Resumen de teoremas para el final de Lenguajes Formales y Computabilidad

Agustín Curto, agucurto95@gmail.com
Francisco Nievas, frannievas@gmail.com

2017

Índice general

0.1. Notación y conceptos básicos 2
0.2. Procedimientos efectivos 8
0.3. Funciones Σ-recursivas 10
0.4. El lenguaje S^{Σ} 19
0.5. Máquinas de Turing 28

0.1. Notación y conceptos básicos

Lemma 1: Sea $S \subseteq \omega \times \Sigma^*$, entonces S es rectangular si y solo si se cumple la siguiente propiedad:

$$\text{Si } (x, \alpha), (y, \beta) \in S \Rightarrow (x, \beta) \in S$$

Proof: Ejercicio.

Q.E.D.

Lemma 2: La relación $<$ es un orden total estricto sobre Σ^*.

Proof: Ejercicio.

Q.E.D.

Lemma 3: La función $s^< : \Sigma^* \to \Sigma^*$, definida recursivamente de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} s^<(\varepsilon) & = & a_1 \\ s^<(\alpha a_i) & = & \alpha a_{i+1},\ i < n \\ s^<(\alpha a_n) & = & s^<(\alpha) a_1 \end{array}$$

tiene la siguiente propiedad:

$$s^<(\alpha) = \text{mín}\{\beta \in \Sigma^* : \alpha < \beta\}$$

Proof: Recordemos primero la definición de un *orden total estricto sobre* un conjunto A.

Definición: Sea A un conjunto no vacío cualquiera, una relación binaria $<$ sobre A será llamada un orden total estricto sobre A si se cumplen las siguientes condiciones:

- $\forall a \in A$, no se da que $a < a$
- $\forall a, b \in A$, si $a \neq b \Rightarrow a < b$ ó $b < a$
- $\forall a, b, c \in A$, si $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$

Supongamos que $\alpha < \beta$. Probaremos entonces que $s^<(\alpha) \leq \beta$. Consideraremos los dos posibles casos, i.e, $|\alpha| < |\beta|$ y $|\alpha| = |\beta|$. Veamos esto:

$\boxed{\text{Caso } |\alpha| < |\beta|}$

Se puede ver fácilmente que $|\alpha| = |s^<(\alpha)|$ salvo en el caso en que $\alpha \in \{a_n\}^*$, por lo cual solo resta ver el caso $\alpha \in \{a_n\}^*$. Supongamos $\alpha = a_n^{|\alpha|}$, entonces $s^<(\alpha) = a_1^{|\alpha|+1}$.

- Si $|\beta| = |\alpha| + 1$ entonces es fácil ver usando el ítem 2 de la definición del orden de Σ^* que $s^<(\alpha) = a_1^{|\alpha|+1} \leq \beta$.
- Si $|\beta| > |\alpha| + 1$, entonces por el ítem 1, de tal definición tenemos que $s^<(\alpha) = a_1^{|\alpha|+1} < \beta$.

$\boxed{\text{Caso } |\alpha| = |\beta|}$

Tenemos entonces que:

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \alpha_1 a_i \gamma_1 \\ \beta & = & \alpha_1 a_j \gamma_2 \end{array}$$

con $i < j$ y $|\gamma_1| = |\gamma_2|$.

- Si $\gamma_1 = \gamma_2 = \varepsilon$ entonces es claro que $s^<(\alpha) \leq \beta$.
- El caso en el que γ_1 termina con a_l para algún $l < n$ es fácil.
- Veamos el caso en que $\gamma_1 = a_n^k$ con $k \geq 1$. Tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} s^<(\alpha) & = & s^<(\alpha_1 a_i a_n^k) \\ & = & s^<(\alpha_1 a_i a_n^{k-1}) a_1 \\ & \vdots & \vdots \\ & = & s^<(\alpha_1 a_i) a_1^k \\ & = & \alpha_1 a_{i+1} a_1^k \\ & \leq & \alpha_1 a_j \gamma_2 \\ & = & \beta \end{array}$$

- Supongamos finalmente que $\gamma_1 = \rho_1 a_l a_n^k$ con $k \geq 1$ y $l < n$. Tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} s^<(\alpha) & = & s^<(\alpha_1 a_i \rho_1 a_l a_n^k) \\ & = & s^<(\alpha_1 a_i \rho_1 a_l a_n^{k-1}) a_1 \\ & \vdots & \vdots \\ & = & s^<(\alpha_1 a_i \rho_1 a_l) a_1^k \\ & = & \alpha_1 a_i \rho_1 a_{l+1} a_1^k \\ & \leq & \beta \end{array}$$

Para completar nuestra demostración debemos probar que $\alpha < s^<(\alpha)$, para cada $\alpha \in \Sigma^*$. Dejamos al lector como ejercicio esta prueba la cual puede ser hecha por inducción en $|\alpha|$ usando argumentos parecidos a los usados anteriormente.

Q.E.D.

Corollary 4: $s^<$ es inyectiva.

Proof: Supongamos $\alpha \neq \beta$. Ya que el orden de Σ^* es total podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha < \beta$. Por el lema anterior tenemos que $s^<(\alpha) \leq \beta < s^<(\beta)$ y ya que $<$ es transitiva obtenemos que $s^<(\alpha) < s^<(\beta)$, lo cual nos dice $s^<(\alpha) \neq s^<(\beta)$.

Q.E.D.

Lemma 5: Se tiene que:

1. $\varepsilon \neq s^<(\alpha)$, para cada $\alpha \in \Sigma^*$.
2. Si $\alpha \neq \varepsilon$, entonces $\alpha = s^<(\beta)$ para algún β.
3. Si $S \subseteq \Sigma^*$ es no vacío, entonces $\exists \alpha \in S$ tal que $\alpha < \beta$, para cada $\beta \in S - \{\alpha\}$.

Proof:

1. Ejercicio
2. Ejercicio
3. Sea $k = \min\{|\alpha| : \alpha \in S\}$. Notese que hay una cantidad finita de palabras de S con longitud igual a k y que la menor de ellas es justamente la menor palabra de S.

Q.E.D.

Lemma 6: Tenemos que:

$$\Sigma^* = \{*^<(0), *^<(1), ...\}$$

Mas aún la función $*^<$ es biyectiva.

Proof:

- Inyectiva: Supongamos $*^<(x) = *^<(y)$ con $x > y$. Note que $y \neq 0$ ya que ε no es el sucesor de ninguna palabra. Osea que $s^<(*^<(x-1)) = s^<(*^<(y-1))$ lo cual, ya que $*^<$ es inyectiva, nos dice que $*^<(x-1) = *^<(y-1)$. Iterando este razonamiento llegamos a que $*^<(z) = *^<(0) = \varepsilon$ para algún $z > 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $*^<$ es inyectiva.
- Sobreyectiva: Supongamos no lo es, es decir supongamos que $\Sigma^* - I_{*^<} \neq \varnothing$. Por (3) del lema anterior $\Sigma^* - I_{*^<}$ tiene un menor elemento α. Ya que $\alpha \neq \varepsilon$, tenemos que $\alpha = s^<(\beta)$, para algún β. Ya que $\beta < \alpha$ tenemos que $\beta \notin \Sigma^* - I_{*^<}$, es decir que $\beta = *^<(x)$, para algún $x \in \omega$. Esto nos dice que $\alpha = s^<(*^<(x))$, lo cual por la definición de $*^<$ nos dice que $\alpha = *^<(x+1)$. Pero esto es absurdo ya que $\alpha \notin I_{*^<}$.

Q.E.D.

Lemma 7: Sea $n \geq 1$ fijo, entonces cada $x \geq 1$ se escribe en forma única de la siguiente manera:

$$x = i_k n^k + i_{k-1} n^{k-1} + ... + i_0 n^0$$

con $k \geq 0$ y $1 \leq i_k, i_{k-1}, ..., i_0 \leq n$.

Proof: Veamos primero la unicidad. Supongamos que:

$$i_k n^k + i_{k-1} n^{k-1} + ... + i_0 n^0 = j_m n^m + j_{m-1} n^{m-1} + ... + j_0 n^0$$

con $k, m \geq 0$ y $1 \leq i_k, i_{k-1}, ..., i_0, j_m, ..., j_0 \leq n$.

Supongamos $k < m$. Llegaremos a un absurdo. Notese que:

$$
\begin{aligned}
i_kn^k+i_{k-1}n^{k-1}+...+i_0n^0 &\le nn^k+nn^{k-1}+...+nn^0\\
&\le n^{k+1}+n^k+...+n^1\\
&< n^{k+1}+n^k+...+n^1+n^0\\
&\le n^m+n^{m-1}+...+n^0\\
&\le j_mn^m+j_{m-1}n^{m-1}+...+j_0n^0
\end{aligned}
$$

lo cual contradice la primera igualdad.
Probaremos por inducción en x que: $\boxed{(\dagger)\ \exists k\ge 0 \text{ y } i_k, i_{k-1}, ..., i_0 \in \{1,...,n\}}$ tales que:

$$x = i_kn^k+i_{k-1}n^{k-1}+...+i_0n^0$$

El caso $x=1$ es trivial. Supongamos que $(\dagger)$ vale para x, probaremos que vale para $x+1$. Existen varios casos:

$\boxed{\text{Caso } i_0<n}$

$$
\begin{aligned}
x+1 &= \left(i_kn^k+i_{k-1}n^{k-1}+...+i_0n^0\right)+1\\
&= i_kn^k+i_{k-1}n^{k-1}+...+(i_0+1)n^0
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Caso } i_k=i_{k-1}=...=i_0=n}$

$$
\begin{aligned}
x+1 &= \left(i_kn^k+i_{k-1}n^{k-1}+...+i_0n^0\right)+1\\
&= \left(nn^k+nn^{k-1}+...+nn^0\right)+1\\
&= 1n^{k+1}+1n^k+...+1n^1+1n^0
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Caso } i_0=i_1=...=i_h=n,\ i_{h+1}\neq n \text{ para algún } 0\le h<k}$

$$
\begin{aligned}
x+1 &= \left(i_kn^k+...+i_{h+2}n^{h+2}+i_{h+1}n^{h+1}+nn^h+...+nn^0\right)+1\\
&= \left(i_kn^k+...+i_{h+2}n^{h+2}+i_{h+1}n^{h+1}+n^{h+1}+n^h+...+n^1\right)+1\\
&= i_kn^k+...+i_{h+2}n^{h+2}+(i_{h+1}+1)n^{h+1}+1n^h+...+1n^1+1n^0
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

Lemma 8: La función $\#^<$ es biyectiva.

Proof: Ejercicio.

Q.E.D.

Lemma 9: Las funciones $\#^<$ y $*^<$ son una inversa de la otra.

Proof: Probaremos por inducción en x que para cada $x\in\omega$, se tiene que $\#^<(*^<(x))=x$. El caso $x=0$ es trivial. Supongamos que $\#^<(*^<(x))=x$, veremos entonces que $\#^<(*^<(x+1))=x+1$.
Sean $k\ge 0$ y $i_k,...,i_0$ tales que $*^<(x)=a_{i_0}...a_{i_0}$. Ya que $\#^<(*^<(x))=x$ tenemos que $x=i_kn^k+...+i_0n^0$. Existen varios casos:

$\boxed{\text{Caso } i_0<n}$ entonces $*^<(x+1)=s^<(*^<(x))=a_{i_k}...a_{i_0+1}$ por lo cual:

$$\begin{aligned}
\#^{<}(*^{<}(x+1)) &= i_k n^k + i_{k-1}n^{k-1} + ... + (i_0+1)n^0 \\
&= (i_k n^k + i_{k-1}n^{k-1} + ... + i_0 n^0) + 1 \\
&= x+1
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Caso } i_k = i_{k-1} = ... = i_0 = n.}$ entonces $*^{<}(x+1) = s^{<}(*^{<}(x)) = a_1^{k+2}$ por lo cual:

$$\begin{aligned}
\#^{<}(*^{<}(x+1)) &= 1n^{k+1} + 1n^k + ... + 1n^1 + 1n^0 \\
&= (nn^k + nn^{k-1} + ... + nn^0) + 1 \\
&= x+1
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Caso } i_0 = i_1 = ... = i_h = n,\ i_{h+1} \neq n, \text{ para algun } 0 \leq h < k.}$ entonces $*^{<}(x+1) = s^{<}(*^{<}(x)) = a_{i_k}...a_{i_{h+2}}a_{i_{h+1}+1}a_1...a_1$ por lo cual

$$\begin{aligned}
\#^{<}(*^{<}(x+1)) &= i_k n^k + ... + i_{h+2}n^{h+2} + (i_{h+1}+1)n^{h+1} + 1n^h + ... + 1n^1 + 1n^0 \\
&= (i_k n^k + ... + i_{h+2}n^{h+2} + i_{h+1}n^{h+1} + n^{h+1} + n^h + ... + n^1) + 1 \\
&= (i_k n^k + ... + i_{h+2}n^{h+2} + i_{h+1}n^{h+1} + nn^h + ... + nn^0) + 1 \\
&= x+1
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lemma 10: Si $p, p_1, ..., p_n$ son numeros primos y p divide a $p_1...p_n$, entonces $p = p_i$, para algún i.

Proof: Ejercicio.

Q.E.D.

Theorem 11: Para cada $x \in \mathbf{N}$, hay una única sucesión $(s_1, s_2, ...) \in \omega^{[\mathbf{N}]}$ tal que:

$$x = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$$

Notese que $\prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$ tiene sentido ya que es un producto que solo tiene una cantidad finita de factores no iguales a 1.

Proof:

- Existencia: por inducción en x. Claramente $1 = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^0$, con lo cual el caso $x = 1$ esta probado. Supongamos que la existencia vale para cada $y < x$, veremos que entonces vale para x. Si x es primo, entonces $x = pr(i_0)$ para algún i_0 por lo cual tenemos que $x = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$, tomando $s_i = 0$ si $i \neq i_0$ y $s_{i_0} = 1$. Si x no es primo, entonces $x = y_1.y_2$ con $y_1, y_2 < x$. Por HI tenemos que hay $(s_1, s_2, ...), (t_1, t_2, ...) \in \omega^{[\mathbf{N}]}$ tales que $y_1 = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i}$ y $y_2 = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{t_i}$. Tenemos entonces que $x = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i+t_i}$ lo cual concluye la prueba de la existencia.

- Unicidad: Supongamos que $\prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{s_i} = \prod_{i=1}^{\infty} pr(i)^{t_i}$

Si $s_i > t_i$ entonces dividiendo ambos miembros por $pr(i)^{t_i}$ obtenemos que $pr(i)$ divide a un producto de primos todos distintos de él, lo cual es absurdo por el lema anterior. Análogamente llegamos a un absurdo si suponemos que $t_i > s_i$, lo cual nos dice que $s_i = t_i$, para cada $i \in \mathbf{N}$.

Q.E.D.

Lemma 12: Las funciones

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{N} & \to & \omega^{[\mathbf{N}]} \\ x & \to & ((x)_1, (x)_2, ...) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \omega^{[\mathbf{N}]} & \to & \mathbf{N} \\ (s_1, s_2, ...) & \to & \langle s_1, s_2, ... \rangle \end{array}$$

son biyecciones una inversa de la otra.

Proof: Notese que para cada $x \in \mathbf{N}$, tenemos que $\langle (x)_1, (x)_2, ... \rangle = x$. Además para cada $(s_1, s_2, ...) \in \omega^{[\mathbf{N}]}$, tenemos que $((\langle s_1, s_2, ... \rangle)_1, (\langle s_1, s_2, ... \rangle)_2, ...) = (s_1, s_2, ...)$. Es claro que lo anterior garantiza que los mapeos en cuestión son uno inversa del otro.

Q.E.D.

Lemma 13 Para cada $x \in \mathbf{N}$:

1. $Lt(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
2. $x = \prod_{i=1}^{Lt(x)} pr(i)^{(x)_i}$

Cabe destacar entonces que la función $\lambda ix[(x)_i]$ tiene dominio igual a $\mathbf{N}^2$ y la función $\lambda ix[Lt(x)]$ tiene dominio igual a $\mathbf{N}$.

Proof: Ejercicio.

Q.E.D.

0.2. Procedimientos efectivos

Lemma 14: Sean $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ conjuntos Σ-efectivamente enumerables, entonces $S_1 \cup S_2$ y $S_1 \cap S_2$ son Σ-efectivamente enumerables.

Proof: El caso en el que alguno de los conjuntos es vacío es trivial. Supongamos que ambos conjuntos son no vacíos y sean $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ procedimientos que enumeran a S_1 y S_2.

El siguiente procedimiento enumera al conjunto $S_1 \cup S_2$:
Si x es par: realizar $\mathbb{P}_1$ partiendo de $x/2$ y dar el elemento de S_1 obtenido como salida.
Si x es impar: realizar $\mathbb{P}_2$ partiendo de $(x-1)/2$ y dar el elemento de S_2 obtenido como salida.

Veamos ahora que $S_1 \cap S_2$ es Σ-efectivamente enumerable:
Si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$: entonces no hay nada que probar.
Si $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$: sea z_0 un elemento fijo de $S_1 \cap S_2$. Sea $\mathbb{P}$ un procedimiento efectivo el cual enumere a $\omega \times \omega$.

Un procedimiento que enumera a $S_1 \cap S_2$ es el siguiente:
Etapa 1: Realizar $\mathbb{P}$ con dato de entrada x, para obtener un par $(x_1, x_2) \in \omega \times \omega$.
Etapa 2: Realizar $\mathbb{P}_1$ con dato de entrada x_1 para obtener un elemento $z_1 \in S_1$.
Etapa 3: Realizar $\mathbb{P}_2$ con dato de entrada x_2 para obtener un elemento $z_2 \in S_2$.
Etapa 4: Si $z_1 = z_2$, entonces dar como dato de salida z_1. En caso contrario dar como dato de salida z_0.

Q.E.D.

Lemma 15: Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ-efectivamente computable entonces S es Σ-efectivamente enumerable.

Proof: Supongamos $S \neq \emptyset$. Sea $(\vec{z}, \gamma) \in S$, fijo. Sea $\mathbb{P}$ un procedimiento efectivo que compute a χ_S. Ya vimos que $\omega^2 \times \Sigma^{*3}$ es Σ-efectivamente enumerable. En forma similar se puede ver que $\omega^n \times \Sigma^{*m}$ lo es. Sea $\mathbb{P}_1$ un procedimiento efectivo que enumere a $\omega^n \times \Sigma^{*m}$, entonces el siguiente procedimiento enumera a S:

Etapa 1: Realizar $\mathbb{P}_1$ con x de entrada para obtener $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$.
Etapa 2: Realizar $\mathbb{P}$ con $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ de entrada para obtener el valor Booleano e de salida.
Etapa 3: **Si $e = 1$:** dar como dato de salida $(\vec{x}, \vec{\alpha})$.
Si $e = 0$: dar como dato de salida $(\vec{z}, \gamma)$.

