Resumen de teoremas para el final de Lógica

Agustín Curto, agucurto95@gmail.com

2017

Contents

Nota: Este resumen se corresponde con la materia dictada en el año 2017. El autor no se responsabiliza de posibles cambios que pudiesen realizarse en los temas dictados en la misma, así como tampoco de errores involuntarios que pudiesen existir en dicho resumen.

Por favor, mejorá este documento en github
https://github.com/ResumenesFaMAF/resumenLogica

1 Estructuras algebráicas ordenadas

Lemma 1. *Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Supongamos que F es un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$, entonces:*

*a) Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que a es **cota superior** (resp. **inferior**) de S si y solo si $F(a)$ es **cota superior** (resp. **inferior**) de $F(S)$.*

b) Para cada $S \subseteq P$, se tiene que existe $\sup(S)$ si y solo si existe $\sup(F(S))$ y en el caso de que existan tales elementos se tiene que $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$.

c) P tiene 1 (resp. 0) si y solo si P' tiene 1 (resp. 0) y en tal caso tales elementos están conectados por F.

*d) Para cada $m \in P$, m es **maximal** (resp. **minimal**) si y solo si $F(m)$ es **maximal** (resp. **minimal**).*

e) Para $a, b \in P$, tenemos que $a \prec b$ si y solo si $F(a) \prec' F(b)$.

Proof. a) Probaremos solo el caso de la **cota superior**.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que a es **cota superior** de S, veamos entonces que $F(a)$ es **cota superior** de $F(S)$. Sean:

- $x \in F(S)$
- $s \in S$ tal que $x = F(s)$.

Ya que $s \leq a$, tenemos que $x = F(s) \leq' F(a)$. Luego, $F(a)$ es **cota superior**.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que $F(a)$ es **cota superior** de $F(S)$ y veamos entonces que a es cota superior de S.

Sea $s \in S$, ya que $F(s) \leq' F(a)$, tenemos que $s = F^{-1}(F(s)) \leq' F^{-1}(F(a)) = a$. Por lo tanto, a es **cota superior**.

b) $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos existe $\sup(S)$. Veamos que $F(\sup(S))$ es el supremo de $F(S)$. Por el iniciso (a) $F(\sup(S))$ es cota superior de $F(S)$. Veamos que es la menor de las cotas superiores. Supongamos b' cota superior de $F(S)$, entonces $F^{-1}(b')$ es cota superior de S, es decir, $\sup(S) \leq F^{-1}(b')$, produciendo $F(\sup(S)) \leq' b'$. Por lo tanto, $F(\sup(S))$ es el supremo de $F(S)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos existe $\sup(F(S))$. Veamos que $F^{-1}(\sup(F(S)))$ es el supremo de S. Nuevamente, por el iniciso (a) $F^{-1}(\sup(F(S)))$ es cota superior de S. Veamos que es la menor de las cotas superiores. Supongamos b cota superior de S, entonces $F(b)$ es cota superior de $F(S)$, es decir, $\sup(F(S)) \leq F(b)$, produciendo $F^{-1}(\sup(F(S))) \leq b$. Por lo tanto, $F^{-1}(\sup(F(S)))$ es el supremo de S.

c) Se desprende del inciso (b) tomando $S = P$.

d) Probaremos solo el caso **maximal**.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que m es maximal de $(P, \leq)$. Veamos que $F(m)$ es maximal de $(P', \leq')$. Supongamos que $F(m)$ no es maximal de $(P', \leq')$, es decir, $F(m) <' b'$ $\forall b' \in P'$. Dado que F es isomorfismo:

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(m)) &< F^{-1}(b') \\ m &< F^{-1}(b') \end{aligned}$$

Lo cual es un absurdo, dado que m es maximal de $(P, \leq)$. Por lo tanto, $F(m)$ es maximal de $(P', \leq')$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $F(m)$ es maximal de $(P', \leq')$. Veamos que m es maximal de $(P, \leq)$. Supongamos que m no es maximal de $(P, \leq)$, es decir, $m < b\ \forall b \in P$. Dado que F es isomorfismo:

$$F(m) < F(b)$$

Lo cual es un absurdo, dado que $F(m)$ es maximal de $(P', \leq')$. Por lo tanto, m es maximal de $(P, \leq)$.

e) $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos $a \prec b$, veamos que $F(a) \prec' F(b)$. Debemos ver:

1) $F(a) <' F(b)$
2) $\nexists z'$ tal que $F(a) < z' < F(b)$

Ya que $a \prec b$, por definición tenemos: $\boxed{a < b \text{ y } \nexists z \text{ tal que } a < z < b}$ $(\star)$

Dado que la función F es un isomorfismo, se cumple (1). Veamos que se cumple (2), supongamos que $\exists z'$ tal que $F(a) < z' < F(b)$. Luego, nuevamente utilizando que F es isomorfismo, tenemos:

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(a)) < \ & F^{-1}(z') & < F^{-1}(F(b)) \\ a < \ & F^{-1}(z') & < b \end{aligned}$$

Lo cual, contradice $(\star)$, el absurdo vino de suponer que $\exists z'$ tal que $F(a) < z' < F(b)$, por lo tanto $\nexists z'$ tal que $F(a) < z' < F(b)$.

Finalmente, dado que se cumplen los puntos (1) y (2), se cumple también $F(a) \prec' F(b)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos $F(a) \prec' F(b)$, veamos que $a \prec b$.

