Algunos consejos útiles a la hora de preparar la materia

- Estudiar a consciencia cada definición. Es un requisito ineludible el entender la definición de un concepto para de poder entender enunciados y/o pruebas que hacen referencia a ese concepto. Debido a ésto, en el examen teórico se evalúa sin excepción el conocimiento de las definiciones de la materia. (Poner especial atención a las definiciones de $\models$ y de prueba de primer orden.)
- Podrán utilizar en los exámenes la lista de las reglas y axiomas lógicos de las pruebas de primer orden.
- Para hacer pruebas de primer orden es fundamental contar con la prueba matemática como guía.
- Es muy importante una vez terminado el escrito, dejar pasar unos minutos y revisar las soluciones de los ejercicios.

Clave de las anotaciones

A la izquierda de cada enunciado hay una anotación aclarando cómo se tomará en el examen teórico.

N	No se toma el enunciado ni la prueba.
E	Se toma sólo el enunciado.
EP	Se toma el enunciado y la prueba.

6 Estructuras algebraicas ordenadas

En esta seccion estudiaremos varios clases de estructuras algebraicas en las cuales hay un orden parcial involucrado. Esto tendra una doble utilidad. Por un lado algunos de los resultados probados sobre algebras de Boole (por ejemplo el teorema de Rasiova y Sikorski) seran utilizados mas adelante para la prueba de algunos resultados de la logica de primer orden. Tambien las diversas estructuras que veamos nos serviran como ejemplos de estructuras de primer orden y las pruebas dadas en este capitulo seran inspiradoras para el manejo de las pruebas formales en el contexto de teorias de primer orden.

6.1 Conjuntos parcialmente ordenados

Sea P un conjunto no vacio cualquiera. Una relacion binaria $\leq$ sobre P sera llamada un *orden parcial sobre* P si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) $\leq$ es reflexiva, i. e. para todo $a \in P$, $a \leq a$

(2) $\leq$ es antisimetrica, i. e. para todo $a, b \in P$, si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

(3) $\leq$ es transitiva, i. e. para todo $a, b, c \in P$, si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

Un *conjunto parcialmente ordenado o poset* es un par $(P, \leq)$ donde P es un conjunto no vacio cualquiera y $\leq$ es un orden parcial sobre P. Dado un poset $(P, \leq)$, el conjunto P sera llamado el *universo* de P.

Example 89 *(a) Sea X un conjunto cualquiera. Sea $P = \mathcal{P}(X)$. Definamos $S_1 \leq S_2$ si y solo si $S_1 \subseteq S_2$, para $S_1, S_2 \in P$.*

(b) Sea $P = \mathbf{R}$ y $\leq$ la relacion de orden usual de $\mathbf{R}$.

(c) Sea $P = \mathbf{N}$ y definamos $n \leq m$ si y solo si n divide a m.

Dado un poset $(P, \leq)$ podemos definir una nueva relacion binaria $<$ sobre P de la siguiente manera:

$$a < b \text{ si y solo si } a \leq b \text{ y } a \neq b$$

Otra relacion que podemos definir es la siguiente:

$$a \prec b \text{ si y solo si } a < b \text{ y no existe } z \text{ tal que } a < z < b$$

Cuando se de $a \prec b$ diremos que *a es cubierto por b* o que *b cubre a a*. Muchas veces escribiremos $a \geq b$, $a > b$, $a \succ b$ en lugar de $b \leq a$, $b < a$, $b \prec a$, respectivamente.

6.1.1 Diagramas de Hasse

Dado un poset finito $(P, \leq)$ podemos realizar un diagrama de $(P, \leq)$, llamado *diagrama de Hasse,* siguiendo las siguientes instrucciones:

(1) Asociar a cada $a \in P$ un punto p_a del plano.

(2) Trazar un segmento de recta uniendo los puntos p_a y p_b, cada vez que $a \prec b$

(3) Realizar lo indicado en los puntos (1) y (2) en tal forma que

  (i) Si $a \prec b$, entonces p_a esta por debajo de p_b

  (ii) Si un punto p_a ocurre en un segmento del diagrama entonces lo hace en alguno de sus extremos.

La relacion de orden del poset puede ser facilmente obtenida de su diagrama, a saber, $a < b$ sucedera si y solo si hay una sucesion de segmentos ascendentes desde p_a hasta p_b.

6.1.2 Elementos maximales, maximos y supremos

Sea $(P, \leq)$ un poset. Diremos que $a \in P$ es un elemento *maximal de* $(P, \leq)$ si $a \nless b$, para todo $b \in P$. Diremos que $a \in P$ es el elemento *maximo de* $(P, \leq)$ si $b \leq a$, para todo $b \in P$. En forma analoga se definen los conceptos de elemento *minimal* y *minimo.* Notese que no todo poset tiene elementos maximales o maximos. Ademas un poset tiene a lo sumo un maximo y un minimo (por que?), los cuales en caso de existir algunas veces seran denotados con 1 y 0, respectivamente.

Dado $S \subseteq P$, diremos que un elemento $a \in P$ es *cota superior de S en* $(P, \leq)$ cuando $b \leq a$, para todo $b \in S$. En forma analoga se define el concepto de *cota inferior de S en* $(P, \leq)$. Notese que todo elemento de P es cota superior de $\emptyset$ en $(P, \leq)$ y todo elemento de P es cota inferior de $\emptyset$ en $(P, \leq)$. Un elemento $a \in P$ sera llamado *supremo de S en* $(P, \leq)$ cuando se den las siguientes dos propiedades

(1) a es a cota superior de S en $(P, \leq)$

(2) Para cada $b \in P$, si b es una cota superior de S en $(P, \leq)$, entonces $a \leq b$.

Notese que no siempre existe el supremo o el infimo de un conjunto S en $(P, \leq)$ y que en caso de existir es unico (por que?). En forma analoga se define el concepto de *infimo de* S *en* $(P, \leq)$. Denotaremos con $\sup(S)$ (resp. $\inf(S)$) al supremo (resp. infimo) de S en $(P, \leq)$, en caso de que exista. Notese ademas que en caso de existir, $\sup(\emptyset)$ en $(P, \leq)$ es un elemento minimo de $(P, \leq)$ y en caso de existir, $\inf(\emptyset)$ en $(P, \leq)$ es un elemento maximo de $(P, \leq)$.

Example 90 *(a) Para el poset* $(\mathcal{P}(\mathbf{R}), \subseteq)$ *se tiene que dado* $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{R})$,
$\sup S = \bigcup S = \{r \in \mathbf{R} : r \in A, \text{ para algun } A \in S\}$
$\inf S = \bigcap S = \{r \in \mathbf{R} : r \in A, \text{ para todo } A \in S\}$,
lo cual en particular nos dice que
$\sup(\{A, B\}) = A \cup B$
$\inf(\{A, B\}) = A \cap B$
$\sup \emptyset = \emptyset$
$\sup \mathcal{P}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$
$\inf \emptyset = \mathbf{R}$
$\inf \mathcal{P}(\mathbf{R}) = \emptyset$

(b) Sea $P = \{[a, b] : a, b \in \mathbf{R}\}$, *donde* $[a, b] = \{r \in \mathbf{R} : a \leq r \leq b\}$. *Notese que* $\emptyset \in P$ *ya que* $\emptyset = [2, 1]$. *Para el poset* $(P, \subseteq)$, *dado* $S = \{[a_i, b_i] : i \in I\} \subseteq P$, *se tiene que* $\sup S$ *existe si y solo si existen* $\sup\{b_i : i \in I\}$ *e* $\inf\{a_i : i \in I\}$ *y en tal caso* $\sup S = [\inf\{a_i : i \in I\}, \sup\{b_i : i \in I\}]$. *Ademas*
$\inf S = \bigcap S = \{r \in \mathbf{R} : a_i \leq r \leq b_i, \text{ para todo } i \in I\}$.

6.1.3 Homomorfismos de posets

Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Una funcion $F : P \to P'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(P, \leq)$ *en* $(P', \leq')$ si para todo $x, y \in P$ se cumple que $x \leq y$ implica $F(x) \leq' F(y)$. Una funcion $F : P \to P'$ sera llamada un *isomorfismo de* $(P, \leq)$ *en* $(P', \leq')$ si F es biyectiva y tanto F como F^{-1} son homomorfismos. Escribiremos $(P, \leq) \cong (P', \leq')$ cuando exista un isomorfismo $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ y en tal caso diremos que $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ son *isomorfos*. Escribiremos $F : (P, \leq) \to (P', \leq')$ cuando F sea un homomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$. Cabe observar que un homomorfismo biyectivo no necesariamente es un isomorfismo como lo muestra el siguiente ejemplo. Sea $F : \mathcal{P}(\{a, b\}) \to \{0, 1, 2, 3\}$ dada por $F(\emptyset) = 0$, $F(\{a\}) = 1$, $F(\{b\}) = 2$, $F(\{a, b\}) = 3$. Es facil ver que F es un homomorfismo de $(\mathcal{P}(\{a, b\}), \subseteq)$ en $(\{0, 1, 2, 3\}, \leq)$ pero F^{-1} no es un homomorfismo.

El siguiente lema aporta evidencia al hecho de que posets isomorfos tienen las mismas propiedades matematicas.

Lemma 91 *Sean* $(P, \leq)$ *y* $(P', \leq')$ *posets. Supongamos* F *es un isomorfismo de* $(P, \leq)$ *en* $(P', \leq')$.

(a) Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que a es cota superior (resp. inferior) de S si y solo si $F(a)$ es cota superior (resp. inferior) de $F(S)$.

(b) Para cada $S \subseteq P$, se tiene que existe $\sup(S)$ si y solo si existe $\sup(F(S))$ y en el caso de que existan tales elementos se tiene que $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$.

(c) P tiene 1 (resp. 0) si y solo si P' tiene 1 (resp. 0) y en tal caso tales elementos estan conectados por F.

(d) Para cada $a \in P$, a es maximal (resp. minimal) si y solo si $F(a)$ es maximal (resp. minimal).

(e) Para $a, b \in P$, tenemos que $a \prec b$ si y solo si $F(a) \prec' F(b)$.

Proof. (a) Supongamos que a es cota superior de S. Veamos que entonces $F(a)$ es cota superior de $F(S)$. Sea $x \in F(S)$. Sea $s \in S$ tal que $x = F(s)$. Ya que $s \leq a$, tenemos que $x = F(s) \leq' F(a)$. Supongamos ahora que $F(a)$ es cota superior de $F(S)$ y veamos que entonces a es cota superior de S. Sea $s \in S$. Ya que $F(s) \leq' F(a)$, tenemos que $s = F^{-1}(F(s)) \leq' F^{-1}(F(a)) = a$.

(b) Supongamos existe $\sup(S)$. Veamos entonces que $F(\sup(S))$ es el supremo de $F(S)$. Por (a) $F(\sup(S))$ es cota superior de $F(S)$. Supongamos b es cota superior de $F(S)$. Entonces $F^{-1}(b)$ es cota superior de S, por lo cual $\sup(S) \leq' F^{-1}(b)$, produciendo $F(\sup(S)) \leq' b$. En forma analoga se ve que si existe $\sup(F(S))$, entonces $F^{-1}(\sup(F(S)))$ es el supremo de S.

(c) Se desprende de (b) tomando $S = P$.

(d) y (e) son dejados como ejercicio. ■

Notese que si dos posets finitos son isomorfos, entonces pueden representarse con el mismo diagrama de Hasse.

6.2 Reticulados

Diremos que un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ es un *reticulado* si para todo $a, b \in L$, existen $\sup(\{a, b\})$ e $\inf(\{a, b\})$. En un reticulado tenemos dos operaciones binarias, s e i, naturalmente definidas:

$$\begin{aligned} a \,\mathsf{s}\, b &= \sup(\{a, b\}) \\ a \,\mathsf{i}\, b &= \inf(\{a, b\}) \end{aligned}$$

Lemma 92 *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y, z, w \in L$, se cumplen las siguientes.*

(1) $x \leq x \,\mathsf{s}\, y$

(2) $x \,\mathsf{i}\, y \leq x$

(3) $x \,\mathsf{s}\, x = x \,\mathsf{i}\, x = x$

(4) $x \mathsf{s}\, y = y \mathsf{s}\, x$

(5) $x \mathsf{i}\, y = y \mathsf{i}\, x$

(6) $x \leq y$ *si y solo si* $x \mathsf{s}\, y = y$ *si y solo si* $x \mathsf{i}\, y = x$

(7) $x \mathsf{s}\, (x \mathsf{i}\, y) = x$

(8) $x \mathsf{i}\, (x \mathsf{s}\, y) = x$

(9) $(x \mathsf{s}\, y) \mathsf{s}\, z = x \mathsf{s}\, (y \mathsf{s}\, z)$

(10) $(x \mathsf{i}\, y) \mathsf{i}\, z = x \mathsf{i}\, (y \mathsf{i}\, z)$

(11) Si $x \leq z$ *e* $y \leq w$, *entonces* $x \mathsf{s}\, y \leq z \mathsf{s}\, w$ *y* $x \mathsf{i}\, y \leq z \mathsf{i}\, w$

(12) $(x \mathsf{i}\, y) \mathsf{s}\, (x \mathsf{i}\, z) \leq x \mathsf{i}\, (y \mathsf{s}\, z)$

Proof. (1), (2), (3), (4), (5) y (6) son consecuencias inmediatas de la definicion de las operaciones s e i.

(7) Ya que $x \mathsf{i}\, y \leq x$, (6) nos dice que $(x \mathsf{i}\, y) \mathsf{s}\, x = x$, por lo cual $x \mathsf{s}\, (x \mathsf{i}\, y) = x$.

(8) Similar a (7).

(9) Notese que $x \mathsf{s}\, (y \mathsf{s}\, z)$ es cota superior de $\{x, y, z\}$ ya que onviamente $x \leq x \mathsf{s}\, (y \mathsf{s}\, z)$ y ademas

$$\begin{aligned} y &\leq (y \mathsf{s}\, z) \leq x \mathsf{s}\, (y \mathsf{s}\, z) \\ z &\leq (y \mathsf{s}\, z) \leq x \mathsf{s}\, (y \mathsf{s}\, z) \end{aligned}$$

Ya que $x \mathsf{s}\, (y \mathsf{s}\, z)$ es cota superior de $\{x, y\}$, tenemos que $x \mathsf{s}\, y \leq x \mathsf{s}\, (y \mathsf{s}\, z)$, por lo cual $x \mathsf{s}\, (y \mathsf{s}\, z)$ es cota superior del conjunto $\{x \mathsf{s}\, y, z\}$, lo cual dice que $(x \mathsf{s}\, y) \mathsf{s}\, z \leq x \mathsf{s}\, (y \mathsf{s}\, z)$. Analogamente se puede probar que $x \mathsf{s}\, (y \mathsf{s}\, z) \leq (x \mathsf{s}\, y) \mathsf{s}\, z$.

(10) Similar a (9).

(11) Ya que

$$\begin{aligned} x &\leq z \leq z \mathsf{s}\, w \\ y &\leq w \leq z \mathsf{s}\, w \end{aligned}$$

tenemos que $z \mathsf{s}\, w$ es cota superior de $\{x, y\}$ lo cual dice que $x \mathsf{s}\, y \leq z \mathsf{s}\, w$. La otra desigualdad es analoga.

(12) Ya que

$$\begin{aligned} (x \mathsf{i}\, y), (x \mathsf{i}\, z) &\leq x \\ (x \mathsf{i}\, y), (x \mathsf{i}\, z) &\leq y \mathsf{s}\, z \end{aligned}$$

tenemos que $(x \mathsf{i}\, y), (x \mathsf{i}\, z) \leq x \mathsf{i}\, (y \mathsf{s}\, z)$, por lo cual $(x \mathsf{i}\, y) \mathsf{s}\, (x \mathsf{i}\, z) \leq x \mathsf{i}\, (y \mathsf{s}\, z)$. ■

Lemma 93 *Sea* $(L, \leq)$ *un reticulado. Dados elementos* $x_1, ..., x_n \in L$*, con* $n \geq 2$*, se tiene*

$$\begin{aligned}(...(x_1 \mathsf{s}\, x_2)\, \mathsf{s}\, ...)\, \mathsf{s}\, x_n &= \sup(\{x_1, ..., x_n\}) \\ (...(x_1 \mathsf{i}\, x_2)\, \mathsf{i}\, ...)\, \mathsf{i}\, x_n &= \inf(\{x_1, ..., x_n\})\end{aligned}$$

Proof. Por induccion en n. Claramente el resultado vale para $n = 2$. Supongamos vale para n y veamos entonces que vale para $n+1$. Sean $x_1, ..., x_{n+1} \in L$. Por hipotesis inductiva tenemos que

(1) $(...(x_1 \mathsf{s}\, x_2)\, \mathsf{s}\, ...)\, \mathsf{s}\, x_n = \sup(\{x_1, ..., x_n\})$.

Veamos entonces que

(2) $((...(x_1 \mathsf{s}\, x_2)\, \mathsf{s}\, ...)\, \mathsf{s}\, x_n)\, \mathsf{s}\, x_{n+1} = \sup(\{x_1, ..., x_{n+1}\})$.

Es facil ver que $((...(x_1 \mathsf{s}\, x_2)\, \mathsf{s}\, ...)\, \mathsf{s}\, x_n)\, \mathsf{s}\, x_{n+1}$ es cota superior de $\{x_1, ..., x_{n+1}\}$. Supongamos que z es otra cota superior. Ya que z es tambien cota superior del conjunto $\{x_1, ..., x_n\}$, por (1) tenemos que

$$(...(x_1 \mathsf{s}\, x_2)\, \mathsf{s}\, ...)\, \mathsf{s}\, x_n \leq z.$$

Pero entonces ya que $x_{n+1} \leq z$, tenemos que

$$((...(x_1 \mathsf{s}\, x_2)\, \mathsf{s}\, ...)\, \mathsf{s}\, x_n)\, \mathsf{s}\, x_{n+1} \leq z,$$

con lo cual hemos probado (2). ■

Dado que la distribucion de parentesis en una expresion de la forma

$$(...(x_1 \mathsf{s}\, x_2)\, \mathsf{s}\, ...)\, \mathsf{s}\, x_n$$

es irrelevante (ya que s es asociativa), en general suprimiremos los parentesis.

Ya hemos llamado a ciertos posets $(L, \leq)$, reticulados. Una terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$, donde L es un conjunto no vacio cualquiera y s e i son dos operaciones binarias sobre L sera llamada *reticulado* cuando cumpla las siguientes identidades:

(I1) $x \,\mathsf{s}\, x = x \,\mathsf{i}\, x = x$, cualesquiera sea $x \in L$

(I2) $x \,\mathsf{s}\, y = y \,\mathsf{s}\, x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

(I3) $x \,\mathsf{i}\, y = y \,\mathsf{i}\, x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

(I4) $(x \,\mathsf{s}\, y) \,\mathsf{s}\, z = x \,\mathsf{s}\, (y \,\mathsf{s}\, z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

(I5) $(x \,\mathsf{i}\, y) \,\mathsf{i}\, z = x \,\mathsf{i}\, (y \,\mathsf{i}\, z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

(I6) $x \,\mathsf{s}\, (x \,\mathsf{i}\, y) = x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

(I7) $x \,\mathsf{i}\, (x \,\mathsf{s}\, y) = x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

Notese que no toda terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es un reticulado. Por ejemplo $(\mathbf{R}, +, .)$, donde $+$ y $.$ son las operaciones de suma y producto usuales de $\mathbf{R}$, no es un reticulado ya que no cumple, por ejemplo (I1). Ademas es claro que dado un reticulado $(L, \leq)$, la terna $(L, \sup, \inf)$ es un reticulado. El siguiente teorema muestra que todo reticulado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ se obtiene de esta forma.

Theorem 94 *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado. La relacion binaria definida por:*

$$x \leq y \text{ si y solo si } x \,\mathsf{s}\, y = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple:

$$\begin{array}{rcl} \sup(\{x, y\}) & = & x \,\mathsf{s}\, y \\ \inf(\{x, y\}) & = & x \,\mathsf{i}\, y \end{array}$$

Proof. Dejamos como ejercicio para el lector probar que $\leq$ es reflexiva y antisimetrica. Veamos que $\leq$ es transitiva. Supongamos que $x \leq y$ e $y \leq z$. Entonces

$$x \,\mathsf{s}\, z = x \,\mathsf{s}\, (y \,\mathsf{s}\, z) = (x \,\mathsf{s}\, y) \,\mathsf{s}\, z = y \,\mathsf{s}\, z = z,$$

por lo cual $x \leq z$. Veamos ahora que $\sup(\{x, y\}) = x \,\mathsf{s}\, y$. Es claro que $x \,\mathsf{s}\, y$ es una cota superior del conjunto $\{x, y\}$. Supongamos $x, y \leq z$. Entonces

$$(x \,\mathsf{s}\, y) \,\mathsf{s}\, z = x \,\mathsf{s}\, (y \,\mathsf{s}\, z) = x \,\mathsf{s}\, z = z,$$

por lo que $x \,\mathsf{s}\, y \leq z$. Es decir que $x \,\mathsf{s}\, y$ es la menor cota superior.

Para probar que $\inf(\{x, y\}) = x \,\mathsf{i}\, y$, probaremos que para todo $u, v \in L$,

$$u \leq v \text{ si y solo si } u \,\mathsf{i}\, v = u,$$

lo cual le permitira al lector aplicar un razonamiento similar al usado en el caso de la operacion s. Supongamos que $u \,\mathsf{s}\, v = v$. Entonces $u \,\mathsf{i}\, v = u \,\mathsf{i}\, (v \,\mathsf{s}\, v) = u$. Reciprocamente si $u \,\mathsf{i}\, v = u$, entonces $u \,\mathsf{s}\, v = (u \,\mathsf{i}\, v) \,\mathsf{s}\, v = v$, por lo cual $u \leq v$. ■

Ejercicio: Use los resultados anteriores para definir una funcion $\mathcal{F}$ de $\{(L, \leq) : (L, \leq) \text{ es un reticulado}\}$ en $\{(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \text{ es un reticulado}\}$ la cual sea biyectiva

@@finpagina@@

6.2.1 Subreticulados

Dados reticulados $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ diremos que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *es un subreticulado de* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si se dan las siguientes condiciones

(1) $L \subseteq L'$

(2) $\mathsf{s} = \mathsf{s}'|_{L \times L}$ y $\mathsf{i} = \mathsf{i}'|_{L \times L}$

Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado *subuniverso* de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ si es no vacio y cerrado bajo las operaciones s e i (i.e. $x \mathsf{s} y$, $x \mathsf{i} y \in S$, para todo $x, y \in S$). Es importante notar que si bien los conceptos de subreticulado y subuniverso estan muy relacionados, se trata de objetos diferentes ya que los subreticulados de un reticulado dado son reticulados, es decir ciertas ternas y los subuniversos de un reticulado dado son ciertos subconjuntos por lo cual no son ternas. Es facil notar que si S es un subuniverso de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$, entonces $(S, \mathsf{s}|_{S\times S}, \mathsf{i}|_{S\times S})$ es un subreticulado de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y que todo subreticulado de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ se obtiene en esta forma.

6.2.2 Homomorfismos de reticulados

Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados. Una funcion $F : L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *en* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que

$$\begin{array}{rcl} F(x \mathsf{s} y) & = & F(x) \mathsf{s}' F(y) \\ F(x \mathsf{i} y) & = & F(x) \mathsf{i}' F(y). \end{array}$$

Un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ sera llamado *isomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *en* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ cuando sea biyectivo y su inversa sea tambien un homomorfismo. Escribiremos $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \cong (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$. Escribiremos $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ cuando F sea un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$.

EP

Lemma 95 *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo*

Proof. Solo falta ver que F^{-1} es un homomorfismo. Sean $F(x), F(y)$ dos elementos cualesquiera de L'. Tenemos que

$$F^{-1}(F(x) \mathsf{s}' F(y)) = F^{-1}(F(x \mathsf{s} y)) = x \mathsf{s} y = F^{-1}(F(x)) \mathsf{s} F^{-1}(F(y))$$

■

EP

Lemma 96 *Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados y sea $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ un homomorfismo. Entonces I_F es un subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$.*

Proof. Ya que L es no vacio tenemos que I_F tambien es no vacio. Sean $a, b \in I_F$. Sean $x, y \in L$ tales que $F(x) = a$ y $F(y) = b$. Se tiene que

$$\begin{array}{rcl} a \mathsf{s}' b & = & F(x) \mathsf{s}' F(y) = F(x \mathsf{s} y) \in I_F \\ a \mathsf{i}' b & = & F(x) \mathsf{i}' F(y) = F(x \mathsf{i} y) \in I_F \end{array}$$

por lo cual I_F es cerrada bajo s' e i'. ■

EP

Lemma 97 *Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados y sean $(L \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una funcion. Entonces F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si y solo si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.*

Proof. Supongamos F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$. Sean $x, y \in L$, tales que $x \leq y$. Tenemos que $y = x \,\mathsf{s}\, y$ por lo cual $F(y) = F(x \,\mathsf{s}\, y) = F(x) \,\mathsf{s}'\, F(y)$, produciendo $F(x) \leq' F(y)$. En forma similar se puede ver que F^{-1} es tambien un homomorfismo de $(L', \leq')$ en $(L, \leq)$. Si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$, entonces el Lema 91 nos dice que F y F^{-1} respetan las operaciones de supremo e infimo por lo cual F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$. ■

6.2.3 Congruencias de reticulados

Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado. Una *congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ sera una relacion de equivalencia θ la cual cumpla:

(1) $x\theta x'$ y $y\theta y'$ implica $(x \,\mathsf{s}\, y)\theta(x' \,\mathsf{s}\, y')$ y $(x \,\mathsf{i}\, y)\theta(x' \,\mathsf{i}\, y')$

Gracias a esta condicion podemos definir sobre L/θ dos operaciones binarias $\tilde{\mathsf{s}}$ e $\tilde{\imath}$, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta & = & (x \,\mathsf{s}\, y)/\theta \\ x/\theta \,\tilde{\imath}\, y/\theta & = & (x \,\mathsf{i}\, y)/\theta \end{array}$$

Lemma 98 *$(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ es un reticulado. El orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado a este reticulado cumple*

$$x/\theta \tilde{\leq} y/\theta \text{ sii } y\theta(x \,\mathsf{s}\, y)$$

Proof. Veamos que la estructura $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ cumple (I4). Sean x/θ, y/θ, z/θ elementos cualesquiera de L/θ. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} (x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta) \,\tilde{\mathsf{s}}\, z/\theta & = & (x \,\mathsf{s}\, y)/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, z/\theta \\ & = & ((x \,\mathsf{s}\, y) \,\mathsf{s}\, z)/\theta \\ & = & (x \,\mathsf{s}\, (y \,\mathsf{s}\, z))/\theta \\ & = & x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, (y \,\mathsf{s}\, z)/\theta \\ & = & x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, (y/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, z/\theta) \end{array}$$

En forma similar se puede ver que la estructura $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ cumple el resto de las identidades que definen reticulado.

Por definicion, $x/\theta \tilde{\leq} y/\theta$ sii $y/\theta = x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta$, por lo cual $x/\theta \tilde{\leq} y/\theta$ sii $y/\theta = (x \,\mathsf{s}\, y)/\theta$. ■

Corollary 99 *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado en el cual hay un elemento maximo 1 (resp. minimo 0). Entonces si θ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$, $1/\theta$ (resp. $0/\theta$) es un elemento maximo (resp. minimo) de $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$.*

Proof. Ya que $1 = x \,\mathsf{s}\, 1$, para cada $x \in L$, tenemos que $1/\theta = (x \,\mathsf{s}\, 1)/\theta$, para cada $x \in L$, lo cual por el lema anterior nos dice que $x/\theta \tilde{\leq} 1/\theta$, para cada $x \in L$. ■

Dada una funcion $F : A \to B$, llamaremos *nucleo* de F a la relacion binaria

$$\{(a, b) \in A^2 : F(a) = F(b)\}$$

Con $\ker F$ denotaremos al nucleo de F. Es facil de chequear que $\ker F$ es una relacion de equivalencia. Cuando F es un homomorfismo de algebras podemos decir aun mas.

Lemma 100 *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ *es un homomorfismo de reticulados, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$.

Proof. Dejamos al lector ver que $\ker F$ es una relacion de equivalencia. Supongamos $x \ker F x'$ y $y \ker F y'$. Entonces

$$F(x \,\mathsf{s}\, y) = F(x) \,\mathsf{s}'\, F(y) = F(x') \,\mathsf{s}'\, F(y') = F(x' \,\mathsf{s}\, y')$$

lo cual nos dice que $(x \,\mathsf{s}\, y) \ker F (x' \,\mathsf{s}\, y')$. En forma similar tenemos que $(x \,\mathsf{i}\, y) \ker F (x' \,\mathsf{i}\, y')$. ■

Si R es una relacion de equivalencia sobre un conjunto A, entonces con π_R denotaremos la funcion

$$\begin{array}{ccc} A & \to & A/R \\ a & \to & a/R \end{array}$$

A π_R la llamaremos la *proyeccion canonica*. Ya vimos que el nucleo de un homomorfismo es una congruencia. El siguiente lema muestra que toda congruencia es el nucleo de un homomorfismo.

Lemma 101 *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado y sea* θ *una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. *Entonces* π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *en* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}})$. *Ademas* $\ker \pi_\theta = \theta$.

Proof. Sean $x, y \in L$. Tenemos que

$$\pi_\theta(x \,\mathsf{s}\, y) = (x \,\mathsf{s}\, y)/\theta = x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta = \pi_\theta(x) \,\tilde{\mathsf{s}}\, \pi_\theta(y)$$

por lo cual π_θ preserva la operacion supremo. Para la operacion infimo es similar. ■

6.3 Reticulados acotados

Una 5-upla $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$, donde L es un conjunto no vacio, s e i son operaciones binarias sobre L y $0, 1 \in L$, sera llamada un *reticulado acotado* si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es un reticulado y ademas se cumplen las siguientes identidades

(I8) $0 \,\mathsf{s}\, x = x$, para cada $x \in L$

(I9) $x \,\mathsf{s}\, 1 = 1$, para cada $x \in L$.

Notese que si $(P, \leq)$ es un poset el cual es un reticulado y en el cual hay un maximo 1 y un minimo 0, entonces $(P, \sup, \inf, 0, 1)$ es un reticulado acotado. Ademas en virtud del Teorema 94 todo reticulado acotado se obtiene de esta forma.

6.3.1 Subreticulados acotados

Dados reticulados acotados $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ diremos que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *es un subreticulado acotado de* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones

(1) $L \subseteq L'$

(2) $0 = 0'$ y $1 = 1'$

(3) $\mathsf{s} = \mathsf{s}'|_{L\times L}$ y $\mathsf{i} = \mathsf{i}'|_{L\times L}$

Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado *subuniverso* de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$ y S es cerrado bajo las operaciones s e i (i.e. $x \,\mathsf{s}\, y,\ x \,\mathsf{i}\, y \in S$, para todo $x, y \in S$). Es importante notar que si bien los conceptos de subreticulado acotado y subuniverso estan muy relacionados, se trata de objetos diferentes. Es facil notar que si S es un subuniverso de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$, entonces $(S, \mathsf{s}|_{S\times S}, \mathsf{i}|_{S\times S}, 0, 1)$ es un subreticulado de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ y que todo subreticulado acotado de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ se obtiene en esta forma.

6.3.2 Homomorfismos de reticulados acotados

Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ reticulados acotados. Una funcion $F : L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *en* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que

$$\begin{array}{rcl} F(x \,\mathsf{s}\, y) & = & F(x) \,\mathsf{s}'\, F(y) \\ F(x \,\mathsf{i}\, y) & = & F(x) \,\mathsf{i}'\, F(y) \\ F(0) & = & 0' \\ F(1) & = & 1' \end{array}$$

Un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ sera llamado *isomorfismo* cuando sea biyectivo y su inversa sea tambien un homomorfismo. Escribiremos $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \cong (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$. Escribiremos $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ cuando F sea un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$.

EP

Lemma 102 *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo*

Proof. Similar a la prueba del Lemma 95. ■

EP

Lemma 103 *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ es un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$.*

Proof. Ya que F es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ tenemos que I_F es subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ lo cual ya que $0', 1' \in I_F$ implica que I_F es un subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$. ■

6.3.3 Congruencias de reticulados acotados

Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Una *congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ sera una relacion de equivalencia θ la cual sea una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. Tenemos definidas sobre L/θ dos operaciones binarias $\tilde{\mathsf{s}}$ e $\tilde{\imath}$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x/\theta \tilde{\mathsf{s}} y/\theta &= (x \mathsf{\ s\ } y)/\theta \\ x/\theta \tilde{\imath} y/\theta &= (x \mathsf{\ i\ } y)/\theta \end{aligned}$$

En forma analoga a lo hecho para reticulados, podemos probar facilmente los siguientes resultados.

Lemma 104 *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados acotados, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$.

Proof. Ya que F es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ tenemos que por un lema anterior $\ker F$ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ lo cual por definicion nos dice que $\ker F$ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$. ■

Lemma 105 *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *un reticulado acotado y* θ *una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$.

(a) $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ *es un reticulado acotado.*

(b) π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *en* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ *cuyo nucleo es* θ.

Proof. (a) Por un lema anterior ya sabemos que $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ es un reticulado y por el Lema 99 se tiene que $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ es un reticulado acotado.

(b) Sigue directamente del Lema 101 ■

6.4 Reticulados complementados

Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Dado $a \in L$, diremos que a es *complementado* cuando exista un elemento $b \in B$ (llamado *complemento de* a) tal que:

$$\begin{aligned} a \mathsf{\ s\ } b &= 1 \\ a \mathsf{\ i\ } b &= 0 \end{aligned}$$

Notese que dicho elemento b puede no ser unico, es decir a puede tener varios complementos. Una 6-upla $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$, donde L es un conjunto no vacio, s e i son operaciones binarias sobre L, ^{c} es una operacion unaria sobre L y $0, 1 \in L$, sera llamada *reticulado complementado* si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ es un reticulado acotado y ademas

(I10) $x \mathsf{\ s\ } x^c = 1$, para cada $x \in L$

(I11) $x \mathsf{\ i\ } x^c = 0$, para cada $x \in L$

Dado un reticulado acotado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ puede haber mas de una operacion unaria g tal que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, g, 0, 1)$ resulte un reticulado complementado. Intente dar un ejemplo de esta situacion con $|L| = 5$.

Notese que si tenemos un poset $(P, \leq)$ y una funcion $g : P \to P$, tales que $(P, \leq)$ es un reticulado en el cual hay un maximo 1 y un minimo 0 y la funcion g cumple

$$\begin{array}{rcl} \sup\{x, g(x)\} & = & 1 \\ \inf\{x, g(x)\} & = & 0, \end{array}$$

entonces $(P, \sup, \inf, g, 0, 1)$ es un reticulado complementado. Ademas en virtud del Teorema 94 todo reticulado complementado se obtiene de esta forma.

6.4.1 Subreticulados complementados

Dados reticulados complementados $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ diremos que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *es un subreticulado complementado de* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones

(1) $L \subseteq L'$

(2) $0 = 0'$ y $1 = 1'$

(3) $\mathsf{s} = \mathsf{s}'|_{L \times L}$, $\mathsf{i} = \mathsf{i}'|_{L \times L}$ y $^c = \ ^{c'}|_L$

Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado *subuniverso* de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$ y S es cerrado bajo las operaciones s, i y ^{c} (i.e. $x \mathsf{s} y$, $x \mathsf{i} y$,$x^c \in S$, para todo $x, y \in S$). Es importante notar que si bien los conceptos de subreticulado complementado y subuniverso estan muy relacionados, se trata de objetos diferentes. Es facil notar que si S es un subuniverso de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$, entonces $(S, \mathsf{s}|_{S \times S}, \mathsf{i}|_{S \times S}, ^c|_S, 0, 1)$ es un subreticulado complementado de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ y que todo subreticulado complementado de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ se obtiene en esta forma.