Q.E.D.

Theorem 16: Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Son equivalentes:

a) S es Σ-efectivamente computable

b) S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ-efectivamente enumerables

Proof: $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Por el lema anterior tenemos que S es Σ-efectivamente enumerable. Notese además que, dado que S es Σ-efectivamente computable, $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ también lo es, es decir, que aplicando nuevamente el lema anterior tenemos que $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ es Σ-efectivamente enumerable.

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Sea $\mathbb{P}_1$ un procedimiento efectivo que enumere a S y sea $\mathbb{P}_2$ un procedimiento efectivo que enumere a $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$. Es fácil ver que el siguiente procedimiento computa el predicado χ_S:

Etapa 1: Darle a la variable T el valor 0.
Etapa 2: Realizar $\mathbb{P}_1$ con el valor de T como entrada para obtener de salida la upla $(\vec{y}, \vec{\beta})$.
Etapa 3: Realizar $\mathbb{P}_2$ con el valor de T como entrada para obtener de salida la upla $(\vec{z}, \vec{\gamma})$.
Etapa 4: Si $(\vec{y}, \vec{\beta}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$**:** entonces detenerse y dar como dato de salida el valor 1.
Si $(\vec{z}, \vec{\gamma}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$**:** entonces detenerse y dar como dato de salida el valor 0.
Si no suceden ninguna de las dos posibilidades: aumentar en 1 el valor de la variable T y dirijirse a la Etapa 2.

Q.E.D.

Theorem 17: Dado $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, son equivalentes:

1. S es Σ-efectivamente enumerable
2. $S = \emptyset$ ó $S = I_F$, para alguna $F : \omega \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada F_i es Σ-efectivamente computable.
3. $S = I_F$, para alguna $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada F_i es Σ-efectivamente computable.
4. $S = D_f$, para alguna función f la cual es Σ-efectivamente computable.

Proof: $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ y $\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ son muy naturales y son dejadas al lector.

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ es trivial.

$\boxed{(3) \Rightarrow (4)}$ Para $i = 1, ..., n+m$, sea $\mathbb{P}_i$ un procedimiento el cual computa a F_i y sea $\mathbb{P}$ un procedimiento el cual enumere a $\omega \times \omega^k \times \Sigma^{*l}$. El siguiente procedimiento computa la función $f : I_F \to \{1\}$:

Etapa 1: Darle a la variable T el valor 0.
Etapa 2: Hacer correr $\mathbb{P}$ con dato de entrada T y obtener $(t, z_1, ..., z_k, \gamma_1, ..., \gamma_l)$ como dato de salida.
Etapa 3: Para cada $i = 1, ..., n+m$, hacer correr $\mathbb{P}_i$ durante t pasos, con dato de entrada $(z_1, ..., z_k, \gamma_1, ..., \gamma_l)$. Si cada procedimiento $\mathbb{P}_i$ al cabo de los t pasos termino y dió como resultado el valor o_i, entonces comparar $(\vec{x}, \vec{\alpha})$ con $(o_1, ..., o_{n+m})$ y en caso de que sean iguales detenerse y dar como dato de salida el valor 1. En el caso en que no son iguales, aumentar en 1 el valor de la variable T y dirijirse a la Etapa 2. Si algún procedimiento $\mathbb{P}_i$ al cabo de los t pasos no terminó, entonces aumentar en 1 el valor de la variable T y dirijirse a la Etapa 2.

$\boxed{(4) \Rightarrow (1)}$ Supongamos $S \neq \emptyset$. Sea $(\vec{z}, \vec{\gamma})$ un elemento fijo de S. Sea $\mathbb{P}$ un procedimiento el cual compute a f. Sea $\mathbb{P}_1$ un procedimiento el cual enumere a $\omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Dejamos al lector el diseño de un procedimiento efectivo el cual enumere D_f.

Q.E.D.

0.3. Funciones Σ-recursivas

Lemma 18: Si $f, f_1, ..., f_{n+m}$ son Σ-efectivamente computables, entonces $f \circ (f_1, ..., f_{n+m})$ lo es.

Proof: Sean $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, ..., \mathbb{P}_{n+m}$ procedimientos efectivos los cuales computen las funciones $f, f_1, ..., f_{n+m}$, respectivamente. Usando estos procedimientos es facil definir un procedimiento efectivo el cual compute a $f \circ (f_1, ..., f_{n+m})$. $\Box$

Lemma 19: Si f y g son Σ-efectivamente computables, entonces $R(f, g)$ lo es.

Proof: La Proof es dejada al lector. $\Box$

Lemma 20: Si f y cada $\mathcal{G}_a$ son Σ-efectivamente computables, entonces $R(f, \mathcal{G})$ lo es.

Proof: Es dejada al lector con la recomendacion de que haga la Proof para el caso $\Sigma = \{@, \&\}$ $\Box$

Theorem 21: Si $f \in \mathrm{PR}^\Sigma$, entonces f es Σ-efectivamente computable.

Proof: Dejamos al lector la Proof por induccion en k de que si $f \in \mathrm{PR}_k^\Sigma$, entonces f es Σ-efectivamente computable, la cual sale en forma directa usando los lemas anteriores que garantizan que los constructores de composicion y recursion primitiva preservan la computabilidad efectiva $\Box$

Lemma 22: (1) $\varnothing \in \mathrm{PR}^\varnothing$. (2) $\lambda xy\,[x+y] \in \mathrm{PR}^\varnothing$. (3) $\lambda xy\,[x.y] \in \mathrm{PR}^\varnothing$. (4) $\lambda x\,[x!] \in \mathrm{PR}^\varnothing$.

Proof: (1) Notese que $\varnothing = Pred \circ C_0^{0,0} \in \mathrm{PR}_1^\varnothing$

(2) Notar que

$$\begin{array}{rcl} \lambda xy\,[x+y]\,(0, x_1) & = & x_1 = p_1^{1,0}(x_1) \\ \lambda xy\,[x+y]\,(t+1, x_1) & = & \lambda xy\,[x+y]\,(t, x_1) + 1 \\ & = & \left(Suc \circ p_1^{3,0}\right)(\lambda xy\,[x+y]\,(t, x_1), t, x_1) \end{array}$$

lo cual implica que $\lambda xy\,[x+y] = R\left(p_1^{1,0}, Suc \circ p_1^{3,0}\right) \in \mathrm{PR}_2^\varnothing$. (3) Primero note que

$$\begin{array}{rcl} C_0^{1,0}(0) & = & C_0^{0,0}(\Diamond) \\ C_0^{1,0}(t+1) & = & C_0^{1,0}(t) \end{array}$$

lo cual implica que $C_0^{1,0} = R\left(C_0^{0,0}, p_1^{2,0}\right) \in \mathrm{PR}_1^\varnothing$. Tambien note que $\lambda tx\,[t.x] = R\left(C_0^{1,0}, \lambda xy\,[x+y] \circ \left(p_1^{3,0}\right.\right.$

lo cual por (1) implica que $\lambda tx\,[t.x] \in \mathrm{PR}_3^\varnothing$. (4) Note que

$$\begin{array}{rcl} \lambda x\,[x!]\,(0) & = & 1 = C_1^{0,0}(\Diamond) \\ \lambda x\,[x!]\,(t+1) & = & \lambda x\,[x!]\,(t).(t+1), \end{array}$$

lo cual implica que $\lambda x\,[x!] = R\left(C_1^{0,0}, \lambda xy\,[x.y] \circ \left(p_1^{2,0}, Suc \circ p_2^{2,0}\right)\right)$.

Ya que $C_1^{0,0} = Suc \circ C_0^{0,0}$, tenemos que $C_1^{0,0} \in \mathrm{PR}_1^\varnothing$. Por (2), tenemos que $\lambda xy\,[x.y] \circ \left(p_1^{2,0}, Suc \circ p_2^{2,0}\right) \in \mathrm{PR}_4^\varnothing$,

obteniendo que $\lambda x\,[x!] \in \mathrm{PR}_5^\varnothing$. $\Box$

Lemma 23: Supongamos Σ es no vacio. (a) $\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \in \mathrm{PR}^\Sigma$ (b) $\lambda\alpha\,[|\alpha|] \in \mathrm{PR}^\Sigma$

Proof: (a) Ya que

$$\begin{array}{rcl} \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\,(\alpha_1, \varepsilon) & = & \alpha_1 = p_1^{0,1}(\alpha_1) \\ \lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\,(\alpha_1, \alpha a) & = & d_a(\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\,(\alpha_1, \alpha)), a \in \Sigma \end{array}$$

tenemos que $\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] = R\left(p_1^{0,1}, \mathcal{G}\right)$, donde $\mathcal{G}_a = d_a \circ p_3^{0,3}$, para cada $a \in \Sigma$. (b) Ya que

$$\begin{array}{rcl} \lambda\alpha\,[|\alpha|]\,(\varepsilon) & = & 0 = C_0^{0,0}(\Diamond) \\ \lambda\alpha\,[|\alpha|]\,(\alpha a) & = & \lambda\alpha\,[|\alpha|]\,(\alpha) + 1 \end{array}$$

tenemos que $\lambda\alpha\,[|\alpha|] = R\left(C_0^{0,0}, \mathcal{G}\right)$, donde $\mathcal{G}_a = Suc \circ p_1^{1,1}$, para cada $a \in \Sigma$.. $\Box$

Lemma 24: (a) $C_k^{n,m}, C_\alpha^{n,m} \in \mathrm{PR}^\Sigma$, para $n, m, k \geq 0$, $\alpha \in \Sigma^*$. (b) $C_k^{n,0} \in \mathrm{PR}^\varnothing$, para $n, k \geq 0$.

Proof: (a) Note que $C_{k+1}^{0,0} = Suc \circ C_k^{0,0}$, lo cual implica $C_k^{0,0} \in \text{PR}_k^{\Sigma}$, para $k \geq 0$. Tambien note que $C_{\alpha a}^{0,0} = d_a \circ C_\alpha^{0,0}$, lo cual dice que $C_\alpha^{0,0} \in \text{PR}^{\Sigma}$, para $\alpha \in \Sigma^*$. Para ver que $C_k^{0,1} \in \text{PR}^{\Sigma}$ notar que

$$\begin{array}{rcl} C_k^{0,1}(\varepsilon) & = & k = C_k^{0,0}(\Diamond) \\ C_k^{0,1}(\alpha a) & = & C_k^{0,1}(\alpha) = p_1^{1,1}\left(C_k^{0,1}(\alpha), \alpha\right) \end{array}$$

lo cual implica que $C_k^{0,1} = R\left(C_k^{0,0}, \mathcal{G}\right)$, con $\mathcal{G}_a = p_1^{1,1}$, $a \in \Sigma$. En forma similar podemos ver que $C_k^{1,0}, C_\alpha^{1,0}, C_\alpha^{0,1} \in \text{PR}^{\Sigma}$. Supongamos ahora que $m > 0$. Entonces $\begin{array}{rcl} C_k^{n,m} & = & C_k^{0,1} \circ p_{n+1}^{n,m} \\ C_\alpha^{n,m} & = & C_\alpha^{0,1} \circ p_{n+1}^{n,m} \end{array}$

de lo cual obtenemos que $C_k^{n,m}, C_\alpha^{n,m} \in \text{PR}^{\Sigma}$. El caso $n > 0$ es similar (b) Use argumentos similares a los usados en la Proof de (a). $\Box$

Lemma 25: (a) $\lambda xy\left[x^y\right] \in \text{PR}^{\varnothing}$. (b) $\lambda t\alpha\left[\alpha^t\right] \in \text{PR}^{\Sigma}$.

Proof: (a) Note que

$\lambda tx\left[x^t\right] = R\left(C_1^{1,0}, \lambda xy\left[x.y\right] \circ \left(p_1^{3,0}, p_3^{3,0}\right)\right) \in \text{PR}^{\varnothing}$.

O sea que $\lambda xy\left[x^y\right] = \lambda tx\left[x^t\right] \circ \left(p_2^{2,0}, p_1^{2,0}\right) \in \text{PR}^{\varnothing}$. (b) Note que

$\lambda t\alpha\left[\alpha^t\right] = R\left(C_\varepsilon^{0,1}, \lambda\alpha\beta\left[\alpha\beta\right] \circ \left(p_3^{1,2}, p_2^{1,2}\right)\right) \in \text{PR}^{\Sigma}$.

$\Box$

Lemma 26: Si $<$ es un orden total estricto sobre un alfabeto no vacio Σ, entonces $s^<$, $\#^<$ y $*^<$ pertenecen a PR^{Σ}

Proof: Supongamos $\Sigma = \{a_1, ..., a_k\}$ y $<$ dado por $a_1 < ... < a_k$. Ya que

$$\begin{array}{rcl} s^<(\varepsilon) & = & a_1 \\ s^<(\alpha a_i) & = & \alpha a_{i+1}, \text{ para } i < k \\ s^<(\alpha a_k) & = & s^<(\alpha)a_1 \end{array}$$

tenemos que $s^< = R\left(C_{a_1}^{0,0}, \mathcal{G}\right)$, donde $\mathcal{G}_{a_i} = d_{a_{i+1}} \circ p_1^{0,2}$, para $i = 1, ..., k-1$ y $\mathcal{G}_{a_k} = d_{a_1} \circ p_2^{0,2}$.

O sea que $s^< \in \text{PR}^{\Sigma}$. Ya que $\begin{array}{rcl} *^<(0) & = & \varepsilon \\ *^<(t+1) & = & s^<(*^<(t)) \end{array}$

podemos ver que $*^< \in \text{PR}^{\Sigma}$. Ya que $\begin{array}{rcl} \#^<(\varepsilon) & = & 0 \\ \#^<(\alpha a_i) & = & \#^<(\alpha).k + i, \text{ para } i = 1, ..., k, \end{array}$

tenemos que $\#^< = R\left(C_0^{0,0}, \mathcal{G}\right)$, donde $\mathcal{G}_{a_i} = \lambda xy\left[x+y\right] \circ \left(\lambda xy\left[x.y\right] \circ \left(p_1^{1,1}, C_k^{1,1}\right), C_i^{1,1}\right)$, para $i = 1, ..., k$.

O sea que $\#^< \in \text{PR}^{\Sigma}$. $\Box$

Lemma 27: (a) $\lambda xy\left[x \dot{-} y\right] \in \text{PR}^{\varnothing}$. (b) $\lambda xy\left[\max(x,y)\right] \in \text{PR}^{\varnothing}$. (c) $\lambda xy\left[x = y\right] \in \text{PR}^{\varnothing}$. (d) $\lambda xy\left[x \leq y\right] \in \text{PR}^{\varnothing}$. (e) Si Σ es no vacio, entonces $\lambda\alpha\beta\left[\alpha = \beta\right] \in \text{PR}^{\Sigma}$

Proof: (a) Primero notar que $\lambda x\left[x \dot{-} 1\right] = R\left(C_0^{0,0}, p_2^{2,0}\right) \in \text{PR}^{\varnothing}$. Tambien note que

$\lambda tx\left[x \dot{-} t\right] = R\left(p_1^{1,0}, \lambda x\left[x \dot{-} 1\right] \circ p_1^{3,0}\right) \in \text{PR}^{\varnothing}$.

O sea que $\lambda xy\left[x \dot{-} y\right] = \lambda tx\left[x \dot{-} t\right] \circ \left(p_2^{2,0}, p_1^{2,0}\right) \in \text{PR}^{\varnothing}$. (b) Note que $\lambda xy\left[\max(x,y)\right] = \lambda xy\left[(x + (y \dot{-} x)\right]$.

(c) Note que $\lambda xy\left[x = y\right] = \lambda xy\left[1 \dot{-} ((x \dot{-} y) + (y \dot{-} x))\right]$.

(d) Note que $\lambda xy\left[x \leq y\right] = \lambda xy\left[1 \dot{-} (x \dot{-} y)\right]$.

(e) Sea $<$ un orden total estricto sobre Σ. Ya que

$\alpha = \beta$ sii $\#^<(\alpha) = \#^<(\beta)$

tenemos que $\lambda\alpha\beta\left[\alpha = \beta\right] = \lambda xy\left[x = y\right] \circ \left(\#^< \circ p_1^{0,2}, \#^< \circ p_2^{0,2}\right)$.

O sea que podemos aplicar (c) y Lema 28 implica que χ_S es Σ-p.r.. $\Box$

Lemma 28: Hacer Proof:

Lemma 29: Hacer

Proof:

Corollary 30: Hacer

Proof:

Lemma 31: Supongamos $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$, $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ son conjuntos no vacios. Entonces $S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$ es Σ -p.r. sii $S_1, ..., S_n, L_1, ..., L_m$ son Σ-p.r.

Proof: $(\Rightarrow)$ Veremos por ejemplo que L_1 es Σ-p.r.. Sea $(z_1, ..., z_n, \zeta_1, ..., \zeta_m)$ un elemento fijo de $S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$. Note que

$\alpha \in L_1$ sii $(z_1, ..., z_n, \alpha, \zeta_2, ..., \zeta_m) \in S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$,

lo cual implica que $\chi_{L_1} = \chi_{S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m} \circ \left(C^{0,1}_{z_1}, ..., C^{0,1}_{z_n}, p^{0,1}_1, C^{0,1}_{\zeta_2}, ..., C^{0,1}_{\zeta_m} \right)$.

$(\Leftarrow)$ Note que $\chi_{S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m}$ es el predicado $(\chi_{S_1} \circ p^{n,m}_1 \wedge ... \wedge \chi_{S_n} \circ p^{n,m}_n \wedge \chi_{L_1} \circ p^{n,m}_{n+1} \wedge ... \wedge \chi_{L_m} \circ$

$\square$

Lemma 32: Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-p.r., donde $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$. Si $S \subseteq D_f$ es Σ-p.r., entonces $f\mid_S$ es Σ-p.r..

Proof: Supongamos $O = \Sigma^*$. Entonces

$f\mid_S = \lambda x\alpha\, [\alpha^x] \circ (Suc \circ Pred \circ \chi_S, f)$

es Σ-p.r.. El caso $O = \omega$ es similar usando $\lambda xy\, [x^y]$ en lugar de $\lambda x\alpha\, [\alpha^x]$. $\square$

Lemma 33: Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-p.r., entonces existe una funcion Σ -p.r. $\bar{f} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, tal que $f = \bar{f}\mid_{D_f}$.

