Resumen de teoremas para el final de Lógica

Agustín Curto, agucurto95@gmail.com
Francisco Nievas, frannievas@gmail.com

2017

Contents

Nota: Este resumen se corresponde con la materia dictada en el año 2017. Los autores no se responsabilizan de posibles cambios que pudiesen realizarse en los temas dictados en la misma, así como tampoco de errores involuntarios que pudiesen existir en dicho resumen.

Por favor, mejorá este documento en github
https://github.com/ResumenesFaMAF/resumenLogica

1 Estructuras algebráicas ordenadas

Lemma 1. *Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Supongamos que F es un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$, entonces:*

*a) Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que a es **cota superior** (resp. **inferior**) de S si y solo si $F(a)$ es **cota superior** (resp. **inferior**) de $F(S)$.*

b) Para cada $S \subseteq P$, se tiene que $\exists \sup(S)$ si y solo si $\exists \sup(F(S))$ y en el caso de que existan tales elementos se tiene que $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$.

c) P tiene 1 (resp. 0) si y solo si P' tiene 1 (resp. 0) y en tal caso tales elementos están conectados por F.

*d) Para cada $a \in P$, a es **maximal** (resp. **minimal**) si y solo si $F(a)$ es **maximal** (resp. **minimal**).*

e) Para $a, b \in P$, tenemos que $a \prec b$ si y solo si $F(a) \prec' F(b)$.

Proof. a) $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que a es **cota superior** de S, veamos entonces que $F(a)$ es **cota superior** de $F(S)$. Sean:

- $x \in F(S)$
- $s \in S$ tal que $x = F(s)$.

Ya que $s \leq a$, tenemos que $x = F(s) \leq' F(a)$. Luego, $F(a)$ es **cota superior**.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que $F(a)$ es **cota superior** de $F(S)$ y veamos que entonces a es cota superior de S.

Sea $s \in S$, ya que $F(s) \leq' F(a)$, tenemos que $s = F^{-1}(F(s)) \leq' F^{-1}(F(a)) = a$. Por lo tanto, a es **cota superior**.

b) $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos existe $\sup(S)$. Veamos entonces que $F(\sup(S))$ es el supremo de $F(S)$. Por (a) $F(\sup(S))$ es cota superior de $F(S)$. Supongamos b es cota superior de $F(S)$. Entonces $F^{-1}(b)$ es cota superior de S, por lo cual $\sup(S) \leq' F^{-1}(b)$, produciendo $F(\sup(S)) \leq' b$.

$\boxed{\Leftarrow}$ En forma analoga se ve que si existe $\sup(F(S))$, entonces $F^{-1}(\sup(F(S)))$ es el supremo de S.

c) Se desprende de (b) tomando $S = P$.

d) son dejados como ejercicio

e) son dejados como ejercicio

$\square$

Lemma 2. *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y, z, w \in L$, se cumplen las siguientes. (1) $x \leq x \mathsf{s} y$ (2) $x \mathsf{i} y \leq x$ (3) $x \mathsf{s} x = x \mathsf{i} x = x$ (4) $x \mathsf{s} y = y \mathsf{s} x$ (5) $x \mathsf{i} y = y \mathsf{i} x$ (6) $x \leq y$ si y solo si $x \mathsf{s} y = y$ si y solo si $x \mathsf{i} y = x$ (7) $x \mathsf{s} (x \mathsf{i} y) = x$ (8) $x \mathsf{i} (x \mathsf{s} y) = x$ (9) $(x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z = x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z)$ (10) $(x \mathsf{i} y) \mathsf{i} z = x \mathsf{i} (y \mathsf{i} z)$ (11) Si $x \leq z$ e $y \leq w$, entonces $x \mathsf{s} y \leq z \mathsf{s} w$ y $x \mathsf{i} y \leq z \mathsf{i} w$ (12) $(x \mathsf{i} y) \mathsf{s} (x \mathsf{i} z) \leq x \mathsf{i} (y \mathsf{s} z)$*

Proof. (1), (2), (3), (4), (5) y (6) son consecuencias inmediatas de la definicion de las operaciones s e i.

(7) Ya que $x \mathsf{i} y \leq x$, (6) nos dice que $(x \mathsf{i} y) \mathsf{s} x = x$, por lo cual $x \mathsf{s} (x \mathsf{i} y) = x$.

(8) Similar a (7).

(9) Notese que $x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z)$ es cota superior de $\{x, y, z\}$ ya que onviamente $x \leq x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z)$ y ademas

$$\begin{array}{rcl} y & \leq & (y \mathsf{s} z) \leq x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z) \\ z & \leq & (y \mathsf{s} z) \leq x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z) \end{array}$$

Ya que $x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z)$ es cota superior de $\{x, y\}$, tenemos que $x \mathsf{s} y \leq x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z)$, por lo cual $x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z)$ es cota superior del conjunto $\{x \mathsf{s} y, z\}$, lo cual dice que $(x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z \leq x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z)$. Analogamente se puede probar que $x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z) \leq (x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z$. (10) Similar a (9).

(11) Ya que

$$\begin{array}{rcl} x & \leq & z \leq z \mathsf{s} w \\ y & \leq & w \leq z \mathsf{s} w \end{array}$$

tenemos que $z \mathsf{s} w$ es cota superior de $\{x, y\}$ lo cual dice que $x \mathsf{s} y \leq z \mathsf{s} w$. La otra desigualdad es analoga. (12) Ya que

$$\begin{array}{rcl} (x \mathsf{i} y), (x \mathsf{i} z) & \leq & x \\ (x \mathsf{i} y), (x \mathsf{i} z) & \leq & y \mathsf{s} z \end{array}$$

tenemos que $(x \mathsf{i} y), (x \mathsf{i} z) \leq x \mathsf{i} (y \mathsf{s} z)$, por lo cual $(x \mathsf{i} y) \mathsf{s} (x \mathsf{i} z) \leq x \mathsf{i} (y \mathsf{s} z)$. □ □

Lemma 3. *Sea $(L, \leq)$ un reticulado. Dados elementos $x_1, ..., x_n \in L$, con $n \geq 2$, se tiene*

$$\begin{array}{rcl} (...(x_1 \mathsf{s} x_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s} x_n & = & \sup(\{x_1, ..., x_n\}) \\ (...(x_1 \mathsf{i} x_2) \mathsf{i} ...) \mathsf{i} x_n & = & \inf(\{x_1, ..., x_n\}) \end{array}$$

Proof. Por induccion en n. Claramente el resultado vale para $n = 2$. Supongamos vale para n y veamos entonces que vale para $n + 1$. Sean $x_1, ..., x_{n+1} \in L$. Por hipotesis inductiva tenemos que

(1) $(...(x_1 \mathsf{s} x_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s} x_n = \sup(\{x_1, ..., x_n\})$. Veamos entonces que

(2) $((...(x_1 \mathsf{s} x_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s} x_n) \mathsf{s} x_{n+1} = \sup(\{x_1, ..., x_{n+1}\})$. Es facil ver que $((...(x_1 \mathsf{s} x_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s} x_n) \mathsf{s} x_{n+1}$ es cota superior de $\{x_1, ..., x_{n+1}\}$. Supongamos que z es otra cota superior. Ya que z es tambien cota superior del conjunto $\{x_1, ..., x_n\}$, por (1) tenemos que

$(...(x_1 \mathsf{s} x_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s} x_n \leq z$.

