Resumen de teoremas para el final de Lógica

Agustín Curto, agucurto95@gmail.com
Francisco Nievas, frannievas@gmail.com

2017

Contents

Nota: Este resumen se corresponde con la materia dictada en el año 2017. Los autores no se responsabilizan de posibles cambios que pudiesen realizarse en los temas dictados en la misma, así como tampoco de errores involuntarios que pudiesen existir en dicho resumen.

Por favor, mejorá este documento en github
https://github.com/ResumenesFaMAF/resumenLogica

1 Estructuras algebráicas ordenadas

Lemma 1. *Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Supongamos que F es un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$, entonces:*

*a) Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que a es **cota superior** (resp. **inferior**) de S si y solo si $F(a)$ es **cota superior** (resp. **inferior**) de $F(S)$.*

b) Para cada $S \subseteq P$, se tiene que $\exists \sup(S)$ si y solo si $\exists \sup(F(S))$ y en el caso de que existan tales elementos se tiene que $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$.

c) P tiene 1 (resp. 0) si y solo si P' tiene 1 (resp. 0) y en tal caso tales elementos están conectados por F.

*d) Para cada $a \in P$, a es **maximal** (resp. **minimal**) si y solo si $F(a)$ es **maximal** (resp. **minimal**).*

e) Para $a, b \in P$, tenemos que $a \prec b$ si y solo si $F(a) \prec' F(b)$.

Proof. a) $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que a es **cota superior** de S, veamos entonces que $F(a)$ es **cota superior** de $F(S)$. Sean:

- $x \in F(S)$
- $s \in S$ tal que $x = F(s)$.

Ya que $s \leq a$, tenemos que $x = F(s) \leq' F(a)$. Luego, $F(a)$ es **cota superior**.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que $F(a)$ es **cota superior** de $F(S)$ y veamos que entonces a es cota superior de S.

Sea $s \in S$, ya que $F(s) \leq' F(a)$, tenemos que $s = F^{-1}(F(s)) \leq' F^{-1}(F(a)) = a$. Por lo tanto, a es **cota superior**.

b) $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos existe $\sup(S)$. Veamos entonces que $F(\sup(S))$ es el supremo de $F(S)$. Por (a) $F(\sup(S))$ es cota superior de $F(S)$. Supongamos b es cota superior de $F(S)$. Entonces $F^{-1}(b)$ es cota superior de S, por lo cual $\sup(S) \leq' F^{-1}(b)$, produciendo $F(\sup(S)) \leq' b$.

$\boxed{\Leftarrow}$ En forma analoga se ve que si existe $\sup(F(S))$, entonces $F^{-1}(\sup(F(S)))$ es el supremo de S.

c) Se desprende de (b) tomando $S = P$.

d) son dejados como ejercicio

e) son dejados como ejercicio

$\square$

Lemma 2. *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y, z, w \in L$, se cumplen las siguientes. (1) $x \leq x \mathsf{s} y$ (2) $x \mathsf{i} y \leq x$ (3) $x \mathsf{s} x = x \mathsf{i} x = x$ (4) $x \mathsf{s} y = y \mathsf{s} x$ (5) $x \mathsf{i} y = y \mathsf{i} x$ (6) $x \leq y$ si y solo si $x \mathsf{s} y = y$ si y solo si $x \mathsf{i} y = x$ (7) $x \mathsf{s} (x \mathsf{i} y) = x$ (8) $x \mathsf{i} (x \mathsf{s} y) = x$ (9) $(x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z = x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z)$ (10) $(x \mathsf{i} y) \mathsf{i} z = x \mathsf{i} (y \mathsf{i} z)$ (11) Si $x \leq z$ e $y \leq w$, entonces $x \mathsf{s} y \leq z \mathsf{s} w$ y $x \mathsf{i} y \leq z \mathsf{i} w$ (12) $(x \mathsf{i} y) \mathsf{s} (x \mathsf{i} z) \leq x \mathsf{i} (y \mathsf{s} z)$*

Proof. (1), (2), (3), (4), (5) y (6) son consecuencias inmediatas de la definicion de las operaciones s e i.

(7) Ya que $x \mathsf{i} y \leq x$, (6) nos dice que $(x \mathsf{i} y) \mathsf{s} x = x$, por lo cual $x \mathsf{s} (x \mathsf{i} y) = x$.

(8) Similar a (7).

(9) Notese que $x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z)$ es cota superior de $\{x, y, z\}$ ya que onviamente $x \leq x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z)$ y ademas

$$\begin{array}{rcl} y & \leq & (y \mathsf{s} z) \leq x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z) \\ z & \leq & (y \mathsf{s} z) \leq x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z) \end{array}$$

Ya que $x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z)$ es cota superior de $\{x, y\}$, tenemos que $x \mathsf{s} y \leq x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z)$, por lo cual $x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z)$ es cota superior del conjunto $\{x \mathsf{s} y, z\}$, lo cual dice que $(x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z \leq x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z)$. Analogamente se puede probar que $x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z) \leq (x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z$. (10) Similar a (9).

(11) Ya que

$$\begin{array}{rcl} x & \leq & z \leq z \mathsf{s} w \\ y & \leq & w \leq z \mathsf{s} w \end{array}$$

tenemos que $z \mathsf{s} w$ es cota superior de $\{x, y\}$ lo cual dice que $x \mathsf{s} y \leq z \mathsf{s} w$. La otra desigualdad es analoga. (12) Ya que

$$\begin{array}{rcl} (x \mathsf{i} y), (x \mathsf{i} z) & \leq & x \\ (x \mathsf{i} y), (x \mathsf{i} z) & \leq & y \mathsf{s} z \end{array}$$

tenemos que $(x \mathsf{i} y), (x \mathsf{i} z) \leq x \mathsf{i} (y \mathsf{s} z)$, por lo cual $(x \mathsf{i} y) \mathsf{s} (x \mathsf{i} z) \leq x \mathsf{i} (y \mathsf{s} z)$. ☐ ☐

Lemma 3. *Sea $(L, \leq)$ un reticulado. Dados elementos $x_1, ..., x_n \in L$, con $n \geq 2$, se tiene*

$$\begin{array}{rcl} (...(x_1 \mathsf{s} x_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s} x_n & = & \sup(\{x_1, ..., x_n\}) \\ (...(x_1 \mathsf{i} x_2) \mathsf{i} ...) \mathsf{i} x_n & = & \inf(\{x_1, ..., x_n\}) \end{array}$$

Proof. Por induccion en n. Claramente el resultado vale para $n = 2$. Supongamos vale para n y veamos entonces que vale para $n + 1$. Sean $x_1, ..., x_{n+1} \in L$. Por hipotesis inductiva tenemos que

(1) $(...(x_1 \mathsf{s} x_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s} x_n = \sup(\{x_1, ..., x_n\})$. Veamos entonces que

(2) $((...(x_1 \mathsf{s} x_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s} x_n) \mathsf{s} x_{n+1} = \sup(\{x_1, ..., x_{n+1}\})$. Es facil ver que $((...(x_1 \mathsf{s} x_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s} x_n) \mathsf{s} x_{n+1}$ es cota superior de $\{x_1, ..., x_{n+1}\}$. Supongamos que z es otra cota superior. Ya que z es tambien cota superior del conjunto $\{x_1, ..., x_n\}$, por (1) tenemos que

$(...(x_1 \mathsf{s} x_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s} x_n \leq z$.

Pero entonces ya que $x_{n+1} \leq z$, tenemos que $((...(x_1 \mathsf{s} x_2) \mathsf{s} ...) \mathsf{s} x_n) \mathsf{s} x_{n+1} \leq z$,

con lo cual hemos probado (2). ☐ ☐

Theorem 4. *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado. La relacion binaria definida por: $x \leq y$ si y solo si $x \mathsf{s} y = y$*

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple: $\begin{array}{rcl} \sup(\{x, y\}) & = & x \mathsf{s} y \\ \inf(\{x, y\}) & = & x \mathsf{i} y \end{array}$

Proof. Dejamos como ejercicio para el lector probar que $\leq$ es reflexiva y antisimetrica. Veamos que $\leq$ es transitiva. Supongamos que $x \leq y$ e $y \leq z$. Entonces

$x \mathsf{s} z = x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z) = (x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z = y \mathsf{s} z = z$,

por lo cual $x \leq z$. Veamos ahora que $\sup(\{x, y\}) = x \mathsf{s} y$. Es claro que $x \mathsf{s} y$ es una cota superior del conjunto $\{x, y\}$. Supongamos $x, y \leq z$. Entonces $(x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z = x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z) = x \mathsf{s} z = z$,

por lo que $x \mathsf{s} y \leq z$. Es decir que $x \mathsf{s} y$ es la menor cota superior. Para probar que $\inf(\{x, y\}) = x \mathsf{i} y$, probaremos que para todo $u, v \in L$,

$u \leq v$ si y solo si $u \mathsf{i} v = u$,

lo cual le permitira al lector aplicar un razonamiento similar al usado en el caso de la operacion s. Supongamos que $u \mathsf{s} v = v$. Entonces $u \mathsf{i} v = u \mathsf{i} (v \mathsf{s} v) = u$. Reciprocamente si $u \mathsf{i} v = u$, entonces $u \mathsf{s} v = (u \mathsf{i} v) \mathsf{s} v = v$, por lo cual $u \leq v$. ☐ ☐

Lemma 5. *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo*

Proof. Solo falta ver que F^{-1} es un homomorfismo. Sean $F(x), F(y)$ dos elementos cualesquiera de L'. Tenemos que
$F^{-1}(F(x) \mathsf{s}' F(y)) = F^{-1}(F(x \mathsf{s} y)) = x \mathsf{s} y = F^{-1}(F(x)) \mathsf{s} F^{-1}(F(y))$
□ □

Lemma 6. *Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados y sea $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ un homomorfismo. Entonces I_F es un subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$.*

Proof. Ya que L es no vacio tenemos que I_F tambien es no vacio. Sean $a, b \in I_F$. Sean $x, y \in L$ tales que $F(x) = a$ y $F(y) = b$. Se tiene que

$$\begin{array}{rcl} a \mathsf{s}' b & = & F(x) \mathsf{s}' F(y) = F(x \mathsf{s} y) \in I_F \\ a \mathsf{i}' b & = & F(x) \mathsf{i}' F(y) = F(x \mathsf{i} y) \in I_F \end{array}$$

por lo cual I_F es cerrada bajo s' e i'. □ □

Lemma 7. *Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados y sean $(L \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una funcion. Entonces F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si y solo si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.*

Proof. Supongamos F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$. Sean $x, y \in L$, tales que $x \leq y$. Tenemos que $y = x \mathsf{s} y$ por lo cual $F(y) = F(x \mathsf{s} y) = F(x) \mathsf{s}' F(y)$, produciendo $F(x) \leq' F(y)$. En forma similar se puede ver que F^{-1} es tambien un homomorfismo de $(L', \leq')$ en $(L, \leq)$. Si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$, entonces el Lema 89 nos dice que F y F^{-1} respetan las operaciones de supremo e infimo por lo cual F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$.
□ □

Lemma 8. *$(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ es un reticulado. El orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado a este reticulado cumple $x/\theta \tilde{\leq} y/\theta$ sii $y\theta(x \mathsf{s} y)$*

Proof. Veamos que la estructura $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ cumple (I4). Sean x/θ, y/θ, z/θ elementos cualesquiera de L/θ. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} (x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta) \;\tilde{\mathsf{s}}\; z/\theta & = & (x \mathsf{s} y)/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; z/\theta \\ & = & ((x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z)/\theta \\ & = & (x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z))/\theta \\ & = & x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; (y \mathsf{s} z)/\theta \\ & = & x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; (y/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; z/\theta) \end{array}$$

En forma similar se puede ver que la estructura $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ cumple el resto de las identidades que definen reticulado. □

Corollary 9. *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado en el cual hay un elemento maximo 1 (resp. minimo 0). Entonces si θ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$, $1/\theta$ (resp. $0/\theta$) es un elemento maximo (resp. minimo) de $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$.*

Proof. Ya que $1\theta(x \mathsf{s} 1)$, para cada $x \in L$, tenemos que $x/\theta \tilde{\leq} 1/\theta$, para cada $x \in L$. □ □

Lemma 10. *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ es un homomorfismo de reticulados, entonces $\ker F$ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$.*

Proof. Dejamos al lector ver que $\ker F$ es una relacion de equivalencia. Supongamos $x \ker F x'$ y $y \ker F y'$. Entonces
$F(x \mathsf{s} y) = F(x) \mathsf{s}' F(y) = F(x') \mathsf{s}' F(y') = F(x' \mathsf{s} y')$
lo cual nos dice que $(x \mathsf{s} y) \ker F (x' \mathsf{s} y')$. En forma similar tenemos que $(x \mathsf{i} y) \ker F (x' \mathsf{i} y')$.
□ □

Lemma 11. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado y sea* θ *una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. *Entonces* π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *en* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$. *Ademas* $\ker \pi_\theta = \theta$.

Proof. Sean $x, y \in L$. Tenemos que
$\pi_\theta(x \mathsf{s} y) = (x \mathsf{s} y)/\theta = x/\theta \tilde{\mathsf{s}} y/\theta = \pi_\theta(x) \tilde{\mathsf{s}} \pi_\theta(y)$
por lo cual π_θ preserva la operacion supremo. Para la operacion infimo es similar. □ □

Lemma 12. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ *un homomorfismo biyectivo, entonces* F *es un isomorfismo*

Proof. Similar a la prueba del Lemma 93. □ □

Lemma 13. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ *es un homomorfismo, entonces* I_F *es un subuniverso de* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$.

Proof. Ya que F es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ tenemos que I_F es subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ lo cual ya que $0', 1' \in I_F$ implica que I_F es un subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$. □ □

Lemma 14. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados acotados, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$.

Lemma 15. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *un reticulado acotado y* θ *una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$. *(a)* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ *es un reticulado acotado. (b)* π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *en* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ *cuyo nucleo es* θ.

Lemma 16. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', {}^{c'}, 0', 1')$ *un homomorfismo biyectivo, entonces* F *es un isomorfismo*

Lemma 17. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', {}^{c'}, 0', 1')$ *es un homomorfismo, entonces* I_F *es un subuniverso de* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', {}^{c'}, 0', 1')$.

Lemma 18. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', {}^{c'}, 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados complementados, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$

Lemma 19. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$ *un reticulado complementado y sea* θ *una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$. *(a)* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, {}^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ *es un reticulado complementado. (b)* π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$ *en* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, {}^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ *cuyo nucleo es* θ.

Lemma 20. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado. Son equivalentes: (1)* $x \mathsf{i} (y \mathsf{s} z) = (x \mathsf{i} y) \mathsf{s} (x \mathsf{i} z)$, *cualesquiera sean* $x, y, z \in L$ *(2)* $x \mathsf{s} (y \mathsf{i} z) = (x \mathsf{s} y) \mathsf{i} (x \mathsf{s} z)$, *cualesquiera sean* $x, y, z \in L$.

Proof. (1)⇒(2). Notese que

$$\begin{array}{rcl} (x \mathsf{s} y) \mathsf{i} (x \mathsf{s} z) & = & ((x \mathsf{s} y) \mathsf{i} x) \mathsf{s} ((x \mathsf{s} y) \mathsf{i} z) \\ & = & (x \mathsf{s} (z \mathsf{i} (x \mathsf{s} y)) \\ & = & (x \mathsf{s} ((z \mathsf{i} x) \mathsf{s} (z \mathsf{i} y)) \\ & = & (x \mathsf{s} (z \mathsf{i} x)) \mathsf{s} (z \mathsf{i} y) \\ & = & x \mathsf{s} (z \mathsf{i} y) \\ & = & x \mathsf{s} (y \mathsf{i} z) \end{array}$$

(2)⇒(1) es similar. □ □

Lemma 21. *Si* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento.*

Proof. Supongamos $x \in L$ tiene complementos y, z. Se tiene
$y = y \mathsf{i} 1 = y \mathsf{i} (x \mathsf{s} z) = (y \mathsf{i} x) \mathsf{s} (y \mathsf{i} z) = 0 \mathsf{s} (y \mathsf{i} z) = y \mathsf{i} z$,
por lo cual $y \leq z$. En forma analoga se muestra que $z \leq y$. □ □

Lemma 22. *Si S es no vacio, entonces $[S)$ es un filtro. Mas aun si F es un filtro y $F \supseteq S$, entonces $F \supseteq [S)$.*

Proof. Ya que $S \subseteq [S)$, tenemos que $[S) \neq \varnothing$. Claramente $[S)$ cumple la propiedad (3). Veamos cumple la (2). Si $y \geq s_1 \mathsf{i}\, s_2 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i}\, s_n$ y $z \geq t_1 \mathsf{i}\, t_2 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i}\, t_m$, con $s_1, s_2, \ldots, s_n,\ t_1, t_2, \ldots, t_m \in S$, entonces

$y \mathsf{i}\, z \geq s_1 \mathsf{i}\, s_2 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i}\, s_n \mathsf{i}\, t_1 \mathsf{i}\, t_2 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i}\, t_m$,

lo cual prueba (2). □

Lemma 23. *(Zorn) Sea $(P, \leq)$ un poset y supongamos cada cadena de P tiene una cota superior. Entonces hay un elemento maximal en P. Un filtro F de un reticulado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ sera llamado primo cuando se cumplan:*

(1) $F \neq L$ (2) $x \mathsf{s}\, y \in F \Rightarrow x \in F$ o $y \in F$.

Theorem 24. *(Teorema del Filtro Primo) Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado distributivo y F un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$. Entonces hay un filtro primo P tal que $x_0 \notin P$ y $F \subseteq P$.*

Proof. Sea

$\mathcal{F} = \{F_1 : F_1 \text{ es un filtro}, x_0 \notin F_1 \text{ y } F \subseteq F_1\}$.

Notese que $\mathcal{F} \neq \varnothing$, por lo cual $(\mathcal{F}, \subseteq)$ es un poset. Veamos que cada cadena en $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene una cota superior. Sea C una cadena. Si $C = \varnothing$, entonces cualquier elemento de $\mathcal{F}$ es cota de C. Supongamos entonces $C \neq \varnothing$. Sea $G = \{x \in L : x \in F_1, \text{para algun } F_1 \in C\}$.