6.4.2 Homomorfismos de reticulados complementados

Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ reticulados complementados. Una funcion $F : L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *en* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que

$$\begin{array}{rcl} F(x \mathsf{s} y) & = & F(x) \mathsf{s}' F(y) \\ F(x \mathsf{i} y) & = & F(x) \mathsf{i}' F(y) \\ F(x^c) & = & F(x)^{c'} \\ F(0) & = & 0' \\ F(1) & = & 1' \end{array}$$

Un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ sera llamado *isomorfismo* cuando sea biyectivo y su inversa sea un homomorfismo. Como es usual usaremos el simbolo $\cong$ para denotar la relacion de isomorfismo. Escribiremos $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1) \rightarrow (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', {}^{c'}, 0', 1')$ cuando F sea un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', {}^{c'}, 0', 1')$. Dejamos al lector la prueba de los siguientes lemas.

Lemma 106 *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1) \rightarrow (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', {}^{c'}, 0', 1')$ un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo*

Proof. Es dejada al lector. ■

Lemma 107 *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1) \rightarrow (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', {}^{c'}, 0', 1')$ es un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', {}^{c'}, 0', 1')$.*

Proof. Es dejada al lector. ■

6.4.3 Congruencias de reticulados complementados

Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Una *congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$ sera una relacion de equivalencia sobre L la cual cumpla:

(1) θ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$

(2) $x/\theta = y/\theta$ implica $x^c/\theta = y^c/\theta$

Las condiciones anteriores nos permiten definir sobre L/θ dos operaciones binarias $\tilde{\mathsf{s}}$ e $\tilde{\imath}$, y una operacion unaria ${}^{\tilde{c}}$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta & = & (x \,\mathsf{s}\, y)/\theta \\ x/\theta \,\tilde{\imath}\, y/\theta & = & (x \,\mathsf{i}\, y)/\theta \\ (x/\theta)^{\tilde{c}} & = & x^c/\theta \end{array}$$

Tal como era de esperar tenemos entonces

Lemma 108 *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1) \rightarrow (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', {}^{c'}, 0', 1')$ es un homomorfismo de reticulados complementados, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$
Proof. *Ya que F es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ tenemos que por un lema anterior* $\ker F$ *es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$. Es decir que solo falta probar que para todos $x, y \in L$, se tiene que $x/\ker F = y/\ker F$ implica $x^c/\ker F = y^c/\ker F$, lo cual es dejado al lector* ■

Lemma 109 *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$ un reticulado complementado y sea θ una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$.*

(a) $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, {}^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es un reticulado complementado.

(b) π_θ es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$ en $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, {}^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ cuyo nucleo es θ.

Proof. (a) Por un lema anterior ya sabemos que $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es un reticulado acotado. Es decir que solo nos falta ver que $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}}, ^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ sarisface las identidades (I10) y (I11). Veamos por ejemplo que satisface la (I10). Sea x/θ un elemento cualquiera de L/θ. Ya que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^{c}, 0, 1)$ satisface la (I10), tenemos que $x \,\mathsf{s}\, x^c = 1$. O sea que $(x \,\mathsf{s}\, x^c)/\theta = 1/\theta$ y por lo tanto $x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, x^c/\theta = 1/\theta$. Pero por definicion de $^{\tilde{c}}$ tenemos que $(x/\theta)^{\tilde{c}} = x^c/\theta$, lo cual nos dice que $x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, (x/\theta)^{\tilde{c}} = 1/\theta$. Dejamos al lector ver que $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}}, ^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ sarisface la identidad (I11)

(b) Por el Lema 105 tenemos que π_θ es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ cuyo nucleo es θ. Notese que por definicion de $^{\tilde{c}}$ tenemos que $x^c/\theta = (x/\theta)^{\tilde{c}}$, es decir $\pi_\theta(x^c) = (\pi_\theta(x))^{\tilde{c}}$, cualquiera sea $x \in L$ ■

@@finpagina@@

6.5 El teorema del filtro primo

En esta seccion probaremos un teorema que tiene importantes aplicaciones en logica. Primero un lema que nos conducira a una definicion basica.

EP

Lemma 110 *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado. Son equivalentes:*

(1) $x \,\mathsf{i}\, (y \,\mathsf{s}\, z) = (x \,\mathsf{i}\, y) \,\mathsf{s}\, (x \,\mathsf{i}\, z)$*, cualesquiera sean* $x, y, z \in L$

(2) $x \,\mathsf{s}\, (y \,\mathsf{i}\, z) = (x \,\mathsf{s}\, y) \,\mathsf{i}\, (x \,\mathsf{s}\, z)$*, cualesquiera sean* $x, y, z \in L$*.*

Proof. (1)⇒(2). Notese que

$$\begin{array}{rcl}
(x \,\mathsf{s}\, y) \,\mathsf{i}\, (x \,\mathsf{s}\, z) & = & ((x \,\mathsf{s}\, y) \,\mathsf{i}\, x) \,\mathsf{s}\, ((x \,\mathsf{s}\, y) \,\mathsf{i}\, z) \\
& = & (x \,\mathsf{s}\, (z \,\mathsf{i}\, (x \,\mathsf{s}\, y)) \\
& = & (x \,\mathsf{s}\, ((z \,\mathsf{i}\, x) \,\mathsf{s}\, (z \,\mathsf{i}\, y)) \\
& = & (x \,\mathsf{s}\, (z \,\mathsf{i}\, x)) \,\mathsf{s}\, (z \,\mathsf{i}\, y) \\
& = & x \,\mathsf{s}\, (z \,\mathsf{i}\, y) \\
& = & x \,\mathsf{s}\, (y \,\mathsf{i}\, z)
\end{array}$$

(2)⇒(1) es similar. ■

Un reticulado se llamara *distributivo* cuando cumpla alguna de las dos propiedades equivalentes del lema anterior.

EP

Lemma 111 *Si* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento.*

Proof. Supongamos $x \in L$ tiene complementos y, z. Se tiene

$$y = y \,\mathsf{i}\, 1 = y \,\mathsf{i}\, (x \,\mathsf{s}\, z) = (y \,\mathsf{i}\, x) \,\mathsf{s}\, (y \,\mathsf{i}\, z) = 0 \,\mathsf{s}\, (y \,\mathsf{i}\, z) = y \,\mathsf{i}\, z,$$

por lo cual $y \leq z$. En forma analoga se muestra que $z \leq y$. ■

Ejercicio: Use la prueba del lema anterior para hacer un algoritmo el cual tome de entrada un reticulado acotado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ y elementos $x, y, z \in L$ tales que $y \neq z$ son complementos de x, y de como salida elementos a, b, c tales que $a \mathsf{\ i\ } (b \mathsf{\ s\ } c) \neq (a \mathsf{\ i\ } b) \mathsf{\ s\ } (a \mathsf{\ i\ } c)$

Un *filtro* de un reticulado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ sera un subconjunto $F \subseteq L$ tal que:

(1) $F \neq \emptyset$

(2) $x, y \in F \Rightarrow x \mathsf{\ i\ } y \in F$

(3) $x \in F$ y $x \leq y \Rightarrow y \in F$.

Dado un conjunto $S \subseteq L$, denotemos con $[S)$ el siguiente conjunto

$$\{y \in L : y \geq s_1 \mathsf{\ i\ } ... \mathsf{\ i\ } s_n, \text{ para algunos } s_1, ..., s_n \in S,\ n \geq 1\}$$

Lemma 112 *Si S es no vacio, entonces $[S)$ es un filtro. Mas aun si F es un filtro y $F \supseteq S$, entonces $F \supseteq [S)$. Es decir, $[S)$ es el menor filtro que contiene a S.*

Proof. Ya que $S \subseteq [S)$, tenemos que $[S) \neq \emptyset$. Claramente $[S)$ cumple la propiedad (3). Veamos cumple la (2). Si $y \geq s_1 \mathsf{\ i\ } s_2 \mathsf{\ i\ } ... \mathsf{\ i\ } s_n$ y $z \geq t_1 \mathsf{\ i\ } t_2 \mathsf{\ i\ } ... \mathsf{\ i\ } t_m$, con $s_1, s_2, ..., s_n, t_1, t_2, ..., t_m \in S$, entonces

$$y \mathsf{\ i\ } z \geq s_1 \mathsf{\ i\ } s_2 \mathsf{\ i\ } ... \mathsf{\ i\ } s_n \mathsf{\ i\ } t_1 \mathsf{\ i\ } t_2 \mathsf{\ i\ } ... \mathsf{\ i\ } t_m,$$

lo cual prueba (2). ■

Llamaremos a $[S)$ el *filtro generado por* S. Cuando S es finito, ya que existe $\inf S$, es claro que $[S) = \{y \in L : y \geq \inf S\}$. Cuando S es infinito y existe $\inf S$, en muchos casos se dara que $[S) = \{y \in L : y \geq \inf S\}$ o que $[S) = \{y \in L : y > \inf S\}$, pero no necesariamente esto sucedera siempre. Por ejemplo:

- Sea $\mathbf{L} = (\mathcal{P}(\mathbf{N}), \cup\cap)$ y sea $S = \{\mathbf{N} - \{n\} : n \in \mathbf{N}\}$. Es facil ver que $\inf S = \emptyset$ y que $[S) = \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) : \mathbf{N} - A \text{ es finito}\}$ por lo cual no se da que $[S) = \{y \in L : y \geq \inf S\}$ o que $[S) = \{y \in L : y > \inf S\}$

Sea $(P, \leq)$ un poset. Un subconjunto $C \subseteq P$ sera llamado una *cadena* si para cada $x, y \in C$, se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$. Por ejemplo

- $\{1, 10, 40, 600\}$ y $\{2^n : n \in \mathbf{N}\}$ son cadenas del poset $(\mathbf{N}, |)$
- $\{-3, 5, 2\}$ y el intervalo $[2, 3]$ son cadenas del poset $(\mathbf{R}, \leq)$. De hecho todo subconjunto de $\mathbf{R}$ es una cadena de $(\mathbf{R}, \leq)$

Es importante notar que las cadenas pueden ser infinitas y que dada una cadena C puede no existir una sucesion $c_1, c_2, ...$ tal que $C = \{c_n : n \in \mathbf{N}\}$ (por que?). El siguiente resultado es una herramienta fundamental en el algebra moderna.

E

Lemma 113 *(Zorn) Sea $(P, \leq)$ un poset y supongamos cada cadena de $(P, \leq)$ tiene una cota superior. Entonces hay un elemento maximal en $(P, \leq)$.*

Un filtro F de un reticulado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ sera llamado *primo* cuando se cumplan:

(1) $F \neq L$

(2) $x \mathsf{s} y \in F \Rightarrow x \in F$ o $y \in F$.

EP

Theorem 114 *(Teorema del Filtro Primo) Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado distributivo y F un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$. Entonces hay un filtro primo P tal que $x_0 \notin P$ y $F \subseteq P$.*

Proof. Sea
$$\mathcal{F} = \{F_1 : F_1 \text{ es un filtro, } x_0 \notin F_1 \text{ y } F \subseteq F_1\}.$$
Notese que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, por lo cual $(\mathcal{F}, \subseteq)$ es un poset. Veamos que cada cadena en $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene una cota superior. Sea C una cadena. Si $C = \emptyset$, entonces cualquier elemento de $\mathcal{F}$ es cota de C. Supongamos entonces $C \neq \emptyset$. Sea
$$G = \{x \in L : x \in F_1, \text{para algun } F_1 \in C\}.$$
Veamos que G es un filtro. Es claro que G es no vacio. Supongamos que $x, y \in G$. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $x \in F_1$ y $y \in F_2$. Si $F_1 \subseteq F_2$, entonces ya que F_2 es un filtro tenemos que $x \mathsf{i} y \in F_2 \subseteq G$. Si $F_2 \subseteq F_1$, entonces tenemos que $x \mathsf{i} y \in F_1 \subseteq G$. Ya que C es una cadena, tenemos que siempre $x \mathsf{i} y \in G$. En forma analoga se prueba la propiedad restante por lo cual tenemos que G es un filtro. Ademas $x_0 \notin G$, por lo que $G \in \mathcal{F}$ es cota superior de C. Por el lema de Zorn, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene un elemento maximal P. Veamos que P es un filtro primo. Supongamos $x \mathsf{s} y \in P$ y $x, y \notin P$. Notese que $[P \cup \{x\})$ es un filtro el cual contiene propiamente a P. Entonces ya que P es un elemento maximal de $(\mathcal{F}, \subseteq)$, tenemos que $x_0 \in [P \cup \{x\})$. Analogamente tenemos que $x_0 \in [P \cup \{y\})$. Ya que $x_0 \in [P \cup \{x\})$, tenemos que hay elementos $p_1, ..., p_n \in P$, tales que
$$x_0 \geq p_1 \mathsf{i} ... \mathsf{i} p_n \mathsf{i} x$$
Ya que $x_0 \in [P \cup \{y\})$, tenemos que hay elementos $q_1, ..., q_m \in P$, tales que
$$x_0 \geq q_1 \mathsf{i} ... \mathsf{i} q_m \mathsf{i} y$$
Si llamamos p al siguiente elemento de P
$$p_1 \mathsf{i} ... \mathsf{i} p_n \mathsf{i} q_1 \mathsf{i} ... \mathsf{i} q_m$$
tenemos que
$$\begin{array}{rcl} x_0 & \geq & p \mathsf{i} x \\ x_0 & \geq & p \mathsf{i} y \end{array}$$
Se tiene que $x_0 \geq (p \mathsf{i} x) \mathsf{s} (p \mathsf{i} y) = p \mathsf{i} (x \mathsf{s} y) \in P$, lo cual es absurdo ya que $x_0 \notin P$. ■

Corollary 115 *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *un reticulado acotado distributivo. Si* $\emptyset \neq S \subseteq L$ *es tal que* $s_1 \mathsf{i} s_2 \mathsf{i} ... \mathsf{i} s_n \neq 0$*, para cada* $s_1, ..., s_n \in S$*, entonces hay un filtro primo que contiene a* S*.*

Proof. Notese que $[S) \neq L$ por lo cual se puede aplicar el Teorema del filtro primo. ■

Un *Algebra de Boole* sera un reticulado complementado y distributivo.

Lemma 116 *Sea* $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *un algebra de Boole. Entonces para un filtro* $F \subseteq B$ *las siguientes son equivalentes:*

(1) F *es primo*

(2) $x \in F$ *o* $x^c \in F$*, para cada* $x \in B$*.*

Proof. (1)⇒(2). Ya que $x \mathsf{s} x^c = 1 \in F$, (2) se cumple si F es primo.
(2)⇒(1). Supongamos que $x \mathsf{s} y \in F$ y que $x \notin F$. Entonces por (2), $x^c \in F$ y por lo tanto tenemos que

$$y \geq x^c \mathsf{i} y = (x^c \mathsf{i} x) \mathsf{s} (x^c \mathsf{i} y) = x^c \mathsf{i} (x \mathsf{s} y) \in F,$$

lo cual dice que $y \in F$. ■

Lemma 117 *Sea* $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *un algebra de Boole. Supongamos que* $b \neq 0$ *y* $a = \inf A$*, con* $A \subseteq B$*. Entonces si* $b \mathsf{i} a = 0$*, existe un* $e \in A$ *tal que* $b \mathsf{i} e^c \neq 0$*.*

Proof. Supongamos que para cada $e \in A$, tengamos que $b \mathsf{i} e^c = 0$. Entonces tenemos que para cada $e \in A$,

$$b = b \mathsf{i} (e \mathsf{s} e^c) = (b \mathsf{i} e) \mathsf{s} (b \mathsf{i} e^c) = b \mathsf{i} e,$$

lo cual nos dice que b es cota inferior de A. Pero entonces $b \leq a$, por lo cual $b = b \mathsf{i} a = 0$, contradiciendo la hipotesis. ■

Theorem 118 *(Rasiova y Sikorski) Sea* $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *un algebra de Boole. Sea* $x \in B$*,* $x \neq 0$*. Supongamos que* $A_1, A_2, ...$ *son subconjuntos de* B *tales que existe* $\inf(A_j)$*, para cada* $j = 1, 2....$ *Entonces hay un filtro primo* P *el cual cumple:*

(a) $x \in P$

(b) $P \supseteq A_j \Rightarrow P \ni \inf(A_j)$*, para cada* $j = 1, 2, ...$

Proof. Sean $a_j = \inf(A_j)$, $j = 1, 2, ...$ Construiremos inductivamente una sucesion $b_0, b_1, ...$ de elementos de B tal que:

(1) $b_0 = x$

(2) $b_0 \mathsf{i} ... \mathsf{i} b_n \neq 0$, para cada $n \geq 0$

(3) $b_j = a_j$ o $b_j^c \in A_j$, para cada $j \geq 1$.

Definamos $b_0 = x$. Supongamos ya definimos $b_0, ..., b_n$, veamos como definir b_{n+1}. Si $(b_0 \mathsf{i} ... \mathsf{i} b_n) \mathsf{i} a_{n+1} \neq 0$, entonces definamos $b_{n+1} = a_{n+1}$. Si $(b_0 \mathsf{i} ... \mathsf{i} b_n) \mathsf{i} a_{n+1} = 0$, entonces por el lema anterior, tenemos que hay un $e \in A_{n+1}$ tal que $(b_0 \mathsf{i} ... \mathsf{i} b_n) \mathsf{i} e^c \neq 0$, lo cual nos permite definir $b_{n+1} = e^c$.

Usando (2) se puede probar que el conjunto $S = \{b_0, b_1, ...\}$ satisface la hipotesis del primer corolario del Teorema del filtro primo, por lo cual hay un filtro primo P tal que $\{b_0, b_1, ...\} \subseteq P$. Es facil chequear que P satisface las propiedades (a) y (b). ■

7 Terminos y formulas

Sea Var el siguiente conjunto de palabras del alfabeto $\{\mathsf{X}, \mathit{0}, \mathit{1}, ..., \mathit{9}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, ..., \mathbf{9}\}$:

$$Var = \{\mathsf{X}\mathbf{1}, ..., \mathsf{X}\mathbf{9}, \mathsf{X}\mathit{1}\mathbf{0}, \mathsf{X}\mathit{1}\mathbf{1}, ..., \mathsf{X}\mathit{1}\mathbf{9}, \mathsf{X}\mathit{2}\mathbf{0}, \mathsf{X}\mathit{2}\mathbf{1}, ...\}$$

Es decir el elemento n-esimo de Var es la palabra de la forma $\mathsf{X}\alpha$ donde α es el resultado de reemplazar en la palabra que denota n en notacion decimal, el ultimo numeral por su correspondiente numeral bold y los otros por sus correspondientes italicos. A los elementos de Var los llamaremos *variables.* Llamaremos x_i al i-esimo elemento de Var, para cada $i \in \mathbf{N}$

Por un *tipo* (*de primer orden*) entenderemos una 4-upla $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ tal que:

(1) Hay alfabetos finitos Σ_1, Σ_2 y Σ_3 tales:

   (a) $\mathcal{C} \subseteq \Sigma_1^+$, $\mathcal{F} \subseteq \Sigma_2^+$ y $\mathcal{R} \subseteq \Sigma_3^+$

   (b) Σ_1, Σ_2 y Σ_3 son disjuntos de a pares.

   (c) $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ no contiene ningun simbolo de la lista
   $\forall\ \exists\ \neg\ \vee\ \wedge\ \rightarrow\ \leftrightarrow\ (\ )\ ,\ \equiv\ \mathsf{X}\ \mathit{0}\ \mathit{1}\ ...\ \mathit{9}\ \mathbf{0}\ \mathbf{1}\ ...\ \mathbf{9}$

(2) $a : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{N}$ es una funcion que a cada $p \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ le asocia un numero natural $a(p)$, llamado la *aridad* de p.

(3) Ninguna palabra de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$) es subpalabra propia de otra palabra de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$).

A los elementos de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$) los llamaremos *nombres de constante* (resp. *nombres de funcion, nombres de relacion*) *de tipo* τ. Dado $n \geq 1$, sean

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}_n & = & \{f \in \mathcal{F} : a(f) = n\} \\ \mathcal{R}_n & = & \{r \in \mathcal{R} : a(r) = n\} \end{array}$$

Dado un tipo τ, definamos los conjuntos de palabras T_k^τ, con $k \geq 0$, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} T_0^\tau & = & Var \cup \mathcal{C} \\ T_{k+1}^\tau & = & T_k^\tau \cup \{f(t_1, ..., t_n) : f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, t_1, ..., t_n \in T_k^\tau\}. \end{array}$$

Sea

$$T^\tau = \bigcup_{k\geq 0} T_k^\tau$$

Los elementos de T^τ seran llamados *terminos de tipo* τ.

El siguiente lema es la herramienta basica para probar propiedades de los terminos.

EP

Lemma 119 *Supongamos* $t \in T_k^\tau$, *con* $k \geq 1$. *Entonces ya sea* $t \in Var \cup \mathcal{C}$ *o* $t = f(t_1, ..., t_n)$, *con* $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$, $t_1, ..., t_n \in T_{k-1}^\tau$.

Proof. Por induccion en k.

CASO $k = 1$: Es directo ya que por definicion

$$T_1^\tau = Var \cup \mathcal{C} \cup \{f(t_1, ..., t_n) : f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, t_1, ..., t_n \in T_0^\tau\}.$$

CASO $k \Rightarrow k+1$: Sea $t \in T_{k+1}^\tau$. Por definicion de T_{k+1}^τ tenemos que $t \in T_k^\tau$ o $t = f(t_1, ..., t_n)$ con $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$ y $t_1, ..., t_n \in T_k^\tau$. Si se da que $t \in T_k^\tau$, entonces podemos aplicar hipotesis inductiva y usar que $T_{k-1}^\tau \subseteq T_k^\tau$. Esto completa el caso. ■

Algunos ejemplos de propiedades de los terminos las cuales se pueden probar facilmente usando el lema anterior son

- Si $t \in T^\tau$ es tal que en t ocurre el simbolo), entonces $t = f(t_1, ..., t_n)$ con $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$ y $t_1, ..., t_n \in T^\tau$.
- Ningun termino comienza con un simbolo del alfabeto $\{\mathit{0}, \mathit{1}, ..., \mathit{9}\}$
- Si $t \in T^\tau$ comienza con X entonces $t \in Var$
- Si $t \in T^\tau$ y $[t]_i =)$, con $i < |t|$, entonces $[t]_{i+1} =$, o $[t]_{i+1} =$)

Definamos conjuntos Bal_k, con $k \geq 1$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Bal_1 &= \{()\} \\ Bal_{k+1} &= Bal_k \cup \{(b_1...b_n) : b_1, ..., b_n \in Bal_k, n \geq 1\}. \end{aligned}$$

Sea

$$Bal = \bigcup_{k\geq 1} Bal_k$$

N

Lemma 120 *Sea* $b \in Bal$. *Se tiene:*

(1) $|b|_(- |b|_) = 0$

(2) Si x *es tramo inicial propio de* b, *entonces* $|x|_(- |x|_) > 0$

(3) Si x *es tramo final propio de* b, *entonces* $|x|_(- |x|_) < 0$

Proof. Probaremos por induccion en k, que valen (1), (2) y (3) para cada $b \in Bal_k$. El caso $k = 1$ es trivial. Supongamos $b \in Bal_{k+1}$. Si $b \in Bal_k$, se aplica directamente HI. Supongamos entonces que $b = (b_1...b_n)$, con $b_1, ..., b_n \in Bal_k$, $n \geq 1$. Por HI, $b_1, ..., b_n$ cumplen (1) por lo cual b cumple (1). Veamos que b cumple (2). Sea x un tramo inicial propio de b. Notese que x es de la forma $x = (b_1...b_i x_1$ con $0 \leq i \leq n-1$ y x_1 un tramo inicial de b_{i+1} (en el caso $i = 0$ interpretamos $b_1...b_i = \varepsilon$). Pero entonces ya que

$$|x|_(- |x|_) = 1 + \left(\sum_{j=1}^{i} |b_j|_(- |b_j|_) \right) + |x_1|_(- |x_1|_)$$

tenemos que por HI, se da que $|x|_(- |x|_) > 0$. En forma analoga se puede ver que b cumple (3). ■

@@finpagina@@

Dado un alfabeto Σ tal que (y) pertenecen a Σ, definamos $del : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcl} del(\varepsilon) & = & \varepsilon \\ del(\alpha a) & = & del(\alpha)a, \text{ si } a \in \{(,)\} \\ del(\alpha a) & = & del(\alpha), \text{ si } a \in \Sigma - \{(,)\} \end{array}$$

Lemma 121 *$del(xy) = del(x)del(y)$, para todo $x, y \in \Sigma^*$*

Lemma 122 *Supongamos que Σ es tal que $T^\tau \subseteq \Sigma^*$. Entonces $del(t) \in Bal$, para cada $t \in T^\tau - (Var \cup \mathcal{C})$*

Lemma 123 *Sean $s, t \in T^\tau$ y supongamos que hay palabras x, y, z, con $y \neq \varepsilon$ tales que $s = xy$ y $t = yz$. Entonces $x = z = \varepsilon$ o $s, t \in \mathcal{C}$. En particular si un termino es tramo inicial o final de otro termino, entonces dichos terminos son iguales.*

Proof. Supongamos $s \in \mathcal{C}$. Ya que $y \neq \varepsilon$ tenemos que t debe comenzar con un simbolo que ocurre en un nombre de cte, lo cual dice que t no puede ser ni una variable ni de la forma $g(t_1, ..., t_m)$, es decir $t \in \mathcal{C}$. Supongamos $s \in Var$. Si $x \neq \varepsilon$ tenemos que t debe comenzar con alguno de los siguientes simbolos

0 1 ... 9 **0 1 ... 9**

lo cual es absurdo. O sea que $x = \varepsilon$ y por lo tanto t debe comenzar con X. Pero esto dice que $t \in Var$ de lo que sigue facilmente que $z = \varepsilon$. Supongamos entonces que s es de la forma $f(s_1, ..., s_n)$. Ya que) debe ocurrir en t, tenemos que t es de la forma $g(t_1, ..., t_m)$. O sea que $del(s), del(t) \in Bal$. Ya que) ocurre en y, $del(y) \neq \varepsilon$. Tenemos tambien que

$$\begin{array}{rcl} del(s) & = & del(x)del(y) \\ del(t) & = & del(y)del(z) \end{array}$$

La primera igualdad, por (3) del Lema 120, nos dice que

$$|del(y)|_{(} - |del(y)|_{)} \leq 0,$$

y la segunda que

$$|del(y)|_{(} - |del(y)|_{)} \geq 0,$$

por lo cual

$$|del(y)|_{(} - |del(y)|_{)} = 0$$

Pero entonces ya que $del(y)$ es tramo final de $del(s)$, (3) del Lema 120 nos dice que $del(x) = \varepsilon$. Similarmente obtenemos que $del(z) = \varepsilon$. Ya que que t termina con) tenemos que $z = \varepsilon$. O sea que $f(s_1, ..., s_n) = xg(t_1, ..., t_m)$ con $del(x) = \varepsilon$, de lo que se saca que $f = xg$ ya que (no ocurre en x. De la definicion de tipo se desprende que $x = \varepsilon$. ■

Theorem 124 *(Lectura unica de terminos). Dado $t \in T^\tau$ se da una de las siguientes:*

(1) $t \in Var \cup \mathcal{C}$

(2) Hay unicos $n \geq 1,\ f \in \mathcal{F}_n,\ t_1, ..., t_n \in T^\tau$ tales que $t = f(t_1, ..., t_n)$.

Proof. En virtud del Lema 119 solo nos falta probar la unicidad en el punto (2). Supongamos que

$$t = f(t_1, ..., t_n) = g(s_1, ..., s_m)$$

con $n, m \geq 1,\ f \in \mathcal{F}_n,\ g \in \mathcal{F}_m,\ t_1, ..., t_n, s_1, ..., s_m \in T^\tau$. Notese que $f = g$. O sea que $n = m = a(f)$. Notese que t_1 es tramo inicial de s_1 o s_1 es tramo inicial de t_1, lo cual por el lema anterior nos dice que $t_1 = s_1$. Con el mismo razonamiento podemos probar que debera suceder $t_2 = s_2, ..., t_n = s_n$. ■

El teorema anterior es importante ya que nos permite definir recursivamente funciones con dominio contenido en T^τ. Por ejemplo podemos definir una funcion $F : T^\tau \to T^\tau$, de la siguiente manera:

- $F(c) = c$,
- $F(v) = v$, para cada $v \in Var$
- $F(f(t_1, ..., t_n)) = f(F(t_1), ..., F(t_n))$, si $f \in \mathcal{F}_n$, con $n \neq 2$
- $F(f(t_1, t_2)) = f(t_2, t_1)$, si $f \in \mathcal{F}_2$.

Notese que si la unicidad de la lectura no fuera cierta, entonces las ecuaciones anterires no estarian definiendo en forma correcta una funcion ya que el valor de la imagen de un termino t estaria dependiendo de cual descomposicion tomemos para t.

7.1 Subterminos

Sean $s, t \in T^\tau$. Diremos que s es *subtermino* (*propio*) de t si (no es igual a t y) s es subpalabra de t. Notese que un termino s puede ocurrir en t, a partir de i, y tambien a partir de j, con $i \neq j$. En virtud de esto, hablaremos de las distintas ocurrencias de s en t.

Lemma 125 *Sean $r, s, t \in T^\tau$.*

(a) Si $s \neq t = f(t_1, ..., t_n)$ y s ocurre en t, entonces dicha ocurrencia sucede dentro de algun t_j, $j = 1, ..., n$.

(b) Si r, s ocurren en t, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una ocurre dentro de otra. En particular, las distintas ocurrencias de r en t son disjuntas.

(c) Si t' es el resultado de reemplazar una ocurrencia de s en t por r, entonces $t' \in T^\tau$.

Proof. (a) Supongamos la ocurrencia de s comienza en algun t_j. Entonces el Lema 123 nos conduce a que dicha ocurrencia debera estar contenida en t_j. Veamos que la ocurrencia de s no puede ser a partir de un $i \in \{1, ..., |f|\}$. Supongamos lo contrario. Tenemos entonces que s debe ser de la forma $g(s_1, ..., s_m)$ ya que no puede estar en $Var \cup \mathcal{C}$. Notese que $i \neq 1$ ya que en caso contrario s seria un tramo inicial propio de t. Pero entonces g debe ser un tramo final propio de f, lo cual es absurdo. Ya que s no puede comenzar con parentesis o coma, hemos contemplado todos los posibles casos de comienzo de la ocurrencia de s en t.

(b) y (c) pueden probarse por induccion, usando (a). ■

Nota: Es importante notar que si bien no hemos definido en forma presisa el concepto de ocurrencia o de reemplazo de ocurrencias, la prueba del lema anterior es rigurosa en el sentido de que solo usa propiedades del concepto de ocurrencia y reemplazo de ocurrencias las cuales deberan ser comunes a cualquier definicion o formulacion matematica que se hiciera de aquellos conceptos. En este caso, es posible dar una defincion presisa y satisfactoria de dichos conceptos aunque para otros conceptos tales como los de pruebas absolutas de consistencia, aun no se ha encontrado una formulacion matematica adecuada.

Sea τ un tipo. Las palabras de alguna de las siguientes dos formas

$$(t \equiv s), \text{ con } t, s \in T^\tau$$
$$r(t_1, ..., t_n), \text{ con } r \in \mathcal{R}_n,\ n \geq 1 \text{ y } t_1, ..., t_n \in T^\tau$$

seran llamadas *formulas atomicas de tipo τ*.

Dado un tipo τ, definamos los conjuntos de palabras F_k^τ, con $k \geq 0$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
F_0^\tau &= \{\text{formulas atomicas}\} \\
F_{k+1}^\tau &= F_k^\tau \cup \{\neg\varphi : \varphi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \vee \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \\
&\qquad \{(\varphi \wedge \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \rightarrow \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \\
&\qquad\qquad \{(\varphi \leftrightarrow \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \{\forall v\varphi : \varphi \in F_k^\tau, v \in Var\} \cup \\
&\qquad\qquad\qquad \{\exists v\varphi : \varphi \in F_k^\tau, v \in Var\}
\end{aligned}$$

Sea

$$F^\tau = \bigcup_{k \geq 0} F_k^\tau$$

Los elementos de F^τ seran llamados *formulas de tipo* τ. El siguiente lema es la herramienta basica que usaremos para probar propiedades acerca de los elementos de F^τ.

EP

Lemma 126 *Supongamos* $\varphi \in F_k^\tau$*, con* $k \geq 1$*. Entonces* φ *es de alguna de las siguientes formas*
$\varphi = (t \equiv s)$*, con* $t, s \in T^\tau$*.*
$\varphi = r(t_1, ..., t_n)$*, con* $r \in \mathcal{R}_n$*,* $t_1, ..., t_n \in T^\tau$
$\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$*, con* $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$*,* $\varphi_1, \varphi_2 \in F_{k-1}^\tau$
$\varphi = \neg\varphi_1$*, con* $\varphi_1 \in F_{k-1}^\tau$
$\varphi = Qv\varphi_1$*, con* $Q \in \{\forall, \exists\}$*,* $v \in Var$ *y* $\varphi_1 \in F_{k-1}^\tau$*.*

Proof. Induccion en k. ■

N

Lemma 127 *Sea* τ *un tipo.*

(a) Supongamos que Σ *es tal que* $F^\tau \subseteq \Sigma^*$*. Entonces* $del(\varphi) \in Bal$*, para cada* $\varphi \in F^\tau$*.*

(b) Sea $\varphi \in F_k^\tau$*, con* $k \geq 0$*. Existen* $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ *y* $v \in Var\})^*$ *y* $\varphi_1 \in F^\tau$ *tales que* $\varphi = x\varphi_1$ *y* φ_1 *es de la forma* $(\psi_1 \eta \psi_2)$ *o atomica. En particular toda formula termina con el simbolo* $)$*.*

Proof. (b) Induccion en k. El caso $k = 0$ es trivial. Supongamos (b) vale para cada $\varphi \in F_k^\tau$ y sea $\varphi \in F_{k+1}^\tau$. Hay varios casos de los cuales haremos solo dos

CASO $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^\tau$ y $\eta \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
Podemos tomar $x = \varepsilon$ y $\varphi_1 = \varphi$.