Pero entonces ya que $x_{n+1} \leq z$, tenemos que $((...(x_1 \mathsf{s} x_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s} x_n) \mathsf{s} x_{n+1} \leq z$,

con lo cual hemos probado (2). □ □

Theorem 4. *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado. La relacion binaria definida por: $x \leq y$ si y solo si $x \mathsf{s} y = y$*

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple: $\begin{array}{rcl} \sup(\{x, y\}) & = & x \mathsf{s} y \\ \inf(\{x, y\}) & = & x \mathsf{i} y \end{array}$

Proof. Dejamos como ejercicio para el lector probar que $\leq$ es reflexiva y antisimetrica. Veamos que $\leq$ es transitiva. Supongamos que $x \leq y$ e $y \leq z$. Entonces

$x \mathsf{s} z = x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z) = (x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z = y \mathsf{s} z = z$,

por lo cual $x \leq z$. Veamos ahora que $\sup(\{x, y\}) = x \mathsf{s} y$. Es claro que $x \mathsf{s} y$ es una cota superior del conjunto $\{x, y\}$. Supongamos $x, y \leq z$. Entonces $(x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z = x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z) = x \mathsf{s} z = z$,

por lo que $x \mathsf{s} y \leq z$. Es decir que $x \mathsf{s} y$ es la menor cota superior. Para probar que $\inf(\{x, y\}) = x \mathsf{i} y$, probaremos que para todo $u, v \in L$,

$u \leq v$ si y solo si $u \mathsf{i} v = u$,

lo cual le permitira al lector aplicar un razonamiento similar al usado en el caso de la operacion s. Supongamos que $u \mathsf{s} v = v$. Entonces $u \mathsf{i} v = u \mathsf{i} (v \mathsf{s} v) = u$. Reciprocamente si $u \mathsf{i} v = u$, entonces $u \mathsf{s} v = (u \mathsf{i} v) \mathsf{s} v = v$, por lo cual $u \leq v$. □ □

Lemma 5. *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo*

Proof. Solo falta ver que F^{-1} es un homomorfismo. Sean $F(x), F(y)$ dos elementos cualesquiera de L'. Tenemos que

$F^{-1}(F(x) \mathsf{s}' F(y)) = F^{-1}(F(x \mathsf{s} y)) = x \mathsf{s} y = F^{-1}(F(x)) \mathsf{s} F^{-1}(F(y))$

□ □

Lemma 6. *Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados y sea $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ un homomorfismo. Entonces I_F es un subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$.*

Proof. Ya que L es no vacio tenemos que I_F tambien es no vacio. Sean $a, b \in I_F$. Sean $x, y \in L$ tales que $F(x) = a$ y $F(y) = b$. Se tiene que

$$\begin{array}{rcl} a \mathsf{s}' b & = & F(x) \mathsf{s}' F(y) = F(x \mathsf{s} y) \in I_F \\ a \mathsf{i}' b & = & F(x) \mathsf{i}' F(y) = F(x \mathsf{i} y) \in I_F \end{array}$$

por lo cual I_F es cerrada bajo s' e i'. □ □

Lemma 7. *Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados y sean $(L \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una funcion. Entonces F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si y solo si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.*

Proof. Supongamos F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$. Sean $x, y \in L$, tales que $x \leq y$. Tenemos que $y = x \mathsf{s} y$ por lo cual $F(y) = F(x \mathsf{s} y) = F(x) \mathsf{s}' F(y)$, produciendo $F(x) \leq' F(y)$. En forma similar se puede ver que F^{-1} es tambien un homomorfismo de $(L', \leq')$ en $(L, \leq)$. Si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$, entonces el Lema 89 nos dice que F y F^{-1} respetan las operaciones de supremo e infimo por lo cual F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$.

□ □

Lemma 8. *$(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ es un reticulado. El orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado a este reticulado cumple $x/\theta \tilde{\leq} y/\theta$ sii $y\theta(x \mathsf{s} y)$*

Proof. Veamos que la estructura $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ cumple (I4). Sean x/θ, y/θ, z/θ elementos cualesquiera de L/θ. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} (x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta) \,\tilde{\mathsf{s}}\, z/\theta & = & (x \mathsf{s} y)/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, z/\theta \\ & = & ((x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z)/\theta \\ & = & (x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z))/\theta \\ & = & x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, (y \mathsf{s} z)/\theta \\ & = & x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, (y/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, z/\theta) \end{array}$$

En forma similar se puede ver que la estructura $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ cumple el resto de las identidades que definen reticulado. □

Corollary 9. *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado en el cual hay un elemento maximo 1 (resp. minimo 0). Entonces si θ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$, $1/\theta$ (resp. $0/\theta$) es un elemento maximo (resp. minimo) de $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$.*

Proof. Ya que $1\theta(x \mathsf{s} 1)$, para cada $x \in L$, tenemos que $x/\theta \tilde{\leq} 1/\theta$, para cada $x \in L$. □ □

Lemma 10. *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ es un homomorfismo de reticulados, entonces $\ker F$ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$.*

Proof. Dejamos al lector ver que $\ker F$ es una relacion de equivalencia. Supongamos $x \ker F x'$ y $y \ker F y'$. Entonces

$F(x \mathsf{s} y) = F(x) \mathsf{s}' F(y) = F(x') \mathsf{s}' F(y') = F(x' \mathsf{s} y')$

lo cual nos dice que $(x \mathsf{s} y) \ker F (x' \mathsf{s} y')$. En forma similar tenemos que $(x \mathsf{i} y) \ker F (x' \mathsf{i} y')$.

□ □

Lemma 11. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado y sea* θ *una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$*. Entonces* π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *en* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$*. Ademas* $\ker \pi_\theta = \theta$*.*

Proof. Sean $x, y \in L$. Tenemos que
$\pi_\theta(x \mathsf{s} y) = (x \mathsf{s} y)/\theta = x/\theta \tilde{\mathsf{s}} y/\theta = \pi_\theta(x) \tilde{\mathsf{s}} \pi_\theta(y)$
por lo cual π_θ preserva la operacion supremo. Para la operacion infimo es similar. □ □

Lemma 12. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ *un homomorfismo biyectivo, entonces* F *es un isomorfismo*

Proof. Similar a la prueba del Lemma 93. □ □

Lemma 13. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ *es un homomorfismo, entonces* I_F *es un subuniverso de* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$*.*

Proof. Ya que F es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ tenemos que I_F es subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ lo cual ya que $0', 1' \in I_F$ implica que I_F es un subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$. □ □

Lemma 14. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados acotados, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$*.*

Lemma 15. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *un reticulado acotado y* θ *una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$*. (a)* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ *es un reticulado acotado. (b)* π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *en* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ *cuyo nucleo es* θ*.*

Lemma 16. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ *un homomorfismo biyectivo, entonces* F *es un isomorfismo*

Lemma 17. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ *es un homomorfismo, entonces* I_F *es un subuniverso de* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$*.*

Lemma 18. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados complementados, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$

Lemma 19. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *un reticulado complementado y sea* θ *una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$*. (a)* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, ^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ *es un reticulado complementado. (b)* π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *en* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, ^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ *cuyo nucleo es* θ*.*

Lemma 20. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado. Son equivalentes: (1)* $x \mathsf{i} (y \mathsf{s} z) = (x \mathsf{i} y) \mathsf{s} (x \mathsf{i} z)$*, cualesquiera sean* $x, y, z \in L$ *(2)* $x \mathsf{s} (y \mathsf{i} z) = (x \mathsf{s} y) \mathsf{i} (x \mathsf{s} z)$*, cualesquiera sean* $x, y, z \in L$*.*

