1 Funciones Σ-recursivas

Lemma 1. *1.* $\lambda xy\,[x^y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

2. $\lambda t\alpha\,[\alpha^t] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

Proof. a) Notar que:

$$
\begin{array}{rcl}
\lambda tx\left[x^t\right](0, x_1) & = & 0 = C_0^{1,0}(x_1) \\
\lambda tx\left[x^t\right](t+1, x_1) & = & \lambda tx\left[x^t\right](t, x_1).x_1 \\
 & = & \lambda xy\,[x.y] \circ (p_1^{3,0}, p_3^{3,0})
\end{array}
$$

Osea que $\lambda xy\,[x^y] = \lambda tx\,[x^t] \circ (p_2^{2,0}, p_1^{2,0}) \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

b) Notar que:

$$
\begin{array}{rcl}
\lambda t\alpha\left[\alpha^t\right](t, \varepsilon) & = & \varepsilon = C_{\varepsilon}^{0,1}(t) \\
\lambda t\alpha\left[\alpha^t\right](t, \alpha a) & = & \lambda t\alpha\left[\alpha^t\right](t, \alpha)\alpha \\
 & = & \lambda \alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ \left(p_3^{1,2}, p_2^{1,2}\right)
\end{array}
$$

Por lo tanto, $\lambda t\alpha\,[\alpha^t] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

□

Lemma 2. *Si $<$ es un orden total estricto sobre un alfabeto no vacío Σ, entonces:*

a) $s^< \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

b) $\#^< \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

c) $*^< \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

Proof. Supongamos $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_k\}$ y $<$ dado por $a_1 < \ldots < a_k$.

a) Ya que:

$$
\begin{array}{rcl}
s^<(\varepsilon) & = & a_1 \\
s^<(\alpha a_i) & = & \alpha a_{i+1}, \text{ para } i < k \\
s^<(\alpha a_k) & = & s^<(\alpha) a_1
\end{array}
$$

tenemos que $s^< = R(C_{a_1}^{0,0}, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G} = \{\left(a_i, d_{a_{i+1}} \circ p_1^{0,2}\right), \left(a_k, d_{a_1} \circ p_2^{0,2}\right)\}$. Luego, $s^< \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

b) Ya que:

$$
\begin{array}{rcl}
*^<(0) & = & \varepsilon \\
^<(t+1) & = & s^<(^<(t))
\end{array}
$$

tenemos que $*^< = R(C_{\varepsilon}^{0,0}, s^< \circ p_1^{2,0})$. Luego, $*^< \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

c) Ya que:

$$\begin{array}{rcl} \#^{<}(\varepsilon) & = & 0 \\ \#^{<}(\alpha a_i) & = & \#^{<}(\alpha).k+i \\ \text{para } i & = & 1,\ldots,k \end{array}$$

tenemos que $\#^{<} = R(C_0^{0,0}, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G}_{a_i} = \lambda xy\,[x+y] \circ (\lambda xy\,[x.y] \circ (p_1^{1,1}, C_k^{1,1}), C_i^{1,1})$, para $i = 1,\ldots,k$. Luego, $\#^{<} \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

□

Lemma 3. *a)* $\lambda xy\,[x \dot{-} y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

b) $\lambda xy\,[\max(x,y)] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

c) $\lambda xy\,[x = y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

d) $\lambda xy\,[x \leq y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

e) Si $\Sigma \neq \emptyset \Rightarrow \lambda\alpha\beta\,[\alpha = \beta] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

Proof. a) Primero notar que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda x\,[x \dot{-} 1]\,(0) & = & 0 = C_0^{0,0} \\ \lambda x\,[x \dot{-} 1]\,(t+1) & = & t \\ & = & p_2^{2,0} \end{array}$$

es decir $\lambda x\,[x \dot{-} 1] = R(C_0^{0,0}, p_2^{2,0}) \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

También notar que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda tx\,[x \dot{-} t]\,(0, x_1) & = & x_1 = p_1^{1,0}(x_1) \\ \lambda tx\,[x \dot{-} t]\,(t+1, x_1) & = & \lambda tx\,[x \dot{-} t]\,(t, x_1) \dot{-} 1 \\ & = & \lambda x\,[x \dot{-} 1] \circ p_1^{3,0} \end{array}$$

es decir, $\lambda tx\,[x \dot{-} t] = R(p_1^{1,0}, \lambda x\,[x \dot{-} 1] \circ p_1^{3,0}) \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$. Por lo tanto, $\lambda xy\,[x \dot{-} y] = \lambda tx\,[x \dot{-} t] \circ (p_2^{2,0}, p_1^{2,0}) \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

b) Notar que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda xy\,[\max(x,y)] & = & \lambda xy\,[(x + (y \dot{-} x)] \\ & = & \lambda xy\,[x+y] \circ \left(p_1^{2,0}, \lambda xy\,[x \dot{-} y] \circ (p_2^{2,0}, p_1^{2,0})\right) \end{array}$$

