# Resumen de teoremas para el final de Lenguajes Formales y Computabilidad

Agustín Curto, agucurto95@gmail.com
Francisco Nievas, frannievas@gmail.com

2017

# Índice general

## 0.1. Conjuntos $\Sigma$-mixtos

**Lemma 1:** Sea $S \subseteq \omega \times \Sigma^*$, entonces $S$ es rectangular si y solo si se cumple la siguiente propiedad:

$$\text{Si } (x, \alpha), (y, \beta) \in S \Rightarrow (x, \beta) \in S$$

**Proof:** Ejercicio.

***Q.E.D.***

## 0.2. Ordenes naturales sobre $\Sigma^*$

**Lemma 2:** La relación $<$ es un orden total estricto sobre $\Sigma^*$.
**Proof:** Ejercicio.

***Q.E.D.***

**Lemma 3:** La función $s^< : \Sigma^* \to \Sigma^*$, definida recursivamente de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} s^<(\varepsilon) & = & a_1 \\ s^<(\alpha a_i) & = & \alpha a_{i+1},\ i < n \\ s^<(\alpha a_n) & = & s^<(\alpha) a_1 \end{array}$$

tiene la siguiente propiedad:

$$s^<(\alpha) = \min\{\beta \in \Sigma^* : \alpha < \beta\}.$$

**Proof:** Supongamos que $\alpha < \beta$. Probaremos entonces que $s^<(\alpha) \leq \beta$.

$\boxed{\text{Caso } |\alpha| < |\beta|}$

Se puede ver fácilmente que $|\alpha| = |s^<(\alpha)|$ salvo en el caso en que $\alpha \in \{a_n\}^*$, por lo cual solo resta ver el caso $\alpha \in \{a_n\}^*$. Supongamos $\alpha = a_n^{|\alpha|}$, entonces $s^<(\alpha) = a_1^{|\alpha|+1}$. Si $|\beta| = |\alpha| + 1$ entonces es fácil ver usando el ítem 2 de la definición del orden de $\Sigma^*$ que $s^<(\alpha) = a_1^{|\alpha|+1} \leq \beta$. Si $|\beta| > |\alpha| + 1$, entonces por el ítem 1, de tal definición tenemos que $s^<(\alpha) = a_1^{|\alpha|+1} < \beta$.

$\boxed{\text{Caso } |\alpha| = |\beta|}$

Tenemos entonces que:

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \alpha_1 a_i \gamma_1 \\ \beta & = & \alpha_1 a_j \gamma_2 \end{array}$$

con $i < j$ y $|\gamma_1| = |\gamma_2|$. Si $\gamma_1 = \gamma_2 = \varepsilon$ entonces es claro que $s^<(\alpha) \leq \beta$. El caso en el que $\gamma_1$ termina con $a_l$ para algún $l < n$ es fácil. Veamos el caso en que $\gamma_1 = a_n^k$ con $k \geq 1$. Tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} s^<(\alpha) & = & s^<(\alpha_1 a_i a_n^k) \\ & = & s^<(\alpha_1 a_i a_n^{k-1}) a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ & = & s^<(\alpha_1 a_i) a_1^k \\ & = & \alpha_1 a_{i+1} a_1^k \\ & \leq & \alpha_1 a_j \gamma_2 = \beta \end{array}$$

Supongamos finalmente que $\gamma_1 = \rho_1 a_l a_n^k$ con $k \geq 1$ y $l < n$. Tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} s^<(\alpha) & = & s^<(\alpha_1 a_i \rho_1 a_l a_n^k) \\ & = & s^<(\alpha_1 a_i \rho_1 a_l a_n^{k-1}) a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ & = & s^<(\alpha_1 a_i \rho_1 a_l) a_1^k \\ & = & \alpha_1 a_i \rho_1 a_{l+1} a_1^k \\ & \leq & \beta \end{array}$$

Para completar nuestra demostración debemos probar que $\alpha < s^{<}(\alpha)$, para cada $\alpha \in \Sigma^*$. Dejamos al lector como ejercicio esta Proof la cual puede ser hecha por inducción en $|\alpha|$ usando argumentos parecidos a los usados anteriormente. $\square$

***Q.E.D.***

**Corollary 4:** $s^{<}$ es inyectiva.

**Proof:** Supongamos $\alpha \neq \beta$. Ya que el orden de $\Sigma^*$ es total podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha < \beta$. Por el lema anterior tenemos que $s^{<}(\alpha) \leq \beta < s^{<}(\beta)$ y ya que $<$ es transitiva obtenemos que $s^{<}(\alpha) < s^{<}(\beta)$, lo cual nos dice $s^{<}(\alpha) \neq s^{<}(\beta)$.

***Q.E.D.***

**Lemma 5:** Se tiene que:

1. $\varepsilon \neq s^{<}(\alpha)$, para cada $\alpha \in \Sigma^*$.
2. Si $\alpha \neq \varepsilon$, entonces $\alpha = s^{<}(\beta)$ para algún $\beta$.
3. Si $S \subseteq \Sigma^*$ es no vacío, entonces $\exists \alpha \in S$ tal que $\alpha < \beta$, para cada $\beta \in S - \{\alpha\}$.

**Proof:**

1. Ejercicio
2. Ejercicio
3. Sea $k = \min\{|\alpha| : \alpha \in S\}$. Notese que hay una cantidad finita de palabras de $S$ con longitud igual a $k$ y que la menor de ellas es justamente la menor palabra de $S$.

***Q.E.D.***

**Lemma 6:** Tenemos que:

$$\Sigma^* = \{*^{<}(0), *^{<}(1), ...\}$$

Mas aún la función $*^{<}$ es biyectiva.

**Proof:** Supongamos $*^{<}(x) = *^{<}(y)$ con $x > y$. Note que $y \neq 0$ ya que $\varepsilon$ no es el sucesor de ninguna palabra. Osea que $s^{<}(*^{<}(x-1)) = s^{<}(*^{<}(y-1))$ lo cual ya que $*^{<}$ es inyectiva nos dice que $*^{<}(x-1) = *^{<}(y-1)$. Iterando este razonamiento llegamos a que $*^{<}(z) = *^{<}(0) = \varepsilon$ para algún $z > 0$, lo cual es absurdo.

Veamos que $*^{<}$ es sobreyectiva. Supongamos no lo es, es decir supongamos que $\Sigma^* - I_{*^{<}} \neq \emptyset$. Por (3) del lema anterior $\Sigma^* - I_{*^{<}}$ tiene un menor elemento $\alpha$. Ya que $\alpha \neq \varepsilon$, tenemos que $\alpha = s^{<}(\beta)$, para algún $\beta$. Ya que $\beta < \alpha$ tenemos que $\beta \notin \Sigma^* - I_{*^{<}}$, es decir que $\beta = *^{<}(x)$, para algún $x \in \omega$. Esto nos dice que $\alpha = s^{<}(*^{<}(x))$, lo cual por la definición de $*^{<}$ nos dice que $\alpha = *^{<}(x+1)$. Pero esto es absurdo ya que $\alpha \notin I_{*^{<}}$.

***Q.E.D.***

**Lemma 7:** Sea $n \geq 1$ fijo, entonces cada $x \geq 1$ se escribe en forma única de la siguiente manera:

$$x = i_k n^k + i_{k-1} n^{k-1} + ... + i_0 n^0$$

con $k \geq 0$ y $1 \leq i_k, i_{k-1}, ..., i_0 \leq n$.

**Proof:** Primero la unicidad. Supongamos que:

$$i_k n^k + i_{k-1} n^{k-1} + ... + i_0 n^0 = j_m n^m + j_{m-1} n^{m-1} + ... + j_0 n^0$$

con $k, m \geq 0$ y $1 \leq i_k, i_{k-1}, ..., i_0, j_m, ..., j_0 \leq n$. Supongamos $k < m$. Llegaremos a un absurdo. Notese que:

$$\begin{array}{rcll} i_k n^k + i_{k-1}n^{k-1} + ... + i_0 n^0 & \leq & n.n^k + n.n^{k-1} + ... + n.n^0 & \\ & \leq & n^{k+1} + n^k + ... + n^1 & \\ & < & n^{k+1} + n^k + ... + n^1 + n^0 & (1) \\ & \leq & n^m + n^{m-1} + ... + n^0 & \\ & \leq & j_m n^m + j_{m-1}n^{m-1} + ... + j_0 n^0 & \end{array}$$

lo cual contradice la primera igualdad.

Probaremos por inducción en $x$ que: (1) existen $k \geq 0$ y $i_k, i_{k-1}, ..., i_0 \in \{1, ..., n\}$ tales que

$$x = i_k n^k + i_{k-1}n^{k-1} + ... + i_0 n^0$$

El caso $x = 1$ es trivial. Supongamos (1) vale para $x$, probaremos que vale para $x+1$. Hay varios casos:

Caso $i_0 < n$. Entonces:

$$\begin{aligned} x+1 &= \left(i_k n^k + i_{k-1}n^{k-1} + ... + i_0 n^0\right) + 1 \\ &= i_k n^k + i_{k-1}n^{k-1} + ... + (i_0+1)n^0 \end{aligned}$$

Caso $i_k = i_{k-1} = ... = i_0 = n$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} x+1 &= \left(i_k n^k + i_{k-1}n^{k-1} + ... + i_0 n^0\right) + 1 \\ &= \left(nn^k + nn^{k-1} + ... + nn^0\right) + 1 \\ &= 1n^{k+1} + 1n^k + ... + 1n^1 + 1n^0 \end{aligned}$$

Caso $i_0 = i_1 = ... = i_h = n,\ \ i_{h+1} \neq n$, para algun $0 \leq h < k$. Tenemos:

$$\begin{aligned} x+1 &= \left(i_k n^k + ... + i_{h+2}n^{h+2} + i_{h+1}n^{h+1} + nn^h + ... + nn^0\right) + 1 \\ &= \left(i_k n^k + ... + i_{h+2}n^{h+2} + i_{h+1}n^{h+1} + n^{h+1} + n^h + ... + n^1\right) + 1 \\ &= i_k n^k + ... + i_{h+2}n^{h+2} + (i_{h+1}+1)n^{h+1} + 1n^h + ... + 1n^1 + 1n^0 \end{aligned}$$

***Q.E.D.***

**Lemma 8:** La función $\#^<$ es biyectiva.

**Lemma 9:** Las funciones $\#^<$ y $*^<$ son una inversa de la otra.

**Proof:** Probaremos por inducción en $x$ que para cada $x \in \omega$, se tiene que $\#^<(*^<(x)) = x$. El caso $x = 0$ es trivial. Supongamos que $\#^<(*^<(x)) = x$, veremos entonces que $\#^<(*^<(x+1)) = x+1$. Sean $k \geq 0$ y $i_k, ..., i_0$ tales que $*^<(x) = a_{i_0}...a_{i_0}$. Ya que $\#^<(*^<(x)) = x$ tenemos que $x = i_k n^k + ... + i_0 n^0$. Hay varios casos:

Caso $i_0 < n$. Entonces $*^<(x+1) = s^<(*^<(x)) = a_{i_k}...a_{i_0+1}$ por lo cual:

$$\begin{array}{rcl} \#^<(*^<(x+1)) & = & i_k n^k + i_{k-1}n^{k-1} + ... + (i_0+1)n^0 \\ & = & \left(i_k n^k + i_{k-1}n^{k-1} + ... + i_0 n^0\right) + 1 \\ & = & x+1 \end{array}$$

Caso $i_k = i_{k-1} = ... = i_0 = n$. Entonces $*^<(x+1) = s^<(*^<(x)) = a_1^{k+2}$ por lo cual:

$$\begin{aligned}
\#^{<}(*^{<}(x+1)) &= 1n^{k+1} + 1n^{k} + ... + 1n^{1} + 1n^{0} \\
&= \left(nn^{k} + nn^{k-1} + ... + nn^{0}\right) + 1 \\
&= x+1
\end{aligned}$$

Caso $i_0 = i_1 = ... = i_h = n, \;\; i_{h+1} \neq n$, para algun $0 \leq h < k$. Entonces $*^{<}(x+1) = s^{<}(*^{<}(x)) = a_{i_k}...a_{i_{h+2}}a_{i_{h+1}+1}a_1...a_1$ por lo cual

$$\begin{aligned}
\#^{<}(*^{<}(x+1)) &= i_k n^{k} + ... + i_{h+2}n^{h+2} + (i_{h+1}+1)n^{h+1} + 1n^{h} + ... + 1n^{1} + 1n^{0} \\
&= \left(i_k n^{k} + ... + i_{h+2}n^{h+2} + i_{h+1}n^{h+1} + n^{h+1} + n^{h} + ... + n^{1}\right) + 1 \\
&= \left(i_k n^{k} + ... + i_{h+2}n^{h+2} + i_{h+1}n^{h+1} + nn^{h} + ... + nn^{0}\right) + 1 \\
&= x+1
\end{aligned}$$

***Q.E.D.***

## 0.3. Codificacion de sucesiones infinitas de numeros

**Lemma 10:** Si $p, p_1, ..., p_n$ son numeros primos y $p$ divide a $p_1...p_n$, entonces $p = p_i$, para algun $i$. Ahora la version del Teorema Fundamental de la Aritmetica.

**Theorem 11:** Para cada $x \in \mathbf{N}$, hay una unica sucesion $(s_1, s_2, ...) \in \omega^{[\mathbf{N}]}$ tal que $x = \prod\limits_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$ (Notese que $\prod\limits_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$ tiene sentido ya que es un producto que solo tiene una cantidad finita de factores no iguales a 1. )

**Proof:** Primero probaremos la existencia por induccion en $x$. Claramente $1 = \prod\limits_{i=1}^{\infty} pr(i)^0$, con lo cual el caso $x = 1$ esta probado. Supongamos la existencia vale para cada $y$ menor que $x$, veremos que entonces vale para $x$. Si $x$ es primo, entonces $x = pr(i_0)$ para algun $i_0$ por lo cual tenemos que $x = \prod\limits_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$, tomando $s_i = 0$ si $i \neq i_0$ y $s_{i_0} = 1$. Si $x$ no es primo, entonces $x = y_1.y_2$ con $y_1, y_2 < x$. Por hipotesis inductiva tenemos que hay $(s_1, s_2, ...), (t_1, t_2, ...) \in \omega^{[\mathbf{N}]}$ tales que $y_1 = \prod\limits_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$ y $y_2 = \prod\limits_{i=1}^{\infty} pr(i)^{t_i}$. Tenemos entonces que $x = \prod\limits_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i+t_i}$ lo cual concluye la prueba de la existencia.

Veamos ahora la unicidad. Suponganos que
$\prod\limits_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i} = \prod\limits_{i=1}^{\infty} pr(i)^{t_i}$

Si $s_i > t_i$ entonces dividiendo ambos miembros por $pr(i)^{t_i}$ obtenemos que $pr(i)$ divide a un producto de primos todos distintos de el, lo cual es absurdo por el lema anterior. Analogamente llegamos a un absurdo si suponemos que $t_i > s_i$, lo cual nos dice que $s_i = t_i$, para cada $i \in \mathbf{N}$
$\Box$

**Lemma 12:** Las funciones $\begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \rightarrow & \omega^{[\mathbf{N}]} \\ x & \rightarrow & ((x)_1, (x)_2, ...) \end{array}$ $\begin{array}{ccc} \omega^{[\mathbf{N}]} & \rightarrow & \mathbf{N} \\ (s_1, s_2, ...) & \rightarrow & \langle s_1, s_2, ... \rangle \end{array}$ son biyecciones una inversa de la otra. **Proof:** Notese que para cada $x \in \mathbf{N}$, tenemos que $\langle (x)_1, (x)_2, ... \rangle = x$. Ademas para cada $(s_1, s_2, ...) \in \omega^{[\mathbf{N}]}$, tenemos que $((\langle s_1, s_2, ... \rangle)_1, (\langle s_1, s_2, ... \rangle)_2, ...) = (s_1, s_2, ...)$. Es claro que lo anterior garantiza que los mapeos en cuestion son uno inversa del otro $\Box$

**Lemma 13** Para cada $x \in \mathbf{N}$: $Lt(x) = 0$ sii $x = 1$ $x = \prod_{i=1}^{Lt(x)} pr(i)^{(x)_i}$ Cabe destacar entonces que la funcion $\lambda ix[(x)_i]$ tiene dominio igual a $\mathbf{N}^2$ y la funcion $\lambda ix[Lt(x)]$ tiene dominio igual a $\mathbf{N}$.

## 0.4. Conjuntos $\Sigma$-efectivamente enumerables

**Lemma 14:** Sean $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ conjuntos $\Sigma$-efectivamente enumerables. Entonces $S_1 \cup S_2$ y $S_1 \cap S_2$ son $\Sigma$-efectivamente enumerables.

**Proof:** El caso en el que alguno de los conjuntos es vacio es trivial. Supongamos que ambos conjuntos son no vacios y sean $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ procedimientos que enumeran a $S_1$ y $S_2$. El siguiente procedimiento enumera al conjunto $S_1 \cup S_2$:

- Si $x$ es par realizar $\mathbb{P}_1$ partiendo de $x/2$ y dar el elemento de $S_1$ obtenido como salida. Si $x$ es impar realizar $\mathbb{P}_2$ partiendo de $(x-1)/2$ y dar el elemento de $S_2$ obtenido como salida.

Veamos ahora que $S_1 \cap S_2$ es $\Sigma$-efectivamente enumerable. Si $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ entonces no hay nada que probar. Supongamos entonces que $S_1 \cap S_2$ en no vacio. Sea $z_0$ un elemento fijo de $S_1 \cap S_2$. Sea $\mathbb{P}$ un procedimiento efectivo el cual enumere a $\omega \times \omega$ (ver el ejemplo de mas arriba). Un procedimiento que enumera a $S_1 \cap S_2$ es el siguiente

Etapa 1

Realizar $\mathbb{P}$ con dato de entrada $x$, para obtener un par $(x_1, x_2) \in \omega \times \omega$.

Etapa 2

Realizar $\mathbb{P}_1$ con dato de entrada $x_1$ para obtener un elemento $z_1 \in S_1$

Etapa 3

Realizar $\mathbb{P}_2$ con dato de entrada $x_2$ para obtener un elemento $z_2 \in S_2$

Etapa 4

Si $z_1 = z_2$, entonces dar como dato de salida $z_1$. En caso contrario dar como dato de salida $z_0$. $\square$

## 0.5. Conjuntos $\Sigma$-efectivamente computables

**Lemma 15:** Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es $\Sigma$ -efectivamente computable entonces $S$ es $\Sigma$-efectivamente enumerable.

**Proof:** Supongamos $S \neq \varnothing$. Sea $(\vec{z}, \gamma) \in S$, fijo. Sea $\mathbb{P}$ un procedimiento efectivo que compute a $\chi_S$. Ya vimos en el ejemplo anterior que $\omega^2 \times \Sigma^{*3}$ es $\Sigma$ -efectivamente enumerable. En forma similar se puede ver que $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ lo es. Sea $\mathbb{P}_1$ un procedimiento efectivo que enumere a $\omega^n \times \Sigma^{*m}$. Entonces el siguiente procedimiento enumera a $S$:

Etapa 1

Realizar $\mathbb{P}_1$ con $x$ de entrada para obtener $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$.

Etapa 2

Realizar $\mathbb{P}$ con $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ de entrada para obtener el valor Booleano $e$ de salida.

Etapa 3

Si $e = 1$ dar como dato de salida $(\vec{x}, \vec{\alpha})$. Si $e = 0$ dar como dato de salida $(\vec{z}, \gamma)$. $\square$

**Theorem 16:** Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Son equivalentes (a) $S$ es $\Sigma$-efectivamente computable (b) $S$ y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son $\Sigma$ -efectivamente enumerables

**Proof:** (a)$\Rightarrow$(b). Por el lema anterior tenemos que $S$ es $\Sigma$ -efectivamente enumerable. Notese ademas que, dado que $S$ es $\Sigma$ -efectivamente computable, $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ tambien lo es (por que?). Es decir que aplicando nuevamente el lema anterior tenemos que $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ es $\Sigma$-efectivamente enumerable.