Proof: Es facil ver por induccion en k que el enunciado se cumple para cada $f \in \mathrm{PR}^\Sigma_k$ $\square$

Proposition 34: Un conjunto S es Σ-p.r. sii S es el dominio de una funcion Σ-p.r..

Proof: $(\Rightarrow)$ Note que $S = D_{Pred \circ \chi_S}$.

$(\Leftarrow)$ Probaremos por induccion en k que D_F es Σ -p.r., para cada $F \in \mathrm{PR}^\Sigma_k$. El caso $k = 0$ es facil. Supongamos el resultado vale para un k fijo y supongamos $F \in \mathrm{PR}^\Sigma_{k+1}$. Veremos entonces que D_F es Σ-p.r.. Hay varios casos. Consideremos primero el caso en que $F = R(f, g)$, donde

$$\begin{array}{rcl} f & : & S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \Sigma^* \\ g & : & \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times \Sigma^* \to \Sigma^*, \end{array}$$

con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacios y $f, g \in \mathrm{PR}^\Sigma_k$. Notese que por definicion de $R(f, g)$, tenemos que $D_F = \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$.

Por hipotesis inductiva tenemos que $D_f = S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$ es Σ-p.r., lo cual por el Lema 31 nos dice que los conjuntos $S_1, ..., S_n$, $L_1, ..., L_m$ son Σ-p.r.. Ya que ω es Σ-p.r., el Lema 31 nos dice que D_F es Σ-p.r.. Los otros casos de recursion primitiva son dejados al lector.

Supongamos ahora que $F = g \circ (g_1, ..., g_{n+m})$, donde

$$\begin{array}{rcl} g & : & D_g \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O \\ g_i & : & D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega,\ i = 1, ..., n \\ g_i & : & D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \Sigma^*, i = n+1, ..., n+m \end{array}$$

estan en PR^Σ_k. Por Lema 33, hay funciones Σ-p.r. $\bar{g}_1, ..., \bar{g}_{n+m}$ las cuales son Σ-totales y cumplen $g_i = \bar{g}_i\mid_{D_{g_i}}$, para $i = 1, ..., n+m$.

Por hipotesis inductiva los conjuntos D_g, D_{g_i}, $i = 1, ..., n+m$, son Σ-p.r. y por lo tanto

$S = \bigcap\limits_{i=1}^{n+m} D_{g_i}$

lo es. Notese que $\chi_{D_F} = (\chi_{D_g} \circ (\bar{g}_1, ..., \bar{g}_{n+m}) \wedge \chi_S)$

lo cual nos dice que D_F es Σ-p.r.. $\square$

Lemma 35: Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, $i = 1, ..., k$, son funciones Σ-p.r. tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \varnothing$ para $i \neq j$. Entonces $f_1 \cup ... \cup f_k$ es Σ-p.r..

Proof: Supongamos $O = \Sigma^*$ y $k = 2$. Sean
$\bar{f}_i : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*, i = 1, 2,$
funciones Σ-p.r. tales que $\bar{f}_i \mid_{D_{f_i}} = f_i$, $i = 1, 2$ (Lema 33). Por Lema 34 los conjuntos D_{f_1} y D_{f_2} son Σ-p.r. y por lo tanto lo es $D_{f_1} \cup D_{f_2}$. Ya que $f_1 \cup f_2 = \Big(\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta] \circ (\lambda x\alpha\,[\alpha^x] \circ (\chi_{D_{f_1}}, \bar{f}_1), \lambda x\alpha\,[\alpha^x] \circ (\chi$
tenemos que $f_1 \cup f_2$ es Σ-p.r.. El caso $k > 2$ puede probarse por induccion ya que
$f_1 \cup ... \cup f_k = (f_1 \cup ... \cup f_{k-1}) \cup f_k$.
$\square$

Corollary 36: Supongamos f es una funcion Σ-mixta cuyo dominio es finito. Entonces f es Σ-p.r..

Proof: Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, con $D_f = \{e_1, ..., e_k\}$. Por el Corolario 30, cada $\{e_i\}$ es Σ-p.r. por lo cual el Lema 32 nos dice que $C^{n,m}_{f(e_i)} \mid_{\{e_1\}}$ es Σ-p.r.. O sea que
$f = C^{n,m}_{f(e_1)} \mid_{\{e_1\}} \cup ... \cup C^{n,m}_{f(e_k)} \mid_{\{e_k\}}$
es Σ-p.r.. $\square$

Lemma 37: $\lambda i\alpha\,[[\alpha]_i]$ es Σ-p.r..

Proof: Note que

$$\begin{array}{rcl} [\varepsilon]_i & = & \varepsilon \\ [\alpha a]_i & = & \begin{cases} [\alpha]_i & \text{si } i \neq |\alpha| + 1 \\ a & \text{si } i = |\alpha| + 1 \end{cases} \end{array}$$

lo cual dice que $\lambda i\alpha\,[[\alpha]_i] = R\,(C^{1,0}_\varepsilon, \mathcal{G})$, donde $\mathcal{G}_a : \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ es dada por $\mathcal{G}_a(i, \alpha, \zeta) =$
$\begin{cases} \zeta & \text{si } i \neq |\alpha| + 1 \\ a & \text{si } i = |\alpha| + 1 \end{cases}$

O sea que solo resta probar que cada $\mathcal{G}_a$ es Σ-p.r.. Primero note que los conjuntos $\begin{array}{rcl} S_1 & = & \{(i, \alpha, \zeta) \in \omega \times \\ S_2 & = & \{(i, \alpha, \zeta) \in \omega \times \end{array}$

son Σ-p.r. ya que $\begin{array}{rcl} \chi_{S_1} & = & \lambda xy\,[x \neq y] \circ \left(p^{1,2}_1, Suc \circ \lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ p^{1,2}_2\right) \\ \chi_{S_2} & = & \lambda xy\,[x = y] \circ \left(p^{1,2}_1, Suc \circ \lambda\alpha\,[|\alpha|] \circ p^{1,2}_2\right). \end{array}$

Ya que $\mathcal{G}_a = p^{1,2}_3 \mid_{S_1} \cup C^{1,2}_a \mid_{S_2}$,
el Lema 35 nos dice que $\mathcal{G}_a$ es Σ-p.r., para cada $a \in \Sigma$. $\square$

Lemma 38: Sean $n, m \geq 0$. (a) Si $f : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ es Σ-p.r., con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios, entonces lo son las funciones $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ y $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$. (b) Si $f : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \Sigma^*$ es Σ-p.r., con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios, entonces lo es la funcion $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\subset_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$

Proof: (a) Sea $G = \lambda tx\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=t} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$. Ya que

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=y} f(i, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] = G \circ \left(p^{n+2,m}_2, p^{n+2,m}_1, p^{n+2,m}_3, ..., p^{n+2,m}_{n+m+2}\right)$$

solo tenemos que probar que G es Σ-p.r.. Primero note que $\begin{array}{rcl} G(0, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) & = & \begin{cases} 0 & \text{si } x > \\ f(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x = \end{cases} \\ G(t+1, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) & = & \begin{cases} 0 & \\ G(t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) + f(t + & \end{cases} \end{array}$

Sean $\begin{array}{rcl} D_1 & = & \{(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m : x > 0\} \\ D_2 & = & \{(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m : x = 0\} \\ H_1 & = & \{(z, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m : x > t + 1\} \\ H_2 & = & \{(z, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m : x \leq t + 1\}. \end{array}$

Es facil de chequear que estos conjuntos son Σ-p.r.. Veamos que por ejemplo H_1 lo es. Es decir debemos ver que χ_{H_1} es Σ -p.r.. Ya que f es Σ-p.r. tenemos que $D_f = \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$ es Σ -p.r., lo cual por el Lema 31 nos dice que los conjuntos $S_1, ..., S_n$, $L_1, ..., L_m$ son Σ-p.r.. Ya que ω es Σ-p.r., el Lema 31 nos dice que $R = \omega^3 \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$ es Σ-p.r.. Notese que $\chi_{H_1} = (\chi_R \wedge \lambda ztx\vec{x}\vec{\alpha}\,[x > t+1])$ por cual χ_{H_1} es Σ -p.r. ya que es la conjuncion de dos predicados Σ-p.r. Ademas note que $G = R(h, g)$, donde

$$\begin{array}{lll} h & = & C_0^{n+1,m}\mid_{D_1} \cup \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\,[f(0, \vec{x}, \vec{\alpha})]\mid_{D_2} \\ g & = & C_0^{n+3,m}\mid_{H_1} \cup \lambda ztx\vec{x}\vec{\alpha}\,[z + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha})])\mid_{H_2} \end{array}$$

O sea que los Lemas 35 y 32 garantizan que G es Σ-p.r.. $\Box$

Lemma 39: Sean $n, m \geq 0$. (a) Sea $P : S \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ un predicado Σ-p.r. y supongamos $\bar{S} \subseteq S$ es Σ-p.r.. Entonces $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x}\ P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ y $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x}\ P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ son predicados Σ-p.r.. (Note que el dominio de estos predicados es $\omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$) (b) Sea $P : S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times L \to \omega$ un predicado Σ-p.r. y supongamos $\bar{L} \subseteq L$ es Σ-p.r.. Entonces $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x}\ P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)\right]$ y $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x}\ P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)\right]$ son predicados Σ-p.r..

Proof: (a) Sea

$\bar{P} = P\mid_{\bar{S} \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m} \cup C_1^{1+n,m}\mid_{(\omega - \bar{S}) \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m}$

Notese que $\bar{P}$ es Σ-p.r.. Ya que

$$\begin{array}{lll} \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] & = & \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=0}^{t=x} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] \\ & = & \lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\prod_{t=x}^{t=y} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] \circ \left(C_0^{1+n,m}, p_1^{1+n}\right. \end{array}$$

el Lema 38 implica que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x}\ P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ es Σ-p.r.. Finalmente note que

$\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\exists t \in \bar{S})_{t \leq x}\ P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] = \neg\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x}\ \neg P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$

es Σ-p.r.. (b) Sea $<$ un orden total estricto sobre Σ. Sea k el cardinal de Σ. Ya que

$|\alpha| \leq x$ sii $\#^<(\alpha) \leq \sum_{\iota=1}^{i=x} k^i$,

(ejercicio) tenemos que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)\right] = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \#^<(\bar{L}))_{t \leq \sum_{\iota=1}^{i=x} k^i} P(\vec{x}, \vec{\alpha}, *^<(t))\right]$

Sea $H = \lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\,[P(\vec{x}, \vec{\alpha}, *^<(t))]$. Notese que H es Σ-p.r. y $D_H = \#^<(L) \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m$

Ademas note que $\#^<(\bar{L})$ es Σ-p.r. (ejercicio), lo cual por (a) implica que $Q = \lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \#^<(\bar{L}))_{t \leq x} H(t\right.$

es Σ-p.r.. O sea que $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall \alpha \in \bar{L})_{|\alpha| \leq x}\ P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)\right] = Q \circ \left(\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{\iota=1}^{i=x} k^i\right], p_1^{1+n,m}, ..., p_{1+n+m}^{1+n,m}\right)$

es Σ-p.r.. $\Box$

Lemma 40: (a) El predicado $\lambda xy\,[x \text{ divide } y]$ es $\varnothing$-p.r.. (b) El predicado $\lambda x\,[x \text{ es primo}]$ es $\varnothing$-p.r.. (c) El predicado $\lambda\alpha\beta\,[\alpha \text{ inicial } \beta]$ es Σ-p.r..

Proof: (a) Si tomamos $P = \lambda tx_1x_2\,[x_2 = t.x_1] \in \text{PR}^{\varnothing}$, tenemos que

$$\begin{array}{lll} \lambda x_1x_2\,[x_1 \text{ divide } x_2] & = & \lambda x_1x_2\,[(\exists t \in \omega)_{t \leq x_2}\ P(t, x_1, x_2)] \\ & = & \lambda xx_1x_2\,[(\exists t \in \omega)_{t \leq x}\ P(t, x_1, x_2)] \circ \left(p_2^{2,0}, p_1^{2,0}, p_2^{2,0}\right) \end{array}$$

por lo que podemos aplicar el lema anterior. (b) Ya que

x es primo sii $x > 1 \wedge ((\forall t \in \omega)_{t \leq x}\ t = 1 \vee t = x \vee \neg(t \text{ divide } x))$

podemos usar un argumento similar al de la prueba de (a). (c) es dejado al lector. $\Box$

Lemma 41: Si $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ es un predicado Σ-efectivamente computable y D_P es Σ-efectivamente computable, entonces la funcion $M(P)$ es Σ-efectivamente computable.

Proof: Ejercicio $\Box$

Theorem 42: Si $f \in \text{R}^\Sigma$, entonces f es Σ-efectivamente computable.

Proof: Dejamos al lector la prueba por induccion en k de que si $f \in \mathrm{R}_k^\Sigma$, entonces f es Σ-efectivamente computable. $\Box$

Lemma 43: Sean $n, m \geq 0$. Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ un predicado Σ -p.r.. Entonces (a) $M(P)$ es Σ-recursiva. (b) Si hay una funcion Σ-p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ tal que $M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})$, para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$, entonces $M(P)$ es Σ-p.r..

Proof: (a) Sea $\bar{P} = P \mid_{D_P} \cup C_0^{n+1,m} \mid_{(\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}) - D_P}$. Dejamos al lector verificar cuidadosamente que $M(P) = M(\bar{P})$. Veremos entonces que $M(\bar{P})$ es Σ-recursiva. Note que $\bar{P}$ es Σ-p.r. (por que?). Sea k tal que $\bar{P} \in \mathrm{PR}_k^\Sigma$. Ya que $\bar{P}$ es Σ-total y $\bar{P} \in \mathrm{PR}_k^\Sigma \subseteq \mathrm{R}_k^\Sigma$, tenemos que $M(\bar{P}) \in \mathrm{R}_{k+1}^\Sigma$ y por lo tanto $M(\bar{P}) \in \mathrm{R}^\Sigma$.

(b) Primero veremos que $D_{M(\bar{P})}$ es un conjunto Σ-p.r.. Notese que

$\chi_{D_{M(\bar{P})}} = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})} \ \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$

lo cual nos dice que $\chi_{D_{M(\bar{P})}} = \lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \ \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \circ (f, p_1^{n,m}, ..., p_{n+m}^{n,m})$

Pero el Lema 39 nos dice que $\lambda x \vec{x} \vec{\alpha} \left[(\exists t \in \omega)_{t \leq x} \ \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ es Σ-p.r. por lo cual tenemos que $\chi_{D_{M(\bar{P})}}$ lo es. Sea

$P_1 = \lambda t \vec{x} \vec{\alpha} \left[\bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \wedge (\forall j \in \omega)_{j \leq t} \ j = t \vee \neg \bar{P}(j, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$

Note que P_1 es Σ-total. Dejamos al lector usando lemas anteriores probar que P_1 es Σ-p.r.. Ademas notese que para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tenemos que $P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1$ si y solo si $t = M(\bar{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$

Esto nos dice que $M(\bar{P}) = \left(\lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \right) \mid_{D_{M(\bar{P})}}$

por lo cual para probar que $M(\bar{P})$ es Σ-p.r. solo nos resta probar que $F = \lambda \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=0}^{f(\vec{x}, \vec{\alpha})} t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right]$

lo es. Pero $F = \lambda x y \vec{x} \vec{\alpha} \left[\prod_{t=x}^{y} t^{P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha})} \right] \circ (C_0^{n,m}, f, p_1^{n,m}, ..., p_{n+m}^{n,m})$

y por lo tanto el Lema 38 nos dice que F es Σ-p.r.. De esta manera hemos probado que $M(\bar{P})$ es Σ-p.r. y por lo tanto $M(P)$ lo es. $\Box$

Lemma 44: Las siguientes funciones son $\varnothing$-p.r.: (a) $\begin{array}{rcl} Q : \omega \times \mathbf{N} & \to & \omega \\ (x, y) & \to & \text{cociente de la division de } x \text{ por } y \end{array}$

(b) $\begin{array}{rcl} R : \omega \times \mathbf{N} & \to & \omega \\ (x, y) & \to & \text{resto de la division de } x \text{ por } y \end{array}$ (c) $\begin{array}{rcl} pr : \mathbf{N} & \to & \omega \\ n & \to & n\text{-esimo numero primo} \end{array}$

Proof: (a) Veamos primero veamos que $Q = M(P)$, donde $P = \lambda t x y \left[(t+1).y > x \right]$. Notar que

$$\begin{array}{rcl} D_{M(P)} & = & \{(x, y) : (\exists t \in \omega) \ P(t, x, y) = 1\} \\ & = & \{(x, y) : (\exists t \in \omega) \ (t+1).y > x\} \\ & = & \omega \times \mathbf{N} \\ & = & D_Q \end{array}$$

Dejamos al lector la facil verificacion de que para cada $(x, y) \in \omega \times \mathbf{N}$, se tiene que $Q(x, y) = M(P)(x, y) = \min_t (t+1).y > x$

Esto prueba que $Q = M(P)$. Ya que P es $\varnothing$-p.r. y $Q(x, y) \leq p_1^{2,0}(x, y)$, para cada $(x, y) \in \omega \times \mathbf{N}$

(b) del Lema 43 implica que $Q \in \mathrm{PR}^\varnothing$. (b) Notese que

$R = \lambda x y \left[x \dot{-} Q(x, y).y \right]$

y por lo tanto $R \in \mathrm{PR}^\varnothing$. (c) Para ver que pr es $\varnothing$-p.r., veremos que la extension $h : \omega \to \omega$, dada por $h(0) = 0$ y $h(n) = pr(n)$, $n \geq 1$, es $\varnothing$-p.r.. Primero note que

$$\begin{array}{rcl} h(0) & = & 0 \\ h(x+1) & = & \min_t \left(t \text{ es primo} \wedge t > h(x) \right) \end{array}$$

O sea que $h = R\left(C_0^{0,0}, M(P)\right)$, donde $P = \lambda tzx\,[t \text{ es primo} \wedge t > z]$

Es decir que solo nos resta ver que $M(P)$ es $\varnothing$-p.r.. Claramente P es $\varnothing$-p.r.. Veamos que para cada $(z,x) \in \omega^2$, tenemos que $M(P)(z,x) = \min_t (t \text{ es primo} \wedge t > z) \leq z! + 1$

Sea p primo tal que p divide a $z! + 1$. Es facil ver que entonces $p > z$. Pero esto claramente nos dice que $\min_t (t \text{ es primo} \wedge t > z) \leq p \leq z! + 1$

O sea que (b) del Lema 43 implica que $M(P)$ es $\varnothing$ -p.r. ya que podemos tomar $f = \lambda zx\,[z! + 1]$. $\square$

Lemma 45: Las funciones $\lambda xi\,[(x)_i]$ y $\lambda x\,[Lt(x)]$ son $\varnothing$-p.r.