Proof. (1)⇒(2). Notese que

$$\begin{aligned}
(x \mathsf{s} y) \mathsf{i} (x \mathsf{s} z) &= ((x \mathsf{s} y) \mathsf{i} x) \mathsf{s} ((x \mathsf{s} y) \mathsf{i} z) \\
&= (x \mathsf{s} (z \mathsf{i} (x \mathsf{s} y)) \\
&= (x \mathsf{s} ((z \mathsf{i} x) \mathsf{s} (z \mathsf{i} y)) \\
&= (x \mathsf{s} (z \mathsf{i} x)) \mathsf{s} (z \mathsf{i} y) \\
&= x \mathsf{s} (z \mathsf{i} y) \\
&= x \mathsf{s} (y \mathsf{i} z)
\end{aligned}$$

(2)⇒(1) es similar. □ □

Lemma 21. *Si* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento.*

Proof. Supongamos $x \in L$ tiene complementos y, z. Se tiene
$y = y \mathsf{i} 1 = y \mathsf{i} (x \mathsf{s} z) = (y \mathsf{i} x) \mathsf{s} (y \mathsf{i} z) = 0 \mathsf{s} (y \mathsf{i} z) = y \mathsf{i} z$,
por lo cual $y \leq z$. En forma analoga se muestra que $z \leq y$. □ □

Lemma 22. *Si S es no vacio, entonces $[S)$ es un filtro. Mas aun si F es un filtro y $F \supseteq S$, entonces $F \supseteq [S)$.*

Proof. Ya que $S \subseteq [S)$, tenemos que $[S) \neq \varnothing$. Claramente $[S)$ cumple la propiedad (3). Veamos cumple la (2). Si $y \geq s_1 \mathsf{i} s_2 \mathsf{i} ... \mathsf{i} s_n$ y $z \geq t_1 \mathsf{i} t_2 \mathsf{i} ... \mathsf{i} t_m$, con $s_1, s_2, ..., s_n$, $t_1, t_2, ..., t_m \in S$, entonces

$y \mathsf{i} z \geq s_1 \mathsf{i} s_2 \mathsf{i} ... \mathsf{i} s_n \mathsf{i} t_1 \mathsf{i} t_2 \mathsf{i} ... \mathsf{i} t_m$,

lo cual prueba (2). □

Lemma 23. *(Zorn) Sea $(P, \leq)$ un poset y supongamos cada cadena de P tiene una cota superior. Entonces hay un elemento maximal en P. Un filtro F de un reticulado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ sera llamado primo cuando se cumplan:*

(1) $F \neq L$ (2) $x \mathsf{s} y \in F \Rightarrow x \in F$ o $y \in F$.

Theorem 24. *(Teorema del Filtro Primo) Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado distributivo y F un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$. Entonces hay un filtro primo P tal que $x_0 \notin P$ y $F \subseteq P$.*

Proof. Sea

$\mathcal{F} = \{F_1 : F_1$ es un filtro, $x_0 \notin F_1$ y $F \subseteq F_1\}$.

Notese que $\mathcal{F} \neq \varnothing$, por lo cual $(\mathcal{F}, \subseteq)$ es un poset. Veamos que cada cadena en $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene una cota superior. Sea C una cadena. Si $C = \varnothing$, entonces cualquier elemento de $\mathcal{F}$ es cota de C. Supongamos entonces $C \neq \varnothing$. Sea $G = \{x \in L : x \in F_1, \text{para algun } F_1 \in C\}$.

Veamos que G es un filtro. Es claro que G es no vacio. Supongamos que $x, y \in G$. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $x \in F_1$ y $y \in F_2$. Si $F_1 \subseteq F_2$, entonces ya que F_2 es un filtro tenemos que $x \mathsf{i} y \in F_2 \subseteq G$. Si $F_2 \subseteq F_1$, entonces tenemos que $x \mathsf{i} y \in F_1 \subseteq G$. Ya que C es una cadena, tenemos que siempre $x \mathsf{i} y \in G$. En forma analoga se prueba la propiedad restante por lo cual tenemos que G es un filtro. Ademas $x_0 \notin G$, por lo que $G \in \mathcal{F}$ es cota superior de C . Por el lema de Zorn, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene un elemento maximal P. Veamos que P es un filtro primo. Supongamos $x \mathsf{s} y \in P$ y $x, y \notin P$. Entonces ya que P es maximal tenemos que $x_0 \in [P \cup \{x\}) \cap [P \cup \{y\})$

Ya que $x_0 \in [P \cup \{x\})$, tenemos que hay elementos $p_1, ..., p_n \in P$, tales que $x_0 \geq p_1 \mathsf{i} ... \mathsf{i} p_n \mathsf{i} x$

Ya que $x_0 \in [P \cup \{y\})$, tenemos que hay elementos $q_1, ..., q_m \in P$, tales que $x_0 \geq q_1 \mathsf{i} ... \mathsf{i} q_m \mathsf{i} y$

Si llamamos p al siguiente elemento de P $p_1 \mathsf{i} ... \mathsf{i} p_n \mathsf{i} q_1 \mathsf{i} ... \mathsf{i} q_m$

tenemos que $\begin{array}{lll} x_0 & \geq & p \mathsf{i} x \\ x_0 & \geq & p \mathsf{i} y \end{array}$

Se tiene que $x_0 \geq (p \mathsf{i} x) \mathsf{s} (p \mathsf{i} y) = p \mathsf{i} (x \mathsf{s} y) \in P$, lo cual es absurdo ya que $x_0 \notin P$. □ □

Corollary 25. *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado distributivo. Si $\varnothing \neq S \subseteq L$ es tal que $s_1 \mathsf{i} s_2 \mathsf{i} ... \mathsf{i} s_n \neq 0$, para cada $s_1, ..., s_n \in S$, entonces hay un filtro primo que contiene a S.*

Proof. Notese que $[S) \neq L$ por lo cual se puede aplicar el Teorema del filtro primo. □ □

Lemma 26. *Sea $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ un algebra de Boole. Entonces para un filtro $F \subseteq B$ las siguientes son equivalentes: (1) F es primo (2) $x \in F$ o $x^c \in F$, para cada $x \in B$.*

Proof. (1)⇒(2). Ya que $x \mathsf{s} x^c = 1 \in F$, (2) se cumple si F es primo.

(2)⇒(1). Supongamos que $x \mathsf{s} y \in F$ y que $x \notin F$. Entonces por (2), $x^c \in F$ y por lo tanto tenemos que

$y \geq x^c \mathsf{i} y = (x^c \mathsf{i} x) \mathsf{s} (x^c \mathsf{i} y) = x^c \mathsf{i} (x \mathsf{s} y) \in F$,

lo cual dice que $y \in F$. □ □

Lemma 27. *Sea $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ un algebra de Boole. Supongamos que $b \neq 0$ y $a = \inf A$, con $A \subseteq B$. Entonces si $b \mathsf{i} a = 0$, existe un $e \in A$ tal que $b \mathsf{i} e^c \neq 0$.*

Proof. Supongamos que para cada $e \in A$, tengamos que $b \mathsf{i} e^c = 0$. Entonces tenemos que para cada $e \in A$,

$b = b \mathsf{i} (e \mathsf{s} e^c) = (b \mathsf{i} e) \mathsf{s} (b \mathsf{i} e^c) = b \mathsf{i} e$,

lo cual nos dice que b es cota inferior de A. Pero entonces $b \leq a$, por lo cual $b = b \mathsf{i} a = 0$, contradiciendo la hipotesis. □ □

Theorem 28. *(Rasiova y Sikorski) Sea $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ un algebra de Boole. Sea $x \in B$, $x \neq 0$. Supongamos que $A_1, A_2, ...$ son subconjuntos de B tales que existe $\inf(A_j)$, para cada $j = 1, 2....$ Entonces hay un filtro primo P el cual cumple: (a) $x \in P$ (b) $P \supseteq A_j \Rightarrow P \ni \inf(A_j)$, para cada $j = 1, 2, ...$*