(b)$\Rightarrow$(a). Sea $\mathbb{P}_1$ un procedimiento efectivo que enumere a $S$ y sea $\mathbb{P}_2$ un procedimiento efectivo que enumere a $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$. Es facil ver que el siguiente procedimiento computa el predicado $\chi_S$:

Etapa 1

Darle a la variable $T$ el valor 0.

Etapa 2

Realizar $\mathbb{P}_1$ con el valor de $T$ como entrada para obtener de salida la upla $(\vec{y}, \vec{\beta})$.

Etapa 3

Realizar $\mathbb{P}_2$ con el valor de $T$ como entrada para obtener de salida la upla $(\vec{z}, \vec{\gamma})$.

Etapa 4

Si $(\vec{y}, \vec{\beta}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$, entonces detenerse y dar como dato de salida el valor 1. Si $(\vec{z}, \vec{\gamma}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$, entonces detenerse y dar como dato de salida el valor 0. Si no suceden ninguna de las dos posibilidades antes mensionadas, aumentar en 1 el valor de la variable $T$ y dirijirse a la Etapa 2. $\square$

**Theorem 17:** Dado $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, son equivalentes (1) $S$ es $\Sigma$-efectivamente enumerable (2) $S = \varnothing$ o $S = I_F$, para alguna $F : \omega \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada $F_i$ es $\Sigma$ -efectivamente computable. (3) $S = I_F$, para alguna $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada $F_i$ es $\Sigma$-efectivamente computable. (4) $S = D_f$, para alguna funcion $f$ la cual es $\Sigma$ -efectivamente computable.

**Proof:** (1)$\Rightarrow$(2) y (2)$\Rightarrow$(1) son muy naturales y son dejadas al lector. (2)$\Rightarrow$(3) es trivial.

(3)$\Rightarrow$(4). Para $i = 1, ..., n + m$, sea $\mathbb{P}_i$ un procedimiento el cual computa a $F_i$ y sea $\mathbb{P}$ un procedimiento el cual enumere a $\omega \times \omega^k \times \Sigma^{*l}$. El siguiente procedimiento computa la funcion $f : I_F \to \{1\}$:

Etapa 1

Darle a la variable $T$ el valor 0.

Etapa 2

Hacer correr $\mathbb{P}$ con dato de entrada $T$ y obtener $(t, z_1, ..., z_k, \gamma_1, ..., \gamma_l)$ como dato de salida.

Etapa 3

Para cada $i = 1, ..., n+m$, hacer correr $\mathbb{P}_i$ durante $t$ pasos, con dato de entrada $(z_1, ..., z_k, \gamma_1, ..., \gamma_l)$. Si cada procedimiento $\mathbb{P}_i$ al cabo de los $t$ pasos termino y dio como resultado el valor $o_i$, entonces comparar $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ con $(o_1, ..., o_{n+m})$ y en caso de que sean iguales detenerse y dar como dato de salida el valor 1. En el caso en que no son iguales, aumentar en 1 el valor de la variable $T$ y dirijirse a la Etapa 2. Si algun procedimiento $\mathbb{P}_i$ al cabo de los $t$ pasos no termino, entonces aumentar en 1 el valor de la variable $T$ y dirijirse a la Etapa 2.

(4)⇒(1). Supongamos $S \neq \varnothing$. Sea $(\vec{z}, \vec{\gamma})$ un elemento fijo de $S$. Sea $\mathbb{P}$ un procedimiento el cual compute a $f$. Sea $\mathbb{P}_1$ un procedimiento el cual enumere a $\omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Dejamos al lector el dise ño de un procedimiento efectivo el cual enumere $D_f$. $\square$

## 0.6. Funciones Σ-recursivas primitivas

**Lemma 18:** Si $f, f_1, ..., f_{n+m}$ son Σ-efectivamente computables, entonces $f \circ (f_1, ..., f_{n+m})$ lo es.

**Proof:** Sean $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, ..., \mathbb{P}_{n+m}$ procedimientos efectivos los cuales computen las funciones $f, f_1, ..., f_{n+m}$, respectivamente. Usando estos procedimientos es facil definir un procedimiento efectivo el cual compute a $f \circ (f_1, ..., f_{n+m})$. $\Box$

**Lemma 19:** Si $f$ y $g$ son Σ-efectivamente computables, entonces $R(f, g)$ lo es.

**Proof:** La Proof es dejada al lector. $\Box$

**Lemma 20:** Si $f$ y cada $\mathcal{G}_a$ son Σ-efectivamente computables, entonces $R(f, \mathcal{G})$ lo es.

**Proof:** Es dejada al lector con la recomendacion de que haga la Proof para el caso $\Sigma = \{@, \&\}$ $\Box$

**Theorem 21:** Si $f \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$, entonces $f$ es Σ-efectivamente computable.

**Proof:** Dejamos al lector la Proof por induccion en $k$ de que si $f \in \mathrm{PR}_k^{\Sigma}$, entonces $f$ es Σ-efectivamente computable, la cual sale en forma directa usando los lemas anteriores que garantizan que los constructores de composicion y recursion primitiva preservan la computabilidad efectiva $\Box$

**Lemma 22:** (1) $\varnothing \in \mathrm{PR}^{\varnothing}$. (2) $\lambda xy\,[x+y] \in \mathrm{PR}^{\varnothing}$. (3) $\lambda xy\,[x.y] \in \mathrm{PR}^{\varnothing}$. (4) $\lambda x\,[x!] \in \mathrm{PR}^{\varnothing}$.

**Proof:** (1) Notese que $\varnothing = Pred \circ C_0^{0,0} \in \mathrm{PR}_1^{\varnothing}$

(2) Notar que

$$\begin{array}{rcl} \lambda xy\,[x+y]\,(0, x_1) & = & x_1 = p_1^{1,0}(x_1) \\ \lambda xy\,[x+y]\,(t+1, x_1) & = & \lambda xy\,[x+y]\,(t, x_1) + 1 \\ & = & \left(Suc \circ p_1^{3,0}\right)(\lambda xy\,[x+y]\,(t, x_1), t, x_1) \end{array}$$

lo cual implica que $\lambda xy\,[x+y] = R\left(p_1^{1,0}, Suc \circ p_1^{3,0}\right) \in \mathrm{PR}_2^{\varnothing}$. (3) Primero note que

$$\begin{array}{rcl} C_0^{1,0}(0) & = & C_0^{0,0}(\Diamond) \\ C_0^{1,0}(t+1) & = & C_0^{1,0}(t) \end{array}$$

lo cual implica que $C_0^{1,0} = R\left(C_0^{0,0}, p_1^{2,0}\right) \in \mathrm{PR}_1^{\varnothing}$. Tambien note que $\lambda tx\,[t.x] = R\left(C_0^{1,0}, \lambda xy\,[x+y] \circ \left(p_1^{3,0}\right.\right.$

lo cual por (1) implica que $\lambda tx\,[t.x] \in \mathrm{PR}_3^{\varnothing}$. (4) Note que

$$\begin{array}{rcl} \lambda x\,[x!]\,(0) & = & 1 = C_1^{0,0}(\Diamond) \\ \lambda x\,[x!]\,(t+1) & = & \lambda x\,[x!]\,(t).(t+1), \end{array}$$

lo cual implica que $\lambda x\,[x!] = R\left(C_1^{0,0}, \lambda xy\,[x.y] \circ \left(p_1^{2,0}, Suc \circ p_2^{2,0}\right)\right)$.

Ya que $C_1^{0,0} = Suc \circ C_0^{0,0}$, tenemos que $C_1^{0,0} \in \mathrm{PR}_1^{\varnothing}$. Por (2), tenemos que $\lambda xy\,[x.y] \circ \left(p_1^{2,0}, Suc \circ p_2^{2,0}\right) \in \mathrm{PR}_4^{\varnothing}$,

obteniendo que $\lambda x\,[x!] \in \mathrm{PR}_5^{\varnothing}$. $\Box$

**Lemma 23:** Supongamos Σ es no vacio. (a) $\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$ (b) $\lambda\alpha\,[|\alpha|] \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$

**Proof:** (a) Ya que

$$\begin{array}{rcl} \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\,(\alpha_1, \varepsilon) & = & \alpha_1 = p_1^{0,1}(\alpha_1) \\ \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\,(\alpha_1, \alpha a) & = & d_a(\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\,(\alpha_1, \alpha)), a \in \Sigma \end{array}$$

tenemos que $\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] = R\left(p_1^{0,1}, \mathcal{G}\right)$, donde $\mathcal{G}_a = d_a \circ p_3^{0,3}$, para cada $a \in \Sigma$. (b) Ya que

$$\begin{array}{rcl} \lambda\alpha\,[|\alpha|]\,(\varepsilon) & = & 0 = C_0^{0,0}(\Diamond) \\ \lambda\alpha\,[|\alpha|]\,(\alpha a) & = & \lambda\alpha\,[|\alpha|]\,(\alpha) + 1 \end{array}$$

tenemos que $\lambda\alpha\,[|\alpha|] = R\left(C_0^{0,0}, \mathcal{G}\right)$, donde $\mathcal{G}_a = Suc \circ p_1^{1,1}$, para cada $a \in \Sigma$.. $\Box$

**Lemma 24:** (a) $C_k^{n,m}, C_\alpha^{n,m} \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$, para $n, m, k \geq 0$, $\alpha \in \Sigma^*$. (b) $C_k^{n,0} \in \mathrm{PR}^{\varnothing}$, para $n, k \geq 0$.

**Proof:** (a) Note que $C_{k+1}^{0,0} = Suc \circ C_k^{0,0}$, lo cual implica $C_k^{0,0} \in \mathrm{PR}_k^{\Sigma}$, para $k \geq 0$. Tambien note que $C_{\alpha a}^{0,0} = d_a \circ C_\alpha^{0,0}$, lo cual dice que $C_\alpha^{0,0} \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$, para $\alpha \in \Sigma^*$. Para ver que $C_k^{0,1} \in \mathrm{PR}^{\Sigma}$ notar que

$$\begin{array}{rcl} C_k^{0,1}(\varepsilon) & = & k = C_k^{0,0}(\Diamond) \\ C_k^{0,1}(\alpha a) & = & C_k^{0,1}(\alpha) = p_1^{1,1}\left(C_k^{0,1}(\alpha),\alpha\right) \end{array}$$

lo cual implica que $C_k^{0,1} = R\left(C_k^{0,0},\mathcal{G}\right)$, con $\mathcal{G}_a = p_1^{1,1}$, $a \in \Sigma$. En forma similar podemos ver que $C_k^{1,0}, C_\alpha^{1,0}, C_\alpha^{0,1} \in \mathrm{PR}^\Sigma$. Supongamos ahora que $m > 0$. Entonces $\begin{array}{rcl} C_k^{n,m} & = & C_k^{0,1} \circ p_{n+1}^{n,m} \\ C_\alpha^{n,m} & = & C_\alpha^{0,1} \circ p_{n+1}^{n,m} \end{array}$

de lo cual obtenemos que $C_k^{n,m}, C_\alpha^{n,m} \in \mathrm{PR}^\Sigma$. El caso $n > 0$ es similar (b) Use argumentos similares a los usados en la Proof de (a). □

**Lemma 25:** (a) $\lambda xy\left[x^y\right] \in \mathrm{PR}^\varnothing$. (b) $\lambda t\alpha\left[\alpha^t\right] \in \mathrm{PR}^\Sigma$.

**Proof:** (a) Note que

$\lambda tx\left[x^t\right] = R\left(C_1^{1,0}, \lambda xy\left[x.y\right] \circ \left(p_1^{3,0}, p_3^{3,0}\right)\right) \in \mathrm{PR}^\varnothing$.

O sea que $\lambda xy\left[x^y\right] = \lambda tx\left[x^t\right] \circ \left(p_2^{2,0}, p_1^{2,0}\right) \in \mathrm{PR}^\varnothing$. (b) Note que

$\lambda t\alpha\left[\alpha^t\right] = R\left(C_\varepsilon^{0,1}, \lambda\alpha\beta\left[\alpha\beta\right] \circ \left(p_3^{1,2}, p_2^{1,2}\right)\right) \in \mathrm{PR}^\Sigma$.

□

**Lemma 26:** Si $<$ es un orden total estricto sobre un alfabeto no vacio $\Sigma$, entonces $s^<$, $\#^<$ y $*^<$ pertenecen a $\mathrm{PR}^\Sigma$

**Proof:** Supongamos $\Sigma = \{a_1, ..., a_k\}$ y $<$ dado por $a_1 < ... < a_k$. Ya que

$$\begin{array}{rcl} s^<(\varepsilon) & = & a_1 \\ s^<(\alpha a_i) & = & \alpha a_{i+1}, \text{ para } i < k \\ s^<(\alpha a_k) & = & s^<(\alpha)a_1 \end{array}$$

tenemos que $s^< = R\left(C_{a_1}^{0,0}, \mathcal{G}\right)$, donde $\mathcal{G}_{a_i} = d_{a_{i+1}} \circ p_1^{0,2}$, para $i = 1, ..., k-1$ y $\mathcal{G}_{a_k} = d_{a_1} \circ p_2^{0,2}$.

O sea que $s^< \in \mathrm{PR}^\Sigma$. Ya que $\begin{array}{rcl} *^<(0) & = & \varepsilon \\ *^<(t+1) & = & s^<(*^<(t)) \end{array}$

podemos ver que $*^< \in \mathrm{PR}^\Sigma$. Ya que $\begin{array}{rcl} \#^<(\varepsilon) & = & 0 \\ \#^<(\alpha a_i) & = & \#^<(\alpha).k + i, \text{ para } i = 1, ..., k, \end{array}$

tenemos que $\#^< = R\left(C_0^{0,0}, \mathcal{G}\right)$, donde $\mathcal{G}_{a_i} = \lambda xy\left[x+y\right] \circ \left(\lambda xy\left[x.y\right] \circ \left(p_1^{1,1}, C_k^{1,1}\right), C_i^{1,1}\right)$, para $i = 1, ..., k$.

O sea que $\#^< \in \mathrm{PR}^\Sigma$. □

**Lemma 27:** (a) $\lambda xy\left[x \dot{-} y\right] \in \mathrm{PR}^\varnothing$. (b) $\lambda xy\left[\max(x,y)\right] \in \mathrm{PR}^\varnothing$. (c) $\lambda xy\left[x = y\right] \in \mathrm{PR}^\varnothing$. (d) $\lambda xy\left[x \leq y\right] \in \mathrm{PR}^\varnothing$. (e) Si $\Sigma$ es no vacio, entonces $\lambda\alpha\beta\left[\alpha = \beta\right] \in \mathrm{PR}^\Sigma$

**Proof:** (a) Primero notar que $\lambda x\left[x \dot{-} 1\right] = R\left(C_0^{0,0}, p_2^{2,0}\right) \in \mathrm{PR}^\varnothing$. Tambien note que

$\lambda tx\left[x \dot{-} t\right] = R\left(p_1^{1,0}, \lambda x\left[x \dot{-} 1\right] \circ p_1^{3,0}\right) \in \mathrm{PR}^\varnothing$.

O sea que $\lambda xy\left[x \dot{-} y\right] = \lambda tx\left[x \dot{-} t\right] \circ \left(p_2^{2,0}, p_1^{2,0}\right) \in \mathrm{PR}^\varnothing$. (b) Note que $\lambda xy\left[\max(x,y)\right] = \lambda xy\left[(x + (y \dot{-} x)\right]$.

(c) Note que $\lambda xy\left[x = y\right] = \lambda xy\left[1 \dot{-} ((x \dot{-} y) + (y \dot{-} x))\right]$.

(d) Note que $\lambda xy\left[x \leq y\right] = \lambda xy\left[1 \dot{-} (x \dot{-} y)\right]$.

(e) Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Sigma$. Ya que

$\alpha = \beta$ sii $\#^<(\alpha) = \#^<(\beta)$

tenemos que $\lambda\alpha\beta\left[\alpha = \beta\right] = \lambda xy\left[x = y\right] \circ \left(\#^< \circ p_1^{0,2}, \#^< \circ p_2^{0,2}\right)$.

O sea que podemos aplicar (c) y Lema 28 implica que $\chi_S$ es $\Sigma$-p.r.. □

**Lemma 28: Hacer Proof:**

**Lemma 29: Hacer**

**Proof:**

**Corollary 30: Hacer**

**Proof:**

**Lemma 31:** Supongamos $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$, $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ son conjuntos no vacios. Entonces $S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$ es $\Sigma$ -p.r. sii $S_1, ..., S_n, L_1, ..., L_m$ son $\Sigma$-p.r.

**Proof:** ($\Rightarrow$) Veremos por ejemplo que $L_1$ es $\Sigma$-p.r.. Sea $(z_1, ..., z_n, \zeta_1, ..., \zeta_m)$ un elemento fijo de $S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$. Note que

$\alpha \in L_1$ sii $(z_1, ..., z_n, \alpha, \zeta_2, ..., \zeta_m) \in S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$,

lo cual implica que $\chi_{L_1} = \chi_{S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m} \circ \left( C^{0,1}_{z_1}, ..., C^{0,1}_{z_n}, p^{0,1}_1, C^{0,1}_{\zeta_2}, ..., C^{0,1}_{\zeta_m} \right)$.

($\Leftarrow$) Note que $\chi_{S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m}$ es el predicado $(\chi_{S_1} \circ p^{n,m}_1 \wedge ... \wedge \chi_{S_n} \circ p^{n,m}_n \wedge \chi_{L_1} \circ p^{n,m}_{n+1} \wedge ... \wedge \chi_{L_m} \circ$

$\Box$

**Lemma 32:** Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es $\Sigma$-p.r., donde $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$. Si $S \subseteq D_f$ es $\Sigma$-p.r., entonces $f \mid_S$ es $\Sigma$-p.r..

**Proof:** Supongamos $O = \Sigma^*$. Entonces

$f \mid_S = \lambda x\alpha \left[\alpha^x\right] \circ (Suc \circ Pred \circ \chi_S, f)$

es $\Sigma$-p.r.. El caso $O = \omega$ es similar usando $\lambda xy \left[x^y\right]$ en lugar de $\lambda x\alpha \left[\alpha^x\right]$. $\Box$

**Lemma 33:** Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es $\Sigma$-p.r., entonces existe una funcion $\Sigma$ -p.r. $\bar{f} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$, tal que $f = \bar{f} \mid_{D_f}$.

**Proof:** Es facil ver por induccion en $k$ que el enunciado se cumple para cada $f \in \mathrm{PR}^{\Sigma}_k$ $\Box$

**Proposition 34:** Un conjunto $S$ es $\Sigma$-p.r. sii $S$ es el dominio de una funcion $\Sigma$-p.r..

**Proof:** ($\Rightarrow$) Note que $S = D_{Pred \circ \chi_S}$.

($\Leftarrow$) Probaremos por induccion en $k$ que $D_F$ es $\Sigma$ -p.r., para cada $F \in \mathrm{PR}^{\Sigma}_k$. El caso $k = 0$ es facil. Supongamos el resultado vale para un $k$ fijo y supongamos $F \in \mathrm{PR}^{\Sigma}_{k+1}$. Veremos entonces que $D_F$ es $\Sigma$-p.r.. Hay varios casos. Consideremos primero el caso en que $F = R(f, g)$, donde

$$\begin{array}{lll} f & : & S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \rightarrow \Sigma^* \\ g & : & \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*, \end{array}$$

con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacios y $f, g \in \mathrm{PR}^{\Sigma}_k$. Notese que por definicion de $R(f, g)$, tenemos que $D_F = \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$.