Proof: Note que $D_{\lambda xi[(x)_i]} = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Sea

$P = \lambda txi\left[\neg(pr(i)^{t+1} \text{ divide } x)\right]$

Note que P es $\varnothing$-p.r. y que $D_P = \omega \times \omega \times \mathbf{N}$. Dejamos al lector la prueba de que $\lambda xi\,[(x)_i] = M(P)$. Ya que $(x)_i \leq x$, para todo $x \in \mathbf{N}$, (b) del Lema 43 implica que $\lambda xi\,[(x)_i]$ es $\varnothing$-p.r.. Veamos que $\lambda x\,[Lt(x)]$ es $\varnothing$-p.r.. Sea

$Q = \lambda tx\,[(\forall i \in \mathbf{N})_{i \leq x}\,(i \leq t \vee (x)_i = 0)]$

Notese que $D_Q = \omega \times \mathbf{N}$ y que ademas por el Lema 39 tenemos que Q es $\varnothing$-p.r. (dejamos al lector explicar como se aplica tal lema en este caso). Ademas notese que $\lambda x\,[Lt(x)] = M(Q)$ y que $Lt(x) \leq x$, para todo $x \in \mathbf{N}$

lo cual por (b) del Lema 43 nos dice que $\lambda x\,[Lt(x)]$ es $\varnothing$-p.r.. $\square$ Para $x_1, ..., x_n \in \omega$, escribiremos $\langle x_1, ..., x_n\rangle$ en lugar de $\langle x_1, ..., x_n, 0, ...\rangle$.

Lemma 46: Sea $n \geq 1$. La funcion $\lambda x_1...x_n\,[\langle x_1, ..., x_n\rangle]$ es $\varnothing$-p.r.

Proof: Sea $f_n = \lambda x_1...x_n\,[\langle x_1, ..., x_n\rangle]$. Claramente f_1 es $\varnothing$ -p.r.. Ademas note que para cada $n \geq 1$, tenemos

$f_{n+1} = \lambda x_1...x_{n+1}\,[(f_n(x_1, ..., x_n) pr(n+1)^{x_{n+1}})]$.

O sea que podemos aplicar un argumento inductivo. $\square$

Lemma 47: Supongamos que $\Sigma \neq \varnothing$. Sea $<$ un orden total estricto sobre Σ, sean $n, m \geq 0$ y sea $P : D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \times \Sigma^* \to \omega$ un predicado Σ-p.r.. Entonces (a) $M^<(P)$ es Σ-recursiva. (b) Si existe una funcion Σ-p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ tal que $|M^<(P)(\vec{x}, \vec{\alpha})| = \left|\min_\alpha^< P(\vec{x}, \vec{\alpha}, \alpha)\right| \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})$, para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M^<(P)}$, entonces $M^<(P)$ es Σ-p.r..

Proof: Sea $Q = P \circ \left(p_2^{1+n,m}, ..., p_{1+n+m}^{1+n,m}, *^< \circ p_1^{1+n,m}\right)$. Note que

$M^<(P) = *^< \circ M(Q)$

lo cual por (a) del Lema 43 implica que $M^<(P)$ es Σ-recursiva. Sea k el cardinal de Σ. Ya que

$|*^<(M(Q)(\vec{x}, \vec{\alpha}))| = |M^<(P)(\vec{x}, \vec{\alpha})| \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})$,

para todo $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M^<(P)} = D_{M(Q)}$, tenemos que $M(Q)(\vec{x}, \vec{\alpha})) \leq \sum_{\iota=1}^{i=f(\vec{x},\vec{\alpha})} k^i$, para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(Q)}$.

O sea que por (a) del Lema 43, $M(Q)$ es Σ-p.r. y por lo tanto $M^<(P)$ lo es. $\square$

Lemma 48: Supongamos
$$\begin{array}{rcl} f & : & U \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega \\ g & : & \omega \times \omega \times U \to \omega \\ h & : & \omega \times U \to \omega \end{array}$$
son funciones tales que
$$\begin{array}{rcl} h(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) & = & f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in U \\ h(x+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) & = & g(h^\downarrow(x, \vec{x}, \vec{\alpha}), x, \vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } x \in \omega \text{ y } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in U. \end{array}$$
Entonces h es Σ-p.r. si f y g lo son.

Proof: Supongamos f, g son Σ-p.r.. Primero veremos que $h^\downarrow$ es Σ-p.r.. Notese que

$$\begin{array}{rcl} h^{\downarrow}(0,\vec{x},\vec{\alpha}) & = & \langle h(0,\vec{x},\vec{\alpha})\rangle \\ & = & \langle f(\vec{x},\vec{\alpha})\rangle \\ & = & 2^{f(\vec{x},\vec{\alpha})} \\ h^{\downarrow}(x+1,\vec{x},\vec{\alpha}) & = & h^{\downarrow}(x,\vec{x},\vec{\alpha})pr(x+2)^{h(x+1,\vec{x},\vec{\alpha})} \\ & = & h^{\downarrow}(x,\vec{x},\vec{\alpha})pr(x+2)^{g(h^{\downarrow}(x,\vec{x},\vec{\alpha}),x,\vec{x},\vec{\alpha})} \end{array}$$

lo cual nos dice que $h^{\downarrow}=R(f_1,g_1)$ donde $\begin{array}{rcl} f_1 & = & \lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[2^{f(\vec{x},\vec{\alpha})}\right] \\ g_1 & = & \lambda Ax\vec{x}\vec{\alpha}\left[Apr(x+2)^{g(A,x,\vec{x},\vec{\alpha})}\right] \end{array}$

O sea que $h^{\downarrow}$ es Σ-p.r. ya que f_1 y g_1 lo son. Finalmente notese que $h=\lambda ix[(x)_i]\circ(Suc\circ p_1^{1+n,m},h^{\downarrow})$

lo cual nos dice que h es Σ-p.r.. $\Box$

Lemma 49: Supongamos $\varnothing\neq\Sigma\subseteq\Gamma$. (a) Si $<$ es un orden total estricto sobre Σ, entonces las funciones $*^{<}:\omega\rightarrow\Sigma^*$ y $\#^{<}:\Sigma^*\rightarrow\omega$ son Γ-p.r.. (b) Si $\prec$ es un orden total estricto sobre Γ, entonces las funciones $\#^{\prec}|_{\Sigma^*}:\Sigma^*\rightarrow\omega$ y $*^{\prec}|_{\#^{\prec}(\Sigma^*)}:\#^{\prec}(\Sigma^*)\rightarrow\Sigma^*$ son Σ-p.r..

Proof: (a) Supongamos $\Sigma=\{a_1,...,a_k\}$ y $<$ es dado por $a_1<...<a_k$. Sea $s_e^{<}:\Gamma^*\rightarrow\Gamma^*$ dada por

$$\begin{array}{rcl} s_e^{<}(\varepsilon) & = & a_1 \\ s_e^{<}(\alpha a_i) & = & \alpha a_{i+1}, \text{ si } i<k \\ s_e^{<}(\alpha a_k) & = & s_e^{<}(\alpha)a_1 \\ s_e^{<}(\alpha a) & = & \varepsilon, \text{ si } a\in\Gamma-\Sigma. \end{array}$$

Note que $s_e^{<}$ es Γ-p.r. y que $s_e^{<}|_{\Sigma^*}=s^{<}$. Ya que Σ^* es un conjunto Γ-p.r. tenemos que $s^{<}$ es Γ-p.r.. O sea que la recursion $\begin{array}{rcl} *^{<}(0) & = & \varepsilon \\ *^{<}(x+1) & = & s^{<}(*^{<}(x)) \end{array}$

implica que $*^{<}$ es Γ-p.r.. Para ver que $\#^{<}:\Sigma^*\rightarrow\omega$ es Γ-p.r., sea $\#_e^{<}:\Gamma^*\rightarrow\omega$ dada por

$$\begin{array}{rcl} \#_e^{<}(\varepsilon) & = & 0 \\ \#_e^{<}(\alpha a_i) & = & \#_e^{<}(\alpha).k+i \\ \#_e^{<}(\alpha a) & = & 0, \text{ si } a\in\Gamma-\Sigma. \end{array}$$

Ya que $\#_e^{<}$ es Γ-p.r., eso es $\#^{<}=\#_e^{<}|_{\Sigma^*}$. (b) Sea n el cardinal de Γ. Ya que

$\#^{\prec}|_{\Sigma^*}(\varepsilon)=0$

$\#^{\prec}|_{\Sigma^*}(\alpha a)=\#^{\prec}|_{\Sigma^*}(\alpha).n+\#^{\prec}(a)$, para cada $a\in\Sigma$

la funcion $\#^{\prec}|_{\Sigma^*}$ es Σ-p.r.. O sea que el predicado $P=\lambda x\alpha\,[\#^{\prec}|_{\Sigma^*}(\alpha)=x]$ es Σ-p.r.. Sea $<$ un orden total estricto sobre Σ. Note que $*^{\prec}|_{\#^{\prec}(\Sigma^*)}=M^{<}(P)$, lo cual ya que $\left|*^{\prec}|_{\#^{\prec}(\Sigma^*)}(x)\right|\leq x$

nos dice que $*^{\prec}|_{\#^{\prec}(\Sigma^*)}$ es Σ-p.r. (Lema 47). $\Box$

Lemma 50: Supongamos $\Gamma\neq\varnothing$ y sea $<$ un orden total estricto sobre Γ. Dada h una funcion Γ-mixta, son equivalentes (1) h es Γ-recursiva (resp. Γ-p.r.) (2) $h^{\#^{<}}$ es $\varnothing$-recursiva (resp. $\varnothing$-p.r.)

Proof: (2)$\Rightarrow$(1). Supongamos $h:D_h\subseteq\omega^n\times\Gamma^{*m}\rightarrow\Gamma^*$. Ya que $h^{\#^{<}}$ es Γ -recursiva (resp. Γ-p.r.) y

$h=*^{<}\circ h^{\#^{<}}\circ(p_1^{n,m},...,p_n^{n,m},\#^{<}\circ p_{n+1}^{n,m},...,\#^{<}\circ p_{n+m}^{n,m})$,

tenemos que h es Γ-recursiva (resp. Γ-p.r.). (1)$\Rightarrow$(2). Probaremos por induccion en k que

(*) Si $h\in\mathrm{R}_k^{\Gamma}$ (resp. $h\in\mathrm{PR}_k^{\Gamma}$), entonces $h^{\#^{<}}$ es $\varnothing$-recursiva (resp. $\varnothing$-p.r.). El caso $k=0$ es facil y dejado al lector. Supongamos (*) vale para un k fijo. Veremos que vale para $k+1$. Sea $h\in\mathrm{R}_{k+1}^{\Gamma}$ (resp. $h\in\mathrm{PR}_{k+1}^{\Gamma}$). Hay varios casos

Caso 1. Supongamos $h=f\circ(f_1,...,f_n)$, con $f,f_1,...,f_n\in\mathrm{R}_k^{\Gamma}$ (resp. $f,f_1,...,f_n\in\mathrm{PR}_k^{\Gamma}$). Por hipotesis inductiva tenemos que $f^{\#^{<}},f_1^{\#^{<}},...,f_n^{\#^{<}}$ son $\varnothing$-recursivas (resp. $\varnothing$ -p.r.). Ya que $h^{\#^{<}}=f^{\#^{<}}\circ\left(f_1^{\#^{<}},...,f_n^{\#^{<}}\right)$, tenemos que $h^{\#^{<}}$ es $\varnothing$-recursiva (resp. $\varnothing$-p.r.).

Caso 2. Supongamos $h=M(P)$, con $P:\omega\times\omega^n\times\Gamma^{*m}\rightarrow\omega$, un predicado en R_k^{Γ}. Ya que $h^{\#^{<}}=M(P^{\#^{<}})$, tenemos que $h^{\#^{<}}$ es $\varnothing$ -recursiva.

Caso 3. Supongamos $h=R(f,\mathcal{G})$, con

$$\begin{array}{rcl} f & : & \omega^n \times \Gamma^{*m} \to \Gamma^* \\ \mathcal{G}_a & : & \omega^n \times \Gamma^{*m} \times \Gamma^* \times \Gamma^* \to \Gamma^*,\ a \in \Gamma \end{array}$$

funciones en R_k^Γ (resp. PR_k^Γ). Sea $\Gamma = \{a_1, ..., a_r\}$, con $a_1 < a_2 < ... < a_r$. Por hipotesis inductiva tenemos que $f^{\#^<}$ y cada $\mathcal{G}_a^{\#^<}$ son $\varnothing$-recursivas (resp. $\varnothing$-p.r.). Sea $\begin{array}{rcl} i_0 : \omega & \to & \omega \\ x & \to & \left\{ \begin{array}{ll} r & \text{si } r \text{ divide } x \\ R(x,r) & \text{caso contrar} \end{array} \right. \end{array}$

y sea $B = \lambda x \left[Q(x \dot{-} i_0(x), r) \right]$

(R y Q son definidas en el Lema 44). Note que i_0 y B son $\varnothing$-p.r. y que $*^<(x) = *^<(B(x)) a_{i_0(x)}$, para $x \geq 1$

(ver Lema 6). Tambien tenemos

$$\begin{array}{rcl} h^{\#^<}(\vec{x}, \vec{y}, t+1) & = & \#^<(h(\vec{x}, *^<(\vec{y}), *^<(t+1))) \\ & = & \#^<(h(\vec{x}, *^<(\vec{y}), *^<(B(t+1)) a_{i_0(t+1)})) \\ & = & \#^< \left(\mathcal{G}_{a_{i_0(t+1)}}(\vec{x}, *^<(\vec{y}), *^<(B(t+1)), h(\vec{x}, *^<(\vec{y}), * \right. \\ & = & \#^< \left(\mathcal{G}_{a_{i_0(t+1)}}(\vec{x}, *^<(\vec{y}), *^<(B(t+1)), *^<(h^{\#^<}(\vec{x}, \vec{y}, \right. \\ & = & \mathcal{G}^{\#^<}_{a_{i_0(t+1)}}(\vec{x}, \vec{y}, B(t+1), h^{\#^<}(\vec{x}, \vec{y}, B(t+1))) \end{array}$$

y ya que $B(t{+}1) < t{+}1$, tenemos que (**) $h^{\#^<}(\vec{x}, \vec{y}, t{+}1) = \mathcal{G}^{\#^<}_{a_{i_0(t+1)}}(\vec{x}, \vec{y}, B(t{+}1), \left\langle h^{\#^<}(\vec{x}, \vec{y}, 0), ..., h^{\#^<}(\vec{x} \right.$

A continuacion definamos

$H = \lambda t\vec{x}\vec{y} \left[\left\langle h^{\#^<}(\vec{x}, \vec{y}, 0), ..., h^{\#^<}(\vec{x}, \vec{y}, t) \right\rangle \right]$

Por (**) tenemos que

$$\begin{array}{rcl} H(0, \vec{x}, \vec{y}) & = & \left\langle h^{\#^<}(\vec{x}, \vec{y}, 0) \right\rangle = \left\langle f^{\#^<}(\vec{x}, \vec{y}) \right\rangle = 2^{f^{\#^<}(\vec{x}, \vec{y})} \\ H(t+1, \vec{x}, \vec{y}) & = & \left((H(t, \vec{x}, \vec{y}) + 1).pr(t+2)^{\mathcal{G}^{\#^<}_{a_{i_0(t+1)}}(\vec{x}, \vec{y}, B(t+1), (H(t, \vec{x}, \vec{y}))_{B(t+1)})} \right) \end{array}$$

O sea que si definimos $g : \omega \times \omega \times \omega^n \times \omega^m \to \omega$ por $g(z, t, \vec{x}, \vec{y}) = \left\{ \begin{array}{l} \left((z+1).pr(t+2)^{\mathcal{G}^{\#^<}_{a_1}(\vec{x}, \vec{y}, B(t+1), (z)_{B(t+1}} \right. \\ \vdots \\ \left((z+1).pr(t+2)^{\mathcal{G}^{\#^<}_{a_r}(\vec{x}, \vec{y}, B(t+1), (z)_{B(t+1}} \right. \end{array} \right.$

tenemos que $H = R(\lambda x \left[2^x \right] \circ f^{\#^<}, g)$. Note que g es $\varnothing$-recursiva (resp. $\varnothing$-p.r.), ya que $g = f_1(z, t, \vec{x}, \vec{y}) P_1(z, t, \vec{x}, \vec{y}) + ... + f_r(z, t, \vec{x}, \vec{y}) P_r(z, t, \vec{x}, \vec{y})$,

con $\begin{array}{rcl} f_i & = & \lambda zt\vec{x}\vec{y} \left[\left((z+1).pr(t+2)^{\mathcal{G}^{\#^<}_{a_i}(\vec{x}, \vec{y}, B(t+1), (z)_{B(t+1)})} \right) \right] \\ P_i & = & \lambda zt\vec{x}\vec{y} \left[i_0(t+1) = i \right] \end{array}$

y estas funciones son totales y $\varnothing$-recursivas (resp. $\varnothing$ -p.r.). O sea que H es $\varnothing$-recursiva (resp. $\varnothing$-p.r.) y por lo tanto lo es $h^{\#^<} = \lambda \vec{x}\vec{y}t \left[(H(t, \vec{x}, \vec{y}))_{t+1} \right]$

Los otros casos en los cuales h es obtenida por recursion primitiva son similares. $\square$

Theorem 51: Sean Σ y Γ alfabetos cualesquiera. (a) Supongamos una funcion f es Σ-mixta y Γ-mixta, entonces f es Σ-recursiva (resp. Σ-p.r.) sii f es Γ-recursiva (resp. Γ-p.r.). (b) Supongamos un conjunto S es Σ-mixto y Γ-mixto, entonces S es Σ-p.r. sii S es Γ-p.r..

Proof: (a) Ya que f es $(\Sigma \cap \Gamma)$-mixta, podemos suponer sin perdida de generalidad que $\Sigma \subseteq \Gamma$. Primero haremos el caso en que $\Sigma = \varnothing$ y $\Gamma \neq \varnothing$. Sea $<$ un orden total estricto sobre Γ. Ya que f es $\varnothing$-mixta, tenemos $f = f^{\#^<}$ y por lo tanto podemos aplicar el lema anterior.