Veamos que G es un filtro. Es claro que G es no vacio. Supongamos que $x, y \in G$. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $x \in F_1$ y $y \in F_2$. Si $F_1 \subseteq F_2$, entonces ya que F_2 es un filtro tenemos que $x \mathsf{i}\, y \in F_2 \subseteq G$. Si $F_2 \subseteq F_1$, entonces tenemos que $x \mathsf{i}\, y \in F_1 \subseteq G$. Ya que C es una cadena, tenemos que siempre $x \mathsf{i}\, y \in G$. En forma analoga se prueba la propiedad restante por lo cual tenemos que G es un filtro. Ademas $x_0 \notin G$, por lo que $G \in \mathcal{F}$ es cota superior de C . Por el lema de Zorn, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene un elemento maximal P. Veamos que P es un filtro primo. Supongamos $x \mathsf{s}\, y \in P$ y $x, y \notin P$. Entonces ya que P es maximal tenemos que $x_0 \in [P \cup \{x\}) \cap [P \cup \{y\})$

Ya que $x_0 \in [P \cup \{x\})$, tenemos que hay elementos $p_1, \ldots, p_n \in P$, tales que $x_0 \geq p_1 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i}\, p_n \mathsf{i}\, x$

Ya que $x_0 \in [P \cup \{y\})$, tenemos que hay elementos $q_1, \ldots, q_m \in P$, tales que $x_0 \geq q_1 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i}\, q_m \mathsf{i}\, y$

Si llamamos p al siguiente elemento de P $p_1 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i}\, p_n \mathsf{i}\, q_1 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i}\, q_m$

tenemos que $\begin{array}{lll} x_0 & \geq & p \mathsf{i}\, x \\ x_0 & \geq & p \mathsf{i}\, y \end{array}$

Se tiene que $x_0 \geq (p \mathsf{i}\, x) \mathsf{s}\, (p \mathsf{i}\, y) = p \mathsf{i}\, (x \mathsf{s}\, y) \in P$, lo cual es absurdo ya que $x_0 \notin P$. □ □

Corollary 25. *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado distributivo. Si $\varnothing \neq S \subseteq L$ es tal que $s_1 \mathsf{i}\, s_2 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i}\, s_n \neq 0$, para cada $s_1, \ldots, s_n \in S$, entonces hay un filtro primo que contiene a S.*

Proof. Notese que $[S) \neq L$ por lo cual se puede aplicar el Teorema del filtro primo. □ □

Lemma 26. *Sea $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ un algebra de Boole. Entonces para un filtro $F \subseteq B$ las siguientes son equivalentes: (1) F es primo (2) $x \in F$ o $x^c \in F$, para cada $x \in B$.*

Proof. (1)⇒(2). Ya que $x \mathsf{s}\, x^c = 1 \in F$, (2) se cumple si F es primo.

(2)⇒(1). Supongamos que $x \mathsf{s}\, y \in F$ y que $x \notin F$. Entonces por (2), $x^c \in F$ y por lo tanto tenemos que

$y \geq x^c \mathsf{i}\, y = (x^c \mathsf{i}\, x) \mathsf{s}\, (x^c \mathsf{i}\, y) = x^c \mathsf{i}\, (x \mathsf{s}\, y) \in F$,

lo cual dice que $y \in F$. □ □

Lemma 27. *Sea $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ un algebra de Boole. Supongamos que $b \neq 0$ y $a = \inf A$, con $A \subseteq B$. Entonces si $b \mathsf{i}\, a = 0$, existe un $e \in A$ tal que $b \mathsf{i}\, e^c \neq 0$.*

Proof. Supongamos que para cada $e \in A$, tengamos que $b \mathsf{i} e^c = 0$. Entonces tenemos que para cada $e \in A$,

$b = b \mathsf{i} (e \mathsf{s} e^c) = (b \mathsf{i} e) \mathsf{s} (b \mathsf{i} e^c) = b \mathsf{i} e$,

lo cual nos dice que b es cota inferior de A. Pero entonces $b \leq a$, por lo cual $b = b \mathsf{i} a = 0$, contradiciendo la hipotesis. □ □

Theorem 28. *(Rasiova y Sikorski) Sea $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ un algebra de Boole. Sea $x \in B$, $x \neq 0$. Supongamos que $A_1, A_2, ...$ son subconjuntos de B tales que existe $\inf(A_j)$, para cada $j = 1, 2....$ Entonces hay un filtro primo P el cual cumple: (a) $x \in P$ (b) $P \supseteq A_j \Rightarrow P \ni \inf(A_j)$, para cada $j = 1, 2, ...$*

Proof. Sean $a_j = \inf(A_j)$, $j = 1, 2, ...$ Construiremos inductivamente una sucesion $b_0, b_1, ...$ de elementos de B tal que:

(1) $b_0 = x$ (2) $b_0 \mathsf{i} ... \mathsf{i} b_n \neq 0$, para cada $n \geq 0$ (3) $b_j = a_j$ o $b_j^c \in A_j$, para cada $j \geq 1$. Definamos $b_0 = x$. Supongamos ya definimos $b_0, ..., b_n$, veamos como definir b_{n+1}. Si $(b_0 \mathsf{i} ... \mathsf{i} b_n) \mathsf{i} a_{n+1} \neq 0$, entonces definamos $b_{n+1} = a_{n+1}$. Si $(b_0 \mathsf{i} ... \mathsf{i} b_n) \mathsf{i} a_{n+1} = 0$, entonces por el lema anterior, tenemos que hay un $e \in A_{n+1}$ tal que $(b_0 \mathsf{i} ... \mathsf{i} b_n) \mathsf{i} e^c \neq 0$, lo cual nos permite definir $b_{n+1} = e^c$.

Usando (2) se puede probar que el conjunto $S = \{b_0, b_1, ...\}$ satisface la hipotesis del primer corolario del Teorema del filtro primo, por lo cual hay un filtro primo P tal que $\{b_0, b_1, ...\} \subseteq P$. Es facil chequear que P satisface las propiedades (a) y (b). □ □

2 Términos y fórmulas

Lemma 29. *Supongamos $t \in T_k^\tau$, con $k \geq 1$. Entonces ya sea $t \in Var \cup \mathcal{C}$ o $t = f(t_1, ..., t_n)$, con $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$, $t_1, ..., t_n \in T_{k-1}^\tau$.*

Proof. Por induccion en k.

CASO $k = 1$: Es directo ya que por definicion

$T_1^\tau = Var \cup \mathcal{C} \cup \{f(t_1, ..., t_n) : f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, t_1, ..., t_n \in T_0^\tau\}$.

CASO $k \Rightarrow k+1$: Sea $t \in T_{k+1}^\tau$. Por definicion de T_{k+1}^τ tenemos que $t \in T_k^\tau$ o $t = f(t_1, ..., t_n)$ con $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$ y $t_1, ..., t_n \in T_k^\tau$. Si se da que $t \in T_k^\tau$, entonces podemos aplicar hipotesis inductiva y usar que $T_{k-1}^\tau \subseteq T_k^\tau$. Esto completa el caso. □ □

Lemma 30. *Sea $b \in Bal$. Se tiene: (1) $|b|_(- |b|_) = 0$ (2) Si x es tramo inicial propio de b, entonces $|x|_(- |x|_) > 0$ (3) Si x es tramo final propio de b, entonces $|x|_(- |x|_) < 0$*

Proof. Probaremos por induccion en k, que valen (1), (2) y (3) para cada $b \in Bal_k$. El caso $k = 1$ es trivial. Supongamos $b \in Bal_{k+1}$. Si $b \in Bal_k$, se aplica directamente HI. Supongamos entonces que $b = (b_1 ... b_n)$, con $b_1, ..., b_n \in Bal_k$, $n \geq 1$. Por HI, $b_1, ..., b_n$ cumplen (1) por lo cual b cumple (1). Veamos que b cumple (2). Sea x un tramo inicial propio de b. Notese que x es de la forma $x = (b_1 ... b_i x_1$ con $0 \leq i \leq n-1$ y x_1 un tramo inicial de b_{i+1} (en el caso $i = 0$ interpretamos $b_1 ... b_i = \varepsilon$). Pero entonces ya que

$$|x|_(- |x|_) = 1 + \left(\sum_{j=1}^{i} |b_j|_(- |b_j|_) \right) + |x_1|_(- |x_1|_)$$

tenemos que por HI, se da que $|x|_(- |x|_) > 0$. En forma analoga se puede ver que b cumple (3). □ □

Lemma 31. *$del(xy) = del(x) del(y)$, para todo $x, y \in \Sigma^*$*

Lemma 32. *Supongamos que Σ es tal que $T^\tau \subseteq \Sigma^*$. Entonces $del(t) \in Bal$, para cada $t \in T^\tau - (Var \cup \mathcal{C})$*

Lemma 33. *Sean $s, t \in T^\tau$ y supongamos que hay palabras x, y, z, con $y \neq \varepsilon$ tales que $s = xy$ y $t = yz$. Entonces $x = z = \varepsilon$ o $s, t \in \mathcal{C}$. En particular si un termino es tramo inicial o final de otro termino, entonces dichos terminos son iguales.*

Proof. Supongamos $s \in \mathcal{C}$. Ya que $y \neq \varepsilon$ tenemos que t debe comenzar con un simbolo que ocurre en un nombre de cte, lo cual dice que t no puede ser ni una variable ni de la forma $g(t_1, ..., t_m)$, es decir $t \in \mathcal{C}$. Supongamos $s \in Var$. Si $x \neq \varepsilon$ tenemos que t debe comenzar con alguno de los siguientes simbolos

0 1 ... 9 **0 1 ... 9**

lo cual es absurdo. O sea que $x = \varepsilon$ y por lo tanto t debe comenzar con X. Pero esto dice que $t \in Var$ de lo que sigue facilmente que $z = \varepsilon$. Supongamos entonces que s es de la forma $f(s_1, ..., s_n)$. Ya que) debe ocurrir en t, tenemos que t es de la forma $g(t_1, ..., t_m)$. O sea que $del(s), del(t) \in Bal$. Ya que) ocurre en y, $del(y) \neq \varepsilon$. Tenemos tambien que

$$\begin{aligned} del(s) &= del(x)del(y) \\ del(t) &= del(y)del(z) \end{aligned}$$

La primera igualdad, por (3) del Lema 118, nos dice que $|del(y)|_(- |del(y)|_) \leq 0$,

y la segunda que $|del(y)|_(- |del(y)|_) \geq 0$,

por lo cual $|del(y)|_(- |del(y)|_) = 0$

Pero entonces ya que $del(y)$ es tramo final de $del(s)$, (3) del Lema 118 nos dice que $del(x) = \varepsilon$. Similarmente obtenemos que $del(z) = \varepsilon$. Ya que que t termina con) tenemos que $z = \varepsilon$. O sea que $f(s_1, ..., s_n) = xg(t_1, ..., t_m)$ con $del(x) = \varepsilon$, de lo que se saca que $f = xg$ ya que (no ocurre en x. De la definicion de tipo se desprende que $x = \varepsilon$. □ □

Theorem 34. *(Lectura unica de terminos). Dado $t \in T^\tau$ se da una de las siguientes: (1) $t \in Var \cup \mathcal{C}$ (2) Hay unicos $n \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1, ..., t_n \in T^\tau$ tales que $t = f(t_1, ..., t_n)$.*

Proof. En virtud del Lema 117 solo nos falta probar la unicidad en el punto (2). Supongamos que

$t = f(t_1, ..., t_n) = g(s_1, ..., s_m)$

con $n, m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_n$, $g \in \mathcal{F}_m$, $t_1, ..., t_n, s_1, ..., s_m \in T^\tau$. Notese que $f = g$. O sea que $n = m = a(f)$. Notese que t_1 es tramo inicial de s_1 o s_1 es tramo inicial de t_1, lo cual por el lema anterior nos dice que $t_1 = s_1$. Con el mismo razonamiento podemos probar que debera suceder $t_2 = s_2, ..., t_n = s_n$. □ □

Lemma 35. *Sean $r, s, t \in T^\tau$. (a) Si $s \neq t = f(t_1, ..., t_n)$ y s ocurre en t, entonces dicha ocurrencia sucede dentro de algun t_j, $j = 1, ..., n$. (b) Si r, s ocurren en t, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una ocurre dentro de otra. En particular, las distintas ocurrencias de r en t son disjuntas. (c) Si t' es el resultado de reemplazar una ocurrencia de s en t por r, entonces $t' \in T^\tau$.*

Proof. (a) Supongamos la ocurrencia de s comienza en algun t_j. Entonces el Lema 121 nos conduce a que dicha ocurrencia debera estar contenida en t_j. Veamos que la ocurrencia de s no puede ser a partir de un $i \in \{1, ..., |f|\}$. Supongamos lo contrario. Tenemos entonces que s debe ser de la forma $g(s_1, ..., s_m)$ ya que no puede estar en $Var \cup \mathcal{C}$. Notese que $i \neq 1$ ya que en caso contrario s seria un tramo inicial propio de t. Pero entonces g debe ser un tramo final propio de f, lo cual es absurdo. Ya que s no puede comenzar con parentesis o coma, hemos contemplado todos los posibles casos de comienzo de la ocurrencia de s en t.

(b) y (c) pueden probarse por induccion, usando (a). □ □

Lemma 36. *Supongamos $\varphi \in F_k^\tau$, con $k \geq 1$. Entonces φ es de alguna de las siguientes formas $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$.*

$\varphi = r(t_1, ..., t_n)$, con $r \in \mathcal{R}_n$, $t_1, ..., t_n \in T^\tau$

$\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, con $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F_{k-1}^\tau$

$\varphi = \neg\varphi_1$, *con* $\varphi_1 \in F^\tau_{k-1}$

$\varphi = Qv\varphi_1$, *con* $Q \in \{\forall, \exists\}$, $v \in Var$ *y* $\varphi_1 \in F^\tau_{k-1}$.

Proof. Induccion en k. $\square$ $\square$

Lemma 37. *Sea* τ *un tipo. (a) Supongamos que* Σ *es tal que* $F^\tau \subseteq \Sigma^*$. *Entonces* $del(\varphi) \in Bal$, *para cada* $\varphi \in F^\tau$. *(b) Sea* $\varphi \in F^\tau_k$, *con* $k \geq 0$. *Existen* $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ *y* $v \in Var\})^*$ *y* $\varphi_1 \in F^\tau$ *tales que* $\varphi = x\varphi_1$ *y* φ_1 *es de la forma* $(\psi_1 \eta \psi_2)$ *o atomica. En particular toda formula termina con el simbolo).*

Proof. (b) Induccion en k. El caso $k = 0$ es trivial. Supongamos (b) vale para cada $\varphi \in F^\tau_k$ y sea $\varphi \in F^\tau_{k+1}$. Hay varios casos de los cuales haremos solo dos

CASO $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau_k$ y $\eta \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Podemos tomar $x = \varepsilon$ y $\varphi_1 = \varphi$.

CASO $\varphi = Qx_i\psi$, con $\psi \in F^\tau_k$, $i \geq 1$ y $Q \in \{\forall, \exists\}$.

Por HI hay $\bar{x} \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$ y $\psi_1 \in F^\tau$ tales que $\psi = x\psi_1$ y ψ_1 es de la forma $(\gamma_1 \eta \gamma_2)$ o atomica. Entonces es claro que $x = Qx_i\bar{x}$ y $\varphi_1 = \psi_1$ cumplen (b). $\square$ $\square$

Lemma 38. *Ninguna formula es tramo final propio de una formula atomica, es decir, si* $\varphi = x\psi$, *con* $\varphi \in F^\tau_0$ *y* , $\psi \in F^\tau$, *entonces* $x = \varepsilon$.

Proof. Si φ es de la forma $(t \equiv s)$, entonces $|del(y)|_(- |del(y)|_) < 0$ para cada tramo final propio y de φ, lo cual termina el caso ya que $del(\psi)$ es balanceada. Supongamos entonces $\varphi = r(t_1, ..., t_n)$. Notese que ψ no puede ser tramo final de $t_1, ..., t_n)$ ya que $del(\psi)$ es balanceada y $|del(y)|_(- |del(y)|_) < 0$ para cada tramo final y de $t_1, ..., t_n)$. Es decir que $\psi = y(t_1, ..., t_n)$, para algun tramo final y de r. Ya que en ψ no ocurren cuantificadores ni nexos ni el simbolo $\equiv$ el Lema 124 nos dice $\psi = \tilde{r}(s_1, ..., s_m)$, con $\tilde{r} \in \mathcal{R}_m$, $m \geq 1$ y $s_1, ..., s_m \in T^\tau$. Ahora es facil usando un argumento paresido al usado en la prueba del Teorema 122 concluir que $m = n$, $s_i = t_i$, $i = 1, ..., n$ y $\tilde{r}$ es tramo final de r. Por (3) de la definicion de tipo tenemos que $\tilde{r} = r$ lo cual nos dice que $\varphi = \psi$ y $x = \varepsilon$ $\square$ $\square$

Lemma 39. *Si* $\varphi = x\psi$, *con* $\varphi, \psi \in F^\tau$ *y* x *sin parentesis, entonces* $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ *y* $v \in Var\})^*$

Proof. Por induccion en el k tal que $\varphi \in F^\tau_k$. El caso $k = 0$ es probado en el lema anterior. Asumamos que el resultado vale cuando $\varphi \in F^\tau_k$ y veamos que vale cuando $\varphi \in F^\tau_{k+1}$. Mas aun supongamos $\varphi \in F^\tau_{k+1} - F^\tau_k$. Primero haremos el caso en que $\varphi = Qv\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $v \in Var$ y $\varphi_1 \in F^\tau_k$. Supongamos $x \neq \varepsilon$. Ya que ψ no comienza con simbolos de v, tenemos que ψ debe ser tramo final de φ_1 lo cual nos dice que hay una palabra x_1 tal que $x = Qvx_1$ y $\varphi_1 = x_1\psi$. Por HI tenemos que $x_1 \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$ con lo cual $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$. El caso en el que $\varphi = \neg\varphi_1$ con $\varphi_1 \in F^\tau_k$, es similar. Note que no hay mas casos posibles ya que φ no puede comenzar con (porque en x no ocurren parentesis por hipotesis $\square$ $\square$

Proposition 40. *Si* $\varphi, \psi \in F^\tau$ *y* x, y, z *son tales que* $\varphi = xy$, $\psi = yz$ *y* $y \neq \varepsilon$, *entonces* $z = \varepsilon$ *y* $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ *y* $v \in Var\})^*$. *En particular ningun tramo inicial propio de una formula es una formula.*

Proof. Ya que φ termina con) tenemos que $del(y) \neq \varepsilon$. Ya que $del(\varphi), del(\psi) \in Bal$ y ademas

$$\begin{aligned} del(\varphi) &= del(x)del(y) \\ del(\psi) &= del(y)del(z) \end{aligned}$$

tenemos que $del(y)$ es tramo inicial y final de palabras balanceadas, lo cual nos dice que $|del(y)|_(- |del(y)|_) = 0$

Pero esto por (3) del Lema 118 nos dice que $del(x) = \varepsilon$. Similarmente obtenemos que $del(z) = \varepsilon$. Pero ψ termina con) lo cual nos dice que $z = \varepsilon$. Es decir que $\varphi = x\psi$. Por el lema anterior tenemos que $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$ $\square$ $\square$

Theorem 41. *(Lectura unica de formulas) Dada $\varphi \in F^\tau$ se da una y solo una de las siguientes: (1) $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$ (2) $\varphi = r(t_1, ..., t_n)$, con $r \in \mathcal{R}_n$, $t_1, ..., t_n \in T^\tau$ (3) $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, con $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$ (4) $\varphi = \neg\varphi_1$, con $\varphi_1 \in F^\tau$ (5) $\varphi = Qv\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $\varphi_1 \in F^\tau$ y $v \in Var$. Mas aun, en los puntos (1), (2), (3), (4) y (5) tales descomposiciones son unicas.*

Proof. Si una formula φ satisface (1), entonces φ no puede contener simbolos del alfabeto $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ lo cual garantiza que φ no puede satisfacer (3). Ademas φ no puede satisfacer (2) o (4) o (5) ya que φ comienza con (. En forma analoga se puede terminar de ver que las propiedades (1),...,(5) son excluyentes.