Por hipotesis inductiva tenemos que $D_f = S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$ es $\Sigma$-p.r., lo cual por el Lema 31 nos dice que los conjuntos $S_1, ..., S_n$, $L_1, ..., L_m$ son $\Sigma$-p.r.. Ya que $\omega$ es $\Sigma$-p.r., el Lema 31 nos dice que $D_F$ es $\Sigma$-p.r.. Los otros casos de recursion primitiva son dejados al lector.

Supongamos ahora que $F = g \circ (g_1, ..., g_{n+m})$, donde

$$\begin{array}{lll} g & : & D_g \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O \\ g_i & : & D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \omega, \ i = 1, ..., n \\ g_i & : & D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \rightarrow \Sigma^*, i = n+1, ..., n+m \end{array}$$

estan en $\mathrm{PR}^{\Sigma}_k$. Por Lema 33, hay funciones $\Sigma$-p.r. $\bar{g}_1, ..., \bar{g}_{n+m}$ las cuales son $\Sigma$-totales y cumplen $g_i = \bar{g}_i \mid_{D_{g_i}}$, para $i = 1, ..., n+m$.

Por hipotesis inductiva los conjuntos $D_g$, $D_{g_i}$, $i = 1, ..., n+m$, son $\Sigma$-p.r. y por lo tanto $S = \bigcap\limits_{i=1}^{n+m} D_{g_i}$

lo es. Notese que $\chi_{D_F} = (\chi_{D_g} \circ (\bar{g}_1, ..., \bar{g}_{n+m}) \wedge \chi_S)$

lo cual nos dice que $D_F$ es $\Sigma$-p.r.. $\Box$

**Lemma 35:** Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$, $i = 1, ..., k$, son funciones $\Sigma$-p.r. tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces $f_1 \cup ... \cup f_k$ es $\Sigma$-p.r..

**Proof:** Supongamos $O = \Sigma^*$ y $k = 2$. Sean

$\bar{f}_i : \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*, i = 1, 2,$

funciones $\Sigma$-p.r. tales que $\bar{f}_i \mid_{D_{f_i}} = f_i$, $i = 1, 2$ (Lema 33). Por Lema 34 los conjuntos $D_{f_1}$ y $D_{f_2}$ son $\Sigma$-p.r. y por lo tanto lo es $D_{f_1} \cup D_{f_2}$. Ya que $f_1 \cup f_2 = \Big(\lambda\alpha\beta \left[\alpha\beta\right] \circ (\lambda x\alpha \left[\alpha^x\right] \circ (\chi_{D_{f_1}}, \bar{f}_1), \lambda x\alpha \left[\alpha^x\right] \circ (\chi$

tenemos que $f_1 \cup f_2$ es $\Sigma$-p.r.. El caso $k > 2$ puede probarse por induccion ya que

$f_1 \cup ... \cup f_k = (f_1 \cup ... \cup f_{k-1}) \cup f_k$.

$\Box$

**Corollary 36:** Supongamos $f$ es una funcion $\Sigma$-mixta cuyo dominio es finito. Entonces $f$ es $\Sigma$-p.r..

**Proof:** Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ , con $D_f = \{e_1, ..., e_k\}$. Por el Corolario 30, cada $\{e_i\}$ es $\Sigma$-p.r. por lo cual el Lema 32 nos dice que $C^{n,m}_{f(e_i)} \mid_{\{e_1\}}$ es $\Sigma$-p.r.. O sea que
$f = C^{n,m}_{f(e_1)} \mid_{\{e_1\}} \cup ... \cup C^{n,m}_{f(e_k)} \mid_{\{e_k\}}$
es $\Sigma$-p.r.. $\Box$

**Lemma 37:** $\lambda i\alpha\left[[\alpha]_i\right]$ es $\Sigma$-p.r..

**Proof:** Note que

$$\begin{array}{rcl} [\varepsilon]_i & = & \varepsilon \\ [\alpha a]_i & = & \left\{ \begin{array}{ll} [\alpha]_i & \text{si } i \neq |\alpha|+1 \\ a & \text{si } i = |\alpha|+1 \end{array} \right. \end{array}$$

lo cual dice que $\lambda i\alpha\left[[\alpha]_i\right] = R\left(C^{1,0}_{\varepsilon}, \mathcal{G}\right)$, donde $\mathcal{G}_a : \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ es dada por $\mathcal{G}_a(i, \alpha, \zeta) = \left\{ \begin{array}{ll} \zeta & \text{si } i \neq |\alpha|+1 \\ a & \text{si } i = |\alpha|+1 \end{array} \right.$

O sea que solo resta probar que cada $\mathcal{G}_a$ es $\Sigma$-p.r.. Primero note que los conjuntos $\begin{array}{rcl} S_1 & = & \{(i, \alpha, \zeta) \in \omega \times \\ S_2 & = & \{(i, \alpha, \zeta) \in \omega \times \end{array}$

son $\Sigma$-p.r. ya que $\begin{array}{rcl} \chi_{S_1} & = & \lambda xy\left[x \neq y\right] \circ \left(p^{1,2}_1, Suc \circ \lambda\alpha\left[|\alpha|\right] \circ p^{1,2}_2\right) \\ \chi_{S_2} & = & \lambda xy\left[x = y\right] \circ \left(p^{1,2}_1, Suc \circ \lambda\alpha\left[|\alpha|\right] \circ p^{1,2}_2\right). \end{array}$

Ya que $\mathcal{G}_a = p^{1,2}_3 \mid_{S_1} \cup C^{1,2}_a \mid_{S_2}$,
el Lema 35 nos dice que $\mathcal{G}_a$ es $\Sigma$-p.r., para cada $a \in \Sigma$. $\Box$

**Lemma 38:** Sean $n, m \geq 0$. (a) Si $f : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ es $\Sigma$-p.r., con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios, entonces lo son las funciones $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ y $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$. (b) Si $f : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \Sigma^*$ es $\Sigma$-p.r., con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios, entonces lo es la funcion $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\subset_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$

**Proof:** (a) Sea $G = \lambda tx\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=t} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$. Ya que

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=y} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] = G \circ \left(p^{n+2,m}_2, p^{n+2,m}_1, p^{n+2,m}_3, ..., p^{n+2,m}_{n+m+2}\right)$$

solo tenemos que probar que $G$ es $\Sigma$-p.r.. Primero note que $\begin{array}{rcl} G(0, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) & = & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x > \\ f(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x = \end{array} \right. \\ G(t+1, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) & = & \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ G(t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) + f(t + \end{array} \right. \end{array}$

Sean $\begin{array}{rcl} D_1 & = & \{(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m : x > 0\} \\ D_2 & = & \{(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m : x = 0\} \\ H_1 & = & \{(z, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m : x > t+1\} \\ H_2 & = & \{(z, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m : x \leq t+1\}. \end{array}$

Es facil de chequear que estos conjuntos son $\Sigma$-p.r.. Veamos que por ejemplo $H_1$ lo es. Es decir debemos ver que $\chi_{H_1}$ es $\Sigma$ -p.r.. Ya que $f$ es $\Sigma$-p.r. tenemos que $D_f = \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$ es $\Sigma$ -p.r., lo cual por el Lema 31 nos dice que los conjuntos $S_1, ..., S_n$, $L_1, ..., L_m$ son $\Sigma$-p.r.. Ya que $\omega$ es $\Sigma$-p.r., el Lema 31 nos dice que $R = \omega^3 \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$ es $\Sigma$-p.r.. Notese que $\chi_{H_1} = (\chi_R \wedge \lambda ztx\vec{x}\vec{\alpha}\left[x > t+1\right])$ por cual $\chi_{H_1}$ es $\Sigma$ -p.r. ya que es la conjuncion de dos predicados $\Sigma$-p.r. Ademas note que $G = R(h, g)$, donde

$$\begin{array}{rcl} h & = & C^{n+1,m}_0 \mid_{D_1} \cup \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[f(0, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] \mid_{D_2} \\ g & = & C^{n+3,m}_0 \mid_{H_1} \cup \lambda ztx\vec{x}\vec{\alpha}\left[z + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]) \mid_{H_2} \end{array}$$

O sea que los Lemas 35 y 32 garantizan que $G$ es $\Sigma$-p.r.. $\Box$

**Lemma 39:** Sean $n, m \geq 0$. (a) Sea $P : S \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ un predicado $\Sigma$-p.r. y supongamos $\bar{S} \subseteq S$ es $\Sigma$-p.r.. Entonces $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x}\ P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ y $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x}\ P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ son predicados $\Sigma$-p.r.. (Note que el dominio de estos predicados es $\omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$) (b) Sea $P : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times L \to \omega$

un predicado $\Sigma$-p.r. y supongamos $\bar{L} \subseteq L$ es $\Sigma$-p.r.. Entonces $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall\alpha \in \bar{L})_{|\alpha|\leq x}\ P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)\right]$ y $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists\alpha \in \bar{L})_{|\alpha|\leq x}\ P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)\right]$ son predicados $\Sigma$-p.r..

**Proof:** (a) Sea

$\bar{P} = P\mid_{\bar{S}\times S_1\times\ldots\times S_n\times L_1\times\ldots\times L_m} \cup C_1^{1+n,m}\mid_{(\omega-\bar{S})\times S_1\times\ldots\times S_n\times L_1\times\ldots\times L_m}$

Notese que $\bar{P}$ es $\Sigma$-p.r.. Ya que

$$\begin{array}{rcl} \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t\leq x} P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right] & = & \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=0}^{t=x} \bar{P}(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right] \\ & = & \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{t=y} \bar{P}(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right] \circ \left(C_0^{1+n,m}, p_1^{1+n\ldots}\right. \end{array}$$

el Lema 38 implica que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t\leq x}\ P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$ es $\Sigma$-p.r.. Finalmente note que

$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists t \in \bar{S})_{t\leq x}\ P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right] = \neg\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t\leq x}\ \neg P(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$

es $\Sigma$-p.r.. (b) Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Sigma$. Sea $k$ el cardinal de $\Sigma$. Ya que

$|\alpha| \leq x$ sii $\#^<(\alpha) \leq \sum_{\iota=1}^{i=x} k^i$,

(ejercicio) tenemos que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall\alpha \in \bar{L})_{|\alpha|\leq x} P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)\right] = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \#^<(\bar{L}))_{t\leq\sum_{\iota=1}^{i=x} k^i} P(\vec{x},\vec{\alpha},*^<(t))\right]$

Sea $H = \lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\left[P(\vec{x},\vec{\alpha},*^<(t))\right]$. Notese que $H$ es $\Sigma$-p.r. y $D_H = \#^<(L) \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m$

Ademas note que $\#^<(\bar{L})$ es $\Sigma$-p.r. (ejercicio), lo cual por (a) implica que $Q = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \#^<(\bar{L}))_{t\leq x} H(t\ldots\right.$

es $\Sigma$-p.r.. O sea que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall\alpha \in \bar{L})_{|\alpha|\leq x}\ P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)\right] = Q\circ\left(\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{\iota=1}^{i=x} k^i\right], p_1^{1+n,m}, \ldots, p_{1+n+m}^{1+n,m}\right)$

es $\Sigma$-p.r.. $\square$

**Lemma 40:** (a) El predicado $\lambda xy\,[x \text{ divide } y]$ es $\varnothing$-p.r.. (b) El predicado $\lambda x\,[x \text{ es primo}]$ es $\varnothing$-p.r.. (c) El predicado $\lambda\alpha\beta\,[\alpha \text{ inicial } \beta]$ es $\Sigma$-p.r..

**Proof:** (a) Si tomamos $P = \lambda tx_1x_2\,[x_2 = t.x_1] \in \mathrm{PR}^{\varnothing}$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \lambda x_1x_2\,[x_1 \text{ divide } x_2] & = & \lambda x_1x_2\,[(\exists t \in \omega)_{t\leq x_2}\ P(t,x_1,x_2)] \\ & = & \lambda xx_1x_2\,[(\exists t \in \omega)_{t\leq x}\ P(t,x_1,x_2)] \circ \left(p_2^{2,0}, p_1^{2,0}, p_2^{2,0}\right) \end{array}$$

por lo que podemos aplicar el lema anterior. (b) Ya que

$x$ es primo sii $x > 1 \wedge ((\forall t \in \omega)_{t\leq x}\ t = 1 \vee t = x \vee \neg(t \text{ divide } x))$

podemos usar un argumento similar al de la prueba de (a). (c) es dejado al lector. $\square$

## 0.7. Minimización y funciones $\Sigma$-recursivas

**Lemma 41:** Si $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ es un predicado $\Sigma$-efectivamente computable y $D_P$ es $\Sigma$-efectivamente computable, entonces la funcion $M(P)$ es $\Sigma$-efectivamente computable.

**Proof:** Ejercicio $\Box$

**Theorem 42:** Si $f \in \mathrm{R}^\Sigma$, entonces $f$ es $\Sigma$-efectivamente computable.

**Proof:** Dejamos al lector la prueba por induccion en $k$ de que si $f \in \mathrm{R}^\Sigma_k$, entonces $f$ es $\Sigma$-efectivamente computable. $\Box$

**Lemma 43:** Sean $n, m \geq 0$. Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ un predicado $\Sigma$ -p.r.. Entonces (a) $M(P)$ es $\Sigma$-recursiva. (b) Si hay una funcion $\Sigma$-p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ tal que $M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})$, para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$, entonces $M(P)$ es $\Sigma$-p.r..

**Proof:** (a) Sea $\bar{P} = P \mid_{D_P} \cup C_0^{n+1,m} \mid_{(\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}) - D_P}$. Dejamos al lector verificar cuidadosamente que $M(P) = M(\bar{P})$. Veremos entonces que $M(\bar{P})$ es $\Sigma$-recursiva. Note que $\bar{P}$ es $\Sigma$-p.r. (por que?). Sea $k$ tal que $\bar{P} \in \mathrm{PR}^\Sigma_k$. Ya que $\bar{P}$ es $\Sigma$-total y $\bar{P} \in \mathrm{PR}^\Sigma_k \subseteq \mathrm{R}^\Sigma_k$, tenemos que $M(\bar{P}) \in \mathrm{R}^\Sigma_{k+1}$ y por lo tanto $M(\bar{P}) \in \mathrm{R}^\Sigma$.

(b) Primero veremos que $D_{M(\bar{P})}$ es un conjunto $\Sigma$-p.r.. Notese que

$\chi_{D_{M(\bar{P})}} = \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists t \in \omega)_{t \leq f(\vec{x},\vec{\alpha})}\ \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$

lo cual nos dice que $\chi_{D_{M(\bar{P})}} = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists t \in \omega)_{t \leq x}\ \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] \circ (f, p_1^{n,m}, ..., p_{n+m}^{n,m})$

Pero el Lema 39 nos dice que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists t \in \omega)_{t \leq x}\ \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ es $\Sigma$-p.r. por lo cual tenemos que $\chi_{D_{M(\bar{P})}}$ lo es. Sea

$P_1 = \lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\left[\bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \wedge (\forall j \in \omega)_{j \leq t}\ j = t \vee \neg\bar{P}(j, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$

Note que $P_1$ es $\Sigma$-total. Dejamos al lector usando lemas anteriores probar que $P_1$ es $\Sigma$-p.r.. Ademas notese que para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tenemos que $P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$ si y solo si $t = M(\bar{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$

Esto nos dice que $M(\bar{P}) = \left(\lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x},\vec{\alpha})} t^{P_1(t,\vec{x},\vec{\alpha})}\right]\right) \mid_{D_{M(\bar{P})}}$

por lo cual para probar que $M(\bar{P})$ es $\Sigma$-p.r. solo nos resta probar que $F = \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x},\vec{\alpha})} t^{P_1(t,\vec{x},\vec{\alpha})}\right]$

lo es. Pero $F = \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{y} t^{P_1(t,\vec{x},\vec{\alpha})}\right] \circ (C_0^{n,m}, f, p_1^{n,m}, ..., p_{n+m}^{n,m})$

y por lo tanto el Lema 38 nos dice que $F$ es $\Sigma$-p.r.. De esta manera hemos probado que $M(\bar{P})$ es $\Sigma$-p.r. y por lo tanto $M(P)$ lo es. $\Box$

**Lemma 44:** Las siguientes funciones son $\varnothing$-p.r.: (a) $\begin{array}{rcl} Q : \omega \times \mathbf{N} & \to & \omega \\ (x, y) & \to & \text{cociente de la division de } x \text{ por } y \end{array}$

(b) $\begin{array}{rcl} R : \omega \times \mathbf{N} & \to & \omega \\ (x, y) & \to & \text{resto de la division de } x \text{ por } y \end{array}$ (c) $\begin{array}{rcl} pr : \mathbf{N} & \to & \omega \\ n & \to & n\text{-esimo numero primo} \end{array}$

**Proof:** (a) Veamos primero veamos que $Q = M(P)$, donde $P = \lambda txy\left[(t+1).y > x\right]$. Notar que

$$\begin{array}{rcl} D_{M(P)} & = & \{(x, y) : (\exists t \in \omega)\ P(t, x, y) = 1\} \\ & = & \{(x, y) : (\exists t \in \omega)\ (t+1).y > x\} \\ & = & \omega \times \mathbf{N} \\ & = & D_Q \end{array}$$

Dejamos al lector la facil verificacion de que para cada $(x, y) \in \omega \times \mathbf{N}$, se tiene que $Q(x, y) = M(P)(x, y) = \min_t (t+1).y > x$

Esto prueba que $Q = M(P)$. Ya que $P$ es $\varnothing$-p.r. y $Q(x, y) \leq p_1^{2,0}(x, y)$, para cada $(x, y) \in \omega \times \mathbf{N}$

(b) del Lema 43 implica que $Q \in \mathrm{PR}^\varnothing$. (b) Notese que

$R=\lambda xy\left[ x\dot{-}Q(x,y).y\right]$

y por lo tanto $R\in\mathrm{PR}^{\varnothing}$. (c) Para ver que $pr$ es $\varnothing$-p.r., veremos que la extension $h:\omega\rightarrow\omega$, dada por $h(0)=0$ y $h(n)=pr(n)$, $n\geq1$, es $\varnothing$-p.r.. Primero note que

$$\begin{array}{rcl} h(0) & = & 0\\ h(x+1) & = & \min_t\left( t\text{ es primo}\wedge t>h(x)\right) \end{array}$$

O sea que $h=R\left( C_0^{0,0},M(P)\right)$, donde $P=\lambda tzx\left[ t\text{ es primo}\wedge t>z\right]$

Es decir que solo nos resta ver que $M(P)$ es $\varnothing$-p.r.. Claramente $P$ es $\varnothing$-p.r.. Veamos que para cada $(z,x)\in\omega^2$, tenemos que $M(P)(z,x)=\min_t\left( t\text{ es primo}\wedge t>z\right) \leq z!+1$

Sea $p$ primo tal que $p$ divide a $z!+1$. Es facil ver que entonces $p>z$. Pero esto claramente nos dice que $\min_t\left( t\text{ es primo}\wedge t>z\right) \leq p\leq z!+1$

O sea que (b) del Lema 43 implica que $M(P)$ es $\varnothing$ -p.r. ya que podemos tomar $f=\lambda zx\left[ z!+1\right]$. $\square$

**Lemma 45:** Las funciones $\lambda xi\left[ (x)_i\right]$ y $\lambda x\left[ Lt(x)\right]$ son $\varnothing$-p.r.

**Proof:** Note que $D_{\lambda xi\left[ (x)_i\right]}=\mathbf{N}\times\mathbf{N}$. Sea

$P=\lambda txi\left[ \lnot(pr(i)^{t+1}\text{ divide }x)\right]$

Note que $P$ es $\varnothing$-p.r. y que $D_P=\omega\times\omega\times\mathbf{N}$. Dejamos al lector la prueba de que $\lambda xi\left[ (x)_i\right] =M(P)$. Ya que $(x)_i\leq x$, para todo $x\in\mathbf{N}$, (b) del Lema 43 implica que $\lambda xi\left[ (x)_i\right]$ es $\varnothing$-p.r.. Veamos que $\lambda x\left[ Lt(x)\right]$ es $\varnothing$-p.r.. Sea

$Q=\lambda tx\left[ (\forall i\in\mathbf{N})_{i\leq x}\ (i\leq t\vee(x)_i=0)\right]$

Notese que $D_Q=\omega\times\mathbf{N}$ y que ademas por el Lema 39 tenemos que $Q$ es $\varnothing$-p.r. (dejamos al lector explicar como se aplica tal lema en este caso). Ademas notese que $\lambda x\left[ Lt(x)\right] =M(Q)$ y que $Lt(x)\leq x,$ para todo $x\in\mathbf{N}$

lo cual por (b) del Lema 43 nos dice que $\lambda x\left[ Lt(x)\right]$ es $\varnothing$-p.r.. $\square$ Para $x_1,...,x_n\in\omega$, escribiremos $\langle x_1,...,x_n\rangle$ en lugar de $\langle x_1,...,x_n,0,...\rangle$.