Ya que $F^{-1} : (P', \leq') \to (P, \leq)$ es isomorfismo, por lo ya visto tenemos:

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(a)) & \prec & F^{-1}(F(b)) \\ a & \prec & b \end{aligned}$$

□

Lemma 2. *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y, z, w \in L$, se cumplen las siguientes propiedades:*

(1) $x \leq x \mathsf{\ s\ } y$

(2) $x \mathsf{\ i\ } y \leq x$

(3) $x \mathsf{\ s\ } x = x \mathsf{\ i\ } x = x$

(4) $x \mathsf{\ s\ } y = y \mathsf{\ s\ } x$

(5) $x \mathsf{\ i\ } y = y \mathsf{\ i\ } x$

(6) $x \leq y \Leftrightarrow x \mathsf{\ s\ } y = y \Leftrightarrow x \mathsf{\ i\ } y = x$

(7) $x \mathsf{\ s\ } (x \mathsf{\ i\ } y) = x$

(8) $x \mathsf{\ i\ } (x \mathsf{\ s\ } y) = x$

(9) $(x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ s\ } z = x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ s\ } z)$

(10) $(x \mathsf{\ i\ } y) \mathsf{\ i\ } z = x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ i\ } z)$

(11) Si $x \leq z$ e $y \leq w$ entonces:

- $x \mathsf{\ s\ } y \leq z \mathsf{\ s\ } w$
- $x \mathsf{\ i\ } y \leq z \mathsf{\ i\ } w$

(12) $(x \mathsf{\ i\ } y) \mathsf{\ s\ } (x \mathsf{\ i\ } z) \leq x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ s\ } z)$

Proof. Dado que las propiedades $(1), (2), (3), (4), (5), (6)$, son consecuencia inmediata de las definiciones de s e i, probaremos solo las restantes.

(7)

$$\begin{aligned} x \mathbin{\mathsf{i}} y \leq & x && \text{Por (2)} \\ (x \mathbin{\mathsf{i}} y) \mathbin{\mathsf{s}} x = & x && \text{Por (6)} \\ x \mathbin{\mathsf{s}} (x \mathbin{\mathsf{i}} y) = & x && \text{Por (3)} \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned} x \leq & x \mathbin{\mathsf{s}} y && \text{Por (1)} \\ x \mathbin{\mathsf{i}} (y \mathbin{\mathsf{s}} x) = & x && \text{Por (6)} \end{aligned}$$

(9) Para probar la igualdad probaremos las siguientes desigualdades:

- $\boxed{(x \mathbin{\mathsf{s}} y) \mathbin{\mathsf{s}} z \leq x \mathbin{\mathsf{s}} (y \mathbin{\mathsf{s}} z)}$
  Notese que $x \mathbin{\mathsf{s}} (y \mathbin{\mathsf{s}} z)$ es cota superior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$\begin{array}{rcl} x & \leq & x \mathbin{\mathsf{s}} (y \mathbin{\mathsf{s}} z) \\ y & \leq & (y \mathbin{\mathsf{s}} z) \leq x \mathbin{\mathsf{s}} (y \mathbin{\mathsf{s}} z) \\ z & \leq & (y \mathbin{\mathsf{s}} z) \leq x \mathbin{\mathsf{s}} (y \mathbin{\mathsf{s}} z) \end{array}$$

  Por otro lado, $x \mathbin{\mathsf{s}} (y \mathbin{\mathsf{s}} z)$ es cota superior de $\{x, y\}$, tenemos que $x \mathbin{\mathsf{s}} y \leq x \mathbin{\mathsf{s}} (y \mathbin{\mathsf{s}} z)$, por lo cual $x \mathbin{\mathsf{s}} (y \mathbin{\mathsf{s}} z)$ es cota superior del conjunto $\{x \mathbin{\mathsf{s}} y, z\}$, lo cual dice que $(x \mathbin{\mathsf{s}} y) \mathbin{\mathsf{s}} z \leq x \mathbin{\mathsf{s}} (y \mathbin{\mathsf{s}} z)$.

- $\boxed{(x \mathbin{\mathsf{s}} y) \mathbin{\mathsf{s}} z \geq x \mathbin{\mathsf{s}} (y \mathbin{\mathsf{s}} z)}$
  Notese que $(x \mathbin{\mathsf{s}} y) \mathbin{\mathsf{s}} z$ es cota superior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$\begin{array}{rcl} x & \leq & x \mathbin{\mathsf{s}} y \leq (x \mathbin{\mathsf{s}} y) \mathbin{\mathsf{s}} z \\ y & \leq & x \mathbin{\mathsf{s}} y \leq (x \mathbin{\mathsf{s}} y) \mathbin{\mathsf{s}} z \\ z & \leq & (x \mathbin{\mathsf{s}} y) \mathbin{\mathsf{s}} z \end{array}$$

  Por otro lado, $(x \mathbin{\mathsf{s}} y) \mathbin{\mathsf{s}} z$ es cota superior de $\{y, z\}$, tenemos que $y \mathbin{\mathsf{s}} z \leq (x \mathbin{\mathsf{s}} y) \mathbin{\mathsf{s}} z$, por lo cual $(x \mathbin{\mathsf{s}} y) \mathbin{\mathsf{s}} z$ es cota superior del conjunto $\{x, y \mathbin{\mathsf{s}} z\}$, lo cual dice que $(x \mathbin{\mathsf{s}} y) \mathbin{\mathsf{s}} z \geq x \mathbin{\mathsf{s}} (y \mathbin{\mathsf{s}} z)$.