La unicidad en las descomposiciones de (4) y (5) es obvia. La de (3) se desprende facilmente del lema anterior y la de los puntos (1) y (2) del lema analogo para terminos. □ □

Lemma 42. *Sea τ un tipo. (a) Las formulas atomicas no tienen subformulas propias. (b) Si φ ocurre propiamente en $(\psi\eta\varphi)$, entonces tal ocurrencia es en ψ o en φ. (c) Si φ ocurre propiamente en $\neg\psi$, entonces tal ocurrencia es en ψ. (d) Si φ ocurre propiamente en $Qx_k\psi$, entonces tal ocurrencia es en ψ. (e) Si φ_1, φ_2 ocurren en φ, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una contiene a la otra. (f) Si λ' es el resultado de reemplazar alguna ocurrencia de φ en λ por ψ, entonces $\lambda' \in F^\tau$.*

Proof. Ejercicio. □

3 Estructuras

Lemma 43. *Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y sea $t \in T^\tau$. Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que $a_i = b_i$, cada vez que x_i ocurra en t. Entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$.*

Proof. Sea

- Teo$_k$: El lema vale para $t \in T_k^\tau$. Teo$_0$ es facil de probar. Veamos Teo$_k$ $\Rightarrow$Teo$_{k+1}$. Supongamos $t \in T_{k+1}^\tau - T_k^\tau$ y sean $\vec{a}, \vec{b}$ asignaciones tales que $a_i = b_i$, cada vez que x_i ocurra en t. Notese que $t = f(t_1, ..., t_n)$, con $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$ y $t_1, ..., t_n \in T^\tau$. Notese que para cada $j = 1, ..., n$, tenemos que $a_i = b_i$, cada vez que x_i ocurra en t_j, lo cual por Teo$_k$ nos dice que

$t_j^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t_j^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$, $j = 1, ..., n$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] &= i(f)(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \text{ (por def de } t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\ &= i(f)(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{b}], ..., t_n^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) \\ &= t^{\mathbf{A}}[\vec{b}] \text{ (por def de } t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \end{aligned}$$

□ □

Lemma 44. *(a) $Li((t \equiv s)) = \{v \in Var : v$ ocurre en t o v ocurre en $s\}$. (b) $Li(r(t_1, ..., t_n)) = \{v \in Var : v$ ocurre en algun $t_i\}$. (c) $Li(\neg\varphi) = Li(\varphi)$ (d) $Li((\varphi\eta\psi)) = Li(\varphi) \cup Li(\psi)$. (e) $Li(Qx_j\varphi) = Li(\varphi) - \{x_j\}$.*

Proof. (a) y (b) son triviales de las definiciones, teniendo en cuenta que si una variable v ocurre en $(t \equiv s)$ (resp. en $r(t_1, ..., t_n)$) entonces v ocurre en t o v ocurre en s (resp.v ocurre en algun t_i)

(d) Supongamos $v \in Li((\varphi\eta\psi))$, entonces hay un i tal que v ocurre libremente en $(\varphi\eta\psi)$ a partir de i. Por definicion tenemos que ya sea v ocurre libremente en φ a partir de $i - 1$ o v ocurre libremente en ψ a partir de $i - |(\varphi\eta|$, con lo cual $v \in Li(\varphi) \cup Li(\psi)$

Supongamos ahora que $v \in Li(\varphi) \cup Li(\psi)$. S.p.d.g. supongamos $v \in Li(\psi)$. Por definicion tenemos que hay un i tal que v ocurre libremente en ψ a partir de i. Pero notese que esto nos dice por definicion que v ocurre libremente en $(\varphi\eta\psi)$ a partir de $i + |(\varphi\eta|$ con lo cual $v \in Li((\varphi\eta\psi))$.

(c) es similar a (d)

(e) Supongamos $v \in Li(Qx_j\varphi)$, entonces hay un i tal que v ocurre libremente en $Qx_j\varphi$ a partir de i. Por definicion tenemos que $v \neq x_j$ y v ocurre libremente en φ a partir de $i - |Qx_j|$, con lo cual $v \in Li(\varphi) - \{x_j\}$

Supongamos ahora que $v \in Li(\varphi) - \{x_j\}$. Por definicion tenemos que hay un i tal que v ocurre libremente en φ a partir de i. Ya que $v \neq x_j$ esto nos dice por definicion que v ocurre libremente en $Qx_j\varphi$ a partir de $i + |Qx_j|$, con lo cual $v \in Li(Qx_j\varphi)$. □ □

Lemma 45. *Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$. Entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$*

Proof. Probaremos por induccion en k que el lema vale para cada $\varphi \in F_k^\tau$. El caso $k = 0$ se desprende del Lema 131. Veamos que Teo_k implica Teo_{k+1}. Sea $\varphi \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$. Hay varios casos:

CASO $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.

Ya que $Li(\varphi_i) \subseteq Li(\varphi)$, $i = 1, 2$, Teo_k nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi_i[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi_i[\vec{b}]$, para $i = 1, 2$. Se tiene entonces que

$\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$

$\Updownarrow$ (por (3) en la def de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$)

$\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$

$\Updownarrow$ (por Teo_k)

$\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{b}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{b}]$

$\Updownarrow$ (por (3) en la def de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$)

$\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$

CASO $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.

Es completamente similar al anterior.

CASO $\varphi = \neg\varphi_1$.

Es completamente similar al anterior.

CASO $\varphi = \forall x_j \varphi_1$.

Supongamos $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$. Entonces por (8) en la def de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ se tiene que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{a})]$, para todo $a \in A$. Notese que $\downarrow_j^a (\vec{a})$ y $\downarrow_j^a (\vec{b})$ coinciden en toda x_i de $x_i \in Li(\varphi_1) \subseteq Li(\varphi_1) \cup \{x_j\}$, con lo cual por Teo_k se tiene que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{b})]$, para todo $a \in A$, lo cual por (8) en la def de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$. La prueba de que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$ implica que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ es similar.

CASO $\varphi = \exists x_j \varphi_1$.

Es similar al anterior. □ □

Corollary 46. *Si φ es una sentencia, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$, cualesquiera sean las asignaciones $\vec{a}, \vec{b}$.*

Lemma 47. *(a) Si $Li(\varphi) \cup Li(\psi) \subseteq \{x_{i_1}, ..., x_{i_n}\}$, entonces $\varphi \sim \psi$ si y solo si la sentencia $\forall x_{i_1} ... \forall x_{i_n} (\varphi \leftrightarrow \psi)$ es universalmente valida. (b) Si $\varphi_i \sim \psi_i$, $i = 1, 2$, entonces $\neg\varphi_1 \sim \neg\psi_1$, $(\varphi_1 \eta \varphi_2) \sim (\psi_1 \eta \psi_2)$ y $Qv\varphi_1 \sim Qv\psi_1$. (c) Si $\varphi \sim \psi$ y α' es el resultado de reemplazar en una formula α algunas (posiblemente 0) ocurrencias de φ por ψ, entonces $\alpha \sim \alpha'$.*

Proof. Tenemos que

$\varphi \sim \psi$
$\Updownarrow$ (por (6) de la def de $\models$)
$\mathbf{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}]$, para todo $\mathbf{A}$ y toda $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$
$\Updownarrow$
$\mathbf{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[\downarrow_{i_n}^{a} (\vec{a})]$, para todo $\mathbf{A}$, $a \in A$ y toda $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$
$\Updownarrow$ (por (8) de la def de $\models$)
$\mathbf{A} \models \forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}]$, para todo $\mathbf{A}$ y toda $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$
$\Updownarrow$
$\mathbf{A} \models \forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)[\downarrow_{i_{n-1}}^{a} (\vec{a})]$, para todo $\mathbf{A}$, $a \in A$ y toda $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$
$\Updownarrow$ (por (8) de la def de $\models$)
$\mathbf{A} \models \forall x_{i_{n-1}} \forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}]$, para todo $\mathbf{A}$ y toda $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$
$\Updownarrow$
$\vdots$
$\Updownarrow$
$\mathbf{A} \models \forall x_{i_1} ... \forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}]$, para todo $\mathbf{A}$ y toda $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$
$\Updownarrow$
$\forall x_{i_1} ... \forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)$ es universalmente valida
(b) Es dejado al lector.
(c) Por induccion en el k tal que $\alpha \in F_k^\tau$. □ □

Lemma 48. *Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo. Entonces $F(t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, ...)] = t^{\mathbf{B}}[F(a_1), F(a_2), ...)]$ para cada $t \in T^\tau$, $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$.*

Proof. Sea
- Teo$_k$: Si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, entonces $F(t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, ...)] = t^{\mathbf{B}}[F(a_1), F(a_2), ...)]$ para cada $t \in T_k^\tau$, $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$. Teo$_0$ es trivial. Veamos que Teo$_k$ implica Teo$_{k+1}$.

Supongamos que vale Teo$_k$ y supongamos $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, $t \in T_{k+1}^\tau - T_k^\tau$ y $\vec{a} = (a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$. Denotemos $(F(a_1), F(a_2), ...)$ con $F(\vec{a})$. Por Lema 117, $t = f(t_1, ..., t_n)$, con $n \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_n$ y $t_1, ..., t_n \in T_k^\tau$. Tenemos entonces

$$\begin{array}{rcl} F(t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) & = & F(f(t_1, ..., t_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\ & = & F(f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])) \\ & = & f^{\mathbf{B}}(F(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}]), ..., F(t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])) \\ & = & f^{\mathbf{B}}(t_1^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})], ..., t_n^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})])) \\ & = & f(t_1, ..., t_n)^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})] \\ & = & t^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})] \end{array}$$

□ □

Lemma 49. *Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^\tau$. Entonces $\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, ...)]$ sii $\mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), ...)]$ para cada $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$. En particular $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ satisfacen las mismas sentencias de tipo τ.*

Lemma 50. *Si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo*

Proof. Solo falta probar que F^{-1} es un homomorfismo. Supongamos que $c \in \mathcal{C}$. Ya que $F(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$, tenemos que $F^{-1}(c^{\mathbf{B}}) = c^{\mathbf{A}}$, por lo cual F^{-1} cumple (1) de la definicion de homomorfismo. Supongamos ahora que $f \in \mathcal{F}_n$ y sean $b_1, ..., b_n \in B$. Sean $a_1, ..., a_n \in A$ tales que $F(a_i) = b_i$, $i = 1, ..., n$. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} F^{-1}(f^{\mathbf{B}}(b_1, ..., b_n)) & = & F^{-1}(f^{\mathbf{B}}(F(a_1), ..., F(a_n))) \\ & = & F^{-1}(F(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(F^{-1}(b_1), ..., F^{-1}(b_n)) \end{array}$$

por lo cual F^{-1} satisface (2) de la definicion de homomorfismo □ □

Lemma 51. *Si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $\mathbf{B}$*

Proof. Ya que $A \neq \varnothing$, tenemos que $I_F \neq \varnothing$. Es claro que $c^{\mathbf{B}} = F(c^{\mathbf{A}}) \in I_F$, para cada $c \in \mathcal{C}$. Sea $f \in \mathcal{F}_n$ y sean $b_1, ..., b_n \in I_F$ Sean $a_1, ..., a_n$ tales que $F(a_i) = b_i$, $i = 1, ..., n$. Tenemos que

$f^{\mathbf{B}}(b_1, ..., b_n) = f^{\mathbf{B}}(F(a_1), ..., F(a_n)) = F(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)) \in I_F$

por lo cual I_F es cerrada bajo $f^{\mathbf{B}}$. □

Lemma 52. *Si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, entonces $\ker F$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$*

Proof. Sea $f \in \mathcal{F}_n$. Supongamos que $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in A$ son tales que $a_1 \ker F b_1, ..., a_n \ker F b_n$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} F(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)) &= f^{\mathbf{B}}(F(a_1), ..., F(a_n)) \\ &= f^{\mathbf{B}}(F(b_1), ..., F(b_n)) \\ &= F(f^{\mathbf{B}}(b_1, ..., b_n)) \end{aligned}$$

lo cual nos dice que $f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) \ker F f^{\mathbf{B}}(b_1, ..., b_n)$ □ □

Lemma 53. *$\pi_\theta : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\theta$ es un homomorfismo cuyo nucleo es θ*

Proof. Sea $c \in \mathcal{C}$. Tenemos que

$\pi_\theta(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{A}}/\theta = c^{\mathbf{A}/\theta}$

Sea $f \in \mathcal{F}_n$, con $n \geq 1$ y sean $a_1, ..., a_n \in A$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_\theta(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)) &= f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)/\theta \\ &= f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, ..., a_n/\theta) \\ &= f^{\mathbf{A}/\theta}(\pi_\theta(a_1), ..., \pi_\theta(a_n) \end{aligned}$$

con lo cual π_θ es un homomorfismo. Es trivial que $\ker \pi_\theta = \theta$ □ □

Corollary 54. *Para cada $t \in T^\tau$, $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$, se tiene que $t^{\mathbf{A}/\theta}[(a_1/\theta, a_2/\theta, ...)] = t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, ...)]/\theta$.*

Proof. Ya que π_θ es un homomorfismo, se puede aplicar el Lema 136. □ □

Theorem 55. *Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo sobreyectivo. Entonces* $\begin{array}{ccc} A/\ker F & \to & B \\ a/\ker F & \to & F(a) \end{array}$ *define sin ambiguedad una funcion $\bar{F}$ la cual es un isomorfismo de $\mathbf{A}/\ker F$ en $\mathbf{B}$*

Proof. Notese que la definicion de $\bar{F}$ es inambigua ya que si $a/\ker F = a'/\ker F$, entonces $F(a) = F(a')$. Ya que F es sobre, tenemos que $\bar{F}$ lo es. Supongamos que $\bar{F}(a/\ker F) = \bar{F}(a'/\ker F)$. Claramente entonces tenemos que $F(a) = F(a')$, lo cual nos dice que $a/\ker F = a'/\ker F$. Esto prueba que $\bar{F}$ es inyectiva. Para ver que $\bar{F}$ es un isomorfismo, por el Lema 138, basta con ver que $\bar{F}$ es un homomorfismo. Sea $c \in \mathcal{C}$. Tenemos que

$\bar{F}(c^{\mathbf{A}/\ker F}) = \bar{F}(c^{\mathbf{A}}/\ker F) = F(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$

Sea $f \in \mathcal{F}_n$. Sean $a_1, ..., a_n \in A$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{F}(f^{\mathbf{A}/\ker F}(a_1/\ker F, ..., a_n/\ker F)) &= \bar{F}(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n \\ &= F(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n \\ &= f^{\mathbf{B}}(F(a_1), ..., F \\ &= f^{\mathbf{B}}(\bar{F}(a_1/\ker F \end{aligned}$$

con lo cual $\bar{F}$ cunple (2) de la definicion de homomorfismo □

Lemma 56. *Los mapeos $\pi_1 : A \times B \to A$ y $\pi_2 : A \times B \to A$ son homomorfismos*

Proof. Veamos que π_1 es un homomorfismo. Primero notese que si $c \in \mathcal{C}$, entonces

$\pi_1(c^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}) = \pi_1((c^{\mathbf{A}}, c^{\mathbf{B}})) = c^{\mathbf{A}}$

Sea $f \in \mathcal{F}_n$, con $n \geq 1$ y sean $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n) \in A \times B$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_1(f^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

con lo cual hemos probado que π_1 cumple (2) de la definicion de homomorfismo □

Lemma 57. *Para cada* $t \in T^\tau$, $((a_1,b_1),(a_2,b_2),...) \in (A\times B)^{\mathbf{N}}$, *se tiene que* $t^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}[((a_1,b_1),(a_2,b_2),...)] = (t^{\mathbf{A}}[(a_1,a_2,...)], t^{\mathbf{B}}[(b_1,b_2,...)])$

Lemma 58. *Sean* $w_1,...,w_k$ *variables, todas distintas. Sean* $v_1,...,v_n$ *variables, todas distintas. Supongamos* $t =_d t(w_1,...,w_k)$, $s_1 =_d s_1(v_1,...,v_n),...,s_k =_d s_k(v_1,...,v_n)$. *Entonces (a)* $t(s_1,...,s_k) =_d t(s_1,...,s_k)(v_1,...,v_n)$ *(b) Para cada estructura* $\mathbf{A}$ *y* $a_1,....,a_n \in A$, *se tiene que* $t(s_1,...,s_k)^{\mathbf{A}}[a_1,....,a_n] = t^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[a_1,....,a_n],...,s_k^{\mathbf{A}}[a_1,....,a_n]]$.

Proof. Probaremos que valen (a) y (b), por induccion en el l tal que $t \in T_l^\tau$. El caso $l = 0$ es dejado al lector. Supongamos entonces que valen (a) y (b) siempre que $t \in T_l^\tau$ y veamos que entonces valen (a) y (b) cuando $t \in T_{l+1}^\tau - T_l^\tau$. Hay $f \in \mathcal{F}_m$ y $t_1,...,t_m \in T_l^\tau$ tales que $t_1 =_d t_1(w_1,...,w_k),...,t_m =_d t_m(w_1,...,w_k)$ y $t = f(t_1,...,t_m)$. Notese que por (a) de la HI tenemos que

$t_i(s_1,...,s_k) =_d t_i(s_1,...,s_k)(v_1,...,v_n)$, $i = 1,...,m$

lo cual ya que $t(s_1,...,s_k) = f(t_1(s_1,...,s_k),...,t_m(s_1,...,s_k))$

nos dice que $t(s_1,...,s_k) =_d t(s_1,...,s_k)(v_1,...,v_n)$

obteniendo asi (a). Para probar (b) notemos que por (b) de la hipotesis inductiva $t_j(s_1,...,s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t_j^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}],...,s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]]$, $j = 1,...,m$

lo cual nos dice que
$$\begin{array}{rcl} t(s_1,...,s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] & = & f(t_1(s_1,...,s_k),...,t_m(s_1,...,s_k))^{\mathbf{A}}[\vec{a}] \\ & = & f^{\mathbf{A}}(t_1(s_1,...,s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}],...,t_m(s_1,...,s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}],...,s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]],...,t_m^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}],...,s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]]) \\ & = & t^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}],...,s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]] \end{array}$$
□

Lemma 59. *Si* Qv *ocurre en* φ *a partir de* i, *entonces hay una unica formula* ψ *tal que* $Qv\psi$ *ocurre en* φ *a partir de* i.