**Lemma 46:** Sea $n\geq1$. La funcion $\lambda x_1...x_n\left[ \langle x_1,...,x_n\rangle\right]$ es $\varnothing$-p.r.

**Proof:** Sea $f_n=\lambda x_1...x_n\left[ \langle x_1,...,x_n\rangle\right]$. Claramente $f_1$ es $\varnothing$ -p.r.. Ademas note que para cada $n\geq1$, tenemos

$f_{n+1}=\lambda x_1...x_{n+1}\left[ (f_n(x_1,...,x_n)pr(n+1)^{x_{n+1}})\right]$.

O sea que podemos aplicar un argumento inductivo. $\square$

**Lemma 47:** Supongamos que $\Sigma\neq\varnothing$. Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Sigma$, sean $n,m\geq0$ y sea $P:D_P\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}\times\Sigma^*\rightarrow\omega$ un predicado $\Sigma$-p.r.. Entonces (a) $M^{<}(P)$ es $\Sigma$-recursiva. (b) Si existe una funcion $\Sigma$-p.r. $f:\omega^n\times\Sigma^{*m}\rightarrow\omega$ tal que $\left\vert M^{<}(P)(\vec{x},\vec{\alpha})\right\vert =\left\vert \min_\alpha^{<}P(\vec{x},\vec{\alpha},\alpha)\right\vert \leq f(\vec{x},\vec{\alpha})$, para cada $(\vec{x},\vec{\alpha})\in D_{M^{<}(P)}$, entonces $M^{<}(P)$ es $\Sigma$-p.r..

**Proof:** Sea $Q=P\circ\left( p_2^{1+n,m},...,p_{1+n+m}^{1+n,m},\ast^{<}\circ p_1^{1+n,m}\right)$. Note que

$M^{<}(P)=\ast^{<}\circ M(Q)$

lo cual por (a) del Lema 43 implica que $M^{<}(P)$ es $\Sigma$-recursiva. Sea $k$ el cardinal de $\Sigma$. Ya que

$\left\vert \ast^{<}(M(Q)(\vec{x},\vec{\alpha}))\right\vert =\left\vert M^{<}(P)(\vec{x},\vec{\alpha})\right\vert \leq f(\vec{x},\vec{\alpha})$,

para todo $(\vec{x},\vec{\alpha})\in D_{M^{<}(P)}=D_{M(Q)}$, tenemos que $M(Q)(\vec{x},\vec{\alpha}))\leq\displaystyle\sum_{\iota=1}^{i=f(\vec{x},\vec{\alpha})}k^i$, para cada $(\vec{x},\vec{\alpha})\in D_{M(Q)}$.

O sea que por (a) del Lema 43, $M(Q)$ es $\Sigma$-p.r. y por lo tanto $M^{<}(P)$ lo es. $\square$

### 0.7.1. Recursion primitiva sobre valores anteriores

**Lemma 48:** Supongamos

$$\begin{array}{lll} f & : & U\subseteq \omega^n\times\Sigma^{*m}\to\omega \\ g & : & \omega\times\omega\times U\to\omega \\ h & : & \omega\times U\to\omega \end{array}$$

son funciones tales que

$$\begin{array}{lll} h(0,\vec{x},\vec{\alpha}) & = & f(\vec{x},\vec{\alpha})\text{, para cada } (\vec{x},\vec{\alpha})\in U \\ h(x+1,\vec{x},\vec{\alpha}) & = & g(h^{\downarrow}(x,\vec{x},\vec{\alpha}),x,\vec{x},\vec{\alpha})\text{, para cada } x\in\omega \text{ y } (\vec{x},\vec{\alpha})\in U. \end{array}$$

Entonces $h$ es $\Sigma$-p.r. si $f$ y $g$ lo son.

**Proof:** Supongamos $f,g$ son $\Sigma$-p.r.. Primero veremos que $h^{\downarrow}$ es $\Sigma$-p.r.. Notese que

$$\begin{array}{lll} h^{\downarrow}(0,\vec{x},\vec{\alpha}) & = & \langle h(0,\vec{x},\vec{\alpha})\rangle \\ & = & \langle f(\vec{x},\vec{\alpha})\rangle \\ & = & 2^{f(\vec{x},\vec{\alpha})} \\ h^{\downarrow}(x+1,\vec{x},\vec{\alpha}) & = & h^{\downarrow}(x,\vec{x},\vec{\alpha})pr(x+2)^{h(x+1,\vec{x},\vec{\alpha})} \\ & = & h^{\downarrow}(x,\vec{x},\vec{\alpha})pr(x+2)^{g(h^{\downarrow}(x,\vec{x},\vec{\alpha}),x,\vec{x},\vec{\alpha})} \end{array}$$

lo cual nos dice que $h^{\downarrow}=R(f_1,g_1)$ donde

$$\begin{array}{lll} f_1 & = & \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[2^{f(\vec{x},\vec{\alpha})}\right] \\ g_1 & = & \lambda Ax\vec{x}\vec{\alpha}\left[Apr(x+2)^{g(A,x,\vec{x},\vec{\alpha})}\right] \end{array}$$

O sea que $h^{\downarrow}$ es $\Sigma$-p.r. ya que $f_1$ y $g_1$ lo son. Finalmente notese que $h=\lambda ix[(x)_i]\circ(Suc\circ p_1^{1+n,m},h^{\downarrow})$

lo cual nos dice que $h$ es $\Sigma$-p.r.. $\Box$

### 0.7.2. Independencia del alfabeto

**Lemma 49:** Supongamos $\varnothing \neq \Sigma \subseteq \Gamma$. (a) Si $<$ es un orden total estricto sobre $\Sigma$, entonces las funciones $*^{<} : \omega \rightarrow \Sigma^*$ y $\#^{<} : \Sigma^* \rightarrow \omega$ son $\Gamma$-p.r.. (b) Si $\prec$ es un orden total estricto sobre $\Gamma$, entonces las funciones $\#^{\prec} |_{\Sigma^*} : \Sigma^* \rightarrow \omega$ y $*^{\prec} |_{\#^{\prec}(\Sigma^*)} : \#^{\prec}(\Sigma^*) \rightarrow \Sigma^*$ son $\Sigma$-p.r..

**Proof:** (a) Supongamos $\Sigma = \{a_1, ..., a_k\}$ y $<$ es dado por $a_1 < ... < a_k$. Sea $s_e^{<} : \Gamma^* \rightarrow \Gamma^*$ dada por

$$\begin{array}{rcl} s_e^{<}(\varepsilon) & = & a_1 \\ s_e^{<}(\alpha a_i) & = & \alpha a_{i+1}, \text{ si } i < k \\ s_e^{<}(\alpha a_k) & = & s_e^{<}(\alpha) a_1 \\ s_e^{<}(\alpha a) & = & \varepsilon, \text{ si } a \in \Gamma - \Sigma. \end{array}$$

Note que $s_e^{<}$ es $\Gamma$-p.r. y que $s_e^{<} |_{\Sigma^*} = s^{<}$. Ya que $\Sigma^*$ es un conjunto $\Gamma$-p.r. tenemos que $s^{<}$ es $\Gamma$-p.r.. O sea que la recursion $\begin{array}{rcl} *^{<}(0) & = & \varepsilon \\ *^{<}(x+1) & = & s^{<}(*^{<}(x)) \end{array}$

implica que $*^{<}$ es $\Gamma$-p.r.. Para ver que $\#^{<} : \Sigma^* \rightarrow \omega$ es $\Gamma$-p.r., sea $\#_e^{<} : \Gamma^* \rightarrow \omega$ dada por

$$\begin{array}{rcl} \#_e^{<}(\varepsilon) & = & 0 \\ \#_e^{<}(\alpha a_i) & = & \#_e^{<}(\alpha).k + i \\ \#_e^{<}(\alpha a) & = & 0, \text{ si } a \in \Gamma - \Sigma. \end{array}$$

Ya que $\#_e^{<}$ es $\Gamma$-p.r., eso es $\#^{<} = \#_e^{<} |_{\Sigma^*}$. (b) Sea $n$ el cardinal de $\Gamma$. Ya que

$\#^{\prec} \mid_{\Sigma^*}(\varepsilon) = 0$

$\#^{\prec} \mid_{\Sigma^*}(\alpha a) = \#^{\prec} |_{\Sigma^*} (\alpha).n + \#^{\prec}(a)$, para cada $a \in \Sigma$

la funcion $\#^{\prec} |_{\Sigma^*}$ es $\Sigma$-p.r.. O sea que el predicado $P = \lambda x \alpha \left[\#^{\prec} |_{\Sigma^*} (\alpha) = x\right]$ es $\Sigma$-p.r.. Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Sigma$. Note que $*^{\prec} |_{\#^{\prec}(\Sigma^*)} = M^{<}(P)$, lo cual ya que $\left| *^{\prec} |_{\#^{\prec}(\Sigma^*)} (x) \right| \leq x$ nos dice que $*^{\prec} |_{\#^{\prec}(\Sigma^*)}$ es $\Sigma$-p.r. (Lema 47). $\Box$

**Lemma 50:** Supongamos $\Gamma \neq \varnothing$ y sea $<$ un orden total estricto sobre $\Gamma$. Dada $h$ una funcion $\Gamma$-mixta, son equivalentes (1) $h$ es $\Gamma$-recursiva (resp. $\Gamma$-p.r.) (2) $h^{\#^{<}}$ es $\varnothing$-recursiva (resp. $\varnothing$-p.r.)

**Proof:** (2)$\Rightarrow$(1). Supongamos $h : D_h \subseteq \omega^n \times \Gamma^{*m} \rightarrow \Gamma^*$. Ya que $h^{\#^{<}}$ es $\Gamma$ -recursiva (resp. $\Gamma$-p.r.) y

$h = *^{<} \circ h^{\#^{<}} \circ \left(p_1^{n,m}, ..., p_n^{n,m}, \#^{<} \circ p_{n+1}^{n,m}, ..., \#^{<} \circ p_{n+m}^{n,m}\right)$,

tenemos que $h$ es $\Gamma$-recursiva (resp. $\Gamma$-p.r.). (1)$\Rightarrow$(2). Probaremos por induccion en $k$ que

(*) Si $h \in \mathrm{R}_k^{\Gamma}$ (resp. $h \in \mathrm{PR}_k^{\Gamma}$), entonces $h^{\#^{<}}$ es $\varnothing$-recursiva (resp. $\varnothing$-p.r.). El caso $k = 0$ es facil y dejado al lector. Supongamos (*) vale para un $k$ fijo. Veremos que vale para $k + 1$. Sea $h \in \mathrm{R}_{k+1}^{\Gamma}$ (resp. $h \in \mathrm{PR}_{k+1}^{\Gamma}$). Hay varios casos

Caso 1. Supongamos $h = f \circ (f_1, ..., f_n)$, con $f, f_1, ..., f_n \in \mathrm{R}_k^{\Gamma}$ (resp. $f, f_1, ..., f_n \in \mathrm{PR}_k^{\Gamma}$). Por hipotesis inductiva tenemos que $f^{\#^{<}}, f_1^{\#^{<}}, ..., f_n^{\#^{<}}$ son $\varnothing$-recursivas (resp. $\varnothing$ -p.r.). Ya que $h^{\#^{<}} = f^{\#^{<}} \circ \left(f_1^{\#^{<}}, ..., f_n^{\#^{<}}\right)$, tenemos que $h^{\#^{<}}$ es $\varnothing$-recursiva (resp. $\varnothing$-p.r.).

Caso 2. Supongamos $h = M(P)$, con $P : \omega \times \omega^n \times \Gamma^{*m} \rightarrow \omega$, un predicado en $\mathrm{R}_k^{\Gamma}$. Ya que $h^{\#^{<}} = M(P^{\#^{<}})$, tenemos que $h^{\#^{<}}$ es $\varnothing$ -recursiva.

Caso 3. Supongamos $h = R(f, \mathcal{G})$, con

$$\begin{array}{rcl} f & : & \omega^n \times \Gamma^{*m} \rightarrow \Gamma^* \\ \mathcal{G}_a & : & \omega^n \times \Gamma^{*m} \times \Gamma^* \times \Gamma^* \rightarrow \Gamma^*, \ a \in \Gamma \end{array}$$

funciones en $\mathrm{R}_k^{\Gamma}$ (resp. $\mathrm{PR}_k^{\Gamma}$). Sea $\Gamma = \{a_1, ..., a_r\}$, con $a_1 < a_2 < ... < a_r$. Por hipotesis inductiva tenemos que $f^{\#^{<}}$ y cada $\mathcal{G}_a^{\#^{<}}$ son $\varnothing$-recursivas (resp. $\varnothing$-p.r.). Sea

$$\begin{array}{rcl} i_0 : \omega & \rightarrow & \omega \\ x & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} r & \text{si } r \text{ divide } x \\ R(x,r) & \text{caso contrar} \end{array} \right. \end{array}$$

y sea $B = \lambda x \left[Q(x \dot{-} i_0(x), r)\right]$

($R$ y $Q$ son definidas en el Lema 44). Note que $i_0$ y $B$ son $\varnothing$-p.r. y que $*^{<}(x) = *^{<}(B(x)) a_{i_0(x)}$, para $x \geq 1$

$$\begin{array}{rcl} h^{\#^<}(\vec{x},\vec{y},t+1) & = & \#^<(h(\vec{x},*^<(\vec{y}),*^<(t+1))) \\ & = & \#^<(h(\vec{x},*^<(\vec{y}),*^<(B(t+1))a_{i_0(t+1)})) \\ & = & \#^<\left(\mathcal{G}_{a_{i_0(t+1)}}(\vec{x},*^<(\vec{y}),*^<(B(t+1)),h(\vec{x},*^<(\vec{y}),*^< \right. \\ & = & \#^<\left(\mathcal{G}_{a_{i_0(t+1)}}(\vec{x},*^<(\vec{y}),*^<(B(t+1)),*^<(h^{\#^<}(\vec{x},\vec{y}, \right. \\ & = & \mathcal{G}^{\#^<}_{a_{i_0(t+1)}}(\vec{x},\vec{y},B(t+1),h^{\#^<}(\vec{x},\vec{y},B(t+1))) \end{array}$$

(ver Lema 6). Tambien tenemos

y ya que $B(t{+}1) < t{+}1$, tenemos que (**) $h^{\#^<}(\vec{x},\vec{y},t{+}1) = \mathcal{G}^{\#^<}_{a_{i_0(t+1)}}(\vec{x},\vec{y},B(t{+}1),\left\langle h^{\#^<}(\vec{x},\vec{y},0),...,h^{\#^<}(\vec{x}\right.$

A continuacion definamos

$H = \lambda t\vec{x}\vec{y}\left[\left\langle h^{\#^<}(\vec{x},\vec{y},0),...,h^{\#^<}(\vec{x},\vec{y},t)\right\rangle\right]$

Por (**) tenemos que

$$\begin{array}{rcl} H(0,\vec{x},\vec{y}) & = & \left\langle h^{\#^<}(\vec{x},\vec{y},0)\right\rangle = \left\langle f^{\#^<}(\vec{x},\vec{y})\right\rangle = 2^{f^{\#^<}(\vec{x},\vec{y})} \\ H(t+1,\vec{x},\vec{y}) & = & \left((H(t,\vec{x},\vec{y})+1).pr(t+2)^{\mathcal{G}^{\#^<}_{a_{i_0(t+1)}}(\vec{x},\vec{y},B(t+1),(H(t,\vec{x},\vec{y}))_{B(t+1)})}\right) \end{array}$$

O sea que si definimos $g:\omega{\times}\omega{\times}\omega^n{\times}\omega^m \to \omega$ por $g(z,t,\vec{x},\vec{y}) = \left\{\begin{array}{c} \left((z+1).pr(t+2)^{\mathcal{G}^{\#^<}_{a_1}(\vec{x},\vec{y},B(t+1),(z)_{B(t+1)}} \right. \\ \vdots \\ \left((z+1).pr(t+2)^{\mathcal{G}^{\#^<}_{a_r}(\vec{x},\vec{y},B(t+1),(z)_{B(t+1)}} \right. \end{array}\right.$

tenemos que $H = R(\lambda x\,[2^x] \circ f^{\#^<}, g)$. Note que $g$ es $\varnothing$-recursiva (resp. $\varnothing$-p.r.), ya que $g = f_1(z,t,\vec{x},\vec{y})P_1(z,t,\vec{x},\vec{y}) + ... + f_r(z,t,\vec{x},\vec{y})P_r(z,t,\vec{x},\vec{y})$,

con
$$\begin{array}{rcl} f_i & = & \lambda zt\vec{x}\vec{y}\left[\left((z+1).pr(t+2)^{\mathcal{G}^{\#^<}_{a_i}(\vec{x},\vec{y},B(t+1),(z)_{B(t+1)})}\right)\right] \\ P_i & = & \lambda zt\vec{x}\vec{y}\,[i_0(t+1)=i] \end{array}$$

y estas funciones son totales y $\varnothing$-recursivas (resp. $\varnothing$ -p.r.). O sea que $H$ es $\varnothing$-recursiva (resp. $\varnothing$-p.r.) y por lo tanto lo es $h^{\#^<} = \lambda\vec{x}\vec{y}t\,[(H(t,\vec{x},\vec{y}))_{t+1}]$

Los otros casos en los cuales $h$ es obtenida por recursion primitiva son similares. □

**Theorem 51:** Sean $\Sigma$ y $\Gamma$ alfabetos cualesquiera. (a) Supongamos una funcion $f$ es $\Sigma$-mixta y $\Gamma$-mixta, entonces $f$ es $\Sigma$-recursiva (resp. $\Sigma$-p.r.) sii $f$ es $\Gamma$-recursiva (resp. $\Gamma$-p.r.). (b) Supongamos un conjunto $S$ es $\Sigma$-mixto y $\Gamma$-mixto, entonces $S$ es $\Sigma$-p.r. sii $S$ es $\Gamma$-p.r..

**Proof:** (a) Ya que $f$ es $(\Sigma\cap\Gamma)$-mixta, podemos suponer sin perdida de generalidad que $\Sigma \subseteq \Gamma$. Primero haremos el caso en que $\Sigma = \varnothing$ y $\Gamma \neq \varnothing$. Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Gamma$. Ya que $f$ es $\varnothing$-mixta, tenemos $f = f^{\#^<}$ y por lo tanto podemos aplicar el lema anterior.