Supongamos ahora que $\Sigma \neq \varnothing$. O sea que $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, con $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$. Haremos el caso $O = \Sigma^*$. Supongamos f es Σ -recursiva (resp. Σ-p.r.). Sea $\prec$ un orden total estricto sobre Γ. Ya que las funciones $\#^\prec|_{\Sigma^*}$ y $*^\prec|_{\#^\prec(\Sigma^*)}$ son Σ-p.r. (Lema 49) y

$$\begin{array}{rcl} f^{\#^\prec} & = & \#^\prec \circ f \circ \left(p_1^{n+m,0}, ..., p_n^{n+m,0}, *^\prec \circ p_{n+1}^{n+m,0}, ..., *^\prec \circ p_{n+m}^{n+m,0} \right) \\ & = & \#^\prec|_{\Sigma^*} \circ f \circ \left(p_1^{n+m,0}, ..., p_n^{n+m,0}, *^\prec|_{\#^\prec(\Sigma^*)} \circ p_{n+1}^{n+m,0}, ..., *^\prec|_{\#^\prec(\Sigma^*)} \circ p_{n+m}^{n+m,0} \right) \end{array}$$

tenemos que $f^{\#^\prec}$ es Σ-recursiva (resp. Σ-p.r.). O sea que por el caso ya probado de (a), $f^{\#^\prec}$ es $\varnothing$ -recursiva (resp. $\varnothing$-p.r.) lo cual por el lema anterior nos dice que f es Γ-recursiva (resp. Γ-p.r.). Supongamos ahora que f es Γ-recursiva (resp. Γ-p.r.). Sea $<$ un orden total estricto sobre Σ. Ya que $\#^<$ y $*^<$ son Γ-p.r. (Lema 49), la funcion

$$f^{\#^<} = \#^< \circ f \circ \left(p_1^{n+m,0}, ..., p_n^{n+m,0}, *^< \circ p_{n+1}^{n+m,0}, ..., *^< \circ p_{n+m}^{n+m,0}\right)$$

es Γ-recursiva (resp. Γ-p.r.). Por el caso ya probado de (a), $f^{\#^<}$ es $\varnothing$-recursiva (resp. $\varnothing$-p.r.), lo cual por el lema anterior nos dice que f es Σ-recursiva (resp. Σ-p.r.). (b) es dejado al lector (use (a)). $\square$

0.4. El lenguaje S^{Σ}

Lemma 52: Se tiene que: (a) Si $I_1...I_n = J_1...J_m$, con $I_1, ..., I_n, J_1, ..., J_m \in \mathrm{Ins}^{\Sigma}$, entonces $n = m$ y $I_j = J_j$ para cada $j \geq 1$. (b) Si $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$, entonces existe una unica sucesion de instrucciones $I_1, ..., I_n$ tal que $\mathcal{P} = I_1...I_n$

Proof: (a) Supongamos I_n es un tramo final propio de J_m. Notar que entonces $n > 1$. Es facil ver que entonces ya sea $J_m = \mathrm{L}\bar{u}I_n$ para algun $u \in \mathbf{N}$, o I_n es de la forma GOTO L$\bar{n}$ y J_m es de la forma wIF P$\bar{k}$ BEGINS a GOTO L$\bar{n}$ donde $w \in \{\mathrm{L}\bar{n} : n \in \mathbf{N}\} \cup \{\varepsilon\}$. El segundo caso no puede darse porque entonces el anteultimo simbolo de I_{n-1} deberia ser S lo cual no sucede para ninguna instruccion. O sea que

$I_1...I_n = J_1...J_{m-1}\mathrm{L}\bar{u}I_n$

lo cual dice que (*) $I_1...I_{n-1} = J_1...J_{m-1}\mathrm{L}\bar{u}$. Es decir que L$\bar{u}$ es tramo final de I_{n-1} y por lo tanto GOTO L$\bar{u}$ es tramo final de I_{n-1}. Por (*), GOTO es tramo final de $J_1...J_{m-1}$, lo cual es impossible. Hemos llegado a una contradiccion lo cual nos dice que I_n no es un tramo final propio de J_m. Por simetria tenemos que $I_n = J_m$, lo cual usando un razonamiento inductivo nos dice que $n = m$ y $I_j = J_j$ para cada $j \geq 1$.

(b) Es consecuencia directa de (a). □

Theorem 53: Si f es Σ-computable, entonces f es Σ-efectivamente computable.

Proof: Supongamos por ejemplo que $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ es computada por $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$. Es claro que el procedimiento que consiste en realizar las sucesivas instrucciones de $\mathcal{P}$ (partiendo de $((x_1, ..., x_n, 0, 0, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \varepsilon, \varepsilon, ...)))$ y eventualmente terminar en caso de que nos toque realizar la instruccion $n(\mathcal{P}) + 1$, y dar como salida el contenido de la variable N1 , es un procedimiento efectivo que computa a f. □

Proposition 54:

(a) Sea $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ una funcion Σ-computable. Entonces hay un macro $[\mathrm{V}\overline{n+1} \leftarrow f(\mathrm{V}1, ..., \mathrm{V}\bar{n}, \mathrm{W}1, ..., \mathrm{W}\bar{m})]$ (b) Sea $f : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$ una funcion Σ-computable. Entonces hay un macro $[\mathrm{W}\overline{m+1} \leftarrow f(\mathrm{V}1, ..., \mathrm{V}\bar{n}, \mathrm{W}1, ..., \mathrm{W}\bar{m})]$

Proof: (b) Sea $\mathcal{P}$ un programa que compute a f. Tomemos un k tal que $k \geq n, m$ y tal que todas las variables y labels de $\mathcal{P}$ estan en el conjunto

$\{\mathrm{N}1, ..., \mathrm{N}\bar{k}, \mathrm{P}1, ..., \mathrm{P}\bar{k}, \mathrm{L}1, ..., \mathrm{L}\bar{k}\}$.

Sea $\mathcal{P}'$ la palabra que resulta de reemplazar en $\mathcal{P}$: - la variable N$\bar{j}$ por V$\overline{n+j}$, para cada $j = 1, ..., k$ - la variable P$\bar{j}$ por W$\overline{m+j}$, para cada $j = 1, ..., k$ - el label L$\bar{j}$ por A$\bar{j}$, para cada $j = 1, ..., k$ Notese que

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{V}\overline{n+1} \leftarrow \mathrm{V}1 \\
\quad\vdots \\
\mathrm{V}\overline{n+n} \leftarrow \mathrm{V}\bar{n} \\
\mathrm{V}\overline{n+n+1} \leftarrow 0 \\
\quad\vdots \\
\mathrm{V}\overline{n+k} \leftarrow 0 \\
\mathrm{W}\overline{m+1} \leftarrow \mathrm{W}1 \\
\quad\vdots \\
\mathrm{W}\overline{m+m} \leftarrow \mathrm{W}\bar{m} \\
\mathrm{W}\overline{m+m+1} \leftarrow \varepsilon \\
\quad\vdots \\
\mathrm{W}\overline{m+k} \leftarrow \varepsilon \\
\mathcal{P}'
\end{array}
$$

es el macro buscado, el cual tendra sus variables auxiliares y labels en la lista $\mathrm{V}\overline{n+1}, ..., \mathrm{V}\overline{n+k}, \mathrm{W}\overline{m+2}$

□

Proposition 55: Sea $P : S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ un predicado Σ-computable. Entonces hay un macro [IF P(V1, ..., V$\bar{n}$, W1, ..., W$\bar{m}$) GOTO A1]

Theorem 56: Si h es Σ-recursiva, entonces h es Σ -computable.

Proof: Probaremos por induccion en k que

(*) Si $h \in \mathrm{R}_k^\Sigma$, entonces h es Σ -computable. El caso $k = 0$ es dejado al lector. Supongamos (*) vale para k, veremos que vale para $k+1$. Sea $h \in \mathrm{R}_{k+1}^\Sigma - \mathrm{R}_k^\Sigma$. Hay varios casos

Caso 1. Supongamos $h = M(P)$, con $P : \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$, un predicado perteneciente a R_k^Σ. Por hipotesis inductiva, P es Σ- computable y por lo tanto tenemos un macro

[IF P(V1, ..., V$\overline{n+1}$, W1, ..., W$\bar{m}$) GOTO A1]

lo cual nos permite realizar el siguiente programa

```
L2  IF P(N‾n+1, N1, ..., Nn̄, P1, ..., Pm̄) GOTO L1
    N‾n+1 ← N‾n+1 + 1
    GOTO L2
L1  N1 ← N‾n+1
```

Es facil chequear que este programa computa h. Caso 2. Supongamos $h = R(f, \mathcal{G})$, con

$f \ : \ S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \Sigma^*$

$\mathcal{G}_a \ : \ S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \times \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$, $a \in \Sigma$

elementos de R_k^Σ. Sea $\Sigma = \{a_1, ..., a_r\}$. Por hipotesis inductiva, las funciones f, $\mathcal{G}_a$, $a \in \Sigma$, son Σ-computables y por lo tanto podemos hacer el siguiente programa via el uso de macros

```
        [P‾m+3 ← f(N1, ..., Nn̄, P1, ..., Pm̄)]
L‾r+1   IF P‾m+1  BEGINS a1 GOTO L1
                ⋮
        IF P‾m+1 BEGINS ar GOTO Lr̄
        GOTO L‾r+2
L1      P‾m+1 ← ⌒P‾m+1
        [P‾m+3 ← G_a1(N1, ..., Nn̄, P1, ..., Pm̄, P‾m+2, P‾m+3)]
        P‾m+2 ← P‾m+2 a1
        GOTO L‾r+1
                ⋮
Lr̄      P‾m+1 ← ⌒P‾m+1
        P‾m+3 ← G_ar(N1, ..., Nn̄, P1, ..., Pm̄, P‾m+2, P‾m+3)
        P‾m+2 ← P‾m+2 ar
        GOTO L‾r+1
L‾r+2   P1 ← P‾m+3
```

Es facil chequear que este programa computa h. El resto de los casos son dejados al lector.

□

Lemma 57: Sea Σ un alfabeto cualquiera. Las funciones S y $\_$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r..

Proof: Use el Teorema 51. □

Lemma 58: Para cada $n, x \in \omega$, tenemos que $|\bar{n}| \leq x$ si y solo si $n \leq 10^x - 1$

Lemma 59: Ins^Σ es un conjunto $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r..

Proof: Para simplificar la Proof asumiremos que $\Sigma = \{@, \&\}$. Ya que Ins^Σ es union de los siguientes conjuntos

$$\begin{array}{rcl} L_1 & = & \left\{\text{N}\bar{k} \leftarrow \text{N}\bar{k}+1 : k \in \mathbf{N}\right\} \\ L_2 & = & \left\{\text{N}\bar{k} \leftarrow \text{N}\bar{k}\dot{-}1 : k \in \mathbf{N}\right\} \\ L_3 & = & \left\{\text{N}\bar{k} \leftarrow \text{N}\bar{n} : k,n \in \mathbf{N}\right\} \\ L_4 & = & \left\{\text{N}\bar{k} \leftarrow 0 : k \in \mathbf{N}\right\} \\ L_5 & = & \left\{\text{IF N}\bar{k} \neq 0 \text{ GOTO L}\bar{m} : k,m \in \mathbf{N}\right\} \\ L_6 & = & \left\{\text{P}\bar{k} \leftarrow \text{P}\bar{k}.@ : k \in \mathbf{N}\right\} \\ L_7 & = & \left\{\text{P}\bar{k} \leftarrow \text{P}\bar{k}.\& : k \in \mathbf{N}\right\} \\ L_8 & = & \left\{\text{P}\bar{k} \leftarrow {}^{\frown}\text{P}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\right\} \\ L_9 & = & \left\{\text{P}\bar{k} \leftarrow \text{P}\bar{n} : k,n \in \mathbf{N}\right\} \\ L_9 & = & \left\{\text{P}\bar{k} \leftarrow \varepsilon : k \in \mathbf{N}\right\} \\ L_{10} & = & \left\{\text{IF P}\bar{k} \text{ BEGINS @ GOTO L}\bar{m} : k,m \in \mathbf{N}\right\} \\ L_{11} & = & \left\{\text{IF P}\bar{k} \text{ BEGINS \& GOTO L}\bar{m} : k,m \in \mathbf{N}\right\} \\ L_{12} & = & \{\text{GOTO L}\bar{m} : m \in \mathbf{N}\} \\ L_{13} & = & \{\text{SKIP}\} \\ L_{14} & = & \left\{\text{L}\bar{k}\alpha : k \in \mathbf{N} \text{ y } \alpha \in L_1 \cup ... \cup L_{13}\right\} \end{array}$$

solo debemos probar que $L_1, ..., L_{14}$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r.. Veremos primero por ejemplo que $L_{10} = \left\{\text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m} : k,m \in \mathbf{N}\right\}$

es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Primero notese que $\alpha \in L_{10}$ si y solo si existen $k,m \in \mathbf{N}$ tales que $\alpha = \text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m}$

Mas formalmente tenemos que $\alpha \in L_{10}$ si y solo si $(\exists k \in \mathbf{N})(\exists m \in \mathbf{N})\ \alpha = \text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m}$

Ya que cuando existen tales k,m tenemos que $\bar{k}$ y $\bar{m}$ son subpalabras de α, el lema anterior nos dice que $\alpha \in L_{10}$ si y solo si $(\exists k \in \mathbf{N})_{k \leq 10^{|\alpha|}}(\exists m \in \mathbf{N})_{m \leq 10^{|\alpha|}}\ \alpha = \text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m}$

Sea $P = \lambda mk\alpha \left[\alpha = \text{IFP}\bar{k}\text{BEGINS@GOTOL}\bar{m}\right]$

Ya que $D_{\lambda k[\bar{k}]} = \omega$, tenemos que $D_P = \omega \times (\Sigma \cup \Sigma_p)^* \times (\Sigma \cup \Sigma_p)^*$. Notese que $P = \lambda\alpha\beta\,[\alpha = \beta] \circ \left(p_3^{2,1}, f\right)$

donde $f = \lambda\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\,[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4] \circ \left(C_{\text{IFP}}^{2,1}, \lambda k\left[\bar{k}\right] \circ p_2^{2,1}, C_{\text{BEGINS@GOTOL}}^{2,1}, \lambda k\left[\bar{k}\right] \circ p_1^{2,1}\right)$

lo cual nos dice que P es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Notese que

$\chi_{L_{10}} = \lambda\alpha\left[(\exists k \in \mathbf{N})_{k \leq 10^{|\alpha|}}(\exists m \in \mathbf{N})_{m \leq 10^{|\alpha|}}\ P(m,k,\alpha)\right]$

Esto nos dice que podemos usar dos veces el Lema 39 para ver que $\chi_{L_{10}}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Veamos como. Sea $Q = \lambda k\alpha\left[(\exists m \in \mathbf{N})_{m \leq 10^{|\alpha|}}\ P(m,k,\alpha)\right]$

Por el Lema 39 tenemos que $\lambda xk\alpha\,[(\exists m \in \mathbf{N})_{m \leq x}\ P(m,k,\alpha)]$

es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r. lo cual nos dice que $Q = \lambda xk\alpha\,[(\exists m \in \mathbf{N})_{m \leq x}\ P(m,k,\alpha)] \circ (\lambda\alpha\left[10^{|\alpha|}\right] \circ p_2^{1,1}, p_1^{1,1}, p_2^{1,1})$

lo es. Ya que $\chi_{L_{10}} = \lambda\alpha\left[(\exists k \in \mathbf{N})_{k \leq 10^{|\alpha|}}\ Q(k,\alpha)\right]$

podemos en forma similar aplicar el Lema 39 y obtener finalmente que $\chi_{L_{10}}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. En forma similar podemos probar que $L_1, ..., L_{13}$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Esto nos dice que $L_1 \cup ... \cup L_{13}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Notese que $L_1 \cup ... \cup L_{13}$ es el conjunto de las instrucciones basicas de $\mathcal{S}^\Sigma$. Llamemos InsBas^Σ a dicho conjunto. Para ver que L_{14} es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r. notemos que

$\chi_{L_{14}} = \lambda\alpha\left[(\exists k \in \mathbf{N})_{k \leq 10^{|\alpha|}}(\exists \beta \in \text{InsBas}^\Sigma)_{|\beta| \leq |\alpha|}\ \alpha = \text{L}\bar{k}\beta\right]$

lo cual nos dice que aplicando dos veces el Lema 39 obtenemos que $\chi_{L_{14}}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Ya que $\text{Ins}^\Sigma = \text{InsBas}^\Sigma \cup L_{14}$ tenemos que Ins^Σ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. $\square$

Lemma 60: *Bas* y *Lab* son funciones $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.

Proof: Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Sigma \cup \Sigma_p$. Sea $L = \{\text{L}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\} \cup \{\varepsilon\}$. Dejamos al lector probar que L es un conjunto $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Sea

$P=\lambda I\alpha\left[\alpha\in\mathrm{Ins}^{\Sigma}\wedge I\in\mathrm{Ins}^{\Sigma}\wedge[\alpha]_1\neq\mathrm{L}\wedge(\exists\beta\in L)\ I=\beta\alpha\right]$

Note que $D_P=(\Sigma\cup\Sigma_p)^{*2}$. Dejamos al lector probar que P es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. Notese ademas que cuando $I\in\mathrm{Ins}^{\Sigma}$ tenemos que $P(I,\alpha)=1$ sii $\alpha=Bas(I)$. Dejamos al lector probar que $Bas=M^{<}(P)$ por lo que para ver que Bas es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r., solo nos falta ver que la funcion Bas es acotada por alguna funcion $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r. y $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-total. Pero esto es trivial ya que $|Bas(I)|\leq|I|=p_1^{0,1}(I)$ para cada $I\in\mathrm{Ins}^{\Sigma}$. Finalmente note que

$Lab=M^{<}\left(\lambda I\alpha\left[\alpha Bas(I)=I\right]\right)$

lo cual nos dice que Lab es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. $\Box$ Recordemos que dado un programa $\mathcal{P}$ habiamos definido $I_i^{\mathcal{P}}=\varepsilon$, para $i=0$ o $i>n(\mathcal{P})$. O sea que la funcion $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-mixta $\lambda i\mathcal{P}\left[I_i^{\mathcal{P}}\right]$ tiene dominio igual a $\omega\times\mathrm{Pro}^{\Sigma}$.

Lemma 61: (a) Pro^{Σ} es un conjunto $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r. (b) $\lambda\mathcal{P}\left[n(\mathcal{P})\right]$ y $\lambda i\mathcal{P}\left[I_i^{\mathcal{P}}\right]$ son funciones $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r..