Proof. Por induccion en el k tal que $\varphi \in F^\tau$. □

Lemma 60. *Sean* $w_1,...,w_k$ *variables, todas distintas. Sean* $v_1,...,v_n$ *variables, todas distintas. Supongamos* $\varphi =_d \varphi(w_1,...,w_k)$, $t_1 =_d t_1(v_1,...,v_n),...,t_k =_d t_k(v_1,...,v_n)$ *son tales que cada* w_j *es sustituible por* t_j *en* φ. *Entonces (a)* $\varphi(t_1,...,t_k) =_d \varphi(t_1,...,t_k)(v_1,...,v_n)$ *(b) Para cada estructura* $\mathbf{A}$ *y* $\vec{a} \in A^n$ *se tiene* $\mathbf{A} \models \varphi(t_1,...,t_k)[\vec{a}]$ *si y solo si* $\mathbf{A} \models \varphi[t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}],...,t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]]$

Proof. Probaremos que se dan (a) y (b), por induccion en el l tal que $\varphi \in F_l^\tau$. El caso $l = 0$ es una consecuencia directa del Lema 146. Supongamos (a) y (b) valen para cada $\varphi \in F_l^\tau$ y sea $\varphi \in F_{l+1}^\tau - F_l^\tau$. Notese que se puede suponer que cada v_i ocurre en algun t_i, y que cada $w_i \in Li(\varphi)$, ya que para cada φ, el caso general se desprende del caso con estas restricciones. Hay varios casos

CASO $\varphi = \forall w\varphi_1$, con $w \notin \{w_1,...,w_k\}$ y $\varphi_1 =_d \varphi_1(w_1,...,w_k,w)$

Notese que cada $w_j \in Li(\varphi_1)$. Ademas notese que $w \notin \{v_1,...,v_n\}$ ya que de lo contrario w ocurriria en algun t_j, y entonces w_j no seria sustituible por t_j en φ. Sean
$$\begin{array}{rcl} \tilde{t}_1 & = & t_1 \\ & \vdots & \\ \tilde{t}_k & = & t_k \\ \tilde{t}_{k+1} & = & w \end{array}$$

Notese que $\tilde{t}_j =_d \tilde{t}_j(v_1,...,v_n,w)$

Por (a) de la hipotesis inductiva tenemos que $Li(\varphi_1(t_1,...,t_k,w)) = Li(\varphi_1(\tilde{t}_1,...,\tilde{t}_k,\tilde{t}_{k+1})) \subseteq \{v_1,...,v_n,w\}$

y por lo tanto $Li(\varphi(t_1,...,t_k)) \subseteq \{v_1,...,v_n\}$

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \models \varphi(t_1,...,t_k)[\vec{a}] \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \varphi_1(\tilde{t}_1,...,\tilde{t}_k,\tilde{t}_{k+1})[\vec{a},a], \text{ para todo } a \in A \\ \Updownarrow \end{array}$$

lo cual prueba (a). Finalmente notese que

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \models \varphi_1[\tilde{t}_1^{\mathbf{A}}[\vec{a},a],...,\tilde{t}_k^{\mathbf{A}}[\vec{a},a],\tilde{t}_{k+1}^{\mathbf{A}}[\vec{a},a]], \text{ para todo } a \in A \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \varphi_1[t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}],...,t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}],a], \text{ para todo } a \in A \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \varphi[t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}],...,t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]] \end{array}$$

lo cual pueba (b). El caso del cuantificador $\exists$ es analogo y los casos de nexos logicos son directos. □

4 Teorias de primer orden

Lemma 61. *Si φ se deduce de ψ por la regla de generalizacion, entonces el nombre de constante c del cual habla la propiedad que define al conjunto $Generaliz^\tau$ esta univocamente determinado por el par (φ,ψ).*

Proof. Notese que c es el unico nombre de constante que ocurre en ψ y no ocurre en φ □

Lemma 62. *Si φ se deduce de ψ por la regla de eleccion, entonces el nombre de constante e del cual habla la propiedad que define al conjunto $Elec^\tau$ esta univocamente determinado por el par (φ,ψ).*

Proof. Notese que e es el unico nombre de constante que ocurre en φ y no ocurre en ψ. □

Lemma 63. *Todas las reglas exepto las reglas de eleccion y generalizacion son universales en el sentido que si φ se deduce de $\psi_1,...,\psi_k$ por alguna de estas reglas, entonces $((\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_k) \to \varphi)$ es una sentencia universalmente valida*

Proof. Veamos que la regla de existencia es universal. Supongamos $\varphi =_d \varphi(v)$, $t \in T_c^\tau$ y $\mathbf{A}$ es una estructura de tipo τ tal que $\mathbf{A} \models \varphi(t)$. Sea $t^{\mathbf{A}}$ el valor que toma t en $\mathbf{A}$. Por el Lema 148 tenemos que $\mathbf{A} \models \varphi\left[t^{\mathbf{A}}\right]$, por lo cual tenemos que $\mathbf{A} \models \exists v\varphi(v)$.

Veamos que la regla de reemplazo es universal. Debemos probar que si $(\psi_1,\psi_2,\varphi) \in Reemp^\tau = Reemp1^\tau \cup Reemp2^\tau$, entonces $((\psi_1 \wedge \psi_2) \to \varphi)$ es una sentencia universalmente valida. El caso en el que $(\psi_1,\psi_2,\varphi) \in Reemp1^\tau$ es facil y lo dejaremos al lector. Para el caso en el que $(\psi_1,\psi_2,\varphi) \in Reemp2^\tau$ nos hara falta un resultado un poco mas general. Veamos por induccion en k que si se dan las siguienes condiciones

- $\alpha \in F_k^\tau$ y $\varphi,\psi \in F^\tau$ - $\mathbf{A}$ es una estructura de tipo τ - $\overline{\alpha}$ = resultado de reemplazar en α una ocurrencia de φ por ψ, - $\mathbf{A} \models \varphi\,[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \psi\,[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$ entonces se da que

- $\mathbf{A} \models \alpha\,[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \overline{\alpha}\,[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$. CASO $k = 0$.

Entonces α es atomica y por lo tanto ya que α es la unica subformula de α, la situacion es facil de probar.

CASO $\alpha = \forall x_i\alpha_1$.

Si $\varphi = \alpha$, entonces la situacion es facil de probar. Si $\varphi \neq \alpha$, entonces la ocurrencia de φ a reemplazar sucede en α_1 y por lo tanto $\overline{\alpha} = \forall x_i\overline{\alpha_1}$. Se tiene entonces que para un $\vec{a}$ dado,

$$\begin{array}{c}\mathbf{A}\models\alpha\,[\vec{a}]\\ \Updownarrow\\ \mathbf{A}\models\alpha_1\,[\downarrow_i^a\vec{a}]\text{, para cada }a\in A\\ \Updownarrow\\ \mathbf{A}\models\overline{\alpha_1}\,[\downarrow_i^a\vec{a}]\text{, para cada }a\in A\\ \Updownarrow\\ \mathbf{A}\models\overline{\alpha}\,[\vec{a}]\end{array}$$

CASO $\alpha=(\alpha_1\vee\alpha_2)$. Si $\varphi=\alpha$, entonces la situacion es facil de probar. Supongamos $\varphi\neq\alpha$ y supongamos que la ocurrencia de φ a reemplazar sucede en α_1. Entonces $\overline{\alpha}=(\overline{\alpha_1}\vee\alpha_2)$ y tenemos que

$$\begin{array}{c}\mathbf{A}\models\alpha\,[\vec{a}]\\ \Updownarrow\\ \mathbf{A}\models\alpha_1\,[\vec{a}]\text{ o }\mathbf{A}\models\alpha_2\,[\vec{a}]\\ \Updownarrow\\ \mathbf{A}\models\overline{\alpha_1}\,[\vec{a}]\text{ o }\mathbf{A}\models\alpha_2\,[\vec{a}]\\ \Updownarrow\\ \mathbf{A}\models\overline{\alpha}\,[\vec{a}]\end{array}$$

Los demas casos son dejados al lector. Dejamos al lector el chequeo de la universalidad del resto de las reglas. □

Lemma 64. *Sea $\varphi\in S^{\tau+}$. Hay unicos $n\geq 1$ y $\varphi_1,...,\varphi_n\in S^{\tau}$ tales que $\varphi=\varphi_1...\varphi_n$.*

Proof. Solo hay que probar la unicidad la cual sigue de la Proposicion 128. □

Lemma 65. *Sea $\mathbf{J}\in Just^{+}$. Hay unicos $n\geq 1$ y $J_1,...,J_n\in Just$ tales que $\mathbf{J}=J_1...J_n$.*

Proof. Supongamos $J_1,...,J_n$, $J_1',...,J_m'$, con $n,m\geq 1$, son justificaciones tales que $J_1...J_n=J_1'...J_m'$. Es facil ver que entonces tenemos $J_1=J_1'$, por lo cual $J_2...J_n=J_2'...J_m'$. Un argumento inductivo nos dice que entonces $n=m$ y $J_i=J_i'$, $i=1,...,n$ □ □

Lemma 66. *Sea $(\varphi,\mathbf{J})$ una prueba de φ en (Σ,τ). (1) Sea $m\in\mathbf{N}$ tal que $\mathbf{J}_i\neq$ HIPOTESIS$\bar{m}$, para cada $i=1,...,n(\varphi)$. Supongamos que $\mathbf{J}_i=$ HIPOTESIS$\bar{k}$ y que $\mathbf{J}_j=$ TESIS$\bar{k}\alpha$, con $[\alpha]_1\notin Num$. Sea $\tilde{\mathbf{J}}$ el resultado de reemplazar en $\mathbf{J}$ la justificacion $\mathbf{J}_i$ por HIPOTESIS$\bar{m}$ y reemplazar la justificacion $\mathbf{J}_j$ por TESIS$\bar{m}\alpha$. Entonces $(\varphi,\tilde{\mathbf{J}})$ es una prueba de φ en (Σ,τ). (2) Sea $\mathcal{C}_1$ el conjunto de nombres de constante que ocurren en alguna φ_i y que no pertenecen a $\mathcal{C}$. Sea $e\in\mathcal{C}_1-\mathcal{C}$. Sea $\tilde{e}\notin\mathcal{C}\cup\mathcal{C}_1$ tal que $(\mathcal{C}\cup(\mathcal{C}_1-\{e\})\cup\{\tilde{e}\},\mathcal{F},\mathcal{R},a)$ es un tipo. Sea $\tilde{\varphi}_i=$ resultado de reemplazar en φ_i cada ocurrencia de e por $\tilde{e}$. Entonces $(\tilde{\varphi}_1...\tilde{\varphi}_{n(\varphi)},\mathbf{J})$ es una prueba de φ en (Σ,τ).*

Proof. (1) Obvio.

(2) Sean

$$\begin{aligned}\tau_1&=(\mathcal{C}\cup\mathcal{C}_1,\mathcal{F},\mathcal{R},a)\\ \tau_2&=(\mathcal{C}\cup(\mathcal{C}_1-\{e\})\cup\{\tilde{e}\},\mathcal{F},\mathcal{R},a)\end{aligned}$$

Para cada $c\in\mathcal{C}\cup(\mathcal{C}_1-\{e\})$ definamos $\tilde{c}=c$. Notese que el mapeo $c\to\tilde{c}$ es una biyeccion entre el conjunto de nombres de constante de τ_1 y el conjunto de nombres de cte de τ_2. Para cada $t\in T^{\tau_1}$ sea $\tilde{t}=$ resultado de reemplazar en t cada ocurrencia de c por $\tilde{c}$, para cada $c\in\mathcal{C}\cup\mathcal{C}_1$. Analogamente para una formula $\psi\in F^{\tau_1}$, sea $\tilde{\psi}=$ resultado de reemplazar en ψ cada ocurrencia de c por $\tilde{c}$, para cada $c\in\mathcal{C}\cup\mathcal{C}_1$. Notese que los mapeos $t\to\tilde{t}$ y $\psi\to\tilde{\psi}$ son biyecciones naturales entre T^{τ_1} y T^{τ_2} y entre F^{τ_1} y F^{τ_2}, respectivamente. Notese que cualesquiera sean $\psi_1,\psi_2\in F^{\tau_1}$, tenemos que ψ_1 se deduce de ψ_2 por la regla de generalizacion con constante c sii $\tilde{\psi}_1$ se deduce de $\tilde{\psi}_2$ por la regla de generalizacion con constante $\tilde{c}$. Para las otras reglas sucede lo mismo. Notese tambien que c ocurre en ψ sii $\tilde{c}$ ocurre en $\tilde{\psi}$. Mas aun notese que c depende de d en $(\varphi,\mathbf{J})$ sii $\tilde{c}$ depende de $\tilde{d}$ en $(\tilde{\varphi},\mathbf{J})$, donde $\tilde{\varphi}=\widetilde{\varphi_1}...\widetilde{\varphi_{n(\varphi)}}$. Ahora es facil chequear que $(\tilde{\varphi}, \mathbf{J})$ es una prueba de φ en (Σ, τ) basandose en que $(\varphi, \mathbf{J})$ es una prueba de φ en (Σ, τ). $\square$ $\square$

Lemma 67. *Sea (Σ, τ) una teoria. (1) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. (2) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ y φ se deduce por alguna regla universal a partir de $\varphi_1, ..., \varphi_n$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. (3) Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, para toda sentencia φ. (4) Si (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente. (5) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ si y solo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. (6) Si $(\Sigma, \tau) \not\vdash \neg\varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.*

Proof. (1) Haremos el caso $n = 2$. Supongamos entonces que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \varphi_2$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\}, \tau) \vdash \varphi$. Para $i = 1, 2$, sea $(\varphi_1^i ... \varphi_{n_i}^i, J_1^i ... J_{n_i}^i)$ una prueba de φ_i en (Σ, τ). Sea $(\psi_1 ... \psi_n, J_1 ... J_n)$ una prueba de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\}, \tau)$. Notese que por el Lema 154 podemos suponer que estas tres pruebas no comparten ningun nombre de constante auxiliar y que tampoco comparten numeros asociados a hipotesis o tesis. Para cada $i = 1, ..., n$, definamos $\widetilde{J}_i$ de la siguiente manera.

- Si $\psi_i = \varphi_1$ y $J_i =$ AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J}_i =$ EVOCACION$(\overline{n_1})$ - Si $\psi_i = \varphi_2$ y $J_i =$ AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J}_i =$ EVOCACION$(\overline{n_1 + n_2})$. - Si $\psi_i \notin \{\varphi_1, \varphi_2\}$ y $J_i =$ AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J}_i =$ AXIOMAPROPIO. - Si $J_i =$ AXIOMALOGICO, entonces $\widetilde{J}_i =$ AXIOMALOGICO - Si $J_i =$ CONCLUSION, entonces $\widetilde{J}_i =$ CONCLUSION. - Si $J_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$, entonces $\widetilde{J}_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$ - Si $J_i = \alpha P(\overline{l_1}, ..., \overline{l_k})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J}_i = \alpha P(\overline{l_1 + n_1 + n_2}, ..., \overline{l_k + n_1 + n_2})$ Para cada $i = 1, ..., n_2$, definamos $\widetilde{J_i^2}$ de la siguiente manera.

- Si $J_i^2 =$ AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J_i^2} =$ AXIOMAPROPIO - Si $J_i^2 =$ AXIOMALOGICO, entonces $\widetilde{J_i^2} =$ AXIOMALOGICO - Si $J_i^2 =$ CONCLUSION, entonces $\widetilde{J_i^2} =$ CONCLUSION. - Si $J_i^2 =$ HIPOTESIS$\bar{k}$, entonces $\widetilde{J_i^2} =$ HIPOTESIS$\bar{k}$ - Si $J_i^2 = \alpha P(\overline{l_1}, ..., \overline{l_k})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i^2} = \alpha P(\overline{l_1 + n_1}, ..., \overline{l_k + n_1})$ Es facil chequear que

$(\varphi_1^1 ... \varphi_{n_1}^1 \varphi_1^2 ... \varphi_{n_2}^2 \psi_1 ... \psi_n, J_1^1 ... J_{n_1}^1 \widetilde{J_1^2} ... \widetilde{J_{n_2}^2} \widetilde{J}_1 ... \widetilde{J}_n)$

es una prueba de φ en (Σ, τ) (2) Supongamos que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ y que φ se deduce por regla R a partir de $\varphi_1, ..., \varphi_n$, con R universal. Notese que

1.	φ_1	AXIOMAPROPIO
2.	φ_2	AXIOMAPROPIO
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	φ_n	AXIOMAPROPIO
$n+1$	φ	R$(\bar{1}, ..., \bar{n})$

es una prueba de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau)$, lo cual por (1) nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. (3) Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces por definicion tenemos que $(\Sigma, \tau) \vdash \psi \wedge \neg\psi$ para alguna sentencia ψ. Dada una sentencia cualquiera φ tenemos que φ se deduce por la regla del absurdo a partir de $\psi \wedge \neg\psi$ con lo cual (2) nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$

(4) Supongamos (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. Si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ fuera inconsistente, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi \wedge \neg\psi$, para alguna sentencia ψ, lo cual por (1) nos diria que $(\Sigma, \tau) \vdash \psi \wedge \neg\psi$, es decir nos diria que (Σ, τ) es inconsistente.

(5) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$. Entonces tenemos que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\varphi \to \psi), \varphi$, lo cual por (2) nos dice que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. Supongamos ahora que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. Sea $(\varphi_1 ... \varphi_n, J_1 ..., J_n)$ una prueba de ψ en $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$. Notese que podemos suponer que J_n es de la forma $P(\overline{l_1}, ..., \overline{l_k})$. Definimos $\widetilde{J}_i =$ TESIS$\bar{m}P(\overline{l_1 + 1}, ..., \overline{l_k + 1}$, donde m es tal que ninguna J_i es igual a HIPOTESIS$\bar{m}$. Para cada $i = 1, ..., n-1$, definamos $\widetilde{J}_i$ de la siguiente manera.

- Si $\varphi_i = \varphi$ y $J_i =$ AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J}_i =$ EVOCACION(1) - Si $\varphi_i \neq \varphi$ y $J_i =$ AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J}_i =$ AXIOMAPROPIO - Si $J_i =$ AXIOMALOGICO, entonces $\widetilde{J}_i =$ AXIOMALOGICO - Si $J_i =$ CONCLUSION, entonces $\widetilde{J}_i =$ CONCLUSION - Si

$J_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ entonces $\widetilde{J_i} = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ - Si $J_i = \alpha P(\overline{l_1}, ..., \overline{l_k})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i} = \alpha P(\overline{l_1 + 1}, ..., \overline{l_k + 1})$ Es facil chequear que

$(\varphi\varphi_1...\varphi_n(\varphi \to \psi),\ \text{HIPOTESIS}\bar{m}\widetilde{J_1}...\widetilde{J_n}\text{CONCLUSION})$

es una prueba de $(\varphi \to \psi)$ en (Σ, τ) □

Theorem 68. *(Correccion)* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ *implica* $(\Sigma, \tau) \models \varphi$.

Corollary 69. *Si* (Σ, τ) *tiene un modelo, entonces* (Σ, τ) *es consistente.*

Proof. Supongamos $\mathbf{A}$ es un modelo de (Σ, τ). Si (Σ, τ) fuera inconsistente, tendriamos que hay una $\varphi \in S^t$ tal que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$, lo cual por el Teorema de Correccion nos diria que $\mathbf{A} \models (\varphi \wedge \neg\varphi)$ □ □

Lemma 70. $\dashv\vdash$ *es una relacion de equivalencia.*

Proof. La relacion es reflexiva ya que $(\varphi \leftrightarrow \varphi)$ es un axioma logico. Veamos que es simetrica. Supongamos que $\varphi \dashv\vdash \psi$, es decir $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$. Ya que $((\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi))$ es un axioma logico, tenemos que $(\Sigma, \tau) \vdash ((\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi))$. Notese que $(\psi \leftrightarrow \varphi)$ se deduce de $((\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi))$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ por la regla de reemplazo, lo cual por (2) del Lema 155 nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash (\psi \leftrightarrow \varphi)$.