Proof. Sean $a_j = \inf(A_j)$, $j = 1, 2, ...$ Construiremos inductivamente una sucesion $b_0, b_1, ...$ de elementos de B tal que:

(1) $b_0 = x$ (2) $b_0 \mathsf{i} ... \mathsf{i} b_n \neq 0$, para cada $n \geq 0$ (3) $b_j = a_j$ o $b_j^c \in A_j$, para cada $j \geq 1$. Definamos $b_0 = x$. Supongamos ya definimos $b_0, ..., b_n$, veamos como definir b_{n+1}. Si $(b_0 \mathsf{i} ... \mathsf{i} b_n) \mathsf{i} a_{n+1} \neq 0$, entonces definamos $b_{n+1} = a_{n+1}$. Si $(b_0 \mathsf{i} ... \mathsf{i} b_n) \mathsf{i} a_{n+1} = 0$, entonces por el lema anterior, tenemos que hay un $e \in A_{n+1}$ tal que $(b_0 \mathsf{i} ... \mathsf{i} b_n) \mathsf{i} e^c \neq 0$, lo cual nos permite definir $b_{n+1} = e^c$.

Usando (2) se puede probar que el conjunto $S = \{b_0, b_1, ...\}$ satisface la hipotesis del primer corolario del Teorema del filtro primo, por lo cual hay un filtro primo P tal que $\{b_0, b_1, ...\} \subseteq P$. Es facil chequear que P satisface las propiedades (a) y (b). □ □

2 Términos y fórmulas

Lemma 29. *Supongamos $t \in T_k^\tau$, con $k \geq 1$. Entonces ya sea $t \in Var \cup \mathcal{C}$ o $t = f(t_1, ..., t_n)$, con $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$, $t_1, ..., t_n \in T_{k-1}^\tau$.*

Proof. Por induccion en k.

CASO $k = 1$: Es directo ya que por definicion

$T_1^\tau = Var \cup \mathcal{C} \cup \{f(t_1, ..., t_n) : f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, t_1, ..., t_n \in T_0^\tau\}$.

CASO $k \Rightarrow k+1$: Sea $t \in T_{k+1}^\tau$. Por definicion de T_{k+1}^τ tenemos que $t \in T_k^\tau$ o $t = f(t_1, ..., t_n)$ con $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$ y $t_1, ..., t_n \in T_k^\tau$. Si se da que $t \in T_k^\tau$, entonces podemos aplicar hipotesis inductiva y usar que $T_{k-1}^\tau \subseteq T_k^\tau$. Esto completa el caso. □ □

Lemma 30. *Sea $b \in Bal$. Se tiene: (1) $|b|_(- |b|_) = 0$ (2) Si x es tramo inicial propio de b, entonces $|x|_(- |x|_) > 0$ (3) Si x es tramo final propio de b, entonces $|x|_(- |x|_) < 0$*

Proof. Probaremos por induccion en k, que valen (1), (2) y (3) para cada $b \in Bal_k$. El caso $k = 1$ es trivial. Supongamos $b \in Bal_{k+1}$. Si $b \in Bal_k$, se aplica directamente HI. Supongamos entonces que $b = (b_1...b_n)$, con $b_1, ..., b_n \in Bal_k$, $n \geq 1$. Por HI, $b_1, ..., b_n$ cumplen (1) por lo cual b cumple (1). Veamos que b cumple (2). Sea x un tramo inicial propio de b. Notese que x es de la forma $x = (b_1...b_i x_1$ con $0 \leq i \leq n-1$ y x_1 un tramo inicial de b_{i+1} (en el caso $i = 0$ interpretamos $b_1...b_i = \varepsilon$). Pero entonces ya que

$$|x|_(- |x|_) = 1 + \left(\sum_{j=1}^{i} |b_j|_(- |b_j|_) \right) + |x_1|_(- |x_1|_)$$

tenemos que por HI, se da que $|x|_(- |x|_) > 0$. En forma analoga se puede ver que b cumple (3). □ □

Lemma 31. *$del(xy) = del(x)del(y)$, para todo $x, y \in \Sigma^*$*

Lemma 32. *Supongamos que Σ es tal que $T^\tau \subseteq \Sigma^*$. Entonces $del(t) \in Bal$, para cada $t \in T^\tau - (Var \cup \mathcal{C})$*

Lemma 33. *Sean $s, t \in T^\tau$ y supongamos que hay palabras x, y, z, con $y \neq \varepsilon$ tales que $s = xy$ y $t = yz$. Entonces $x = z = \varepsilon$ o $s, t \in \mathcal{C}$. En particular si un termino es tramo inicial o final de otro termino, entonces dichos terminos son iguales.*

Proof. Supongamos $s \in \mathcal{C}$. Ya que $y \neq \varepsilon$ tenemos que t debe comenzar con un simbolo que ocurre en un nombre de cte, lo cual dice que t no puede ser ni una variable ni de la forma $g(t_1, ..., t_m)$, es decir $t \in \mathcal{C}$. Supongamos $s \in Var$. Si $x \neq \varepsilon$ tenemos que t debe comenzar con alguno de los siguientes simbolos

0 1 ... 9 **0 1 ... 9**

lo cual es absurdo. O sea que $x = \varepsilon$ y por lo tanto t debe comenzar con X. Pero esto dice que $t \in Var$ de lo que sigue facilmente que $z = \varepsilon$. Supongamos entonces que s es de la forma $f(s_1, ..., s_n)$. Ya que) debe ocurrir en t, tenemos que t es de la forma $g(t_1, ..., t_m)$. O sea que $del(s), del(t) \in Bal$. Ya que) ocurre en y, $del(y) \neq \varepsilon$. Tenemos tambien que

$$del(s) = del(x)del(y)$$
$$del(t) = del(y)del(z)$$

La primera igualdad, por (3) del Lema 118, nos dice que $|del(y)|_(- |del(y)|_) \leq 0$,

y la segunda que $|del(y)|_(- |del(y)|_) \geq 0$,

por lo cual $|del(y)|_(- |del(y)|_) = 0$

Pero entonces ya que $del(y)$ es tramo final de $del(s)$, (3) del Lema 118 nos dice que $del(x) = \varepsilon$. Similarmente obtenemos que $del(z) = \varepsilon$. Ya que que t termina con) tenemos que $z = \varepsilon$. O sea que $f(s_1, ..., s_n) = xg(t_1, ..., t_m)$ con $del(x) = \varepsilon$, de lo que se saca que $f = xg$ ya que (no ocurre en x. De la definicion de tipo se desprende que $x = \varepsilon$. □ □

Theorem 34. *(Lectura unica de terminos). Dado $t \in T^\tau$ se da una de las siguientes: (1) $t \in Var \cup \mathcal{C}$ (2) Hay unicos $n \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1, ..., t_n \in T^\tau$ tales que $t = f(t_1, ..., t_n)$.*

Proof. En virtud del Lema 117 solo nos falta probar la unicidad en el punto (2). Supongamos que

$$t = f(t_1, ..., t_n) = g(s_1, ..., s_m)$$

con $n, m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_n$, $g \in \mathcal{F}_m$, $t_1, ..., t_n, s_1, ..., s_m \in T^\tau$. Notese que $f = g$. O sea que $n = m = a(f)$. Notese que t_1 es tramo inicial de s_1 o s_1 es tramo inicial de t_1, lo cual por el lema anterior nos dice que $t_1 = s_1$. Con el mismo razonamiento podemos probar que debera suceder $t_2 = s_2, ..., t_n = s_n$. □ □