Supongamos ahora que $\Sigma \neq \varnothing$. O sea que $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, con $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$. Haremos el caso $O = \Sigma^*$. Supongamos $f$ es $\Sigma$ -recursiva (resp. $\Sigma$-p.r.). Sea $\prec$ un orden total estricto sobre $\Gamma$. Ya que las funciones $\#^\prec|_{\Sigma^*}$ y $*^\prec|_{\#^\prec(\Sigma^*)}$ son $\Sigma$-p.r. (Lema 49) y

$$\begin{array}{rcl} f^{\#^\prec} & = & \#^\prec \circ f \circ \left(p_1^{n+m,0},...,p_n^{n+m,0}, *^\prec \circ p_{n+1}^{n+m,0},...,*^\prec \circ p_{n+m}^{n+m,0}\right) \\ & = & \#^\prec|_{\Sigma^*} \circ f \circ \left(p_1^{n+m,0},...,p_n^{n+m,0}, *^\prec|_{\#^\prec(\Sigma^*)} \circ p_{n+1}^{n+m,0},...,*^\prec|_{\#^\prec(\Sigma^*)} \circ p_{n+m}^{n+m,0}\right) \end{array}$$

tenemos que $f^{\#^\prec}$ es $\Sigma$-recursiva (resp. $\Sigma$-p.r.). O sea que por el caso ya probado de (a), $f^{\#^\prec}$ es $\varnothing$ -recursiva (resp. $\varnothing$-p.r.) lo cual por el lema anterior nos dice que $f$ es $\Gamma$-recursiva (resp. $\Gamma$-p.r.). Supongamos ahora que $f$ es $\Gamma$-recursiva (resp. $\Gamma$-p.r.). Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Sigma$. Ya que $\#^<$ y $*^<$ son $\Gamma$-p.r. (Lema 49), la funcion

$f^{\#^<} = \#^< \circ f \circ \left(p_1^{n+m,0},...,p_n^{n+m,0}, *^< \circ p_{n+1}^{n+m,0},...,*^< \circ p_{n+m}^{n+m,0}\right)$

es $\Gamma$-recursiva (resp. $\Gamma$-p.r.). Por el caso ya probado de (a), $f^{\#^<}$ es $\varnothing$-recursiva (resp. $\varnothing$-p.r.), lo cual por el lema anterior nos dice que $f$ es $\Sigma$-recursiva (resp. $\Sigma$-p.r.). (b) es dejado al lector (use (a)). □

## 0.8. Sintaxis de $\mathcal{S}^{\Sigma}$

**Lemma 52:** Se tiene que: (a) Si $I_1...I_n = J_1...J_m$, con $I_1, ..., I_n, J_1, ..., J_m \in \text{Ins}^{\Sigma}$, entonces $n = m$ y $I_j = J_j$ para cada $j \geq 1$. (b) Si $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma}$, entonces existe una unica sucesion de instrucciones $I_1, ..., I_n$ tal que $\mathcal{P} = I_1...I_n$

**Proof:** (a) Supongamos $I_n$ es un tramo final propio de $J_m$. Notar que entonces $n > 1$. Es facil ver que entonces ya sea $J_m = \text{L}\bar{u}I_n$ para algun $u \in \mathbf{N}$, o $I_n$ es de la forma GOTO L$\bar{n}$ y $J_m$ es de la forma $w$IF P$\bar{k}$ BEGINS $a$ GOTO L$\bar{n}$ donde $w \in \{\text{L}\bar{n} : n \in \mathbf{N}\} \cup \{\varepsilon\}$. El segundo caso no puede darse porque entonces el anteultimo simbolo de $I_{n-1}$ deberia ser S lo cual no sucede para ninguna instruccion. O sea que

$I_1...I_n = J_1...J_{m-1}\text{L}\bar{u}I_n$

lo cual dice que (*) $I_1...I_{n-1} = J_1...J_{m-1}\text{L}\bar{u}$. Es decir que L$\bar{u}$ es tramo final de $I_{n-1}$ y por lo tanto GOTO L$\bar{u}$ es tramo final de $I_{n-1}$. Por (*), GOTO es tramo final de $J_1...J_{m-1}$, lo cual es impossible. Hemos llegado a una contradiccion lo cual nos dice que $I_n$ no es un tramo final propio de $J_m$. Por simetria tenemos que $I_n = J_m$, lo cual usando un razonamiento inductivo nos dice que $n = m$ y $I_j = J_j$ para cada $j \geq 1$.

(b) Es consecuencia directa de (a). $\square$

## 0.9. Funciones $\Sigma$-computables

**Theorem 53:** Si $f$ es $\Sigma$-computable, entonces $f$ es $\Sigma$-efectivamente computable.

**Proof:** Supongamos por ejemplo que $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ es computada por $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$. Es claro que el procedimiento que consiste en realizar las sucesivas instrucciones de $\mathcal{P}$ (partiendo de $((x_1, ..., x_n, 0, 0, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \varepsilon, \varepsilon, ...)))$ y eventualmente terminar en caso de que nos toque realizar la instruccion $n(\mathcal{P}) + 1$, y dar como salida el contenido de la variable N1 , es un procedimiento efectivo que computa a $f$. $\square$

**Proposition 54:**

(a) Sea $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ una funcion $\Sigma$-computable. Entonces hay un macro $[\mathrm{V}\overline{n+1} \leftarrow f(\mathrm{V}1, ..., \mathrm{V}\bar{n}, \mathrm{W}1, ..., \mathrm{W}\bar{m})]$ (b) Sea $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$ una funcion $\Sigma$-computable. Entonces hay un macro $[\mathrm{W}\overline{m+1} \leftarrow f(\mathrm{V}1, ..., \mathrm{V}\bar{n}, \mathrm{W}1, ..., \mathrm{W}\bar{m})]$

**Proof:** (b) Sea $\mathcal{P}$ un programa que compute a $f$. Tomemos un $k$ tal que $k \geq n, m$ y tal que todas las variables y labels de $\mathcal{P}$ estan en el conjunto

$\{\mathrm{N}1, ..., \mathrm{N}\bar{k}, \mathrm{P}1, ..., \mathrm{P}\bar{k}, \mathrm{L}1, ..., \mathrm{L}\bar{k}\}$.

Sea $\mathcal{P}'$ la palabra que resulta de reemplazar en $\mathcal{P}$: - la variable $\mathrm{N}\bar{j}$ por $\mathrm{V}\overline{n+j}$ , para cada $j = 1, ..., k$ - la variable $\mathrm{P}\bar{j}$ por $\mathrm{W}\overline{m+j}$ , para cada $j = 1, ..., k$ - el label $\mathrm{L}\bar{j}$ por $\mathrm{A}\bar{j}$, para cada $j = 1, ..., k$ Notese que

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{V}\overline{n+1} \leftarrow \mathrm{V}1 \\
\quad\quad\vdots \\
\mathrm{V}\overline{n+n} \leftarrow \mathrm{V}\bar{n} \\
\mathrm{V}\overline{n+n+1} \leftarrow 0 \\
\quad\quad\vdots \\
\mathrm{V}\overline{n+k} \leftarrow 0 \\
\mathrm{W}\overline{m+1} \leftarrow \mathrm{W}1 \\
\quad\quad\vdots \\
\mathrm{W}\overline{m+m} \leftarrow \mathrm{W}\bar{m} \\
\mathrm{W}\overline{m+m+1} \leftarrow \varepsilon \\
\quad\quad\vdots \\
\mathrm{W}\overline{m+k} \leftarrow \varepsilon \\
\mathcal{P}'
\end{array}
$$

es el macro buscado, el cual tendra sus variables auxiliares y labels en la lista $\mathrm{V}\overline{n+1}, ..., \mathrm{V}\overline{n+k}, \mathrm{W}\overline{m+2}$

$\square$

**Proposition 55:** Sea $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ un predicado $\Sigma$-computable. Entonces hay un macro [IF $P(\mathrm{V}1, ..., \mathrm{V}\bar{n}, \mathrm{W}1, ..., \mathrm{W}\bar{m})$ GOTO A1]

**Theorem 56:** Si $h$ es $\Sigma$-recursiva, entonces $h$ es $\Sigma$ -computable.

**Proof:** Probaremos por induccion en $k$ que

(*) Si $h \in \mathrm{R}_k^\Sigma$, entonces $h$ es $\Sigma$ -computable. El caso $k = 0$ es dejado al lector. Supongamos (*) vale para $k$, veremos que vale para $k + 1$. Sea $h \in \mathrm{R}_{k+1}^\Sigma - \mathrm{R}_k^\Sigma$. Hay varios casos

Caso 1. Supongamos $h = M(P)$, con $P : \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$, un predicado perteneciente a $\mathrm{R}_k^\Sigma$. Por hipotesis inductiva, $P$ es $\Sigma$- computable y por lo tanto tenemos un macro

[IF $P(\mathrm{V}1, ..., \mathrm{V}\overline{n+1}, \mathrm{W}1, ..., \mathrm{W}\bar{m})$ GOTO A1]

lo cual nos permite realizar el siguiente programa

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{L}2 & \text{IF } P(\mathrm{N}\overline{n+1}, \mathrm{N}1, ..., \mathrm{N}\bar{n}, \mathrm{P}1, ..., \mathrm{P}\bar{m}) \text{ GOTO L1} \\
 & \mathrm{N}\overline{n+1} \leftarrow \mathrm{N}\overline{n+1} + 1 \\
 & \text{GOTO L2} \\
\mathrm{L}1 & \mathrm{N}1 \leftarrow \mathrm{N}\overline{n+1}
\end{array}
$$

Es facil chequear que este programa computa $h$. Caso 2. Supongamos $h = R(f, \mathcal{G})$, con

$$
\begin{array}{lll}
f & : & S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \Sigma^* \\
\mathcal{G}_a & : & S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*, \ a \in \Sigma
\end{array}
$$

elementos de $R_k^\Sigma$. Sea $\Sigma = \{a_1, ..., a_r\}$. Por hipotesis inductiva, las funciones $f$, $\mathcal{G}_a$, $a \in \Sigma$ , son $\Sigma$-computables y por lo tanto podemos hacer el siguiente programa via el uso de macros

$$
\begin{array}{ll}
 & [\mathrm{P}\overline{m+3} \leftarrow f(\mathrm{N}1, ..., \mathrm{N}\bar{n}, \mathrm{P}1, ..., \mathrm{P}\bar{m})] \\
\mathrm{L}\overline{r+1} & \mathrm{IF\ P}\overline{m+1}\ \mathrm{BEGINS}\ a_1\ \mathrm{GOTO\ L1} \\
 & \vdots \\
 & \mathrm{IF\ P}\overline{m+1}\ \mathrm{BEGINS}\ a_r\ \mathrm{GOTO\ L}\bar{r} \\
 & \mathrm{GOTO\ L}\overline{r+2} \\
\mathrm{L1} & \mathrm{P}\overline{m+1} \leftarrow {}^{\frown}\mathrm{P}\overline{m+1} \\
 & [\mathrm{P}\overline{m+3} \leftarrow \mathcal{G}_{a_1}(\mathrm{N}1, ..., \mathrm{N}\bar{n}, \mathrm{P}1, ..., \mathrm{P}\bar{m}, \mathrm{P}\overline{m+2}, \mathrm{P}\overline{m+3})] \\
 & \mathrm{P}\overline{m+2} \leftarrow \mathrm{P}\overline{m+2}a_1 \\
 & \mathrm{GOTO\ L}\overline{r+1} \\
 & \vdots \\
\mathrm{L}\bar{r} & \mathrm{P}\overline{m+1} \leftarrow {}^{\frown}\mathrm{P}\overline{m+1} \\
 & \mathrm{P}\overline{m+3} \leftarrow \mathcal{G}_{a_r}(\mathrm{N}1, ..., \mathrm{N}\bar{n}, \mathrm{P}1, ..., \mathrm{P}\bar{m}, \mathrm{P}\overline{m+2}, \mathrm{P}\overline{m+3}) \\
 & \mathrm{P}\overline{m+2} \leftarrow \mathrm{P}\overline{m+2}a_r \\
 & \mathrm{GOTO\ L}\overline{r+1} \\
\mathrm{L}\overline{r+2} & \mathrm{P1} \leftarrow \mathrm{P}\overline{m+3}
\end{array}
$$

Es facil chequear que este programa computa $h$. El resto de los casos son dejados al lector.

□

## 0.10. Análisis de la recursividad de $\mathcal{S}^{\Sigma}$

**Lemma 57:** Sea $\Sigma$ un alfabeto cualquiera. Las funciones $S$ y $\_$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r..

**Proof:** Use el Teorema 51. □

**Lemma 58:** Para cada $n, x \in \omega$, tenemos que $|\bar{n}| \leq x$ si y solo si $n \leq 10^x - 1$

**Lemma 59:** $\text{Ins}^{\Sigma}$ es un conjunto $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r..

**Proof:** Para simplificar la Proof asumiremos que $\Sigma = \{@, \&\}$. Ya que $\text{Ins}^{\Sigma}$ es union de los siguientes conjuntos

$$\begin{array}{lll}
L_1 & = & \left\{\text{N}\bar{k} \leftarrow \text{N}\bar{k}+1 : k \in \mathbf{N}\right\} \\
L_2 & = & \left\{\text{N}\bar{k} \leftarrow \text{N}\bar{k}\dot{-}1 : k \in \mathbf{N}\right\} \\
L_3 & = & \left\{\text{N}\bar{k} \leftarrow \text{N}\bar{n} : k, n \in \mathbf{N}\right\} \\
L_4 & = & \left\{\text{N}\bar{k} \leftarrow 0 : k \in \mathbf{N}\right\} \\
L_5 & = & \left\{\text{IF N}\bar{k} \neq 0 \text{ GOTO L}\bar{m} : k, m \in \mathbf{N}\right\} \\
L_6 & = & \left\{\text{P}\bar{k} \leftarrow \text{P}\bar{k}.@ : k \in \mathbf{N}\right\} \\
L_7 & = & \left\{\text{P}\bar{k} \leftarrow \text{P}\bar{k}.\& : k \in \mathbf{N}\right\} \\
L_8 & = & \left\{\text{P}\bar{k} \leftarrow {}^{\frown}\text{P}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\right\} \\
L_9 & = & \left\{\text{P}\bar{k} \leftarrow \text{P}\bar{n} : k, n \in \mathbf{N}\right\} \\
L_9 & = & \left\{\text{P}\bar{k} \leftarrow \varepsilon : k \in \mathbf{N}\right\} \\
L_{10} & = & \left\{\text{IF P}\bar{k} \text{ BEGINS @ GOTO L}\bar{m} : k, m \in \mathbf{N}\right\} \\
L_{11} & = & \left\{\text{IF P}\bar{k} \text{ BEGINS \& GOTO L}\bar{m} : k, m \in \mathbf{N}\right\} \\
L_{12} & = & \{\text{GOTO L}\bar{m} : m \in \mathbf{N}\} \\
L_{13} & = & \{\text{SKIP}\} \\
L_{14} & = & \left\{\text{L}\bar{k}\alpha : k \in \mathbf{N} \text{ y } \alpha \in L_1 \cup ... \cup L_{13}\right\}
\end{array}$$

solo debemos probar que $L_1, ..., L_{14}$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Veremos primero por ejemplo que $L_{10} = \left\{\text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m} : k, m \in \mathbf{N}\right\}$

es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Primero notese que $\alpha \in L_{10}$ si y solo si existen $k, m \in \mathbf{N}$ tales que $\alpha = \text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m}$

Mas formalmente tenemos que $\alpha \in L_{10}$ si y solo si $(\exists k \in \mathbf{N})(\exists m \in \mathbf{N})\ \alpha = \text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m}$

Ya que cuando existen tales $k, m$ tenemos que $\bar{k}$ y $\bar{m}$ son subpalabras de $\alpha$, el lema anterior nos dice que $\alpha \in L_{10}$ si y solo si $(\exists k \in \mathbf{N})_{k \leq 10^{|\alpha|}}(\exists m \in \mathbf{N})_{m \leq 10^{|\alpha|}}\ \alpha = \text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m}$

Sea $P = \lambda mk\alpha\left[\alpha = \text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m}\right]$

Ya que $D_{\lambda k\left[\bar{k}\right]} = \omega$, tenemos que $D_P = \omega \times (\Sigma \cup \Sigma_p)^* \times (\Sigma \cup \Sigma_p)^*$. Notese que $P = \lambda\alpha\beta\left[\alpha = \beta\right] \circ \left(p_3^{2,1}, f\right)$

donde $f = \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\left[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\right] \circ \left(C_{\text{IFP}}^{2,1}, \lambda k\left[\bar{k}\right] \circ p_2^{2,1}, C_{\text{BEGINS@GOTOL}}^{2,1}, \lambda k\left[\bar{k}\right] \circ p_1^{2,1}\right)$

lo cual nos dice que $P$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Notese que

$\chi_{L_{10}} = \lambda\alpha\left[(\exists k \in \mathbf{N})_{k \leq 10^{|\alpha|}}(\exists m \in \mathbf{N})_{m \leq 10^{|\alpha|}}\ P(m, k, \alpha)\right]$

Esto nos dice que podemos usar dos veces el Lema 39 para ver que $\chi_{L_{10}}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Veamos como. Sea $Q = \lambda k\alpha\left[(\exists m \in \mathbf{N})_{m \leq 10^{|\alpha|}}\ P(m, k, \alpha)\right]$

Por el Lema 39 tenemos que $\lambda xk\alpha\left[(\exists m \in \mathbf{N})_{m \leq x}\ P(m, k, \alpha)\right]$

es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r. lo cual nos dice que $Q = \lambda xk\alpha\left[(\exists m \in \mathbf{N})_{m \leq x}\ P(m, k, \alpha)\right] \circ (\lambda\alpha\left[10^{|\alpha|}\right] \circ p_2^{1,1}, p_1^{1,1}, p_2^{1,1})$

lo es. Ya que $\chi_{L_{10}} = \lambda\alpha\left[(\exists k \in \mathbf{N})_{k \leq 10^{|\alpha|}}\ Q(k, \alpha)\right]$

podemos en forma similar aplicar el Lema 39 y obtener finalmente que $\chi_{L_{10}}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. En forma similar podemos probar que $L_1, ..., L_{13}$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Esto nos dice que $L_1 \cup ... \cup L_{13}$

es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Notese que $L_1 \cup ... \cup L_{13}$ es el conjunto de las instrucciones basicas de $\mathcal{S}^\Sigma$. Llamemos $\mathrm{InsBas}^\Sigma$ a dicho conjunto. Para ver que $L_{14}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r. notemos que

$\chi_{L_{14}} = \lambda\alpha \left[ (\exists k \in \mathbf{N})_{k \leq 10^{|\alpha|}} (\exists \beta \in \mathrm{InsBas}^\Sigma)_{|\beta| \leq |\alpha|}\ \alpha = \mathrm{L}\bar{k}\beta \right]$

lo cual nos dice que aplicando dos veces el Lema 39 obtenemos que $\chi_{L_{14}}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Ya que $\mathrm{Ins}^\Sigma = \mathrm{InsBas}^\Sigma \cup L_{14}$ tenemos que $\mathrm{Ins}^\Sigma$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. $\Box$

**Lemma 60:** *Bas* y *Lab* son funciones $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.

**Proof:** Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Sigma \cup \Sigma_p$. Sea $L = \{\mathrm{L}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\} \cup \{\varepsilon\}$. Dejamos al lector probar que $L$ es un conjunto $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Sea

$P = \lambda I\alpha \left[ \alpha \in \mathrm{Ins}^\Sigma \wedge I \in \mathrm{Ins}^\Sigma \wedge [\alpha]_1 \neq \mathrm{L} \wedge (\exists \beta \in L)\ I = \beta\alpha \right]$

Note que $D_P = (\Sigma \cup \Sigma_p)^{*2}$. Dejamos al lector probar que $P$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Notese ademas que cuando $I \in \mathrm{Ins}^\Sigma$ tenemos que $P(I, \alpha) = 1$ sii $\alpha = Bas(I)$. Dejamos al lector probar que $Bas = M^<(P)$ por lo que para ver que $Bas$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r., solo nos falta ver que la funcion $Bas$ es acotada por alguna funcion $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r. y $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-total. Pero esto es trivial ya que $|Bas(I)| \leq |I| = p_1^{0,1}(I)$ para cada $I \in \mathrm{Ins}^\Sigma$. Finalmente note que

$Lab = M^<(\lambda I\alpha [\alpha Bas(I) = I])$

lo cual nos dice que $Lab$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. $\Box$ Recordemos que dado un programa $\mathcal{P}$ habiamos definido $I_i^\mathcal{P} = \varepsilon$, para $i = 0$ o $i > n(\mathcal{P})$. O sea que la funcion $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-mixta $\lambda i\mathcal{P}\left[I_i^\mathcal{P}\right]$ tiene dominio igual a $\omega \times \mathrm{Pro}^\Sigma$.