Analogamente, usando la regla de transitividad se puede probar que $\dashv\vdash$ es transitiva. □

Lemma 71. *Dada una teoria* (Σ, τ)*, el par* $(S^\tau/\dashv\vdash, \leq)$ *es un reticulado en el cual:*
$$\begin{array}{rcl} [\varphi] \ \mathsf{s} \ [\psi] & = & [(\varphi \vee \psi)] \\ [\varphi] \ \mathsf{i} \ [\psi] & = & [(\varphi \wedge \psi)] \end{array}$$
Mas aun $(S^\tau/\dashv\vdash, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *es distributivo.*

Proof. Primero que todo deberemos verificar que $\leq$ es un orden parcial sobre $S^\tau/\dashv\vdash$. Veamos que $\leq$ es antisimetrica las otras dos propiedades son dejadas al lector. Supongamos que $[\varphi] \leq [\psi]$ y $[\psi] \leq [\varphi]$. Es decir que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi), (\psi \to \varphi)$. Notese que

1. $(\varphi \to \psi)$ AXIOMAPROPIO
2. $(\psi \to \varphi)$ AXIOMAPROPIO
3. $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$ CONJUNCIONINTRODUCCION$(1, 2)$
4. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$ AXIOMALOGICO
5. $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ REEMPLAZO$(3, 4)$

justifica que $(\{(\varphi \to \psi), (\psi \to \varphi)\}, \tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$, lo cual por el Lema 155 nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$, obteniendo $[\varphi] = [\psi]$. Veamos ahora que $[(\varphi \vee \psi)] = [\varphi] \ \mathsf{s} \ [\psi]$. Es facil probar que $[\varphi], [\psi] \leq [(\varphi \vee \psi)]$. Supongamos que $[\varphi], [\psi] \leq [\alpha]$. Es decir que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \alpha), (\psi \to \alpha)$. Notese que

1. $(\varphi \to \alpha)$ AXIOMAPROPIO
2. $(\psi \to \alpha)$ AXIOMAPROPIO
3. $(\varphi \vee \psi) \to \alpha$ CONJUNCIONINTRODUCCION$(1, 2)$

justifica que $(\{(\varphi \to \alpha), (\psi \to \alpha)\}, \tau) \vdash (\varphi \vee \psi) \to \alpha$ lo cual por el Lema 155 nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \vee \psi) \to \alpha$, obteniendo que $[(\varphi \vee \psi)] \leq [\alpha]$. Veamos que el reticulado $(S^\tau/\dashv\vdash, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es distributivo. Sean $\varphi, \psi, \varphi \in S^\tau$. Ya que

$(\varphi \wedge (\psi \vee \varphi)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \varphi))$

es un axioma logico, tenemos que $[(\varphi \wedge (\psi \vee \varphi))] = [((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \varphi))]$.

Se tiene entonces
$$\begin{array}{rcl} [\varphi] \ \mathsf{i} \ ([\psi] \ \mathsf{s} \ [\varphi]) & = & [\varphi] \ \mathsf{i} \ ([(\psi \vee \varphi)]) \\ & = & [(\varphi \wedge (\psi \vee \varphi))] \\ & = & [((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \varphi))] \\ & = & [(\varphi \wedge \psi)] \ \mathsf{s} \ [(\varphi \wedge \varphi)] \\ & = & ([\varphi] \ \mathsf{i} \ [\psi]) \ \mathsf{s} \ ([\varphi] \ \mathsf{i} \ [\varphi]) \end{array}$$

El resto de la prueba es dejado al lector. □

Lemma 72. *El poset* $(S^\tau/\dashv\vdash, \leq)$ *tiene* 0 *y* 1 *dados por*

$$\begin{aligned} 0 &= \{\varphi \in S^\tau : \varphi \text{ es refutable en } (\Sigma,\tau)\} \\ &= [\varphi], \text{ para cada } \varphi \text{ refutable} \\ 1 &= \{\varphi \in S^\tau : \varphi \text{ es refutable en } (\Sigma,\tau)\} \\ &= [\varphi], \text{ para cada teorema } \varphi \end{aligned}$$

Proof. Veamos que para cada φ tal que $(\Sigma,\tau) \vdash \neg\varphi$,

$[\varphi] = \{\varphi \in S^\tau : (\Sigma,\tau) \vdash \neg\varphi\}$

La inclusion $\subseteq$ es facil. Supongamos ahora $\psi \in \{\varphi \in S^\tau : (\Sigma,\tau) \vdash \neg\varphi\}$. Es decir que $(\Sigma,\tau) \vdash \neg\psi$. Notese que

1.	$\neg\psi$	AXIOMAPROPIO
2.	$(\psi \rightarrow \varphi)$	ABSURDO(1)
3.	$\neg\varphi$	AXIOMAPROPIO
4.	$(\varphi \rightarrow \psi)$	ABSURDO(3)
5.	$((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$	CONJUNCIONINTRODUCCION$(5,2)$
6.	$(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$	AXIOMALOGICO
7.	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	REEMPLAZO$(6,7)$

justifica que $(\{\neg\varphi,\neg\psi\},\tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ lo cual por el Lema 155 nos dice que $(\Sigma,\tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$, obteniendo que $\psi \in [\varphi]$. Es facil ver que $\{\varphi \in S^\tau : (\Sigma,\tau) \vdash \neg\varphi\}$ es un 0 del poset $(S^\tau/\dashv\vdash, \leq)$. Dejamos al lector la prueba analoga de que para cada φ tal que $(\Sigma,\tau) \vdash \varphi$,

$\{\varphi \in S^\tau : (\Sigma,\tau) \vdash \varphi\} = [\varphi]$,

es un 1 del poset $(S^\tau/\dashv\vdash, \leq)$. $\square$

Lemma 73. $(S^\tau/\dashv\vdash, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$ *es un algebra de Boole*

Proof. En virtud de los lemas anteriores solo falta probar que

$$\begin{aligned} [\varphi] \mathsf{\ s\ } [\varphi]^c &= 1 \\ [\varphi] \mathsf{\ i\ } [\varphi]^c &= 0 \end{aligned}$$

Dejamos al lector la prueba de estas igualdades. $\square$

Lemma 74. *Sean* $\tau = (\mathcal{C},\mathcal{F},\mathcal{R},a)$ *y* $\tau' = (\mathcal{C}',\mathcal{F}',\mathcal{R}',a')$ *tipos. (1) Si* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$ *y* $a' \mid_{\mathcal{F}\cup\mathcal{R}} = a$, *entonces* $(\Sigma,\tau) \vdash \varphi$ *implica* $(\Sigma,\tau') \vdash \varphi$ *(2) Si* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ *y* $a' = a$ *, entonces* $(\Sigma,\tau') \vdash \varphi$ *implica* $(\Sigma,\tau) \vdash \varphi$, *cada vez que* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq S^\tau$.

Proof. (1) Supongamos $(\Sigma,\tau) \vdash \varphi$. Entonces hay una prueba $(\varphi_1...\varphi_n, J_1...J_n)$ de φ en (Σ,τ). Sea $\mathcal{C}_1$ el conjunto de nombres de constante que ocurren en alguna φ_i y que no pertenecen a $\mathcal{C}$. Notese que aplicando varias veces el Lema 154 podemos obtener una prueba $(\tilde{\varphi}_1...\tilde{\varphi}_n, J_1...J_n)$ de φ en (Σ,τ) la cual cumple que los nombres de constante que ocurren en alguna ψ_i y que no pertenecen a $\mathcal{C}$ no pertenecen a $\mathcal{C}'$. Pero entonces $(\tilde{\varphi}_1...\tilde{\varphi}_n, J_1...J_n)$ es una prueba de φ en (Σ,τ'), con lo cual $(\Sigma,\tau') \vdash \varphi$

(2) Supongamos $(\Sigma,\tau') \vdash \varphi$. Entonces hay una prueba $(\varphi,\mathbf{J})$ de φ en (Σ,τ'). Veremos que $(\varphi,\mathbf{J})$ es una prueba de φ en (Σ,τ). Ya que $(\varphi,\mathbf{J})$ es una prueba de φ en (Σ,τ') hay un conjunto finito $\mathcal{C}_1$, disjunto con $\mathcal{C}'$, tal que $(\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}_1,\mathcal{F},\mathcal{R},a)$ es un tipo y cada φ_i es una sentencia de tipo $(\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}_1,\mathcal{F},\mathcal{R},a)$. Notese que $\widetilde{\mathcal{C}_1} = \mathcal{C}_1 \cup (\mathcal{C}' - \mathcal{C})$ es tal que $(\mathcal{C} \cup \widetilde{\mathcal{C}_1},\mathcal{F},\mathcal{R},a)$ es un tipo y cada φ_i es una sentencia de tipo $(\mathcal{C} \cup \widetilde{\mathcal{C}_1},\mathcal{F},\mathcal{R},a)$, con lo cual $(\varphi,\mathbf{J})$ cunple el punto 1. de la definicion de prueba. Todos los otros puntos se cumplen en forma directa, exepto los puntos 4(f) y 4(g)i para los cuales es necesario notar que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$. $\square$ $\square$

Lemma 75. *Sea* (Σ,τ) *una teoria y supongamos que* τ *tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de* Σ. *Entonces para cada formula* $\varphi =_d \varphi(v)$, *se tiene que* $[\forall v \varphi(v)] = \inf(\{[\varphi(t)] : t \text{ es un termino cerrado}\})$.

Proof. Primero notese que $[\forall v\ \varphi(v)] \leq [\varphi(t)]$, para todo termino cerrado t, ya que podemos dar la siguiente prueba:

1. $\forall v\ \varphi(v)$ HIPOTESIS1
2. $\varphi(t)$ TESIS1PARTICULARIZACION(1)
3. $(\forall v\ \varphi(v) \rightarrow \varphi(t))$ CONCLUSION

Supongamos ahora que $[\psi] \leq [\varphi(t)]$, para todo termino cerrado t. Por hipotesis hay un nombre de cte $c \in \mathcal{C}$ el cual no ocurre en los elementos de $\Sigma \cup \{\psi, \varphi(v)\}$. Ya que $[\psi] \leq [\varphi(c)]$, hay una prueba $(\varphi_1 ... \varphi_n, J_1 ... J_n)$ de $(\psi \rightarrow \varphi(c))$ en (Σ, τ). Pero entonces es facil de chequear que la siguiente es una prueba en $(\Sigma, (\mathcal{C} - \{c\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a))$ de $(\psi \rightarrow \forall v\ \varphi(v))$:

1.	φ_1	J_1
2.	φ_2	J_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n.$	$\varphi_n = (\psi \rightarrow \varphi(c))$	J_n
$n+1.$	ψ	HIPOTESIS$\bar{m}$
$n+2.$	$\varphi(c)$	MODUSPON
$n+3.$	$\forall v \varphi(v)$	TESIS$\bar{m}$GEN
$n+4.$	$(\psi \rightarrow \forall v \varphi(v))$	CONCLUSI

(con m elejido suficientemente grande). Por el Lema 162 tenemos entonces que $(\Sigma, \tau) \vdash (\psi \rightarrow \forall v\ \varphi(v))$ □

Lemma 76. *(de Coincidencia): Sean τ y τ' dos tipos cualesquiera y sea $\tau_\cap$ dado por $\mathcal{C}_\cap = \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$, $\mathcal{F}_\cap = \{f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' : a(f) = a'(f)\}$, $\mathcal{R}_\cap = \{r \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}' : a(r) = a'(r)\}$ y $a_\cap = a\ |_{\mathcal{F}_\cap \cup \mathcal{R}_\cap}$. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ modelos de tipo τ y τ' respectivamente. Supongamos que $A = A'$ y que $c^{\mathbf{A}} = c^{\mathbf{A}'}$, para cada $c \in \mathcal{C}_\cap$, $f^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{A}'}$, para cada $f \in \mathcal{F}_\cap$ y $r^{\mathbf{A}} = r^{\mathbf{A}'}$, para cada $r \in \mathcal{R}_\cap$. Entonces (a) Para cada $t =_d t(\vec{v}) \in T^{\tau_\cap}$ se tiene que $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{A}'}[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^n$ (b) Para cada $\varphi =_d \varphi(\vec{v}) \in F^{\tau_\cap}$ se tiene que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A}' \models \varphi[\vec{a}]$. (c) Si $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq S^{\tau_\cap}$, entonces $(\Sigma, \tau) \models \varphi$ sii $(\Sigma, \tau') \models \varphi$.*

Proof. (a) y (b) son directos por induccion.

(c) Supongamos que $(\Sigma, \tau) \models \varphi$. Sea $\mathbf{A}'$ un modelo de τ' tal que $\mathbf{A}' \models \Sigma$. Sea $a \in A'$ un elemento fijo. Sea $\mathbf{A}$ el modelo de tipo τ definido de la siguiente manera

- universo de $\mathbf{A} = A'$ - $c^{\mathbf{A}} = c^{\mathbf{A}'}$, para cada $c \in \mathcal{C}_\cap$, - $f^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{A}'}$, para cada $f \in \mathcal{F}_\cap$ - $r^{\mathbf{A}} = r^{\mathbf{A}'}$, para cada $r \in \mathcal{R}_\cap$ - $c^{\mathbf{A}} = a$, para cada $c \in \mathcal{C} - \widetilde{\mathcal{C}}$ - $f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_{a(f)}) = a$, para cada $f \in \mathcal{F} - \mathcal{F}_\cap$, $a_1, ..., a_{a(f)} \in A'$ - $r^{\mathbf{A}} = \varnothing$, para cada $r \in \mathcal{R} - \mathcal{R}_\cap$ Ya que $\mathbf{A}' \models \Sigma$, (b) nos dice que $\mathbf{A} \models \Sigma$, lo cual nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi$. Nuevamente por (b) tenemos que $\mathbf{A}' \models \varphi$, con lo cual hemos probado que $(\Sigma, \tau') \models \varphi$ □

Lemma 77. *Sea τ un tipo. Hay una sucesion de formulas $\gamma_1, \gamma_2, ...$*

tal que: (1) $|Li(\gamma_j)| \leq 1$, para cada $j = 1, 2, ...$ (2) si $|Li(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$, para algun $j \in \mathbf{N}$

Proof. Notese que las formulas de tipo τ son palabras de algun alfabeto finito A. Dado un orden total estricto $<$ para A, podemos definir

$$\gamma_1 = \min_\alpha^< (\alpha \in F^\tau \wedge |Li(\alpha)| \leq 1)$$
$$\gamma_{t+1} = \min_\alpha^< (\alpha \in F^\tau \wedge |Li(\alpha)| \leq 1 \wedge (\forall i \in \omega)_{i \leq t} \alpha \neq \gamma_i)$$

Claramente esta sucesion cumple (1) y es facil ver que tambien se cumple la propiedad (2). □

Theorem 78. *(Completitud) (Godel) $(\Sigma, \tau) \models \varphi$ implica $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*

Proof. Primero probaremos completitud para el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de Σ. Lo probaremos por el absurdo, es decir supongamos que φ_0 es tal que $(\Sigma, \tau) \models \varphi_0$ y $(\Sigma, \tau) \not\vdash \varphi_0$. Notese que ya que $(\Sigma, \tau) \not\vdash \varphi_0$, tenemos que $[\neg\varphi_0] \neq 0^{\mathcal{A}(\Sigma,\tau)}$. Para cada $j \in \mathbf{N}$, sea $w_j \in Var$ tal que $Li(\gamma_j) \subseteq \{w_j\}$. Para cada j, declaremos $\gamma_j =_d \gamma_j(w_j)$. Notese que por el Lema 163 tenemos que $\inf\{[\gamma_j(t)] : t \in T_c^\tau\} =$

$[\forall w_j \gamma_j(w_j)]$, para cada $j = 1, 2, ...$ Por el Teorema de Rasiova y Sikorski tenemos que hay un filtro primo de $\mathcal{A}_{(\Sigma,\tau)}$, $\mathcal{U}$ el cual cumple:

(a) $[\neg\varphi_0] \in \mathcal{U}$ (b) para cada $j \in \mathbf{N}$, $\{[\gamma_j(t)] : t \in T_c^\tau\} \subseteq \mathcal{U}$ implica que $[\forall w_j \gamma_j(w_j)] \in \mathcal{U}$ Ya que la sucesion de las γ_i cubre todas las formulas con a lo sumo una variable libre, podemos reescribir la propiedad (b) de la siguiente manera

(b)$'$ para cada $\varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau$, si $\{[\varphi(t)] : t \in T_c^\tau\} \subseteq \mathcal{U}$ entonces $[\forall v \varphi(v)] \in \mathcal{U}$ Definamos sobre T_c^τ la siguiente relacion:

$t \bowtie s$ si y solo si $[(t \equiv s)] \in \mathcal{U}$.

Veamos entonces que: (1) $\bowtie$ es de equivalencia. (2) Para cada $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau$, $t_1, ..., t_n, s_1, ..., s_n \in T_c^\tau$, si $t_1 \bowtie s_1$, $t_2 \bowtie s_2$, ..., $t_n \bowtie s_n$, entonces $[\varphi(t_1, ..., t_n)] \in \mathcal{U}$ si y solo si $[\varphi(s_1, ..., s_n)] \in \mathcal{U}$. (3) Para cada $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1, ..., t_n, s_1, ..., s_n \in T_c^\tau$, $t_1 \bowtie s_1, t_2 \bowtie s_2, ...,$ $t_n \bowtie s_n$ implica $f(t_1, ..., t_n) \bowtie f(s_1, ..., s_n)$.

Probaremos (2). Notese que

$(\Sigma, \tau) \vdash ((t_1 \equiv s_1) \wedge (t_2 \equiv s_2) \wedge ... \wedge (t_n \equiv s_n) \wedge \varphi(t_1, ..., t_n)) \rightarrow \varphi(s_1, ..., s_n)$

lo cual nos dice que $[(t_1 \equiv s_1)] \mathsf{i} [(t_2 \equiv s_2)] \mathsf{i} ... \mathsf{i} [(t_n \equiv s_n)] \mathsf{i} [\varphi(t_1, ..., t_n)] \leq [\varphi(s_1, ..., s_n)]$

de lo cual se desprende que $[\varphi(t_1, ..., t_n)] \in \mathcal{U}$ implica $[\varphi(s_1, ..., s_n)] \in \mathcal{U}$

ya que $\mathcal{U}$ es un filtro. La otra implicacion es analoga. Para probar (3) podemos tomar $\varphi = (f(v_1, ..., v_n) \equiv f(s_1, ..., s_n))$ y aplicar (2).

Definamos ahora un modelo $\mathbf{A}_\mathcal{U}$ de tipo τ de la siguiente manera:

- Universo de $\mathbf{A}_\mathcal{U} = T_c^\tau / \bowtie$ - $f^{\mathbf{A}_\mathcal{U}}(t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie) = f(t_1, ..., t_n)/\bowtie$, $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$ - $r^{\mathbf{A}_\mathcal{U}} = \{(t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie) : [r(t_1, ..., t_n)] \in \mathcal{U}\}$, $r \in \mathcal{R}_n$. Notese que la definicion de $f^{\mathbf{A}_\mathcal{U}}$ es inambigua por (3). Probaremos las siguientes propiedades basicas:

(4) Para cada $t =_d t(v_1, ..., v_n) \in T^\tau$, $t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$, tenemos que $t^{\mathbf{A}_\mathcal{U}}[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] = t(t_1, ..., t_n)/\bowtie$

(5) Para cada $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau$, $t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$, tenemos que $\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie]$ si y solo si $[\varphi$ $\mathcal{U}$.

La prueba de (4) es directa por induccion. Probaremos (5) por induccion en el k tal que $\varphi \in F_k^\tau$. El caso $k = 0$ es dejado al lector. Supongamos (5) vale para $\varphi \in F_k^\tau$. Sea $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$. Hay varios casos:

CASO $\varphi(v_1, ..., v_n) = (\varphi_1(v_1, ..., v_n) \vee \varphi_2(v_1, ..., v_n))$.