CASO $\varphi = Qx_i\psi$, con $\psi \in F_k^\tau$, $i \geq 1$ y $Q \in \{\forall, \exists\}$.
Por HI hay $\bar{x} \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$ y $\psi_1 \in F^\tau$ tales que $\psi = x\psi_1$ y ψ_1 es de la forma $(\gamma_1 \eta \gamma_2)$ o atomica. Entonces es claro que $x = Qx_i\bar{x}$ y $\varphi_1 = \psi_1$ cumplen (b). ■

N

Lemma 128 *Ninguna formula es tramo final propio de una formula atomica, es decir, si* $\varphi = x\psi$*, con* $\varphi \in F_0^\tau$ *y ,*$\psi \in F^\tau$*, entonces* $x = \varepsilon$*.*

Proof. Si φ es de la forma $(t \equiv s)$, entonces $|del(y)|_{(} - |del(y)|_{)} < 0$ para cada tramo final propio y de φ, lo cual termina el caso ya que $del(\psi)$ es balanceada. Supongamos entonces $\varphi = r(t_1, ..., t_n)$. Notese que ψ no puede ser tramo final de $t_1, ..., t_n)$ ya que $del(\psi)$ es balanceada y $|del(y)|_{(} - |del(y)|_{)} < 0$ para cada tramo final y de $t_1, ..., t_n)$. Es decir que $\psi = y(t_1, ..., t_n)$, para algun tramo final y de r. Ya que en ψ no ocurren cuantificadores ni nexos ni el simbolo $\equiv$ el Lema 126 nos dice $\psi = \tilde{r}(s_1, ..., s_m)$, con $\tilde{r} \in \mathcal{R}_m$, $m \geq 1$ y $s_1, ..., s_m \in T^\tau$. Ahora es facil usando un argumento paresido al usado en la prueba del Teorema 124 concluir que $m = n$, $s_i = t_i$, $i = 1, ..., n$ y $\tilde{r}$ es tramo final de r. Por (3) de la definicion de tipo tenemos que $\tilde{r} = r$ lo cual nos dice que $\varphi = \psi$ y $x = \varepsilon$ ■

Lemma 129 *Si $\varphi = x\psi$, con $\varphi, \psi \in F^\tau$ y x sin parentesis, entonces $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$*

Proof. Por induccion en el k tal que $\varphi \in F_k^\tau$. El caso $k = 0$ es probado en el lema anterior. Asumamos que el resultado vale cuando $\varphi \in F_k^\tau$ y veamos que vale cuando $\varphi \in F_{k+1}^\tau$. Mas aun supongamos $\varphi \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$. Primero haremos el caso en que $\varphi = Qv\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $v \in Var$ y $\varphi_1 \in F_k^\tau$. Supongamos $x \neq \varepsilon$. Ya que ψ no comienza con simbolos de v, tenemos que ψ debe ser tramo final de φ_1 lo cual nos dice que hay una palabra x_1 tal que $x = Qvx_1$ y $\varphi_1 = x_1\psi$. Por HI tenemos que $x_1 \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$ con lo cual $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$. El caso en el que $\varphi = \neg\varphi_1$ con $\varphi_1 \in F_k^\tau$, es similar. Note que no hay mas casos posibles ya que φ no puede comenzar con (porque en x no ocurren parentesis por hipotesis ■

Proposition 130 *Si $\varphi, \psi \in F^\tau$ y x, y, z son tales que $\varphi = xy$, $\psi = yz$ y $y \neq \varepsilon$, entonces $z = \varepsilon$ y $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$. En particular ningun tramo inicial propio de una formula es una formula.*

Proof. Ya que φ termina con) tenemos que $del(y) \neq \varepsilon$. Ya que $del(\varphi), del(\psi) \in Bal$ y ademas

$$\begin{aligned} del(\varphi) &= del(x)del(y) \\ del(\psi) &= del(y)del(z) \end{aligned}$$

tenemos que $del(y)$ es tramo inicial y final de palabras balanceadas, lo cual nos dice que

$$|del(y)|_{(} - |del(y)|_{)} = 0$$

Pero esto por (3) del Lema 120 nos dice que $del(x) = \varepsilon$. Similarmente obtenemos que $del(z) = \varepsilon$. Pero ψ termina con) lo cual nos dice que $z = \varepsilon$. Es decir que $\varphi = x\psi$. Por el lema anterior tenemos que $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$ ■

Theorem 131 *(Lectura unica de formulas) Dada $\varphi \in F^\tau$ se da una y solo una de las siguientes:*

(1) $\varphi = (t \equiv s)$, *con* $t, s \in T^\tau$

(2) $\varphi = r(t_1, ..., t_n)$*, con* $r \in \mathcal{R}_n$*,* $t_1, ..., t_n \in T^\tau$

(3) $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$*, con* $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$*,* $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$

(4) $\varphi = \neg\varphi_1$*, con* $\varphi_1 \in F^\tau$

(5) $\varphi = Qv\varphi_1$*, con* $Q \in \{\forall, \exists\}$*,* $\varphi_1 \in F^\tau$ *y* $v \in Var$*.*

Mas aun, en los puntos (1), (2), (3), (4) y (5) tales descomposiciones son unicas.

Proof. Si una formula φ satisface (1), entonces φ no puede contener simbolos del alfabeto $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ lo cual garantiza que φ no puede satisfacer (3). Ademas φ no puede satisfacer (2) o (4) o (5) ya que φ comienza con (. En forma analoga se puede terminar de ver que las propiedades (1),...,(5) son excluyentes.

La unicidad en las descomposiciones de (4) y (5) es obvia. La de (3) se desprende facilmente del lema anterior y la de los puntos (1) y (2) del lema analogo para terminos. ■

7.2 Subformulas

Una formula φ sera llamada una *subformula* (*propia*) de una formula ψ, cuando φ (sea no igual a ψ y) tenga alguna ocurrencia en ψ.

Lemma 132 *Sea* τ *un tipo.*

(a) Las formulas atomicas no tienen subformulas propias.

(b) Si φ *ocurre propiamente en* $(\psi\eta\phi)$*, entonces tal ocurrencia es en* ψ *o en* ϕ*.*

(c) Si φ *ocurre propiamente en* $\neg\psi$*, entonces tal ocurrencia es en* ψ*.*

(d) Si φ *ocurre propiamente en* $Qx_k\psi$*, entonces tal ocurrencia es en* ψ*.*

(e) Si φ_1, φ_2 *ocurren en* φ*, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una contiene a la otra.*

(f) Si λ' *es el resultado de reemplazar alguna ocurrencia de* φ *en* λ *por* ψ*, entonces* $\lambda' \in F^\tau$*.*

Proof. Ejercicio. ■

@@finpagina@@

8 Estructuras

Sea A un conjunto. Por una *operacion n-aria sobre A* entenderemos una funcion cuyo dominio es A^n y cuya imagen esta contenida en A. Por una *relacion n-aria sobre A* entenderemos un subconjunto de A^n.

Sea τ un tipo. Una *estructura o modelo de tipo τ* sera un par $\mathbf{A} = (A, i)$ tal que:

(1) A es un conjunto no vacio llamado el *universo* de $\mathbf{A}$.

(2) i es una funcion con dominio $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, tal que:

  (a) para cada $c \in \mathcal{C}$, $i(c)$ es un elemento de A

  (b) para cada $f \in \mathcal{F}_n$, $i(f)$ es una operacion n-aria sobre A

  (c) para cada $r \in \mathcal{R}_n$, $i(r)$ es una relacion n-aria sobre A.

Sea $\mathbf{A} = (A, i)$ una estructura de tipo τ. Una *asignacion de* $\mathbf{A}$ sera un elemento de $A^{\mathbf{N}} = \{$sucesiones infinitas de elementos de $A\}$. Si $\vec{a} = (a_1, a_2, ...)$ es una asignacion, entonces diremos que a_j *es el valor que $\vec{a}$ le asigna a la variable x_j*.

Dada una estructura $\mathbf{A}$ de tipo τ, un termino $t \in T^\tau$ y una asignacion $\vec{a} = (a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$ definamos recursivamente $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$ de la siguiente manera

(1) Si $t = x_i \in Var$, entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = a_i$

(2) Si $t = c \in \mathcal{C}$, entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = i(c)$

(3) Si $t = f(t_1, ..., t_n)$, con $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$ y $t_1, ..., t_n \in T^\tau$, entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = i(f)(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])$

El elemento $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$ sera llamado el *valor de t en la estructura $\mathbf{A}$ para la asignacion $\vec{a}$*.

EP

Lemma 133 *Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y sea $t \in T^\tau$. Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que $a_i = b_i$, cada vez que x_i ocurra en t. Entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$.*

Proof. Sea

- Teo$_k$: El lema vale para $t \in T_k^\tau$.

Teo$_0$ es facil de probar. Veamos Teo$_k$ $\Rightarrow$Teo$_{k+1}$. Supongamos $t \in T_{k+1}^\tau - T_k^\tau$ y sean $\vec{a}, \vec{b}$ asignaciones tales que $a_i = b_i$, cada vez que x_i ocurra en t. Notese que $t = f(t_1, ..., t_n)$, con $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$ y $t_1, ..., t_n \in T^\tau$. Notese que para cada

$j = 1, ..., n$, tenemos que $a_i = b_i$, cada vez que x_i ocurra en t_j, lo cual por Teo$_k$ nos dice que

$$t_j^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t_j^{\mathbf{A}}[\vec{b}],\ j = 1, ..., n$$

Se tiene entonces que

$$\begin{array}{rcl} t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] & = & i(f)(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \text{ (por def de } t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\ & = & i(f)(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{b}], ..., t_n^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) \\ & = & t^{\mathbf{A}}[\vec{b}] \text{ (por def de } t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \end{array}$$

■

Dada una asignacion $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$ y $a \in A$, con $\downarrow_i^a (\vec{a})$ denotaremos la asignacion que resulta de reemplazar en $\vec{a}$ el i-esimo elemento por a. A continuacion definiremos recursivamente la relacion $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$, donde $\mathbf{A}$ es una estructura de tipo τ, $\vec{a}$ es una asignacion y $\varphi \in F^{\tau}$. Escribiremos $\mathbf{A} \not\models \varphi[\vec{a}]$ para expresar que no se da $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$.

(1) Si $\varphi = (t \equiv s)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $t^A[\vec{a}] = s^A[\vec{a}]$

(2) Si $\varphi = r(t_1, ..., t_m)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $(t_1^A[\vec{a}], ..., t_m^A[\vec{a}]) \in i(r)$

(3) Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$

(4) Si $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ o $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$

(5) Si $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$ o $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$

(6) Si $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si ya sea se dan $\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$ o se dan $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \not\models \varphi_2[\vec{a}]$

(7) Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$

(8) Si $\varphi = \forall x_i \varphi_1$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si para cada $a \in A$, se da que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_i^a (\vec{a})]$

(9) Si $\varphi = \exists x_i \varphi_1$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si hay un $a \in A$ tal que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_i^a (\vec{a})]$

Cuando se de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ diremos que *la estructura* $\mathbf{A}$ *satisface* φ *en la asignacion* $\vec{a}$ y en tal caso diremos que φ *es verdadera en* $\mathbf{A}$ *para la asignacion* $\vec{a}$. Cuando no se de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ diremos que *la estructura* $\mathbf{A}$ *no satisface* φ *en la asignacion* $\vec{a}$ y en tal caso diremos que φ *es falsa en* $\mathbf{A}$ *para la asignacion* $\vec{a}$. Tambien hablaremos del *valor de verdad de* φ *en* $\mathbf{A}$ *para la asignacion* $\vec{a}$ el cual sera igual a 1 si se da $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ y 0 en caso contrario.

8.1 Variables libres

Definamos recursivamente el predicado

$$\text{"}v \textit{ ocurre libremente en } \varphi \textit{ a partir de } i\text{"} : \omega \times Var \times F^\tau \to \omega$$

de la siguiente manera:

(1) Si φ es atomica, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i sii v ocurre en φ a partir de i

(2) Si $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i sii se da alguna de las siguientes

  (a) v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - 1$

  (b) v ocurre libremente en φ_2 a partir de $i - |(\varphi_1 \eta|$

(3) Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i sii v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - 1$

(4) Si $\varphi = Qw\varphi_1$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de i sii $v \neq w$ y v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - |Qw|$

Diremos que "v *ocurre acotadamente en* φ *a partir de* i" cuando v ocurre en φ a partir de i y v no ocurre libremente en φ a partir de i. Dada una formula φ, sea

$$Li(\varphi) = \{v \in Var : \text{hay un } i \text{ tal que } v \text{ ocurre libremente en } \varphi \text{ a partir de } i\}.$$

Los elementos de $Li(\varphi)$ seran llamados *variables libres de* φ. Una *sentencia* sera una formula φ tal que $Li(\varphi) = \emptyset$. Usaremos S^τ para denotar el conjunto de las sentencias de tipo τ.

Lemma 134 *1.*

(a) $Li((t \equiv s)) = \{v \in Var : v \textit{ ocurre en } t \textit{ o } v \textit{ ocurre en } s\}$.

(b) $Li(r(t_1,...,t_n)) = \{v \in Var : v \text{ ocurre en algun } t_i\}$.

(c) $Li(\neg\varphi) = Li(\varphi)$

(d) $Li((\varphi\eta\psi)) = Li(\varphi) \cup Li(\psi)$.

(e) $Li(Qx_j\varphi) = Li(\varphi) - \{x_j\}$.

Proof. (a) y (b) son triviales de las definiciones, teniendo en cuenta que si una variable v ocurre en $(t \equiv s)$ (resp. en $r(t_1,...,t_n)$) entonces v ocurre en t o v ocurre en s (resp.v ocurre en algun t_i)

(d) Supongamos $v \in Li((\varphi\eta\psi))$, entonces hay un i tal que v ocurre libremente en $(\varphi\eta\psi)$ a partir de i. Por definicion tenemos que ya sea v ocurre libremente en φ a partir de $i-1$ o v ocurre libremente en ψ a partir de $i-|(\varphi\eta|$, con lo cual $v \in Li(\varphi) \cup Li(\psi)$

Supongamos ahora que $v \in Li(\varphi) \cup Li(\psi)$. S.p.d.g. supongamos $v \in Li(\psi)$. Por definicion tenemos que hay un i tal que v ocurre libremente en ψ a partir de i. Pero notese que esto nos dice por definicion que v ocurre libremente en $(\varphi\eta\psi)$ a partir de $i+|(\varphi\eta|$ con lo cual $v \in Li((\varphi\eta\psi))$.

(c) es similar a (d)

(e) Supongamos $v \in Li(Qx_j\varphi)$, entonces hay un i tal que v ocurre libremente en $Qx_j\varphi$ a partir de i. Por definicion tenemos que $v \neq x_j$ y v ocurre libremente en φ a partir de $i-|Qx_j|$, con lo cual $v \in Li(\varphi) - \{x_j\}$

Supongamos ahora que $v \in Li(\varphi) - \{x_j\}$. Por definicion tenemos que hay un i tal que v ocurre libremente en φ a partir de i. Ya que $v \neq x_j$ esto nos dice por definicion que v ocurre libremente en $Qx_j\varphi$ a partir de $i+|Qx_j|$, con lo cual $v \in Li(Qx_j\varphi)$. ■

EP

Lemma 135 *Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$. Entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$*

Proof. Probaremos por induccion en k que el lema vale para cada $\varphi \in F_k^\tau$. El caso $k = 0$ se desprende del Lema 133. Veamos que Teo$_k$ implica Teo$_{k+1}$. Sea $\varphi \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$. Hay varios casos:

CASO $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.

Ya que $Li(\varphi_i) \subseteq Li(\varphi)$, $i = 1, 2$, Teo$_k$ nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi_i[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi_i[\vec{b}]$, para $i = 1, 2$. Se tiene entonces que

$$\begin{array}{l}
\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \\
\quad\Updownarrow \text{ (por (3) en la def de } \mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]) \\
\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}] \text{ y } \mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}] \\
\quad\Updownarrow \text{ (por Teo}_k) \\
\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{b}] \text{ y } \mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{b}] \\
\quad\Updownarrow \text{ (por (3) en la def de } \mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]) \\
\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]
\end{array}$$

CASO $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.
Es completamente similar al anterior.

CASO $\varphi = \neg\varphi_1$.
Es completamente similar al anterior.

CASO $\varphi = \forall x_j \varphi_1$.
Supongamos $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$. Entonces por (8) en la def de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ se tiene que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a(\vec{a})]$, para todo $a \in A$. Notese que $\downarrow_j^a(\vec{a})$ y $\downarrow_j^a(\vec{b})$ coinciden en toda x_i de $x_i \in Li(\varphi_1) \subseteq Li(\varphi_1) \cup \{x_j\}$, con lo cual por Teo$_k$ se tiene que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a(\vec{b})]$, para todo $a \in A$, lo cual por (8) en la def de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$. La prueba de que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$ implica que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ es similar.

CASO $\varphi = \exists x_j \varphi_1$.
Es similar al anterior. ■

E

Corollary 136 *Si φ es una sentencia, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$, cualesquiera sean las asignaciones $\vec{a}, \vec{b}$.*

En virtud del corolario anterior tenemos que el valor de verdad de una sentencia φ en una estructura dada $\mathbf{A}$ para una asignacion $\vec{a}$ no depende de $\vec{a}$, es decir este valor es ya sea 1 para todas las asignaciones o 0 para todas las asignaciones. En el primer caso diremos que *φ es verdadera en* $\mathbf{A}$ y en el segundo caso diremos que *φ es falsa en* $\mathbf{A}$

Una sentencia de tipo τ sera llamada *universalmente valida* si es verdadera en cada modelo de tipo τ.

8.2 Equivalencia de formulas

Dadas $\varphi, \psi \in F^\tau$ diremos que φ y ψ son *equivalentes* cuando se de la siguiente condicion

- $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \psi[\vec{a}]$, para cada modelo de tipo τ, $\mathbf{A}$ y cada $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$

Escribiremos $\varphi \sim \psi$ cuando φ y ψ sean equivalentes. Notese que $\sim$ es una relacion de equivalencia.

EP

Lemma 137 *1.*

(a) Si $Li(\phi) \cup Li(\psi) \subseteq \{x_{i_1}, ..., x_{i_n}\}$, entonces $\phi \sim \psi$ si y solo si la sentencia $\forall x_{i_1} ... \forall x_{i_n} (\phi \leftrightarrow \psi)$ es universalmente valida.

(b) Si $\phi_i \sim \psi_i$, $i = 1, 2$, entonces $\neg\phi_1 \sim \neg\psi_1$, $(\phi_1 \eta \phi_2) \sim (\psi_1 \eta \psi_2)$ y $Qv\phi_1 \sim Qv\psi_1$.

(c) Si $\phi \sim \psi$ y α' es el resultado de reemplazar en una formula α algunas (posiblemente 0) ocurrencias de ϕ por ψ, entonces $\alpha \sim \alpha'$.

Proof. (a) Tenemos que

$$
\begin{array}{l}
\varphi \sim \psi \\
\quad \Updownarrow \ \text{(por (6) de la def de } \models \text{)} \\
\mathbf{A} \models (\phi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}], \text{ para todo } \mathbf{A} \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbf{N}} \\
\quad \Updownarrow \\
\mathbf{A} \models (\phi \leftrightarrow \psi)[\downarrow_{i_n}^{a} (\vec{a})], \text{ para todo } \mathbf{A}, a \in A \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbf{N}} \\
\quad \Updownarrow \text{(por (8) de la def de } \models \text{)} \\
\mathbf{A} \models \forall x_{i_n} (\phi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}], \text{ para todo } \mathbf{A} \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbf{N}} \\
\quad \Updownarrow \\
\mathbf{A} \models \forall x_{i_n} (\phi \leftrightarrow \psi)[\downarrow_{i_{n-1}}^{a} (\vec{a})], \text{ para todo } \mathbf{A}, a \in A \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbf{N}} \\
\quad \Updownarrow \ \text{(por (8) de la def de } \models \text{)} \\
\mathbf{A} \models \forall x_{i_{n-1}} \forall x_{i_n} (\phi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}], \text{ para todo } \mathbf{A} \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbf{N}} \\
\quad \Updownarrow \\
\quad\ \vdots \\
\quad \Updownarrow \\
\mathbf{A} \models \forall x_{i_1} ... \forall x_{i_n} (\phi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}], \text{ para todo } \mathbf{A} \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbf{N}} \\
\quad \Updownarrow \\
\forall x_{i_1} ... \forall x_{i_n} (\phi \leftrightarrow \psi) \text{ es universalmente valida}
\end{array}
$$

(b) Es dejado al lector.
(c) Por induccion en el k tal que $\alpha \in F_k^{\tau}$. ■
@@finpagina@@

8.3 Homomorfismos

Dado un modelo de tipo τ, $\mathbf{A} = (A, i)$, para cada $s \in \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, usaremos $s^{\mathbf{A}}$ para denotar a $i(s)$. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ modelos de tipo τ. Una funcion $F : A \to B$ sera un *homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$ si se cumplen las siguientes

(1) $F(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$, para todo $c \in \mathcal{C}$,

(2) $F(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathbf{B}}(F(a_1), ..., F(a_n))$, para cada $f \in \mathcal{F}_n$, $a_1, ..., a_n \in A$.

(3) $(a_1, ..., a_n) \in r^{\mathbf{A}}$ implica $(F(a_1), ..., F(a_n)) \in r^{\mathbf{B}}$, para todo $r \in \mathcal{R}_n$, $a_1, ..., a_n \in A$.

Un *isomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$ sera un un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ el cual sea biyectivo y cuya inversa sea un homomorfismo de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$. Diremos que los modelos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son *isomorfos* (en simbolos: $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$), cuando haya un isomorfismo F de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$. Diremos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *es un homomorfismo* para expresar que F es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$. Analogamente diremos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *es un isomorfismo* para expresar que F es un isomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$.

Ejercicio: Pruebe que la relacion $\cong$ es reflexiva, transitiva y simetrica.

Lemma 138 *Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo. Entonces*

$$F(t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, ...)] = t^{\mathbf{B}}[F(a_1), F(a_2), ...)]$$

para cada $t \in T^\tau$, $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$.

Proof. Sea

- Teo$_k$: Si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, entonces

$$F(t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, ...)] = t^{\mathbf{B}}[F(a_1), F(a_2), ...)]$$

para cada $t \in T_k^\tau$, $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$.

Teo$_0$ es trivial. Veamos que Teo$_k$ implica Teo$_{k+1}$. Supongamos que vale Teo$_k$ y supongamos $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, $t \in T_{k+1}^\tau - T_k^\tau$ y $\vec{a} = (a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$. Denotemos $(F(a_1), F(a_2), ...)$ con $F(\vec{a})$. Por Lema 119, $t = f(t_1, ..., t_n)$, con $n \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_n$ y $t_1, ..., t_n \in T_k^\tau$. Tenemos entonces

$$\begin{array}{rcl} F(t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) & = & F(f(t_1, ..., t_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\ & = & F(f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])) \\ & = & f^{\mathbf{B}}(F(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}]), ..., F(t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])) \\ & = & f^{\mathbf{B}}(t_1^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})], ..., t_n^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})])) \\ & = & f(t_1, ..., t_n)^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})] \\ & = & t^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})] \end{array}$$

■

Lemma 139 *Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^\tau$. Entonces*

$$\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, ...)] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), ...)]$$

para cada $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$. En particular $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ satisfacen las mismas sentencias de tipo τ.

8.4 Algebras

Un tipo τ sera llamado *algebraico* si no contiene nombres de relacion. Un modelo de un tipo algebraico τ sera llamado una *τ-algebra*. Ejemplos clasicos de τ-algebras son los grupos ($\tau = (\{e\}, \{.^2\}, \emptyset, a)$), los reticulados, los reticulados acotados, las algebras de Boole, etc.

Una propiedad particular de los homomorfismos de τ-algebras es la siguiente

Lemma 140 *Supongamos τ es algebraico. Si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo.*

Proof. Solo falta probar que F^{-1} es un homomorfismo. Supongamos que $c \in \mathcal{C}$. Ya que $F(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$, tenemos que $F^{-1}(c^{\mathbf{B}}) = c^{\mathbf{A}}$, por lo cual F^{-1} cumple (1) de la definicion de homomorfismo. Supongamos ahora que $f \in \mathcal{F}_n$ y sean $b_1, ..., b_n \in B$. Sean $a_1, ..., a_n \in A$ tales que $F(a_i) = b_i$, $i = 1, ..., n$. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} F^{-1}(f^{\mathbf{B}}(b_1, ..., b_n)) & = & F^{-1}(f^{\mathbf{B}}(F(a_1), ..., F(a_n))) \\ & = & F^{-1}(F(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(F^{-1}(b_1), ..., F^{-1}(b_n)) \end{array}$$

por lo cual F^{-1} satisface (2) de la definicion de homomorfismo ■

8.4.1 Subalgebras

Dadas τ-algebras $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, diremos que $\mathbf{A}$ es una *subalgebra de* $\mathbf{B}$ cuando se den las siguientes condiciones

(1) $A \subseteq B$

(2) $c^{\mathbf{A}} = c^{\mathbf{B}}$, para cada $c \in \mathcal{C}$

(3) $f^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{B}} |_{A^n}$, para cada $f \in \mathcal{F}_n$.

Por ejemplo sea $\tau = ($

Si $\mathbf{B}$ es una τ-algebra, entonces un *subuniverso de* $\mathbf{B}$ es un conjunto A el cual cumple las siguientes condiciones:

(1) $\emptyset \neq A \subseteq B$

(2) $c^{\mathbf{B}} \in A$, para cada $c \in \mathcal{C}$

(3) $f^{\mathbf{B}}(a_1, ..., a_n) \in A$, para cada $(a_1, ..., a_n) \in A^n$, $f \in \mathcal{F}_n$

Es importante notar que si bien los conceptos de subalgebra y subuniverso estan muy relacionados, se trata de objetos diferentes ya que las subalgebras de un algebra dada son estructuras de tipo τ y por lo tanto son pares ordenados y los subuniversos de un algebra dada son ciertos subconjuntos por lo cual no son pares ordenados. A continuacion presisaremos la relacion que hay entre estos dos conceptos. Notese que dado un subuniverso A de una τ-algebra $\mathbf{B}$ podemos definir en forma natural una τ-algebra $\mathbf{A}$ de la siguiente manera:

(1) Universo de $\mathbf{A} = A$

(2) $c^{\mathbf{A}} = c^{\mathbf{B}}$, para cada $c \in \mathcal{C}$

(3) $f^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{B}} |_{A^n}$, para cada $f \in \mathcal{F}_n$.

Es facil chequear que el algebra $\mathbf{A}$ asi definida es una subalgebra de $\mathbf{B}$. Lo anterior nos muestra que los subuniversos de un algebra dada son precisamente los universos de las distintas subalgebras de dicha algebra.

Lemma 141 *Supongamos τ es algebraico. Si $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ es un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $\mathbf{B}$*

Proof. Ya que $A \neq \emptyset$, tenemos que $I_F \neq \emptyset$. Es claro que $c^{\mathbf{B}} = F(c^{\mathbf{A}}) \in I_F$, para cada $c \in \mathcal{C}$. Sea $f \in \mathcal{F}_n$ y sean $b_1, ..., b_n \in I_F$ Sean $a_1, ..., a_n$ tales que $F(a_i) = b_i$, $i = 1, ..., n$. Tenemos que

$$f^{\mathbf{B}}(b_1, ..., b_n) = f^{\mathbf{B}}(F(a_1), ..., F(a_n)) = F(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)) \in I_F$$

por lo cual I_F es cerrada bajo $f^{\mathbf{B}}$. ■

8.4.2 Congruencias

Sea $\mathbf{A}$ una τ-algebra. Una *congruencia sobre* $\mathbf{A}$ es una relacion de equivalencia θ sobre A la cual cumple que

$$a_1 \theta b_1, ..., a_n \theta b_n \text{ implica } f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) \theta f^{\mathbf{A}}(b_1, ..., b_n)$$

cualesquiera sean $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in A$ y $f \in \mathcal{F}_n$.

Dada una congruencia θ sobre $\mathbf{A}$ se puede formar una nueva algebra $\mathbf{A}/\theta$ de la siguiente manera:

(1) Universo de $\mathbf{A}/\theta = A/\theta = \{a/\theta : a \in A\} = \{$clases de equivalencia de $\theta\}$

(2) $f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, ..., a_n/\theta) = f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)/\theta$, para cada $f \in \mathcal{F}_n$.

(3) $c^{\mathbf{A}/\theta} = c^{\mathbf{A}}/\theta$, para cada $c \in \mathcal{C}$

$\mathbf{A}/\theta$ sera llamada el *algebra cociente de* $\mathbf{A}$ *por* θ.

Lemma 142 *Supongamos τ es algebraico. Si $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ es un homomorfismo, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre* $\mathbf{A}$

Proof. Sea $f \in \mathcal{F}_n$. Supongamos que $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in A$ son tales que $a_1 \ker F b_1, ..., a_n \ker F b_n$. Tenemos entonces que

$$\begin{array}{rcl} F(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)) & = & f^{\mathbf{B}}(F(a_1), ..., F(a_n)) \\ & = & f^{\mathbf{B}}(F(b_1), ..., F(b_n)) \\ & = & F(f^{\mathbf{A}}(b_1, ..., b_n)) \end{array}$$

lo cual nos dice que $f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) \ker F f^{\mathbf{A}}(b_1, ..., b_n)$ ■

Al mapeo

$$\begin{array}{rcl} A & \rightarrow & A/\theta \\ a & \rightarrow & a/\theta \end{array}$$

lo llamaremos la *proyeccion canonica* y lo denotaremos con π_θ.

Lemma 143 *$\pi_\theta : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\theta$ es un homomorfismo cuyo nucleo es θ*

Proof. Sea $c \in \mathcal{C}$. Tenemos que

$$\pi_\theta(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{A}}/\theta = c^{\mathbf{A}/\theta}$$

Sea $f \in \mathcal{F}_n$, con $n \geq 1$ y sean $a_1, ..., a_n \in A$. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \pi_\theta(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)) & = & f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)/\theta \\ & = & f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, ..., a_n/\theta) \\ & = & f^{\mathbf{A}/\theta}(\pi_\theta(a_1), ..., \pi_\theta(a_n)) \end{array}$$

con lo cual π_θ es un homomorfismo. Es trivial que $\ker \pi_\theta = \theta$ ■

Corollary 144 *Para cada $t \in T^\tau$, $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$, se tiene que $t^{\mathbf{A}/\theta}[(a_1/\theta, a_2/\theta, ...)] = t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, ...)]/\theta$.*

Proof. Ya que π_θ es un homomorfismo, se puede aplicar el Lema 138. ■

Theorem 145 *Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo sobreyectivo. Entonces*

$$\begin{array}{rcl} A/\ker F & \to & B \\ a/\ker F & \to & F(a) \end{array}$$

define sin ambiguedad una funcion $\bar{F}$ la cual es un isomorfismo de $\mathbf{A}/\ker F$ en $\mathbf{B}$

Proof. Notese que la definicion de $\bar{F}$ es inambigua ya que si $a/\ker F = a'/\ker F$, entonces $F(a) = F(a')$. Ya que F es sobre, tenemos que $\bar{F}$ lo es. Supongamos que $\bar{F}(a/\ker F) = \bar{F}(a'/\ker F)$. Claramente entonces tenemos que $F(a) = F(a')$, lo cual nos dice que $a/\ker F = a'/\ker F$. Esto prueba que $\bar{F}$ es inyectiva. Para ver que $\bar{F}$ es un isomorfismo, por el Lema 140, basta con ver que $\bar{F}$ es un homomorfismo. Sea $c \in \mathcal{C}$. Tenemos que

$$\bar{F}(c^{\mathbf{A}/\ker F}) = \bar{F}(c^{\mathbf{A}}/\ker F) = F(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$$

Sea $f \in \mathcal{F}_n$. Sean $a_1, ..., a_n \in A$. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \bar{F}(f^{\mathbf{A}/\ker F}(a_1/\ker F, ..., a_n/\ker F)) & = & \bar{F}(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)/\ker F) \\ & = & F(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)) \\ & = & f^{\mathbf{B}}(F(a_1), ..., F(a_n)) \\ & = & f^{\mathbf{B}}(\bar{F}(a_1/\ker F), ..., \bar{F}(a_n/\ker F)) \end{array}$$

con lo cual $\bar{F}$ cunple (2) de la definicion de homomorfismo ■

Esta secci· n no va

8.4.3 Producto directo de algebras

Dadas τ-algebras $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, definamos una nueva τ-algebra $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, de la siguiente manera

(1) Universo de $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = A \times B$

(2) $c^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}} = (c^{\mathbf{A}}, c^{\mathbf{B}})$, para cada $c \in \mathcal{C}$

(3) $f^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) = (f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n), f^{\mathbf{B}}(b_1, ..., b_n))$, para cada $f \in \mathcal{F}_n$

Llamaremos a $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ el *producto directo* de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

Los mapeos

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 : A \times B & \rightarrow & A \\ (a,b) & \rightarrow & a \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \pi_2 : A \times B & \rightarrow & B \\ (a,b) & \rightarrow & b \end{array}$$

seran llamados las *proyecciones canonicas* asociadas al producto $A \times B$

Lemma 146 *Los mapeos* $\pi_1 : \mathbf{A} \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ *y* $\pi_2 : \mathbf{A} \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ *son homomorfismos*

Proof. Veamos que π_1 es un homomorfismo. Primero notese que si $c \in \mathcal{C}$, entonces

$$\pi_1(c^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}) = \pi_1((c^{\mathbf{A}}, c^{\mathbf{B}})) = c^{\mathbf{A}}$$

Sea $f \in \mathcal{F}_n$, con $n \geq 1$ y sean $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n) \in A \times B$. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \pi_1(f^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) & = & \pi_1((f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n), f^{\mathbf{B}}(b_1, ..., b_n)) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(\pi_1(a_1, b_1), ..., \pi_1(a_n, b_n)) \end{array}$$

con lo cual hemos probado que π_1 cumple (2) de la definicion de homomorfismo
■

Lemma 147 *Para cada* $t \in T^\tau$, $((a_1, b_1), (a_2, b_2), ...) \in (A \times B)^{\mathbf{N}}$, *se tiene que* $t^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}[((a_1, b_1), (a_2, b_2), ...)] = (t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, ...)], t^{\mathbf{B}}[(b_1, b_2, ...)])$

8.5 Dos teoremas de reemplazo

Si t es un termino de tipo τ, entonces escribiremos $t =_d t(v_1, ..., v_n)$ para declarar que $v_1, ..., v_n$ son variables distintas tales que toda variable que ocurre en t pertenece a $\{v_1, ..., v_n\}$ (no necesariamente toda v_j debe ocurrir en t). El uso de declaraciones de la forma $t =_d t(v_1, ..., v_n)$ sera muy util cuando se convina con ciertas convenciones notacionales que describiremos a continuacion.

Convencion Notacional 1: Cuando hayamos hecho la declaracion $t =_d t(v_1, ..., v_n)$, si $P_1, ..., P_n$ son palabras cualesquiera (no necesariamente terminos), entonces $t(P_1, ..., P_n)$ denotara la palabra que resulta de reemplazar (simultaneamente) cada ocurrencia de v_1 en t, por P_1, cada ocurrencia de v_2 en t, por P_2, etc.

Notese que cuando las palabras $P_i's$ son terminos, $t(P_1, ..., P_n)$ es un termino (Lema 125). Ademas notese que en esta convencion notacional, el orden de las variables $v_1, ..., v_n$ es clave. Por ejemplo si $\tau = (\emptyset, \{\mathrm{FU}\}, \emptyset, \{(\mathrm{FU}, 2)\})$ y $t = \mathrm{FU}(\mathrm{FU}(x_2, x_{16}), x_3)$ y declaramos $t =_d t(x_3, x_2, x_{16})$, entonces $t(\$\$, \&\$\&, @@)$ denotara la palabra $\mathrm{FU}(\mathrm{FU}(\&\$\&, @@), \$\$)$. Pero si declaramos $t =_d t(x_{16}, x_3, x_2)$, entonces $t(\$\$, \&\$\&, @@)$ denotara la palabra $\mathrm{FU}(\mathrm{FU}(@@, \$\$), \&\$\&)$.

Convencion Notacional 2: Cuando hayamos declarado $t =_d t(v_1, ..., v_n)$, si $\mathbf{A}$ es un modelo de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, entonces con $t^{\mathbf{A}}[a_1..., a_n]$ denotaremos al elemento $t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$, donde $\vec{b}$ es una asignacion tal que a cada v_i le asigna el valor a_i. (Notese que esta notacion es inhambigua gracias al Lema 133.)

Nuevamente cabe destacar que en esta convencion notacional, el orden de las variables $v_1, ..., v_n$ es clave. Por ejemplo si τ y t son los dados en el ejemplo anterior y $\mathbf{A}$ es dado por $A = \{1, 2, 3\}$ y $\mathrm{FU}^{\mathbf{A}}(i, j) = j$, para cada $i, j \in A$, tenemos que $t^{\mathbf{A}}[2, 1, 3] = 2$ si declaramos $t =_d t(x_3, x_2, x_{16})$, pero $t^{\mathbf{A}}[2, 1, 3] = 1$ si declaramos $t =_d t(x_{16}, x_3, x_2)$.

Para establecer nuestra Convencion Notacional 3, debemos antes enunciar un lema clave el cual el lector no tendra inconvenientes en probar.

EP

Lemma 148 *Sea τ un tipo cualquiera y supongamos $t \in T^\tau$. Si $t =_d t(v_1, ..., v_n)$, entonces se da alguna de las siguientes*

(1) $t = c$, para algun $c \in \mathcal{C}$

(2) $t = v_j$, para algun j

(3) $t = f(t_1, ..., t_m)$, con $f \in \mathcal{F}_m$ y $t_1, ..., t_m \in T^\tau_{k-1}$ tales que las variables que ocurren en cada uno de ellos estan en $\{v_1, ..., v_n\}$

Proof. Rutina ■

Convencion Notacional 3: Cuando hayamos declarado $t =_d t(v_1, ..., v_n)$ y se el caso (3) del Lema 148 supondremos tacitamente que tambien hemos hecho las declaraciones $t_1 =_d t_1(v_1, ..., v_n), ..., t_m =_d t_m(v_1, ..., v_n)$.

Cabe destacar que esta ultima convencion notacional junto con la Convencion Notacional 1, nos dice que cuando se de el caso (3) del Lema 148, si $P_1, ..., P_n$ son palabras cualesquiera, entonces $t(P_1, ..., P_n) = f(t_1(P_1, ..., P_n), ..., t_m(P_1, ..., P_n))$.

El siguiente lema se basa en la Convencion Notacional 3 y nos permite darle caracter recursivo a la notacion $t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]$.