Lemma 35. *Sean $r, s, t \in T^\tau$. (a) Si $s \neq t = f(t_1, ..., t_n)$ y s ocurre en t, entonces dicha ocurrencia sucede dentro de algun t_j, $j = 1, ..., n$. (b) Si r, s ocurren en t, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una ocurre dentro de otra. En particular, las distintas ocurrencias de r en t son disjuntas. (c) Si t' es el resultado de reemplazar una ocurrencia de s en t por r, entonces $t' \in T^\tau$.*

Proof. (a) Supongamos la ocurrencia de s comienza en algun t_j. Entonces el Lema 121 nos conduce a que dicha ocurrencia debera estar contenida en t_j. Veamos que la ocurrencia de s no puede ser a partir de un $i \in \{1, ..., |f|\}$. Supongamos lo contrario. Tenemos entonces que s debe ser de la forma $g(s_1, ..., s_m)$ ya que no puede estar en $Var \cup \mathcal{C}$. Notese que $i \neq 1$ ya que en caso contrario s seria un tramo inicial propio de t. Pero entonces g debe ser un tramo final propio de f, lo cual es absurdo. Ya que s no puede comenzar con parentesis o coma, hemos contemplado todos los posibles casos de comienzo de la ocurrencia de s en t.

(b) y (c) pueden probarse por induccion, usando (a). □ □

Lemma 36. *Supongamos $\varphi \in F_k^\tau$, con $k \geq 1$. Entonces φ es de alguna de las siguientes formas $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$.*

$\varphi = r(t_1, ..., t_n)$, con $r \in \mathcal{R}_n$, $t_1, ..., t_n \in T^\tau$

$\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, con $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F_{k-1}^\tau$

$\varphi = \neg\varphi_1$, *con* $\varphi_1 \in F^\tau_{k-1}$

$\varphi = Qv\varphi_1$, *con* $Q \in \{\forall, \exists\}$, $v \in Var$ *y* $\varphi_1 \in F^\tau_{k-1}$.

Proof. Induccion en k. □ □

Lemma 37. *Sea τ un tipo. (a) Supongamos que Σ es tal que $F^\tau \subseteq \Sigma^*$. Entonces $del(\varphi) \in Bal$, para cada $\varphi \in F^\tau$. (b) Sea $\varphi \in F^\tau_k$, con $k \geq 0$. Existen $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$ y $\varphi_1 \in F^\tau$ tales que $\varphi = x\varphi_1$ y φ_1 es de la forma $(\psi_1\eta\psi_2)$ o atomica. En particular toda formula termina con el simbolo).*

Proof. (b) Induccion en k. El caso $k = 0$ es trivial. Supongamos (b) vale para cada $\varphi \in F^\tau_k$ y sea $\varphi \in F^\tau_{k+1}$. Hay varios casos de los cuales haremos solo dos

CASO $\varphi = (\varphi_1\eta\varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau_k$ y $\eta \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Podemos tomar $x = \varepsilon$ y $\varphi_1 = \varphi$.

CASO $\varphi = Qx_i\psi$, con $\psi \in F^\tau_k$, $i \geq 1$ y $Q \in \{\forall, \exists\}$.

Por HI hay $\bar{x} \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$ y $\psi_1 \in F^\tau$ tales que $\psi = x\psi_1$ y ψ_1 es de la forma $(\gamma_1\eta\gamma_2)$ o atomica. Entonces es claro que $x = Qx_i\bar{x}$ y $\varphi_1 = \psi_1$ cumplen (b). □ □

Lemma 38. *Ninguna formula es tramo final propio de una formula atomica, es decir, si $\varphi = x\psi$, con $\varphi \in F^\tau_0$ y , $\psi \in F^\tau$, entonces $x = \varepsilon$.*

Proof. Si φ es de la forma $(t \equiv s)$, entonces $|del(y)|_(- |del(y)|_) < 0$ para cada tramo final propio y de φ, lo cual termina el caso ya que $del(\psi)$ es balanceada. Supongamos entonces $\varphi = r(t_1, ..., t_n)$. Notese que ψ no puede ser tramo final de $t_1, ..., t_n)$ ya que $del(\psi)$ es balanceada y $|del(y)|_(- |del(y)|_) < 0$ para cada tramo final y de $t_1, ..., t_n)$. Es decir que $\psi = y(t_1, ..., t_n)$, para algun tramo final y de r. Ya que en ψ no ocurren cuantificadores ni nexos ni el simbolo $\equiv$ el Lema 124 nos dice $\psi = \tilde{r}(s_1, ..., s_m)$, con $\tilde{r} \in \mathcal{R}_m$, $m \geq 1$ y $s_1, ..., s_m \in T^\tau$. Ahora es facil usando un argumento paresido al usado en la prueba del Teorema 122 concluir que $m = n$, $s_i = t_i$, $i = 1, ..., n$ y $\tilde{r}$ es tramo final de r. Por (3) de la definicion de tipo tenemos que $\tilde{r} = r$ lo cual nos dice que $\varphi = \psi$ y $x = \varepsilon$ □ □

Lemma 39. *Si $\varphi = x\psi$, con $\varphi, \psi \in F^\tau$ y x sin parentesis, entonces $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$*

Proof. Por induccion en el k tal que $\varphi \in F^\tau_k$. El caso $k = 0$ es probado en el lema anterior. Asumamos que el resultado vale cuando $\varphi \in F^\tau_k$ y veamos que vale cuando $\varphi \in F^\tau_{k+1}$. Mas aun supongamos $\varphi \in F^\tau_{k+1} - F^\tau_k$. Primero haremos el caso en que $\varphi = Qv\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $v \in Var$ y $\varphi_1 \in F^\tau_k$. Supongamos $x \neq \varepsilon$. Ya que ψ no comienza con simbolos de v, tenemos que ψ debe ser tramo final de φ_1 lo cual nos dice que hay una palabra x_1 tal que $x = Qvx_1$ y $\varphi_1 = x_1\psi$. Por HI tenemos que $x_1 \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$ con lo cual $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$. El caso en el que $\varphi = \neg\varphi_1$ con $\varphi_1 \in F^\tau_k$, es similar. Note que no hay mas casos posibles ya que φ no puede comenzar con (porque en x no ocurren parentesis por hipotesis □ □

Proposition 40. *Si $\varphi, \psi \in F^\tau$ y x, y, z son tales que $\varphi = xy$, $\psi = yz$ y $y \neq \varepsilon$, entonces $z = \varepsilon$ y $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$. En particular ningun tramo inicial propio de una formula es una formula.*

Proof. Ya que φ termina con) tenemos que $del(y) \neq \varepsilon$. Ya que $del(\varphi), del(\psi) \in Bal$ y ademas

$$\begin{array}{rcl} del(\varphi) & = & del(x)del(y) \\ del(\psi) & = & del(y)del(z) \end{array}$$

tenemos que $del(y)$ es tramo inicial y final de palabras balanceadas, lo cual nos dice que $|del(y)|_(- |del(y)|_) = 0$

Pero esto por (3) del Lema 118 nos dice que $del(x) = \varepsilon$. Similarmente obtenemos que $del(z) = \varepsilon$. Pero ψ termina con) lo cual nos dice que $z = \varepsilon$. Es decir que $\varphi = x\psi$. Por el lema anterior tenemos que $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$ □ □

Theorem 41. *(Lectura unica de formulas) Dada $\varphi \in F^\tau$ se da una y solo una de las siguientes: (1) $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$ (2) $\varphi = r(t_1, ..., t_n)$, con $r \in \mathcal{R}_n$, $t_1, ..., t_n \in T^\tau$ (3) $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, con $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$ (4) $\varphi = \neg\varphi_1$, con $\varphi_1 \in F^\tau$ (5) $\varphi = Qv\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $\varphi_1 \in F^\tau$ y $v \in Var$. Mas aun, en los puntos (1), (2), (3), (4) y (5) tales descomposiciones son unicas.*

Proof. Si una formula φ satisface (1), entonces φ no puede contener simbolos del alfabeto $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ lo cual garantiza que φ no puede satisfacer (3). Ademas φ no puede satisfacer (2) o (4) o (5) ya que φ comienza con (. En forma analoga se puede terminar de ver que las propiedades (1),...,(5) son excluyentes.