Tenemos

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \varphi_1[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \text{ o } \mathbf{A}_\mathcal{U} \models \varphi_2[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \\
\Updownarrow \\
[\varphi_1(t_1, ..., t_n)] \in \mathcal{U} \text{ o } [\varphi_2(t_1, ..., t_n)] \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[\varphi_1(t_1, ..., t_n)] \mathsf{s} [\varphi_2(t_1, ..., t_n)] \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[(\varphi_1(t_1, ..., t_n) \vee \varphi_2(t_1, ..., t_n))] \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[\varphi(t_1, ..., t_n)] \in \mathcal{U}.
\end{gathered}$$

CASO $\varphi(v_1, ..., v_n) = \forall v \varphi_1(v_1, ..., v_n, v)$. Tenemos

$$\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie]$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi_1[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie, t/\bowtie], \text{ para todo } t \in T_c^\tau$$
$$\Updownarrow$$
$$[\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)] \in \mathcal{U}, \text{ para todo } t \in T_c^\tau$$
$$\Updownarrow$$
$$[\forall v \varphi_1(t_1, ..., t_n, v)] \in \mathcal{U}$$
$$\Updownarrow$$
$$[\varphi(t_1, ..., t_n)] \in \mathcal{U}.$$

CASO $\varphi(v_1, ..., v_n) = \exists v \varphi_1(v_1, ..., v_n, v)$. Tenemos

$$\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie]$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi_1[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie, t/\bowtie], \text{ para algun } t \in T_c^\tau$$
$$\Updownarrow$$
$$[\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)] \in \mathcal{U}, \text{ para algun } t \in T_c^\tau$$
$$\Updownarrow$$
$$[\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]^c \notin \mathcal{U}, \text{ para algun } t \in T_c^\tau$$
$$\Updownarrow$$
$$[\neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)] \notin \mathcal{U}, \text{ para algun } t \in T_c^\tau$$
$$\Updownarrow$$
$$[\forall v \, \neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, v)] \notin \mathcal{U}$$
$$\Updownarrow$$
$$[\forall v \, \neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, v)]^c \in \mathcal{U}$$
$$\Updownarrow$$
$$[\neg\forall v \, \neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, v)] \in \mathcal{U}$$
$$\Updownarrow$$
$$[\varphi(t_1, ..., t_n)] \in \mathcal{U}.$$

Pero ahora notese que (5) en particular nos dice que para cada sentencia $\psi \in S^\tau$, $\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \psi$ si y solo si $[\psi] \in \mathcal{U}$. De esta forma llegamos a que $\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \Sigma$ y $\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \neg\varphi_0$, lo cual contradice la suposicion de que $(\Sigma, \tau) \models \varphi_0$. Ahora supongamos que τ es cualquier tipo. Sean s_1 y s_2 un par de simbolos no pertenecientes a la lista

$\forall$ $\exists$ $\neg$ $\vee$ $\wedge$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$ ( ) , $\equiv$ X *0* *1* ... *9* **0** **1** ... **9**

y tales que ninguno ocurra en alguna palabra de $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$. Si $(\Sigma, \tau) \models \varphi$, entonces usando el Lema de Coincidencia se puede ver que $(\Sigma, (\mathcal{C} \cup \{s_1s_2s_1, s_1s_2s_2s_1, ...\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)) \models \varphi$, por lo cual $(\Sigma, (\mathcal{C} \cup \{s_1s_2s_1, s_1s_2s_2s_1, ...\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)) \vdash \varphi$.

Pero por Lema 162, tenemos que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. □

Corollary 79. *Toda teoria consistente tiene un modelo.*

Proof. Supongamos (Σ, τ) es consistente y no tiene modelos. Entonces $(\Sigma, \tau) \models (\varphi \wedge \neg\varphi)$, con lo cual por completitud $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$, lo cual es absurdo. □ □

Corollary 80. *(Teorema de Compacidad) (a) Si (Σ, τ) es tal que (Σ_0, τ) tiene un modelo, para cada subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, entonces (Σ, τ) tiene un modelo (b) Si $(\Sigma, \tau) \models \varphi$, entonces hay un subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que $(\Sigma_0, \tau) \models \varphi$.*

Proof. (a) Si (Σ, τ) fuera inconsistente habria un subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que la teoria (Σ_0, τ) es inconsistente (Σ_0 puede ser formado con los axiomas de Σ usados en una prueba que atestigue que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$). O sea que (Σ, τ) es consistente por lo cual tiene un modelo.

(b) Si $(\Sigma, \tau) \models \varphi$, entonces por completitud, $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. Pero entonces hay un subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que $(\Sigma_0, \tau) \vdash \varphi$, es decir tal que $(\Sigma_0, \tau) \models \varphi$ (correccion). □ □

Lemma 81. *Dados $t_1, ..., t_n$, $t =_d t(x_1, ..., x_n) \in T^\tau$, se tiene que $t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, ..., t_n] = t(t_1, ..., t_n)$.*

Proof. Para cada $k \geq 0$, sea

- Teo$_k$: Dados $t_1, ..., t_n \in T^\tau$ y $t =_d t(x_1, ..., x_n) \in T_k^\tau$, se tiene que $t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, ..., t_n] = t(t_1, ..., t_n)$.

Veamos que es cierto Teo$_0$. Hay dos casos

Caso $t =_d t(x_1, ..., x_n) = c \in \mathcal{C}$.

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, ..., t_n] &= c^{\mathbf{T}^\tau} \\ &= c \\ &= t(t_1, ..., t_n) \end{aligned}$$

Caso $t =_d t(x_1, ..., x_n) = x_i$, para algun i.

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, ..., t_n] &= t_i \\ &= t(t_1, ..., t_n) \end{aligned}$$

Veamos que Teo$_k$ implica Teo$_{k+1}$. Supongamos que vale Teo$_k$. Sean $t_1, ..., t_n \in T^\tau$ y $t =_d t(x_1, ..., x_n) \in T_{k+1}^\tau - T_k^\tau$. Hay $f \in \mathcal{F}_m$, con $m \geq 1$, y terminos $s_1, ..., s_m \in T_k^\tau$ tales que $t = f(s_1, ..., s_m)$. Notese que $s_i =_d s_i(x_1, ..., x_n)$, $i = 1, ..., m$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, ..., t_n] &= f(s_1, ..., s_m)^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, ..., t_n] \\ &= f^{\mathbf{T}^\tau}(s_1^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, ..., t_n], ..., s_m^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, ..., t_n]) \\ &= f^{\mathbf{T}^\tau}(s_1(t_1, ..., t_n), ..., s_m(t_1, ..., t_n)) \\ &= f(s_1(t_1, ..., t_n), ..., s_m(t_1, ..., t_n)) \\ &= t(t_1, ..., t_n) \end{aligned}$$

con lo cual vale Teo$_{k+1}$ □ □

Lemma 82. *(Universal maping property) Si $\mathbf{A}$ es cualquier τ-algebra y $F : Var \to A$, es una funcion cualquiera, entonces F puede ser extendida a un homomorfismo $\bar{F} : \mathbf{T}^\tau \to \mathbf{A}$.*

Proof. Definamos $\bar{F}$ de la siguiente manera:

$\bar{F}(t) = t^{\mathbf{A}}[(F(x_1), F(x_2), ...)]$

Es claro que $\bar{F}$ extiende a F. Veamos que es un homomorfismo. Dada $c \in \mathcal{C}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{F}(c^{\mathbf{T}^\tau}) &= \bar{F}(c) \\ &= c^{\mathbf{A}}[(F(x_1), F(x_2), ...)] \\ &= c^{\mathbf{A}} \end{aligned}$$

Dados $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1, ..., t_n \in T^\tau$ tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{F}(f^{\mathbf{T}^\tau}(t_1, ..., t_n)) &= \bar{F}(f(t_1, ..., t_n)) \\ &= f(t_1, ..., t_n)^{\mathbf{A}}[(F(x_1), F(x_2), ...)] \\ &= f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[(F(x_1), F(x_2), ...)], ..., t_n^{\mathbf{A}}[(F(x_1 \\ &= f^{\mathbf{A}}(\bar{F}(t_1), ..., \bar{F}(t_n)) \end{aligned}$$

con lo cual hemos probado que $\bar{F}$ es un homomorfismo. □

Lemma 83. *Las reglas anteriores son universales.*

Proof. Veamos que la regla de reemplazo es universal. Basta con ver por induccion en k que

- Teo$_k$: Sean $t, s \in T^\tau$, $r \in T_k^\tau$ y sea $\mathbf{A}$ una τ-algebra tal que $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$. Entonces $r^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = \tilde{r}^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$, donde $\tilde{r}$ es el resultado de reemplazar algunas ocurrencias de t en r por s. La prueba de Teo$_0$ es dejada al lector. Asumamos que vale Teo$_k$ y probemos que vale Teo$_{k+1}$. Sean $t, s \in T^\tau$, $r \in T_{k+1}^\tau - T_k^\tau$ y sea $\mathbf{A}$ una τ-algebra tal que $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$. Sea $\tilde{r}$ el resultado de reemplazar algunas ocurrencias de t en r por s. El caso $t = r$ es trivial. Supongamos entonces que $t \neq r$. Supongamos $r = f(r_1, ..., r_n)$, con $r_1, ..., r_n \in T_k^\tau$ y $f \in \mathcal{F}_n$. Notese que por Lema 123 tenemos que $\tilde{r} = f(\tilde{r}_1, ..., \tilde{r}_n)$, donde cada $\tilde{r}_i$ es el resultado de reemplazar algunas ocurrencias de t en r_i por s. Para $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$ se tiene que

$$\begin{aligned} r^{\mathbf{A}}[\vec{a}] &= f(r_1, ..., r_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] \\ &= f^{\mathbf{A}}(r_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., r_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\ &= f^{\mathbf{A}}(\tilde{r}_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., \tilde{r}_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \qquad \text{por Teo}_k \\ &= f(\tilde{r}_1, ..., \tilde{r}_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] \\ &= \tilde{r}^{\mathbf{A}}[\vec{a}] \end{aligned}$$

lo cual prueba Teo_{k+1} Veamos que la regla de substitucion es universal. Supongamos $\mathbf{A} \models t \approx s$, con $t =_d t(x_1, ..., x_n)$ y $s =_d s(x_1, ..., x_n)$. Veremos que entonces $\mathbf{A} \models t(p_1, ..., p_n) \approx s(p_1, ..., p_n)$. Supongamos que $p_i =_d p_i(x_1, ..., x_m)$, para cada $i = 1, ..., n$. Por (a) del Lema 146, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} t(p_1, ..., p_n) & = & {}_d t(p_1, ..., p_n)(x_1, ..., x_m) \\ s(p_1, ..., p_n) & = & {}_d s(p_1, ..., p_n)(x_1, ..., x_m) \end{array}$$

Sea $\vec{a} \in A^m$. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} t(p_1, ..., p_n)^{\mathbf{A}} [\vec{a}] & = & t^{\mathbf{A}} \left[p_1^{\mathbf{A}} [\vec{a}], ..., p_n^{\mathbf{A}} [\vec{a}]\right] \\ & = & s^{\mathbf{A}} \left[p_1^{\mathbf{A}} [\vec{a}], ..., p_n^{\mathbf{A}} [\vec{a}]\right] \\ & = & s(p_1, ..., p_n)^{\mathbf{A}} [\vec{a}] \end{array}$$

lo cual nos dice que $\mathbf{A} \models t(p_1, ..., p_n) \approx s(p_1, ..., p_n)$. □

Theorem 84. *(Correccion) Si* $(\Sigma, \tau) \vdash_{ec} p \approx q$*, entonces* $(\Sigma, \tau) \models p \approx q$.

Proof. Sea

$p_1 \approx q_1, ..., p_n \approx q_n$

una prueba ecuacional de $p \approx q$ en (Σ, τ). Usando el lema anterior se puede probar facilmente por induccion en i que $(\Sigma, \tau) \models p_i \approx q_i$, por lo cual $(\Sigma, \tau) \models p \approx q$. □ □

Theorem 85. *(Completitud) (Birkhoff) Sea* (Σ, τ) *una teoria tal que los elementos de* Σ *son identidades. Si* $(\Sigma, \tau) \models p \approx q$*, entonces* $(\Sigma, \tau) \vdash_{ec} p \approx q$.

Proof. Supongamos $(\Sigma, \tau) \models p \approx q$. Sea θ la siguiente relacion binaria sobre T^τ:

$\theta = \{(t, s) : (\Sigma, \tau) \vdash_{ec} t \approx s\}$.

Dejamos al lector probar que θ es una congruencia de $\mathbf{T}^\tau$. Veamos que (*) $t^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[t_1/\theta, ..., t_n/\theta] = t(t_1, ..., t_n)/\theta$, para todo $t_1, ..., t_n$, $t =_d t(x_1, ..., x_n)$ Por Corolario 142 tenemos que

$t^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[t_1/\theta, ..., t_n/\theta] = t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, ..., t_n]/\theta$

Pero por Lema 170 tenemos que $t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, ..., t_n] = t(t_1, ..., t_n)$ por lo cual (*) es verdadera. Veamos que $\mathbf{T}^\tau/\theta \models \Sigma$. Sea $t \approx s$ un elemento de Σ, con $t =_d t(x_1, ..., x_n)$ y $s =_d s(x_1, ..., x_n)$. Veremos que $\mathbf{T}^\tau/\theta \models t \approx s$, es decir veremos que

$t^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[t_1/\theta, ..., t_n/\theta] = s^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[t_1/\theta, ..., t_n/\theta]$

para todo $t_1/\theta, ..., t_n/\theta \in T^\tau/\theta$. Notese que $(\Sigma, \tau) \vdash_{ec} t(t_1, ..., t_n) \approx s(t_1, ..., t_n)$

por lo cual $t(t_1, ..., t_n)/\theta = s(t_1, ..., t_n)/\theta$. Por (*) tenemos entonces $t^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[t_1/\theta, ..., t_n/\theta] = t(t_1, ..., t_n)/\theta = s(t_1, ..., t_n)/\theta = s^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[t_1/\theta, ..., t_n/\theta]$,

lo cual nos dice que $\mathbf{T}^\tau/\theta$ satisface la identidad $t \approx s$. Ya que $\mathbf{T}^\tau/\theta \models \Sigma$, por hipotesis tenemos que $\mathbf{T}^\tau/\theta \models p \approx q$. Es decir que si $p =_d p(x_1, ..., x_n)$ y $q =_d q(x_1, ..., x_n)$ tenemos que $p^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[t_1/\theta, ..., t_n/\theta] = q^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[t_1/\theta, ..., t_n/\theta]$, para todo $t_1, ..., t_n \in T^\tau$. En particular, tomando $t_i = x_i$, $i = 1, ..., n$ tenemos que

$p^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[x_1/\theta, ..., x_n/\theta] = q^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[x_1/\theta, ..., x_n/\theta]$

lo cual por (*) nos dice que $p/\theta = q/\theta$, produciendo $(\Sigma, \tau) \vdash_{ec} p \approx q$. □

5 La aritmética de Peano

Lemma 86. ω *es un modelo de Arit*

Proof. Sea $\psi =_d \psi(v_1, ..., v_n, v)$, fórmula de τ_A. Veremos que $\omega \vDash Ind_\psi$. Sea

$\varphi = ((\psi(\vec{v}, 0) \wedge \forall v\ (\psi(\vec{v}, v) \to \psi(\vec{v}, v + 1))) \to \forall v\ \psi(\vec{v}, v))$

Declaremos $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$. Notese que $\omega \vDash Ind_\psi$ si y solo si para cada $a_1, ..., a_n \in \omega$ se tiene que $\omega \vDash \varphi[\vec{a}]$. Sean $a_1, ..., a_n \in \omega$ fijos. Probaremos que $\omega \vDash \varphi[\vec{a}]$. Notar que si $\omega \nvDash (\psi(\vec{v}, 0) \wedge \forall v\ (\psi(\vec{v}, v) \to \psi(\vec{v}, v + 1)))[\vec{a}]$

entonces $\omega \vDash \varphi[\vec{a}]$ por lo cual podemos hacer solo el caso en que $\omega \vDash (\psi(\vec{v}, 0) \wedge \forall v\ (\psi(\vec{v}, v) \to \psi(\vec{v}, v + 1)))[\vec{a}]$

Sea $S = \{a \in \omega : \omega \vDash \psi(\vec{v}, v)[\vec{a}, a]\}$. Ya que $\omega \vDash \psi(\vec{v}, 0)[\vec{a}]$, es facil ver usando el lema de reemplazo que $\omega \vDash \psi(\vec{v}, v)[\vec{a}, 0]$, lo cual nos dice que $0 \in S$. Ya que $\omega \vDash (\forall v\ (\psi(\vec{v}, v) \rightarrow \psi(\vec{v}, v+1)))[\vec{a}]$, tenemos que (1) Para cada $a \in \omega$, si $\omega \vDash \psi(\vec{v}, v)[\vec{a}, a]$, entonces $\omega \vDash \psi(\vec{v}, v+1)[\vec{a}, a]$. Pero por el lema de reemplazo, tenemos que $\omega \vDash \psi(\vec{v}, v+1)[\vec{a}, a]$ sii $\omega \vDash \psi(\vec{v}, v)[\vec{a}, a+1]$, lo cual nos dice que

(2) Para cada $a \in \omega$, si $\omega \vDash \psi(\vec{v}, v)[\vec{a}, a]$, entonces $\omega \vDash \psi(\vec{v}, v)[\vec{a}, a+1]$. Ya que (2) nos dice que $a \in S$ implica $a+1 \in S$, tenemos que $S = \omega$ ya que $0 \in S$. Es decir que para cada $a \in \omega$, se da que $\omega \vDash \psi(\vec{v}, v)[\vec{a}, a]$ lo cual nos dice que $\omega \vDash \forall v\ \psi(\vec{v}, v)[\vec{a}]$.

Es rutina probar que ω satisface los otros 15 axiomas de *Arit*. □ □

Proposition 87. *Hay un modelo de Arit el cual no es isomorfo a ω*

Proof. Sea $\tau = (\{0, 1, \blacktriangle\}, \{+^2, .^2\}, \{\leq^2\}, a)$ y sea $\Sigma = \Sigma_A \cup \{\neg(\widehat{n} \equiv \blacktriangle) : n \in \omega\}$. Por el Teorema de Compacidad la teoria (Σ, τ) tiene un modelo $\mathbf{A} = (A, i)$. Ya que

$\mathbf{A} \vDash \neg(\widehat{n} \equiv \blacktriangle)$, para cada $n \in \omega$

tenemos que $i(\blacktriangle) \neq \widehat{n}^{\mathbf{A}}$, para cada $n \in \omega$

Por el Lema de Coincidencia la estructura $\mathbf{B} = (A, i\mid_{\{0,1,+,.,\leq\}})$ es un modelo de *Arit*. Ademas dicho lema nos garantiza que $\widehat{n}^{\mathbf{B}} = \widehat{n}^{\mathbf{A}}$, para cada $n \in \omega$, por lo cual tenemos que $i(\blacktriangle) \neq \widehat{n}^{\mathbf{B}}$, para cada $n \in \omega$

Veamos que $\mathbf{B}$ no es isomorfo a ω. Supongamos $F : \omega \rightarrow A$ es un isomorfismo de ω en $\mathbf{B}$. Es facil de probar por induccion en n que $F(n) = \widehat{n}^{\mathbf{B}}$, para cada $n \in \omega$. Pero esto produce un absurdo ya que nos dice que $i(\blacktriangle)$ no esta en la imagen de F. □ □

Lemma 88. *Las siguientes sentencias son teoremas de la aritmetica de Peano: (1) $\forall x\ 0 \leq x$ (2) $\forall x\ (x \leq 0 \rightarrow x \equiv 0)$ (3) $\forall x \forall y\ (x + y \equiv 0 \rightarrow (x \equiv 0 \wedge y \equiv 0))$ (4) $\forall x\ (\neg(x \equiv 0) \rightarrow \exists z\ (x \equiv z + 1))$ (5) $\forall x \forall y\ (x < y \rightarrow x + 1 \leq y)$ (6) $\forall x \forall y\ (x < y + 1 \rightarrow x \leq y)$ (7) $\forall x \forall y\ (x \leq y + 1 \rightarrow (x \leq y \vee x \equiv y + 1))$ (8) $\forall x \forall y\ (\neg y \equiv 0 \rightarrow \exists q \exists r\ x \equiv q.y + r \wedge r < y)$*

Proof.