Por lo tanto, $(x \mathbin{\mathsf{s}} y) \mathbin{\mathsf{s}} z = x \mathbin{\mathsf{s}} (y \mathbin{\mathsf{s}} z)$

(10) Para probar la igualdad probaremos las siguientes desigualdades:

- $\boxed{(x \mathbin{\mathsf{i}} y) \mathbin{\mathsf{i}} z \leq x \mathbin{\mathsf{i}} (y \mathbin{\mathsf{i}} z)}$
  Notese que $x \mathbin{\mathsf{i}} (y \mathbin{\mathsf{i}} z)$ es cota inferior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$\begin{array}{rcl} x \mathbin{\mathsf{i}} (y \mathbin{\mathsf{i}} z) & \leq & x \\ (y \mathbin{\mathsf{i}} z) \leq x \mathbin{\mathsf{i}} (y \mathbin{\mathsf{i}} z) & \leq & y \\ z & \leq & (y \mathbin{\mathsf{i}} z) \leq x \mathbin{\mathsf{i}} (y \mathbin{\mathsf{i}} z) \end{array}$$

  Por otro lado, $x \mathbin{\mathsf{i}} (y \mathbin{\mathsf{i}} z)$ es cota inferior de $\{x, y\}$, tenemos que $x \mathbin{\mathsf{i}} y \leq x \mathbin{\mathsf{i}} (y \mathbin{\mathsf{i}} z)$, por lo cual $x \mathbin{\mathsf{i}} (y \mathbin{\mathsf{i}} z)$ es cota inferior del conjunto $\{x \mathbin{\mathsf{i}} y, z\}$, lo cual dice que $(x \mathbin{\mathsf{i}} y) \mathbin{\mathsf{i}} z \leq x \mathbin{\mathsf{i}} (y \mathbin{\mathsf{i}} z)$.

- $\boxed{(x \mathbin{\mathsf{i}} y) \mathbin{\mathsf{i}} z \geq x \mathbin{\mathsf{i}} (y \mathbin{\mathsf{i}} z)}$
  Notese que $(x \mathbin{\mathsf{i}} y) \mathbin{\mathsf{i}} z$ es cota inferior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$\begin{array}{rcl} x & \leq & x \mathbin{\mathsf{i}} y \leq (x \mathbin{\mathsf{s}} y) \mathbin{\mathsf{i}} z \\ y & \leq & x \mathbin{\mathsf{i}} y \leq (x \mathbin{\mathsf{s}} y) \mathbin{\mathsf{i}} z \\ z & \leq & (x \mathbin{\mathsf{i}} y) \mathbin{\mathsf{i}} z \end{array}$$

Por otro lado, $(x \text{ i } y) \text{ i } z$ es cota inferior de $\{y, z\}$, tenemos que $y \text{ i } z \leq (x \text{ i } y) \text{ i } z$, por lo cual $(x \text{ i } y) \text{ i } z$ es cota inferior del conjunto $\{x, y \text{ i } z\}$, lo cual dice que $(x \text{ i } y) \text{ i } z \geq x \text{ i } (y \text{ i } z)$.

Por lo tanto, $(x \text{ i } y) \text{ i } z = x \text{ i } (y \text{ i } z)$

(11)

$$x \leq z \leq z \text{ s } w \qquad\qquad x \leq z \Rightarrow x \text{ i } y \leq z$$
$$y \leq w \leq z \text{ s } w \qquad\qquad y \leq w \Rightarrow x \text{ i } y \leq w$$

Luego, $z \text{ s } w$ es cota superior de $\{x, y\}$ y $x \text{ i } y$ es cota inferior de $\{z, w\}$, por lo tanto, $x \text{ s } y \leq z \text{ s } w$ y $x \text{ i } y \leq z \text{ i } w$.

(12)

$$\left.\begin{array}{l} (x \text{ i } y), (x \text{ i } z) \leq x \\ (x \text{ i } y), (x \text{ i } z) \leq y \text{ s } z \end{array}\right\} \Rightarrow (x \text{ i } y), (x \text{ i } z) \leq x \text{ i } (y \text{ s } z)$$

$$\therefore (x \text{ i } y) \text{ s } (x \text{ i } z) \leq x \text{ i } (y \text{ s } z)$$

□

Lemma 3. *Sea $(L, \leq)$ un reticulado, dados elementos $x_1, \ldots, x_n \in L$, con $n \geq 2$, se tiene*

$$\begin{array}{rcl} (\ldots(x_1 \text{ s } x_2) \text{ s } \ldots) \text{ s } x_n & = & \sup(\{x_1, \ldots, x_n\}) \\ (\ldots(x_1 \text{ i } x_2) \text{ i } \ldots) \text{ i } x_n & = & \inf(\{x_1, \ldots, x_n\}) \end{array}$$

Proof. Probaremos por inducción en n.

Caso Base: $\boxed{n = 2}$

$$\begin{array}{rcl} x_1 \text{ s } x_2 & = & \sup(\{x_1, x_2\}) \\ x_1 \text{ i } x_2 & = & \inf(\{x_1, x_2\}) \end{array}$$

Lo cual vale, dado que es la definición.

Caso Inductivo: $\boxed{n > 2}$
Supongamos ahora que vale para n y veamos entonces que vale para $n+1$. Sean $x_1, \ldots, x_{n+1} \in L$, por hipótesis inductiva tenemos que:

$$\begin{array}{rcll} (\ldots(x_1 \text{ s } x_2) \text{ s } \ldots) \text{ s } x_n & = & \sup(\{x_1, \ldots, x_n\}) & (\star_1) \\ (\ldots(x_1 \text{ i } x_2) \text{ i } \ldots) \text{ i } x_n & = & \inf(\{x_1, \ldots, x_n\}) & (\star_2) \end{array}$$

Veamos entonces que:

$$\begin{array}{rcll} ((\ldots(x_1 \text{ s } x_2) \text{ s } \ldots) \text{ s } x_n) \text{ s } x_{n+1} & = & \sup(\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}) & (\dagger_1) \\ ((\ldots(x_1 \text{ i } x_2) \text{ i } \ldots) \text{ i } x_n) \text{ i } x_{n+1} & = & \inf(\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}) & (\dagger_2) \end{array}$$

Para ello debemos ver $((\ldots(x_1 \text{ s } x_2) \text{ s } \ldots) \text{ s } x_n) \text{ s } x_{n+1}$ es cota superior de $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ y que es la menor de las cotas superiores. Además, que $((\ldots(x_1 \text{ i } x_2) \text{ i } \ldots) \text{ i } x_n) \text{ i } x_{n+1}$ es cota inferior de $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ y que es la mayor de las cotas inferiores.