Proof: Ya que $\mathrm{Pro}^{\Sigma}=D_{\lambda\mathcal{P}[n(\mathcal{P})]}$ tenemos que (b) implica (a). Para probar (b) sea $<$ un orden total estricto sobre $\Sigma\cup\Sigma_p$. Sea P el siguiente predicado

$\lambda x\left[Lt(x)>0\wedge(\forall t\in\mathbf{N})_{t\leq Lt(x)}\ \ast^{<}((x)_t)\in\mathrm{Ins}^{\Sigma}\wedge\right.$ $(\forall t\in\mathbf{N})_{t\leq Lt(x)}(\forall m\in$ $\mathbf{N})\ \neg(\mathrm{L}\bar{m}$ t-final $\ast^{<}((x)_t))\vee$ $(\exists j\in\mathbf{N})_{j\leq Lt(x)}(\exists\alpha\in(\Sigma\cup\Sigma_p)-Num)$ $\mathrm{L}\bar{m}\alpha$ t-

Notese que $D_P=\mathbf{N}$ y que $P(x)=1$ sii $Lt(x)>0$, $\ast^{<}((x)_t)\in\mathrm{Ins}^{\Sigma}$, para cada $t=1,...,Lt(x)$ y ademas $\subset_{t=1}^{t=Lt(x)}\ast^{<}((x)_t)\in\mathrm{Pro}^{\Sigma}$. Para ver que P es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r. solo nos falta acotar el cuantificador $(\forall m\in\mathbf{N})$ de la expresion lambda que define a P. Ya que nos interesan los valores de m para los cuales $\bar{m}$ es posiblemente una subpalabra de alguna de las palabras $\ast^{<}((x)_j)$, el Lema 58 nos dice que una cota posible es $10^{\max\{|\ast^{<}((x)_j)|:1\leq j\leq Lt(x)\}}-1$. Dejamos al lector los detalles de la Proof de que P es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. Sea

$Q=\lambda x\alpha\left[P(x)\wedge\alpha=\subset_{t=1}^{t=Lt(x)}\ast^{<}((x)_t)\right]$.

Note que $D_Q=\mathbf{N}\times(\Sigma\cup\Sigma_p)^{*}$. Claramente Q es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. Ademas note que $D_{M(Q)}=\mathrm{Pro}^{\Sigma}$. Notese que para $\mathcal{P}\in\mathrm{Pro}^{\Sigma}$, tenemos que $M(Q)(\mathcal{P})$ es aquel numero tal que pensado como infinitupla (via mirar su secuencia de exponentes) codifica la secuencia de instrucciones que forman a $\mathcal{P}$. Es decir $M(Q)(\mathcal{P})=\left\langle\#^{<}(I_1^{\mathcal{P}}),\#^{<}(I_2^{\mathcal{P}}),...,\#^{<}(I_{n(\mathcal{P})}^{\mathcal{P}}),0,0,...\right\rangle$

Por (b) del Lema 43, $M(Q)$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$ -p.r. ya que para cada $\mathcal{P}\in\mathrm{Pro}^{\Sigma}$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl}M(Q)(\mathcal{P}) & = & \left\langle\#^{<}(I_1^{\mathcal{P}}),\#^{<}(I_2^{\mathcal{P}}),...,\#^{<}(I_{n(\mathcal{P})}^{\mathcal{P}}),0,0,...\right\rangle\\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n(\mathcal{P})}pr(i)^{\#^{<}(I_1^{\mathcal{P}})}\\ & \leq & \prod\limits_{i=1}^{|\mathcal{P}|}pr(i)^{\#^{<}(\mathcal{P})}\end{array}$$

Ademas tenemos que $\begin{array}{rcl}\lambda\mathcal{P}\left[n(\mathcal{P})\right] & = & \lambda x\left[Lt(x)\right]\circ M(Q)\\ \lambda i\mathcal{P}\left[I_i^{\mathcal{P}}\right] & = & \ast^{<}\circ g\circ\left(p_1^{1,1},M(Q)\circ p_2^{1,1}\right)\end{array}$

donde $g=C_0^{1,1}\mid_{\{0\}\times\omega}\cup\lambda ix\left[(x)_i\right]$, lo cual dice que $\lambda\mathcal{P}\left[n(\mathcal{P})\right]$ y $\lambda i\mathcal{P}\left[I_i^{\mathcal{P}}\right]$ son funciones $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. $\Box$

Lemma 62: Dado un orden total estricto $<$ sobre $\Sigma\cup\Sigma_p$, las funciones s, $S_{\#}$ y S_{*} son $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r..

Proof: Necesitaremos algunas funciones $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. Dada una instruccion I en la cual al menos ocurre una variable, usaremos $\#Var1(I)$ para denotar el numero de la primer variable que ocurre en I. Por ejemplo

$\#Var1\left(\mathrm{L}\bar{n}\text{ IF }\mathrm{N}\bar{k}\neq0\text{ GOTO }\mathrm{L}\bar{m}\right)=k$

Notese que $\lambda I[\#Var1(I)]$ tiene dominio igual a $\mathrm{Ins}^{\Sigma}-L$, donde L es la union de los siguientes conjuntos

$$\{\mathrm{GOTOL}\bar{m}:m\in\mathbf{N}\}\cup\{\mathrm{L}\bar{k}\mathrm{GOTOL}\bar{m}:k,m\in\mathbf{N}\}\ \{\mathrm{SKIP}\}\cup\{\mathrm{L}\bar{k}\mathrm{SKIP}:k\in\mathbf{N}\}$$

Dada una instruccion I en la cual ocurren dos variables, usaremos $\#Var2(I)$ para denotar el numero de la segunda variable que ocurre en I. Por ejemplo $\#Var2\left(\mathrm{N}\bar{k} \leftarrow \mathrm{N}\bar{m}\right) = m$

Notese que el dominio de $\lambda I[\#Var2(I)]$ es igual a la union de los siguientes conjuntos
$\{\mathrm{N}\bar{k} \leftarrow \mathrm{N}\bar{m} : k,m \in \mathbf{N}\} \cup \{\mathrm{L}\bar{j}\ \mathrm{N}\bar{k} \leftarrow \mathrm{N}\bar{m} : j,k,m \in \mathbf{N}\}$
$\{\mathrm{P}\bar{k} \leftarrow \mathrm{P}\bar{m} : k,m \in \mathbf{N}\} \cup \{\mathrm{L}\bar{j}\ \mathrm{P}\bar{k} \leftarrow \mathrm{P}\bar{m} : j,k,m \in \mathbf{N}\}$

Ademas notese que para una instruccion I tenemos que $\begin{array}{rcl} \#Var1(I) & = & \min_k(\mathrm{N}\bar{k}\leftarrow \text{ ocu } I \vee \mathrm{N}\bar{k}\neq \text{ ocu } I \\ \#Var2(I) & = & \min_k(\mathrm{N}\bar{k} \text{ t-final } I \vee \mathrm{N}\bar{k}+ \text{ ocu } I \end{array}$

Esto nos dice que si llamamos P al predicado $\lambda k\alpha\left[\alpha \in \mathrm{Ins}^{\Sigma} \wedge (\mathrm{N}\bar{k}\leftarrow \text{ ocu } \alpha \vee \mathrm{N}\bar{k}\neq \text{ ocu } \alpha \vee \mathrm{P}\bar{k}\leftarrow \text{ ocu } \alpha\right.$
entonces $\lambda I[\#Var1(I)] = M(P)$ por lo cual $\lambda I[\#Var1(I)]$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r. Similarmente se puede ver que $\lambda I[\#Var2(I)]$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. Sea $\begin{array}{rcl} F_{\dot{-}} : \mathbf{N}\times\mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ (x,j) & \rightarrow & \langle (x)_1,....,(x)_{j-1},(x)_j\dot{-}1,(x)_{j+1},...\rangle \end{array}$

Ya que $F_{\dot{-}}(x,j) = \left\{\begin{array}{ll} Q(x,pr(j)) & \text{si } pr(j) \text{ divide } x \\ x & \text{caso contrario} \end{array}\right.$

tenemos que $F_{\dot{-}}$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. Sea $\begin{array}{rcl} F_{+} : \mathbf{N}\times\mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ (x,j) & \rightarrow & \langle (x)_1,....,(x)_{j-1},(x)_j+1,(x)_{j+1},...\rangle \end{array}$

Ya que $F_+(x,j) = x.pr(j)$ tenemos que F_+ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. Sea $\begin{array}{rcl} F_{\leftarrow} : \mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ (x,j,k) & \rightarrow & \langle (x)_1,....,(x)_{j-1}, \end{array}$

Ya que $F_{\leftarrow}(x,j,k) = Q(x,pr(j)^{(x)_j}).pr(j)^{(x)_k}$ tenemos que $F_{\leftarrow}$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. Sea $\begin{array}{rcl} F_0 : \mathbf{N}\times\mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ (x,j) & \rightarrow & \langle (x \end{array}$

Es facil ver que F_0 es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. Para cada $a \in \Sigma$, sea $\begin{array}{rcl} F_a : \mathbf{N}\times\mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ (x,j) & \rightarrow & \langle (x)_1,....,(x)_{j-1},\#^{<}(*^{<}((x)_j) \end{array}$

Es facil ver que F_a es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. En forma similar puede ser probado que $\begin{array}{rcl} F_{\frown} : \mathbf{N}\times\mathbf{N} & \rightarrow & \omega \\ (x,j) & \rightarrow & \langle (x)_1,...., \end{array}$

es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r. Dado $(i,x,y,\mathcal{P}) \in \omega\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathrm{Pro}^{\Sigma}$, tenemos varios casos en los cuales los valores $s(i,x,y,\mathcal{P}), S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P})$ y $S_*(i,x,y,\mathcal{P})$ pueden ser obtenidos usando las funciones antes definidas:

(1) CASO $i = 0 \vee i > n(\mathcal{P})$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & i \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & x \\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & y \end{array}$

(2) CASO $(\exists j \in \omega)\ Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{j}{+}1$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & i+1 \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & F_+(x,\#Var1(I_i^{\mathcal{P}})) \\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & y \end{array}$

(3) CASO $(\exists j \in \omega)\ Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{j}\dot{-}1$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & i+1 \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & F_{\dot{-}}(x,\#Var1(I_i^{\mathcal{P}})) \\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & y \end{array}$

(4) CASO $(\exists j,k \in \omega)\ Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{k}$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & i+1 \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & F_{\leftarrow}(x,\#Var1(I_i^{\mathcal{P}}),\#Var2(I_i^{\mathcal{P}} \\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & y \end{array}$

(5) CASO $(\exists j,k \in \omega)\ Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow 0$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & i+1 \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & F_0(x,\#Var1(I_i^{\mathcal{P}})) \\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & y \end{array}$

(6) CASO $(\exists j,m \in \omega)\ \left(Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \text{IF } \mathrm{N}\bar{j} \neq 0 \text{ GOTO } \mathrm{L}\bar{m} \wedge (x)_j = 0\right)$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & i+ \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & x \\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & y \end{array}$

(7) CASO $(\exists j,m \in \omega)\ \left(Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \text{IF } \mathrm{N}\bar{j} \neq 0 \text{ GOTO } \mathrm{L}\bar{m} \wedge (x)_j \neq 0\right)$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & \text{mí} \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & x \\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & y \end{array}$

(8) CASO $(\exists j \in \omega)\ Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \mathrm{P}\bar{j}.a$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & i+1 \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & x \\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & F_a(y, \#Var1(I_i^{\mathcal{P}})) \end{array}$

(9) CASO $(\exists j \in \omega)\ Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow {}^\frown\mathrm{P}\bar{j}$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & i+1 \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & x \\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & F_{\frown}(y, \#Var1(I_i^{\mathcal{P}})) \end{array}$

(10) CASO $(\exists j,k \in \omega)\ Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \mathrm{P}\bar{k}$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & i+1 \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & x \\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & F_{\leftarrow}(y, \#Var1(I_i^{\mathcal{P}}), \#Var2(I_i \end{array}$

(11) CASO $(\exists j \in \omega)\ Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \varepsilon$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & i+1 \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & x \\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & F_0(y, \#Var1(I_i^{\mathcal{P}})) \end{array}$

(12) CASO $(\exists j,m \in \omega)(\exists a \in \Sigma)\ \left(Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \text{IF } \mathrm{P}\bar{j} \text{ BEGINS } a \text{ GOTO } \mathrm{L}\bar{m} \wedge [*^{<}((y)_j)]_1 \neq a\right)$.

Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & i+1 \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & x \\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & y \end{array}$

(13) CASO $(\exists j,m \in \omega)(\exists a \in \Sigma)\ \left(Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \text{IF } \mathrm{P}\bar{j} \text{ BEGINS } a \text{ GOTO } \mathrm{L}\bar{m} \wedge [*^{<}((y)_j)]_1 = a\right)$.

Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & \min_l \left(Lab(I_l^{\mathcal{P}}) \neq \varepsilon \wedge Lab(I_l^{\mathcal{P}}) \text{ t -final } I_i^{\mathcal{P}}\right) \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & x \\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & y \end{array}$

(14) CASO $(\exists j \in \omega)\ Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \text{GOTO } \mathrm{L}\bar{j}$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & \min_l \left(Lab(I_l^{\mathcal{P}}) \neq \varepsilon \wedge Lab(I_l^{\mathcal{P}}) \right. \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & x \\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & y \end{array}$

(15) CASO $Bas(I_i^{\mathcal{P}}) = \text{SKIP}$. Entonces $\begin{array}{rcl} s(i,x,y,\mathcal{P}) & = & k+1 \\ S_{\#}(i,x,y,\mathcal{P}) & = & x \\ S_*(i,x,y,\mathcal{P}) & = & y \end{array}$

O sea que los casos anteriores nos permiten definir conjuntos $S_1, ..., S_{15}$, los cuales son disjuntos de a pares y cuya union da el conjunto $\omega \times \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathrm{Pro}^{\Sigma}$, de manera que cada una de las funciones $s, S_{\#}$ y S_* pueden escribirse como union disjunta de funciones $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r. restrinjidas respectivamente a los conjuntos $S_1, ..., S_{15}$. Ya que los conjuntos $S_1, ..., S_{15}$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ -p.r. el Lema 35 nos dice que $s, S_{\#}$ y S_* lo son. □

Lemma 63: Sean: ... hacer!!

Proof: Hacer

Proposition 64: Sean $n, m \leq 0$, las funciones $i^{n,m}, E_{\#j}^{n,m}, j = 1, 2, ...$ son $\Sigma \cup \Sigma_p$-PR.

Proof: Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Sigma \cup \Sigma_p$ y sean $s, S_{\#}, S$ las funciones previamente definidas en el Lemma 62, definamos:

$$\begin{array}{rcl} C_{\#}^{n,m} & = & \lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\mathcal{P}\left[\left\langle E_{\#1}^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}), E_{\#2}^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}), ...\right\rangle\right] \\ C_*^{n,m} & = & \lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\mathcal{P}\left[\langle \#^{<}(E_{*1}^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P})), \#^{<}(E_{*2}^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P})), ...\rangle\right] \end{array}$$

Notese que

$$\begin{array}{rcl} i^{n,m}(0,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}) & = & 1 \\ C_{\#}^{n,m}(0,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}) & = & \langle x_1, ..., x_n\rangle \\ C_*^{n,m}(0,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}) & = & \langle \#^{<}(\alpha_1), ..., \#^{<}(\alpha_m)\rangle \\ i^{n,m}(t+1,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}) & = & s(i^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}), C_{\#}^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}), C_*^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P})) \\ C_{\#}^{n,m}(t+1,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}) & = & S_{\#}(i^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}), C_{\#}^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}), C_*^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P})) \\ C_*^{n,m}(t+1,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}) & = & S_*(i^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}), C_{\#}^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}), C_*^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P})) \end{array}$$

Por el Lema 63 tenemos que $i^{n,m}$, $C_{\#}^{n,m}$ y $C_*^{n,m}$ son $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-p.r.. Ademas notese que

$$\begin{array}{rcl} E_{\#j}^{n,m} & = & \lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\mathcal{P}\left[(C_{\#}^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}))_j\right] \\ E_{*j}^{n,m} & = & \lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\mathcal{P}\left[*^{<}((C_*^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}))_j)\right] \end{array}$$

por lo cual las funciones $E_{\#j}^{n,m}$, $E_{*j}^{n,m}$, $j=1,2,...$, son $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r. $\square$

Theorem 65: Las funciones $\Phi_{\#}^{n,m}$ y $\Phi_{*}^{n,m}$ son $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-recursivas.

Proof: Veremos que $\Phi_{\#}^{n,m}$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-recursiva. Sea H el predicado $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-mixto
$\lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\mathcal{P}\left[i^{n,m}(t,x_1,...,x_n,\alpha_1,...,\alpha_m,\mathcal{P})=n(\mathcal{P})+1\right]$.

Note que $D_H=\omega^{n+1}\times\Sigma^{*m}\times\text{Pro}^{\Sigma}$. Ya que the functiones $i^{n,m}$ y $\lambda\mathcal{P}\left[n(\mathcal{P})\right]$ son $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r., H lo es. Notar que $D_{M(H)}=D_{\Phi_{\#}^{n,m}}$. Ademas para $(\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P})\in D_{M(H)}$, tenemos que $M(H)(\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P})$ es la menor cantidad de pasos necesarios para que $\mathcal{P}$ termine partiendo del estado $((x_1,...,x_n,0,0,...),(\alpha_1,...,\alpha_m,\varepsilon,\varepsilon,...))$. Ya que H es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r., tenemos que $M(H)$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-r.. Notese que para $(\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P})\in D_{M(H)}=D_{\Phi_{\#}^{n,m}}$ tenemos que $\Phi_{\#}^{n,m}(\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P})=E_{\#1}^{n,m}\left(M(H)(\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}),\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}\right)$

lo cual con un poco mas de trabajo nos permite probar que $\Phi_{\#}^{n,m}=E_{\#1}^{n,m}\circ\Big(M(H),p_1^{n,m+1},...,p_{n+m+1}^{n,m+1}\Big)$

Ya que la funcion $E_{\#1}^{n,m}$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-r., lo es $\Phi_{\#}^{n,m}$. $\square$

Corollary 66: Si $f:D_f\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}\to O$ es Σ-computable, entonces f es Σ-recursiva.

Proof: Haremos el caso $O=\Sigma^*$. Sea $\mathcal{P}_0$ un programa que compute a f. Primero veremos que f es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$ -recursiva. Note que
$f=\Phi_{*}^{n,m}\circ\left(p_1^{n,m},...,p_{n+m}^{n,m},C_{\mathcal{P}_0}^{n,m}\right)$

donde cabe destacar que $p_1^{n,m},...,p_{n+m}^{n,m}$ son las proyecciones respecto del alfabeto $\Sigma\cup\Sigma_p$, es decir que tienen dominio $\omega^n\times(\Sigma\cup\Sigma_p)^{*m}$. Ya que $\Phi_{*}^{n,m}$ es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-recursiva tenemos que f lo es. O sea que el Teorema 51 nos dice que f es Σ -recursiva. $\square$

Tesis de Church: Toda funcion Σ-efectivamente computable es Σ-recursiva.