1.	$x_0 \leq 0$	HIPOTESIS1
2.	$\forall x\ 0 \leq x$	TEOREMA
3.	$0 \leq x_0$	PARTICULARIZACION(2)
4.	$x_0 \leq 0 \wedge 0 \leq x_0$	CONJUNCIONINTRODUCCION(1, 3)
5.	$\forall x_1 \forall x_2\ ((x_1 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_1) \rightarrow x_1 \equiv x_2)$	AXIOMAPROPIO
6.	$\forall x_2\ ((x_0 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_0) \rightarrow x_0 \equiv x_2)$	PARTICULARIZACION(5)
7.	$((x_0 \leq 0 \wedge 0 \leq x_0) \rightarrow x_0 \equiv 0)$	PARTICULARIZACION(6)
8.	$x_0 \equiv 0$	TESIS1MODUSPONENS(4, 7)
9.	$x_0 \leq 0 \rightarrow x_0 \equiv 0$	CONCLUSION
10.	$\forall x\ (x \leq 0 \rightarrow x \equiv 0)$	GENERALIZACION(9)

1.	$x_0 + y_0 \equiv 0$	HIPOTESIS1
	$(x_0 + y_0 \equiv 0 \leftrightarrow 0 \equiv x_0 + y_0)$	
	$0 \equiv x_0 + y_0$	
2.	$\exists u\ (0 \equiv x_0 + u)$	TEOREMA
3.	$\forall x_1 \forall x_2\ (x_1 \leq x_2 \leftrightarrow \exists x_3\ x_2 \equiv x_1 + x_3)$	PARTICULARIZACION(2)
4.	$x_0 \leq 0$	CONJUNCIONINTRODUCCION(1, 3)
5.	$\forall x_1 \forall x_2\ ((x_1 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_1) \rightarrow x_1 \equiv x_2)$	AXIOMAPROPIO
6.	$\forall x_2\ ((x_0 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_0) \rightarrow x_0 \equiv x_2)$	PARTICULARIZACION(5)
7.	$((x_0 \leq 0 \wedge 0 \leq x_0) \rightarrow x_0 \equiv 0)$	PARTICULARIZACION(6)
8.	$x_0 \equiv 0$	TESIS1MODUSPONENS(4, 7)
9.	$x_0 \leq 0 \rightarrow x_0 \equiv 0$	CONCLUSION
10.	$\forall x\ (x \leq 0 \rightarrow x \equiv 0)$	GENERALIZACION(9)

□

Lemma 89. *Sean $n, m \in \omega$. Las siguientes sentencias son teoremas de la aritmetica de Peano: (a) $(+(\widehat{n}, \widehat{m}) \equiv \widehat{n+m})$ (b) $(.(\widehat{n}, \widehat{m}) \equiv \widehat{n.m})$ (c) $\forall x\ (x \leq \widehat{n} \rightarrow (x \equiv \widehat{0} \vee x \equiv \widehat{1} \vee ... \vee x \equiv \widehat{n}))$*

Lemma 90. *Para cada termino cerrado t, tenemos que $Arit \vdash (t \equiv \widehat{t^{\omega}})$*

Lemma 91. *Si φ es una sentencia atomica o negacion de atomica y $\omega \models \varphi$, entonces $Arit \vdash \varphi$.*

Proof. Hay dos casos. Supongamos $\varphi = (t \equiv s)$, con t, s terminos cerrados. Ya que $\omega \models \varphi$, tenemos que $t^{\omega} = s^{\omega}$ y por lo tanto $\widehat{t^{\omega}} = \widehat{s^{\omega}}$. Por el lema anterior tenemos que $Arit \vdash (t \equiv \widehat{t^{\omega}}), (s \equiv \widehat{s^{\omega}})$ lo cual, ya que $\widehat{t^{\omega}}$ y $\widehat{s^{\omega}}$ son el mismo termino nos dice por la regla de transitividad que $Arit \vdash (t \equiv s)$. Supongamos $\varphi = (t \leq s)$, con t, s terminos cerrados. Ya que $\omega \models \varphi$, tenemos que $t^{\omega} \leq s^{\omega}$ y por lo tanto hay un $k \in \omega$ tal que $t^{\omega} + k = s^{\omega}$. Se tiene entonces que $\widehat{t^{\omega} + k} = \widehat{s^{\omega}}$. Por el lema anterior tenemos que $Arit \vdash +(\widehat{t^{\omega}}, \widehat{k}) \equiv \widehat{t^{\omega} + k}$ lo cual nos dice que

$Arit \vdash +(\widehat{t^{\omega}}, \widehat{k}) \equiv \widehat{s^{\omega}}$

Pero el lema anterior nos dice que $Arit \vdash (t \equiv \widehat{t^{\omega}}), (s \equiv \widehat{s^{\omega}})$

y por lo tanto la regla de reemplazo nos asegura que $Arit \vdash +(t, \widehat{k}) \equiv s$. Ya que $\forall x_1 \forall x_2\ (x_1 \leq x_2 \leftrightarrow \exists x_3\ x_2 \equiv x_1 + x_3)$

es un axioma de $Arit$, tenemos que $Arit \vdash (t \leq s)$. □

Lemma 92. *Sea $\varphi =_d \varphi(\vec{v}, v) \in F^{\tau_A}$. Supongamos v es sustituible por w en φ y $w \notin \{v_1, ..., v_n\}$. Entonces: $Arit \vdash \forall \vec{v}((\varphi(\vec{v}, 0) \wedge \forall v(\forall w(w < v \rightarrow \varphi(\vec{v}, w)) \rightarrow \varphi(\vec{v}, v))) \rightarrow \forall v \varphi(\vec{v}, v))$*

Proof. Sea $\tilde{\varphi} = \forall w(w \leq v \rightarrow \varphi(\vec{v}, w))$. Notar que $\tilde{\varphi} =_d \tilde{\varphi}(\vec{v}, v)$. Sea $IndCom_{\varphi}$ la sentencia

$\forall \vec{v}((\varphi(\vec{v}, 0) \wedge \forall v(\forall w(w < v \rightarrow \varphi(\vec{v}, w)) \rightarrow \varphi(\vec{v}, v))) \rightarrow \forall v \varphi(\vec{v}, v))$

Salvo por el uso de algunos teoremas simples y el uso simultaneo de las reglas de particularizacion y generalizacion, la siguiente es la prueba buscada

1. $(\varphi(\vec{c},0) \wedge \forall v(\forall w(w < v \rightarrow \varphi(\vec{c},w)) \rightarrow \varphi(\vec{c},$
2. $w_0 \leq 0$
3. $\forall x\ (x \leq 0 \rightarrow x \equiv 0)$
4. $w_0 \leq 0 \rightarrow w_0 \equiv 0$
5. $w_0 \equiv 0$
6. $\varphi(\vec{c},0)$
7. $\varphi(\vec{c},w_0)$
8. $w_0 \leq 0 \rightarrow \varphi(\vec{c},w_0)$
9. $\tilde{\varphi}(\vec{c},0)$
10. $\tilde{\varphi}(\vec{c},v_0)$
11. $w_0 < v_0 + 1$
12. $\forall x, y\ x < y + 1 \rightarrow x \leq y$
13. $w_0 < v_0 + 1 \rightarrow w_0 \leq v_0$
14. $w_0 \leq v_0$
15. $w_0 \leq v_0 \rightarrow \varphi(\vec{c},w_0)$
16. $\varphi(\vec{c},w_0)$
17. $w_0 < v_0 + 1 \rightarrow \varphi(\vec{c},w_0)$
18. $\forall w\ w < v_0 + 1 \rightarrow \varphi(\vec{c},w)$
19. $\forall v(\forall w(w < v \rightarrow \varphi(\vec{c},w)) \rightarrow \varphi(\vec{c},v))$
20. $(\forall w(w < v_0 + 1 \rightarrow \varphi(\vec{c},w)) \rightarrow \varphi(\vec{c},v_0 + 1$
21. $\varphi(\vec{c},v_0 + 1)$
22. $w_0 \leq v_0 + 1$
23. $\forall x, y\ x \leq y + 1 \rightarrow (x \leq y \vee x \equiv y + 1)$
24. $w_0 \leq v_0 + 1 \rightarrow (w_0 \leq v_0 \vee w_0 \equiv v_0 + 1)$
25. $(w_0 \leq v_0 \vee w_0 \equiv v_0 + 1)$
26. $w_0 \leq v_0 \rightarrow \varphi(\vec{c},w_0)$
27. $w_0 \equiv v_0 + 1$
28. $\varphi(\vec{c},w_0)$
29. $w_0 \equiv v_0 + 1 \rightarrow \varphi(\vec{c},w_0)$
30. $\varphi(\vec{c},w_0)$
31. $w_0 \leq v_0 + 1 \rightarrow \varphi(\vec{c},w_0)$
32. $\tilde{\varphi}(\vec{c},v_0 + 1)$
33. $\tilde{\varphi}(\vec{c},v_0) \rightarrow \tilde{\varphi}(\vec{c},v_0 + 1)$
34. $\forall v\tilde{\varphi}(\vec{c},v) \rightarrow \tilde{\varphi}(\vec{c},v + 1)$
35. $\tilde{\varphi}(\vec{c},0) \wedge \forall v\tilde{\varphi}(\vec{c},v) \rightarrow \tilde{\varphi}(\vec{c},v + 1)$
36. $Ind_{\tilde{\varphi}}$
37. $(\tilde{\varphi}(\vec{c},0) \wedge \forall v(\tilde{\varphi}(\vec{c},v) \rightarrow \tilde{\varphi}(\vec{c},v + 1)) \rightarrow \forall v\tilde{\varphi}($
38. $\forall v\tilde{\varphi}(\vec{c},v)$
39. $\tilde{\varphi}(\vec{c},v_0)$
40. $v_0 \leq v_0 \rightarrow \varphi(\vec{c},v_0)$
41. $\forall x\ x \leq x$
42. $v_0 \leq v_0$
43. $\varphi(\vec{c},v_0)$
44. $\forall v\varphi(\vec{c},v)$
45. $(\varphi(\vec{c},0) \wedge \forall v(\forall w(w < v \rightarrow \varphi(\vec{c},w)) \rightarrow \varphi(\vec{c},$
46. $IndCom_{\varphi}$

$\square$

Lemma 93. *Los conjuntos $T^{\tau_A^e}, F^{\tau_A^e}, T^{\tau_A}$ y F^{τ_A} son A-p.r.*

Proof. Veamos que $T^{\tau_A^e}$ es A-p.r.. Fijemos un orden total estricto $<$ sobre A. Sea $P =$

$\lambda x[*^<(x) \in T^{\tau_A^e}]$. Notese que $P(0) = 0$ y $P(x+1) = 1$ si y solo si se da alguna de las siguientes

- $*^<(x+1) \in \{0,1\} \cup Aux$ - $(\exists u, v \in \omega) *^<(x+1) = +(*^<(u), *^<(v)) \wedge (P^\downarrow(x))_{u+1} \wedge (P^\downarrow(x))_{v+1}$ - $(\exists u, v \in \omega)\ *^<(x+1) = .(*^<(u), *^<(v)) \wedge (P^\downarrow(x))_{u+1} \wedge (P^\downarrow(x))_{v+1}$ Por el Lema 48 tenemos que P es A-p.r., por lo cual $\chi_{T^{\tau_A^e}} = P \circ \#^<$ lo es. Notese que

$t \in T^{\tau_A}$ sii $t \in T^{\tau_A^e} \wedge \triangle$ no ocurre en $t \wedge \square$ no ocurre en t

por lo cual T^{τ_A} es A-p.r. $\square$

Lemma 94. *Los siguientes predicados son A-p.r. (1) "v ocurre libremente en φ a partir de i" : $\omega \times Var \times F^{\tau_A^e} \to \omega$ (2) "$v \in Li(\varphi)$" : $Var \times F^{\tau_A^e} \to \omega$ (3) "v es sustituible por t en φ" : $Var \times T^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \to \omega$*

Proof. (1). Veamos que $P : \omega \times Var \times F^{\tau_A^e} \to \omega$, dado por

$$P(i, v, \varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \text{ ocurre libremente en } \varphi \text{ a partir de } i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

es B-p.r.. Sea $R : \omega \times Var \to \omega$ el predicado dado por $R(x, v) = 1$ si y solo si $*^<((x)_1) \in F^{\tau_A^e}$ y v ocurre libremente en $*^<((x)_1)$ a partir de $(x)_2$. Sea Nex $= \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$. Notese que $F_0^{\tau_A^e}$ es A-p.r. ya que $F_0^{\tau_A^e} = F^{\tau_A} \cap (A - \{\forall, \exists, \neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\})^*$

Notese que $R(0, v) = 0$, para cada $v \in Var$ y que $R(x+1, v) = 1$ si y solo si $(x+1)_2 \geq 1$ y se da alguna de las siguientes: - $*^<((x+1)_1) \in F_0^{\tau_A^e} \wedge v$ ocurre en $*^<((x+1)_1)$ a partir de $(x+1)_2$ - $(\exists \varphi_1, \varphi_2 \in F^{\tau_A^e})(\exists \eta \in \text{Nex}) *^<((x+1)_1) = (\varphi_1 \eta \varphi_2) \wedge$ $\Big((R^\downarrow(x, v))_{\langle \#^<(\varphi_1), (x+1)_2 - 1\rangle + 1} \vee (R^\downarrow(x, v))_{\langle \#$

- $(\exists \varphi_1 \in F^{\tau_A^e}) *^<((x+1)_1) = \neg\varphi_1 \wedge (R^\downarrow(x, v))_{\langle \#^<(\varphi_1), (x+1)_2 - 1\rangle + 1}$ - $(\exists \varphi_1 \in F^{\tau_A^e})(\exists w \in Var)(Q \in \{\forall, \exists\})\ w \neq v \wedge$ $*^<((x+1)_1) = Qw\varphi_1 \wedge (R^\downarrow(x, v))_{\langle \#^<(\varphi_1), (x+1)_2 - |(Qw|\rangle + 1}$

Es decir que por el Lema 48 tenemos que R es A -p.r.. Notese que para $(i, v, \varphi) \in \omega \times Var \times F^{\tau_A^e}$, tenemos $P(i, v, \varphi) = R(\langle \#^<(\varphi), i\rangle, v)$. Ahora es facil obtener la funcion P haciendo composiciones adecuadas con R. $\square$

Lemma 95. *Las funciones $\lambda svt[\downarrow_v^t (s)]$ y $\lambda \varphi vt[\downarrow_v^t (\varphi)]$ son A-p.r..*

Proof. Sea $<$ un orden total estricto sobre A. Sea $h : \omega \times Var \times T^{\tau_A^e} \to \omega$ dada por

$$h(x, v, t) = \begin{cases} \#^<(\downarrow_v^t (*^<(x))) & \text{si } *^<(x) \in T^{\tau_A^e} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Sea $P : \omega \times \omega \times Var \times T^{\tau_A^e} \times A^* \to \omega$ tal que $P(A, x, v, t, \alpha) = 1$ si y solo si se da alguna de las siguientes - $*^<(x+1) \notin T^{\tau_A^e} \wedge \alpha = \varepsilon$ - $*^<(x+1) = v \wedge \alpha = t$ - $*^<(x+1) \in (\{0,1\} \cup Aux) - \{v\} \wedge \alpha = *^<(x+1)$ - $(\exists r, s \in T^{\tau_A^e})\ *^<(x+1) = +(r, s) \wedge \alpha = +(*^<((A)_{\#^<(r)+1}), *^<((A)_{\#^<(s)+1}))$ - $(\exists r, s \in T^{\tau_A^e}) *^<(x+1) = .(r, s) \wedge \alpha = .(*^<((A)_{\#^<(r)+1}), *^<((A)_{\#^<(s)+1}))$ Notese que $P(h^\downarrow(x, v, t), x, v, t, \alpha) = 1$ si y solo si ya sea $*^<(x+1) \notin T^\tau$ y $\alpha = \varepsilon$ o $*^<(x+1) \in T^\tau$ y $\alpha = \downarrow_v^t(*^<(x+1))$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} h(0, v, t) &= 0 \\ h(x+1, v, t) &= \#^<(\min_\alpha^< P(h^\downarrow(x, v, t), x, v, t, \alpha)), \end{aligned}$$

por lo cual el Lema 48 nos dice que h es A-p.r. Ahora es facil obtener la funcion $\downarrow_v^t (s) : T^{\tau_A^e} \times Var \times T^{\tau_A^e} \to T^{\tau_A^e}$ haciendo composiciones adecuadas con h. $\square$ $\square$

Lemma 96. *El predicado $R : F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \to \omega$, dado por* $R(\varphi, \tilde{\varphi}, \psi_1, \psi_2) =$

$$\begin{cases} 1 & \textit{si } \tilde{\varphi} = \textit{ resultado de reemplazar algunas} \\ & \quad (\textit{posiblemente } 0) \textit{ ocurrencias de} \\ & \quad \psi_1 \textit{ en } \varphi \textit{ por } \psi_2 \\ 0 & \textit{caso contrario} \end{cases} \quad \textit{es A-p.r..}$$

Proof. Sea Nex $= \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$. Sea $<$ un orden total estricto sobre A. Notese que $R(\varphi, \tilde{\varphi}, \psi_1, \psi_2) =$ 1 sii se da alguna de las siguientes

- $\varphi = \tilde{\varphi}$ - ($\varphi = \psi_1 \wedge \tilde{\varphi} = \psi_2$) - $(\exists \varphi_1, \varphi_2, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \in F^{\tau_A^e})(\exists \eta \in \mathrm{Nex})\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2) \wedge \tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1 \eta \tilde{\varphi}_2) \wedge R(\varphi_1, \tilde{\varphi}_1, \psi_1, \psi_2) \wedge R(\varphi_2, \tilde{\varphi}_2, \psi_1, \psi_2)$

- $(\exists \varphi_1, \tilde{\varphi}_1 \in F^{\tau_A^e})\varphi = \neg\varphi_1 \wedge \tilde{\varphi} = \neg\tilde{\varphi}_1 \wedge R(\varphi_1, \tilde{\varphi}_1, \psi_1, \psi_2)$ - $(\exists \varphi_1, \tilde{\varphi}_1 \in F^{\tau_A^e})(\exists v \in Var)(\exists Q \in \{\forall, \exists\})\varphi = Qv\varphi_1 \wedge$ $\tilde{\varphi} = Qv\tilde{\varphi}_1 \wedge R(\varphi_1, \tilde{\varphi}_1, \psi_1, \psi_2)$