Lemma 149 *Sea τ un tipo cualquiera y $t \in T^\tau$. Supongamos $t =_d t(v_1, ..., v_n)$. Sea* $\mathbf{A}$ *un modelo de tipo τ. Sean $a_1, ..., a_n \in A$. Se tiene que:*

(1) Si $t = c$, entonces $t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n] = c^{\mathbf{A}}$

(2) Si $t = v_j$, entonces $t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n] = a_j$

(3) Si $t = f(t_1, ..., t_m)$, con $f \in \mathcal{F}_m$ y $t_1, ..., t_m \in T^\tau$, entonces

$$t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n] = f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n], ..., t_m^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n])$$

Proof. (1) y (2) son triviales. (3). Sea $\vec{b}$ una asignacion tal que a cada v_i le asigna el valor a_i. Por definicion tenemos que

$$\begin{array}{rcl} t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n] & = & t^{\mathbf{A}}[\vec{b}] \text{ (por def. de } t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{b}], ..., t_m^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) \text{ (por def. de } t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n], ..., t_m^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]) \text{ (por def. de cada } t_i^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]) \end{array}$$

■

El lema anterior es un caso particular del siguiente:

Theorem 150 *(De reemplazo para terminos)Supongamos $t =_d t(w_1, ..., w_k)$, $s_1 =_d s_1(v_1, ..., v_n), ..., s_k =_d s_k(v_1, ..., v_n)$. Todas las variables de $t(s_1, ..., s_k)$ estan en $\{v_1, ..., v_n\}$ y si declaramos $t(s_1, ..., s_k) =_d t(s_1, ..., s_k)(v_1, ..., v_n)$, entonces para cada estructura* $\mathbf{A}$ *y $a_1, ..., a_n \in A$, se tiene que*

$$t(s_1, ..., s_k)^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n] = t^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n], ..., s_k^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]].$$

Proof. Por induccion en el l tal que $t \in T_l^\tau$. El caso $l = 0$ es dejado al lector. Supongamos entonces que el teorema vale siempre que $t \in T_l^\tau$ y veamos que entonces vale cuando $t \in T_{l+1}^\tau - T_l^\tau$. Por el Lema 148 hay $f \in \mathcal{F}_m$ y $t_1, ..., t_m$ terminos tales $t = f(t_1, ..., t_m)$ y las variables que ocurren en cada t_i estan en $\{w_1, ..., w_k\}$. Por la unicidad de la lectura de terminos tenemos que $t_1, ..., t_m \in T_l^\tau$. Notese que por nuestra Convencion Notacional 3 asumimos ya hechas las declaraciones

$$t_1 =_d t_1(w_1, ..., w_k), ..., t_m =_d t_m(w_1, ..., w_k)$$

Por HI tenemos que las variables de cada $t_i(s_1, ..., s_k)$ estan en $\{v_1, ..., v_n\}$, lo cual nos permite hacer las siguientes declaraciones:

$$t_i(s_1, ..., s_k) =_d t_i(s_1, ..., s_k)(v_1, ..., v_n), \ i = 1, ..., m$$

Por HI tenemos entonces que

$$t_i(s_1, ..., s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t_i^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]], \ i = 1, ..., m$$

Ya que las variables de cada $t_i(s_1, ..., s_k)$ estan en $\{v_1, ..., v_n\}$, tenemos que las variables de $t(s_1, ..., s_k) = f(t_1(s_1, ..., s_k), ..., t_m(s_1, ..., s_k))$ estan en $\{v_1, ..., v_n\}$. Declaremos entonces $t(s_1, ..., s_k) =_d t(s_1, ..., s_k)(v_1, ..., v_n)$. Solo nos falta probar que

$$t(s_1, ..., s_k)^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n] = t^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n], ..., s_k^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]].$$

lo cual se detalla a continuacion

$$\begin{array}{rcl} t(s_1, ..., s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] & = & f(t_1(s_1, ..., s_k), ..., t_m(s_1, ..., s_k))^{\mathbf{A}}[\vec{a}] \\ & = & f^{\mathbf{A}}(t_1(s_1, ..., s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_m(s_1, ..., s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]], ..., t_m^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]]) \\ & = & t^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]] \end{array}$$

■

@@finpagina@@

Si φ es una formula de tipo τ, entonces escribiremos $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$ para declarar que $v_1, ..., v_n$ son variables distintas tales que $Li(\varphi) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$. Tal como para el caso de terminos, el uso de declaraciones de la forma $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$ sera muy util cuando se convina con ciertas convenciones notacionales que describiremos a continuacion.

Convencion Notacional 4: Cuando hayamos hecho la declaracion $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, si $P_1, ..., P_n$ son palabras cualesquiera, entonces $\varphi(P_1, ..., P_n)$ denotara la palabra que resulta de reemplazar (simultaneamente) cada ocurrencia libre de v_1 en φ, por P_1, cada ocurrencia libre de v_2 en φ, por P_2, etc.

Notese que cuando las palabras $P_i's$ son terminos, $\varphi(P_1, ..., P_n)$ es una formula. Ademas notese que tal como para el caso de terminos, en esta convencion notacional, el orden de las variables $v_1, ..., v_n$ es clave. Es facil dar el ejemplo analogo al dado para terminos.

Convencion Notacional 5: Cuando hayamos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, si $\mathbf{A}$ es un modelo de tipo τ y $a_1, ..., a_n \in A$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1..., a_n]$ significara que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$, donde $\vec{b}$ es una asignacion tal que a cada v_i le asigna el valor a_i. (Notese que esta definicion es inambigua gracias al Lema 135). En gral $\mathbf{A} \not\models \varphi[a_1, ..., a_n]$ significara que no sucede $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$

Nuevamente cabe destacar que en esta convencion notacional, el orden de las variables $v_1, ..., v_n$ es clave y dejamos al lector encontrar un ejemplo donde esto se vea claramente. Para establecer nuestra Convencion Notacional 6, debemos antes enunciar un lema clave el cual el lector no tendra inconvenientes en probar.

EP **Lemma 151** *Sea τ un tipo cualquiera y $\varphi \in F^\tau$. Supongamos $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$. Entonces se una y solo una de las siguientes:*

(1) $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$, unicos y tales que las variables que ocurren en t o en s estan todas en $\{v_1, ..., v_n\}$

(2) $\varphi = r(t_1, ..., t_m)$, *con* $r \in \mathcal{R}_m$ *y* $t_1, ..., t_m \in T^\tau$, *unicos y tales que las variables que ocurren en cada* t_i *estan todas en* $\{v_1, ..., v_n\}$

(3) $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, *con* $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, *unicas y tales que* $Li(\varphi_1) \cup Li(\varphi_2) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$

(4) $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, *con* $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, *unicas y tales que* $Li(\varphi_1) \cup Li(\varphi_2) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$

(5) $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, *con* $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, *unicas y tales que* $Li(\varphi_1) \cup Li(\varphi_2) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$

(6) $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, *con* $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, *unicas y tales que* $Li(\varphi_1) \cup Li(\varphi_2) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$

(7) $\varphi = \neg\varphi_1$, *con* $\varphi_1 \in F^\tau$, *unica y tal que* $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$

(8) $\varphi = \forall v_j \varphi_1$, *con* $v_j \in \{v_1, ..., v_n\}$ *y* $\varphi_1 \in F^\tau$, *unicas y tales que* $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$

(9) $\varphi = \forall v \varphi_1$, *con* $v \in Var - \{v_1, ..., v_n\}$ *y* $\varphi_1 \in F^\tau$, *unicas y tales que* $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1, ..., v_n, v\}$

(10) $\varphi = \exists v_j \varphi_1$, *con* $v_j \in \{v_1, ..., v_n\}$ *y* $\varphi_1 \in F^\tau$, *unicas y tales que* $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$

(11) $\varphi = \exists v \varphi_1$, *con* $v \in Var - \{v_1, ..., v_n\}$ *y* $\varphi_1 \in F^\tau$, *unicas y tales que* $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1, ..., v_n, v\}$

Proof. Induccion en el k tal que $\varphi \in F_k^\tau$ ■

Convencion Notacional 6: Cuando hayamos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$, entonces:

- si se da el caso (1) del Lema 151, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho las declaraciones $t =_d t(v_1, ..., v_n)$ y $s =_d s(v_1, ..., v_n)$.

- si se da el caso (2) del Lema 151, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho las declaraciones $t_1 =_d t_1(v_1, ..., v_n), ..., t_m =_d t_m(v_1, ..., v_n)$.

- si se da cualquiera de los casos (3), (4), (5) o (6) del Lema 151, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho las declaraciones $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n)$ y $\varphi_2 =_d \varphi_2(v_1, ..., v_n)$.

- si se da cualquiera de los casos (7), (8) o (10) del Lema 151, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho la declaracion $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n)$.

- si se da el caso (9) o el caso (11) del Lema 151, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho la declaracion $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n, v)$.

El siguiente lema se basa en la Convencion Notacional 6 y nos permite darle caracter recursivo a la notacion $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$.

Lemma 152 *Supongamos $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$. Sea $\mathbf{A} = (A, i)$ un modelo de tipo τ y sean $a_1, ..., a_n \in A$. Entonces*

(1) Si $\varphi = (t \equiv s)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ *si y solo si* $t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n] = s^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]$

(2) Si $\varphi = r(t_1, ..., t_m)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ *si y solo si* $(t_1^A[a_1, ..., a_n], ..., t_m^A[a_1, ..., a_n]) \in r^A$

(3) Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ *si y solo si* $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, ..., a_n]$ *y* $\mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, ..., a_n]$

(4) Si $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ *si y solo si* $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, ..., a_n]$ *o* $\mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, ..., a_n]$

(5) Si $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ *si y solo si* $\mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, ..., a_n]$ *o* $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, ..., a_n]$

(6) Si $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ *si y solo si ya sea* $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, ..., a_n]$ *y* $\mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, ..., a_n]$ *o* $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, ..., a_n]$ *y* $\mathbf{A} \not\models \varphi_2[a_1, ..., a_n]$

(7) Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ *si y solo si* $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, ..., a_n]$

(8) Si $\varphi = \forall v_j \varphi_1$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ *si y solo si* $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, ..., a, ..., a_n]$, *para todo* $a \in A$.

(9) Si $\varphi = \forall v \varphi_1$, con $v \notin \{v_1, ..., v_n\}$ y $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n, v)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ *si y solo si* $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, ..., a_n, a]$, *para todo* $a \in A$.

(10) Si $\varphi = \exists v_j \varphi_1$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ *si y solo si* $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, ..., a, ..., a_n]$, *para algun* $a \in A$.

(11) Si $\varphi = \exists v \varphi_1$, con $v \notin \{v_1, ..., v_n\}$ y $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n, v)$, entonces

- $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ *si y solo si* $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, ..., a_n, a]$, *para algun* $a \in A$.

Proof. Rutina. ■

8.5.1 Alcance de la ocurrencia de un cuantificador en una formula

Lemma 153 *Si Qv ocurre en φ a partir de i, entonces hay una unica formula ψ tal que $Qv\psi$ ocurre en φ a partir de i.*

Proof. Por induccion en el k tal que $\varphi \in F^{\tau}$. ■

Dada una ocurrencia de Qv en una formula φ, la formula ψ del lema anterior sera llamada el *alcance* de dicha ocurrencia en φ. Notese que dos ocurrencias distintas de Qv en φ pueden tener alcances distintos.

8.5.2 Sustitucion de variables libres

Diremos que *v es sustituible por w en φ* cuando ninguna ocurrencia libre de v en φ sucede dentro de una ocurrencia de una subformula de la forma $Qw\psi$ en φ. En otras palabras v no sera sustituible por w en φ cuando alguna ocurrencia libre de v en φ suceda dentro de una ocurrencia en φ de una formula de la forma $Qw\psi$. Notese que puede suceder que v sea sustituible por w en φ y que sin envargo haya una subformula de la forma $Qw\psi$ para la cual $v \in Li(Qw\psi)$. Dejamos como ejercicio encontrar un ejemplo de esta situacion.

Usando lemas anteriores podemos ver que se dan las siguientes propiedades

(1) Si φ es atomica, entonces v es sustituible por w en φ

(2) Si $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, entonces v es sustituible por w en φ sii v es substituible por w en φ_1 y v es
substituible por w en φ_2

(3) Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces w es v es sustituible por w en φ sii v es substituible por w en φ_1

(4) Si $\varphi = Qv\varphi_1$, entonces v es sustituible por w en φ

(5) Si $\varphi = Qw\varphi_1$ y $v \in Li(\varphi_1)$, entonces v no es sustituible por w en φ

(6) Si $\varphi = Qw\varphi_1$ y $v \notin Li(\varphi_1)$, entonces v es sustituible por w en φ

(7) Si $\varphi = Qu\varphi_1$, con $u \neq v, w$, entonces v es sustituible por w en φ sii v es sustituible por w en φ_1

Notese que las propiedades (1),...,(7) pueden usarse para dar una definicion recursiva del predicado

$$\text{"}v \textit{ es sustituible por } w \textit{ en } \varphi\text{"} : Var \times Var \times F^{\tau} \rightarrow \omega.$$

Dado un termino t, diremos que *v es sustituible por t en φ* cuando v sea sustituible en φ por cada variable que ocurre en t.

Theorem 154 *Supongamos $\varphi =_d \varphi(w_1, ..., w_k)$, $t_1 =_d t_1(v_1, ..., v_n), ..., t_k =_d t_k(v_1, ..., v_n)$ y supongamos ademas que cada w_j es sustituible por t_j en φ. Entonces*

(a) $Li(\varphi(t_1, ..., t_k)) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$

(b) Si declaramos $\varphi(t_1, ..., t_k)) =_d \varphi(t_1, ..., t_k))(v_1, ..., v_n)$, entonces para cada estructura $\mathbf{A}$ y $\vec{a} \in A^n$ se tiene

$$\mathbf{A} \models \varphi(t_1, ..., t_k)[\vec{a}] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi[t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]]$$

Proof. Probaremos que se dan (a) y (b), por induccion en el l tal que $\varphi \in F_l^\tau$. El caso $l = 0$ es una consecuencia directa del Teorema 150. Supongamos (a) y (b) valen para cada $\varphi \in F_l^\tau$ y sea $\varphi \in F_{l+1}^\tau - F_l^\tau$. Notese que se puede suponer que cada v_i ocurre en algun t_i, y que cada $w_i \in Li(\varphi)$, ya que para cada φ, el caso general se desprende del caso con estas restricciones. Hay varios casos

CASO $\varphi = \forall w \varphi_1$, con $w \notin \{w_1, ..., w_k\}$.

Notese que cada $w_j \in Li(\varphi_1)$. Ademas notese que $w \notin \{v_1, ..., v_n\}$ ya que de lo contrario w ocurriria en algun t_j, y entonces w_j no seria sustituible por t_j en φ. Sean

$$\begin{array}{rcl} \tilde{t}_1 & = & t_1 \\ & \vdots & \\ \tilde{t}_k & = & t_k \\ \tilde{t}_{k+1} & = & w \end{array}$$

Declaremos

$$\tilde{t}_j =_d \tilde{t}_j(v_1, ..., v_n, w)$$

Notese que nuestra Convencion Notacional 6 nos dice que tenemos implicitamente hecha la declaracion $\varphi_1 =_d \varphi_1(w_1, ..., w_k, w)$. Por (a) de la hipotesis inductiva tenemos que

$$Li(\varphi_1(t_1, ..., t_k, w)) = Li(\varphi_1(\tilde{t}_1, ..., \tilde{t}_k, \tilde{t}_{k+1})) \subseteq \{v_1, ..., v_n, w\}$$

y por lo tanto

$$Li(\varphi(t_1, ..., t_k)) \subseteq \{v_1, ..., v_n\}$$

lo cual prueba (a). Finalmente para probar (b) declaremos $\varphi(t_1, ..., t_k)) =_d \varphi(t_1, ..., t_k))(v_1, ..., v_n)$. Se tiene que

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \models \varphi(t_1, ..., t_k)[\vec{a}] \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \varphi_1(\tilde{t}_1, ..., \tilde{t}_k, \tilde{t}_{k+1})[\vec{a}, a], \text{ para todo } a \in A \\ \Updownarrow \text{ (por HI)} \\ \mathbf{A} \models \varphi_1[\tilde{t}_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}, a], ..., \tilde{t}_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}, a], \tilde{t}_{k+1}^{\mathbf{A}}[\vec{a}, a]], \text{ para todo } a \in A \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \varphi_1[t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}], a], \text{ para todo } a \in A \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \varphi[t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]] \end{array}$$

lo cual pueba (b). Dejamos al lector los casos restantes. ■

Ejemplo: Sean $\varphi = \exists v_1 f(v_1) = w_1$ y $t = v_1$, donde v_1 y w_1 son variables distintas. Declaremos $\varphi =_d \varphi(w_1)$ y $t =_d t_1(v_1)$. Notese que
$\mathbf{A} \models \varphi(t)[a_1]$ si y solo si $f^{\mathbf{A}}$ tiene un pto fijo
$\mathbf{A} \models \varphi[t^{\mathbf{A}}[a_1]]$ si y solo si a_1 esta en la imagen de $f^{\mathbf{A}}$.

9 Teorias de primer orden

Una *teoria de primer orden* sera un par (Σ, τ), donde τ es un tipo y Σ es un conjunto de sentencias de tipo τ. Supongamos que tenemos dada una teoria (Σ, τ) y supongamos que los elementos de Σ tienen un significado bien claro para un matematico. Supongamos tambien que le decimos a tal matematico que usando los elementos de Σ como axiomas, intente obtener teoremas para los cuales la prueba obtenida pueda ser escrita usando siempre sentencias de tipo τ con posiblemente nombres nuevos de constante agregados. El siguiente ejemplo mostrara que el matematico en muchos casos podra enunciar y probar gran cantidad de teoremas clasicos, aun con la restriccion antes impuesta.

A continuacion intentaremos dar una definicion matematica de prueba que formalice la nocion intuitiva antes descripta. Para esto debemos primero definir una serie de conjuntos los cuales poseen informacion deductiva basica.

Sean

$$\begin{aligned}
Partic^\tau &= \{(\forall v\varphi(v), \varphi(t)) : \varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau \text{ y } t \in T_c^\tau\} \\
Exist^\tau &= \{(\varphi(t), \exists v\varphi(v)) : \varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau \text{ y } t \in T_c^\tau\} \\
Evoc^\tau &= \{(\varphi, \varphi) : \varphi \in S^\tau\} \\
Absur^\tau &= \{((\neg\varphi \rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)), \varphi) : \varphi, \psi \in S^\tau\} \\
ConjElim^\tau &= \{((\varphi \wedge \psi), \varphi) : \varphi, \psi \in S^\tau\} \cup \{((\varphi \wedge \psi), \psi) : \varphi, \psi \in S^\tau\} \\
EquivElim^\tau &= \{((\varphi \leftrightarrow \psi), (\varphi \rightarrow \psi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\} \cup \{((\varphi \leftrightarrow \psi), (\psi \rightarrow \varphi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\} \\
DisjInt^\tau &= \{(\varphi, (\varphi \vee \psi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\} \cup \{(\psi, (\varphi \vee \psi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\}
\end{aligned}$$

Diremos que φ *se deduce de* ψ *por la regla de particularizacion* (resp. *existencia, evocacion, absurdo, conjuncion-eliminacion, equivalencia-eliminacion, disjuncion-introduccion*), *con respecto a* τ para expresar que $(\psi, \varphi) \in Partic^\tau$ (resp. $(\psi, \varphi) \in Exist^\tau(\psi, \varphi)$, $(\psi, \varphi) \in Evoc^\tau$, $(\psi, \varphi) \in Absur^\tau$, $(\psi, \varphi) \in ConjElim^\tau$, $(\psi, \varphi) \in EquivElim^\tau$, $(\psi, \varphi) \in DisjInt^\tau$).

Sea

$$Commut^\tau = Commut1^\tau \cup Commut2^\tau$$

donde

$$\begin{aligned}
Commut1^\tau &= \{((t \equiv s), (s \equiv t)) : s, t \in T_c^\tau\} \\
Commut2^\tau &= \{((\varphi \leftrightarrow \psi), (\psi \leftrightarrow \varphi)) : \varphi, \psi \in S^\tau\}
\end{aligned}$$

Diremos que φ *se deduce de* ψ *por la regla de commutatividad, con respecto a* τ para expresar que $(\psi, \varphi) \in Commut^\tau$.

Sean

$$\begin{array}{rcl} ModPon^{\tau} & = & \{(\varphi,(\varphi\rightarrow\psi),\psi):\varphi,\psi\in S^{\tau}\} \\ ConjInt^{\tau} & = & \{(\varphi,\psi,(\varphi\wedge\psi)):\varphi,\psi\in S^{\tau}\} \\ EquivInt^{\tau} & = & \{((\varphi\rightarrow\psi),(\psi\rightarrow\varphi),(\varphi\leftrightarrow\psi)):\varphi,\psi\in S^{\tau}\} \\ DisjElim^{\tau} & = & \{(\neg\varphi,(\varphi\vee\psi),\psi):\varphi,\psi\in S^{\tau}\}\cup\{(\neg\psi,(\varphi\vee\psi),\varphi):\varphi,\psi\in S^{\tau}\} \end{array}$$

Diremos que φ *se deduce de* ψ_1 y ψ_2 *por la regla de Modus Ponens* (resp. *conjuncion-introduccion, equivalencia-introduccion, disjuncion-eliminacion*), *con respecto a* τ para expresar que $(\psi_1,\psi_2,\varphi)\in ModPon^{\tau}$ (resp. $(\psi_1,\psi_2,\varphi)\in ConjInt^{\tau}$, $(\psi_1,\psi_2,\varphi)\in EquivInt^{\tau}$, $(\psi_1,\psi_2,\varphi)\in DisjElim^{\tau}$). Sea

$$DivPorCas^{\tau}=\{((\varphi_1\vee\varphi_2),(\varphi_1\rightarrow\psi),(\varphi_2\rightarrow\psi),\psi):\varphi_1,\varphi_2,\psi\in S^{\tau}\}$$

Diremos que φ *se deduce de* ψ_1, ψ_2 y ψ_3 *por la regla de division por casos, con respecto a* τ para expresar que $(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\varphi)\in DivPorCas^{\tau}$. Sea

$$Reemp^{\tau}=Reemp1^{\tau}\cup Reemp2^{\tau}$$

donde

$Reemp1^{\tau}=\{((t\equiv s),\varphi(t),\varphi(s)):\varphi=_d\varphi(v)\in F^{\tau}$ y $s,t\in T_c^{\tau}\}$

$Reemp2^{\tau}=\{(\forall v_1...\forall v_n(\varphi\leftrightarrow\psi),\gamma,\tilde{\gamma}):\varphi,\psi\in F^{\tau},\ Li(\varphi)=Li(\psi)=\{v_1,...,v_n\},$

$n\geq 0,\gamma\in S^{\tau}$ y $\tilde{\gamma}=$ resultado de reemplazar en γ una ocurrencia de φ por $\psi\}$

Diremos que φ *se deduce de* ψ_1y ψ_2 *por la regla de reemplazo, con respecto a* τ, para expresar que $(\psi_1,\psi_2,\varphi)\in Reemp^{\tau}$. Sea

$$Trans^{\tau}=Trans1^{\tau}\cup Trans2^{\tau}\cup Trans3^{\tau}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} Trans1^{\tau} & = & \{((t\equiv s),(s\equiv u),(t\equiv u)):t,s,u\in T_c^{\tau}\} \\ Trans2^{\tau} & = & \{((\varphi\rightarrow\psi),(\psi\rightarrow\Phi),(\varphi\rightarrow\Phi)):\varphi,\psi,\Phi\in S^{\tau}\} \\ Trans3^{\tau} & = & \{((\varphi\leftrightarrow\psi),(\psi\leftrightarrow\Phi),(\varphi\leftrightarrow\Phi)):\varphi,\psi,\Phi\in S^{\tau}\} \end{array}$$

Diremos que φ *se deduce de* ψ_1y ψ_2 *por la regla de transitividad, con respecto a* τ para expresar que $(\psi_1,\psi_2,\varphi)\in Trans^{\tau}$. Sea

$$\begin{array}{l} Generaliz^{\tau}=\{(\psi,\forall v\tilde{\psi}):\psi\in S^{\tau},\ v\text{ no ocurre en }\psi\text{ y existe} \\ \quad c\in\mathcal{C}\text{ tal que }c\text{ ocurre en }\psi\text{ y }\tilde{\psi}=\text{resultado de} \\ \qquad\qquad\text{reemplazar en }\psi\text{ cada ocurrencia de }c\text{ por }v\} \end{array}$$

Es importante el siguiente

Lemma 155 *Si* $(\varphi_1,\varphi_2)\in Generaliz^{\tau}$, *entonces el nombre de constante* c *del cual habla la definicion de* $Generaliz^{\tau}$ *esta univocamente determinado por el par* (φ_1,φ_2).

Proof. Notese que c es el unico nombre de constante que ocurre en φ_1 y no ocurre en φ_2 ■

Escribiremos $(\varphi_1, \varphi_2) \in Generaliz^\tau$ *via* c para expresar que $(\varphi_1, \varphi_2) \in Generaliz^\tau$ y que c es el unico nombre de constante que ocurre en φ_1 y no ocurre en φ_2. Diremos que φ_2 *se deduce de* φ_1 *por la regla de generalizacion con nombre de constante* c*, con respecto a* τ, para expresar que $(\varphi_1, \varphi_2) \in Generaliz^\tau$ *via* c

@@finpagina@@

Sea

$$Elec^\tau = \{(\exists v\varphi(v), \varphi(e)) : \varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau,\ Li(\varphi) = \{v\} \text{ y } e \in \mathcal{C} \text{ no ocurre en } \varphi\}$$

Es importante el siguiente

EP

Lemma 156 *Si* $(\varphi_1, \varphi_2) \in Elec^\tau$*, entonces el nombre de constante* e *del cual habla la definicion de* $Elec^\tau$ *esta univocamente determinado por el par* (φ_1, φ_2)*.*

Proof. Notese que e es el unico nombre de constante que ocurre en φ_2 y no ocurre en φ_1. ■

Escribiremos $(\varphi_1, \varphi_2) \in Elec^\tau$ *via* e para expresar que $(\varphi_1, \varphi_2) \in Elec^\tau$ y que e es el unico nombre de constante que ocurre en φ_2 y no ocurre en φ_1. Diremos que φ_2 *se deduce de* φ_1 *por la regla de eleccion con nombre de constante* e*, con respecto a* τ para expresar que $(\varphi_1, \varphi_2) \in Elec^\tau$ *via* e

E

Lemma 157 *Todas las reglas excepto las reglas de eleccion y generalizacion son universales en el sentido que si* φ *se deduce de* $\psi_1, ..., \psi_k$ *por alguna de estas reglas, entonces* $((\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_k) \to \varphi)$ *es una sentencia universalmente valida.*

Proof. Veamos que la regla de existencia es universal. Supongamos $\varphi =_d \varphi(v)$, $t \in T_c^\tau$ y $\mathbf{A}$ es una estructura de tipo τ tal que $\mathbf{A} \models \varphi(t)$. Sea $t^{\mathbf{A}}$ el valor que toma t en $\mathbf{A}$. Por el Lema 154 tenemos que $\mathbf{A} \models \varphi\left[t^{\mathbf{A}}\right]$, por lo cual tenemos que $\mathbf{A} \models \exists v\varphi(v)$.

Veamos que la regla de reemplazo es universal. Debemos probar que si $(\psi_1, \psi_2, \varphi) \in Reemp^\tau = Reemp1^\tau \cup Reemp2^\tau$, entonces $((\psi_1 \wedge \psi_2) \to \varphi)$ es una sentencia universalmente valida. El caso en el que $(\psi_1, \psi_2, \varphi) \in Reemp1^\tau$ es facil y lo dejaremos al lector. Para el caso en el que $(\psi_1, \psi_2, \varphi) \in Reemp2^\tau$ nos hara falta un resultado un poco mas general. Veamos por induccion en k que si se dan las siguienes condiciones

- $\alpha \in F_k^\tau$ y $\varphi, \psi \in F^\tau$
- $\mathbf{A}$ es una estructura de tipo τ
- $\overline{\alpha} =$ resultado de reemplazar en α una ocurrencia de φ por ψ,
- $\mathbf{A} \models \varphi\,[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \psi\,[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$

entonces se da que

- $\mathbf{A} \models \alpha[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \overline{\alpha}[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$.

CASO $k = 0$.
Entonces α es atomica y por lo tanto ya que α es la unica subformula de α, la situacion es facil de probar.

CASO $\alpha = \forall x_i \alpha_1$.
Si $\varphi = \alpha$, entonces la situacion es facil de probar. Si $\varphi \neq \alpha$, entonces la ocurrencia de φ a reemplazar sucede en α_1 y por lo tanto $\overline{\alpha} = \forall x_i \overline{\alpha_1}$. Se tiene entonces que para un $\vec{a}$ dado,

$$\begin{array}{c}
\mathbf{A} \models \alpha[\vec{a}] \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A} \models \alpha_1[\downarrow_i^a \vec{a}], \text{ para cada } a \in A \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A} \models \overline{\alpha_1}[\downarrow_i^a \vec{a}], \text{ para cada } a \in A \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A} \models \overline{\alpha}[\vec{a}]
\end{array}$$

CASO $\alpha = (\alpha_1 \vee \alpha_2)$.
Si $\varphi = \alpha$, entonces la situacion es facil de probar. Supongamos $\varphi \neq \alpha$ y supongamos que la ocurrencia de φ a reemplazar sucede en α_1. Entonces $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha_1} \vee \alpha_2)$ y tenemos que

$$\begin{array}{c}
\mathbf{A} \models \alpha[\vec{a}] \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A} \models \alpha_1[\vec{a}] \text{ o } \mathbf{A} \models \alpha_2[\vec{a}] \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A} \models \overline{\alpha_1}[\vec{a}] \text{ o } \mathbf{A} \models \alpha_2[\vec{a}] \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A} \models \overline{\alpha}[\vec{a}]
\end{array}$$

Los demas casos son dejados al lector.

Dejamos al lector el chequeo de la universalidad del resto de las reglas. ■

AXIOMAS LOGICOS

Seran llamados *axiomas logicos de tipo* τ a todas las sentencias de alguna de las siguientes formas

1. $(\varphi \leftrightarrow \varphi)$
2. $(t \equiv t)$
3. $(\varphi \vee \neg\varphi)$
4. $(\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi)$

donde $t \in T_c^\tau$ y $\varphi, \psi, \phi \in S^\tau$. Con $AxLog^\tau$ denotaremos el conjunto $\{\varphi \in S^\tau :$ φ es un axioma logico de tipo $\tau\}$.

Lemma 158 *Sea* $\boldsymbol{\varphi} \in S^{\tau+}$. *Hay unicos* $n \geq 1$ *y* $\varphi_1, ..., \varphi_n \in S^\tau$ *tales que* $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_1 ... \varphi_n$.

Proof. Solo hay que probar la unicidad la cual sigue de la Proposicion 130 ■

Dada $\boldsymbol{\varphi} \in S^{\tau+}$, usaremos $n(\boldsymbol{\varphi})$ y $\boldsymbol{\varphi}_1, ..., \boldsymbol{\varphi}_{n(\boldsymbol{\varphi})}$ para denotar los unicos n y $\varphi_1, ..., \varphi_n$ cuya existencia garantiza el lema anterior. Sea $Nombres_1$ el conjunto formado por las siguientes palabras

EXISTENCIA
COMMUTATIVIDAD
PARTICULARIZACION
ABSURDO
EVOCACION
CONJUNCIONELIMINACION
EQUIVALENCIAELIMINACION
DISJUNCIONINTRODUCCION
ELECCION
GENERALIZACION

Sea $Nombres_2$ el conjunto formado por las siguientes palabras

MODUSPONENS
TRANSITIVIDAD
CONJUNCIONINTRODUCCION
EQUIVALENCIAINTRODUCCION
DISJUNCIONELIMINACION
REEMPLAZO

Una *justificacion basica* es una palabra perteneciente a la union de los siguientes conjuntos de palabras

$$\{\text{CONCLUSION}, \text{AXIOMAPROPIO}, \text{AXIOMALOGICO}\}$$

$$\{\alpha(\bar{k}) : k \in \mathbf{N} \text{ y } \alpha \in Nombres_1\}$$

$$\{\alpha(\bar{j}, \bar{k}) : j, k \in \mathbf{N} \text{ y } \alpha \in Nombres_2\}$$

$$\{\text{DIVISIONPORCASOS}(\bar{j}, \bar{k}, \bar{l}) : j, k, l \in \mathbf{N}\}$$

Usaremos $JustBas$.para denotar el conjunto formado por todas las justificaciones basicas. Una *justificacion* es una palabra que ya sea es una justificacion basica o pertenece a la union de los siguientes conjuntos de palabras

$$\{\text{HIPOTESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$$

$$\{\text{TESIS}\bar{j}\alpha : j \in \mathbf{N} \text{ y } \alpha \in JustBas\}$$

Usaremos $Just$.para denotar el conjunto formado por todas las justificaciones. Cabe destacar que los elementos de $Just$ son palabras del alfabeto formado por los siguientes simbolos

( ) , 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E G H I J L M N O P Q R S T U V X Z

Lemma 159 *Sea* $\mathbf{J} \in Just^{+}$. *Hay unicos* $n \geq 1$ *y* $J_1, ..., J_n \in Just$ *tales que* $\mathbf{J} = J_1...J_n$.

Proof. Supongamos $J_1, ..., J_n$, $J_1', ..., J_m'$, con $n, m \geq 1$, son justificaciones tales que $J_1...J_n = J_1'...J_m'$. Es facil ver que entonces tenemos $J_1 = J_1'$, por lo cual $J_2...J_n = J_2'...J_m'$. Un argumento inductivo nos dice que entonces $n = m$ y $J_i = J_i'$, $i = 1, ..., n$ ■

Dada $\mathbf{J} \in Just^{+}$, usaremos $n(\mathbf{J})$ y $\mathbf{J}_1, ..., \mathbf{J}_{n(\mathbf{J})}$ para denotar los unicos n y $J_1, ..., J_n$ cuya existencia garantiza el lema anterior. Dados numeros naturales $i \leq j$, usaremos $\langle i, j\rangle$ para denotar el conjunto $\{i, i+1, ..., j\}$. A los conjuntos de la forma $\langle i, j\rangle$ los llamaremos *bloques*. Dada $\mathbf{J} \in Just^{+}$ definamos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{\mathbf{J}} &= \{\langle i, j\rangle : \exists k \ \mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k} \text{ y} \\ \mathbf{J}_j &= \text{TESIS}\bar{k}\alpha \text{ para algun } \alpha \in JustBas\} \end{aligned}$$

Diremos que $\mathbf{J} \in Just^{+}$ es *balanceada* si se dan las siguientes

(1) Por cada $k \in \mathbf{N}$ a lo sumo hay un i tal que $\mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ y a lo sumo hay un i tal que $\mathbf{J}_i = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$, con $\alpha \in JustBas$

(2) Si $\mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ entonces hay un $l > i$ tal que $\mathbf{J}_l = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$, con $\alpha \in JustBas$

(3) Si $\mathbf{J}_i = \text{TESIS}\bar{k}$, con $\alpha \in JustBas$, entonces hay un $l < i$ tal que $\mathbf{J}_l = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$

(4) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$, entonces $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ o $B_1 \subseteq B_2$ o $B_2 \subseteq B_1$

Un *par adecuado de tipo* τ es un par $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J}) \in S^{\tau+} \times Just^{+}$ tal que $n(\boldsymbol{\varphi}) = n(\mathbf{J})$ y $\mathbf{J}$ es balanceada. Sea $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ un par adecuado de tipo τ. Si $\langle i, j\rangle \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$, entonces $\boldsymbol{\varphi}_i$ sera la *hipotesis* del bloque $\langle i, j\rangle$ en $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ y $\boldsymbol{\varphi}_j$ sera la *tesis* del bloque $\langle i, j\rangle$ en $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$. Diremos que $\boldsymbol{\varphi}_i$ *esta bajo la hipotesis* $\boldsymbol{\varphi}_l$ *en* $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ o que

$\boldsymbol{\varphi}_l$ *es una hipotesis de* $\boldsymbol{\varphi}_i$ *en* $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ cuando haya en $\mathcal{B}^{\mathbf{J}}$ un bloque de la forma $\langle l, j\rangle$ el cual contenga a i. Sean $i, j \in \langle 1, n(\boldsymbol{\varphi})\rangle$. Diremos que i es *anterior* a j *en* $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ si $i < j$ y ademas para todo $B \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$ se tiene que $i \in B \Rightarrow j \in B$. Dadas $e, d \in \mathcal{C}$, diremos que e *depende directamente de* d *en* $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ si hay numeros $1 \leq l < j \leq n(\boldsymbol{\varphi})$ tales que

(1) l es anterior a j en $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$

(2) $\mathbf{J}_j = \alpha$ELECCION$(\bar{l})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$ y $(\boldsymbol{\varphi}_l, \boldsymbol{\varphi}_j) \in Elec^{\tau_1}$ via e

(3) d ocurre en $\boldsymbol{\varphi}_l$.