Es fácil ver que $((\ldots(x_1 \mathsf{s}\, x_2) \mathsf{s} \ \ldots) \mathsf{s}\, x_n) \mathsf{s}\, x_{n+1}$ es cota superior de $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$. Supongamos que z es otra cota superior de $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$. Ya que z es también cota superior del conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$, por $(\star_1)$ tenemos que:

$$(\ldots(x_1 \mathsf{s}\, x_2) \mathsf{s} \ \ldots) \mathsf{s}\, x_n \leq z$$

Además, dado que $x_{n+1} \leq z$, tenemos que:

$$((\ldots(x_1 \mathsf{s}\, x_2) \mathsf{s} \ \ldots) \mathsf{s}\, x_n) \mathsf{s}\, x_{n+1} \leq z$$

Por lo tanto, vale $(\dagger_1)$.

Nuevamente, es fácil ver que $((\ldots(x_1 \mathsf{i}\, x_2) \mathsf{i} \ \ldots) \mathsf{i}\, x_n) \mathsf{i}\, x_{n+1}$ es cota inferior de $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$. Supongamos que z' es otra cota inferior de $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$. Ya que z' es también cota inferior del conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$, por $(\star_2)$ tenemos que:

$$z' \leq (\ldots(x_1 \mathsf{i}\, x_2) \mathsf{i} \ \ldots) \mathsf{i}\, x_n$$

Además, dado que $z' \leq x_{n+1}$, tenemos que:

$$z' \leq ((\ldots(x_1 \mathsf{i}\, x_2) \mathsf{i} \ \ldots) \mathsf{i}\, x_n) \mathsf{i}\, x_{n+1}$$

Por lo tanto, vale $(\dagger_2)$. □

Theorem 4. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado, la relación binaria definida por:*

$$x \leq y \Leftrightarrow x \mathsf{s}\, y = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple:

$$\begin{array}{rcl} \sup(\{x, y\}) & = & x \mathsf{s}\, y \\ \inf(\{x, y\}) & = & x \mathsf{i}\, y \end{array}$$

Proof.

- Reflexiva: Sea $x \in L$ un elemento cualquiera. Luego,

$$\left.\begin{array}{l} x \mathsf{s}\, x = x \\ x \mathsf{i}\, x = x \end{array}\right\} \Rightarrow x \leq x$$

- Antisimétrica: Sean $x, y \in L$ elementos cualquieras. Supongamos que $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x \leq y \Rightarrow x \mathsf{s}\, y = y \\ y \leq x \Rightarrow x \mathsf{s}\, y = x \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

- Transitiva: Supongamos que $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces:

$$x \mathsf{s}\, z = x \mathsf{s}\, (y \mathsf{s}\, z) = (x \mathsf{s}\, y) \mathsf{s}\, z = y \mathsf{s}\, z = z$$

  por lo cual $x \leq z$.

  Veamos ahora que $\sup(\{x, y\}) = x \mathsf{s}\, y$. Es claro que $x \mathsf{s}\, y$ es una cota superior del conjunto $\{x, y\}$, veamos que es la menor. Supongamos $x, y \leq z$, entonces:

$$(x \mathsf{s}\, y) \mathsf{s}\, z = x \mathsf{s}\, (y \mathsf{s}\, z) = x \mathsf{s}\, z = z$$

  por lo que $x \mathsf{s}\, y \leq z$, es decir, $x \mathsf{s}\, y$ es la menor cota superior.

  Resta probar que $\inf(\{x, y\}) = x \mathsf{i}\, y$. Nuevamente, es claro que $x \mathsf{i}\, y$ es una cota inferior del conjunto $\{x, y\}$, veamos que es la mayor. Supongamos $z \leq x, y$, entonces:

$$(x \mathsf{i}\, y) \mathsf{i}\, z = x \mathsf{i}\, (y \mathsf{i}\, z) = x \mathsf{i}\, z = z$$

  por lo que $z \leq x \mathsf{i}\, y$, es decir, $x \mathsf{i}\, y$ es la mayor cota inferior.

□

Lemma 5. *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo.*

Proof. Debemos probar que F^{-1} es un homomorfismo. Sean $F(x), F(y)$ dos elementos cualesquiera de L', tenemos que:

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(x)\ \mathsf{s}'\ F(y)) &= F^{-1}(F(x\ \mathsf{s}\ y)) \\ &= x\ \mathsf{s}\ y \\ &= F^{-1}(F(x))\ \mathsf{s}\ F^{-1}(F(y)) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F^{-1}(F(x)\ \mathsf{i}'\ F(y)) &= F^{-1}(F(x\ \mathsf{i}\ y)) \\ &= x\ \mathsf{i}\ y \\ &= F^{-1}(F(x))\ \mathsf{i}\ F^{-1}(F(y)) \end{aligned}$$

Luego, F^{-1} es homomorfismo y por lo tanto F es isomorfismo. □

Lemma 6. *Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados y sea $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$.*

Proof. Ya que $L \neq \emptyset$, tenemos que $I_F \neq \emptyset$. Sean $a, b \in I_F$, $x, y \in L$ tales que $F(x) = a$ y $F(y) = b$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} a\ \mathsf{s}'\ b &= F(x)\ \mathsf{s}'\ F(y) = F(x\ \mathsf{s}\ y) \in I_F \\ a\ \mathsf{i}'\ b &= F(x)\ \mathsf{i}'\ F(y) = F(x\ \mathsf{i}\ y) \in I_F \end{aligned}$$

por lo cual I_F es cerrada bajo s' e i'. □

Lemma 7. *Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una función, entonces F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si y solo si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.*

Proof. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$.
Sean $x, y \in L$ tales que $x \leq y$. Tenemos:

$$\begin{aligned} y &= x\ \mathsf{s}\ y \\ F(y) &= F(x\ \mathsf{s}\ y) \\ &= F(x)\ \mathsf{s}'\ F(y) \\ \therefore F(x) &\leq' F(y) \end{aligned}$$