Por lo tanto, $\lambda xy\,[\max(x,y)] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

c) Note que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda xy\,[x = y] & = & \lambda xy\,[1 \dot{-} ((x \dot{-} y) + (y \dot{-} x))] \\ & = & \lambda xy\,[x \dot{-} y] \circ (C_1^{2,0}, \lambda xy\,[x+y] \circ (\lambda xy\,[x \dot{-} y] \circ p_1^{2,0}, p_2^{2,0}, \lambda xy\,[x \dot{-} y] \circ p_2^{2,0}, p_1^{2,0})) \end{array}$$

Por lo tanto, $\lambda xy\,[x = y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

d) Note que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda xy\,[x \leq y] & = & \lambda xy\,[1 \dot{-} (x \dot{-} y)] \\ & = & \lambda xy\,[x \dot{-} y] \circ (C_1^{2,0}, \lambda xy\,[x \dot{-} y] \circ p_1^{2,0}, p_2^{2,0})) \end{array}$$

Por lo tanto, $\lambda xy\,[x \leq y] \in \mathrm{PR}^{\emptyset}$.

e) Sea $<$ un orden total estricto sobre Σ. Ya que:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \#^{<}(\alpha) = \#^{<}(\beta)$$

tenemos que:

$$\lambda\alpha\beta\,[\alpha = \beta] = \lambda xy\,[x = y] \circ (\#^{<} \circ p_1^{0,2}, \#^{<} \circ p_2^{0,2})$$

Luego, utilizando el inciso (c) y el **Lemma 28** obtenemos que $\lambda\alpha\beta\,[\alpha = \beta] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$.

□

Lemma 4. *Si $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ y $Q : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ son predicados Σ-PR, entonces $(P \vee Q), (P \wedge Q)$ y $\neg P$ lo son también.*

Proof. Notar que:

$$\begin{array}{rcl} \neg P & = & \lambda xy\,[x \dot{-} y] \circ (C_1^{n,m}, P) \\ (P \wedge Q) & = & \lambda xt\,[x.y] \circ (P, Q) \\ (P \vee Q) & = & \neg(\neg P \wedge \neg Q) \end{array}$$

□

Lemma 5. *Si $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son Σ-PR, entonces $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 - S_2$ lo son.*

Proof. Notar que:

$$\begin{array}{rcl} \chi_{S_1 \cup S_2} & = & (\chi_{S_1} \vee \chi_{S_2}) \\ \chi_{S_1 \cap S_2} & = & (\chi_{S_1} \wedge \chi_{S_2}) \\ \chi_{S_1 - S_2} & = & \lambda\,[x \dot{-} y] \circ (\chi_{S_1}, \chi_{S_2}) \end{array}$$

□

Corollary 6. *Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es finito, entonces S es Σ-PR.*

Proof. Se probará el caso $n = m = 1$, es decir, $S \subseteq \omega \times \Sigma^{*}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, utilizando el **Lemma 29** que:

$$S = \{(z, \gamma)\}$$

Notar que χ_S es el siguiente predicado:

$$\left(\chi_z \circ p_1^{1,1} \wedge \chi_\gamma \circ p_2^{1,1}\right)$$

Ya que los predicados:

$$\chi_z = \lambda xy\,[x = y] \circ \left(p_1^{1,0}, C_z^{1,0}\right)$$
$$\chi_\gamma = \lambda\alpha\beta\,[\alpha = \beta] \circ \left(p_1^{0,1}, C_\gamma^{0,1}\right)$$

son Σ-PR, el **Lema 28** implica que χ_S es Σ-PR, por lo tanto S es Σ-PR. $\square$

Lemma 7. *Supongamos $S_1, \ldots, S_n \subseteq \omega, L_1, \ldots, L_m \subseteq \Sigma^*$ son conjuntos no vacíos, entonces $S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m$ es Σ-PR $\Leftrightarrow$ $S_1, \ldots, S_n, L_1, \ldots, L_m$ son Σ-PR.*

Proof. Se probará el caso $n = m = 1$, es decir, $S \subseteq \omega$, $L \subseteq \Sigma^*$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Veremos que L_1, S_1 es Σ-PR. Sea (z_1, γ_1) un elemento fijo de $S_1 \times L_1$. Notar que:

$$x \in S_1 \Leftrightarrow (x, \gamma_1) \in S_1 \times L_1$$
$$\alpha \in L_1 \Leftrightarrow (z_1, \alpha) \in S_1 \times L_1$$

lo cual implica que:

$$\chi_{S_1} = \chi_{S_1 \times L_1} \circ \left(p_1^{1,0}, C_{\gamma_1}^{0,1}\right)$$
$$\chi_{L_1} = \chi_{S_1 \times L_1} \circ \left(C_{z_1}^{0,1}, p_1^{0,1}\right)$$

por lo tanto, L_1, S_1 es Σ-PR.