**Lemma 61:** (a) $\mathrm{Pro}^\Sigma$ es un conjunto $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r. (b) $\lambda\mathcal{P}[n(\mathcal{P})]$ y $\lambda i\mathcal{P}\left[I_i^\mathcal{P}\right]$ son funciones $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r..

**Proof:** Ya que $\mathrm{Pro}^\Sigma = D_{\lambda\mathcal{P}[n(\mathcal{P})]}$ tenemos que (b) implica (a). Para probar (b) sea $<$ un orden total estricto sobre $\Sigma \cup \Sigma_p$. Sea $P$ el siguiente predicado

$\lambda x \left[ Lt(x) > 0 \wedge (\forall t \in \mathbf{N})_{t \leq Lt(x)}\ *^<((x)_t) \in \mathrm{Ins}^\Sigma \wedge \right.$ $(\forall t \in \mathbf{N})_{t \leq Lt(x)} (\forall m \in \mathbf{N})\ \neg(\mathrm{L}\bar{m}$ t-final $*^<((x)_t)) \vee$ $(\exists j \in \mathbf{N})_{j \leq Lt(x)} (\exists \alpha \in (\Sigma \cup \Sigma_p) - Num)\ \mathrm{L}\bar{m}\alpha$ t-

Notese que $D_P = \mathbf{N}$ y que $P(x) = 1$ sii $Lt(x) > 0$, $*^<((x)_t) \in \mathrm{Ins}^\Sigma$, para cada $t = 1, ..., Lt(x)$ y ademas $\subset_{t=1}^{t=Lt(x)} *^<((x)_t) \in \mathrm{Pro}^\Sigma$. Para ver que $P$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r. solo nos falta acotar el cuantificador $(\forall m \in \mathbf{N})$ de la expresion lambda que define a $P$. Ya que nos interesan los valores de $m$ para los cuales $\bar{m}$ es posiblemente una subpalabra de alguna de las palabras $*^<((x)_j)$, el Lema 58 nos dice que una cota posible es $10^{\max\{|*^<((x)_j)|:1 \leq j \leq Lt(x)\}} - 1$ . Dejamos al lector los detalles de la Proof de que $P$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Sea

$Q = \lambda x\alpha \left[ P(x) \wedge \alpha = \subset_{t=1}^{t=Lt(x)} *^<((x)_t) \right].$

Note que $D_Q = \mathbf{N} \times (\Sigma \cup \Sigma_p)^*$. Claramente $Q$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Ademas note que $D_{M(Q)} = \mathrm{Pro}^\Sigma$. Notese que para $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma$, tenemos que $M(Q)(\mathcal{P})$ es aquel numero tal que pensado como infinitupla (via mirar su secuencia de exponentes) codifica la secuencia de instrucciones que forman a $\mathcal{P}$. Es decir $M(Q)(\mathcal{P}) = \left\langle \#^<(I_1^\mathcal{P}), \#^<(I_2^\mathcal{P}), ..., \#^<(I_{n(\mathcal{P})}^\mathcal{P}), 0, 0, ... \right\rangle$

Por (b) del Lema 43, $M(Q)$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. ya que para cada $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl} M(Q)(\mathcal{P}) & = & \left\langle \#^<(I_1^\mathcal{P}), \#^<(I_2^\mathcal{P}), ..., \#^<(I_{n(\mathcal{P})}^\mathcal{P}), 0, 0, ... \right\rangle \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n(\mathcal{P})} pr(i)^{\#^<(I_1^\mathcal{P})} \\ & \leq & \prod\limits_{i=1}^{|\mathcal{P}|} pr(i)^{\#^<(\mathcal{P})} \end{array}$$

Ademas tenemos que $\begin{array}{rcl} \lambda\mathcal{P}[n(\mathcal{P})] & = & \lambda x[Lt(x)] \circ M(Q) \\ \lambda i\mathcal{P}\left[I_i^\mathcal{P}\right] & = & *^< \circ g \circ \left(p_1^{1,1}, M(Q) \circ p_2^{1,1}\right) \end{array}$

donde $g = C_0^{1,1}\ |_{\{0\} \times \omega} \cup \lambda ix[(x)_i]$, lo cual dice que $\lambda\mathcal{P}[n(\mathcal{P})]$ y $\lambda i\mathcal{P}\left[I_i^\mathcal{P}\right]$ son funciones $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. $\Box$

**Lemma 62:** Dado un orden total estricto $<$ sobre $\Sigma \cup \Sigma_p$, las funciones $s$, $S_\#$ y $S_*$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r..

**Proof:** Necesitaremos algunas funciones $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. Dada una instruccion $I$ en la cual al menos ocurre una variable, usaremos $\#Var1(I)$ para denotar el numero de la primer variable que ocurre en $I$. Por ejemplo

$\#Var1\left(\text{L}\bar{n}\text{ IF N}\bar{k}\neq 0\text{ GOTO L}\bar{m}\right)=k$

Notese que $\lambda I[\#Var1(I)]$ tiene dominio igual a $\text{Ins}^{\Sigma}-L$, donde $L$ es la union de los siguientes conjuntos

$$\{\text{GOTOL}\bar{m}:m\in\mathbf{N}\}\cup\{\text{L}\bar{k}\text{GOTOL}\bar{m}:k,m\in\mathbf{N}\}\ \{\text{SKIP}\}\cup\{\text{L}\bar{k}\text{SKIP}:k\in\mathbf{N}\}$$

Dada una instruccion $I$ en la cual ocurren dos variables, usaremos $\#Var2(I)$ para denotar el numero de la segunda variable que ocurre en $I$. Por ejemplo $\#Var2\left(\text{N}\bar{k}\leftarrow\text{N}\bar{m}\right)=m$

Notese que el dominio de $\lambda I[\#Var2(I)]$ es igual a la union de los siguientes conjuntos
$\{\text{N}\bar{k}\ \leftarrow\ \text{N}\bar{m}:k,m\in\mathbf{N}\}\cup\{\text{L}\bar{j}\ \text{N}\bar{k}\leftarrow\text{N}\bar{m}:j,k,m\in\mathbf{N}\}$
$\{\text{P}\bar{k}\ \leftarrow\ \text{P}\bar{m}:k,m\in\mathbf{N}\}\cup\{\text{L}\bar{j}\ \text{P}\bar{k}\leftarrow\text{P}\bar{m}:j,k,m\in\mathbf{N}\}$

Ademas notese que para una instruccion $I$ tenemos que $\begin{array}{rcl}\#Var1(I) & = & \min_k(\text{N}\bar{k}\leftarrow\text{ ocu } I\vee\text{N}\bar{k}\neq\text{ ocu } I\\ \#Var2(I) & = & \min_k(\text{N}\bar{k}\text{ t-final } I\vee\text{N}\bar{k}+\text{ ocu } I\end{array}$

Esto nos dice que si llamamos $P$ al predicado $\lambda k\alpha\left[\alpha\in\text{Ins}^{\Sigma}\wedge(\text{N}\bar{k}\leftarrow\text{ ocu }\alpha\vee\text{N}\bar{k}\neq\text{ ocu }\alpha\vee\text{P}\bar{k}\leftarrow\text{ ocu }\alpha\right.$

entonces $\lambda I[\#Var1(I)]=M(P)$ por lo cual $\lambda I[\#Var1(I)]$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r. Similarmente se puede ver que $\lambda I[\#Var2(I)]$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. Sea $\begin{array}{rcl}F_{\dot{-}}:\mathbf{N}\times\mathbf{N} & \rightarrow & \omega\\ (x,j) & \rightarrow & \langle(x)_1,....,(x)_{j-1},(x)_j\dot{-}1,(x)_{j+1},...\rangle\end{array}$

Ya que $F_{\dot{-}}(x,j)=\begin{cases}Q(x,pr(j)) & \text{si } pr(j)\text{ divide } x\\ x & \text{caso contrario}\end{cases}$

tenemos que $F_{\dot{-}}$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. Sea $\begin{array}{rcl}F_{+}:\mathbf{N}\times\mathbf{N} & \rightarrow & \omega\\ (x,j) & \rightarrow & \langle(x)_1,....,(x)_{j-1},(x)_j+1,(x)_{j+1},...\rangle\end{array}$

Ya que $F_{+}(x,j)=x.pr(j)$ tenemos que $F_{+}$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. Sea $\begin{array}{rcl}F_{\leftarrow}:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathbf{N} & \rightarrow & \omega\\ (x,j,k) & \rightarrow & \langle(x)_1,....,(x)_{j-1},\end{array}$

Ya que $F_{\leftarrow}(x,j,k)=Q(x,pr(j)^{(x)_j}).pr(j)^{(x)_k}$ tenemos que $F_{\leftarrow}$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. Sea $\begin{array}{rcl}F_0:\mathbf{N}\times\mathbf{N} & \rightarrow & \omega\\ (x,j) & \rightarrow & \langle(x\end{array}$

Es facil ver que $F_0$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. Para cada $a\in\Sigma$, sea $\begin{array}{rcl}F_a:\mathbf{N}\times\mathbf{N} & \rightarrow & \omega\\ (x,j) & \rightarrow & \langle(x)_1,....,(x)_{j-1},\#^{<}(*^{<}((x)_j)\end{array}$

Es facil ver que $F_a$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. En forma similar puede ser probado que $\begin{array}{rcl}F_{\frown}:\mathbf{N}\times\mathbf{N} & \rightarrow & \omega\\ (x,j) & \rightarrow & \langle(x)_1,....,\end{array}$

es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r. Dado $(i,x,y,\mathcal{P})\in\omega\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\text{Pro}^{\Sigma}$, tenemos varios casos en los cuales los valores $s(i,x,y,\mathcal{P}),S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P})$ y $S_*(i,x,y,\mathcal{P})$ pueden ser obtenidos usando las funciones antes definidas:

(1) CASO $i=0\vee i>n(\mathcal{P})$. Entonces $\begin{array}{rcl}s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & i\\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & x\\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & y\end{array}$

(2) CASO $(\exists j\in\omega)\ Bas(I_i^{\mathcal{P}})=\text{N}\bar{j}\leftarrow\text{N}\bar{j}+1$. Entonces $\begin{array}{rcl}s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & i+1\\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & F_{+}(x,\#Var1(I_i^{\mathcal{P}}))\\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & y\end{array}$

(3) CASO $(\exists j\in\omega)\ Bas(I_i^{\mathcal{P}})=\text{N}\bar{j}\leftarrow\text{N}\bar{j}\dot{-}1$. Entonces $\begin{array}{rcl}s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & i+1\\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & F_{\dot{-}}(x,\#Var1(I_i^{\mathcal{P}}))\\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & y\end{array}$

(4) CASO $(\exists j,k\in\omega)\ Bas(I_i^{\mathcal{P}})=\text{N}\bar{j}\leftarrow\text{N}\bar{k}$. Entonces $\begin{array}{rcl}s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & i+1\\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & F_{\leftarrow}(x,\#Var1(I_i^{\mathcal{P}}),\#Var2(I_i^{\mathcal{P}}\\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & y\end{array}$

(5) CASO $(\exists j,k\in\omega)\ Bas(I_i^{\mathcal{P}})=\text{N}\bar{j}\leftarrow 0$. Entonces $\begin{array}{rcl}s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & i+1\\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & F_0(x,\#Var1(I_i^{\mathcal{P}}))\\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & y\end{array}$

(6) CASO $(\exists j,m\in\omega)$ $\left(Bas(I_i^{\mathcal{P}})=\text{IF N}\bar{j}\neq 0\text{ GOTO L}\bar{m}\wedge (x)_j=0\right)$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) &=& i+ \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& x \\ S_{*}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& y \end{array}$

(7) CASO $(\exists j,m\in\omega)$ $\left(Bas(I_i^{\mathcal{P}})=\text{IF N}\bar{j}\neq 0\text{ GOTO L}\bar{m}\wedge (x)_j\neq 0\right)$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) &=& \text{mí} \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& x \\ S_{*}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& y \end{array}$

(8) CASO $(\exists j\in\omega)$ $Bas(I_i^{\mathcal{P}})=\text{P}\bar{j}\leftarrow\text{P}\bar{j}.a$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) &=& i+1 \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& x \\ S_{*}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& F_a(y,\#Var1(I_i^{\mathcal{P}})) \end{array}$

(9) CASO $(\exists j\in\omega)$ $Bas(I_i^{\mathcal{P}})=\text{P}\bar{j}\leftarrow{}^{\frown}\text{P}\bar{j}$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) &=& i+1 \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& x \\ S_{*}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& F_{\frown}(y,\#Var1(I_i^{\mathcal{P}})) \end{array}$

(10) CASO $(\exists j,k\in\omega)$ $Bas(I_i^{\mathcal{P}})=\text{P}\bar{j}\leftarrow\text{P}\bar{k}$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) &=& i+1 \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& x \\ S_{*}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& F_{\leftarrow}(y,\#Var1(I_i^{\mathcal{P}}),\#Var2(I \end{array}$

(11) CASO $(\exists j\in\omega)$ $Bas(I_i^{\mathcal{P}})=\text{P}\bar{j}\leftarrow\varepsilon$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) &=& i+1 \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& x \\ S_{*}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& F_0(y,\#Var1(I_i^{\mathcal{P}})) \end{array}$

(12) CASO $(\exists j,m\in\omega)(\exists a\in\Sigma)$ $\left(Bas(I_i^{\mathcal{P}})=\text{IF P}\bar{j}\text{ BEGINS }a\text{ GOTO L}\bar{m}\wedge[*^{<}((y)_j)]_1\neq a\right)$.

Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) &=& i+1 \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& x \\ S_{*}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& y \end{array}$

(13) CASO $(\exists j,m\in\omega)(\exists a\in\Sigma)$ $\left(Bas(I_i^{\mathcal{P}})=\text{IF P}\bar{j}\text{ BEGINS }a\text{ GOTO L}\bar{m}\wedge[*^{<}((y)_j)]_1= a\right)$.

Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) &=& \text{mín}_l\left(Lab(I_l^{\mathcal{P}})\neq\varepsilon\wedge Lab(I_l^{\mathcal{P}})\text{ t -final }I_i^{\mathcal{P}}\right) \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& x \\ S_{*}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& y \end{array}$

(14) CASO $(\exists j\in\omega)$ $Bas(I_i^{\mathcal{P}})=\text{GOTO L}\bar{j}$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) &=& \text{mín}_l\left(Lab(I_l^{\mathcal{P}})\neq\varepsilon\wedge Lab(I_l^{\mathcal{P}})\right. \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& x \\ S_{*}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& y \end{array}$

(15) CASO $Bas(I_i^{\mathcal{P}})=\text{SKIP}$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) &=& k+1 \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& x \\ S_{*}(i,x,y,\mathcal{P}) &=& y \end{array}$

O sea que los casos anteriores nos permiten definir conjuntos $S_1,...,S_{15}$, los cuales son disjuntos de a pares y cuya union da el conjunto $\omega\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\text{Pro}^{\Sigma}$, de manera que cada una de las funciones $s,S_{\#}$ y $S_*$ pueden escribirse como union disjunta de funciones $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r. restrinjidas respectivamente a los conjuntos $S_1,...,S_{15}$ . Ya que los conjuntos $S_1,...,S_{15}$ son $(\Sigma\cup\Sigma_p)$ -p.r. el Lema 35 nos dice que $s,S_{\#}$ y $S_*$ lo son. $\square$

**Lemma 63:** Sean: ... hacer!!

**Proof:** Hacer

**Proposition 64:** Sean $n,m\leq 0$, las funciones $i^{n,m},E^{n,m}_{\#j}$, $j=1,2,...$ son $\Sigma\cup\Sigma_p$-PR.

**Proof:** Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Sigma\cup\Sigma_p$ y sean $s,S_{\#},S$ las funciones previamente definidas en el Lemma 62, definamos:

$$\begin{array}{rcl} C^{n,m}_{\#} &=& \lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\mathcal{P}\left[\left\langle E^{n,m}_{\#1}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}),E^{n,m}_{\#2}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}),...\right\rangle\right] \\ C^{n,m}_{*} &=& \lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\mathcal{P}\left[\langle\#^{<}(E^{n,m}_{*1}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P})),\#^{<}(E^{n,m}_{*2}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P})),...\rangle\right] \end{array}$$

Notese que
$$\begin{array}{rcl}
i^{n,m}(0,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}) & = & 1 \\
C_{\#}^{n,m}(0,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}) & = & \langle x_1,...,x_n\rangle \\
C_{*}^{n,m}(0,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}) & = & \langle \#^{<}(\alpha_1),...,\#^{<}(\alpha_m)\rangle \\
i^{n,m}(t+1,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}) & = & s(i^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}),C_{\#}^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}),C_{*}^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P})) \\
C_{\#}^{n,m}(t+1,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}) & = & S_{\#}(i^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}),C_{\#}^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}),C_{*}^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P})) \\
C_{*}^{n,m}(t+1,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}) & = & S_{*}(i^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}),C_{\#}^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}),C_{*}^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}))
\end{array}$$

Por el Lema 63 tenemos que $i^{n,m}$, $C_{\#}^{n,m}$ y $C_{*}^{n,m}$ son $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. Ademas notese que
$$\begin{array}{rcl}
E_{\#j}^{n,m} & = & \lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\mathcal{P}\left[(C_{\#}^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}))_j\right] \\
E_{*j}^{n,m} & = & \lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\mathcal{P}\left[*^{<}((C_{*}^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}))_j)\right]
\end{array}$$
por lo cual las funciones $E_{\#j}^{n,m}$, $E_{*j}^{n,m}$, $j=1,2,...$, son $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r. $\square$

**Theorem 65:** Las funciones $\Phi_{\#}^{n,m}$ y $\Phi_{*}^{n,m}$ son $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-recursivas.

**Proof:** Veremos que $\Phi_{\#}^{n,m}$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-recursiva. Sea $H$ el predicado $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-mixto
$\lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\mathcal{P}\left[i^{n,m}(t,x_1,...,x_n,\alpha_1,...,\alpha_m,\mathcal{P})=n(\mathcal{P})+1\right]$.