Sean $x', y' \in L'$ tales que $x' \leq' y'$. Tenemos:

$$\begin{aligned} y' &= x'\ \mathsf{s}'\ y' \\ F^{-1}(y') &= F^{-1}(x'\ \mathsf{s}'\ y') \\ &= F^{-1}(x')\ \mathsf{s}\ F^{-1}(y') \\ \therefore F^{-1}(x) &\leq F^{-1}(y) \end{aligned}$$

Por lo tanto, F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$, entonces el **Lemma 1** nos dice que F y F_1 respetan la operaciones de supremo e ínfimo, por lo cual F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$. □

Lemma 8. *Sea $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ un reticulado. El orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado a este reticulado cumple:*

$$x/\theta \mathrel{\tilde{\leq}} y/\theta \Leftrightarrow y\ \theta\ (x\ \mathsf{s}\ y)$$

Proof. Veamos que $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ satisface las 7 identidades de la definición de reticulado. Sean $x/\theta, y/\theta, z/\theta$ elementos cualesquiera de L/θ.

(I1) $\boxed{x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; x/\theta = x/\theta \;\tilde{\imath}\; x/\theta = x/\theta}$

$$\begin{aligned} x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; x/\theta &= (x \;\mathsf{s}\; x)/\theta = x/\theta \\ x/\theta \;\tilde{\imath}\; x/\theta &= (x \;\mathsf{i}\; x)/\theta = x/\theta \end{aligned}$$

(I2) $\boxed{x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta = y/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; x/\theta}$

$$\begin{aligned} x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta &= (x \;\mathsf{s}\; y)/\theta \\ &= (y \;\mathsf{s}\; x)/\theta \\ &= y/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta \end{aligned}$$

(I3) $\boxed{x/\theta \;\tilde{\imath}\; y/\theta = y/\theta \;\tilde{\imath}\; x/\theta}$

$$\begin{aligned} x/\theta \;\tilde{\imath}\; y/\theta &= (x \;\mathsf{i}\; y)/\theta \\ &= (y \;\mathsf{i}\; x)/\theta \\ &= y/\theta \;\tilde{\imath}\; y/\theta \end{aligned}$$

(I4) $\boxed{(x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta) \;\tilde{\mathsf{s}}\; z/\theta = x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; (y/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; z/\theta)}$

$$\begin{aligned} (x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta) \;\tilde{\mathsf{s}}\; z/\theta &= (x \;\mathsf{s}\; y)/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; z/\theta \\ &= ((x \;\mathsf{s}\; y) \;\mathsf{s}\; z)/\theta \\ &= (x \;\mathsf{s}\; (y \;\mathsf{s}\; z))/\theta \\ &= x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; (y \;\mathsf{s}\; z)/\theta \\ &= x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; (y/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; z/\theta) \end{aligned}$$

(I5) $\boxed{(x/\theta \;\tilde{\imath}\; y/\theta) \;\tilde{\imath}\; z/\theta = x/\theta \;\tilde{\imath}\; (y/\theta \;\tilde{\imath}\; z/\theta)}$

$$\begin{aligned} (x/\theta \;\tilde{\imath}\; y/\theta) \;\tilde{\imath}\; z/\theta &= (x \;\mathsf{i}\; y)/\theta \;\tilde{\imath}\; z/\theta \\ &= ((x \;\mathsf{i}\; y) \;\mathsf{i}\; z)/\theta \\ &= (x \;\mathsf{i}\; (y \;\mathsf{i}\; z))/\theta \\ &= x/\theta \;\tilde{\imath}\; (y \;\mathsf{i}\; z)/\theta \\ &= x/\theta \;\tilde{\imath}\; (y/\theta \;\tilde{\imath}\; z/\theta) \end{aligned}$$

(I6) $\boxed{x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; (x/\theta \;\tilde{\imath}\; y/\theta) = x/\theta}$

$$\begin{aligned} x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; (x/\theta \;\tilde{\imath}\; y/\theta) &= x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; (x \;\mathsf{i}\; y)/\theta \\ &= (x \;\mathsf{s}\; (x \;\mathsf{i}\; y))/\theta \\ &= x/\theta \end{aligned}$$

(I7) $\boxed{x/\theta \;\tilde{\imath}\; (x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta) = x/\theta}$

$$\begin{aligned} x/\theta \;\tilde{\imath}\; (x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta) &= x/\theta \;\tilde{\imath}\; (x \;\mathsf{s}\; y)/\theta \\ &= (x \;\mathsf{i}\; (x \;\mathsf{s}\; y))/\theta \\ &= x/\theta \end{aligned}$$

□

Corollary 9. *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado en el cual hay un elemento máximo 1 (resp. mínimo 0), entonces si θ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}), 1/\theta$ (resp. $0/\theta$) es un elemento máximo (resp. mínimo) de $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$.*

Proof. Ya que $1 \;\theta\; (x \;\mathsf{s}\; 1)$, para cada $x \in L$, tenemos que $x/\theta \;\tilde{\leq}\; 1/\theta$, para cada $x \in L$. □

Lemma 10. *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ es un homomorfismo de reticulados, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$.*

Proof. Veamos primero que $\ker F$ es una relación de equivalencia.

- Reflexiva: $(x, x) \in \ker\, F$. Trivial pues $F(x) = F(x)$.
- Simétrica: Si $(x, y) \in \ker\, F \Rightarrow (y, x) \in \ker\, F$.

  Si $(x, y) \in \ker\, F \Rightarrow F(x) = F(y)$. Luego, vale también $F(y) = F(x)$.
- Transitiva: Si $(x, y), (y, z) \in \ker\, F \Rightarrow (x, z) \in \ker\, F$.

$$\left.\begin{array}{l} (x, y) \in \ker\, F \Rightarrow F(x) = F(y) \\ (y, z) \in \ker\, F \Rightarrow F(y) = F(z) \end{array}\right\} \Rightarrow F(x) = F(y) = F(z)$$

  Por lo tanto, $(x, z) \in \ker\, F$.