Dados $e, d \in \mathcal{C}$, diremos que e *depende de* d *en* $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ si existen $e_0, ..., e_{k+1} \in \mathcal{C}$, con $k \geq 0$, tales que

(1) $e_0 = e$ y $e_{k+1} = d$

(2) e_i *depende directamente de* e_{i+1} *en* $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$, para $i = 0, ..., k$.

Sea (Σ, τ) una teoria de primer orden. Sea φ una sentencia de tipo τ. Una *prueba* de φ en (Σ, τ) sera un par adecuado $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ de algun tipo $\tau_1 = (\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$, con $\mathcal{C}_1$ finito y disjunto con $\mathcal{C}$, tal que

(1) Cada $\boldsymbol{\varphi}_i$ es una sentencia de tipo τ_1

(2) $\boldsymbol{\varphi}_{n(\boldsymbol{\varphi})} = \varphi$

(3) Si $\langle i, j\rangle \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$, entonces $\mathbf{J}_{j+1}$ es de la forma αCONCLUSION y $\boldsymbol{\varphi}_{j+1} = (\boldsymbol{\varphi}_i \rightarrow \boldsymbol{\varphi}_j)$

(4) Para cada $i = 1, ..., n(\boldsymbol{\varphi})$, se da una de las siguientes

   (a) $\mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ para algun $k \in \mathbf{N}$

   (b) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αCONCLUSION y hay un j tal que $\langle j, i-1\rangle \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$ y $\boldsymbol{\varphi}_i = (\boldsymbol{\varphi}_j \rightarrow \boldsymbol{\varphi}_{i-1})$

   (c) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αAXIOMALOGICO y $\boldsymbol{\varphi}_i$ es un axioma logico de tipo τ_1

   (d) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αAXIOMAPROPIO y $\boldsymbol{\varphi}_i \in \Sigma$

   (e) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αPARTICULARIZACION$(\bar{l})$, con l anterior a i y $(\boldsymbol{\varphi}_l, \boldsymbol{\varphi}_i) \in Partic^{\tau_1}$

   (f) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αCOMMUTATIVIDAD$(\bar{l})$, con l anterior a i y $(\boldsymbol{\varphi}_l, \boldsymbol{\varphi}_i) \in Commut^{\tau_1}$

   (g) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αABSURDO$(\bar{l})$, con l anterior a i y $(\boldsymbol{\varphi}_l, \boldsymbol{\varphi}_i) \in Absur^{\tau_1}$

(h) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αEVOCACION($\bar{l}$), con l anterior a i y $(\boldsymbol{\varphi}_l, \boldsymbol{\varphi}_i) \in Evoc^{\tau_1}$

(i) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αEXISTENCIA($\bar{l}$), con l anterior a i y $(\boldsymbol{\varphi}_l, \boldsymbol{\varphi}_i) \in Exist^{\tau_1}$

(j) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αCONJUNCIONELIMINACION($\bar{l}$), con l anterior a i y $(\boldsymbol{\varphi}_l, \boldsymbol{\varphi}_i) \in ConjElim^{\tau_1}$

(k) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αDISJUNCIONINTRODUCCION($\bar{l}$), con l anterior a i y $(\boldsymbol{\varphi}_l, \boldsymbol{\varphi}_i) \in DisjInt^{\tau_1}$

(l) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αEQUIVALENCIAELIMINACION($\bar{l}$), con l anterior a i y $(\boldsymbol{\varphi}_l, \boldsymbol{\varphi}_i) \in EquivElim^{\tau_1}$

(m) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αMODUSPONENS($\overline{l_1}, \overline{l_2}$), con l_1 y l_2 anteriores a i y $(\boldsymbol{\varphi}_{l_1}, \boldsymbol{\varphi}_{l_2}, \boldsymbol{\varphi}_i) \in ModPon^{\tau_1}$

(n) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αCONJUNCIONINTRODUCCION($\overline{l_1}, \overline{l_2}$), con l_1 y l_2 anteriores a i y $(\boldsymbol{\varphi}_{l_1}, \boldsymbol{\varphi}_{l_2}, \boldsymbol{\varphi}_i) \in ConjInt^{\tau_1}$

(o) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αEQUIVALENCIAINTRODUCCION($\overline{l_1}, \overline{l_2}$), con l_1 y l_2 anteriores a i y $(\boldsymbol{\varphi}_{l_1}, \boldsymbol{\varphi}_{l_2}, \boldsymbol{\varphi}_i) \in EquivInt^{\tau_1}$

(p) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αDISJUNCIONELIMINACION($\overline{l_1}, \overline{l_2}$), con l_1 y l_2 anteriores a i y $(\boldsymbol{\varphi}_{l_1}, \boldsymbol{\varphi}_{l_2}, \boldsymbol{\varphi}_i) \in DisjElim^{\tau_1}$

(q) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αREEMPLAZO($\overline{l_1}, \overline{l_2}$), con l_1 y l_2 anteriores a i y $(\boldsymbol{\varphi}_{l_1}, \boldsymbol{\varphi}_{l_2}, \boldsymbol{\varphi}_i) \in Reemp^{\tau_1}$

(r) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αTRANSITIVIDAD($\overline{l_1}, \overline{l_2}$), con l_1 y l_2 anteriores a i y $(\boldsymbol{\varphi}_{l_1}, \boldsymbol{\varphi}_{l_2}, \boldsymbol{\varphi}_i) \in Trans^{\tau_1}$

(s) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αDIVISIONPORCASOS($\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}$), con l_1, l_2 y l_3 anteriores a i y y $(\boldsymbol{\varphi}_{l_1}, \boldsymbol{\varphi}_{l_2}, \boldsymbol{\varphi}_{l_3}, \boldsymbol{\varphi}_i) \in DivPorCas^{\tau_1}$

(t) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αELECCION($\bar{l}$), con l anterior a i y $(\boldsymbol{\varphi}_l, \boldsymbol{\varphi}_i) \in Elec^{\tau_1}$ via el nombre de cte e, el cual no ocurre en $\boldsymbol{\varphi}_1, ..., \boldsymbol{\varphi}_{i-1}$ y no pertenece a $\mathcal{C}$.

(u) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αGENERALIZACION($\bar{l}$), con l anterior a i y $(\boldsymbol{\varphi}_l, \boldsymbol{\varphi}_i) \in Generaliz^{\tau_1}$ via el nombre de cte c el cual cumple:
   (i) $c \notin \mathcal{C}$
   (ii) c no es un nombre de cte que ocurra en $\boldsymbol{\varphi}$ el cual sea introducido por la aplicacion de la regla de eleccion; es decir para cada $u \in \{1, ..., n(\boldsymbol{\varphi})\}$, si $\mathbf{J}_u$ es de la forma αELECCION($\bar{v}$), entonces no se da que $(\boldsymbol{\varphi}_v, \boldsymbol{\varphi}_u) \in Elec^{\tau_1}$ via c.
   (iii) c no ocurre en ninguna hipotesis de $\boldsymbol{\varphi}_l$.
   (iv) Ningun nombre de constante que ocurra en $\boldsymbol{\varphi}_l$ o en sus hipotesis, depende de c.

Cuando haya una prueba de φ en (Σ, τ), diremos que φ es un *teorema* de la teoria (Σ, τ) y escribiremos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

@@finpagina@@

9.1 Algunas pruebas en la teoria $(\emptyset, \tau)$

Sea τ un tipo cualquiera y sean $\varphi, \psi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sentencias de tipo τ. A continuacion se dan algunos ejemplos de pruebas en la teoria $(\emptyset, \tau)$

1.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	HIPOTESIS1
2.	φ_1	HIPOTESIS2
3.	$(\varphi_2 \vee \varphi_1)$	TESIS2DISJUNCIONINTRODUCCION(2)
4.	$(\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \vee \varphi_1))$	CONCLUSION
5.	φ_2	HIPOTESIS3
6.	$(\varphi_2 \vee \varphi_1)$	TESIS3DISJUNCIONINTRODUCCION(5)
7.	$\varphi_2 \rightarrow (\varphi_2 \vee \varphi_1)$	CONCLUSION
8.	$(\varphi_2 \vee \varphi_1)$	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(1,4,7)$
9.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2) \rightarrow (\varphi_2 \vee \varphi_1)$	CONCLUSION

1.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	HIPOTESIS1
2.	φ_1	HIPOTESIS2
3.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(2)
4.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS2DISJUNCIONINTRODUCCION(3)
5.	$\varphi_1 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION
6.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	HIPOTESIS3
7.	φ_2	HIPOTESIS4
8.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(6)
9.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS4DISJUNCIONINTRODUCCION(7)
10.	$\varphi_2 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION
11.	φ_3	HIPOTESIS5
12.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS5DISJUNCIONINTRODUCCION(11)
13.	$\varphi_3 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION
14.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS3DIVISIONPORCASOS$(6,10,13)$
15.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION
16.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(1,5,15)$
17.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION

1.	$(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi))$	HIPOTESIS1
2.	φ	TESIS1CONJUNCIONELIMINACION(1)
3.	$(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \rightarrow \varphi$	CONCLUSION
4.	φ	HIPOTESIS2
5.	$(\varphi \vee \psi)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(4)
6.	$(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi))$	TESIS2CONJUNCIONINTRODUCCION$(4,5)$
7.	$\varphi \rightarrow (\varphi \wedge (\varphi \vee \psi))$	CONCLUSION
8.	$((\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \leftrightarrow \varphi)$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION$(3,7)$

1.	$(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi))$	HIPOTESIS1
2.	φ	HIPOTESIS2
3.	φ	TESIS2EVOCACION(2)
4.	$\varphi \rightarrow \varphi$	CONCLUSION
5.	$(\varphi \wedge \psi)$	HIPOTESIS3
6.	φ	TESIS3CONJUNCIONELIMINACION(5)
7.	$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$	CONCLUSION
8.	φ	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(1, 4, 7)$
9.	$(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \rightarrow \varphi$	CONCLUSION
10.	φ	HIPOTESIS4
11.	$(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi))$	TESIS4DISJUNCIONINTRODUCCION(10)
12.	$\varphi \rightarrow (\varphi \vee (\varphi \wedge \psi))$	CONCLUSION
13.	$((\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \leftrightarrow \varphi)$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION$(9, 12)$

1.	$(\varphi \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2))$	HIPOTESIS1
2.	φ	CONJUNCIONELIMINACION(1)
3.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	CONJUNCIONELIMINACION(1)
4.	φ_1	HIPOTESIS2
5.	$(\varphi \wedge \varphi_1)$	CONJUNCIONINTRODUCCION$(2, 4)$
6.	$((\varphi \wedge \varphi_1) \vee (\varphi \wedge \varphi_2))$	TESIS2DISJUNCIONINTRODUCCION(5)
7.	$\varphi_1 \rightarrow ((\varphi \wedge \varphi_1) \vee (\varphi \wedge \varphi_2))$	CONCLUSION
8.	φ_2	HIPOTESIS3
9.	$(\varphi \wedge \varphi_2)$	CONJUNCIONINTRODUCCION$(2, 8)$
10.	$((\varphi \wedge \varphi_1) \vee (\varphi \wedge \varphi_2))$	TESIS3DISJUNCIONINTRODUCCION(9)
11.	$\phi \rightarrow ((\varphi \wedge \varphi_1) \vee (\varphi \wedge \varphi_2))$	CONCLUSION
12.	$((\varphi \wedge \varphi_1) \vee (\varphi \wedge \varphi_2))$	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(3, 7, 11)$
13.	$(\varphi \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2)) \rightarrow ((\varphi \wedge \varphi_1) \vee (\varphi \wedge \varphi_2))$	CONCLUSION

1.	$((\varphi\wedge\varphi_1)\vee(\varphi\wedge\varphi_2))$	HIPOTESIS1
2.	$(\varphi\wedge\varphi_1)$	HIPOTESIS2
3.	φ	CONJUNCIONELIMINACION(2)
4.	φ_1	CONJUNCIONELIMINACION(2)
5.	$(\varphi_1\vee\varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(4)
6.	$\varphi\wedge(\varphi_1\vee\varphi_2)$	TESIS2CONJUNCIONINTRODUCCION$(3,5)$
7.	$(\varphi\wedge\varphi_1)\to(\varphi\wedge(\varphi_1\vee\varphi_2))$	CONCLUSION
8.	$(\varphi\wedge\varphi_2)$	HIPOTESIS3
9.	φ	CONJUNCIONELIMINACION(8)
10.	φ_2	CONJUNCIONELIMINACION(8)
11.	$(\varphi_1\vee\varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(10)
12.	$\varphi\wedge(\varphi_1\vee\varphi_2)$	TESIS3CONJUNCIONINTRODUCCION$(9,11)$
13.	$(\varphi\wedge\varphi_2)\to(\varphi\wedge(\varphi_1\vee\varphi_2))$	CONCLUSION
14.	$(\varphi\wedge(\varphi_1\vee\varphi_2))$	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(1,7,13)$
15.	$((\varphi\wedge\varphi_1)\vee(\varphi\wedge\varphi_2))\to(\varphi\wedge(\varphi_1\vee\varphi_2))$	CONCLUSION

Lemma 160 *Sea $(\boldsymbol{\varphi},\mathbf{J})$ una prueba de φ en (Σ,τ).*

(1) Sea $m\in\mathbf{N}$ tal que $\mathbf{J}_i\neq\mathrm{HIPOTESIS}\bar{m}$, para cada $i=1,...,n(\boldsymbol{\varphi})$. Supongamos que $\mathbf{J}_i=\mathrm{HIPOTESIS}\bar{k}$ y que $\mathbf{J}_j=\mathrm{TESIS}\bar{k}\alpha$, con $[\alpha]_1\notin Num$. Sea $\tilde{\mathbf{J}}$ el resultado de reemplazar en $\mathbf{J}$ la justificacion $\mathbf{J}_i$ por $\mathrm{HIPOTESIS}\bar{m}$ y reemplazar la justificacion $\mathbf{J}_j$ por $\mathrm{TESIS}\bar{m}\alpha$. Entonces $(\boldsymbol{\varphi},\tilde{\mathbf{J}})$ es una prueba de φ en (Σ,τ).

(2) Sea $\mathcal{C}_1$ el conjunto de nombres de constante que ocurren en alguna $\boldsymbol{\varphi}_i$ y que no pertenecen a $\mathcal{C}$. Sea $e\in\mathcal{C}_1-\mathcal{C}$. Sea $\tilde{e}\notin\mathcal{C}\cup\mathcal{C}_1$ tal que $(\mathcal{C}\cup(\mathcal{C}_1-\{e\})\cup\{\tilde{e}\},\mathcal{F},\mathcal{R},a)$ es un tipo. Sea $\tilde{\varphi}_i=$ resultado de reemplazar en $\boldsymbol{\varphi}_i$ cada ocurrencia de e por $\tilde{e}$. Entonces $(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1...\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{n(\boldsymbol{\varphi})},\mathbf{J})$ es una prueba de φ en (Σ,τ).

Proof. (1) Obvio.

(2) Sean

$$\begin{aligned}\tau_1 &= (\mathcal{C}\cup\mathcal{C}_1,\mathcal{F},\mathcal{R},a)\\ \tau_2 &= (\mathcal{C}\cup(\mathcal{C}_1-\{e\})\cup\{\tilde{e}\},\mathcal{F},\mathcal{R},a)\end{aligned}$$

Para cada $c\in\mathcal{C}\cup(\mathcal{C}_1-\{e\})$ definamos $\tilde{c}=c$. Notese que el mapeo $c\to\tilde{c}$ es una biyeccion entre el conjunto de nombres de constante de τ_1 y el conjunto de nombres de cte de τ_2. Para cada $t\in T^{\tau_1}$ sea $\tilde{t}=$ resultado de reemplazar en t cada ocurrencia de c por $\tilde{c}$, para cada $c\in\mathcal{C}\cup\mathcal{C}_1$. Analogamente para una formula $\psi\in F^{\tau_1}$, sea $\tilde{\psi}=$ resultado de reemplazar en ψ cada ocurrencia de c por $\tilde{c}$, para cada $c\in\mathcal{C}\cup\mathcal{C}_1$. Notese que los mapeos $t\to\tilde{t}$ y $\psi\to\tilde{\psi}$ son biyecciones naturales entre T^{τ_1} y T^{τ_2} y entre F^{τ_1} y F^{τ_2}, respectivamente.

Notese que cualesquiera sean $\psi_1, \psi_2 \in F^{\tau_1}$, tenemos que ψ_1 se deduce de ψ_2 por la regla de generalizacion con constante c sii $\tilde{\psi}_1$ se deduce de $\tilde{\psi}_2$ por la regla de generalizacion con constante $\tilde{c}$. Para las otras reglas sucede lo mismo. Notese tambien que c ocurre en ψ sii $\tilde{c}$ ocurre en $\tilde{\psi}$. Mas aun notese que c depende de d en $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ sii $\tilde{c}$ depende de $\tilde{d}$ en $(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{J})$, donde $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \widetilde{\varphi_1} ... \widetilde{\varphi_{n(\boldsymbol{\varphi})}}$. Ahora es facil chequear que $(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{J})$ es una prueba de φ en (Σ, τ) basandose en que $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ es una prueba de φ en (Σ, τ). ■

Una teoria (Σ, τ) sera *inconsistente* cuando haya una sentencia φ tal que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$. Una teoria (Σ, τ) sera *consistente* cuando no sea inconsistente.

Lemma 161 *Sea (Σ, τ) una teoria.*

(1) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(2) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ y φ se deduce por alguna regla universal a partir de $\varphi_1, ..., \varphi_n$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(3) Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, para toda sentencia φ.

(4) Si (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.

(5) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ si y solo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.

(6) Si $(\Sigma, \tau) \nvdash \neg\varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.

Proof. (1) Haremos el caso $n = 2$. Supongamos entonces que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \varphi_2$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\}, \tau) \vdash \varphi$. Para $i = 1, 2$, sea $(\varphi_1^i ... \varphi_{n_i}^i, J_1^i ... J_{n_i}^i)$ una prueba de φ_i en (Σ, τ). Sea $(\psi_1 ... \psi_n, J_1 ... J_n)$ una prueba de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\}, \tau)$. Notese que por el Lema 160 podemos suponer que estas tres pruebas no comparten ningun nombre de constante auxiliar y que tampoco comparten numeros asociados a hipotesis o tesis. Para cada $i = 1, ..., n$, definamos $\widetilde{J_i}$ de la siguiente manera.

- Si $\psi_i = \varphi_1$ y $J_i =$ AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J_i} =$ EVOCACION$(\overline{n_1})$

- Si $\psi_i = \varphi_2$ y $J_i =$ AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J_i} =$ EVOCACION$(\overline{n_1 + n_2})$.

- Si $\psi_i \notin \{\varphi_1, \varphi_2\}$ y $J_i =$ AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J_i} =$ AXIOMAPROPIO.

- Si $J_i =$ AXIOMALOGICO, entonces $\widetilde{J_i} =$ AXIOMALOGICO

- Si $J_i =$ CONCLUSION, entonces $\widetilde{J_i} =$ CONCLUSION.

- Si $J_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$, entonces $\widetilde{J_i} =$ HIPOTESIS$\bar{k}$

- Si $J_i = \alpha P(\overline{l_1}, ..., \overline{l_k})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{$TESIS$\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i} = \alpha P(\overline{l_1 + n_1 + n_2}, ..., \overline{l_k + n_1 + n_2})$

Para cada $i = 1, ..., n_2$, definamos $\widetilde{J_i^2}$ de la siguiente manera.

- Si $J_i^2 =$ AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J_i^2} =$ AXIOMAPROPIO

- Si $J_i^2 =$ AXIOMALOGICO, entonces $\widetilde{J_i^2} =$ AXIOMALOGICO

- Si $J_i^2 =$ CONCLUSION, entonces $\widetilde{J_i^2} =$ CONCLUSION.

- Si $J_i^2 =$ HIPOTESIS$\bar{k}$, entonces $\widetilde{J_i^2} =$ HIPOTESIS$\bar{k}$

- Si $J_i^2 = \alpha P(\overline{l_1}, ..., \overline{l_k})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i^2} = \alpha P(\overline{l_1 + n_1}, ..., \overline{l_k + n_1})$

Es facil chequear que

$$(\varphi_1^1 ... \varphi_{n_1}^1 \varphi_1^2 ... \varphi_{n_2}^2 \psi_1 ... \psi_n, J_1^1 ... J_{n_1}^1 \widetilde{J_1^2} ... \widetilde{J_{n_2}^2} \widetilde{J_1} ... \widetilde{J_n})$$

es una prueba de φ en (Σ, τ)

(2) Supongamos que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ y que φ se deduce por regla R a partir de $\varphi_1, ..., \varphi_n$, con R universal. Notese que

1.	φ_1	AXIOMAPROPIO
2.	φ_2	AXIOMAPROPIO
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	φ_n	AXIOMAPROPIO
$n+1$.	φ	R$(\bar{1}, ..., \bar{n})$

es una prueba de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau)$, lo cual por (1) nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(3) Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces por definicion tenemos que $(\Sigma, \tau) \vdash \psi \wedge \neg\psi$ para alguna sentencia ψ. Dada una sentencia cualquiera φ tenemos que φ se deduce por la regla del absurdo a partir de $\psi \wedge \neg\psi$ con lo cual (2) nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$

(4) Supongamos (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. Si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ fuera inconsistente, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi \wedge \neg\psi$, para alguna sentencia ψ, lo cual por (1) nos diria que $(\Sigma, \tau) \vdash \psi \wedge \neg\psi$, es decir nos diria que (Σ, τ) es inconsistente.

(5) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$. Entonces tenemos que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\varphi \to \psi), \varphi$, lo cual por (2) nos dice que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. Supongamos ahora que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. Sea $(\varphi_1 ... \varphi_n, J_1 ..., J_n)$ una prueba de ψ en $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$. Notese que podemos suponer que J_n es de la forma $P(\overline{l_1}, ..., \overline{l_k})$. Definimos $\widetilde{J_i} =$ TESIS$\bar{m}P(\overline{l_1 + 1}, ..., \overline{l_k + 1}$, donde m es tal que ninguna J_i es igual a HIPOTESIS$\bar{m}$. Para cada $i = 1, ..., n - 1$, definamos $\widetilde{J_i}$ de la siguiente manera.

- Si $\varphi_i = \varphi$ y $J_i =$ AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J_i} =$ EVOCACION(1)

- Si $\varphi_i \neq \varphi$ y $J_i =$ AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J_i} =$ AXIOMAPROPIO

- Si $J_i =$ AXIOMALOGICO, entonces $\widetilde{J_i} =$ AXIOMALOGICO

- Si $J_i =$ CONCLUSION, entonces $\widetilde{J_i} =$ CONCLUSION

- Si $J_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ entonces $\widetilde{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$
- Si $J_i = \alpha P(\overline{l_1}, ..., \overline{l_k})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbf{N}\}$, entonces $\widetilde{J}_i = \alpha P(\overline{l_1 + 1}, ..., \overline{l_k + 1})$

Es facil chequear que

$$(\varphi\varphi_1...\varphi_n(\varphi \to \psi), \text{HIPOTESIS}\bar{m}\widetilde{J_1}...\widetilde{J_n}\text{CONCLUSION})$$

es una prueba de $(\varphi \to \psi)$ en (Σ, τ)

(6) es dejada al lector. ■

9.2 El teorema de correccion

Sea $\mathbf{A}$ un modelo de tipo τ. Diremos que $\mathbf{A}$ es un *modelo de la teoria* (Σ, τ) si se cumple que $\mathbf{A} \models \varphi$, para cada $\varphi \in \Sigma$. Escribiremos $(\Sigma, \tau) \models \varphi$ cuando φ sea verdadera en todo modelo de (Σ, τ).

Como se ha visto en los ejemplos, el concepto de prueba que hemos dado sirve para formalizar las pruebas reales matematicas cuando las mismas son hechas dentro del lenguaje de primer orden. Deberiamos tener cuidado de que en el afan de lograr tal formalizabilidad no hayamos hecho una definicion de prueba demasiado permisiva. Este no es el caso ya que el siguiente teorema nos garantiza que los teoremas de una teoria de primer orden son verdaderos en cada modelo de la teoria.

E **Theorem 162** *(Correccion)* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ *implica* $(\Sigma, \tau) \models \varphi$.

No daremos la prueba del teorema anterior ya que es dificultosa. Esto en alguna medida es el precio de tener una nocion de prueba muy expresiva.

EP **Corollary 163** *Si* (Σ, τ) *tiene un modelo, entonces* (Σ, τ) *es consistente.*

Proof. Supongamos $\mathbf{A}$ es un modelo de (Σ, τ). Si (Σ, τ) fuera inconsistente, tendriamos que hay una $\varphi \in S^t$ tal que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$, lo cual por el Teorema de Correccion nos diria que $\mathbf{A} \models (\varphi \wedge \neg\varphi)$ ■

Concluimos la Subseccion dando un par de ejemplos que muestran como si hacemos mas permisiva la definicion de prueba, esta ya no resulta correcta. El primer ejemplo muestra que en la sentencia a generalizar (dentro de una prueba) no pueden ocurrir ctes que dependan de la cte a generalizar. Sea $\tau = (\emptyset, \{f^1\}, \emptyset, a)$ y sea $\Sigma = \{\forall y \exists x\ f(x) \equiv y\}$. Sea $T = (\Sigma, \tau)$. Notese que una estructura $\mathbf{A}$ de tipo τ satisface $\forall y \exists x\ f(x) \equiv y$ si y solo si $f^{\mathbf{A}}$ es una funcion sobre.

1.	$\forall y \exists x\ y \equiv f(x)$	AXIOMAPROPIO
2.	$\exists x\ y_0 \equiv f(x)$	PARTICULARIZACION(1)
3.	$y_0 \equiv f(e)$	ELECCION(2)
4.	$\forall y\ y \equiv f(e)$	GENERALIZACION(3)
5.	$c \equiv f(e)$	PARTICULARIZACION(4)
6.	$f(e) \equiv d$	PARTICULARIZACION(4)
7.	$c \equiv d$	TRANSITIVIDAD(5, 6)
8.	$\forall y\ c \equiv y$	GENERALIZACION(7)
9.	$\forall x \forall y\ x \equiv y$	GENERALIZACION(8)

El siguiente ejemplo muestra que la cte a generalizar no puede ocurrir en hipotesis de la sentencia a la cual se le aplica la generalizacion. Sea $\tau = (\{1\}, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$.

1.	$c \equiv 1$	HIPOTESIS1
2.	$\forall x\ x \equiv 1$	TESIS1GENERALIZACION(1)
3.	$(c \equiv 1 \rightarrow \forall x\ x \equiv 1)$	CONCLUSION
4.	$\forall y\ \ (y \equiv 1 \rightarrow \forall x\ x \equiv 1)$	GENERALIZACION(3)
5.	$(1 \equiv 1 \rightarrow \forall x\ x \equiv 1)$	PARTICULARIZACION(4)
6.	$1 \equiv 1$	AXIOMALOGICO
7.	$\forall x\ x \equiv 1$	MODUSPONENS(5, 6)

9.3 El algebra de Lindenbaum

Recordemos que dado un tipo τ, con S^t denotamos el conjunto de las sentencias de tipo τ, es decir

$$S^t = \{\varphi \in F^\tau : Li(\varphi) = \emptyset\}$$

Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria. Podemos definir la siguiente relacion sobre S^τ:

$$\varphi \dashv\vdash_T \psi \text{ si y solo si } T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

Lemma 164 *$\dashv\vdash_T$ es una relacion de equivalencia.*

Proof. La relacion es reflexiva ya que $(\varphi \leftrightarrow \varphi)$ es un axioma logico y por lo tanto $((\varphi \leftrightarrow \varphi)$,AXIOMALOGICO) es una prueba de $(\varphi \leftrightarrow \varphi)$ en T. Veamos que es simetrica. Supongamos que $\varphi \dashv\vdash_T \psi$, es decir $T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$. Ya que $(\psi \leftrightarrow \varphi)$ se deduce de $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ por la regla de commutatividad, (2) del Lema 161 nos dice que $T \vdash (\psi \leftrightarrow \varphi)$.

Analogamente, usando la regla de transitividad se puede probar que $\dashv\vdash_T$ es transitiva. ■

Una sentencia φ se dice *refutable en* (Σ, τ) si $(\Sigma, \tau) \vdash \neg\varphi$.

Lemma 165 *Dada una teoria $T = (\Sigma, \tau)$, se tiene que:*

(1) $\{\varphi \in S^\tau : \varphi$ *es un teorema de* $T\} \in S^\tau / \dashv\vdash_T$

(2) $\{\varphi \in S^\tau : \varphi$ *es refutable en* $T\} \in S^\tau/\dashv\vdash_T$

Proof. Haremos la prueba de (2) y dejaremos la prueba de (1) como ejercicio. Sean φ, ψ refutables en T, veremos que $\varphi \dashv\vdash_T \psi$. Notese que

1.	φ	HIPOTESIS1
2.	$\neg\psi$	HIPOTESIS2
3.	$\neg\varphi$	AXIOMAPROPIO
4.	$(\varphi \wedge \neg\varphi)$	TESIS2CONJUNCIONINTRODUCCION$(1,3)$
5.	$\neg\psi \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$	CONCLUSION
6.	ψ	TESIS1ABSURDO(5)
7.	$(\varphi \rightarrow \psi)$	CONCLUSION
8.	ψ	HIPOTESIS3
9.	$\neg\varphi$	HIPOTESIS4
10.	$\neg\psi$	AXIOMAPROPIO
11.	$(\psi \wedge \neg\psi)$	TESIS4CONJUNCIONINTRODUCCION$(8,10)$
12.	$\neg\varphi \rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)$	CONCLUSION
13.	φ	TESIS3ABSURDO(5)
14.	$(\psi \rightarrow \varphi)$	CONCLUSION
15.	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION$(7,14)$

justifica que $(\Sigma \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\}, \tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ lo cual por (1) del Lema 161 nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$, obteniendo que $\varphi \dashv\vdash_T \psi$. Para terminar de probar (2) faltaria ver que si φ es refutable en T y $\varphi \dashv\vdash_T \psi$, entonces ψ es refutable en T. Dejamos al lector la prueba. ■

Dada una teoria $T = (\Sigma, \tau)$ y $\varphi \in S^\tau$, $[\varphi]_T$ denotara la clase de φ con respecto a la relacion de equivalencia $\dashv\vdash_T$. Definiremos sobre $S^\tau/\dashv\vdash_T$ las siguiente operacion binaria s^T:

$$[\varphi]_T \ \mathsf{s}^T \ [\psi]_T = [(\varphi \vee \psi)]_T$$

Una observacion importante es que para que la definicion anterior de la operacion s^T sea inambigua, debemos probar la siguiente propiedad

- Si $[\varphi]_T = [\varphi']_T$ y $[\psi]_T = [\psi']_T$ entonces $[(\varphi \vee \psi)]_T = [(\varphi' \vee \psi')]_T$

Es decir debemos probar que si $T \vdash (\varphi \leftrightarrow \varphi')$ y $T \vdash \left(\psi \leftrightarrow \psi'\right)$, entonces $T \vdash ((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi'))$. Pero esto sigue de (1) del Lema 161 ya que

1.	$(\varphi \leftrightarrow \varphi')$	AXIOMAPROPIO
2.	$\left(\psi \leftrightarrow \psi'\right)$	AXIOMAPROPIO
3.	$((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi))$	AXIOMALOGICO
4.	$((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi))$	REEMPLAZO$(1,3)$
5.	$((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi'))$	REEMPLAZO$(2,4)$

atestigua que $(\Sigma \cup \{(\varphi \leftrightarrow \varphi'), \left(\psi \leftrightarrow \psi'\right)\}, \tau) \vdash ((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi'))$. En forma analoga se puede ver que las siguientes igualdades definen en forma inambigua una operacion binaria i^T sobre $S^\tau/\dashv\vdash_T$ y una operacion unaria ${}^{\mathsf{c}^T}$ sobre $S^\tau/\dashv\vdash_T$:

$$
\begin{aligned}
[\varphi]_T \ \mathsf{i}^T \ [\psi]_T &= [(\varphi \wedge \psi)]_T \\
([\varphi]_T)^{\mathsf{c}^T} &= [\neg\varphi]_T
\end{aligned}
$$

Dejamos al lector los detalles.

Dada una teoria $T = (\Sigma, \tau)$, denotemos con 1^T al conjunto $\{\varphi \in S^\tau : \varphi$ es un teorema de $T\}$ y con 0^T al conjunto $\{\varphi \in S^\tau : \varphi$ es refutable en $T\}$. Ya vimos en un lema anterior que 0^T y 1^T pertenecen a $S^\tau/\dashv\vdash_T$. Podemos enunciar ahora el siguiente resultado, inspirado en la idea clasica de Boole para el calculo proposicional.

EP

Theorem 166 *Sea* $T = (\Sigma, \tau)$ *una teoria. Entonces* $(S^\tau/\dashv\vdash_T, \mathsf{s}^T, \mathsf{i}^T, {}^{\mathsf{c}^T}, 0^T, 1^T)$ *es un algebra de Boole.*

Proof. Por definicion de algebra de Boole, debemos probar que cualesquiera sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S^\tau$, se cumplen las siguientes igualdades:

(1) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_1]_T = [\varphi_1]_T$

(2) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_1]_T = [\varphi_1]_T$

(3) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_2]_T = [\varphi_2]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_1]_T$

(4) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_2]_T = [\varphi_2]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_1]_T$

(5) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ ([\varphi_2]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_2]_T) \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_3]_T$

(6) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ ([\varphi_2]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_2]_T) \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_3]_T$

(7) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ ([\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_2]_T) = [\varphi_1]_T$

(8) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ ([\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_2]_T) = [\varphi_1]_T$

(9) $0^T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_1]_T = [\varphi_1]_T$

(10) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ 1^T = 1^T$

(11) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ ([\varphi_1]_T)^{\mathsf{c}^T} = 1^T$

(12) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ ([\varphi_1]_T)^{\mathsf{c}^T} = 0^T$

(13) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ ([\varphi_2]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_2]_T) \ \mathsf{s}^T \ ([\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_3]_T)$

Veamos por ejemplo que se da (10), es decir probaremos que $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ 1^T = 1^T$, cualesquiera sea la sentencia φ_1. Ya que $\forall x_1(x_1 \equiv x_1)$ es un teorema de T, atestiguado por la prueba

1.	$c \equiv c$	AXIOMALOGICO
2.	$\forall x_1(x_1 \equiv x_1)$	GENERALIZACION(1)

(c es un nombre de cte no perteneciente a $\mathcal{C}$ y tal que $(\mathcal{C}\cup\{c\},\mathcal{F},\mathcal{R},a)$ es un tipo), tenemos que el Lema 165 nos dice que $1^T = \{\varphi\in S^\tau : \varphi$ es un teorema de $T\} = [\forall x_1(x_1\equiv x_1)]_T$. Es decir que para probar (10) debemos probar que para cualquier $\varphi_1\in S^\tau$, se da que

$$[\varphi_1]_T \;\mathsf{s}^T\; [\forall x_1(x_1\equiv x_1)]_T = \{\varphi\in S^\tau : \varphi \text{ es un teorema de } T\}$$

Ya que $[\varphi_1]_T \;\mathsf{s}^T\; [\forall x_1(x_1\equiv x_1)]_T = [\varphi_1\vee\forall x_1(x_1\equiv x_1)]_T$, debemos probar que $\varphi_1\vee\forall x_1(x_1\equiv x_1)$ es un teorema de T, lo cual es atestiguado por la siguiente prueba

1.	$c\equiv c$	AXIOMALOGICO
2.	$\forall x_1(x_1\equiv x_1)$	GENERALIZACION(1)
3.	$(\varphi_1\vee\forall x_1(x_1\equiv x_1))$	DISJUNCIONINTRODUCCION(2)

Veamos ahora que se da (6), es decir veamos que

$$[\varphi_1]_T \;\mathsf{s}^T\; ([\varphi_2]_T \;\mathsf{s}^T\; [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T \;\mathsf{s}^T\; [\varphi_2]_T) \;\mathsf{s}^T\; [\varphi_3]_T$$

cualesquiera sean $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in S^\tau$. Sean $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in S^\tau$ fijas. Por la definicion de la operacion s^T debemos probar que

$$[(\varphi_1\vee(\varphi_2\vee\varphi_3))]_T = [((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3)]_T$$

es decir, debemos probar que

$$T\vdash((\varphi_1\vee(\varphi_2\vee\varphi_3))\leftrightarrow((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3))$$

Notese que por (2) del Lema 161, basta con probar que

$$\begin{array}{lcl} T & \vdash & ((\varphi_1\vee(\varphi_2\vee\varphi_3))\rightarrow((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3)) \\ T & \vdash & (((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3)\rightarrow(\varphi_1\vee(\varphi_2\vee\varphi_3))) \end{array}$$

La siguiente es una prueba de $((\varphi_1\vee(\varphi_2\vee\varphi_3))\rightarrow((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3))$ en T y dejamos al lector la otra prueba.