Corollary 67: Si $f:D_f\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}\to O$ es Σ-recursiva, entonces existe un predicado Σ-p.r. $P:\mathbf{N}\times\omega^n\times\Sigma^{*m}\to\omega$ y una funcion Σ-p.r. $g:\mathbf{N}\to O$ tales que $f=g\circ M(P)$.

Proof: Supongamos que $O=\Sigma^*$. Sea $\mathcal{P}_0$ un programa el cual compute a f. Sea $<$ un orden total estricto sobre Σ. Note que podemos tomar

$$\begin{aligned}P&=\lambda t\vec{x}\vec{\alpha}[i^{n,m}((t)_1,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}_0)=n(\mathcal{P}_0)+1\wedge(t)_2=\#^{<}(E_{*1}^{n,m}((t)_1,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}_0))]\\ g&=\lambda t\left[*^{<}((t)_2)\right].\end{aligned}$$

(Justifique por que P es Σ-p.r..) $\square$

Lemma 68: Supongamos $f_i:D_{f_i}\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}\to O$, $i=1,...,k$, son funciones Σ-recursivas tales que $D_{f_i}\cap D_{f_j}=\varnothing$ para $i\neq j$. Entonces la funcion $f_1\cup...\cup f_k$ es Σ-recursiva.

Proof: Probaremos el caso $k=2$ y $O=\Sigma^*$. Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ programas que computen las funciones f_1 y f_2, respectivamente. Sean

$$\begin{aligned}P_1&=\lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\left[i^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}_1)=n(\mathcal{P}_1)+1\right]\\ P_2&=\lambda t\vec{x}\vec{\alpha}\left[i^{n,m}(t,\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}_2)=n(\mathcal{P}_2)+1\right]\end{aligned}$$

Notese que $D_{P_1}=D_{P_2}=\omega\times\omega^n\times\Sigma^{*m}$ y que P_1 y P_2 son $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r.. Ya que son Σ-mixtos, el Teorema 51 nos dice que son Σ-p.r.. Tambien notese que $D_{M((P_1\vee P_2))}=D_{f_1}\cup D_{f_2}$. Definamos

$$\begin{aligned}g_1&=\lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[E_{*1}^{n,m}(M\left((P_1\vee P_2)\right)(\vec{x},\vec{\alpha}),\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}_1)^{P_i(M((P_1\vee P_2))(\vec{x},\vec{\alpha}),\vec{x},\vec{\alpha})}\right]\\ g_2&=\lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[E_{*1}^{n,m}(M\left((P_1\vee P_2)\right)(\vec{x},\vec{\alpha}),\vec{x},\vec{\alpha},\mathcal{P}_2)^{P_i(M((P_1\vee P_2))(\vec{x},\vec{\alpha}),\vec{x},\vec{\alpha})}\right]\end{aligned}$$

Notese que g_1 y g_2 son Σ-recursivas y que $D_{g_1}=D_{g_2}=D_{f_1}\cup D_{f_2}$, Ademas notese que

$$g_1(\vec{x},\vec{\alpha})=\begin{cases}f_1(\vec{x},\vec{\alpha})&\text{si }(\vec{x},\vec{\alpha})\in D_{f_1}\\ \varepsilon&\text{caso contrario}\end{cases}$$

$$g_2(\vec{x},\vec{\alpha})=\begin{cases}f_2(\vec{x},\vec{\alpha})&\text{si }(\vec{x},\vec{\alpha})\in D_{f_2}\\ \varepsilon&\text{caso contrario}\end{cases}$$

O sea que $f_1\cup f_2=\lambda\alpha\beta\left[\alpha\beta\right]\circ(g_1,g_2)$ es Σ-recursiva. $\square$

Lemma 69: Supongamos $\Sigma\supseteq\Sigma_p$. Entonces $Halt^{\Sigma}$ es no Σ-recursivo.

Proof: Supongamos $Halt^{\Sigma}$ es Σ-recursivo y por lo tanto Σ -computable. Por la proposicion de existencia de macros tenemos que hay un macro

$\left[\text{IF } Halt^{\Sigma}(\text{W1}) \text{ GOTO A1}\right]$

Sea $\mathcal{P}_0$ el siguiente programa de $\mathcal{S}^{\Sigma}$ L1 $\left[\text{IF } Halt^{\Sigma}(\text{P1}) \text{ GOTO L1}\right]$

Note que - $\mathcal{P}_0$ termina partiendo desde $((0,0,...),(\mathcal{P}_0,\varepsilon,\varepsilon,...))$ sii $Halt^{\Sigma}(\mathcal{P}_0)=0$, lo cual produce una contradiccion si tomamos en (*) $\mathcal{P}=\mathcal{P}_0$. □

Theorem 70: Sea $S\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}$. Entonces S es Σ-efectivamente enumerable sii S es Σ-recursivamente enumerable

Proof: ($\Rightarrow$) Use la Tesis de Church.

($\Leftarrow$) Use el Theorem 42. □

Theorem 71: Dado $S\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}$, son equivalentes (1) S es Σ-recursivamente enumerable (2) $S=I_F$, para alguna $F:D_F\subseteq\omega^k\times\Sigma^{*l}\to\omega^n\times\Sigma^{*m}$ tal que cada F_i es Σ-recursiva. (3) $S=D_f$, para alguna funcion Σ-recursiva f (4) $S=\varnothing$ o $S=I_F$, para alguna $F:\omega\to\omega^n\times\Sigma^{*m}$ tal que cada F_i es Σ-p.r.

Proof: (2)$\Rightarrow$(3). Para $i=1,...,n+m$, sea $\mathcal{P}_i$ un programa el cual computa a F_i y sea $<$ un orden total estricto sobre Σ. Sea $P:\mathbf{N}\times\omega^n\times\Sigma^{*m}\to\omega$ dado por $P(t,\vec{x},\vec{\alpha})=1$ sii se cumplen las siguientes condiciones

$$\begin{array}{rcl}
i^{k,l}(((t)_{k+l+1},(t)_1,...,(t)_k,*^{<}((t)_{k+1}),...,*^{<}((t)_{k+l})),\mathcal{P}_1) & = & n(\mathcal{P}_1)+1\\
 & & \vdots\\
i\,((t)_{k+l+1},(t)_1...(t)_k,*^{<}((t)_{k+1})...*^{<}((t)_{k+l})),\mathcal{P}_{n+m}) & = & n(\mathcal{P}_{n+m})+1\\
E_{\#1}^{k,l}((t)_{k+l+1},(t)_1,...,(t)_k,*^{<}((t)_{k+1}),...,*^{<}((t)_{k+l})),\mathcal{P}_1) & = & x_1\\
 & & \vdots\\
E_{\#1}^{k,l}((t)_{k+l+1},(t)_1,...,(t)_k,*^{<}((t)_{k+1}),...,*^{<}((t)_{k+l})),\mathcal{P}_n) & = & x_n\\
E_{*1}^{k,l}((t)_{k+l+1},(t)_1,...,(t)_k,*^{<}((t)_{k+1}),...,*^{<}((t)_{k+l})),\mathcal{P}_{n+1}) & = & \alpha_1\\
 & & \vdots\\
E_{*1}^{k,l}((t)_{k+l+1},(t)_1,...,(t)_k,*^{<}((t)_{k+1}),...,*^{<}((t)_{k+l})),\mathcal{P}_{n+m}) & = & \alpha_m
\end{array}$$

Note que P es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r. y por lo tanto P es Σ-p.r.. Pero entonces $M(P)$ es Σ-r. lo cual nos dice que se cumple (3) ya que $D_{M(P)}=I_F=S$. (3)$\Rightarrow$(4). Supongamos $S\neq\varnothing$. Sea $(z_1,...,z_n,\gamma_1,...,\gamma_m)\in S$ fijo. Sea $\mathcal{P}$ un programa el cual compute a f y sea $<$ un orden total estricto sobre Σ. Sea $P:\mathbf{N}\to\omega$ dado por $P(x)=1$ sii

$i^{n,m}\left((x)_{n+m+1},(x)_1,...,(x)_n,*^{<}((x)_{n+1}),...,*^{<}((x)_{n+m})),\mathcal{P}\right)=n(\mathcal{P})+1$

Es facil ver que P es $(\Sigma\cup\Sigma_p)$-p.r. por lo cual es Σ-p.r.. Sea $\bar{P}=P\cup C_0^{1,0}|_{\{0\}}$. Para $i=1,...,n$, definamos $F_i:\omega\to\omega$ de la siguiente manera $F_i(x)=\begin{cases}(x)_i & \text{si } \bar{P}(x)=1\\ z_i & \text{si } \bar{P}(x)\neq 1\end{cases}$

Para $i=n+1,...,n+m$, definamos $F_i:\omega\to\Sigma^*$ de la siguiente manera $F_i(x)=\begin{cases}*^{<}((x)_i) & \text{si } \bar{P}(x)=1\\ \gamma_{i-n} & \text{si } \bar{P}(x)\neq 1\end{cases}$

Por el lema de division por casos, cada F_i es Σ-p.r.. Es facil ver que $F=(F_1,...,F_{n+m})$ cumple (4). □

Corollary 72: Supongamos $f:D_f\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}\to O$ es Σ-recursiva y $S\subseteq D_f$ es Σ-r.e., entonces $f|_S$ es Σ-recursiva.

Proof: Supongamos $O=\Sigma^*$. Por el Theorem anterior $S=D_g$, para alguna funcion Σ-recursiva g. Notese que componiendo adecuadamente podemos suponer que $I_g=\{\varepsilon\}$. O sea que tenemos $f|_S=\lambda\alpha\beta\,[\alpha\beta]\circ(f,g)$. □

Corollary 73: Supongamos $f:D_f\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}\to O$ es Σ-recursiva y $S\subseteq I_f$ es Σ-r.e., entonces $f^{-1}(S)=\{(\vec{x},\vec{\alpha}):f(\vec{x},\vec{\alpha})\in S\}$ es Σ-r.e..

Proof: Por el Theorem anterior $S=D_g$, para alguna funcion Σ-recursiva g. O sea que $f^{-1}(S)=D_{g\circ f}$ es Σ-r.e.. □

Corollary 74: Supongamos $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ-r.e.. Entonces $S_1 \cap S_2$ es Σ-r.e..

Proof: Por el Theorem anterior $S_i = D_{g_i}$, con g_1, g_2 funciones Σ-recursivas. Notese que podemos suponer que $I_{g_1}, I_{g_2} \subseteq \omega$ por lo que $S_1 \cap S_2 = D_{\lambda xy[xy] \circ (g_1, g_2)}$ es Σ-r.e.. $\Box$

Corollary 75: Supongamos $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ-r.e.. Entonces $S_1 \cup S_2$ es Σ-r.e.

Proof: Supongamos $S_1 \neq \varnothing \neq S_2$. Sean $F, G : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tales que $I_F = S_1$, $I_G = S_2$ y las funciones $F_i's$ y $G_i's$ son Σ-recursivas. Sean $f = \lambda x \left[Q(x, 2)\right]$ y $g = \lambda x \left[Q(x \dot{-} 1, 2)\right]$. Sea $H : \omega \rightarrow \omega^n \times \Sigma^{*m}$ dada por

$H_i = (F_i \circ f)|_{\{x:x \text{ es par}\}} \cup (G_i \circ g)|_{\{x:x \text{ es impar}\}}$

Por el Corollary 72 y el Lema 68, cada H_i es Σ-recursiva. Ya que $I_H = S_1 \cup S_2$.tenemos que $S_1 \cup S_2$ es Σ-r.e. $\Box$

Theorem 76: Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Entonces S es Σ-efectivamente computable sii S es Σ-recursivo **Proof:** $(\Rightarrow)$ Use la Tesis de Church.

$(\Leftarrow)$ Use el Teorema 42. $\Box$

Theorem 77: Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Son equivalentes (a) S es Σ-recursivo (b) S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ -recursivamente enumerables

Proof: (a)$\Rightarrow$(b). Note que $S = D_{Pred \circ \chi_S}$.

(b)$\Rightarrow$(a). Note que $\chi_S = C_1^{n,m}|_S \cup C_0^{n,m}|_{\omega^n \times \Sigma^{*m} - S}$. $\Box$

Lemma 78: Supongamos que $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $A = \left\{\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma : Halt^\Sigma(\mathcal{P})\right\}$

es Σ-r.e. y no es Σ-recursivo. Mas aun el conjunto $N = \left\{\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma : \neg Halt^\Sigma(\mathcal{P})\right\}$ no es Σ-r.e.

Proof: Sea $P = \lambda t \mathcal{P} \left[i^{0,1}(t, \mathcal{P}, \mathcal{P}) = n(\mathcal{P}) + 1\right]$. Note que P es Σ-p.r. por lo que $M(P)$ es Σ-r.. Ademas note que $D_{M(P)} = A$, lo cual implica que A es Σ-r.e.. Ya que $Halt^\Sigma$ es no Σ-recursivo (Lema 69) y

$Halt^\Sigma = C_1^{0,1} \mid_A \cup C_0^{0,1} \mid_N$

el Lema 68 nos dice que N no es Σ-r.e.. Finalmente supongamos A es Σ-recursivo. Entonces el conjunto $N = (\Sigma^* - A) \cap \text{Pro}^\Sigma$

deberia serlo, lo cual es absurdo. $\Box$

0.5. Máquinas de Turing

Lemma 79: Sea $L \subseteq \Sigma^*$, entonces $L = L(M)$ para alguna máquina de Turing $M \Leftrightarrow L = H(M)$ para alguna máquina de Turing $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$.

Proof: $\boxed{\Rightarrow}$ Dada una máquina $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ construiremos una máquina $M_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, \tilde{q}_0, B, \emptyset)$ tal que $L(M) = H(M_1)$. Tomaremos $\Gamma_1 = \Gamma \cup \{X\}$, con X un símbolo nuevo no perteneciente a Γ. Para cada $a \in \Sigma$, sea q_a un estado nuevo, no perteneciente a Q. Sean $\tilde{q}_0, q_r, q_d, q_B$ estados nuevos no pertenecientes a Q. Tomemos entonces:

$$Q_1 = Q \cup \{\tilde{q}_0, q_r, q_d, q_B\} \cup \{q_a : a \in \Sigma\}$$

Finalmente definamos δ_1 de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl}
rcl\delta_1(\tilde{q}_0, B) & = & \{(q_B, X, R)\} \\
\delta_1(q_B, a) & = & \{(q_a, B, R)\}, \text{ para } a \in \Sigma \\
\delta_1(q_B, B) & = & \{(q_0, B, K)\} \\
\delta_1(q_a, b) & = & \{(q_b, a, R)\}, \text{ para } a, b \in \Sigma \\
\delta_1(q_a, B) & = & \{(q_r, a, L)\}, \text{ para } a \in \Sigma \\
\delta_1(q_r, a) & = & \{(q_r, a, L)\}, \text{ para } a \in \Sigma \\
\delta_1(q_r, B) & = & \{(q_0, B, K)\} \\
\delta_1(q, X) & = & \{(q, X, K)\}, \text{ para } q \in Q \\
\delta_1(q, \sigma) & = & \delta(q, \sigma) \cup \{(q_d, \sigma, K)\} \text{ , para } q \in F \text{ y } \sigma \in \Gamma \\
\delta_1(q, \sigma) & = & \delta(q, \sigma), \text{ para } q \in Q - F \text{ y } \sigma \in \Gamma \\
\delta_1(q_d, \sigma) & = & \emptyset, \text{ para } \sigma \in \Gamma
\end{array}$$

Nota: δ_1 se define igual a vacío para los casos no contemplados arriba.

$\boxed{\Leftarrow}$ Dada $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, dejamos al lector la construcción de una máquina $M_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, \tilde{q}_0, B, \emptyset)$ tal que $H(M) = L(M_1)$.

Q.E.D.

Lemma 80: El predicado $\lambda ndd' [d \vdash d']$ es $(\Gamma \cup Q)$-PR.

Proof: Note que $D_{\lambda dd'[d \vdash d']} = Des \times Des$. Tambien notese que los predicados
$\lambda p\sigma q\gamma [(p, \sigma, L) \in \delta(q, \gamma)]$
$\lambda p\sigma q\gamma [(p, \sigma, R) \in \delta(q, \gamma)]$
$\lambda p\sigma q\gamma [(p, \sigma, K) \in \delta(q, \gamma)]$
son $(\Gamma \cup Q)$-p.r. ya que los tres tienen dominio igual a $Q \times \Gamma \times Q \times \Gamma$ el cual es finito (Corolario 36). Sea $P_R : Des \times Des \times \Gamma \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Q \times Q \to \omega$ definido por $P_R(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q) = 1$ sii $d = \alpha p\beta \wedge (q, \sigma, R) \in \delta\left(p, [\beta B]_1\right) \wedge d' = \alpha\sigma q^\frown\beta$

Sea $P_L : Des \times Des \times \Gamma \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Q \times Q \to \omega$ definido por $P_L(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q) = 1$ sii $d = \alpha p\beta \wedge (q, \sigma, L) \in \delta\left(p, [\beta B]_1\right) \wedge \alpha \neq \varepsilon \wedge d' = \left\lfloor \alpha^\frown q\, [\alpha]_{|\alpha|}\, \sigma^\frown\beta \right\rfloor$

Sea $P_K : Des \times Des \times \Gamma \times \Gamma^* \times \Gamma^* \times Q \times Q \to \omega$ definido por $P_K(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q) = 1$ sii $d = \alpha p\beta \wedge (q, \sigma, K) \in \delta\left(p, [\beta B]_1\right) \wedge d' = \lfloor \alpha q\sigma^\frown\beta \rfloor$

Se deja al lector la verificacion de que estos predicados son $(\Gamma \cup Q)$-p.r.. Notese que $\lambda dd' [d \vdash d']$ es igual al predicado $\lambda dd' [(\exists\sigma \in \Gamma)(\exists\alpha, \beta \in \Gamma^*)(\exists p, q \in Q)(P_R \vee P_L \vee P_K)(d, d', \sigma, \alpha, \beta, p, q)]$

lo cual por el Lema 39 nos dice que $\lambda dd' [d \vdash d']$ es $(\Gamma \cup Q)$-p.r. $\square$

Proposition 81: $\lambda ndd' \left[d \overset{n}{\vdash} d'\right]$ es $(\Gamma \cup Q)$-p.r..