Supongamos $x \ker F(x')$ y $y \ker F(y')$, entonces:

$$\begin{aligned} F(x \;\mathsf{s}\; y) &= F(x) \;\mathsf{s}'\; F(y) = F(x') \;\mathsf{s}'\; F(y') = F(x' \;\mathsf{s}\; y') \\ F(x \;\mathsf{i}\; y) &= F(x) \;\mathsf{i}'\; F(y) = F(x') \;\mathsf{i}'\; F(y') = F(x' \;\mathsf{i}\; y') \end{aligned}$$

lo cual nos dice que $(x \;\mathsf{s}\; y) \ker F(x' \;\mathsf{s}\; y')$ y $(x \;\mathsf{i}\; y) \ker F(x' \;\mathsf{i}\; y')$. □

Lemma 11. *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado y sea θ una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$, entonces π_θ es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$. Además* $\ker \pi_\theta = \theta$.

Proof. Sean $x, y \in L$ elementos cualquier. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \pi_\theta(x \mathrel{\mathsf{s}} y) =& (x \mathrel{\mathsf{s}} y)/\theta = x/\theta \mathrel{\tilde{\mathsf{s}}} y/\theta = \pi_\theta(x) \mathrel{\tilde{\mathsf{s}}} \pi_\theta(y) \\ \pi_\theta(x \mathrel{\mathsf{i}} y) =& (x \mathrel{\mathsf{i}} y)/\theta = x/\theta \mathrel{\tilde{\imath}} y/\theta = \pi_\theta(x) \mathrel{\tilde{\imath}} \pi_\theta(y) \end{aligned}$$

por lo cual π_θ preserva las operaciones de supremo e ínfimo. □

Lemma 12. *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo.*

Proof. Debemos probar que F^{-1} es un homomorfismo. Sean $F(x), F(y)$ dos elementos cualesquiera de L', tenemos que:

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(1)) &= F^{-1}(1') & F^{-1}(F(0)) &= F^{-1}(0') \\ F^{-1}(1') &= 1 & F^{-1}(0') &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(x) \mathrel{\mathsf{s}'} F(y)) &= F^{-1}(F(x \mathrel{\mathsf{s}} y)) & F^{-1}(F(x) \mathrel{\mathsf{i}'} F(y)) &= F^{-1}(F(x \mathrel{\mathsf{i}} y)) \\ &= x \mathrel{\mathsf{s}} y & &= x \mathrel{\mathsf{i}} y \\ &= F^{-1}(F(x)) \mathrel{\mathsf{s}} F^{-1}(F(y)) & &= F^{-1}(F(x)) \mathrel{\mathsf{i}} F^{-1}(F(y)) \end{aligned}$$

Luego, F^{-1} es homomorfismo y por lo tanto F es isomorfismo. □

Lemma 13. *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ es un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$.*

Proof. Dado que F es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ utilizando el **Lemma 6** tenemos que I_F es subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ lo cual ya que $0', 1' \in I_F$ implica que I_F es un subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$. □

Lemma 14. *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ es un homomorfismo de reticulados acotados, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$.*

Proof. Dado que F es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ utilizando el **Lemma ??** tenemos que $kerF$ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ lo cual por definción nos dice que $kerF$ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$. □

Lemma 15. *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado y θ una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$, entonces:*

a) $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ es un reticulado acotado.

b) π_θ es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ cuyo núcleo es θ.

Lemma 16. *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}',^{c'} 0', 1')$ un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo.*

Proof. □

Lemma 17. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}',^{c'} 0', 1')$ *es un homomorfismo, entonces* I_F *es un subuniverso de* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}',^{c'} 0', 1')$.

Proof. □

Lemma 18. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}',^{c'} 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados complementados, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$.

Proof. Ya que F es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}',^{c'}, 0'$, tenemos por **Lemma 14** que $kerF$ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$, es decir, solo falta probar que para todos $x, y \in L$ se tiene que $x/kerF = y/kerF$ implica $x^c/kerF = y^c/kerF$, lo cual es dejado al lector. □

Lemma 19. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$ *un reticulado complementado y sea* θ *una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$.

a) $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath},^c /\theta, 0/\theta, 1/\theta)$ *es un reticulado complementado.*

b) π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$ *en* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath},^c /\theta, 0/\theta, 1/\theta)$ *cuyo núcleo es* θ.

Proof. [a)]

□

Lemma 20. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado. Son equivalentes:*

(1) $x \ \mathsf{i}\ (y \ \mathsf{s}\ z) = (x \ \mathsf{i}\ y) \ \mathsf{s}\ (x \ \mathsf{i}\ z)$, *cualesquiera sean* $x, y, z \in L$

(2) $x \ \mathsf{s}\ (y \ \mathsf{i}\ z) = (x \ \mathsf{s}\ y) \ \mathsf{i}\ (x \ \mathsf{s}\ z)$, *cualesquiera sean* $x, y, z \in L$.

Proof. $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Notar que:

$$\begin{aligned}
(x \ \mathsf{s}\ y) \ \mathsf{i}\ (x \ \mathsf{s}\ z) &= ((x \ \mathsf{s}\ y) \ \mathsf{i}\ x) \ \mathsf{s}\ ((x \ \mathsf{s}\ y) \ \mathsf{i}\ z) \\
&= (x \ \mathsf{s}\ (z \ \mathsf{i}\ (x \ \mathsf{s}\ y)) \\
&= (x \ \mathsf{s}\ ((z \ \mathsf{i}\ x) \ \mathsf{s}\ (z \ \mathsf{i}\ y)) \\
&= (x \ \mathsf{s}\ (z \ \mathsf{i}\ x)) \ \mathsf{s}\ (z \ \mathsf{i}\ y) \\
&= x \ \mathsf{s}\ (z \ \mathsf{i}\ y) \\
&= x \ \mathsf{s}\ (y \ \mathsf{i}\ z)
\end{aligned}$$