1.	$(\varphi_1\vee(\varphi_2\vee\varphi_3))$	HIPOTESIS1
2.	φ_1	HIPOTESIS2
3.	$(\varphi_1\vee\varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(2)
4.	$((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3)$	TESIS2DISJUNCIONINTRODUCCION(3)
5.	$\varphi_1\rightarrow((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3)$	CONCLUSION
6.	$(\varphi_2\vee\varphi_3)$	HIPOTESIS3
7.	φ_2	HIPOTESIS4
8.	$(\varphi_1\vee\varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(6)
9.	$((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3)$	TESIS4DISJUNCIONINTRODUCCION(7)
10.	$\varphi_2\rightarrow((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3)$	CONCLUSION
11.	φ_3	HIPOTESIS5
12.	$((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3)$	TESIS5DISJUNCIONINTRODUCCION(11)
13.	$\varphi_3\rightarrow((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3)$	CONCLUSION
14.	$((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3)$	TESIS3DIVISIONPORCASOS(6, 10, 13)
15.	$(\varphi_2\vee\varphi_3)\rightarrow((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3)$	CONCLUSION
16.	$((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3)$	TESIS1DIVISIONPORCASOS(1, 5, 15)
17.	$(\varphi_1\vee(\varphi_2\vee\varphi_3))\rightarrow((\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3)$	CONCLUSION

El resto de las propiedades pueden ser probadas en forma similar, remitimos al lector a la Subseccion 9.1 donde encontrara las pruebas necesarias ■

@@finpagina@@

Dada una teoria $T = (\Sigma, \tau)$, denotaremos con $\mathcal{A}_T$ al algebra de Boole $(S^\tau / \dashv\vdash_T, \mathsf{s}^T, \mathsf{i}^T, {}^{\mathsf{c}^T}, 0^T, 1^T)$. El algebra $\mathcal{A}_T$ sera llamada el *algebra de Lindenbaum de la teoria* T. El siguiente lema nos da una descrmipcion agradable del orden parcial asociado al algebra $\mathcal{A}_T$.

Lemma 167 *Sea T una teoria y sea $\leq^T$ el orden parcial asociado al algebra de Boole $\mathcal{A}_T$ (es decir $[\varphi]_T \leq^T [\psi]_T$ si y solo si $[\varphi]_T \ \mathsf{s}^T \ [\psi]_T = [\psi]_T$). Entonces se tiene que*

$$[\varphi] \leq^T [\psi] \text{ si y solo si } T \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$$

Proof. Supongamos que $[\varphi]_T \leq^T [\psi]_T$, es decir supongamos que $[\varphi]_T \ \mathsf{s}^T \ [\psi]_T = [\psi]_T$. Por la definicion de s^T tenemos que $[(\varphi \vee \psi)]_T = [\psi]_T$, es decir $T \vdash ((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \psi)$. Es facil ver entonces que $T \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$. Reciprocamente si $T \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$, entonces facilmente podemos probar que $T \vdash ((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \psi)$, lo cual nos dice que $[(\varphi \vee \psi)]_T = [\psi]_T$. Por la definicion de s^T tenemos que $[\varphi]_T \ \mathsf{s}^T \ [\psi]_T = [\psi]_T$, lo cual nos dice que $[\varphi]_T \leq^T [\psi]_T$ ■

9.4 Teorema de completitud

A continuacion probaremos un teorema muy importante de la logica de primer orden, el cual nos asegura que nuestro concepto de prueba es lo suficientemente fuerte como para probar toda sentencia la cual sea verdadera en cada uno de los modelos de la teoria en cuestion. Antes probaremos algunos resultados necesarios.

Lemma 168 *Sean $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ y $\tau' = (\mathcal{C}', \mathcal{F}', \mathcal{R}', a')$ tipos.*

(1) Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$ y $a' \mid_{\mathcal{F} \cup \mathcal{R}} = a$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ implica $(\Sigma, \tau') \vdash \varphi$

(2) Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ y $a' = a$, entonces $(\Sigma, \tau') \vdash \varphi$ implica $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, cada vez que $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq S^\tau$.

Proof. (1) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. Entonces hay una prueba $(\varphi_1 ... \varphi_n, J_1 ... J_n)$ de φ en (Σ, τ). Sea $\mathcal{C}_1$ el conjunto de nombres de constante que ocurren en alguna φ_i y que no pertenecen a $\mathcal{C}$. Notese que aplicando varias veces el Lema 160 podemos obtener una prueba $(\tilde{\varphi}_1 ... \tilde{\varphi}_n, J_1 ... J_n)$ de φ en (Σ, τ) la cual cumple que los nombres de constante que ocurren en alguna ψ_i y que no pertenecen a $\mathcal{C}$ no pertenecen a $\mathcal{C}'$. Pero entonces $(\tilde{\varphi}_1 ... \tilde{\varphi}_n, J_1 ... J_n)$ es una prueba de φ en (Σ, τ'), con lo cual $(\Sigma, \tau') \vdash \varphi$

(2) Supongamos $(\Sigma, \tau') \vdash \varphi$. Entonces hay una prueba $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ de φ en (Σ, τ'). Veremos que $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ es una prueba de φ en (Σ, τ). Ya que $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ es una prueba de

φ en (Σ, τ') hay un conjunto finito $\mathcal{C}_1$, disjunto con $\mathcal{C}'$, tal que $(\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}_1, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo y cada $\boldsymbol{\varphi}_i$ es una sentencia de tipo $(\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}_1, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$. Notese que $\widetilde{\mathcal{C}_1} = \mathcal{C}_1 \cup (\mathcal{C}' - \mathcal{C})$ es tal que $(\mathcal{C} \cup \widetilde{\mathcal{C}_1}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo y cada $\boldsymbol{\varphi}_i$ es una sentencia de tipo $(\mathcal{C} \cup \widetilde{\mathcal{C}_1}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$, con lo cual $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ cunple el punto 1. de la definicion de prueba. Todos los otros puntos se cumplen en forma directa, exepto los puntos 4(t) y 4(u)i para los cuales es necesario notar que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$. ■

Lemma 169 *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria y supongamos que τ tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de Σ. Entonces para cada formula $\varphi =_d \varphi(v)$, se tiene que $[\forall v \varphi(v)]_T = \inf(\{[\varphi(t)]_T : t$ es un termino cerrado$\})$.*

Proof. Primero notese que $[\forall v \varphi(v)]_T \leq^T [\varphi(t)]_T$, para todo termino cerrado t, ya que podemos dar la siguiente prueba:

1.	$\forall v \varphi(v)$	HIPOTESIS1
2.	$\varphi(t)$	TESIS1PARTICULARIZACION(1)
3.	$(\forall v \varphi(v) \rightarrow \varphi(t))$	CONCLUSION

Supongamos ahora que $[\psi]_T \leq^T [\varphi(t)]_T$, para todo termino cerrado t. Por hipotesis hay un nombre de cte $c \in \mathcal{C}$ el cual no ocurre en los elementos de $\Sigma \cup \{\psi, \varphi(v)\}$. Ya que $[\psi]_T \leq^T [\varphi(c)]_T$, hay una prueba $(\varphi_1 ... \varphi_n, J_1 ... J_n)$ de $(\psi \rightarrow \varphi(c))$ en T. Pero entonces es facil de chequear que la siguiente es una prueba en $(\Sigma, (\mathcal{C} - \{c\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a))$ de $(\psi \rightarrow \forall v \varphi(v))$:

1.	φ_1	J_1
2.	φ_2	J_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n.$	$\varphi_n = (\psi \rightarrow \varphi(c))$	J_n
$n+1.$	ψ	HIPOTESIS$\bar{m}$
$n+2.$	$\varphi(c)$	MODUSPONENS$(\bar{n}, \overline{n+1})$
$n+3.$	$\forall v \varphi(v)$	TESIS$\bar{m}$GENERALIZACION$(\overline{n+2})$
$n+4.$	$(\psi \rightarrow \forall v \varphi(v))$	CONCLUSION

(con m elejido suficientemente grande). Por el Lema 168 tenemos entonces que $T \vdash (\psi \rightarrow \forall v \varphi(v))$ ■

Lemma 170 *(de Coincidencia): Sean τ y τ' dos tipos cualesquiera y sea $\tau_\cap$ dado por $\mathcal{C}_\cap = \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$, $\mathcal{F}_\cap = \{f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' : a(f) = a'(f)\}$, $\mathcal{R}_\cap = \{r \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}' : a(r) = a'(r)\}$ y $a_\cap = a \mid_{\mathcal{F}_\cap \cup \mathcal{R}_\cap}$. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ modelos de tipo τ y τ' respectivamente. Supongamos que $A = A'$ y que $c^{\mathbf{A}} = c^{\mathbf{A}'}$, para cada $c \in \mathcal{C}_\cap$, $f^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{A}'}$, para cada $f \in \mathcal{F}_\cap$ y $r^{\mathbf{A}} = r^{\mathbf{A}'}$, para cada $r \in \mathcal{R}_\cap$. Entonces*

(a) Para cada $t =_d t(\vec{v}) \in T^{\tau_\cap}$ se tiene que $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{A}'}[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^n$

(b) Para cada $\varphi =_d \varphi(\vec{v}) \in F^{\tau_\cap}$ se tiene que

$$\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \text{ si y solo si } \mathbf{A}' \models \varphi[\vec{a}].$$

(c) Si $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq S^{\tau_\cap}$, *entonces*

$$(\Sigma, \tau) \models \varphi \text{ sii } (\Sigma, \tau') \models \varphi.$$

Proof. (a) y (b) son directos por induccion.

(c) Supongamos que $(\Sigma, \tau) \models \varphi$. Sea $\mathbf{A}'$ un modelo de τ' tal que $\mathbf{A}' \models \Sigma$. Sea $a \in A'$ un elemento fijo. Sea $\mathbf{A}$ el modelo de tipo τ definido de la siguiente manera

- universo de $\mathbf{A} = A'$
- $c^{\mathbf{A}} = c^{\mathbf{A}'}$, para cada $c \in \mathcal{C}_\cap$,
- $f^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{A}'}$, para cada $f \in \mathcal{F}_\cap$
- $r^{\mathbf{A}} = r^{\mathbf{A}'}$, para cada $r \in \mathcal{R}_\cap$
- $c^{\mathbf{A}} = a$, para cada $c \in \mathcal{C} - \widetilde{\mathcal{C}}$
- $f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_{a(f)}) = a$, para cada $f \in \mathcal{F} - \mathcal{F}_\cap$, $a_1, ..., a_{a(f)} \in A'$
- $r^{\mathbf{A}} = \emptyset$, para cada $r \in \mathcal{R} - \mathcal{R}_\cap$

Ya que $\mathbf{A}' \models \Sigma$, (b) nos dice que $\mathbf{A} \models \Sigma$, lo cual nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi$. Nuevamente por (b) tenemos que $\mathbf{A}' \models \varphi$, con lo cual hemos probado que $(\Sigma, \tau') \models \varphi$ ■

Ejercicio: Sean τ y τ' dos tipos cualesquiera y sea $\tau_\cap$ definido como en el lema anterior. Pruebe que $T^{\tau_\cap} = T^\tau \cap T^{\tau'}$ y $F^{\tau_\cap} = F^\tau \cap F^{\tau'}$

E

Lemma 171 *Sea* τ *un tipo. Hay una infinitupla* $(\gamma_1, \gamma_2, ...) \in F^{\tau\mathbf{N}}$ *tal que:*

(1) $|Li(\gamma_j)| \leq 1$, *para cada* $j = 1, 2, ...$

(2) Si $|Li(\gamma)| \leq 1$, *entonces* $\gamma = \gamma_j$, *para algun* $j \in \mathbf{N}$

Proof. Notese que las formulas de tipo τ son palabras de algun alfabeto finito A. Dado un orden total estricto $<$ para A, podemos definir

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1 & = & \min_\alpha^< (\alpha \in F^\tau \wedge |Li(\alpha)| \leq 1) \\ \gamma_{t+1} & = & \min_\alpha^< (\alpha \in F^\tau \wedge |Li(\alpha)| \leq 1 \wedge (\forall i \in \omega)_{i \leq t} \alpha \neq \gamma_i) \end{array}$$

Claramente esta sucesion cumple (1) y es facil ver que tambien se cumple la propiedad (2). ■

EP

Theorem 172 *(Completitud) (Godel) Sea* $T = (\Sigma, \tau)$ *una teoria de primer orden. Si* $T \models \varphi$, *entonces* $T \vdash \varphi$.

Proof. Primero probaremos completitud para el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de Σ. Lo probaremos por el absurdo, es decir supongamos que φ_0 es tal que $T \models \varphi_0$ y $T \not\vdash \varphi_0$. Notese que ya que $T \not\vdash \varphi_0$, tenemos que $[\neg\varphi_0]_T \neq 0^T$. Para cada $j \in \mathbf{N}$, sea $w_j \in Var$ tal que $Li(\gamma_j) \subseteq \{w_j\}$. Para cada j, declaremos $\gamma_j =_d \gamma_j(w_j)$. Notese que por el Lema 169 tenemos que $\inf\{[\gamma_j(t)]_T : t \in T_c^\tau\} = [\forall w_j \gamma_j(w_j)]_T$, para cada $j = 1, 2, ...$ Por el Teorema de Rasiova y Sikorski tenemos que hay un filtro primo de $\mathcal{A}_{(\Sigma,\tau)}$, $\mathcal{U}$ el cual cumple:

(a) $[\neg\varphi_0]_T \in \mathcal{U}$

(b) para cada $j \in \mathbf{N}$, $\{[\gamma_j(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq \mathcal{U}$ implica que $[\forall w_j \gamma_j(w_j)]_T \in \mathcal{U}$

Ya que la sucesion de las γ_i cubre todas las formulas con a lo sumo una variable libre, podemos reescribir la propiedad (b) de la siguiente manera

(b)$'$ para cada $\varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau$, si $\{[\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq \mathcal{U}$ entonces $[\forall v \varphi(v)]_T \in \mathcal{U}$

Definamos sobre T_c^τ la siguiente relacion:

$$t \bowtie s \text{ si y solo si } [(t \equiv s)]_T \in \mathcal{U}.$$

Veamos entonces que:

(1) $\bowtie$ es de equivalencia.

(2) Para cada $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau$, $t_1, ..., t_n, s_1, ..., s_n \in T_c^\tau$, si $t_1 \bowtie s_1$, $t_2 \bowtie s_2$, ..., $t_n \bowtie s_n$, entonces $[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}$ si y solo si $[\varphi(s_1, ..., s_n)]_T \in \mathcal{U}$.

(3) Para cada $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1, ..., t_n, s_1, ..., s_n \in T_c^\tau$,

$$t_1 \bowtie s_1, t_2 \bowtie s_2, ..., \ t_n \bowtie s_n \text{ implica } f(t_1, ..., t_n) \bowtie f(s_1, ..., s_n).$$

Probaremos (2). Notese que

$$T \vdash ((t_1 \equiv s_1) \wedge (t_2 \equiv s_2) \wedge ... \wedge (t_n \equiv s_n) \wedge \varphi(t_1, ..., t_n)) \rightarrow \varphi(s_1, ..., s_n)$$

lo cual nos dice que

$$[(t_1 \equiv s_1)]_T \ \mathsf{i}^T \ [(t_2 \equiv s_2)]_T \ \mathsf{i}^T \ ... \ \mathsf{i}^T \ [(t_n \equiv s_n)]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \leq^T [\varphi(s_1, ..., s_n)]_T$$

de lo cual se desprende que

$$[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} \text{ implica } [\varphi(s_1, ..., s_n)]_T \in \mathcal{U}$$

ya que $\mathcal{U}$ es un filtro. La otra implicacion es analoga.

Para probar (3) podemos tomar $\varphi = (f(v_1, ..., v_n) \equiv f(s_1, ..., s_n))$ y aplicar (2).

Definamos ahora un modelo $\mathbf{A}_\mathcal{U}$ de tipo τ de la siguiente manera:

- Universo de $\mathbf{A}_{\mathcal{U}} = T_c^\tau/\bowtie$

- $f^{\mathbf{A}_{\mathcal{U}}}(t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie) = f(t_1, ..., t_n)/\bowtie$, $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$

- $r^{\mathbf{A}_{\mathcal{U}}} = \{(t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie) : [r(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}\}$, $r \in \mathcal{R}_n$.

Notese que la definicion de $f^{\mathbf{A}_{\mathcal{U}}}$ es inambigua por (3). Probaremos las siguientes propiedades basicas:

(4) Para cada $t =_d t(v_1, ..., v_n) \in T^\tau$, $t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$, tenemos que

$$t^{\mathbf{A}_{\mathcal{U}}}[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] = t(t_1, ..., t_n)/\bowtie$$

(5) Para cada $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau$, $t_1, ..., t_n \in T_c^\tau$, tenemos que

$$\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \text{ si y solo si } [\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}.$$

La prueba de (4) es directa por induccion. Probaremos (5) por induccion en el k tal que $\varphi \in F_k^\tau$. El caso $k = 0$ es dejado al lector. Supongamos (5) vale para $\varphi \in F_k^\tau$. Sea $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$. Hay varios casos:

CASO $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$.

Notese que por la Convencion Notacional 6, tenemos que $\varphi_i =_d \varphi_i(v_1, ..., v_n)$. Tenemos entonces

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi_1[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \text{ o } \mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi_2[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \\
\Updownarrow \\
[\varphi_1(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} \text{ o } [\varphi_2(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[\varphi_1(t_1, ..., t_n)]_T \;\mathsf{s}\; [\varphi_2(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[(\varphi_1(t_1, ..., t_n) \vee \varphi_2(t_1, ..., t_n))]_T \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}.
\end{gathered}$$

CASO $\varphi = \forall v \varphi_1$, con $v \in Var - \{v_1, ..., v_n\}$. Notese que por la Convencion Notacional 6, tenemos que $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n, v)$. Tenemos entonces

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi_1[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie, t/\bowtie], \text{ para todo } t \in T_c^\tau \\
\Updownarrow \\
[\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T \in \mathcal{U}, \text{ para todo } t \in T_c^\tau \\
\Updownarrow \\
[\forall v \varphi_1(t_1, ..., t_n, v)]_T \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}.
\end{gathered}$$

CASO $\varphi = \exists v \varphi_1$, con $v \in Var - \{v_1, ..., v_n\}$. Notese que por la Convencion Notacional 6, tenemos que $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, ..., v_n, v)$. Tenemos entonces

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie] \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi_1[t_1/\bowtie, ..., t_n/\bowtie, t/\bowtie], \text{ para algun } t \in T_c^\tau \\
\Updownarrow \\
[\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T \in \mathcal{U}, \text{ para algun } t \in T_c^\tau \\
\Updownarrow \\
([\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T)^{\mathsf{c}^T} \notin \mathcal{U}, \text{ para algun } t \in T_c^\tau \\
\Updownarrow \\
[\neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, t)]_T \notin \mathcal{U}, \text{ para algun } t \in T_c^\tau \\
\Updownarrow \\
[\forall v\ \neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, v)]_T \notin \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
([\forall v\ \neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, v)]_T)^{\mathsf{c}^T} \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[\neg\forall v\ \neg\varphi_1(t_1, ..., t_n, v)]_T \in \mathcal{U} \\
\Updownarrow \\
[\varphi(t_1, ..., t_n)]_T \in \mathcal{U}.
\end{gathered}$$

Pero ahora notese que (5) en particular nos dice que para cada sentencia $\psi \in S^\tau$, $\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \psi$ si y solo si $[\psi]_T \in \mathcal{U}$. De esta forma llegamos a que $\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \Sigma$ y $\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \neg\varphi_0$, lo cual contradice la suposicion de que $T \models \varphi_0$.

Ahora supongamos que τ es cualquier tipo. Sean s_1 y s_2 un par de simbolos no pertenecientes a la lista

$$\forall \quad \exists \quad \neg \quad \vee \quad \wedge \quad \to \quad \leftrightarrow \quad (\quad) \quad , \quad \equiv \quad \mathsf{X} \quad \mathit{0} \quad \mathit{1} \quad ... \quad \mathit{9} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad ... \quad \mathbf{9}$$

y tales que ninguno ocurra en alguna palabra de $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$. Si $T \models \varphi$, entonces usando el Lema de Coincidencia se puede ver que $(\Sigma, (\mathcal{C} \cup \{s_1 s_2 s_1, s_1 s_2 s_2 s_1, ...\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)) \models \varphi$, por lo cual

$$(\Sigma, (\mathcal{C} \cup \{s_1 s_2 s_1, s_1 s_2 s_2 s_1, ...\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)) \vdash \varphi.$$

Pero por Lema 168, tenemos que $T \vdash \varphi$. ■

Corollary 173 *Toda teoria consistente tiene un modelo.*

Proof. Supongamos (Σ, τ) es consistente y no tiene modelos. Entonces $(\Sigma, \tau) \models (\varphi \wedge \neg\varphi)$, con lo cual por completitud $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$, lo cual es absurdo. ■

Corollary 174 *(Teorema de Compacidad)*

(a) Si (Σ, τ) es tal que (Σ_0, τ) tiene un modelo, para cada subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, entonces (Σ, τ) tiene un modelo

(b) Si $(\Sigma, \tau) \models \varphi$, entonces hay un subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que $(\Sigma_0, \tau) \models \varphi$.

Proof. (a) Si (Σ, τ) fuera inconsistente habria un subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que la teoria (Σ_0, τ) es inconsistente (Σ_0 puede ser formado con los axiomas de Σ usados en una prueba que atestigue que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$). O sea que (Σ, τ) es consistente por lo cual tiene un modelo.

(b) Si $(\Sigma, \tau) \models \varphi$, entonces por completitud, $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. Pero entonces hay un subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que $(\Sigma_0, \tau) \vdash \varphi$, es decir tal que $(\Sigma_0, \tau) \models \varphi$ (correccion). ■

@@finpagina@@

9.5 Logica ecuacional

Esta secci· n no va

En esta seccion veremos que cuando los axiomas de una teoria son ecuacionales, entonces aquellos teoremas que tambien tienen forma de ecuaciones pueden ser probados via ciertas pruebas muy simples llamadas ecuacionales.

9.5.1 El algebra de terminos

Dado un tipo algebraico τ, hay una forma natural de definir un algebra $\mathbf{T}^\tau$ cuyo universo es T^τ, de la siguiente manera

(1) $c^{\mathbf{T}^\tau} = c$, para cada $c \in \mathcal{C}$

(2) $f^{\mathbf{T}^\tau}(t_1, ..., t_n) = f(t_1, ..., t_n)$, para todo $t_1, ..., t_n \in T^\tau$, $f \in \mathcal{F}_n$.

Llamaremos a $\mathbf{T}^\tau$ el *algebra de terminos de tipo* τ.

Example 175 *Supongamos* $\tau = (\emptyset, \{f\}, \emptyset, \{(f, 1)\})$. *Entonces el universo de* $\mathbf{T}^\tau$ *es*

$\{x_1, f(x_1), f(f(x_1)), ...\} \cup$
$\{x_2, f(x_2), f(f(x_2)), ...\} \cup$
$\{x_3, f(x_3), f(f(x_3)), ...\} \cup$
$\vdots$

La funcion que interpreta a f *en* $\mathbf{T}^\tau$ *es la que a cada elemento del conjunto anterior le asigna el primer elemento que esta a su derecha. Notese entonces que* $\mathbf{T}^\tau$ *resulta isomorfa al algebra* $\mathbf{A}$ *definida por*

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{N} \times \mathbf{N} \\ f^{\mathbf{A}}((n, m)) &= (n, m + 1) \end{aligned}$$

Lemma 176 *Dados* $t_1, ..., t_n$, $t =_d t(x_1, ..., x_n) \in T^\tau$, *se tiene que* $t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, ..., t_n] = t(t_1, ..., t_n)$.

Proof. Para cada $k \geq 0$, sea

- Teo$_k$: Dados $t_1, ..., t_n \in T^\tau$ y $t =_d t(x_1, ..., x_n) \in T^\tau_k$, se tiene que $t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, ..., t_n] = t(t_1, ..., t_n)$.

Veamos que es cierto Teo_0. Hay dos casos
Caso $t =_d t(x_1,...,x_n) = c \in \mathcal{C}$.

Entonces tenemos

$$\begin{array}{rcl} t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1,...,t_n] & = & c^{\mathbf{T}^\tau} \\ & = & c \\ & = & t(t_1,...,t_n) \end{array}$$

Caso $t =_d t(x_1,...,x_n) = x_i$, para algun i.

Entonces tenemos

$$\begin{array}{rcl} t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1,...,t_n] & = & t_i \\ & = & t(t_1,...,t_n) \end{array}$$

Veamos que Teo_k implica Teo_{k+1}. Supongamos que vale Teo_k. Sean $t_1,...,t_n \in T^\tau$ y $t =_d t(x_1,...,x_n) \in T^\tau_{k+1} - T^\tau_k$. Hay $f \in \mathcal{F}_m$, con $m \geq 1$, y terminos $s_1,...,s_m \in T^\tau_k$ tales que $t = f(s_1,...,s_m)$. Notese que $s_i =_d s_i(x_1,...,x_n)$, $i = 1,...,m$. Tenemos entonces que

$$\begin{array}{rcl} t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1,...,t_n] & = & f(s_1,...,s_m)^{\mathbf{T}^\tau}[t_1,...,t_n] \\ & = & f^{\mathbf{T}^\tau}(s_1^{\mathbf{T}^\tau}[t_1,...,t_n],...,s_m^{\mathbf{T}^\tau}[t_1,...,t_n]) \\ & = & f^{\mathbf{T}^\tau}(s_1(t_1,...,t_n),...,s_m(t_1,...,t_n)) \\ & = & f(s_1(t_1,...,t_n),...,s_m(t_1,...,t_n)) \\ & = & t(t_1,...,t_n) \end{array}$$

con lo cual vale Teo_{k+1} ■

El algebra de terminos tiene la siguiente propiedad fundamental:

Lemma 177 *(Universal maping property) Si* $\mathbf{A}$ *es cualquier* τ*-algebra y* $F : Var \to A$*, es una funcion cualquiera, entonces* F *puede ser extendida a un homomorfismo* $\bar{F} : \mathbf{T}^\tau \to \mathbf{A}$.

Proof. Definamos $\bar{F}$ de la siguiente manera:

$$\bar{F}(t) = t^{\mathbf{A}}[(F(x_1), F(x_2), ...)]$$

Es claro que $\bar{F}$ extiende a F. Veamos que es un homomorfismo. Dada $c \in \mathcal{C}$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \bar{F}(c^{\mathbf{T}^\tau}) & = & \bar{F}(c) \\ & = & c^{\mathbf{A}}[(F(x_1), F(x_2), ...)] \\ & = & c^{\mathbf{A}} \end{array}$$

Dados $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1,...,t_n \in T^\tau$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \bar{F}(f^{\mathbf{T}^\tau}(t_1,...,t_n)) & = & \bar{F}(f(t_1,...,t_n)) \\ & = & f(t_1,...,t_n)^{\mathbf{A}}[(F(x_1), F(x_2), ...)] \\ & = & f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[(F(x_1), F(x_2), ...)],...,t_n^{\mathbf{A}}[(F(x_1), F(x_2), ...)]) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(\bar{F}(t_1),...,\bar{F}(t_n)) \end{array}$$

con lo cual hemos probado que $\bar{F}$ es un homomorfismo ■

9.5.2 Identidades y teorema de completitud

Dados $t, s \in T^\tau$, con $t \approx s$ denotaremos la siguiente sentencia de tipo τ:

$$\forall x_1 ... \forall x_n \ (t \equiv s)$$

donde n es el menor j tal que $\{x_1, ..., x_j\}$ contiene a todas las variables que ocurren en t y s. Notese que este n es 0 cuando t y s son terminos cerrados, es decir que $t \approx s$ denota a la sentencia $(t \equiv s)$, cuando $t, s \in T_c^\tau$. Las sentencias $t \approx s$, con $t, s \in T^\tau$, seran llamadas *identidades (de tipo τ)*. Notese que si $t =_d t(x_1, ..., x_m)$ y $s =_d s(x_1, ..., x_m)$, entonces dado una τ-algebra $\mathbf{A}$, tenemos que $\mathbf{A} \models t \approx s$ sii $t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_m] = s^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_m]$, para cada $(a_1, ..., a_m) \in A^m$. (Independientemente de que m sea el menor j tal que $\{x_1, ..., x_j\}$ contiene a las variables que ocurren en t y s.) Tambien notese que $\mathbf{A} \models t \approx s$ sii $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$.

Una teoria de primer orden (Σ, τ) sera llamada *ecuacional* si τ es un tipo algebraico y cada elemento de Σ es una identidad de tipo τ. Por supuesto, el teorema de completitud de Godel nos garantiza que si T es una teoria ecuacional y $T \vDash t \approx s$, entonces hay una prueba de $t \approx s$ en T. Sin envargo, en dicha prueba puede haber sentencias las cuales no sean identidades. Una pregunta interesante es la siguiente:

Pregunta: ¿Hay una nocion de "prueba ecuacional" la cual sea:

- Correcta: si hay una prueba ecuacional de $t \approx s$ en T, entonces $t \approx s$ es verdadera en cada modelo de T
- Completa: si $T \vDash t \approx s$, entonces hay una prueba ecuacional de $t \approx s$ en T?

A continuacion mostraremos que esto es posible y que la nocion de prueba ecuacional que se puede dar es muy natural y simple, es decir si sabemos que en una teoria todos los axiomas son identidades, entonces a los fines de probar identidades las pruebas de primer orden clasicas pueden ser reemplazadas por pruebas con un formato mucho mas amigable. Primero introducimos una serie de conjuntos los cuales poseen informacion deductiva ecuacional basica.

Sea

$$TransEc^\tau = \{(t \approx s, s \approx p, t \approx p) : t, s, p \in T^\tau\}$$

Diremos que φ *se deduce de ψ_1y ψ_2 por la regla de transitividad ecuacional, respecto a τ* para expresar que $(\psi_1, \psi_2, \varphi) \in TransEc^\tau$. Sea

$$SimEc^\tau = \{(t \approx s, s \approx t) : t, s \in T^\tau\}$$

Diremos que φ *se deduce de ψ_1 por la regla de simetria ecuacional, respecto a τ* para expresar que $(\psi_1, \varphi) \in SimEc^\tau$. Sea

$$\begin{array}{c} SubsEc^\tau = \{(t \approx s, t(p_1, ..., p_n) \approx s(p_1, ..., p_n)) : t =_d t(x_1, ..., x_n) \\ s =_d s(x_1, ..., x_n) \text{ y } p_1, ..., p_n \in T^\tau\} \end{array}$$

Diremos que φ *se deduce de* ψ_1 *por la regla de substitucion ecuacional, respecto a* τ para expresar que $(\psi_1, \varphi) \in SubsEc^\tau$. Sea

$$\begin{array}{c} ReempEc^\tau = \{(t \approx s, r \approx \tilde{r}) : t, s, r \in T^\tau \text{ y } \tilde{r} = \text{resultado} \\ \text{de reemplazar algunas ocurrencias de } t \text{ en } r \text{ por } s\} \end{array}$$

Diremos que φ *se deduce de* ψ_1 *por la regla de reemplazo ecuacional, respecto a* τ para expresar que $(\psi_1, \varphi) \in ReempEc^\tau$.

La identidad $x_1 \approx x_1$ sera llamada *axioma logico ecuacional de tipo* τ. Notese que dicha identidad es una sentencia universalmente valida.

Lemma 178 *Todas las reglas anteriores son universales en el sentido que si* φ *se deduce de* $\psi_1, ..., \psi_k$ *por alguna de estas reglas, entonces* $((\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_k) \rightarrow \varphi)$ *es una sentencia universalmente valida.*

Proof. Veamos que la regla de reemplazo es universal. Basta con ver por induccion en k que

- Teo$_k$: Sean $t, s \in T^\tau$, $r \in T_k^\tau$ y sea $\mathbf{A}$ una τ-algebra tal que $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$. Entonces $r^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = \tilde{r}^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$, donde $\tilde{r}$ es el resultado de reemplazar algunas ocurrencias de t en r por s.

La prueba de Teo$_0$ es dejada al lector. Asumamos que vale Teo$_k$ y probemos que vale Teo$_{k+1}$. Sean $t, s \in T^\tau$, $r \in T_{k+1}^\tau - T_k^\tau$ y sea $\mathbf{A}$ una τ-algebra tal que $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$. Sea $\tilde{r}$ el resultado de reemplazar algunas ocurrencias de t en r por s. El caso $t = r$ es trivial. Supongamos entonces que $t \neq r$. Supongamos $r = f(r_1, ..., r_n)$, con $r_1, ..., r_n \in T_k^\tau$ y $f \in \mathcal{F}_n$. Notese que por Lema 125 tenemos que $\tilde{r} = f(\tilde{r}_1, ..., \tilde{r}_n)$, donde cada $\tilde{r}_i$ es el resultado de reemplazar algunas ocurrencias de t en r_i por s. Para $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$ se tiene que

$$\begin{array}{rcll} r^{\mathbf{A}}[\vec{a}] & = & f(r_1, ..., r_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] & \\ & = & f^{\mathbf{A}}(r_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., r_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) & \\ & = & f^{\mathbf{A}}(\tilde{r}_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., \tilde{r}_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) & \text{por Teo}_k \\ & = & f(\tilde{r}_1, ..., \tilde{r}_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] & \\ & = & \tilde{r}^{\mathbf{A}}[\vec{a}] & \end{array}$$

lo cual prueba Teo$_{k+1}$

Veamos que la regla de substitucion es universal. Supongamos $\mathbf{A} \models t \approx s$, con $t =_d t(x_1, ..., x_n)$ y $s =_d s(x_1, ..., x_n)$. Veremos que entonces $\mathbf{A} \models t(p_1, ..., p_n) \approx s(p_1, ..., p_n)$. Supongamos que $p_i =_d p_i(x_1, ..., x_m)$, para cada $i = 1, ..., n$. Por (a) del Lema 150, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} t(p_1, ..., p_n) & = & _d t(p_1, ..., p_n)(x_1, ..., x_m) \\ s(p_1, ..., p_n) & = & _d s(p_1, ..., p_n)(x_1, ..., x_m) \end{array}$$

Sea $\vec{a} \in A^m$. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} t(p_1, ..., p_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] & = & t^{\mathbf{A}}\left[p_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., p_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]\right] \\ & = & s^{\mathbf{A}}\left[p_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., p_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]\right] \\ & = & s(p_1, ..., p_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] \end{array}$$

lo cual nos dice que $\mathbf{A} \models t(p_1, ..., p_n) \approx s(p_1, ..., p_n)$ ■

Dada una teoria ecuacional (Σ, τ) y una identidad $p \approx q$ de tipo τ, una *prueba ecuacional* de $p \approx q$ en (Σ, τ) sera una palabra $\boldsymbol{\varphi} \in S^{\tau+}$ tal que

(1) Cada $\boldsymbol{\varphi}_k$, con $k = 1, ..., n(\boldsymbol{\varphi})$, es una identidad de tipo τ y $\boldsymbol{\varphi}_{n(\boldsymbol{\varphi})} = p \approx q$

(2) Para cada $k = 1, ..., n(\boldsymbol{\varphi})$, se da alguna de las siguientes

   (a) $\boldsymbol{\varphi}_k = x_1 \approx x_1$
   (b) $\boldsymbol{\varphi}_k \in \Sigma$
   (c) hay $i, j < k$ tales que $\boldsymbol{\varphi}_k$ se deduce por la regla de transitividad ecuacional a partir de $\boldsymbol{\varphi}_i$ y $\boldsymbol{\varphi}_j$
   (d) hay $i < k$ tal que $\boldsymbol{\varphi}_k$ se deduce por la regla de simetria ecuacional a partir de $\boldsymbol{\varphi}_i$
   (e) hay $i < k$ tal que $\boldsymbol{\varphi}_k$ se deduce por la regla de substitucion ecuacional a partir de $\boldsymbol{\varphi}_i$
   (f) hay $i < k$ tal que $\boldsymbol{\varphi}_k$ se deduce por la regla de reemplazo ecuacional a partir de $\boldsymbol{\varphi}_i$

Escribiremos $(\Sigma, \tau) \vdash_{ec} p \approx q$ cuando haya una prueba ecuacional de $p \approx q$ en (Σ, τ).