Note que $D_H=\omega^{n+1}\times\Sigma^{*m}\times\mathrm{Pro}^{\Sigma}$. Ya que the functiones $i^{n,m}$ y $\lambda\mathcal{P}\left[n(\mathcal{P})\right]$ son $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r., $H$ lo es. Notar que $D_{M(H)}=D_{\Phi_{\#}^{n,m}}$. Ademas para $(\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P})\in D_{M(H)}$, tenemos que $M(H)(\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P})$ es la menor cantidad de pasos necesarios para que $\mathcal{P}$ termine partiendo del estado $((x_1,...,x_n,0,0,...),(\alpha_1,...,\alpha_m,\varepsilon,\varepsilon,...))$. Ya que $H$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r., tenemos que $M(H)$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-r.. Notese que para $(\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P})\in D_{M(H)}=D_{\Phi_{\#}^{n,m}}$ tenemos que $\Phi_{\#}^{n,m}(\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P})=E_{\#1}^{n,m}\left(M(H)(\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}),\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}\right)$

lo cual con un poco mas de trabajo nos permite probar que $\Phi_{\#}^{n,m}=E_{\#1}^{n,m}\circ\left(M(H),p_1^{n,m+1},...,p_{n+m+1}^{n,m+1}\right)$

Ya que la funcion $E_{\#1}^{n,m}$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-r., lo es $\Phi_{\#}^{n,m}$. $\square$

**Corollary 66:** Si $f:D_f\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}\to O$ es $\Sigma$-computable, entonces $f$ es $\Sigma$-recursiva.

**Proof:** Haremos el caso $O=\Sigma^*$. Sea $\mathcal{P}_0$ un programa que compute a $f$. Primero veremos que $f$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$ -recursiva. Note que
$f=\Phi_{*}^{n,m}\circ\left(p_1^{n,m},...,p_{n+m}^{n,m},C_{\mathcal{P}_0}^{n,m}\right)$
donde cabe destacar que $p_1^{n,m},...,p_{n+m}^{n,m}$ son las proyecciones respecto del alfabeto $\Sigma\cup\Sigma_p$, es decir que tienen dominio $\omega^n\times(\Sigma\cup\Sigma_p)^{*m}$. Ya que $\Phi_{*}^{n,m}$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-recursiva tenemos que $f$ lo es. O sea que el Teorema 51 nos dice que $f$ es $\Sigma$ -recursiva. $\square$

**Tesis de Church:** Toda funcion $\Sigma$-efectivamente computable es $\Sigma$-recursiva.

**Corollary 67:** Si $f:D_f\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}\to O$ es $\Sigma$-recursiva, entonces existe un predicado $\Sigma$-p.r. $P:\mathbf{N}\times\omega^n\times\Sigma^{*m}\to\omega$ y una funcion $\Sigma$-p.r. $g:\mathbf{N}\to O$ tales que $f=g\circ M(P)$.

**Proof:** Supongamos que $O=\Sigma^*$. Sea $\mathcal{P}_0$ un programa el cual compute a $f$. Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Sigma$. Note que podemos tomar
$$\begin{array}{rcl}
P & = & \lambda t\vec{x}\vec{\alpha}[i^{n,m}((t)_1,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}_0)=n(\mathcal{P}_0)+1\wedge(t)_2=\#^{<}(E_{*1}^{n,m}((t)_1,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}_0))] \\
g & = & \lambda t\left[*^{<}((t)_2)\right].
\end{array}$$
(Justifique por que $P$ es $\Sigma$-p.r..) $\square$

**Lemma 68:** Supongamos $f_i:D_{f_i}\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}\to O$, $i=1,...,k$, son funciones $\Sigma$-recursivas tales que $D_{f_i}\cap D_{f_j}=\varnothing$ para $i\neq j$. Entonces la funcion $f_1\cup...\cup f_k$ es $\Sigma$-recursiva.

**Proof:** Probaremos el caso $k=2$ y $O=\Sigma^*$. Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ programas que computen las funciones $f_1$ y $f_2$, respectivamente. Sean
$$\begin{array}{rcl}
P_1 & = & \lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\left[i^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}_1)=n(\mathcal{P}_1)+1\right] \\
P_2 & = & \lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\left[i^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}_2)=n(\mathcal{P}_2)+1\right]
\end{array}$$
Notese que $D_{P_1}=D_{P_2}=\omega\times\omega^n\times\Sigma^{*m}$ y que $P_1$ y $P_2$ son $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. Ya que son $\Sigma$-mixtos, el Teorema 51 nos dice que son $\Sigma$-p.r.. Tambien notese que $D_{M((P_1\vee P_2))}=D_{f_1}\cup D_{f_2}$. Definamos
$$\begin{array}{rcl}
g_1 & = & \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[E_{*1}^{n,m}(M\left((P_1\vee P_2)\right)(\vec{x},\vec{\alpha}),\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}_1)^{P_i(M((P_1\vee P_2))(\vec{x},\vec{\alpha}),\vec{x},\vec{\alpha})}\right] \\
g_2 & = & \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[E_{*1}^{n,m}(M\left((P_1\vee P_2)\right)(\vec{x},\vec{\alpha}),\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}_2)^{P_i(M((P_1\vee P_2))(\vec{x},\vec{\alpha}),\vec{x},\vec{\alpha})}\right]
\end{array}$$
Notese que $g_1$ y $g_2$ son $\Sigma$-recursivas y que $D_{g_1}=D_{g_2}=D_{f_1}\cup D_{f_2}$, Ademas notese que
$$g_1(\vec{x},\vec{\alpha})=\begin{cases} f_1(\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } (\vec{x},\vec{\alpha})\in D_{f_1} \\ \varepsilon & \text{caso contrario}\end{cases}$$

$g_2(\vec{x},\vec{\alpha}) = \begin{cases} f_2(\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } (\vec{x},\vec{\alpha}) \in D_{f_2} \\ \varepsilon & \text{caso contrario} \end{cases}$

O sea que $f_1 \cup f_2 = \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ (g_1, g_2)$ es $\Sigma$-recursiva. $\Box$

**Lemma 69:** Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $Halt^{\Sigma}$ es no $\Sigma$-recursivo.

**Proof:** Supongamos $Halt^{\Sigma}$ es $\Sigma$-recursivo y por lo tanto $\Sigma$ -computable. Por la proposicion de existencia de macros tenemos que hay un macro

$\left[\text{IF } Halt^{\Sigma}(\text{W1}) \text{ GOTO A1}\right]$

Sea $\mathcal{P}_0$ el siguiente programa de $\mathcal{S}^{\Sigma}$ L1 $\left[\text{IF } Halt^{\Sigma}(\text{P1}) \text{ GOTO L1}\right]$

Note que - $\mathcal{P}_0$ termina partiendo desde $((0,0,...),(\mathcal{P}_0,\varepsilon,\varepsilon,...))$ sii $Halt^{\Sigma}(\mathcal{P}_0) = 0$, lo cual produce una contradiccion si tomamos en (*) $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$. $\Box$

## 0.11. Conjuntos $\Sigma$-recursivamente enumerables

**Theorem 70:** Sea $S\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}$. Entonces $S$ es $\Sigma$-efectivamente enumerable sii $S$ es $\Sigma$-recursivamente enumerable

**Proof:** ($\Rightarrow$) Use la Tesis de Church.

($\Leftarrow$) Use el Theorem 42. $\square$

**Theorem 71:** Dado $S\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}$, son equivalentes (1) $S$ es $\Sigma$-recursivamente enumerable (2) $S=I_F$, para alguna $F:D_F\subseteq\omega^k\times\Sigma^{*l}\to\omega^n\times\Sigma^{*m}$ tal que cada $F_i$ es $\Sigma$-recursiva. (3) $S=D_f$, para alguna funcion $\Sigma$-recursiva $f$ (4) $S=\varnothing$ o $S=I_F$, para alguna $F:\omega\to\omega^n\times\Sigma^{*m}$ tal que cada $F_i$ es $\Sigma$-p.r.

**Proof:** (2)$\Rightarrow$(3). Para $i=1,...,n+m$, sea $\mathcal{P}_i$ un programa el cual computa a $F_i$ y sea $<$ un orden total estricto sobre $\Sigma$. Sea $P:\mathbf{N}\times\omega^n\times\Sigma^{*m}\to\omega$ dado por $P(t,\vec{x},\vec{\alpha})=1$ sii se cumplen las siguientes condiciones

$$\begin{array}{rcl}
i^{k,l}(((t)_{k+l+1},(t)_1,...,(t)_k,*^<((t)_{k+1}),...,*^<((t)_{k+l})),\mathcal{P}_1) & = & n(\mathcal{P}_1)+1\\
 & & \vdots\\
i\,((t)_{k+l+1},(t)_1...(t)_k,*^<((t)_{k+1})...\,*^<\,((t)_{k+l})),\mathcal{P}_{n+m}) & = & n(\mathcal{P}_{n+m})+1\\
E^{k,l}_{\#1}((t)_{k+l+1},(t)_1,...,(t)_k,*^<((t)_{k+1}),...,*^<((t)_{k+l})),\mathcal{P}_1) & = & x_1\\
 & & \vdots\\
E^{k,l}_{\#1}((t)_{k+l+1},(t)_1,...,(t)_k,*^<((t)_{k+1}),...,*^<((t)_{k+l})),\mathcal{P}_n) & = & x_n\\
E^{k,l}_{*1}((t)_{k+l+1},(t)_1,...,(t)_k,*^<((t)_{k+1}),...,*^<((t)_{k+l})),\mathcal{P}_{n+1}) & = & \alpha_1\\
 & & \vdots\\
E^{k,l}_{*1}((t)_{k+l+1},(t)_1,...,(t)_k,*^<((t)_{k+1}),...,*^<((t)_{k+l})),\mathcal{P}_{n+m}) & = & \alpha_m
\end{array}$$

Note que $P$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r. y por lo tanto $P$ es $\Sigma$-p.r.. Pero entonces $M(P)$ es $\Sigma$-r. lo cual nos dice que se cumple (3) ya que $D_{M(P)}=I_F=S$. (3)$\Rightarrow$(4). Supongamos $S\neq\varnothing$. Sea $(z_1,...,z_n,\gamma_1,...,\gamma_m)\in S$ fijo. Sea $\mathcal{P}$ un programa el cual compute a $f$ y sea $<$ un orden total estricto sobre $\Sigma$. Sea $P:\mathbf{N}\to\omega$ dado por $P(x)=1$ sii

$i^{n,m}\,((x)_{n+m+1},(x)_1,...,(x)_n,*^<((x)_{n+1}),...,*^<((x)_{n+m})),\mathcal{P})=n(\mathcal{P})+1$

Es facil ver que $P$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r. por lo cual es $\Sigma$-p.r.. Sea $\bar{P}=P\cup C_0^{1,0}\mid_{\{0\}}$. Para $i=1,...,n$ , definamos $F_i:\omega\to\omega$ de la siguiente manera $F_i(x)=\left\{\begin{array}{lll}(x)_i & \text{si} & \bar{P}(x)=1\\ z_i & \text{si} & \bar{P}(x)\neq1\end{array}\right.$

Para $i=n+1,...,n+m$, definamos $F_i:\omega\to\Sigma^*$ de la siguiente manera $F_i(x)=\left\{\begin{array}{lll}*^<((x)_i) & \text{si} & \bar{P}(x)=1\\ \gamma_{i-n} & \text{si} & \bar{P}(x)\neq1\end{array}\right.$

Por el lema de division por casos, cada $F_i$ es $\Sigma$-p.r.. Es facil ver que $F=(F_1,...,F_{n+m})$ cumple (4). $\square$

**Corollary 72:** Supongamos $f:D_f\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}\to O$ es $\Sigma$-recursiva y $S\subseteq D_f$ es $\Sigma$-r.e., entonces $f\mid_S$ es $\Sigma$-recursiva.

**Proof:** Supongamos $O=\Sigma^*$. Por el Theorem anterior $S=D_g$, para alguna funcion $\Sigma$-recursiva $g$. Notese que componiendo adecuadamente podemos suponer que $I_g=\{\varepsilon\}$. O sea que tenemos $f\mid_S=\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\circ(f,g)$. $\square$

**Corollary 73:** Supongamos $f:D_f\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}\to O$ es $\Sigma$-recursiva y $S\subseteq I_f$ es $\Sigma$-r.e., entonces $f^{-1}(S)=\{(\vec{x},\vec{\alpha}):f(\vec{x},\vec{\alpha})\in S\}$ es $\Sigma$-r.e..

**Proof:** Por el Theorem anterior $S=D_g$, para alguna funcion $\Sigma$-recursiva $g$. O sea que $f^{-1}(S)=D_{g\circ f}$ es $\Sigma$-r.e.. $\square$

**Corollary 74:** Supongamos $S_1,S_2\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}$ son conjuntos $\Sigma$-r.e.. Entonces $S_1\cap S_2$ es $\Sigma$-r.e..

**Proof:** Por el Theorem anterior $S_i=D_{g_i}$, con $g_1,g_2$ funciones $\Sigma$-recursivas. Notese que podemos suponer que $I_{g_1},I_{g_2}\subseteq\omega$ por lo que $S_1\cap S_2=D_{\lambda xy[xy]\circ(g_1,g_2)}$ es $\Sigma$-r.e.. $\square$

**Corollary 75:** Supongamos $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos $\Sigma$-r.e.. Entonces $S_1 \cup S_2$ es $\Sigma$-r.e.

**Proof:** Supongamos $S_1 \neq \varnothing \neq S_2$. Sean $F, G : \omega \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tales que $I_F = S_1$, $I_G = S_2$ y las funciones $F_i$'s y $G_i$'s son $\Sigma$-recursivas. Sean $f = \lambda x \left[Q(x,2)\right]$ y $g = \lambda x \left[Q(x \dot{-} 1, 2)\right]$. Sea $H : \omega \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ dada por

$H_i = (F_i \circ f)|_{\{x:x \text{ es par}\}} \cup (G_i \circ g)|_{\{x:x \text{ es impar}\}}$

Por el Corollary 72 y el Lema 68, cada $H_i$ es $\Sigma$-recursiva. Ya que $I_H = S_1 \cup S_2$.tenemos que $S_1 \cup S_2$ es $\Sigma$-r.e. $\Box$

**Theorem 76:** Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Entonces $S$ es $\Sigma$-efectivamente computable sii $S$ es $\Sigma$-recursivo **Proof:** ($\Rightarrow$) Use la Tesis de Church.

($\Leftarrow$) Use el Teorema 42. $\Box$

**Theorem 77:** Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Son equivalentes (a) $S$ es $\Sigma$-recursivo (b) $S$ y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son $\Sigma$ -recursivamente enumerables

**Proof:** (a)$\Rightarrow$(b). Note que $S = D_{Pred \circ \chi_S}$.

(b)$\Rightarrow$(a). Note que $\chi_S = C_1^{n,m}|_S \cup C_0^{n,m}|_{\omega^n \times \Sigma^{*m} - S}$. $\Box$

**Lemma 78:** Supongamos que $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $A = \left\{\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma : Halt^\Sigma(\mathcal{P})\right\}$

es $\Sigma$-r.e. y no es $\Sigma$-recursivo. Mas aun el conjunto $N = \left\{\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma : \neg Halt^\Sigma(\mathcal{P})\right\}$ no es $\Sigma$-r.e.

**Proof:** Sea $P = \lambda t \mathcal{P} \left[i^{0,1}(t, \mathcal{P}, \mathcal{P}) = n(\mathcal{P}) + 1\right]$. Note que $P$ es $\Sigma$-p.r. por lo que $M(P)$ es $\Sigma$-r.. Ademas note que $D_{M(P)} = A$, lo cual implica que $A$ es $\Sigma$-r.e.. Ya que $Halt^\Sigma$ es no $\Sigma$-recursivo (Lema 69) y

$Halt^\Sigma = C_1^{0,1} \mid_A \cup C_0^{0,1} \mid_N$

el Lema 68 nos dice que $N$ no es $\Sigma$-r.e.. Finalmente supongamos $A$ es $\Sigma$-recursivo. Entonces el conjunto $N = (\Sigma^* - A) \cap \mathrm{Pro}^\Sigma$

deberia serlo, lo cual es absurdo. $\Box$

## 0.12. Maquinas de Turing

**Lemma 79:** Sea $L \subseteq \Sigma^*$. entonces $L = L(M)$ para alguna maquina de Turing $M$ sii $L = H(M)$ para alguna maquina de Turing $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$.

**Proof:** ($\Rightarrow$) Dada una maquina $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, costruiremos una maquina $M_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, \tilde{q}_0, B, \varnothing)$ tal que $L(M) = H(M_1)$. Tomaremos $\Gamma_1 = \Gamma \cup \{X\}$, con $X$ un simbolo nuevo no perteneciente a $\Gamma$. Para cada $a \in \Sigma$, sea $q_a$ un estado nuevo, no perteneciente a $Q$. Sean $\tilde{q}_0, q_r, q_d, q_B$ estados nuevos no pertenecientes a $Q$. Tomemos entonces

$Q_1 = Q \cup \{\tilde{q}_0, q_r, q_d, q_B\} \cup \{q_a : a \in \Sigma\}$

Finalmente definamos $\delta_1$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl}
\delta_1(\tilde{q}_0, B) & = & \{(q_B, X, R)\} \\
\delta_1(q_B, a) & = & \{(q_a, B, R)\}, \text{ para } a \in \Sigma \\
\delta_1(q_B, B) & = & \{(q_0, B, K)\} \\
\delta_1(q_a, b) & = & \{(q_b, a, R)\}, \text{ para } a, b \in \Sigma \\
\delta_1(q_a, B) & = & \{(q_r, a, L)\}, \text{ para } a \in \Sigma \\
\delta_1(q_r, a) & = & \{(q_r, a, L)\}, \text{ para } a \in \Sigma \\
\delta_1(q_r, B) & = & \{(q_0, B, K)\} \\
\delta_1(q, X) & = & \{(q, X, K)\}, \text{ para } q \in Q \\
\delta_1(q, \sigma) & = & \delta(q, \sigma) \cup \{(q_d, \sigma, K)\} \text{ , para } q \in F \text{ y } \sigma \\
\delta_1(q, \sigma) & = & \delta(q, \sigma), \text{ para } q \in Q - F \text{ y } \sigma \in \Gamma \\
\delta_1(q_d, \sigma) & = & \varnothing, \text{ para } \sigma \in \Gamma
\end{array}$$

($\delta_1$ se define igual a vacio para los casos no contemplados arriba). ($\Leftarrow$) Dada $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, dejamos al lector la construccion de una maquina $M_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, \tilde{q}_0, B, \varnothing)$ tal que $H(M) = L(M_1)$. $\square$

**Lemma 80:** El predicado $\lambda ndd' [d \vdash d']$ es $(\Gamma \cup Q)$-p.r..

**Proof:** Note que $D_{\lambda dd'[d \vdash d']} = Des \times Des$. Tambien notese que los predicados

$\lambda p\sigma q\gamma [(p, \sigma, L) \in \delta(q, \gamma)]$
$\lambda p\sigma q\gamma [(p, \sigma, R) \in \delta(q, \gamma)]$
$\lambda p\sigma q\gamma [(p, \sigma, K) \in \delta(q, \gamma)]$

son $(\Gamma \cup Q)$-p.r. ya que los tres tienen dominio igual a $Q \times \Gamma \times Q \times \Gamma$ el cual es finito (Corolario 36 ). Sea $P_R : Des \times Des \times \Gamma \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Q \times Q \to \omega$ definido por $P_R(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q) = 1$ sii $d = \alpha p \beta \wedge (q, \sigma, R) \in \delta(p, [\beta B]_1) \wedge d' = \alpha\sigma q \frown \beta$

Sea $P_L : Des \times Des \times \Gamma \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Q \times Q \to \omega$ definido por $P_L(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q) = 1$ sii $d = \alpha p \beta \wedge (q, \sigma, L) \in \delta(p, [\beta B]_1) \wedge \alpha \neq \varepsilon \wedge d' = \left\lfloor \alpha \frown q [\alpha]_{|\alpha|} \sigma \frown \beta \right\rfloor$

Sea $P_K : Des \times Des \times \Gamma \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Q \times Q \to \omega$ definido por $P_K(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q) = 1$ sii $d = \alpha p \beta \wedge (q, \sigma, K) \in \delta(p, [\beta B]_1) \wedge d' = \lfloor \alpha q \sigma \frown \beta \rfloor$

Se deja al lector la verificacion de que estos predicados son $(\Gamma \cup Q)$-p.r.. Notese que $\lambda dd' [d \vdash d']$ es igual al predicado $\lambda dd' [(\exists \sigma \in \Gamma)(\exists \alpha, \beta \in \Gamma^*)(\exists p, q \in Q)(P_R \vee P_L \vee P_K)(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q)]$

lo cual por el Lema 39 nos dice que $\lambda dd' [d \vdash d']$ es $(\Gamma \cup Q)$-p.r. $\square$

**Proposition 81:** $\lambda ndd' \left[ d \overset{n}{\vdash} d' \right]$ es $(\Gamma \cup Q)$-p.r..

**Proof:** Sea $Q = \lambda dd' [d \vdash d'] \cup C_0^{0,2} |_{(\Gamma \cup Q)^{*2} - Des^2}$ es decir $Q$ es el resultado de extender con el valor 0 al predicado $\lambda dd' [d \vdash d']$ de manera que este definido en todo $(\Gamma \cup Q)^{*2}$. Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Gamma \cup Q$ y sea $Q_1 : \mathbf{N} \times Des \times Des \to \omega$ definido por $Q_1(x, d, d') = 1$ sii

$$\Big( (\forall i \in \mathbf{N})_{i \leq Lt(x)} *^{<} ((x)_i) \in Des \Big) \wedge *^{<}((x)_1) = d \wedge$$
$$*^{<}((x)_{Lt(x)}) = d' \wedge \Big( (\forall i \in \mathbf{N})_{i \leq Lt(x) \dot{-} 1} \; Q(*^{<}((x)_i), *^{<}((x)_{i+1})) \Big)$$

Notese que dicho rapidamente $Q_1(x, d, d') = 1$ sii $x$ codifica una computacion que parte de $d$ y llega a $d'$. Se deja al lector la verificacion de que este predicado es $(\Gamma \cup Q)$-p.r.. Notese que

$\lambda ndd' \left[ d \overset{n}{\vdash} d' \right] = \lambda ndd' [(\exists x \in \mathbf{N}) \; Lt(x) = n + 1 \wedge Q_1(x, d, d')]$

Es decir que solo nos falta acotar el cuantificador existencial, para poder aplicar el lema de cuantificacion acotada. Ya que cuando $d_1, ..., d_{n+1} \in Des$ son tales que $d_1 \vdash d_2 \vdash ... \vdash d_{n+1}$ tenemos que $|d_i| \leq |d_1| + n$, para $i = 1, ..., n$

una posible cota para dicho cuantificador es $\prod_{i=1}^{n+1} pr(i)^{|\Gamma \cup Q|^{|d|+n}}$.