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Notar que:

$$\begin{aligned}
(x \ \mathsf{i}\ y) \ \mathsf{s}\ (x \ \mathsf{i}\ z) &= ((x \ \mathsf{i}\ y) \ \mathsf{s}\ x) \ \mathsf{i}\ ((x \ \mathsf{i}\ y) \ \mathsf{s}\ z) \\
&= (x \ \mathsf{i}\ (z \ \mathsf{s}\ (x \ \mathsf{i}\ y)) \\
&= (x \ \mathsf{i}\ ((z \ \mathsf{s}\ x) \ \mathsf{i}\ (z \ \mathsf{s}\ y)) \\
&= (x \ \mathsf{i}\ (z \ \mathsf{s}\ x)) \ \mathsf{i}\ (z \ \mathsf{s}\ y) \\
&= x \ \mathsf{i}\ (z \ \mathsf{s}\ y) \\
&= x \ \mathsf{i}\ (y \ \mathsf{s}\ z)
\end{aligned}$$

□

Lemma 21. *Si* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento.*

Proof. Supongamos $x \in L$ tiene complementos y, z. Se tiene:

$$y \mathsf{s} x = 1 = x \mathsf{s} z$$
$$y \mathsf{i} x = 0 = x \mathsf{i} z$$

por lo cual:

$$y = y \mathsf{s} 0 = y \mathsf{s} (x \mathsf{i} z) = (y \mathsf{s} x) \mathsf{i} (y \mathsf{s} z) = 1 \mathsf{i} (y \mathsf{s} z) = (x \mathsf{s} z) \mathsf{i} (y \mathsf{s} z) = (x \mathsf{i} y) \mathsf{s} z = 0 \mathsf{s} z = z$$

Por lo tanto, $y = z$. □

Lemma 22. *Si $S \neq \emptyset$, entonces $[S)$ es un filtro. Más aún si F es un filtro y $F \supseteq S$, entonces $F \supseteq [S)$, es decir, $[S)$ es el menor filtro que contiene a S.*

Proof. Recordemos:

$$[S) = \{y \in L : y \geq s_1 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} s_n, \text{ para algunos } s_1, \ldots, s_n \in S, n \geq 1\}$$

1. $\boxed{[S) \neq \emptyset:}$ Ya que $S \subseteq [S)$, tenemos que $[S) \neq \emptyset$.

2. $\boxed{x, y \in [S) \Rightarrow x \mathsf{i} y \in [S):}$ Sean x, y tales que:

$$y \geq s_1 \mathsf{i} s_2 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} s_n, \quad \text{i.e, } y \in [S)$$
$$z \geq t_1 \mathsf{i} t_2 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} t_m, \quad \text{i.e, } z \in [S)$$

   con $s_1, s_2, \ldots, s_n, t_1, t_2, \ldots, t_m \in S$, entonces:

$$y \mathsf{i} z \geq s_1 \mathsf{i} s_2 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} s_n \mathsf{i} t_1 \mathsf{i} t_2 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} t_m$$

3. $\boxed{x \in [S) \text{ y } x \leq y \Rightarrow y \in [S):}$ Por construcción, claramente $[S)$ cumple esta propiedad.

□

Lemma 23. ***(Zorn)*** *Sea $(P, \leq)$ un poset y supongamos que cada cadena de $(P, \leq)$ tiene una cota superior, entonces existe un elemento maximal en $(P, \leq)$.*

Theorem 24. ***(Teorema del Filtro Primo)*** *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado distributivo y F un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$, entonces hay un filtro primo P tal que $x_0 \notin P$ y $F \subseteq P$.*

Proof. Sea:

$$\mathcal{F} = \{F_1 : F_1 \text{ es un filtro, } x_0 \notin F_1 \text{ y } F \subseteq F_1\}$$

Notar que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, por lo cual $(\mathcal{F}, \subseteq)$ es un poset.
Veamos que cada cadena en $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene una cota superior. Sea C una cadena.

- Si $C = \emptyset$, entonces cualquier elemento de $\mathcal{F}$ es cota de C.

- Si $C \neq \emptyset$. Sea:

$$G = \{x \in L : x \in F_1, \text{ para algún } F_1 \in C\}$$

Veamos que G es un filtro.

1. Es claro que $G \neq \emptyset$.

2. Supongamos que $x, y \in G$. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $x \in F_1$ y $y \in F_2$.

- Si $F_1 \subseteq F_2$, entonces ya que F_2 es un filtro tenemos que $x \mathsf{i} y \in F_2 \subseteq G$.
- Si $F_2 \subseteq F_1$, entonces tenemos que $x \mathsf{i} y \in F_1 \subseteq G$.

Ya que C es una cadena, tenemos que siempre $x \mathsf{i} y \in G$.

3. En forma analoga se prueba la propiedad restante ...

Por lo tanto, tenemos que G es un filtro. Además $x_0 \notin G$, por lo que $G \in \mathcal{F}$ es cota superior de C. Por el **Lemma 23**, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene un elemento maximal P. Veamos que P es un filtro primo.