Proof: Sea $Q=\lambda dd'\,[d\vdash d']\cup C_0^{0,2}\mid_{(\Gamma\cup Q)^{*2}-Des^2}$ es decir Q es el resultado de extender con el valor 0 al predicado $\lambda dd'\,[d\vdash d']$ de manera que este definido en todo $(\Gamma\cup Q)^{*2}$. Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Gamma\cup Q$ y sea $Q_1:\mathbf{N}\times Des\times Des\rightarrow\omega$ definido por $Q_1(x,d,d')=1$ sii

$$\Big((\forall i\in\mathbf{N})_{i\leq Lt(x)}\ *^{<}((x)_i)\in Des\Big)\wedge *^{<}((x)_1)=d\wedge$$
$$*^{<}((x)_{Lt(x)})=d'\wedge\Big((\forall i\in\mathbf{N})_{i\leq Lt(x)\dot{-}1}\ Q(*^{<}((x)_i),*^{<}((x)_{i+1}))\Big)$$

Notese que dicho rapidamente $Q_1(x,d,d')=1$ sii x codifica una computacion que parte de d y llega a d'. Se deja al lector la verificacion de que este predicado es $(\Gamma\cup Q)$-p.r.. Notese que

$$\lambda ndd'\left[d\overset{n}{\vdash}d'\right]=\lambda ndd'\,[(\exists x\in\mathbf{N})\ \ Lt(x)=n+1\wedge Q_1(x,d,d')]$$

Es decir que solo nos falta acotar el cuantificador existencial, para poder aplicar el lema de cuantificacion acotada. Ya que cuando $d_1,...,d_{n+1}\in Des$ son tales que $d_1\vdash d_2\vdash...\vdash d_{n+1}$ tenemos que $|d_i|\leq|d_1|+n$, para $i=1,...,n$

una posible cota para dicho cuantificador es $\prod_{i=1}^{n+1}pr(i)^{|\Gamma\cup Q|^{|d|+n}}$.

O sea que, por el lema de cuantificacion acotada, tenemos que el predicado $\lambda ndd'\left[d\overset{n}{\vdash}d'\right]$ es $(\Gamma\cup Q)$-p.r. $\square$

Theorem 82: Sea $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,B,F)$ una maquina de Turing. Entonces $L(M)$ es Σ-recursivamente enumerable.

Proof: Sea P el siguiente predicado $(\Gamma\cup Q)$-mixto

$$\lambda n\alpha\left[(\exists d\in Des)\ \ \lfloor q_0B\alpha\rfloor\overset{n}{\vdash}d\wedge St(d)\in F\right]$$

Notese que $D_P=\omega\times\Gamma^*$. Dejamos al lector probar que P es $(\Gamma\cup Q)$-p.r.. Sea $P'=P\mid_{\omega\times\Sigma^*}$. Notese que $P'(n,\alpha)=1$ sii $\alpha\in L(M)$ atestiguado por una computacion de longitud n. Ya que P' es $(\Gamma\cup Q)$-p.r. (por que?) y ademas es Σ-mixto, el Teorema 51 nos dice que P' es Σ-p.r.. Ya que $L(M)=D_{M(P')}$, el Teorema 71 nos dice que $L(M)$ es Σ-r.e.. $\square$

Theorem 83: Supongamos $f:S\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}\rightarrow O$ es Σ-Turing computable. Entonces f es Σ-recursiva.

Proof: Supongamos $O=\Sigma^*$ y sea $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,B,\shortmid,F)$ una maquina de Turing deterministica con unit la cual compute a f. Sea $<$ un orden total estricto sobre $\Gamma\cup Q$. Sea $P:\mathbf{N}\times\omega^n\times\Sigma^{*m}\rightarrow\omega$ dado por $P(x,\vec{x},\vec{\alpha})=1$ sii

$(\exists q\in Q)\ \ \lfloor q_0B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_n}B\alpha_1...B\alpha_m\rfloor\overset{(x)_1}{\vdash}\lfloor qB*^{<}((x)_2)\rfloor\wedge$ $\wedge(\forall$
$Des)_{|d|\leq|*^{<}((x)_2)|+2}\ \lfloor qB*^{<}((x)_2)\rfloor\nvdash d$ Es facil ver que P es $(\Gamma\cup Q)$-p.r. por lo que P es Σ-p.r. ya que es Σ-mixto. Notese que

$$f=\lambda\vec{x}\vec{\alpha}\left[\left(\min_x P(x,\vec{x},\vec{\alpha})\right)_2\right],$$

lo cual nos dice que f es Σ-recursiva. $\square$

Lemma 84: Sea $\mathcal{P}\in\mathrm{Pro}^{\Sigma}$ y sea k tal que las variables que ocurren en $\mathcal{P}$ estan todas en la lista $\mathrm{N}1,...,\mathrm{N}\bar{k},\mathrm{P}1,...,\mathrm{P}\bar{k}$. Para cada $a\in\Sigma\cup\{\shortmid\}$, sea $\tilde{a}$ un nuevo simbolo. Sea $\Gamma=\Sigma\cup\{B,\shortmid\}\cup\{\tilde{a}:a\in\Sigma\cup\{\shortmid\}\}$. Entonces hay una maquina de Turing deterministica con unit $M=(Q,\Gamma,\Sigma,\delta,q_0,B,\shortmid,\{q_f\})$ la cual satisface (1) $\delta(q_f,\sigma)=\emptyset$, para cada $\sigma\in\Gamma$. (2) Cualesquiera sean $x_1,...,x_k\in\omega$ y $\alpha_1,...,\alpha_k\in\Sigma^*$, el programa $\mathcal{P}$ se detiene partiendo del estado $((x_1,...,x_k,0,...),(\alpha_1,...,\alpha_k,\varepsilon,...))$

sii M se detiene partiendo de la descripcion instantanea $\lfloor q_0B\shortmid^{x_1}B...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1B...B\alpha_kB\rfloor$

(3) Si $x_1,...,x_k\in\omega$ y $\alpha_1,...,\alpha_k\in\Sigma^*$ son tales que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo del estado $((x_1,...,x_k,0,...),(\alpha_1,...,$

y llega al estado $((y_1,...,y_k,0,...),(\beta_1,...,\beta_k,\varepsilon,...))$

entonces $\lfloor q_0B\shortmid^{x_1}B...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1B...B\alpha_kB\rfloor\overset{*}{\vdash}\lfloor q_fB\shortmid^{y_1}B...B\shortmid^{y_k}B\beta_1B...B\beta_kB\rfloor$

Proof: Dado un estado $((x_1,...,x_k,0,...),(\alpha_1,...,\alpha_k,\varepsilon,...))$ lo representaremos en la cinta de la siguiente manera

$B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k BBBB....$

A continuacion describiremos una serie de maquinas las cuales simularan, via la representacion anterior, las distintas clases de instrucciones que pueden ocurrir en $\mathcal{P}$. Todas las maquinas definidas tendran a $\shortmid$ como unit y a B como blanco, tendran a Σ como su alfabeto terminal y su alfabeto mayor sera $\Gamma = \Sigma \cup \{B, \shortmid\} \cup \{\tilde{a} : a \in \Sigma \cup \{\shortmid\}\}$. Ademas tendran uno o dos estados finales con la propiedad de que si q es un estado final, entonces $\delta(q,\sigma) = \emptyset$, para cada $\sigma \in \Gamma$. Esta propiedad es importante ya que nos permitira concatenar pares de dichas maquinas identificando algun estado final de la primera con el inicial de la segunda. Para $1 \leq i \leq k$, sea M_i^+ una maquina tal que

$$\begin{array}{lcl} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_{i-1}}B\shortmid^{x_i+1}B\shortmid^{x_{i+1}}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Es claro que la maquina M_i^+ simula la instruccion $\mathrm{N}\bar{\imath} \leftarrow \mathrm{N}\bar{\imath}+1$. Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_i^{\dot{-}}$ una maquina tal que

$$\begin{array}{lcl} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_{i-1}}B\shortmid^{x_i\dot{-}1}B\shortmid^{x_{i+1}}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq k$ y $a \in \Sigma$, sea M_i^a una maquina tal que $\begin{array}{lcl} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_i^{\frown}$ una maquina tal que $\begin{array}{lcl} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_{i-1}B \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$

Para $j = 1, ..., k$, y $a \in \Sigma$, sea IF_j^a una maquina con dos estados finales q_{si} y q_{no} tal que si α_j comienza con a , entonces $\begin{array}{lcl} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{si} \end{array}$

y en caso contrario $\begin{array}{lcl} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no} \end{array}$

Analogamente para $j = 1, ..., k$, sea IF_j una maquina tal que si $x_j \neq 0$, entonces $\begin{array}{l} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha \\ \uparrow \\ q_0 \end{array}$

y si $x_j = 0$, entonces $\begin{array}{lcl} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no} \end{array}$

Para $1 \leq i, j \leq k$, sea $M_{i\leftarrow j}^*$ una maquina tal que $\begin{array}{lcl} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_{i-} \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$

Para $1 \leq i, j \leq k$, sea $M_{i\leftarrow j}^\#$ una maquina tal que $\begin{array}{lcl} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_{i-1}}B\shortmid^{x_j}B\shortmid^{x_i} \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_{i\leftarrow 0}$ una maquina tal que $\begin{array}{lcl} B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_k}B\alpha_1...B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B\shortmid^{x_1}...B\shortmid^{x_{i-1}}BB\shortmid^{x_{i+1}}... \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M_{i\leftarrow\varepsilon}$ una maquina tal que $\begin{array}{l} B \shortmid^{x_1} ...B \shortmid^{x_k} B\alpha_1...B\alpha_k \\ \uparrow \\ q_0 \end{array} \overset{*}{\vdash} \begin{array}{l} B \shortmid^{x_1} ...B \shortmid^{x_k} B\alpha_1...B\alpha_{i-1}B \\ \uparrow \\ q_f \end{array}$

Sea $M_{\text{SKIP}} = (\{q_0, q_f\}, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \shortmid, \{q_f\})$,
con $\delta(q_0, B) = \{(q_f, B, K)\}$ y $\delta = \emptyset$ en cualquier otro caso. Finalmente sea
$M_{\text{GOTO}} = (\{q_0, q_{si}, q_{no}\}, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \shortmid, \{q_{si}, q_{no}\})$,
con $\delta(q_0, B) = \{(q_{si}, B, K)\}$ y $\delta = \emptyset$ en cualquier otro caso. Para poder hacer concretamente las maquinas recien descriptas deberemos dise ñar antes algunas maquinas auxiliares. Para cada $j \geq 1$, sea D_j la maquina descripta en la Figura 1. Notese que

$$\begin{array}{lcl} \alpha B\beta_1 B\beta_2 B...B\beta_j B\gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha B\beta_1 B\beta_2 B...B\beta_j B\gamma \\ \uparrow & & \qquad\qquad\qquad\quad\ \uparrow \\ q_0 & & \qquad\qquad\qquad\quad\ q_f \end{array}$$

siempre que $\alpha, \gamma \in \Gamma^*$, $\beta_1, ..., \beta_j \in (\Gamma - \{B\})^*$. Analogamente tenemos definidas las maquinas I_j. Para $j \geq 1$, sea TD_j una maquina con un solo estado final q_f y tal que

$$\begin{array}{lcl} \alpha B\gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha BB\gamma \\ \ \uparrow & & \ \ \uparrow \\ \ q_0 & & \ \ q_f \end{array}$$

cada vez que $\alpha, \gamma \in \Gamma^*$ y γ tiene exactamente j ocurrencias de B. Es decir la maquina TD_j corre un espacio a la derecha todo el bloque γ y agrega un blanco en el espacio que se genera a la izquierda de dicho bloque. Por ejemplo, para el caso de $\Sigma = \{\&\}$ podemos tomar TD_3 igual a la maquina de la Figura 3. Analogamente, para $j \geq 1$, sea TI_j una maquina tal que

$$\begin{array}{lcl} \alpha B\sigma\gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha B\gamma \\ \ \uparrow & & \ \uparrow \\ \ q_0 & & \ q_f \end{array}$$

cada vez que $\alpha \in \Gamma^*$, $\sigma \in \Gamma$ y γ tiene exactamente j ocurrencias de B. Es decir la maquina TI_j corre un espacio a la izquierda todo el bloque γ (por lo cual en el lugar de σ queda el primer simbolo de γ). Teniendo las maquinas auxiliares antes definidas podemos combinarlas para obtener las maquinas simuladoras de instrucciones. Por ejemplo M_i^a puede ser la maquina descripta en la Figura 4. En la Figura 2 tenemos una posible forma de diseñar la maquina IF_i^a. En la Figura 7 tenemos una posible forma de diseñar la maquina $M_{i\leftarrow j}^*$ para el caso $\Sigma = \{a, b\}$ y $i < j$.

Supongamos ahora que $\mathcal{P} = I_1...I_n$. Para cada $i = 1, ..., n$, definiremos una maquina M_i que simulara la instruccion I_i. Luego uniremos adecuadamente estas maquinas para formar la maquina que simulara a $\mathcal{P}$

- Si $Bas(I_i) = \text{N}\bar{j} \leftarrow \text{N}\bar{j} + 1$ tomaremos $M_i = M_j^+$ - Si $Bas(I_i) = \text{N}\bar{j} \leftarrow \text{N}\bar{j} \dot{-} 1$ tomaremos $M_i = M_j^{\dot{-}}$ - Si $Bas(I_i) = \text{N}\bar{j} \leftarrow 0$ tomaremos $M_i = M_{j\leftarrow 0}$. - Si $Bas(I_i) = \text{N}\bar{j} \leftarrow \text{N}\bar{m}$ tomaremos $M_i = M_{j\leftarrow m}^{\#}$. - Si $Bas(I_i) = \text{IF N}\bar{j} \neq 0 \text{ GOTO L}\bar{m}$ tomaremos $M_i = IF_j$. - Si $Bas(I_i) = \text{P}\bar{j} \leftarrow \text{P}\bar{j}.a$ tomaremos $M_i = M_j^a$. - Si $Bas(I_i) = \text{P}\bar{j} \leftarrow {}^\curvearrowright\text{P}\bar{j}$ tomaremos $M_i = M_j^\curvearrowright$. - Si $Bas(I_i) = \text{P}\bar{j} \leftarrow \varepsilon$ tomaremos $M_i = M_{j\leftarrow\varepsilon}$. - Si $Bas(I_i) = \text{P}\bar{j} \leftarrow \text{P}\bar{m}$ tomaremos $M_i = M_{j\leftarrow m}^*$. - Si $Bas(I_i) = \text{IF P}\bar{j} \text{ BEGINS } a \text{ GOTO L}\bar{m}$ tomaremos $M_i = IF_j^a$. - Si $Bas(I_i) = \text{SKIP}$ tomaremos $M_i = M_{\text{SKIP}}$. - Si $Bas(I_i) = \text{GOTO L}\bar{m}$ tomaremos $M_i = M_{\text{GOTO}}$. Ya que la maquina M_i puede tener uno o dos estados finales, la representaremos como se muestra en la Figura 5, entendiendo que en el caso en que M_i tiene un solo estado final, este esta representado por el circulo de abajo a la izquierda y en el caso en que M_i tiene dos estados finales, el estado final representado con lineas punteadas corresponde al estado q_{si} y el otro al estado q_{no}.

Para armar la maquina que simulara a $\mathcal{P}$ hacemos lo siguiente. Primero unimos las maquinas $M_1, ..., M_n$ como lo muestra la Figura 6. Luego para cada i tal que $Bas(I_i)$ es de la forma $\alpha\text{GOTO L}\bar{m}$, ligamos con una flecha de la forma

$\xrightarrow{B,B,K}$
el estado final q_{si} de la M_i con el estado inicial de la M_h, donde h es tal que I_h es la primer instruccion que tiene label L$\bar{m}$. Es intuitivamente claro que la maquina asi obtenida cumple con lo requerido aunque una Proof formal de esto puede resultar extremadamente tediosa. $\square$

Theorem 85: Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-recursiva, entonces f es Σ-Turing computable.

Proof: Supongamos $O = \Sigma^*$. Ya que f es Σ-computable, existe $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$ el cual computa f. Note que podemos suponer que $\mathcal{P}$ tiene la propiedad de que cuando $\mathcal{P}$ termina, en el estado alcansado las variables numericas tienen todas el valor 0 y las alfabeticas distintas de P1 todas el valor ε. Sea M la maquina de Turing con unit dada por el lema anterior, donde elejimos el numero k con la propiedad adicional de ser mayor que n y m. Sea M_1 una maquina tal que para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$,

$\lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} B...B \shortmid^{x_n} B\alpha_1 B...B\alpha_n B \rfloor \overset{*}{\vdash} \left\lfloor qB \shortmid^{x_1} B...B \shortmid^{x_n} B^{k-n} B\alpha_1 B...B\alpha_m B \right\rfloor$

donde q_0 es el estado inicial de M_1 y q es un estado tal que $\delta(q, \sigma) = \emptyset$, para cada σ. Sea M_2 una maquina tal que para cada $\alpha \in \Sigma^*$, $\left\lfloor q_0 B^{k+1}\alpha \right\rfloor \overset{*}{\vdash} \lfloor qB\alpha \rfloor$

donde q_0 es el estado inicial de M_2 y q es un estado tal que $\delta(q, \sigma) = \emptyset$, para cada σ. Note que la concatenacion de M_1, M y M_2 (en ese orden) produce una maquina de Turing la cual computa f. $\square$

Theorem 86: Si $L \subseteq \Sigma^*$ es Σ-r.e., entonces $L = L(M) = H(M)$ para alguna maquina de Turing deterministica M.

Proof: Por el Teorema 71 hay una funcion $f : L \to \omega$, la cual es Σ-recursiva. Sea $\mathcal{P}$ un programa el cual compute a f. Sea M la maquina de Turing deterministica dada en el lema anterior. Sea M_1 una maquina de Turing deterministica tal que para todo $\alpha \in \Sigma^*$,

$\lfloor q_0 B\alpha \rfloor \overset{*}{\vdash} \left\lfloor qB^{k+1}\alpha \right\rfloor$

donde q_0 es el estado inicial de M y q es un estado tal que $\delta(q, \sigma) = \emptyset$, para cada σ. Note que la concatenacion de M_1 con M (en ese orden) produce una maquina de Turing deterministica M_2 tal que $H(M_2) = L(M_2) = L$. $\square$

Bibliografía

[1] Diego Vaggione, «Apunte de Clase, 2017», *FaMAF, UNC.*

[2] Agustín Curto, «Carpeta de Clase, 2017», *FaMAF, UNC.*

Por favor, mejorá este documento en github
https://github.com/acurto714/resumenLengForm