O sea que, por el lema de cuantificacion acotada, tenemos que el predicado $\lambda ndd' \left[ d \overset{n}{\vdash} d' \right]$ es $(\Gamma \cup Q)$-p.r. $\Box$

**Theorem 82:** Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ una maquina de Turing. Entonces $L(M)$ es $\Sigma$-recursivamente enumerable.

**Proof:** Sea $P$ el siguiente predicado $(\Gamma \cup Q)$-mixto

$\lambda n\alpha \left[ (\exists d \in Des) \ \lfloor q_0 B\alpha \rfloor \overset{n}{\vdash} d \wedge St(d) \in F \right]$

Notese que $D_P = \omega \times \Gamma^*$. Dejamos al lector probar que $P$ es $(\Gamma \cup Q)$-p.r.. Sea $P' = P \mid_{\omega \times \Sigma^*}$. Notese que $P'(n, \alpha) = 1$ sii $\alpha \in L(M)$ atestiguado por una computacion de longitud $n$. Ya que $P'$ es $(\Gamma \cup Q)$-p.r. (por que?) y ademas es $\Sigma$-mixto, el Teorema 51 nos dice que $P'$ es $\Sigma$-p.r.. Ya que $L(M) = D_{M(P')}$, el Teorema 71 nos dice que $L(M)$ es $\Sigma$-r.e.. $\Box$

## 0.13. Funciones $\Sigma$-Turing computables

**Theorem 83:** Supongamos $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$ es $\Sigma$-Turing computable. Entonces $f$ es $\Sigma$-recursiva.

**Proof:** Supongamos $O = \Sigma^*$ y sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, \shortmid, F)$ una maquina de Turing deterministica con unit la cual compute a $f$. Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Gamma \cup Q$ . Sea $P : \mathbf{N} \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ dado por $P(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$ sii

$(\exists q \in Q)$ $\lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} ...B \shortmid^{x_n} B\alpha_1...B\alpha_m \rfloor \overset{(x)_1}{\vdash} \lfloor qB *^{<} ((x)_2) \rfloor \wedge$ $\wedge(\forall$

$Des)_{|d| \leq |*^{<}((x)_2)|+2}$ $\lfloor qB *^{<} ((x)_2) \rfloor \not\vdash d$ Es facil ver que $P$ es $(\Gamma \cup Q)$-p.r. por lo que $P$ es $\Sigma$-p.r. ya que es $\Sigma$-mixto. Notese que

$f = \lambda \vec{x}\vec{\alpha} \left[ \left( \min_x P(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right)_2 \right],$

lo cual nos dice que $f$ es $\Sigma$-recursiva. $\square$

**Lemma 84:** Sea $\mathcal{P} \in \text{Pro}^{\Sigma}$ y sea $k$ tal que las variables que ocurren en $\mathcal{P}$ estan todas en la lista $\mathrm{N}1, ..., \mathrm{N}\bar{k}, \mathrm{P}1, ..., \mathrm{P}\bar{k}$. Para cada $a \in \Sigma \cup \{\shortmid\}$, sea $\tilde{a}$ un nuevo simbolo. Sea $\Gamma = \Sigma \cup \{B, \shortmid\} \cup \{\tilde{a} : a \in \Sigma \cup \{\shortmid\}\}$. Entonces hay una maquina de Turing deterministica con unit $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \shortmid, \{q_f\})$ la cual satisface (1) $\delta(q_f, \sigma) = \varnothing$, para cada $\sigma \in \Gamma$. (2) Cualesquiera sean $x_1, ..., x_k \in \omega$ y $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \Sigma^*$, el programa $\mathcal{P}$ se detiene partiendo del estado $((x_1, ..., x_k, 0, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_k, \varepsilon, ...))$

sii $M$ se detiene partiendo de la descripcion instantanea $\lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} B...B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B...B\alpha_k B \rfloor$

(3) Si $x_1, ..., x_k \in \omega$ y $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \Sigma^*$ son tales que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo del estado $((x_1, ..., x_k, 0, ...), (\alpha_1, ...,$

y llega al estado $((y_1, ..., y_k, 0, ...), (\beta_1, ..., \beta_k, \varepsilon, ...))$

entonces $\lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} B...B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B...B\alpha_k B \rfloor \overset{*}{\vdash} \lfloor q_f B \shortmid^{y_1} B...B \shortmid^{y_k} B\beta_1 B...B\beta_k B \rfloor$

**Proof:** Dado un estado $((x_1, ..., x_k, 0, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_k, \varepsilon, ...))$ lo representaremos en la cinta de la siguiente manera

$B \shortmid^{x_1} ...B \shortmid^{x_k} B\alpha_1...B\alpha_k BBBB....$

A continuacion describiremos una serie de maquinas las cuales simularan, via la representacion anterior, las distintas clases de instrucciones que pueden ocurrir en $\mathcal{P}$. Todas las maquinas definidas tendran a $\shortmid$ como unit y a $B$ como blanco, tendran a $\Sigma$ como su alfabeto terminal y su alfabeto mayor sera $\Gamma = \Sigma \cup \{B, \shortmid\} \cup \{\tilde{a} : a \in \Sigma \cup \{\shortmid\}\}$. Ademas tendran uno o dos estados finales con la propiedad de que si $q$ es un estado final, entonces $\delta(q, \sigma) = \varnothing$, para cada $\sigma \in \Gamma$. Esta propiedad es importante ya que nos permitira concatenar pares de dichas maquinas identificando algun estado final de la primera con el inicial de la segunda. Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_i^+$ una maquina tal que

$$\begin{array}{lcl} B \shortmid^{x_1} ...B \shortmid^{x_k} B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \shortmid^{x_1} ...B \shortmid^{x_{i-1}} B \shortmid^{x_i+1} B \shortmid^{x_{i+1}} ...B \shortmid^{x_k} B\alpha_1...B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Es claro que la maquina $M_i^+$ simula la instruccion $\mathrm{N}\bar{\imath} \leftarrow \mathrm{N}\bar{\imath} + 1$. Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_i^{\dot{-}}$ una maquina tal que

$$\begin{array}{lcl} B \shortmid^{x_1} ...B \shortmid^{x_k} B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \shortmid^{x_1} ...B \shortmid^{x_{i-1}} B \shortmid^{x_i \dot{-} 1} B \shortmid^{x_{i+1}} ...B \shortmid^{x_k} B\alpha_1...B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$ y $a \in \Sigma$, sea $M_i^a$ una maquina tal que $\begin{array}{lcl} B \shortmid^{x_1} ...B \shortmid^{x_k} B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \shortmid^{x_1} ...B \shortmid^{x_k} B\alpha_1...B \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_i^{\curvearrowright}$ una maquina tal que $\begin{array}{lcl} B \shortmid^{x_1} ...B \shortmid^{x_k} B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \shortmid^{x_1} ...B \shortmid^{x_k} B\alpha_1...B\alpha_{i-1}B \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$

Para $j=1,...,k$, y $a\in\Sigma$, sea $IF_j^a$ una maquina con dos estados finales $q_{si}$ y $q_{no}$ tal que si $\alpha_j$ comienza con $a$ , entonces $\begin{array}{lll} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{si}\end{array}$

y en caso contrario $\begin{array}{lll} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no}\end{array}$

Analogamente para $j=1,...,k$, sea $IF_j$ una maquina tal que si $x_j\neq 0$, entonces $\begin{array}{l} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha \\ \uparrow \\ q_0 \end{array}$

y si $x_j=0$, entonces $\begin{array}{lll} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no}\end{array}$

Para $1\leq i,j\leq k$, sea $M^*_{i\leftarrow j}$ una maquina tal que $\begin{array}{lll} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_{i-} \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f\end{array}$

Para $1\leq i,j\leq k$, sea $M^{\#}_{i\leftarrow j}$ una maquina tal que $\begin{array}{lll} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_{i-1}}B\shortmid^{x_j}B\shortmid^{x_i} \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f\end{array}$

Para $1\leq i\leq k$, sea $M_{i\leftarrow 0}$ una maquina tal que $\begin{array}{lll} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_{i-1}}BB\shortmid^{x_{i+1}}... \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f\end{array}$

Para $1\leq i\leq k$, sea $M_{i\leftarrow\varepsilon}$ una maquina tal que $\begin{array}{lll} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_{i-1}B \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f\end{array}$

Sea $M_{\text{SKIP}}=(\{q_0,q_f\},\Gamma,\Sigma,\delta,q_0,B,\shortmid,\{q_f\})$ ,
con $\delta(q_0,B)=\{(q_f,B,K)\}$ y $\delta=\varnothing$ en cualquier otro caso. Finalmente sea
$M_{\text{GOTO}}=(\{q_0,q_{si},q_{no}\},\Gamma,\Sigma,\delta,q_0,B,\shortmid,\{q_{si},q_{no}\})$ ,
con $\delta(q_0,B)=\{(q_{si},B,K)\}$ y $\delta=\varnothing$ en cualquier otro caso. Para poder hacer concretamente las maquinas recien descriptas deberemos dise ñar antes algunas maquinas auxiliares. Para cada $j\geq 1$, sea $D_j$ la maquina descripta en la Figura 1. Notese que

$$\begin{array}{lll} \alpha B\beta_1B\beta_2B...B\beta_jB\gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha B\beta_1B\beta_2B...B\beta_jB\gamma \\ \ \uparrow & & \qquad\qquad\qquad\quad\ \uparrow \\ \ q_0 & & \qquad\qquad\qquad\quad\ q_f\end{array}$$

siempre que $\alpha,\gamma\in\Gamma^*$, $\beta_1,...,\beta_j\in(\Gamma-\{B\})^*$. Analogamente tenemos definidas las maquinas $I_j$. Para $j\geq 1$, sea $TD_j$ una maquina con un solo estado final $q_f$ y tal que

$$\begin{array}{lll} \alpha B\gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha BB\gamma \\ \ \uparrow & & \ \ \uparrow \\ \ q_0 & & \ \ q_f\end{array}$$

cada vez que $\alpha,\gamma\in\Gamma^*$ y $\gamma$ tiene exactamente $j$ ocurrencias de $B$. Es decir la maquina $TD_j$ corre un espacio a la derecha todo el bloque $\gamma$ y agrega un blanco en el espacio que se genera a la izquierda de dicho bloque. Por ejemplo, para el caso de $\Sigma=\{\&\}$ podemos tomar $TD_3$ igual a la maquina de la Figura 3. Analogamente, para $j\geq 1$, sea $TI_j$ una maquina tal que

$$\begin{array}{lll} \alpha B\sigma\gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha B\gamma \\ \ \uparrow & & \ \ \uparrow \\ \ q_0 & & \ \ q_f\end{array}$$

cada vez que $\alpha \in \Gamma^*$, $\sigma \in \Gamma$ y $\gamma$ tiene exactamente $j$ ocurrencias de $B$. Es decir la maquina $TI_j$ corre un espacio a la izquierda todo el bloque $\gamma$ (por lo cual en el lugar de $\sigma$ queda el primer simbolo de $\gamma$). Teniendo las maquinas auxiliares antes definidas podemos combinarlas para obtener las maquinas simuladoras de instrucciones. Por ejemplo $M_i^a$ puede ser la maquina descripta en la Figura 4. En la Figura 2 tenemos una posible forma de diseñar la maquina $IF_i^a$. En la Figura 7 tenemos una posible forma de diseñar la maquina $M_{i\leftarrow j}^*$ para el caso $\Sigma = \{a, b\}$ y $i < j$.

Supongamos ahora que $\mathcal{P} = I_1...I_n$. Para cada $i = 1, ..., n$, definiremos una maquina $M_i$ que simulara la instruccion $I_i$. Luego uniremos adecuadamente estas maquinas para formar la maquina que simulara a $\mathcal{P}$

- Si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{j} + 1$ tomaremos $M_i = M_j^+$ - Si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{j} \dot{-} 1$ tomaremos $M_i = M_j^{\dot{-}}$ - Si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow 0$ tomaremos $M_i = M_{j\leftarrow 0}$. - Si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{m}$ tomaremos $M_i = M_{j\leftarrow m}^{\#}$. - Si $Bas(I_i) =$ IF $\mathrm{N}\bar{j} \neq 0$ GOTO $\mathrm{L}\bar{m}$ tomaremos $M_i = IF_j$. - Si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \mathrm{P}\bar{j}.a$ tomaremos $M_i = M_j^a$. - Si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow {}^\frown\mathrm{P}\bar{j}$ tomaremos $M_i = M_j^\frown$. - Si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \varepsilon$ tomaremos $M_i = M_{j\leftarrow\varepsilon}$. - Si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \mathrm{P}\bar{m}$ tomaremos $M_i = M_{j\leftarrow m}^*$. - Si $Bas(I_i) =$ IF $\mathrm{P}\bar{j}$ BEGINS $a$ GOTO $\mathrm{L}\bar{m}$ tomaremos $M_i = IF_j^a$. - Si $Bas(I_i) =$ SKIP tomaremos $M_i = M_{\mathrm{SKIP}}$. - Si $Bas(I_i) =$ GOTO $\mathrm{L}\bar{m}$ tomaremos $M_i = M_{\mathrm{GOTO}}$. Ya que la maquina $M_i$ puede tener uno o dos estados finales, la representaremos como se muestra en la Figura 5, entendiendo que en el caso en que $M_i$ tiene un solo estado final, este esta representado por el circulo de abajo a la izquierda y en el caso en que $M_i$ tiene dos estados finales, el estado final representado con lineas punteadas corresponde al estado $q_{si}$ y el otro al estado $q_{no}$.

Para armar la maquina que simulara a $\mathcal{P}$ hacemos lo siguiente. Primero unimos las maquinas $M_1, ..., M_n$ como lo muestra la Figura 6. Luego para cada $i$ tal que $Bas(I_i)$ es de la forma $\alpha$GOTO $\mathrm{L}\bar{m}$, ligamos con una flecha de la forma

$\xrightarrow{B,B,K}$

el estado final $q_{si}$ de la $M_i$ con el estado inicial de la $M_h$, donde $h$ es tal que $I_h$ es la primer instruccion que tiene label $\mathrm{L}\bar{m}$. Es intuitivamente claro que la maquina asi obtenida cumple con lo requerido aunque una Proof formal de esto puede resultar extremadamente tediosa. $\Box$

**Theorem 85:** Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es $\Sigma$-recursiva, entonces $f$ es $\Sigma$-Turing computable.

**Proof:** Supongamos $O = \Sigma^*$. Ya que $f$ es $\Sigma$-computable, existe $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma$ el cual computa $f$. Note que podemos suponer que $\mathcal{P}$ tiene la propiedad de que cuando $\mathcal{P}$ termina, en el estado alcansado las variables numericas tienen todas el valor 0 y las alfabeticas distintas de P1 todas el valor $\varepsilon$. Sea $M$ la maquina de Turing con unit dada por el lema anterior, donde elejimos el numero $k$ con la propiedad adicional de ser mayor que $n$ y $m$. Sea $M_1$ una maquina tal que para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$,

$$\lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} B...B \shortmid^{x_n} B\alpha_1 B...B\alpha_n B \rfloor \overset{*}{\vdash} \left\lfloor qB \shortmid^{x_1} B...B \shortmid^{x_n} B^{k-n} B\alpha_1 B...B\alpha_m B \right\rfloor$$

donde $q_0$ es el estado inicial de $M_1$ y $q$ es un estado tal que $\delta(q, \sigma) = \varnothing$, para cada $\sigma$. Sea $M_2$ una maquina tal que para cada $\alpha \in \Sigma^*$, $\left\lfloor q_0 B^{k+1}\alpha \right\rfloor \overset{*}{\vdash} \lfloor qB\alpha \rfloor$

donde $q_0$ es el estado inicial de $M_2$ y $q$ es un estado tal que $\delta(q, \sigma) = \varnothing$, para cada $\sigma$. Note que la concatenacion de $M_1$, $M$ y $M_2$ (en ese orden) produce una maquina de Turing la cual computa $f$. $\Box$

**Theorem 86:** Si $L \subseteq \Sigma^*$ es $\Sigma$-r.e., entonces $L = L(M) = H(M)$ para alguna maquina de Turing deterministica $M$.

**Proof:** Por el Teorema 71 hay una funcion $f : L \to \omega$, la cual es $\Sigma$-recursiva. Sea $\mathcal{P}$ un programa el cual compute a $f$. Sea $M$ la maquina de Turing deterministica dada en el lema anterior. Sea $M_1$ una maquina de Turing deterministica tal que para todo $\alpha \in \Sigma^*$,

$$\lfloor q_0 B\alpha \rfloor \overset{*}{\vdash} \left\lfloor qB^{k+1}\alpha \right\rfloor$$

donde $q_0$ es el estado inicial de $M$ y $q$ es un estado tal que $\delta(q, \sigma) = \varnothing$, para cada $\sigma$. Note que la concatenacion de $M_1$ con $M$ (en ese orden) produce una maquina de Turing deterministica $M_2$ tal que $H(M_2) = L(M_2) = L$. $\square$

# Bibliografía

[1] Diego Vaggione, «Apunte de Clase, 2017», *FaMAF, UNC*.

[2] Agustín Curto, «Carpeta de Clase, 2017», *FaMAF, UNC*.

Por favor, mejorá este documento en github
https://github.com/acurto714/resumenLengForm