Se puede usar lo anterior para ver que $R' : \omega \times F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \to \omega$, dado por

$$R'(x, \psi_1, \psi_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } *^{<}((x)_1), *^{<}((x)_2) \in F^{\tau_A^e} \text{ y } *^{<}((x)_2) = \text{resultado de} \\ & \text{reemplazar algunas ocurrencias de } \psi_1 \text{ en } *^{<}((x)_1) \text{ por } \psi_2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

es A-p.r., via el Lema 48. Finalmente R puede obtenerse haciendo composiciones adecuadas con R'. □

Lemma 97. *Sea B un alfabeto finito. Sea $S \subseteq B^*$ un conjunto B-p.r.. El conjunto S^+ es B-p.r.*

Proof. Notese que $\alpha \in S^+$ si y solo si

$(\exists z \in \mathbf{N})(\forall i \in \mathbf{N})_{i \leq Lt(z)} *^{<}((z)_i) \in S \wedge \alpha = \subset_{i=1}^{Lt(z)} *^{<}((z)_i)$

Dejamos al lector completar los detalles faltantes. □

Lemma 98. *Los conjuntos $ModPon^{\tau_A^e}$, $Elec^{\tau_A^e}$, $Reem^{\tau_A^e}$, $Reem_2^{\tau_A^e}$, etc, son A-p.r..*

Proof. Veamos que $Reem_2^{\tau_A^e}$ es A-p.r.. Sea $Q : F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \to \omega$ el predicado tal que $Q(\varphi, \psi, \sigma) = 1$ si y solo si

$(\exists \alpha \in (\forall Var)^+)(\exists \psi_1, \psi_2 \in F^{\tau_A^e})\ \psi = \alpha(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2) \wedge$ $Li(\psi_1) = Li(\psi_2) \wedge$ $((\forall v \in Var)\ v \notin Li(\psi_1) \vee v$ ocurre en $\alpha)$ $\wedge R(\varphi, \sigma, \psi$

(R es el predicado dado por el Lema 185). Es facil ver que Q es A-p.r. y que $Reem_2^{\tau_A^e} = Q\mid_{S^{\tau_A^e} \times S^{\tau_A^e} \times S^{\tau_A^e}}$. □ □

Lemma 99. *El predicado "ψ se deduce de φ por generalizacion con constante c" : $S^{\tau_A^e} \times S^{\tau_A^e} \times Aux \to \omega$ es A-p.r..*

Proof. Notese que ψ se deduce de φ por generalizacion con constante c si y solo si hay una formula γ y una variable v tales que

- $Li(\gamma) = \{v\}$ - cada ocurrencia de v en γ es libre - c no ocurre en γ - $\varphi = \downarrow_v^c(\gamma) \wedge \psi = \forall v\gamma$

El lector podra usando esta equivalencia facilmente justificar que el predicado en cuestion es A-p.r.. □

Lemma 100. *El predicado "ψ se deduce de φ por eleccion con constante e" : $S^{\tau_A^e} \times S^{\tau_A^e} \times Aux \to \omega$ es A-p.r.. Definamos*

$AxLog^{\tau_A^e} = \{\varphi \in S^{\tau_A^e} : \varphi$ es un axioma logico$\}$

Lemma 101. *$AxLog^{\tau_A^e}$ es A-p.r.. Recordemos que dada $\varphi \in S^{\tau_A^e +}$, usamos $n(\varphi)$ y $\varphi_1, ..., \varphi_{n(\varphi)}$ para denotar los unicos n y $\varphi_1, ..., \varphi_n$ tales que $\varphi = \varphi_1 ... \varphi_n$ (la unicidad es garantizada en Lema 152). Extendamos esta notacion definiendo $\varphi_i = \varepsilon$ para $i = 0$ o $i > n(\varphi)$.*

Lemma 102. *Las funciones* $\begin{array}{ccc} S^{\tau_A^e +} & \to & \omega \\ \varphi & \to & n(\varphi) \end{array}$ $\begin{array}{ccc} \omega \times S^{\tau_A^e +} & \to & S^{\tau_A^e} \cup \{\varepsilon\} \\ (i, \varphi) & \to & \varphi_i \end{array}$ *son A-p.r. Recordemos que dada $\mathbf{J} \in Just^+$, usamos $n(\mathbf{J})$ y $\mathbf{J}_1, ..., \mathbf{J}_{n(\mathbf{J})}$ para denotar los unicos n y $J_1, ..., J_n$ tales que $\mathbf{J} = J_1 ... J_n$ (la unicidad es garantizada en Lema 153). Extendamos esta notacion definiendo $\mathbf{J}_i = \varepsilon$ para $i = 0$ o $i > n(\mathbf{J})$.*

Sea B el alfabeto que consiste en todos los simbolos que ocurren en alguna palabra de $Just$. Es decir B consiste de los simbolos

( ) , 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 *H I P O T E S N M C L ...*

donde los ptos suspensivos indican que debemos agregar todas las letras mayusculas faltantes que aparesen en el nonbre de alguna regla.

Lemma 103. *Just es B-p.r. Las funciones* $\begin{array}{rcl} Just^{+} & \rightarrow & \omega \\ \mathbf{J} & \rightarrow & n(\mathbf{J}) \end{array}$ $\begin{array}{rcl} \omega \times Just^{+} & \rightarrow & Just \cup \{\varepsilon\} \\ (i,\mathbf{J}) & \rightarrow & \mathbf{J}_i \end{array}$ *son B-p.r.*

Proof. Sean

$$\begin{array}{rcl} R & = & \{\gamma : \gamma \text{ es el nombre de alguna regla}\} \\ T & = & \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\} \end{array}$$

Notese que $Just$ es la union de una cantidad finita de conjuntos. Uno de ellos es el conjunto $L = \{\beta\gamma(\overline{l_1},...,\overline{l_k}) : \gamma \in R, \text{ cada } l_j \in \mathbf{N} \text{ y } \beta \in T\}$

Veremos que L es B-p.r., y dejamos al lector lor restantes. Dejamos al lector la prueba de que T es B-p.r.. Notese que $\alpha \in L$ sii $(\exists \beta \in T)(\exists \gamma \in R)(\exists z \in \mathbf{N})\ \alpha = \beta\gamma\big((\subset_{i=1}^{Lt(z)-1} \overline{(z)_i},\big)\overline{(z)_{Lt(z)}})$

Se deja al lector dar cotas de los cuantificadores, para poder aplicar el lema de cuantificacion acotada. □

Lemma 104. *El conjunto* $\{\mathbf{J} \in Just^{+} : \mathbf{J}$ *es balanceada*$\}$ *es* B *-p.r.*

Lemma 105.

$$\begin{array}{rcl} \omega \times S^{\tau_A^e} \times S^{\tau_A^e +} \times Just^{+} & \rightarrow & \omega \\ (i,\varphi,\varphi,\mathbf{J}) & \rightarrow & \begin{cases} 1 & si\ (\varphi,\mathbf{J})\ es\ adecuado\ y\ \varphi\ es\ hipotesis\ de\ \varphi_i\ en\ (\varphi,\mathbf{J} \\ 0 & caso\ contrario \end{cases} \end{array}$$

es $(A \cup B)$*-p.r..*

Lemma 106.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times S^{\tau_A^e +} \times Just^{+} & \rightarrow & \omega \\ (e,d,\varphi,\mathbf{J}) & \rightarrow & \begin{cases} 1 & si\ (\varphi,\mathbf{J})\ es\ adecuado\ y\ e\ depende\ de\ d\ en\ (\varphi,\mathbf{J}) \\ 0 & caso\ contrario \end{cases} \end{array}$$

es $(A \cup B)$*-p.r.. Dada una teoria de la forma* (Σ,τ_A)*, diremos que una prueba* $(\varphi,\mathbf{J})$ *de* φ *en* (Σ,τ_A) *es normal si solo usa nombres de ctes auxiliares de Aux, es decir si* $\varphi \in S^{\tau_A^e +}$*. Definamos*

$Pruebas_{(\Sigma,\tau_A)} = \{(\varphi,\mathbf{J}) : \exists\varphi\ (\varphi,\mathbf{J})$ *es una prueba normal de* φ *en* $(\Sigma,\tau_A)\}$

Lemma 107. *Sea* (Σ,τ_A) *una teoria tal que* Σ *es A-recursivo (resp. A-r.e.). Entonces* $Pruebas_{(\Sigma,\tau_A)}$ *es* $(A \cup B)$ *-recursivo (resp.* $(A \cup B)$*-r.e.). Dada una teoria* (Σ,τ_A)*, definamos*

$Teo_{(\Sigma,\tau_A)} = \{\varphi \in S^{\tau_A} : (\Sigma,\tau_A) \vdash \varphi\}$

Lemma 108. *Si* (Σ,τ_A) *es una teoria tal que* Σ *es A-r.e., entonces* $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$ *es A-r.e.*

Proof. Ya que $Pruebas_{(\Sigma,\tau_A)}$ es $(A \cup B)$-r.e. tenemos que hay una funcion $F : \omega \rightarrow S^{\tau_A^e +} \times Just^{+}$ la cual cumple que $p_1^{0,2} \circ F$ y $p_2^{0,2} \circ F$ son $(A \cup B)$-r. y ademas $I_F = Pruebas_{(\Sigma,\tau_A)}$. Sea

$$\begin{array}{rcl} g : S^{\tau_A^e +} & \rightarrow & S^{\tau_A^e} \\ \varphi & \rightarrow & \varphi_{n(\varphi)} \end{array}$$

Por lemas anteriores g es A-p.r.. Notese que $I_{(g \circ p_1^{0,2} \circ F)} = Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$, lo cual dice que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$ es $(A \cup B)$-r.e.. Por el teorema de independencia del alfabeto tenemos que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$ es A -r.e..
□ □

Lemma 109. *Cualesquiera sean* $z_0,...,z_n \in \omega$*,* $n \geq 0$*, hay* $x,y \in \omega$*, tales que* $\beta(x,y,i) = z_i$*,* $i = 0,...,n$

Proof. Dados $x,y,m \in \omega$ con $m \geq 1$, usaremos $x \equiv y(m)$ para expresar que x es congruente a y modulo m, es decir para expresar que $x - y$ es divisible por m. Usaremos en esta prueba el Teorema Chino del Resto:

- Dados $m_0,...,m_n,z_0,...,z_n \in \omega$ tales que $m_0,...,m_n$ son coprimos de a pares, hay un $x \in \omega$ tal que $x \equiv z_i(m_i)$, para $i = 0,...,n$. Sea $y = \max(z_0,...,z_n,n)!$. Sean $m_i = y(i+1)+1$, $i = 0,...,n$. Veamos que $m_0,...,m_n$ son coprimos de a pares. Supongamos p divide a m_i y a m_j con $i < j$. Entonces p divide a $m_j - m_i = y(j-i)$ y ya que p no puede dividir a y, tenemos que

p divide a $j-i$. Pero ya que $j-i<n$ tenemos que $p<n$ lo cual es absurdo ya que implicaria que p divide y.

Por el Teorema Chino del Resto hay un x tal que $x \equiv z_i(m_i)$, para $i=0,...,n$. Ya que $z_i<m_i$, tenemos que

$\beta(x,y,i)=r(x,y(i+1)+1)=r(x,m_i)=z_i$, $i=0,...,n$. □

Proposition 110. *Si h es $\varnothing$-recursiva, entonces h es representable*

Proof. Supongamos $f:S_1\times...\times S_n\to\omega$ y $g:\omega\times\omega\times S_1\times...\times S_n\to\omega$ son representables, con $S_1,...,S_n\subseteq\omega$. Probaremos que $R(f,g):\omega\times S_1\times...\times S_n\to\omega$ lo es. Para esto primero notese que para $t,x_1,...,x_n,z\in\omega$, las siguientes son equivalentes

(1) $R(f,g)(t,\vec{x})=z$ (2) hay $z_0,...,z_t\in\omega$ tales que $\begin{array}{rcl} z_0 & = & f(\vec{x}) \\ z_{i+1} & = & g(z_i,i,\vec{x}),\ i=0,...,t-1 \\ z_t & = & z \end{array}$

(3) hay $x,y\in\omega$ tales que $\begin{array}{rcl} \beta(x,y,0) & = & f(\vec{x}) \\ \beta(x,y,i+1) & = & g(\beta(x,y,i),i,\vec{x}),\ i=0,...,t-1 \\ \beta(x,y,t) & = & z \end{array}$

Sean

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\beta & = & {}_d\varphi_\beta(v_1,v_2,v_3,v) \\ \varphi_f & = & {}_d\varphi_f(v_1,...,v_n,v) \\ \varphi_g & = & {}_d\varphi_g(v_1,...,v_{n+2},v) \end{array}$$

formulas que representen a las funciones β, f y g, respectivamente. Sean $w_1,...,w_{n+1},w$, y_1,y_2,y_3,y_4,z_1,z_2 variables todas distintas y tales que cada una de las variebles libres de φ_β, φ_f y φ_g es sustituible por cada una de las variables $w_1,...,w_{n+1},w$, y_1,y_2,y_3,y_4,z_1,z_2. Sea $\varphi_{R(f,g)}=\varphi_{R(f,g)}(w_1,...,w_{n+1},w)$ la siguiente formula $\exists z_1,z_2\ (\exists y_1\varphi_\beta(z_1,z_2,0,y_1)\wedge\varphi_f(w_2,...,w_{n+1},y_1))\wedge$ $\varphi_\beta(z_1,z_2,w_1,w)\wedge\forall y_2(y_2<w_1\to\exists y_3,y_4\ \varphi_\beta(z_1,z_2,y_2+1,y_3)\wedge$ $\varphi_\beta(z_1,z$
$\varphi_g(y_4,y_2,w_2,...,w_{n+1},y_3))$ Es facil usando (3) ver que la formula $\varphi_{R(f,g)}$ representa a $R(f,g)$.

En forma analoga se puede probar que las reglas de composicion y minimizacion preservan representabilidad por lo cual ya que los elementos de $\mathrm{R}_0^\varnothing$ son representables, tenemos que lo es toda funcion $\varnothing$-r. □ □

Lemma 111. *Hay un predicado $P:\omega\times\omega\to\omega$ el cual es $\varnothing$-p.r. y tal que el predicado $Q=\lambda x\left[(\exists t\in\omega)P(t,x)\right]:\omega\to\omega$ no es $\varnothing$-r.*

Proof. Sea $\Sigma=\Sigma_p$. Recordemos que el predicado

$P_1=\lambda t\mathcal{P}\left[i^{0,1}(t,\mathcal{P},\mathcal{P})=n(\mathcal{P})+1\right]$

es Σ_p-p.r. ya que la funcion $i^{0,1}$ lo es. Notese que el dominio de P_1 es $\omega\times\mathrm{Pro}^{\Sigma_p}$. Por Lema 69 (de la materia de lenguajes) tenemos que $Halt^{\Sigma_p}=\lambda\mathcal{P}\left[(\exists t\in\omega)\ P_1(t,\mathcal{P})\right]$

no es Σ_p-recursivo. Sea $<$ un orden total sobre Σ_p. Definamos $P:\omega\times\omega\to\omega$ de la siguiente manera $P(t,x)=\begin{cases} P_1(t,*^<(x)) & \text{si } *^<(x)\in\mathrm{Pro}^{\Sigma_p} \\ 0 & \text{si } *^<(x)\notin\mathrm{Pro}^{\Sigma_p} \end{cases}$

Claramente P es Σ_p-p.r., por lo cual es $\varnothing$-p.r.. Sea $Q=\lambda x\left[(\exists t\in\omega)P(t,x)\right]$. Notese que $Halt^{\Sigma_p}=Q\circ\#^<|_{\mathrm{Pro}^{\Sigma_p}}$

lo cual dice que Q no es Σ_p-r. ya que de serlo, el predicado $Halt^{\Sigma_p}$ lo seria. Por el teorema de independencia del alfabeto tenemos entonces que Q no es $\varnothing$-recursivo. □

Lemma 112. *Si $Verd_\omega$ es A-r.e., entonces es A-r.*

Proof. Supongamos $Verd_\omega$ es A-r. e. Sea $f:\omega\to Verd_\omega$ una funcion sobre y A-r. Sea $g:S^{\tau_A}\to S^{\tau_A}$, dada por

$g(\varphi)=\begin{cases} {}^\frown\varphi & \text{si } [\varphi]_1=\neg \\ \neg\varphi & \text{caso contrario} \end{cases}$

Notar que g es A-p.r. por lo cual $g \circ f$ es A-r. Ya que $I_{g \circ f} = S^{\tau_A} - Verd_\omega$ (justifique), tenemos que $S^{\tau_A} - Verd_\omega$ es A-r. e., por lo cual $A^* - Verd_\omega = (A^* - S^{\tau_A}) \cup (S^{\tau_A} - Verd_\omega)$

lo es. Es decir que $Verd_\omega$ y su complemento son A-r.e. por lo cual $Verd_\omega$ es A-r. $\square$

Lemma 113. *$Verd_\omega$ no es A-r.e.*

Proof. Por el Lema 200 hay un predicado $\varnothing$-p.r., $P : \omega \times \omega \to \omega$ tal que el predicado $Q = \lambda x\,[(\exists t \in \omega) P(t,x)] : \omega \to \omega$ no es $\varnothing$-recursivo. Notese que Q tampoco es A-recursivo. Ya que P es representable, hay una formula $\varphi =_d \varphi(v_1, v_2, v) \in F^{\tau_A}$ la cual cumple

$\omega \models \varphi\,[t,x,k]$ si y solo si $P(t,x) = k$,

cualesquiera sean $t,x,k \in \omega$. Sea $\psi = \varphi(v_1, v_2, 1)$. Notese que $\psi =_d \psi(v_1, v_2)$ y que $\omega \models \psi\,[t,x]$ si y solo si $P(t,x) = 1$,

cualesquiera sean $t,x \in \omega$. Sea $\psi_0 = \exists v_1\ \psi(v_1, v_2)$. Notese que $\psi_0 =_d \psi_0(v_2)$ y que $\omega \models \psi_0\,[x]$ si y solo si $Q(x) = 1$

cualesquiera sea $x \in \omega$. Por el lema de reemplazo tenemos que para $x \in \omega$, $\omega \models \psi_0\,[x]$ si y solo si $\omega \models \psi_0(\widehat{x})$

(justifique), por lo cual $\omega \models \psi_0(\widehat{x})$ si y solo si $Q(x) = 1$

cualesquiera sea $x \in \omega$. Ya que $\psi_0(\widehat{x})$ es una sentencia, $\psi_0(\widehat{x}) \in Verd_\omega$ si y solo si $Q(x) = 1$

Sea $h : \omega \to A^*$, dada por $h(x) = \psi_0(\widehat{x})$. Es facil ver que h es A-recursiva. Ya que $Q = \chi_{Verd_\omega} \circ h$ y Q no es A-recursivo, tenemos que χ_{Verd_ω} no es A-recursiva, es decir que $Verd_\omega$ es un conjunto no A-recursivo. El lema anterior nos dice entonces que es $Verd_\omega$ no es A-r.e.. $\square$

Theorem 114. *(Godel) Si $\Sigma \subseteq Verd_\omega$ es A-r.e., entonces $Teo_{(\Sigma,\tau_A)} \subsetneq Verd_\omega$*

Proof. Por el Teorema de Correccion, tenemos que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)} \subseteq Verd_\omega$. Ya que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$ es A-r.e y $Verd_\omega$ no lo es, tenemos que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)} \neq Verd_\omega$. $\square$ $\square$

Corollary 115. *Existe $\varphi \in S^{\tau_A}$ tal que $Arit \nvdash \varphi$ y $Arit \nvdash \neg\varphi$.*