Theorem 179 *(Correccion) Si* $(\Sigma, \tau) \vdash_{ec} p \approx q$, *entonces* $(\Sigma, \tau) \models p \approx q$.

Proof. Sea $\boldsymbol{\varphi}$ una prueba ecuacional de $p \approx q$ en (Σ, τ). Usando el lema anterior se puede probar facilmente por induccion en i que $(\Sigma, \tau) \models \boldsymbol{\varphi}_i$, por lo cual $(\Sigma, \tau) \models p \approx q$. ■

Theorem 180 *(Completitud) (Birkhoff) Sea* (Σ, τ) *una teoria ecuaconal. Si* $(\Sigma, \tau) \models p \approx q$, *entonces* $(\Sigma, \tau) \vdash_{ec} p \approx q$.

Proof. Supongamos $(\Sigma, \tau) \models p \approx q$. Sea θ la siguiente relacion binaria sobre T^τ:

$$\theta = \{(t, s) : (\Sigma, \tau) \vdash_{ec} t \approx s\}.$$

Dejamos al lector probar que θ es una congruencia de $\mathbf{T}^\tau$. Veamos que

(*) $t^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[t_1/\theta, ..., t_n/\theta] = t(t_1, ..., t_n)/\theta$, para todo $t_1, ..., t_n$, $t =_d t(x_1, ..., x_n)$

Por Corolario 144 tenemos que

$$t^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[t_1/\theta, ..., t_n/\theta] = t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, ..., t_n]/\theta$$

Pero por Lema 176 tenemos que $t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, ..., t_n] = t(t_1, ..., t_n)$ por lo cual (*) es verdadera.

Veamos que $\mathbf{T}^\tau/\theta \models \Sigma$. Sea $t \approx s$ un elemento de Σ, con $t =_d t(x_1, ..., x_n)$ y $s =_d s(x_1, ..., x_n)$. Veremos que $\mathbf{T}^\tau/\theta \models t \approx s$, es decir veremos que

$$t^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[t_1/\theta, ..., t_n/\theta] = s^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[t_1/\theta, ..., t_n/\theta]$$

para todo $t_1/\theta, ..., t_n/\theta \in T^\tau/\theta$. Notese que

$$(\Sigma, \tau) \vdash_{ec} t(t_1, ..., t_n) \approx s(t_1, ..., t_n)$$

por lo cual $t(t_1, ..., t_n)/\theta = s(t_1, ..., t_n)/\theta$. Por (*) tenemos entonces

$$t^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[t_1/\theta, ..., t_n/\theta] = t(t_1, ..., t_n)/\theta = s(t_1, ..., t_n)/\theta = s^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[t_1/\theta, ..., t_n/\theta],$$

lo cual nos dice que $\mathbf{T}^\tau/\theta$ satisface la identidad $t \approx s$.

Ya que $\mathbf{T}^\tau/\theta \models \Sigma$, por hipotesis tenemos que $\mathbf{T}^\tau/\theta \models p \approx q$. Es decir que si $p =_d p(x_1, ..., x_n)$ y $q =_d q(x_1, ..., x_n)$ tenemos que $p^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[t_1/\theta, ..., t_n/\theta] = q^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[t_1/\theta, ..., t_n/\theta]$, para todo $t_1, ..., t_n \in T^\tau$. En particular, tomando $t_i = x_i$, $i = 1, ..., n$ tenemos que

$$p^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[x_1/\theta, ..., x_n/\theta] = q^{\mathbf{T}^\tau/\theta}[x_1/\theta, ..., x_n/\theta]$$

lo cual por (*) nos dice que $p/\theta = q/\theta$, produciendo $(\Sigma, \tau) \vdash_{ec} p \approx q$. $\blacksquare$

Corollary 181 *Sea* (Σ, τ) *una teoria ecuacional. Si* $(\Sigma, \tau) \vdash p \approx q$*, entonces* $(\Sigma, \tau) \vdash_{ec} p \approx q$.

@@finpagina@@

10 La aritmetica de Peano

A continuacion estudiaremos una teoria de primer orden la cual ha sido paradigmatica en el desarrollo de la logica. Sea $\tau_A = (\{0, 1\}, \{+^2, .^2\}, \{\leq^2\}, a)$. Para poder definir el conjunto de axiomas de dicha teoria, primero debemos definir un tipo de sentencias asociadas a ciertos datos. Dada una formula $\psi \in F^{\tau_A}$ y variables $v_1, ..., v_{n+1}$, con $n \geq 0$, tales que $Li(\psi) = \{v_1, ..., v_{n+1}\}$ y $v_i \neq v_j$ siempre que $i \neq j$, denotaremos con $Ind_{\psi, v_1, ..., v_{n+1}}$ a la siguiente sentencia de tipo τ_A

$$\forall v_1 ... \forall v_n \; ((\psi(\vec{v}, 0) \wedge \forall v_{n+1} \; (\psi(\vec{v}, v_{n+1}) \rightarrow \psi(\vec{v}, +(v_{n+1}, 1)))) \rightarrow \forall v_{n+1} \; \psi(\vec{v}, v_{n+1}))$$

donde suponemos que hemos declarado $\psi =_d \psi(v_1, ..., v_{n+1})$. Notese que si por ejemplo $Li(\psi) = \{x_1, x_2, x_3\}$, entonces las seis sentencias

$$Ind_{\psi, x_1, x_2, x_3} \;\; Ind_{\psi, x_1, x_3, x_2} \;\; Ind_{\psi, x_2, x_1, x_3} \;\; Ind_{\psi, x_2, x_3, x_1} \;\; Ind_{\psi, x_3, x_1, x_2} \;\; Ind_{\psi, x_3, x_2, x_1}$$

son todas distintas. Sea Σ_A el conjunto formado por todas las sentencias de la forma $Ind_{\psi, v_1, ..., v_{n+1}}$ junto con las siguientes

1. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \; x_1 + (x_2 + x_3) \equiv (x_1 + x_2) + x_3$
2. $\forall x_1 \forall x_2 \; x_2 + x_1 \equiv x_1 + x_2$
3. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \; x_1.(x_2.x_3) \equiv (x_1.x_2).x_3$
4. $\forall x_1 \forall x_2 \; x_2.x_1 \equiv x_1.x_2$
5. $\forall x_1 \; x_1 + 0 \equiv x_1$
6. $\forall x_1 \; x_1.0 \equiv 0$
7. $\forall x_1 \; x_1.1 \equiv x_1$
8. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \; x_1.(x_2 + x_3) \equiv (x_1.x_2) + (x_1.x_3)$
9. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \; (x_1 + x_3 \equiv x_2 + x_3 \rightarrow x_1 \equiv x_2)$
10. $\forall x_1 \; x_1 \leq x_1$
11. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \; ((x_1 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_3) \rightarrow x_1 \leq x_3)$
12. $\forall x_1 \forall x_2 \; ((x_1 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_1) \rightarrow x_1 \equiv x_2)$
13. $\forall x_1 \forall x_2 \; (x_1 \leq x_2 \vee x_2 \leq x_1)$
14. $\forall x_1 \forall x_2 \; (x_1 \leq x_2 \leftrightarrow \exists x_3 \; x_2 \equiv x_1 + x_3)$
15. $0 < 1$

Notese que el conjunto Σ_A es infinito. La teoria (Σ_A, τ_A) sera llamada *Aritmetica de Peano* y la denotaremos con *Arit*. Denotemos con $\boldsymbol{\omega}$ a la estructura de tipo τ_A que tiene a ω como universo e interpreta los -nombres de τ_A en la manera usual, es decir $0^{\boldsymbol{\omega}} = 0$, $1^{\boldsymbol{\omega}} = 1$, $\leq^{\boldsymbol{\omega}} = \{(n,m) \in \omega^2 : n \leq m\}$ y $+^{\boldsymbol{\omega}}(n,m) = n+m$ y $.^{\boldsymbol{\omega}}(n,m) = n.m$, para $n, m \in \omega$.

EP

Lemma 182 *$\boldsymbol{\omega}$ es un modelo de Arit*

Proof. Sean $\psi \in F^{\tau_A}$ y $v_1, ..., v_{n+1}$, con $n \geq 0$, tales que $Li(\psi) = \{v_1, ..., v_{n+1}\}$ y $v_i \neq v_j$ siempre que $i \neq j$. Veremos que $\boldsymbol{\omega} \vDash Ind_{\psi, v_1, ..., v_{n+1}}$. Declaremos $\psi =_d \psi(v_1, ..., v_n, v_{n+1})$. Sea

$$\varphi = ((\psi(\vec{v}, 0) \wedge \forall v_{n+1} \; (\psi(\vec{v}, v_{n+1}) \rightarrow \psi(\vec{v}, +(v_{n+1}, 1))) \rightarrow \forall v_{n+1} \; \psi(\vec{v}, v_{n+1}))$$

Declaremos $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$. Notese que $\boldsymbol{\omega} \vDash Ind_{\psi, v_1, ..., v_{n+1}}$ si y solo si para cada $a_1, ..., a_n \in \omega$ se tiene que $\boldsymbol{\omega} \vDash \varphi[\vec{a}]$. Sean $a_1, ..., a_n \in \omega$ fijos. Probaremos que $\boldsymbol{\omega} \vDash \varphi[\vec{a}]$. Notar que si

$$\boldsymbol{\omega} \nvDash (\psi(\vec{v}, 0) \wedge \forall v_{n+1} \; (\psi(\vec{v}, v_{n+1}) \rightarrow \psi(\vec{v}, +(v_{n+1}, 1)))[\vec{a}]$$

entonces $\boldsymbol{\omega} \vDash \varphi[\vec{a}]$ por lo cual podemos hacer solo el caso en que

$$\boldsymbol{\omega} \vDash (\psi(\vec{v}, 0) \wedge \forall v_{n+1} \; (\psi(\vec{v}, v_{n+1}) \rightarrow \psi(\vec{v}, +(v_{n+1}, 1)))[\vec{a}]$$

Para probar que $\boldsymbol{\omega} \vDash \varphi[\vec{a}]$, deberemos probar entonces que $\boldsymbol{\omega} \vDash \forall v_{n+1}\ \psi(\vec{v}, v_{n+1})[\vec{a}]$. Sea $S = \{a \in \omega : \boldsymbol{\omega} \vDash \psi(\vec{v}, v_{n+1})[\vec{a}, a]\}$. Ya que $\boldsymbol{\omega} \vDash \psi(\vec{v}, 0)[\vec{a}]$, es facil ver usando el lema de reemplazo que $\boldsymbol{\omega} \vDash \psi(\vec{v}, v_{n+1})[\vec{a}, 0]$, lo cual nos dice que $0 \in S$. Ya que $\boldsymbol{\omega} \vDash \forall v_{n+1}\ (\psi(\vec{v}, v_{n+1}) \rightarrow \psi(\vec{v}, +(v_{n+1}, 1))[\vec{a}]$, tenemos que

(1) Para cada $a \in \omega$, si $\boldsymbol{\omega} \vDash \psi(\vec{v}, v_{n+1})[\vec{a}, a]$, entonces $\boldsymbol{\omega} \vDash \psi(\vec{v}, +(v_{n+1}, 1))[\vec{a}, a]$.

Pero por el lema de reemplazo, tenemos que $\boldsymbol{\omega} \vDash \psi(\vec{v}, +(v_{n+1}, 1))[\vec{a}, a]$ sii $\boldsymbol{\omega} \vDash \psi(\vec{v}, v_{n+1})[\vec{a}, a+1]$, lo cual nos dice que

(2) Para cada $a \in \omega$, si $\boldsymbol{\omega} \vDash \psi(\vec{v}, v_{n+1})[\vec{a}, a]$, entonces $\boldsymbol{\omega} \vDash \psi(\vec{v}, v_{n+1})[\vec{a}, a+1]$.

Ya que (2) nos dice que $a \in S$ implica $a+1 \in S$, tenemos que $S = \omega$ ya que $0 \in S$. Es decir que para cada $a \in \omega$, se da que $\boldsymbol{\omega} \vDash \psi(\vec{v}, v_{n+1})[\vec{a}, a]$ lo cual nos dice que $\boldsymbol{\omega} \vDash \forall v_{n+1}\ \psi(\vec{v}, v_{n+1})[\vec{a}]$.

Es rutina probar que $\boldsymbol{\omega}$ satisface los otros 15 axiomas de *Arit*. ∎

El modelo $\boldsymbol{\omega}$ es llamado el *modelo standard* de *Arit*. Definamos el mapeo $\widehat{\ } : \omega \rightarrow \{(\ )\ ,\ +\ 0\ 1\}^*$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcl} \widehat{0} & = & 0 \\ \widehat{1} & = & 1 \\ \widehat{n+1} & = & +(\widehat{n}, 1), \text{ para cada } n \geq 1 \end{array}$$

Proposition 183 *Hay un modelo de Arit el cual no es isomorfo a* $\boldsymbol{\omega}$

Proof. Sea $\tau = (\{0, 1, \blacktriangle\}, \{+^2, .^2\}, \{\leq^2\}, a)$ y sea $\Sigma = \Sigma_A \cup \{\neg(\widehat{n} \equiv \blacktriangle) : n \in \omega\}$. Por el Teorema de Compacidad la teoria (Σ, τ) tiene un modelo $\mathbf{A} = (A, i)$. Ya que

$$\mathbf{A} \vDash \neg(\widehat{n} \equiv \blacktriangle), \text{ para cada } n \in \omega$$

tenemos que

$$i(\blacktriangle) \neq \widehat{n}^{\mathbf{A}}, \text{ para cada } n \in \omega$$

Por el Lema de Coincidencia la estructura $\mathbf{B} = (A, i\mid_{\{0,1,+,.,\leq\}})$ es un modelo de *Arit*. Ademas dicho lema nos garantiza que $\widehat{n}^{\mathbf{B}} = \widehat{n}^{\mathbf{A}}$, para cada $n \in \omega$, por lo cual tenemos que

$$i(\blacktriangle) \neq \widehat{n}^{\mathbf{B}}, \text{ para cada } n \in \omega$$

Veamos que $\mathbf{B}$ no es isomorfo a $\boldsymbol{\omega}$. Supongamos $F : \omega \rightarrow A$ es un isomorfismo de $\boldsymbol{\omega}$ en $\mathbf{B}$. Es facil de probar por induccion en n que $F(n) = \widehat{n}^{\mathbf{B}}$, para cada $n \in \omega$. Pero esto produce un absurdo ya que nos dice que $i(\blacktriangle)$ no esta en la imagen de F. ∎

Ejercicio: Dado un modelo $\mathbf{A}$ de *Arit* y elementos $a, b \in A$, diremos que a *divide* a b *en* $\mathbf{A}$ cuando haya un $c \in A$ tal que $b = .^{\mathbf{A}}(c, a)$. Un elemento $a \in A$ sera llamado *primo en* $\mathbf{A}$ si $a \neq 1^{\mathbf{A}}$ y sus unicos divisores son $1^{\mathbf{A}}$ y a. Pruebe que hay un modelo de *Arit*, $\mathbf{A}$, en el cual hay infinitos primos no pertenecientes a $\{\widehat{n}^{\mathbf{A}} : n \in \omega\}$.

Lemma 184 *Las siguientes sentencias son teoremas de la aritmetica de Peano:*

(1) $\forall x\ 0 \leq x$

(2) $\forall x\ (x \leq 0 \rightarrow x \equiv 0)$

(3) $\forall x \forall y\ (x + y \equiv 0 \rightarrow (x \equiv 0 \wedge y \equiv 0))$

(4) $\forall x\ (\neg(x \equiv 0) \rightarrow \exists z\ (x \equiv z + 1))$

(5) $\forall x \forall y\ (x < y \rightarrow x + 1 \leq y)$

(6) $\forall x \forall y\ (x < y + 1 \rightarrow x \leq y)$

(7) $\forall x \forall y\ (x \leq y + 1 \rightarrow (x \leq y \vee x \equiv y + 1))$

(8) $\forall x \forall y\ (\neg y \equiv 0 \rightarrow \exists q \exists r\ x \equiv q.y + r \wedge r < y)$

Proof. (1) es dejada al lector.

(2)

1.	$x_0 \leq 0$	HIPOTESIS1
2.	$\forall x\ 0 \leq x$	TEOREMA
3.	$0 \leq x_0$	PARTICULARIZACION(2)
4.	$x_0 \leq 0 \wedge 0 \leq x_0$	CONJUNCIONINTRODUCCION$(1,3)$
5.	$\forall x_1 \forall x_2\ ((x_1 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_1) \rightarrow x_1 \equiv x_2)$	AXIOMAPROPIO
6.	$\forall x_2\ ((x_0 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_0) \rightarrow x_0 \equiv x_2)$	PARTICULARIZACION(5)
7.	$((x_0 \leq 0 \wedge 0 \leq x_0) \rightarrow x_0 \equiv 0)$	PARTICULARIZACION(6)
8.	$x_0 \equiv 0$	TESIS1MODUSPONENS$(4,7)$
9.	$x_0 \leq 0 \rightarrow x_0 \equiv 0$	CONCLUSION
10.	$\forall x\ (x \leq 0 \rightarrow x \equiv 0)$	GENERALIZACION(9)

(3)

1.	$x_0 + y_0 \equiv 0$	HIPOTESIS1
2.	$(x_0 + y_0 \equiv 0 \leftrightarrow 0 \equiv x_0 + y_0)$	AXIOMALOGICO
3.	$0 \equiv x_0 + y_0$	REEMPLAZO$(1,2)$
4.	$\exists x_3\ (0 \equiv x_0 + x_3)$	EXISTENCIAL(3)
5.	$\forall x_1 \forall x_2\ (x_1 \leq x_2 \leftrightarrow \exists x_3\ x_2 \equiv x_1 + x_3)$	AXIOMAPROPIO
6.	$x_0 \leq 0 \leftrightarrow \exists x_3\ 0 \equiv x_0 + x_3)$	PARTICULARIZACION$^2(5)$
7.	$x_0 \leq 0$	REEMPLAZO$(1,2)$
8.	$\forall x\ 0 \leq x$	TEOREMA
9.	$0 \leq x_0$	PARTICULARIZACION(8)
10.	$x_0 \leq 0 \wedge 0 \leq x_0$	MODUSPONENS$(7,9)$
11.	$\forall x_1 \forall x_2\ ((x_1 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_1) \rightarrow x_1 \equiv x_2)$	AXIOMAPROPIO
12.	$((x_0 \leq 0 \wedge 0 \leq x_0) \rightarrow x_0 \equiv 0)$	PARTICULARIZACION$^2(11)$
13.	$x_0 \equiv 0$	MODUSPONENS$(10,12)$
14.	$0 + y_0 \equiv 0$	REEMPLAZO$(1,13)$
15.	$\forall y\ y \equiv 0 + y$	TEOREMA
16.	$y_0 \equiv 0 + y_0$	PARTICULARIZACION(15)
17.	$y_0 \equiv 0$	TRANSITIVIDAD$(16,14)$
18.	$x_0 \equiv 0 \wedge y_0 \equiv 0$	TESIS1CONJUNCIONINTRODUCCION$(13,17)$
19.	$x_0 + y_0 \equiv 0 \rightarrow (x_0 \equiv 0 \wedge y_0 \equiv 0)$	CONCLUSION
20.	$\forall x \forall y\ (x + y \equiv 0 \rightarrow (x \equiv 0 \wedge y \equiv 0))$	GENERALIZACION$^2(19)$

■

Lemma 185 *Sean $n, m \in \omega$. Las siguientes sentencias son teoremas de la aritmetica de Peano:*

(a) $(+(\widehat{n}, \widehat{m}) \equiv \widehat{n+m})$

(b) $(.(\widehat{n}, \widehat{m}) \equiv \widehat{n.m})$

(c) $\forall x\ (x \leq \widehat{n} \rightarrow (x \equiv \widehat{0} \vee x \equiv \widehat{1} \vee ... \vee x \equiv \widehat{n}))$

Lemma 186 *Para cada termino cerrado t, tenemos que $Arit \vdash (t \equiv \widehat{t^{\boldsymbol{\omega}}})$*

Lemma 187 *Si φ es una sentencia atomica o negacion de atomica y $\boldsymbol{\omega} \models \varphi$, entonces $Arit \vdash \varphi$.*

Proof. Hay dos casos. Supongamos $\varphi = (t \equiv s)$, con t, s terminos cerrados. Ya que $\boldsymbol{\omega} \models \varphi$, tenemos que $t^{\boldsymbol{\omega}} = s^{\boldsymbol{\omega}}$ y por lo tanto $\widehat{t^{\boldsymbol{\omega}}} = \widehat{s^{\boldsymbol{\omega}}}$. Por el lema anterior tenemos que $Arit \vdash (t \equiv \widehat{t^{\boldsymbol{\omega}}}), (s \equiv \widehat{s^{\boldsymbol{\omega}}})$ lo cual, ya que $\widehat{t^{\boldsymbol{\omega}}}$ y $\widehat{s^{\boldsymbol{\omega}}}$ son el mismo termino nos dice por la regla de transitividad que $Arit \vdash (t \equiv s)$. Supongamos $\varphi = (t \leq s)$, con t, s terminos cerrados. Ya que $\boldsymbol{\omega} \models \varphi$, tenemos que $t^{\boldsymbol{\omega}} \leq s^{\boldsymbol{\omega}}$ y por lo tanto hay un $k \in \omega$ tal que $t^{\boldsymbol{\omega}} + k = s^{\boldsymbol{\omega}}$. Se tiene entonces que $\widehat{t^{\boldsymbol{\omega}} + k} = \widehat{s^{\boldsymbol{\omega}}}$. Por el lema anterior tenemos que $Arit \vdash +(\widehat{t^{\boldsymbol{\omega}}}, \widehat{k}) \equiv \widehat{t^{\boldsymbol{\omega}} + k}$ lo cual nos dice que

$$Arit \vdash +(\widehat{t^{\boldsymbol{\omega}}}, \widehat{k}) \equiv \widehat{s^{\boldsymbol{\omega}}}$$

Pero el lema anterior nos dice que

$$Arit \vdash (t \equiv \widehat{t^{\boldsymbol{\omega}}}), (s \equiv \widehat{s^{\boldsymbol{\omega}}})$$

y por lo tanto la regla de reemplazo nos asegura que $Arit \vdash +(t, \widehat{k}) \equiv s$. Ya que

$$\forall x_1 \forall x_2 \ (x_1 \leq x_2 \leftrightarrow \exists x_3 \ x_2 \equiv x_1 + x_3)$$

es un axioma de $Arit$, tenemos que $Arit \vdash (t \leq s)$. ■

El siguiente lema muestra que en $Arit$ se pueden probar ciertas sentencias las cuales emulan el principio de induccion completa.

N

Lemma 188 *Sea $\varphi =_d \varphi(\vec{v}, v) \in F^{\tau_A}$. Supongamos v es sustituible por w en φ y $w \notin \{v_1, ..., v_n\}$. Entonces:*

$$Arit \vdash \forall \vec{v}((\varphi(\vec{v}, 0) \wedge \forall v(\forall w(w < v \rightarrow \varphi(\vec{v}, w)) \rightarrow \varphi(\vec{v}, v))) \rightarrow \forall v \varphi(\vec{v}, v))$$

Proof. Sea $\tilde{\varphi} = \forall w(w \leq v \rightarrow \varphi(\vec{v}, w))$. Notar que $\tilde{\varphi} =_d \tilde{\varphi}(\vec{v}, v)$. Sea $IndCom_\varphi$ la sentencia

$$\forall \vec{v}((\varphi(\vec{v}, 0) \wedge \forall v(\forall w(w < v \rightarrow \varphi(\vec{v}, w)) \rightarrow \varphi(\vec{v}, v))) \rightarrow \forall v \varphi(\vec{v}, v))$$

Salvo por el uso de algunos teoremas simples y el uso simultaneo de las reglas de particularizacion y generalizacion, la siguiente es la prueba buscada

1.	$(\varphi(\vec{c},0) \wedge \forall v(\forall w(w < v \to \varphi(\vec{c},w)) \to \varphi(\vec{c},v))$	HIPOTESIS1
2.	$w_0 \leq 0$	HIPOTESIS2
3.	$\forall x\ (x \leq 0 \to x \equiv 0)$	TEOREMA
4.	$w_0 \leq 0 \to w_0 \equiv 0$	PARTICULARIZACION(3)
5.	$w_0 \equiv 0$	MODUSPONENS$(2,4)$
6.	$\varphi(\vec{c},0)$	CONJUNCIONELIMINACION(1)
7.	$\varphi(\vec{c},w_0)$	TESIS2REEMPLAZO$(5,6)$
8.	$w_0 \leq 0 \to \varphi(\vec{c},w_0)$	CONCLUSION
9.	$\tilde{\varphi}(\vec{c},0)$	GENERALIZACION(8)
10.	$\tilde{\varphi}(\vec{c},v_0)$	HIPOTESIS3
11.	$w_0 < v_0 + 1$	HIPOTESIS4
12.	$\forall x, y\ x < y + 1 \to x \leq y$	TEOREMA
13.	$w_0 < v_0 + 1 \to w_0 \leq v_0$	PARTICULARIZACION(12)
14.	$w_0 \leq v_0$	MODUSPONENS$(11,13)$
15.	$w_0 \leq v_0 \to \varphi(\vec{c},w_0)$	PARTICULARIZACION(10)
16.	$\varphi(\vec{c},w_0)$	TESIS4MODUSPONENS$(14,15)$
17.	$w_0 < v_0 + 1 \to \varphi(\vec{c},w_0)$	CONCLUSION
18.	$\forall w\ w < v_0 + 1 \to \varphi(\vec{c},w)$	GENERALIZACION(17)
19.	$\forall v(\forall w(w < v \to \varphi(\vec{c},w)) \to \varphi(\vec{c},v))$	CONJUNCIONELIMINACION(1)
20.	$(\forall w(w < v_0 + 1 \to \varphi(\vec{c},w)) \to \varphi(\vec{c},v_0+1))$	PARTICULARIZACION(19)
21.	$\varphi(\vec{c},v_0+1)$	MODUSPONENS$(18,20)$
22.	$w_0 \leq v_0 + 1$	HIPOTESIS5
23.	$\forall x, y\ x \leq y + 1 \to (x \leq y \vee x \equiv y + 1)$	TEOREMA
24.	$w_0 \leq v_0 + 1 \to (w_0 \leq v_0 \vee w_0 \equiv v_0 + 1)$	PARTICULARIZACION(23)
25.	$(w_0 \leq v_0 \vee w_0 \equiv v_0 + 1)$	MODUSPONENS$(22,24)$
26.	$w_0 \leq v_0 \to \varphi(\vec{c},w_0)$	PARTICULARIZACION(10)
27.	$w_0 \equiv v_0 + 1$	HIPOTESIS6
28.	$\varphi(\vec{c},w_0)$	TESIS6REEMPLAZO$(21,27)$
29.	$w_0 \equiv v_0 + 1 \to \varphi(\vec{c},w_0)$	CONCLUSION
30.	$\varphi(\vec{c},w_0)$	TESIS5DISJUNCIONELIMINACION
31.	$w_0 \leq v_0 + 1 \to \varphi(\vec{c},w_0)$	CONCLUSION
32.	$\tilde{\varphi}(\vec{c},v_0+1)$	TESIS3GENERALIZACION(31)
33.	$\tilde{\varphi}(\vec{c},v_0) \to \tilde{\varphi}(\vec{c},v_0+1)$	CONCLUSION
34.	$\forall v \tilde{\varphi}(\vec{c},v) \to \tilde{\varphi}(\vec{c},v+1)$	GENERALIZACION(33)
35.	$\tilde{\varphi}(\vec{c},0) \wedge \forall v \tilde{\varphi}(\vec{c},v) \to \tilde{\varphi}(\vec{c},v+1)$	CONJUNCIONINTRODUCCION(9,
36.	$Ind_{\tilde{\varphi}}$	AXIOMAPROPIO
37.	$(\tilde{\varphi}(\vec{c},0) \wedge \forall v(\tilde{\varphi}(\vec{c},v) \to \tilde{\varphi}(\vec{c},v+1)) \to \forall v \tilde{\varphi}(\vec{c},v)$	PARTICULARIZACION(36)
38.	$\forall v \tilde{\varphi}(\vec{c},v)$	MODUSPONENS$(35,37)$
39.	$\tilde{\varphi}(\vec{c},v_0)$	PARTICULARIZACION(38)
40.	$v_0 \leq v_0 \to \varphi(\vec{c},v_0)$	PARTICULARIZACION(39)
41.	$\forall x\ x \leq x$	AXIOMAPROPIO
42.	$v_0 \leq v_0$	PARTICULARIZACION(41)
43.	$\varphi(\vec{c},v_0)$	MODUSPONENS$(40,42)$
44.	$\forall v \varphi(\vec{c},v)$	TESIS1GENERALIZACION(43)
45.	$(\varphi(\vec{c},0) \wedge \forall v(\forall w(w < v \to \varphi(\vec{c},w)) \to \varphi(\vec{c},v))) \to \forall v \varphi(\vec{c},v)$	CONCLUSION
46.	$IndCom_{\varphi}$	GENERALIZACION(45)

No es necesario recordar cada uno de los enunciados no marcados expl²citamente de esta secci· n, sin embargo se espera que se comprenda la secuencia de resultados que culmina en las Proposiciones 203 y 204.

■

@@finpagina@@

10.1 Analisis de recursividad del lenguaje de primer orden

En esta seccion estudiaremos la recursividad de la sintaxis del lenguaje de primer orden de la teoria *Arit*. Analizaremos el concepto de prueba formal en una teoria de la forma (Σ, τ_A), donde Σ es un conjunto recursivamente enumerable. Para hacer mas concreto el tratamiento supondremos que los nombres de constante auxiliares en las pruebas formales estaran siempre en el conjunto

$$Aux = \{\triangle\square\triangle, \triangle\square\square\triangle, \triangle\square\square\square\triangle, ...\}$$

Esto no afectara nuestro analisis ya que es claro que toda prueba formal de una teoria de la forma (Σ, τ_A) puede ser reemplazada por una que sus nombres de contante auxiliares esten en Aux. Es decir que las sentencias involucradas en las pruebas formales que consideraremos seran sentencias de tipo τ_A^e donde

$$\tau_A^e = (\{0,1\} \cup Aux, \{+^2, .^2\}, \{\leq\}, a)$$

Sea $\mathcal{A}$ el alfabeto formado por los siguientes simbolos

$\forall$ $\exists$ $\neg$ $\vee$ $\wedge$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$ ( ) , $\equiv$ 0 1 + . $\leq$ $\triangle$ $\square$ X *0* *1* ... *9* **0** **1** ... **9**

Notese que los simbolos del alfabeto $\mathcal{A}$ son justamente los simbolos que ocurren en las formulas de tipo τ_A^e.

Lemma 189 *Los conjuntos* $T^{\tau_A^e}$, $F^{\tau_A^e}$, T^{τ_A} *y* F^{τ_A} *son* $\mathcal{A}$*-recursivos.*

Proof. Notese que los conjuntos $T^{\tau_A^e}$, $F^{\tau_A^e}$, T^{τ_A} y F^{τ_A} son $\mathcal{A}$-efectivamente computables (justifique). Entonces la Tesis de Church nos garantiza que dichos conjuntos son $\mathcal{A}$-recursivos.

A continuacion daremos una prueba de que dichos conjuntos son en realidad $\mathcal{A}$-primitivos recursivos. Veamos por ejemplo que $T^{\tau_A^e}$ es $\mathcal{A}$-primitivos recursivo. Fijemos un orden total estricto $<$ sobre $\mathcal{A}$. Sea $P = \lambda x[*^<(x) \in T^{\tau_A^e}]$. Notese que $P(0) = 0$ y $P(x+1) = 1$ si y solo si se da alguna de las siguientes

- $*^<(x+1) \in \{0,1\} \cup Aux$
- $(\exists u, v \in \omega)\, *^<(x+1) = +(*^<(u), *^<(v)) \wedge (P^\downarrow(x))_{u+1} \wedge (P^\downarrow(x))_{v+1}$
- $(\exists u, v \in \omega)\, *^<(x+1) = .(*^<(u), *^<(v)) \wedge (P^\downarrow(x))_{u+1} \wedge (P^\downarrow(x))_{v+1}$

Por el Lema 48 tenemos que P es $\mathcal{A}$-p.r., por lo cual $\chi_{T^{\tau_A^e}} = P \circ \#^<$ lo es. Notese que

$$t \in T^{\tau_A} \text{ sii } t \in T^{\tau_A^e} \wedge \triangle \text{ no ocurre en } t \wedge \square \text{ no ocurre en } t$$

por lo cual T^{τ_A} es $\mathcal{A}$-p.r. ■

Lemma 190 *Los siguientes predicados son $\mathcal{A}$-r.*

(1) "v ocurre libremente en φ a partir de i" : $\omega \times Var \times F^{\tau^e_A} \to \omega$

(2) "$v \in Li(\varphi)$" : $Var \times F^{\tau^e_A} \to \omega$

(3) "v es sustituible por t en φ" : $Var \times T^{\tau^e_A} \times F^{\tau^e_A} \to \omega$

Proof. Notese que los predicados dados en (1), (2) y (3) son $\mathcal{A}$-efectivamente computables (justifique). Entonces la Tesis de Church nos garantiza que dichos predicados son $\mathcal{A}$-recursivos.