La unicidad en las descomposiciones de (4) y (5) es obvia. La de (3) se desprende facilmente del lema anterior y la de los puntos (1) y (2) del lema analogo para terminos. □ □

Lemma 42. *Sea τ un tipo. (a) Las formulas atomicas no tienen subformulas propias. (b) Si φ ocurre propiamente en $(\psi\eta\varphi)$, entonces tal ocurrencia es en ψ o en φ. (c) Si φ ocurre propiamente en $\neg\psi$, entonces tal ocurrencia es en ψ. (d) Si φ ocurre propiamente en $Qx_k\psi$, entonces tal ocurrencia es en ψ. (e) Si φ_1, φ_2 ocurren en φ, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una contiene a la otra. (f) Si λ' es el resultado de reemplazar alguna ocurrencia de φ en λ por ψ, entonces $\lambda' \in F^\tau$.*

Proof. Ejercicio. □

3 Estructuras

Lemma 43. *Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y sea $t \in T^\tau$. Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que $a_i = b_i$, cada vez que x_i ocurra en t. Entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$.*

Proof. Sea

- Teo$_k$: El lema vale para $t \in T_k^\tau$. Teo$_0$ es facil de probar. Veamos Teo$_k \Rightarrow$Teo$_{k+1}$. Supongamos $t \in T_{k+1}^\tau - T_k^\tau$ y sean $\vec{a}, \vec{b}$ asignaciones tales que $a_i = b_i$, cada vez que x_i ocurra en t. Notese que $t = f(t_1, ..., t_n)$, con $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$ y $t_1, ..., t_n \in T^\tau$. Notese que para cada $j = 1, ..., n$, tenemos que $a_i = b_i$, cada vez que x_i ocurra en t_j, lo cual por Teo$_k$ nos dice que

$t_j^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t_j^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$, $j = 1, ..., n$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] &= i(f)(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \text{ (por def de } t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\ &= i(f)(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{b}], ..., t_n^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) \\ &= t^{\mathbf{A}}[\vec{b}] \text{ (por def de } t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \end{aligned}$$

□ □

Lemma 44. *(a) $Li((t \equiv s)) = \{v \in Var : v$ ocurre en t o v ocurre en $s\}$. (b) $Li(r(t_1, ..., t_n)) = \{v \in Var : v$ ocurre en algun $t_i\}$. (c) $Li(\neg\varphi) = Li(\varphi)$ (d) $Li((\varphi\eta\psi)) = Li(\varphi) \cup Li(\psi)$. (e) $Li(Qx_j\varphi) = Li(\varphi) - \{x_j\}$.*

Proof. (a) y (b) son triviales de las definiciones, teniendo en cuenta que si una variable v ocurre en $(t \equiv s)$ (resp. en $r(t_1, ..., t_n)$) entonces v ocurre en t o v ocurre en s (resp.v ocurre en algun t_i)

(d) Supongamos $v \in Li((\varphi\eta\psi))$, entonces hay un i tal que v ocurre libremente en $(\varphi\eta\psi)$ a partir de i. Por definicion tenemos que ya sea v ocurre libremente en φ a partir de $i-1$ o v ocurre libremente en ψ a partir de $i - |(\varphi\eta|$, con lo cual $v \in Li(\varphi) \cup Li(\psi)$

Supongamos ahora que $v \in Li(\varphi) \cup Li(\psi)$. S.p.d.g. supongamos $v \in Li(\psi)$. Por definicion tenemos que hay un i tal que v ocurre libremente en ψ a partir de i. Pero notese que esto nos dice por definicion que v ocurre libremente en $(\varphi\eta\psi)$ a partir de $i + |(\varphi\eta|$ con lo cual $v \in Li((\varphi\eta\psi))$.

(c) es similar a (d)

(e) Supongamos $v \in Li(Qx_j\varphi)$, entonces hay un i tal que v ocurre libremente en $Qx_j\varphi$ a partir de i. Por definicion tenemos que $v \neq x_j$ y v ocurre libremente en φ a partir de $i - |Qx_j|$, con lo cual $v \in Li(\varphi) - \{x_j\}$

Supongamos ahora que $v \in Li(\varphi) - \{x_j\}$. Por definicion tenemos que hay un i tal que v ocurre libremente en φ a partir de i. Ya que $v \neq x_j$ esto nos dice por definicion que v ocurre libremente en $Qx_j\varphi$ a partir de $i + |Qx_j|$, con lo cual $v \in Li(Qx_j\varphi)$. □ □

Lemma 45. *Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$. Entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$*

Proof. Probaremos por induccion en k que el lema vale para cada $\varphi \in F_k^\tau$. El caso $k = 0$ se desprende del Lema 131. Veamos que Teo_k implica Teo_{k+1}. Sea $\varphi \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$. Hay varios casos:

CASO $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.

Ya que $Li(\varphi_i) \subseteq Li(\varphi)$, $i = 1, 2$, Teo_k nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi_i[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi_i[\vec{b}]$, para $i = 1, 2$. Se tiene entonces que

$\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$

$\Updownarrow$ (por (3) en la def de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$)

$\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$

$\Updownarrow$ (por Teo_k)

$\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{b}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{b}]$

$\Updownarrow$ (por (3) en la def de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$)

$\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$

CASO $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.

Es completamente similar al anterior.

CASO $\varphi = \neg\varphi_1$.

Es completamente similar al anterior.

CASO $\varphi = \forall x_j \varphi_1$.

Supongamos $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$. Entonces por (8) en la def de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ se tiene que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{a})]$, para todo $a \in A$. Notese que $\downarrow_j^a (\vec{a})$ y $\downarrow_j^a (\vec{b})$ coinciden en toda x_i de $x_i \in Li(\varphi_1) \subseteq Li(\varphi_1) \cup \{x_j\}$, con lo cual por Teo_k se tiene que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{b})]$, para todo $a \in A$, lo cual por (8) en la def de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$. La prueba de que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$ implica que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ es similar.

CASO $\varphi = \exists x_j \varphi_1$.