$\boxed{\Leftarrow}$ Notar que:

$$\chi_{S_1 \times L_1} = \left(\chi_{S_1} \circ p_1^{1,1} \wedge \chi_{L_1} \circ p_2^{1,1}\right)$$

luego, por el **Lemma 28**, $S_1 \times L_1$ son Σ-PR. $\square$

Lemma 8. *Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-PR, donde $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$. Si $S \subseteq D_f$ es Σ-PR, entonces $f\,|_S$ es Σ-PR.*

Proof. $\boxed{O = \Sigma^*}$ Notar que:

$$f\,|_S = \lambda x\alpha\,[\alpha^x] \circ (Suc \circ Pred \circ \chi_S, f)$$

luego f es Σ-PR.

$\boxed{O = \omega}$ Notar que:

$$f\,|_S = \lambda xy\,[x^y] \circ (f, Suc \circ Pred \circ \chi_S)$$

luego f es Σ-PR.

Notar que $\boxed{Suc \circ Pred \circ \chi_S}$ funciona como un interruptor que evalua f, si el elemento pertenece a S, y que no evalua en caso contrario. $\square$

Lemma 9. *Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^* \to O$ es Σ-PR, entonces existe una función Σ-PR $\bar{f} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, tal que $f = \bar{f}\,|_{D_f}$.*

Proposition 10. *Un conjunto S es Σ-PR $\Leftrightarrow$ S es el dominio de una función Σ-PR.*

Proof. $\boxed{\Rightarrow}$ Notar que $S = D_{Pred \circ \chi_S}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Probaremos por inducción en k que D_F es Σ-PR para cada $F \in PR_k^\Sigma$.

<u>Caso Base:</u> $\boxed{k=0}$ es decir, $F \in PR_0^\Sigma$. Luego:

$$\begin{array}{rcl} F & \in & \{Suc, Pred, C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\} \cup \\ & & \{p_j^{n,m} : 1 \leq j \geq n+m\} \\ D_F & \in & \{\omega, \mathbb{N}\} \end{array}$$

luego, S es Σ-PR.

<u>Caso Inductivo:</u> Supongamos el resultado vale para un k fijo y supongamos $F \in \mathrm{PR}_{k+1}^\Sigma$, veremos entonces que D_F es Σ-PR. Existen varios casos, analizaremos cada uno por separado.

1. $\boxed{F = R(f,g)}$

   - Recursión primitiva sobre variable numérica.

     (a) Caso 1:

     $$\begin{array}{rcl} f & : & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega \\ g & : & \omega \times \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega \\ F & = & \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega \end{array}$$

     (b) Caso 2:

     $$\begin{array}{rcl} f & : & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \Sigma^* \\ g & : & \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times \Sigma^* \to \Sigma^* \\ F & = & \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \Sigma^* \end{array}$$

   - Recursión primitiva sobre variable alfabética.

     (a) Caso 1:

     $$\begin{array}{rcl} f & : & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega \\ \mathcal{G}_a & : & \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times \Sigma^* \to \omega \\ F & = & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times \Sigma^* \to \omega \end{array}$$

     (b) Caso 2:

     $$\begin{array}{rcl} f & : & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \Sigma^* \\ \mathcal{G}_a & : & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^* \\ F & = & S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times \Sigma^* \to \Sigma^* \end{array}$$

   con $S_1, \ldots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \ldots, L_m \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacíos y $f, g \in \mathrm{PR}_k^\Sigma$, para todos los casos anteriores.

   Por hipótesis inductiva tenemos que $D_f = S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m$ es Σ-PR, lo cual por el **Lemma 31** nos dice que los conjuntos $S_1, \ldots, S_n, L_1, \ldots, L_m$ son Σ-PR. Ya que ω es Σ-PR, el **Lemma 31** nos dice que D_F es Σ-PR.

2. $\boxed{F = g \circ (g_1, \ldots, g_{n+m})}$ donde:

$$\begin{array}{rcll} g & : & D_g \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O & \\ g_i & : & D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega & i = 1, \ldots, n \\ g_i & : & D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \Sigma^* & i = n+1, \ldots, n+m \end{array}$$

están en PR_k^{Σ}. Por **Lemma 33**, hay funciones Σ-PR $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_{n+m}$ las cuales son Σ-totales y cumplen:

$$\begin{array}{rcl} g_i & = & \bar{g}_i \mid_{D_{g_i}} \\ \text{para } i & = & 1, \ldots, n+m \end{array}$$

Por hipótesis inductiva, los conjuntos D_g, D_{g_i}, para $i = 1, \ldots, n+m$, son Σ-PR y por lo tanto:

$$S = \bigcap_{i=1}^{n+m} D_{g_i}$$

lo es. Notese además, que:

$$\chi_{D_F} = \Big((\chi_{D_g} \circ (\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_{n+m})) \wedge \chi_S \Big)$$

lo cual nos dice que D_F es Σ-PR.

$\square$