En realidad dichos predicados son $\mathcal{A}$-p.r.. Veamos por ejemplo que $P : \omega \times Var \times F^{\tau^e_A} \to \omega$, dado por

$$P(i, v, \varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \text{ ocurre libremente en } \varphi \text{ a partir de } i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

es $\mathcal{A}$-p.r.. Sea $R : \omega \times Var \to \omega$ el predicado dado por $R(x, v) = 1$ si y solo si $*^<((x)_1) \in F^{\tau^e_A}$ y v ocurre libremente en $*^<((x)_1)$ a partir de $(x)_2$. Sea $\mathrm{Nex} = \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$. Notese que $F_0^{\tau^e_A}$ es $\mathcal{A}$-p.r. ya que

$$F_0^{\tau^e_A} = F^{\tau^e_A} \cap (\mathcal{A} - \{\forall, \exists, \neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\})^*$$

Notese que $R(0, v) = 0$, para cada $v \in Var$ y que $R(x+1, v) = 1$ si y solo si $(x+1)_2 \geq 1$ y se da alguna de las siguientes:

- $*^<((x+1)_1) \in F_0^{\tau^e_A} \wedge v$ ocurre en $*^<((x+1)_1)$ a partir de $(x+1)_2$
- $(\exists \varphi_1, \varphi_2 \in F^{\tau^e_A})(\exists \eta \in \mathrm{Nex})\, *^<((x+1)_1) = (\varphi_1 \eta \varphi_2) \wedge$
$$\big((R^\downarrow(x,v))_{\langle \#^<(\varphi_1), (x+1)_2 - 1\rangle + 1} \vee (R^\downarrow(x,v))_{\langle \#^<(\varphi_2), (x+1)_2 - |(\varphi_1 \eta|\rangle + 1}\big)$$
- $(\exists \varphi_1 \in F^{\tau^e_A})\, *^<((x+1)_1) = \neg\varphi_1 \wedge (R^\downarrow(x,v))_{\langle \#^<(\varphi_1), (x+1)_2 - 1\rangle + 1}$
- $(\exists \varphi_1 \in F^{\tau^e_A})(\exists w \in Var)(Q \in \{\forall, \exists\})\; w \neq v \wedge$
$$*^<((x+1)_1) = Qw\varphi_1 \wedge (R^\downarrow(x,v))_{\langle \#^<(\varphi_1), (x+1)_2 - |(Qw|\rangle + 1}$$

Es decir que por el Lema 48 tenemos que R es $\mathcal{A}$-p.r.. Notese que para $(i, v, \varphi) \in \omega \times Var \times F^{\tau^e_A}$, tenemos $P(i, v, \varphi) = R(\langle \#^<(\varphi), i\rangle, v)$. Ahora es facil obtener la funcion P haciendo composiciones adecuadas con R. ■

Dados $v \in Var$ y $t, s \in T^\tau$, usaremos $\downarrow^t_v(s)$ para denotar el resultado de reemplazar simultaneamente cada ocurrencia de v en s por t. Similarmente, si $\varphi \in F^\tau$, usaremos $\downarrow^t_v(\varphi)$ para denotar el resultado de reemplazar simultaneamente cada ocurrencia libre de v en φ por t

Lemma 191 *Las funciones $\lambda svt[\downarrow^t_v(s)]$ y $\lambda\varphi vt[\downarrow^t_v(\varphi)]$ son $\mathcal{A}$-r.*

Proof. Notese que las funciones $\lambda svt[\downarrow_v^t (s)]$ y $\lambda\varphi vt[\downarrow_v^t (\varphi)]$ son $\mathcal{A}$-efectivamente computables (justifique). Entonces la Tesis de Church nos garantiza que dichas funciones son $\mathcal{A}$-recursivas.

En realidad son $\mathcal{A}$-p.r.. Veamos por ejemplo que $\lambda svt[\downarrow_v^t (s)]$ es $\mathcal{A}$-p.r.. Sea $<$ un orden total estricto sobre $\mathcal{A}$. Sea $h : \omega \times Var \times T^{\tau_A^e} \to \omega$ dada por

$$h(x, v, t) = \begin{cases} \#^<(\downarrow_v^t (*^<(x))) & \text{si } *^<(x) \in T^{\tau_A^e} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Sea $P : \omega \times \omega \times Var \times T^{\tau_A^e} \times \mathcal{A}^* \to \omega$ tal que $P(A, x, v, t, \alpha) = 1$ si y solo si se da alguna de las siguientes

- $*^<(x + 1) \notin T^{\tau_A^e} \wedge \alpha = \varepsilon$
- $*^<(x + 1) = v \wedge \alpha = t$
- $*^<(x + 1) \in (\{0, 1\} \cup Aux) - \{v\} \wedge \alpha = *^<(x + 1)$
- $(\exists r, s \in T^{\tau_A^e}) *^<(x+1) = +(r, s) \wedge \alpha = +(*^<((A)_{\#^<(r)+1}), *^<((A)_{\#^<(s)+1}))$
- $(\exists r, s \in T^{\tau_A^e}) *^< (x + 1) = .(r, s) \wedge \alpha = .(*^<((A)_{\#^<(r)+1}), *^<((A)_{\#^<(s)+1}))$

Notese que $P(h^\downarrow(x, v, t), x, v, t, \alpha) = 1$ si y solo si ya sea $*^<(x+1) \notin T^\tau$ y $\alpha = \varepsilon$ o $*^<(x + 1) \in T^\tau$ y $\alpha = \downarrow_v^t(*^<(x + 1))$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} h(0, v, t) &= 0 \\ h(x + 1, v, t) &= \#^<(\min_\alpha^< P(h^\downarrow(x, v, t), x, v, t, \alpha)), \end{aligned}$$

por lo cual el Lema 48 nos dice que h es $\mathcal{A}$-p.r. Ahora es facil obtener la funcion $\downarrow_v^t (s) : T^{\tau_A^e} \times Var \times T^{\tau_A^e} \to T^{\tau_A^e}$ haciendo composiciones adecuadas con h. ■

Lemma 192 *El predicado* $R : F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \to \omega$, *dado por*

$$R(\varphi, \tilde{\varphi}, \psi_1, \psi_2) = \begin{cases} 1 & si\ \tilde{\varphi} = \text{ resultado de reemplazar algunas (posiblemente 0) ocurrencias de } \psi_1 \text{ en } \varphi \text{ por } \psi_2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

es $\mathcal{A}$-*r.*.

Proof. Notese que el predicado R es $\mathcal{A}$-efectivamente computables (justifique). Entonces la Tesis de Church nos garantiza que R es $\mathcal{A}$-recursivo.

Probaremos que en realidad R es $\mathcal{A}$-p.r.. Sea Nex $= \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$. Sea $<$ un orden total estricto sobre $\mathcal{A}$. Notese que $R(\varphi, \tilde{\varphi}, \psi_1, \psi_2) = 1$ sii se da alguna de las siguientes

- $\varphi = \tilde{\varphi}$

- $(\varphi = \psi_1 \wedge \tilde{\varphi} = \psi_2)$
- $(\exists \varphi_1, \varphi_2, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \in F^{\tau_A^e})(\exists \eta \in \text{Nex})\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2) \wedge \tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1 \eta \tilde{\varphi}_2) \wedge$
$$R(\varphi_1, \tilde{\varphi}_1, \psi_1, \psi_2) \wedge R(\varphi_2, \tilde{\varphi}_2, \psi_1, \psi_2)$$
- $(\exists \varphi_1, \tilde{\varphi}_1 \in F^{\tau_A^e})\varphi = \neg \varphi_1 \wedge \tilde{\varphi} = \neg \tilde{\varphi}_1 \wedge R(\varphi_1, \tilde{\varphi}_1, \psi_1, \psi_2)$
- $(\exists \varphi_1, \tilde{\varphi}_1 \in F^{\tau_A^e})(\exists v \in Var)(\exists Q \in \{\forall, \exists\})\varphi = Qv\varphi_1 \wedge$
$$\tilde{\varphi} = Qv\tilde{\varphi}_1 \wedge R(\varphi_1, \tilde{\varphi}_1, \psi_1, \psi_2)$$

Se puede usar lo anterior para ver que $R' : \omega \times F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \to \omega$, dado por

$$R'(x, \psi_1, \psi_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } *^< ((x)_1), *^<((x)_2) \in F^{\tau_A^e} \text{ y } *^< ((x)_2) = \text{resultado de} \\ & \text{reemplazar algunas ocurrencias de } \psi_1 \text{ en } *^< ((x)_1) \text{ por } \psi_2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

es $\mathcal{A}$-p.r., via el Lema 48. Finalmente R puede obtenerse haciendo composiciones adecuadas con R'. ■

Lemma 193 *Sea Σ un alfabeto finito. Sea $S \subseteq \Sigma^*$ un conjunto Σ-r.. El conjunto S^+ es Σ-r.*

Proof. Ya que S es Σ-r., tenemos que S es Σ-efectivamente computable. Es facil ver que entonces S^+ es Σ-efectivamente computable. Por la Tesis de Church tenemos entonces que S es Σ-recursivo.

Ya que $\alpha \in S^+$ si y solo si

$$(\exists z \in \mathbf{N})(\forall i \in \mathbf{N})_{i \leq Lt(z)} *^< ((z)_i) \in S \wedge \alpha = \subset_{i=1}^{Lt(z)} *^< ((z)_i)$$

se puede probar tambien este lema sin usar la Tesis de Church. Dejamos al lector los detalles. ■

Lemma 194 *Los conjuntos $ModPon^{\tau_A^e}$, $Elec^{\tau_A^e}$, $Reem^{\tau_A^e}$, $ConjInt^{\tau_A^e}$, $ConjElim^{\tau_A^e}$, $EquivInt^{\tau_A^e}$, $DisjElim^{\tau_A^e}$, $DisjInt^{\tau_A^e}$, $EquivElim^{\tau_A^e}$, $Generaliz^{\tau_A^e}$, $Commut^{\tau_A^e}$, $Trans^{\tau_A^e}$, $Exist^{\tau_A^e}$, $Evoc^{\tau_A^e}$, $Absur^{\tau_A^e}$, $DivPorCas^{\tau_A^e}$, $Partic^{\tau_A^e}$ son $\mathcal{A}$-r..*

Proof. Dejamos al lector una prueba via la Tesis de Church. En realidad dichos conjuntos son $\mathcal{A}$-p.r.. Veremos, por ejemplo que $Reem^{\tau_A^e}$ es $\mathcal{A}$-p.r.. Basta con ver que $Reem1^{\tau_A^e}$ y $Reem2^{\tau_A^e}$ lo son. Veremos que $Reem2^{\tau_A^e}$ es $\mathcal{A}$-p.r.. Sea $Q : F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \to \omega$ el predicado tal que $Q(\varphi, \psi, \sigma) = 1$ si y solo si

1. $(\exists \alpha \in (\forall Var)^+)(\exists \psi_1, \psi_2 \in F^{\tau_A^e})\ \psi = \alpha(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2) \wedge$
2. $Li(\psi_1) = Li(\psi_2) \wedge ((\forall v \in Var)\ v \notin Li(\psi_1) \vee v$ ocurre en $\alpha)$
3. $((\forall v \in Var)\ v$ no ocurre en $\alpha \vee v \in Li(\psi_1)) \wedge R(\varphi, \sigma, \psi_1, \psi_2)$

(R es el predicado dado por el Lema 192). Es facil ver que Q es $\mathcal{A}$-p.r. y que $Reem2^{\tau_A^e} = Q\mid_{S^{\tau_A^e}\times S^{\tau_A^e}\times S^{\tau_A^e}}$. ■

Lemma 195 *El predicado "ψ se deduce de φ por generalizacion con constante c, con respecto a τ_A^e" : $S^{\tau_A^e} \times S^{\tau_A^e} \times Aux \to \omega$ es $\mathcal{A}$-r..*

Proof. Es claro que el predicado en cuestion es $\mathcal{A}$-efectivamente computable (justifique). Por la Tesis de Church tenemos entonces que dicho predicado es $\mathcal{A}$-r.

Para probar que en realidad dicho predicado es $\mathcal{A}$-p.r., notese que: ψ se deduce de φ por generalizacion con constante c si y solo si hay una formula γ y una variable v tales que

- $Li(\gamma) = \{v\}$
- cada ocurrencia de v en γ es libre
- c no ocurre en γ
- $\varphi = \downarrow_v^c(\gamma) \wedge \psi = \forall v\gamma$

■

Lemma 196 *El predicado "ψ se deduce de φ por eleccion con constante e, con respecto a τ_A^e" : $S^{\tau_A^e} \times S^{\tau_A^e} \times Aux \to \omega$ es $\mathcal{A}$-p.r..*

Proof. Es claro que el predicado en cuestion es $\mathcal{A}$-efectivamente computable (justifique). Por la Tesis de Church tenemos entonces que dicho predicado es $\mathcal{A}$-r. ■

Definamos

$$AxLog^{\tau_A^e} = \{\varphi \in S^{\tau_A^e} : \varphi \text{ es un axioma logico de tipo } \tau_A^e\}$$

Lemma 197 *$AxLog^{\tau_A^e}$ es $\mathcal{A}$-r..*

Proof. Es claro que el conjunto en cuestion es $\mathcal{A}$-efectivamente computable (justifique). Por la Tesis de Church tenemos entonces que dicho conjunto es $\mathcal{A}$-r. ■

Recordemos que dada $\boldsymbol{\varphi} \in S^{\tau_A^e +}$, usamos $n(\boldsymbol{\varphi})$ y $\boldsymbol{\varphi}_1, ..., \boldsymbol{\varphi}_{n(\boldsymbol{\varphi})}$ para denotar los unicos n y $\varphi_1, ..., \varphi_n$ tales que $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_1...\varphi_n$ (la unicidad es garantizada en Lema 158). Extendamos esta notacion definiendo $\boldsymbol{\varphi}_i = \varepsilon$ para $i = 0$ o $i > n(\boldsymbol{\varphi})$.

Lemma 198 *Las funciones*

$$\begin{array}{ccc} S^{\tau_A^e +} & \to & \omega \\ \boldsymbol{\varphi} & \to & n(\boldsymbol{\varphi}) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \omega \times S^{\tau_A^e +} & \to & S^{\tau_A^e} \cup \{\varepsilon\} \\ (i, \boldsymbol{\varphi}) & \to & \boldsymbol{\varphi}_i \end{array}$$

son $\mathcal{A}$-r.

Proof. Es claro que la funciones en cuestion son $\mathcal{A}$-efectivamente computables (justifique). Por la Tesis de Church tenemos entonces que son $\mathcal{A}$-r. ■

Recordemos que dada $\mathbf{J} \in Just^+$, usamos $n(\mathbf{J})$ y $\mathbf{J}_1, ..., \mathbf{J}_{n(\mathbf{J})}$ para denotar los unicos n y $J_1, ..., J_n$ tales que $\mathbf{J} = J_1...J_n$ (la unicidad es garantizada en Lema 159). Extendamos esta notacion definiendo $\mathbf{J}_i = \varepsilon$ para $i = 0$ o $i > n(\mathbf{J})$.

Sea $\mathcal{B}$ el alfabeto que consiste en todos los simbolos que ocurren en alguna palabra de $Just$. Es decir $\mathcal{B}$ consiste de los simbolos

( ) , 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E G H I J L M N O P Q R S T U V X Z

Lemma 199 *$Just$ es $\mathcal{B}$-r. Las funciones*

$$\begin{array}{rcl} Just^+ & \rightarrow & \omega \\ \mathbf{J} & \rightarrow & n(\mathbf{J}) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \omega \times Just^+ & \rightarrow & Just \cup \{\varepsilon\} \\ (i, \mathbf{J}) & \rightarrow & \mathbf{J}_i \end{array}$$

son $\mathcal{B}$-r.

Proof. Es claro que la funciones en cuestion son $\mathcal{B}$-efectivamente computables (justifique). Por la Tesis de Church tenemos entonces que son $\mathcal{B}$-r. ■

Lemma 200 *El conjunto $\{\mathbf{J} \in Just^+ : \mathbf{J}$ es balanceada$\}$ es $\mathcal{B}$-r.*

Proof. Es claro que dicho conjunto es $\mathcal{B}$-efectivamente computables (justifique). Por la Tesis de Church tenemos entonces que es $\mathcal{B}$-r. ■

@@finpagina@@

Lemma 201 *El predicado*

$$\begin{array}{rcl} \omega \times S^{\tau_A^e} \times S^{\tau_A^e +} \times Just^+ & \rightarrow & \omega \\ (i, \varphi, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J}) & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } (\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J}) \text{ es adecuado y } \varphi \text{ es hipotesis de } \boldsymbol{\varphi}_i \text{ en } (\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J}) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{array} \right. \end{array}$$

es $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-r..

Proof. Es claro que el predicado en cuestion es $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-efectivamente computable (justifique). Por la Tesis de Church tenemos entonces que dicho predicado es $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-r. ■

Lemma 202 *El predicado*

$$\begin{array}{rcl} Aux \times Aux \times S^{\tau_A^e +} \times Just^+ & \rightarrow & \omega \\ (e, d, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J}) & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } (\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J}) \text{ es adecuado y } e \text{ depende de } d \text{ en } (\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J}) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{array} \right. \end{array}$$

es $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-r..

Proof. Es claro que el predicado en cuestion es $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-efectivamente computable (justifique). Por la Tesis de Church tenemos entonces que dicho predicado es $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-r. ■

Dada una teoria de la forma (Σ, τ_A), diremos que una prueba $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ de φ en (Σ, τ_A) es *normal* si solo usa nombres de ctes auxiliares de Aux, es decir si $\boldsymbol{\varphi} \in S^{\tau_A^e +}$. Definamos

$$Pruebas_{(\Sigma,\tau_A)} = \{(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J}) : \exists \varphi \ (\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J}) \text{ es una prueba normal de } \varphi \text{ en } (\Sigma, \tau_A)\}$$

E

Lemma 203 *Sea (Σ, τ_A) una teoria tal que Σ es $\mathcal{A}$-recursivo (resp. $\mathcal{A}$-r.e.). Entonces $Pruebas_{(\Sigma,\tau_A)}$ es $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-recursivo (resp. $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-r.e.).*

Proof. Notese que Σ es $\mathcal{A}$-efectivamente computable (resp. $\mathcal{A}$-efectivamente enumerable) (justifique). Usando esto se puede ver que $Pruebas_{(\Sigma,\tau_A)}$ es $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-efectivamente computable (resp. $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-efectivamente enumerable) (justifique). Por la Tesis de Church tenemos entonces que $Pruebas_{(\Sigma,\tau_A)}$ es $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-recursivo (resp. $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-r.e.) ■

Dada una teoria (Σ, τ_A), definamos

$$Teo_{(\Sigma,\tau_A)} = \{\varphi \in S^{\tau_A} : (\Sigma, \tau_A) \vdash \varphi\}$$

E

Proposition 204 *Si (Σ, τ_A) es una teoria tal que Σ es $\mathcal{A}$-r.e., entonces $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$ es $\mathcal{A}$-r.e.*

Proof. Como se vio en el lema anterior, tenemos que $Pruebas_{(\Sigma,\tau_A)}$ es $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-efectivamente enumerable. Es facil ahora, usando un procedimiento efectivo que enumere a $Pruebas_{(\Sigma,\tau_A)}$, diseñar un procedimiento efectivo que enumere a $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$. Es decir que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$ es $\mathcal{A}$-efectivamente enumerable, lo cual por la Tesis de Church nos dice que es $\mathcal{A}$-r.e.

A continuacion daremos una prueba que no usa la Tesis de Church. Ya que $Pruebas_{(\Sigma,\tau_A)}$ es $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-r.e. (lema anterior) tenemos que hay una funcion $F : \omega \to S^{\tau_A^e +} \times Just^+$ la cual cumple que $p_1^{0,2} \circ F$ y $p_2^{0,2} \circ F$ son $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-r. y ademas $I_F = Pruebas_{(\Sigma,\tau_A)}$. Sea

$$\begin{array}{rcl} g : S^{\tau_A^e +} & \to & S^{\tau_A^e} \\ \boldsymbol{\varphi} & \to & \boldsymbol{\varphi}_{n(\boldsymbol{\varphi})} \end{array}$$

Por lemas anteriores g es $\mathcal{A}$-r.. Notese que $I_{(g \circ p_1^{0,2} \circ F)} = Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$, lo cual dice que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$ es $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-r.e. (Teorema 71). Por el teorema de independencia del alfabeto tenemos que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$ es $\mathcal{A}$-r.e.. ■

10.2 Teorema de incompletitud

Sea

$$Verd_{\boldsymbol{\omega}} = \{\varphi \in S^{\tau_A} : \boldsymbol{\omega} \models \varphi\}.$$

Notese que por el teorema de correccion tenemos que $Teo_{Arit} \subseteq Verd_{\boldsymbol{\omega}}$. Como puede notarse a medida que uno se va familiarizando con la teoria $Arit$, todos los resultados clasicos de la aritmetica los cuales pueden ser enunciados por medio de una sentencia de $Verd_{\boldsymbol{\omega}}$ son en realidad teoremas de $Arit$. Sin envargo Godel probo en su famoso teorema de incompletitud (1931) que hay una sentencia de $Verd_{\boldsymbol{\omega}}$ la cual no es un teorema de $Arit$. Por años nadie fue capaz de dar una sentencia de $Verd_{\boldsymbol{\omega}}$ la cual tenga un genuino interes aritmetico y la cual no sea un teorema de $Arit$. Recien en 1977 Paris y Harrington dieron el primer ejemplo de una tal sentencia. Una ves sabido que los axiomas de $Arit$ no son suficientemente poderosos como para probar toda sentencia verdadera en $\boldsymbol{\omega}$, una pregunta interesante es si hay un conjunto Σ de sentencias de tipo τ_A tal que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)} = Verd_{\boldsymbol{\omega}}$ y tal que la pertenencia a Σ sea decidible mediante un algoritmo (es decir axiomas describibles en alguna forma razonable). Una respuesta negativa a dicha pregunta forma parte del teorema de incompletitud de Godel que veremos a continuacion.

Sea $n \geq 1$. Una funcion $f : D_f \subseteq \omega^n \to \omega$ sera llamada *representable* si hay una formula $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n, v) \in F^{\tau_A}$, la cual cumpla

$$\boldsymbol{\omega} \models \varphi\,[k_1, ..., k_n, k] \text{ si y solo si } f(k_1, ..., k_n) = k$$

cualesquiera sean $k_1, ..., k_n, k \in \omega$. En tal caso diremos que la formula φ *representa* a la funcion f, con respecto a la declaracion $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n, v)$. Notese que cuando $(k_1, ..., k_n) \notin D_f$ entonces debera suceder que $\boldsymbol{\omega} \not\models \varphi\,[k_1, ..., k_n, k]$, cualquiera sea $k \in \omega$. Cabe destacar que una formula φ puede representar a f, con respecto a una declaracion y con respecto a otra declaracion no puede no representarla. Por ejemplo la formula $(x_3 \equiv x_1 + x_2)$ representa a la operacion suma con respecto a las declaraciones $\varphi =_d \varphi(x_1, x_2, x_3)$ y $\varphi =_d \varphi(x_2, x_1, x_3)$ pero con respecto a la declaracion $\varphi =_d \varphi(x_3, x_2, x_1)$ no representa a dicha operacion (de hecho no representa a ninguna funcion). Para dar otro ejemplo, tomemos $\varphi = (x_5 \equiv 1)$. Entonces

- Con respecto a la declaracion $\varphi =_d \varphi(x_2, x_5)$ la formula φ representa a la funcion con dominio ω y valor constantemente 1
- Con respecto a la declaracion $\varphi =_d \varphi(x_{10}, x_5)$ la formula φ representa a la funcion con dominio ω y valor constantemente 1
- Con respecto a la declaracion $\varphi =_d \varphi(x_2, x_6, x_5)$ la formula φ representa a la funcion con dominio ω^2 y valor constantemente 1

El concepto de funcion representable sera clave en nuestra prueba del teorema de incompletitud. El resultado clave desde el cual sale facilmente el teorema de incompletitud es la Proposicion 210 en la que se prueba que el conjunto $Verd_{\boldsymbol{\omega}}$ no es $\mathcal{A}$-r.e..Para probar dicha proposicion primero probaremos que toda funcion $\emptyset$-recursiva es representable. Aqui es clave una funcion introducida por Godel.

Sea $\beta = \lambda xyi[r(x, y(i+1)+1)]$. Notese que $D_\beta = \omega^3$. Esta funcion, conocida como la *funcion β de Godel*, es representable ya que por ejemplo la formula

$$\varphi = \exists x_5 \ (x_1 \equiv x_5.(x_2.(x_3+1)+1) + x_4 \wedge x_4 < x_2.(x_3+1)+1)$$

la representa, con respecto a la declaracion $\varphi =_d \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Ahora veremos un lema que muestra que la funcion β tiene una propiedad sorprendente en el sentiodo que cualquier sucesion finita de elementos de ω es producida por β si fijamos adecuadamente sus dos primeras entradas.

N

Lemma 205 *Cualesquiera sean $z_0, ..., z_n \in \omega$, $n \geq 0$, hay $x, y \in \omega$, tales que $\beta(x, y, i) = z_i$, $i = 0, ..., n$*

Proof. Dados $x, y, m \in \omega$ con $m \geq 1$, usaremos $x \equiv y(m)$ para expresar que x es congruente a y modulo m, es decir para expresar que $x - y$ es divisible por m. Usaremos en esta prueba el Teorema Chino del Resto:

- Dados $m_0, ..., m_n, z_0, ..., z_n \in \omega$ tales que $m_0, ..., m_n$ son coprimos de a pares, hay un $x \in \omega$ tal que $x \equiv z_i(m_i)$, para $i = 0, ..., n$.

Sea $y = \max(z_0, ..., z_n, n)!$. Sean $m_i = y(i+1)+1$, $i = 0, ..., n$. Veamos que $m_0, ..., m_n$ son coprimos de a pares. Supongamos p divide a m_i y a m_j con $i < j$. Entonces p divide a $m_j - m_i = y(j-i)$ y ya que p no puede dividir a y, tenemos que p divide a $j - i$. Pero ya que $j - i < n$ tenemos que $p < n$ lo cual es absurdo ya que implicaria que p divide y.

Por el Teorema Chino del Resto hay un x tal que $x \equiv z_i(m_i)$, para $i = 0, ..., n$. Ya que $z_i < m_i$, tenemos que

$$\beta(x, y, i) = r(x, y(i+1)+1) = r(x, m_i) = z_i, \ i = 0, ..., n.$$

■

El lema anterior nos permite probar:

E

Proposition 206 *Si h es $\emptyset$-recursiva, entonces h es representable*

Proof. Supongamos $f : S_1 \times ... \times S_n \to \omega$ y $g : \omega \times \omega \times S_1 \times ... \times S_n \to \omega$ son representables, con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $n \geq 0$. Probaremos que entonces $R(f, g) : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \to \omega$ lo es. Para esto primero notese que para $t, x_1, ..., x_n, z \in \omega$, las siguientes son equivalentes

(1) $R(f, g)(t, \vec{x}) = z$

(2) Hay $z_0, ..., z_t \in \omega$ tales que

$$\begin{array}{rcl} z_0 & = & f(\vec{x}) \\ z_{i+1} & = & g(z_i, i, \vec{x}),\ i = 0, ..., t-1 \\ z_t & = & z \end{array}$$

(3) Hay $x, y \in \omega$ tales que

$$\begin{array}{rcl} \beta(x,y,0) & = & f(\vec{x}) \\ \beta(x,y,i+1) & = & g(\beta(x,y,i),i,\vec{x}),\ i=0,...,t-1 \\ \beta(x,y,t) & = & z \end{array}$$

Sean φ_β, φ_f y φ_g formulas que representen a las funciones β, f y g, con respecto a las declaraciones

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\beta & = & _d\varphi_\beta(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ \varphi_f & = & _d\varphi_f(x_1,...,x_n,x_{n+1}) \\ \varphi_g & = & _d\varphi_g(x_1,...,x_{n+2},x_{n+3}) \end{array}$$

respectivamente. Sean $v_1,...,v_{n+1},v,\ y_1,y_2,y_3,y_4,z_1,z_2$ variables todas distintas y tales que cada una de las variebles libres de φ_β, φ_f y φ_g es sustituible por cada una de las variables $v_1,...,v_{n+1},v,\ y_1,y_2,y_3,y_4,z_1,z_2$. Sea $\varphi_{R(f,g)}$ la siguiente formula

1. $\exists z_1, z_2\ (\exists y_1 \varphi_\beta(z_1,z_2,0,y_1) \wedge \varphi_f(v_2,...,v_{n+1},y_1)) \wedge$
2. $\varphi_\beta(z_1,z_2,v_1,v) \wedge \forall y_2(y_2 < v_1 \rightarrow \exists y_3,y_4\ \varphi_\beta(z_1,z_2,y_2+1,y_3) \wedge$
3. $\varphi_\beta(z_1,z_2,y_2,y_4) \wedge \varphi_g(y_4,y_2,v_2,...,v_{n+1},y_3))$

Es facil usando (3) ver que la formula $\varphi_{R(f,g)}$ representa a $R(f,g)$, con respecto a la declaracion $\varphi_{R(f,g)} =_d \varphi_{R(f,g)}(v_1,...,v_{n+1},v)$.

En forma analoga se puede probar que las reglas de composicion y minimizacion preservan representabilidad por lo cual ya que los elementos de $\mathrm{R}_0^\emptyset$ son representables, tenemos que lo es toda funcion $\emptyset$-r. ■

Para probar que $Verd_\omega$ no es $\mathcal{A}$-r.e., necesitamos los siguientes dos lemas.

Lemma 207 *Hay un predicado $P : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ el cual es $\emptyset$-p.r. y tal que el predicado $Q = \lambda x\,[(\exists t \in \omega)P(t,x)] : \omega \rightarrow \omega$ no es $\emptyset$-r.*

Proof. Sea $\Sigma = \Sigma_p$. Recordemos que el predicado

$$P_1 = \lambda t\mathcal{P}\left[i^{0,1}(t,\mathcal{P},\mathcal{P}) = n(\mathcal{P}) + 1\right]$$

es Σ_p-p.r. ya que la funcion $i^{0,1}$ lo es. Notese que el dominio de P_1 es $\omega \times \mathrm{Pro}^{\Sigma_p}$. Por Lema 69 (de la materia de lenguajes) tenemos que

$$Halt^{\Sigma_p} = \lambda\mathcal{P}\left[(\exists t \in \omega)\ P_1(t,\mathcal{P})\right]$$

no es Σ_p-recursivo. Sea $<$ un orden total sobre Σ_p. Definamos $P : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ de la siguiente manera

$$P(t,x) = \begin{cases} P_1(t,*^<(x)) & \text{si} \quad *^<(x) \in \mathrm{Pro}^{\Sigma_p} \\ 0 & \text{si} \quad *^<(x) \notin \mathrm{Pro}^{\Sigma_p} \end{cases}$$

Claramente P es Σ_p-p.r., por lo cual es $\emptyset$-p.r.. Sea $Q = \lambda x\left[(\exists t \in \omega) P(t,x)\right]$. Notese que

$$Halt^{\Sigma_p} = Q \circ \#^{<}|_{\text{Pro}^{\Sigma_p}}$$

lo cual dice que Q no es Σ_p-r. ya que de serlo, el predicado $Halt^{\Sigma_p}$ lo seria. Por el teorema de independencia del alfabeto tenemos entonces que Q no es $\emptyset$-recursivo. ■

N

Corollary 208 *No toda funcion representable es $\emptyset$-recursiva*

Proof. Dejamos como ejercicio para el lector probar que el predicado Q del lema anterior es representable, lo cual completa la prueba de este corolario ya que Q no es $\emptyset$-recursivo. ■

Recordemos que para $\alpha \in \Sigma^*$, definimos

$$\frown\alpha = \begin{cases} [\alpha]_2 \ldots [\alpha]_{|\alpha|} & \text{si} \quad |\alpha| \geq 2 \\ \varepsilon & \text{si} \quad |\alpha| \leq 1 \end{cases}$$

E

Lemma 209 *Si $Verd_{\boldsymbol{\omega}}$ es $\mathcal{A}$-r.e., entonces es $\mathcal{A}$-r.*

Proof. Supongamos $Verd_{\boldsymbol{\omega}}$ es $\mathcal{A}$-r. e. Sea $f : \omega \to Verd_{\boldsymbol{\omega}}$ una funcion sobre y $\mathcal{A}$-r. Sea $g : S^{\tau_A} \to S^{\tau_A}$, dada por

$$g(\varphi) = \begin{cases} \frown\varphi & \text{si } [\varphi]_1 = \neg \\ \neg\varphi & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Notar que g es $\mathcal{A}$-p.r. por lo cual $g \circ f$ es $\mathcal{A}$-r. Ya que $I_{g\circ f} = S^{\tau_A} - Verd_{\boldsymbol{\omega}}$ (justifique), tenemos que $S^{\tau_A} - Verd_{\boldsymbol{\omega}}$ es $\mathcal{A}$-r. e., por lo cual

$$\mathcal{A}^* - Verd_{\boldsymbol{\omega}} = (\mathcal{A}^* - S^{\tau_A}) \cup (S^{\tau_A} - Verd_{\boldsymbol{\omega}})$$

lo es. Es decir que $Verd_{\boldsymbol{\omega}}$ y su complemento son $\mathcal{A}$-r.e. por lo cual $Verd_{\boldsymbol{\omega}}$ es $\mathcal{A}$-r. ■

Ahora podemos probar el importante resultado anunciado.

EP

Proposition 210 *$Verd_{\boldsymbol{\omega}}$ no es $\mathcal{A}$-r.e.*

Proof. Por el Lema 207 hay un predicado $\emptyset$-p.r., $P : \omega \times \omega \to \omega$ tal que el predicado $Q = \lambda x\left[(\exists t \in \omega) P(t,x)\right] : \omega \to \omega$ no es $\emptyset$-recursivo. Notese que Q tampoco es $\mathcal{A}$-recursivo. Ya que P es representable, hay una formula $\varphi =_d \varphi(v_1, v_2, v) \in F^{\tau_A}$ la cual cumple

$$\boldsymbol{\omega} \models \varphi[t,x,k] \text{ si y solo si } P(t,x) = k$$

cualesquiera sean $t, x, k \in \omega$. Sea $\psi = \varphi(v_1, v_2, 1)$. Declaremos $\psi =_d \psi(v_1, v_2)$. Tenemos entonces

$$\boldsymbol{\omega} \models \psi[t,x] \text{ si y solo si } P(t,x) = 1$$

cualesquiera sean $t, x \in \omega$. Sea $\psi_0 = \exists v_1\ \psi(v_1, v_2)$. Declaremos $\psi_0 =_d \psi_0(v_2)$. Tenemos entonces

$$\boldsymbol{\omega} \models \psi_0\,[x] \text{ si y solo si } Q(x) = 1$$

cualesquiera sea $x \in \omega$. Por el lema de reemplazo tenemos que para $x \in \omega$,

$$\boldsymbol{\omega} \models \psi_0\,[x] \text{ si y solo si } \boldsymbol{\omega} \models \psi_0(\widehat{x})$$

(justifique), por lo cual

$$\boldsymbol{\omega} \models \psi_0(\widehat{x}) \text{ si y solo si } Q(x) = 1$$

cualesquiera sea $x \in \omega$. Ya que $\psi_0(\widehat{x})$ es una sentencia,

$$\psi_0(\widehat{x}) \in Verd_{\boldsymbol{\omega}} \text{ si y solo si } Q(x) = 1$$

Sea $h : \omega \rightarrow \mathcal{A}^*$, dada por $h(x) = \psi_0(\widehat{x})$. Es facil ver que h es $\mathcal{A}$-recursiva. Ya que $Q = \chi_{Verd_{\boldsymbol{\omega}}} \circ h$ y Q no es $\mathcal{A}$-recursivo, tenemos que $\chi_{Verd_{\boldsymbol{\omega}}}$ no es $\mathcal{A}$-recursiva, es decir que $Verd_{\boldsymbol{\omega}}$ es un conjunto no $\mathcal{A}$-recursivo. El lema anterior nos dice entonces que es $Verd_{\boldsymbol{\omega}}$ no es $\mathcal{A}$-r.e.. ■

Ahora si estamos en condiciones de probar facilmente el famoso resultado de Godel.

EP

Theorem 211 *(Godel) Si $\Sigma \subseteq Verd_{\boldsymbol{\omega}}$ es $\mathcal{A}$-r.e., entonces $Teo_{(\Sigma,\tau_A)} \subsetneq Verd_{\boldsymbol{\omega}}$*

Proof. Ya que $\boldsymbol{\omega}$ es un modelo de (Σ, τ_A), por el Teorema de Correccion, tenemos que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)} \subseteq Verd_{\boldsymbol{\omega}}$. Ya que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$ es $\mathcal{A}$-r.e (Proposicion 204) y $Verd_{\boldsymbol{\omega}}$ no lo es, tenemos que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)} \neq Verd_{\boldsymbol{\omega}}$. ■

EP

Corollary 212 *Existe $\varphi \in S^{\tau_A}$ tal que $Arit \nvdash \varphi$ y $Arit \nvdash \neg\varphi$.*

Proof. Dejamos al lector la prueba de que el conjunto Σ_A es $\mathcal{A}$-r.e.. Una ves probado esto, podemos aplicar el teorema anterior a la teoria $Arit = (\Sigma_A, \tau_A)$, lo cual nos dice que $Teo_{Arit} \subsetneq Verd_{\boldsymbol{\omega}}$. Sea $\varphi \in Verd_{\boldsymbol{\omega}} - Teo_{Arit}$. O sea que $Arit \nvdash \varphi$ y $\varphi \in Verd_{\boldsymbol{\omega}}$. Ya que $\neg\varphi \notin Verd_{\boldsymbol{\omega}}$, tenemos que $\neg\varphi \notin Teo_{Arit}$, es decir $Arit \nvdash \neg\varphi$. ■