Es similar al anterior. □ □

Corollary 46. *Si φ es una sentencia, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$, cualesquiera sean las asignaciones $\vec{a}, \vec{b}$.*

Lemma 47. *(a) Si $Li(\varphi) \cup Li(\psi) \subseteq \{x_{i_1}, ..., x_{i_n}\}$, entonces $\varphi \sim \psi$ si y solo si la sentencia $\forall x_{i_1} ... \forall x_{i_n} (\varphi \leftrightarrow \psi)$ es universalmente valida. (b) Si $\varphi_i \sim \psi_i$, $i = 1, 2$, entonces $\neg\varphi_1 \sim \neg\psi_1$, $(\varphi_1 \eta \varphi_2) \sim (\psi_1 \eta \psi_2)$ y $Qv\varphi_1 \sim Qv\psi_1$. (c) Si $\varphi \sim \psi$ y α' es el resultado de reemplazar en una formula α algunas (posiblemente 0) ocurrencias de φ por ψ, entonces $\alpha \sim \alpha'$.*

Proof. Tenemos que

$\varphi \sim \psi$
$\Updownarrow$ (por (6) de la def de $\models$)
$\mathbf{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}]$, para todo $\mathbf{A}$ y toda $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$
$\Updownarrow$
$\mathbf{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[\downarrow_{i_n}^{a} (\vec{a})]$, para todo $\mathbf{A}$, $a \in A$ y toda $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$
$\Updownarrow$ (por (8) de la def de $\models$)
$\mathbf{A} \models \forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}]$, para todo $\mathbf{A}$ y toda $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$
$\Updownarrow$
$\mathbf{A} \models \forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)[\downarrow_{i_{n-1}}^{a} (\vec{a})]$, para todo $\mathbf{A}$, $a \in A$ y toda $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$
$\Updownarrow$ (por (8) de la def de $\models$)
$\mathbf{A} \models \forall x_{i_{n-1}} \forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}]$, para todo $\mathbf{A}$ y toda $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$
$\Updownarrow$
$\vdots$
$\Updownarrow$
$\mathbf{A} \models \forall x_{i_1} ... \forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}]$, para todo $\mathbf{A}$ y toda $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$
$\Updownarrow$
$\forall x_{i_1} ... \forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)$ es universalmente valida
(b) Es dejado al lector.
(c) Por induccion en el k tal que $\alpha \in F_k^\tau$. $\square$ $\square$

Lemma 48. *Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo. Entonces $F(t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, ...)] = t^{\mathbf{B}}[F(a_1), F(a_2), ...)]$ para cada $t \in T^\tau$, $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$.*

Proof. Sea
- Teo$_k$: Si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, entonces $F(t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, ...)] = t^{\mathbf{B}}[F(a_1), F(a_2), ...)]$ para cada $t \in T_k^\tau$, $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$. Teo$_0$ es trivial. Veamos que Teo$_k$ implica Teo$_{k+1}$.

Supongamos que vale Teo$_k$ y supongamos $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, $t \in T_{k+1}^\tau - T_k^\tau$ y $\vec{a} = (a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$. Denotemos $(F(a_1), F(a_2), ...)$ con $F(\vec{a})$. Por Lema 117, $t = f(t_1, ..., t_n)$, con $n \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_n$ y $t_1, ..., t_n \in T_k^\tau$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
F(t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) &= F(f(t_1, ..., t_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\
&= F(f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])) \\
&= f^{\mathbf{B}}(F(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}]), ..., F(t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])) \\
&= f^{\mathbf{B}}(t_1^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})], ..., t_n^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})])) \\
&= f(t_1, ..., t_n)^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})] \\
&= t^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})]
\end{aligned}$$

$\square$ $\square$

Lemma 49. *Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^\tau$. Entonces $\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, ...)]$ sii $\mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), ...)]$ para cada $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$. En particular $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ satisfacen las mismas sentencias de tipo τ.*

Lemma 50. *Si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo*

Proof. Solo falta probar que F^{-1} es un homomorfismo. Supongamos que $c \in \mathcal{C}$. Ya que $F(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$, tenemos que $F^{-1}(c^{\mathbf{B}}) = c^{\mathbf{A}}$, por lo cual F^{-1} cumple (1) de la definicion de homomorfismo. Supongamos ahora que $f \in \mathcal{F}_n$ y sean $b_1, ..., b_n \in B$. Sean $a_1, ..., a_n \in A$ tales que $F(a_i) = b_i$, $i = 1, ..., n$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
F^{-1}(f^{\mathbf{B}}(b_1, ..., b_n)) &= F^{-1}(f^{\mathbf{B}}(F(a_1), ..., F(a_n))) \\
&= F^{-1}(F(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)) \\
&= f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) \\
&= f^{\mathbf{A}}(F^{-1}(b_1), ..., F^{-1}(b_n))
\end{aligned}$$

por lo cual F^{-1} satisface (2) de la definicion de homomorfismo $\square$ $\square$

Lemma 51. *Si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $\mathbf{B}$*

Proof. Ya que $A \neq \varnothing$, tenemos que $I_F \neq \varnothing$. Es claro que $c^{\mathbf{B}} = F(c^{\mathbf{A}}) \in I_F$, para cada $c \in \mathcal{C}$. Sea $f \in \mathcal{F}_n$ y sean $b_1, ..., b_n \in I_F$ Sean $a_1, ..., a_n$ tales que $F(a_i) = b_i$, $i = 1, ..., n$. Tenemos que

$f^{\mathbf{B}}(b_1, ..., b_n) = f^{\mathbf{B}}(F(a_1), ..., F(a_n)) = F(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)) \in I_F$

por lo cual I_F es cerrada bajo $f^{\mathbf{B}}$. □

Lemma 52. *Si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, entonces $\ker F$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$*

Proof. Sea $f \in \mathcal{F}_n$. Supongamos que $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in A$ son tales que $a_1 \ker F b_1, ..., a_n \ker F b_n$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} F(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)) &= f^{\mathbf{B}}(F(a_1), ..., F(a_n)) \\ &= f^{\mathbf{B}}(F(b_1), ..., F(b_n)) \\ &= F(f^{\mathbf{B}}(b_1, ..., b_n)) \end{aligned}$$

lo cual nos dice que $f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) \ker F f^{\mathbf{B}}(b_1, ..., b_n)$ □ □

Lemma 53. *$\pi_\theta : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\theta$ es un homomorfismo cuyo nucleo es θ*

Proof. Sea $c \in \mathcal{C}$. Tenemos que

$\pi_\theta(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{A}}/\theta = c^{\mathbf{A}/\theta}$

Sea $f \in \mathcal{F}_n$, con $n \geq 1$ y sean $a_1, ..., a_n \in A$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_\theta(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)) &= f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)/\theta \\ &= f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, ..., a_n/\theta) \\ &= f^{\mathbf{A}/\theta}(\pi_\theta(a_1), ..., \pi_\theta(a_n) \end{aligned}$$

con lo cual π_θ es un homomorfismo. Es trivial que $\ker \pi_\theta = \theta$ □ □

Corollary 54. *Para cada $t \in T^\tau$, $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$, se tiene que $t^{\mathbf{A}/\theta}[(a_1/\theta, a_2/\theta, ...)] = t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, ...)]/\theta$.*

Proof. Ya que π_θ es un homomorfismo, se puede aplicar el Lema 136. □ □

Theorem 55. *Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo sobreyectivo. Entonces* $\begin{array}{ccc} A/\ker F & \to & B \\ a/\ker F & \to & F(a) \end{array}$ *define sin ambiguedad una funcion $\bar{F}$ la cual es un isomorfismo de $\mathbf{A}/\ker F$ en $\mathbf{B}$*

Proof. Notese que la definicion de $\bar{F}$ es inambigua ya que si $a/\ker F = a'/\ker F$, entonces $F(a) = F(a')$. Ya que F es sobre, tenemos que $\bar{F}$ lo es. Supongamos que $\bar{F}(a/\ker F) = \bar{F}(a'/\ker F)$. Claramente entonces tenemos que $F(a) = F(a')$, lo cual nos dice que $a/\ker F = a'/\ker F$. Esto prueba que $\bar{F}$ es inyectiva. Para ver que $\bar{F}$ es un isomorfismo, por el Lema 138, basta con ver que $\bar{F}$ es un homomorfismo. Sea $c \in \mathcal{C}$. Tenemos que

$\bar{F}(c^{\mathbf{A}/\ker F}) = \bar{F}(c^{\mathbf{A}}/\ker F) = F(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$

