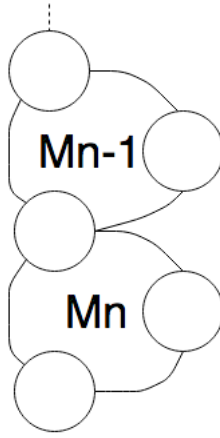
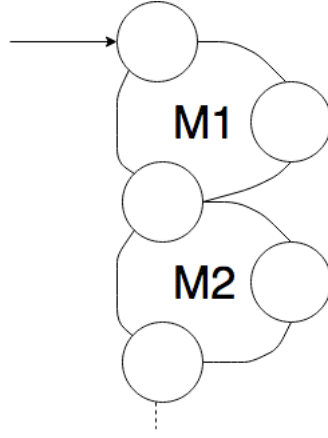
- Si  $Bas(I_i) = N\bar{j} \leftarrow N\bar{j} + 1$  tomaremos  $M_i = M_j^+$
- Si  $Bas(I_i) = N\bar{j} \leftarrow N\bar{j} - 1$  tomaremos  $M_i = M_j^-$
- Si  $Bas(I_i) = N\bar{j} \leftarrow 0$  tomaremos  $M_i = M_{j \leftarrow 0}$
- Si  $Bas(I_i) = N\bar{j} \leftarrow N\bar{m}$  tomaremos  $M_i = M_{j \leftarrow m}^\#$
- Si  $Bas(I_i) = IF\ N\bar{j} \neq 0\ GOTO\ L\bar{m}$  tomaremos  $M_i = IF_j$
- Si  $Bas(I_i) = P\bar{j} \leftarrow P\bar{j}.a$  tomaremos  $M_i = M_j^a$
- Si  $Bas(I_i) = P\bar{j} \leftarrow \neg P\bar{j}$  tomaremos  $M_i = M_j^\neg$
- Si  $Bas(I_i) = P\bar{j} \leftarrow \varepsilon$  tomaremos  $M_i = M_{j \leftarrow \varepsilon}$
- Si  $Bas(I_i) = P\bar{j} \leftarrow P\bar{m}$  tomaremos  $M_i = M_{j \leftarrow m}^*$
- Si  $Bas(I_i) = IF\ P\bar{j}\ BEGINS\ a\ GOTO\ L\bar{m}$  tomaremos  $M_i = IF_j^a$
- Si  $Bas(I_i) = SKIP$  tomaremos  $M_i = M_{SKIP}$ .
- Si  $Bas(I_i) = GOTO\ L\bar{m}$  tomaremos  $M_i = M_{GOTO}$

Dado que la máquina  $M_i$  puede tener uno o dos estados finales, se representará como se muestra en la siguiente figura:



entendiendo que en el caso en que  $M_i$  tiene un solo estado final, este está representado por el círculo de abajo a la izquierda y en el caso en que  $M_i$  tiene dos estados finales, el estado final corresponde al estado  $q_{si}$  y el otro al estado  $q_{no}$ .

Para armar la máquina que simulará a  $\mathcal{P}$ , primero unimos las máquinas  $M_1, \dots, M_n$  como lo muestra la siguiente figura:



Luego para cada  $i$  tal que  $Bas(I_i)$  es de la forma  $\alpha$  GOTO  $L\bar{m}$ , ligamos con una flecha de la forma:

$$\xrightarrow{B, B, K}$$

el estado final  $q_{si}$  de la  $M_i$  con el estado inicial de la  $M_h$ , donde  $h$  es tal que  $I_h$  es la primer instrucción que tiene label  $L\bar{m}$ . Es intuitivamente claro que la máquina así obtenida cumple con lo requerido aunque una prueba formal de esto puede resultar extremadamente tediosa.  $\square$

**Theorem 66.** Si  $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$  es  $\Sigma$ -recursiva, entonces  $f$  es  $\Sigma$ -Turing computable.

*Proof.* Dado que  $f$  es  $\Sigma$ -computable, existe  $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$  el cual computa  $f$ . Se probará solamente el caso  $O = \Sigma^*$ . Notar que cuando  $\mathcal{P}$  termina, en el estado alcanzado, las variables numéricas tienen todas el valor 0 y las alfabéticas distintas de P1 todas el valor  $\varepsilon$ .

Sean:

- $M$  la máquina de Turing con unit dada por el **Lemma 84**, donde elegimos el número  $k$  con la propiedad adicional de ser mayor que  $n$  y  $m$ .
- $M_1$  una máquina tal que para cada  $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ :

$$[q_0 B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m B] \vdash^* [q B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_n} B^{k-n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m B]$$

donde  $q_0$  es el estado inicial de  $M_1$  y  $q$  es un estado tal que  $\delta(q, \sigma) = \emptyset$ , para cada  $\sigma$ .

- $M_2$  una máquina tal que para cada  $\alpha \in \Sigma^*$ :

$$[q_0 B^{k+1} \alpha] \vdash^* [q B \alpha]$$

donde  $q_0$  es el estado inicial de  $M_2$  y  $q$  es un estado tal que  $\delta(q, \sigma) = \emptyset$ , para cada  $\sigma$ .

Notar que la concatenación de  $M_1$ ,  $M$  y  $M_2$ , en ese orden, produce una máquina de Turing la cual computa  $f$ .  $\square$

**Theorem 67.** Este teorema no se evalúa.