Sea $f \in \mathcal{F}_n$. Sean $a_1, ..., a_n \in A$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{F}(f^{\mathbf{A}/\ker F}(a_1/\ker F, ..., a_n/\ker F)) &= \bar{F}(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n \\ &= F(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n \\ &= f^{\mathbf{B}}(F(a_1), ..., F \\ &= f^{\mathbf{B}}(\bar{F}(a_1/\ker F \end{aligned}$$

con lo cual $\bar{F}$ cunple (2) de la definicion de homomorfismo □

Lemma 56. *Los mapeos $\pi_1 : A \times B \to A$ y $\pi_2 : A \times B \to A$ son homomorfismos*

Proof. Veamos que π_1 es un homomorfismo. Primero notese que si $c \in \mathcal{C}$, entonces

$\pi_1(c^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}) = \pi_1((c^{\mathbf{A}}, c^{\mathbf{B}})) = c^{\mathbf{A}}$

Sea $f \in \mathcal{F}_n$, con $n \geq 1$ y sean $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n) \in A \times B$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_1(f^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

con lo cual hemos probado que π_1 cumple (2) de la definicion de homomorfismo □

Lemma 57. *Para cada* $t \in T^\tau$, $((a_1,b_1),(a_2,b_2),...) \in (A\times B)^{\mathbf{N}}$, *se tiene que* $t^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}[((a_1,b_1),(a_2,b_2),...)] = (t^{\mathbf{A}}[(a_1,a_2,...)], t^{\mathbf{B}}[(b_1,b_2,...)])$

Lemma 58. *Sean* $w_1,...,w_k$ *variables, todas distintas. Sean* $v_1,...,v_n$ *variables, todas distintas. Supongamos* $t =_d t(w_1,...,w_k)$, $s_1 =_d s_1(v_1,...,v_n),...,s_k =_d s_k(v_1,...,v_n)$. *Entonces (a)* $t(s_1,...,s_k) =_d t(s_1,...,s_k)(v_1,...,v_n)$ *(b) Para cada estructura* $\mathbf{A}$ *y* $a_1,....,a_n \in A$, *se tiene que* $t(s_1,...,s_k)^{\mathbf{A}}[a_1,....,a_n] = t^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[a_1,....,a_n],...,s_k^{\mathbf{A}}[a_1,....,a_n]]$.

Proof. Probaremos que valen (a) y (b), por induccion en el l tal que $t \in T_l^\tau$. El caso $l = 0$ es dejado al lector. Supongamos entonces que valen (a) y (b) siempre que $t \in T_l^\tau$ y veamos que entonces valen (a) y (b) cuando $t \in T_{l+1}^\tau - T_l^\tau$. Hay $f \in \mathcal{F}_m$ y $t_1,...,t_m \in T_l^\tau$ tales que $t_1 =_d t_1(w_1,...,w_k),...,t_m =_d t_m(w_1,...,w_k)$ y $t = f(t_1,...,t_m)$. Notese que por (a) de la HI tenemos que

$t_i(s_1,...,s_k) =_d t_i(s_1,...,s_k)(v_1,...,v_n)$, $i = 1,...,m$

lo cual ya que $t(s_1,...,s_k) = f(t_1(s_1,...,s_k),...,t_m(s_1,...,s_k))$

nos dice que $t(s_1,...,s_k) =_d t(s_1,...,s_k)(v_1,...,v_n)$

obteniendo asi (a). Para probar (b) notemos que por (b) de la hipotesis inductiva $t_j(s_1,...,s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t_j^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}],...,s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]]$, $j = 1,...,m$

lo cual nos dice que
$$\begin{array}{rcl} t(s_1,...,s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] & = & f(t_1(s_1,...,s_k),...,t_m(s_1,...,s_k))^{\mathbf{A}}[\vec{a}] \\ & = & f^{\mathbf{A}}(t_1(s_1,...,s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}],...,t_m(s_1,...,s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}],...,s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]],...,t_m^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}],...,s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]]) \\ & = & t^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}],...,s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]] \end{array}$$ □

Lemma 59. *Si* Qv *ocurre en* φ *a partir de* i, *entonces hay una unica formula* ψ *tal que* $Qv\psi$ *ocurre en* φ *a partir de* i.

Proof. Por induccion en el k tal que $\varphi \in F^\tau$. □

Lemma 60. *Sean* $w_1,...,w_k$ *variables, todas distintas. Sean* $v_1,...,v_n$ *variables, todas distintas. Supongamos* $\varphi =_d \varphi(w_1,...,w_k)$, $t_1 =_d t_1(v_1,...,v_n),...,t_k =_d t_k(v_1,...,v_n)$ *son tales que cada* w_j *es sustituible por* t_j *en* φ. *Entonces (a)* $\varphi(t_1,...,t_k) =_d \varphi(t_1,...,t_k)(v_1,...,v_n)$ *(b) Para cada estructura* $\mathbf{A}$ *y* $\vec{a} \in A^n$ *se tiene* $\mathbf{A} \models \varphi(t_1,...,t_k)[\vec{a}]$ *si y solo si* $\mathbf{A} \models \varphi[t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}],...,t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]]$

Proof. Probaremos que se dan (a) y (b), por induccion en el l tal que $\varphi \in F_l^\tau$. El caso $l = 0$ es una consecuencia directa del Lema 146. Supongamos (a) y (b) valen para cada $\varphi \in F_l^\tau$ y sea $\varphi \in F_{l+1}^\tau - F_l^\tau$. Notese que se puede suponer que cada v_i ocurre en algun t_i, y que cada $w_i \in Li(\varphi)$, ya que para cada φ, el caso general se desprende del caso con estas restricciones. Hay varios casos

CASO $\varphi = \forall w\varphi_1$, con $w \notin \{w_1,...,w_k\}$ y $\varphi_1 =_d \varphi_1(w_1,...,w_k,w)$

Notese que cada $w_j \in Li(\varphi_1)$. Ademas notese que $w \notin \{v_1,...,v_n\}$ ya que de lo contrario w ocurriria en algun t_j, y entonces w_j no seria sustituible por t_j en φ. Sean

$$\begin{array}{rcl} \tilde{t}_1 & = & t_1 \\ & \vdots & \\ \tilde{t}_k & = & t_k \\ \tilde{t}_{k+1} & = & w \end{array}$$

Notese que $\tilde{t}_j =_d \tilde{t}_j(v_1,...,v_n,w)$

Por (a) de la hipotesis inductiva tenemos que $Li(\varphi_1(t_1,...,t_k,w)) = Li(\varphi_1(\tilde{t}_1,...,\tilde{t}_k,\tilde{t}_{k+1})) \subseteq \{v_1,...,v_n,w\}$

y por lo tanto $Li(\varphi(t_1,...,t_k)) \subseteq \{v_1,...,v_n\}$

$$\begin{array}{c}\mathbf{A} \models \varphi(t_1, ..., t_k)[\vec{a}] \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \varphi_1(\tilde{t}_1, ..., \tilde{t}_k, \tilde{t}_{k+1})[\vec{a}, a], \text{ para todo } a \in A\end{array}$$

lo cual prueba (a). Finalmente notese que

$$\begin{array}{c}\mathbf{A} \models \varphi_1[\tilde{t}_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}, a], ..., \tilde{t}_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}, a], \tilde{t}_{k+1}^{\mathbf{A}}[\vec{a}, a]], \text{ para todo } a \in A \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \varphi_1[t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}], a], \text{ para todo } a \in A \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \varphi[t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]]\end{array}$$

lo cual pueba (b). El caso del cuantificador $\exists$ es analogo y los casos de nexos logicos son directos. $\square$

4 Teorias de primer orden

5 La aritmética de Peano