Supongamos $x \mathsf{s} y \in P$ y $x, y \notin P$, entonces ya que P es maximal tenemos que:

$$x_0 \in [P \cup \{x\}) \cap [P \cup \{y\})$$

Ya que $x_0 \in [P \cup \{x\})$, tenemos que hay elementos $p_1, \ldots, p_n \in P$, tales que:

$$x_0 \geq p_1 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} p_n \mathsf{i} x$$

Ya que $x_0 \in [P \cup \{y\})$, tenemos que hay elementos $q_1, \ldots, q_m \in P$, tales que:

$$x_0 \geq q_1 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} q_m \mathsf{i} y$$

Denotemos:

$$p = p_1 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} p_n \mathsf{i} q_1 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} q_m$$

tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} x_0 & \geq & p \mathsf{i} x \\ x_0 & \geq & p \mathsf{i} y \end{array}$$

Se tiene que $x_0 \geq (p \mathsf{i} x) \mathsf{s} (p \mathsf{i} y) = p \mathsf{i} (x \mathsf{s} y) \in P$, lo cual es absurdo ya que $x_0 \notin P$. $\square$

Corollary 25. *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado distributivo. Si $\emptyset \neq S \subseteq L$ es tal que $s_1 \mathsf{i} s_2 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} s_n \neq 0$, para cada $s_1, \ldots, s_n \in S$, entonces hay un filtro primo que contiene a S.*

Proof. Dado que $[S) \neq L$, se puede aplicar el **Theorem 24** (Teorema del filtro primo). $\square$

Lemma 26. *Sea $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$ un algebra de Boole, entonces para un filtro $F \subseteq B$ las siguientes son equivalentes:*

(1) F es primo

(2) $x \in F$ ó $x^c \in F$, para cada $x \in B$.

Proof. $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Ya que $x \mathsf{s} x^c = 1 \in F$, y F es filtro primo, por definición de filtro primo se cumple que $x \in F$ ó $x^c \in F$.

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Supongamos que $x \mathsf{s} y \in F$ y que $x \notin F$, entonces por (2), $x^c \in F$ y por lo tanto tenemos que:

$$y \geq x^c \mathsf{i} y = 0 \mathsf{s} (x^c \mathsf{i} y) = (x^c \mathsf{i} x) \mathsf{s} (x^c \mathsf{i} y) = x^c \mathsf{i} (x \mathsf{s} y) \in F$$

lo cual dice que $y \in F$. $\square$

Lemma 27. *Sea $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Supongamos que $b \neq 0$ y $a = \inf A$, con $A \subseteq B$, entonces si $b \mathsf{i} a = 0$ existe un $e \in A$ tal que $b \mathsf{i} e^c \neq 0$.*

Proof. Supongamos que para cada $e \in A$, tengamos que $b \ \mathsf{i} \ e^c = 0$, entonces tenemos que para cada $e \in A$,

$$b = b \ \mathsf{i} \ (e \ \mathsf{s} \ e^c) = (b \ \mathsf{i} \ e) \ \mathsf{s} \ (b \ \mathsf{i} \ e^c) = b \ \mathsf{i} \ e$$

lo cual nos dice que b es cota inferior de A. Pero si $b \leq a$, entonces $b = b \ \mathsf{i} \ a = 0$, es decir, $b = 0$, lo cual es un absurdo dado que por hipótesis sabíamos que $b \neq 0$. $\square$

Theorem 28. ***(Rasiova y Sikorski)*** *Sea* $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *un álgebra de Boole. Sea* $x \in B$*, tal que* $x \neq 0$*. Supongamos que* $A_1, A_2, \dots$ *son subconjuntos de* B *tales que existe* $\inf(A_j)$*, para cada* $j = 1, 2, \dots,$ *entonces hay un filtro primo* P *el cual cumple:*

a) $x \in P$

b) $A_j \subseteq P \Rightarrow \inf(A_j) \in P$*, para cada* $j = 1, 2, \ \dots$

Proof. Sea $a_j = \inf(A_j)$, para $j = 1, 2, \ \dots$ construiremos inductivamente una sucesión $b_0, b_1, \dots$ de elementos de B tal que:

- $b_0 = x$
- $b_0 \ \mathsf{i} \ \dots \ \mathsf{i} \ b_n \neq 0$, para cada $n \geq 0$
- $b_j = a_j$ ó $b_j^c \in A_j$, para cada $j \geq 1$

(1) Definamos $b_0 = x$

(2) Supongamos ya definimos $b_0, \dots, b_n$, veamos como definir b_{n+1}.

- Si $(b_0 \ \mathsf{i} \ \dots \ \mathsf{i} \ b_n) \ \mathsf{i} \ a_{n+1} \neq 0$, entonces definamos $b_{n+1} = a_{n+1}$.
- Si $(b_0 \ \mathsf{i} \ \dots \ \mathsf{i} \ b_n) \ \mathsf{i} \ a_{n+1} = 0$, entonces por el **Lemma 27**, tenemos que hay un $e \in A_{n+1}$ tal que $(b_0 \ \mathsf{i} \ \dots \ \mathsf{i} \ b_n) \ \mathsf{i} \ e^c \neq 0$, lo cual nos permite definir $b_{n+1} = e^c$.

Dado que el conjunto $S = \{b_0, b_1, \dots\}$ satisface la hipótesis del **Corollary 25**, por lo tanto hay un filtro primo P tal que $\{b_0, b_1, \dots\} \subseteq P$, el cual satisface las propiedades (a) y (b) dado que así lo construimos. $\square$

2 Términos y fórmulas

Lemma 29. *Supongamos* $t \in T_k^\tau$*, con* $k \geq 1$*, entonces ya sea* $t \in Var \cup \mathcal{C}$ *ó* $t = f(t_1, \dots, t_n)$*, con* $f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1,\ t_1, \dots, t_n \in T_{k-1}^\tau$*.*

Proof. Probaremos este teorema por inducción en k.

Caso Base: $\boxed{k = 1}$ Es directo, ya que por definición:

$$T_1^\tau = Var \cup \mathcal{C} \cup \{f(t_1, t_2, \dots t_n) : f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, t_1, t_2, \dots t_n \in T_0^\tau\}$$

Caso Inductivo: $\boxed{k > 1}$ Sea $t \in T_{k+1}^\tau$. Por definición de T_{k+1}^τ tenemos que:

- $t \in T_k^\tau$ ó
- $t = f(t_1, \dots, t_n)$ con $f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1$ y $t_1, \dots, t_n \in T_k^\tau$.

Si se da que $t \in T_k^\tau$, entonces podemos aplicar hipótesis inductiva y usar que $T_{k-1}^\tau \subseteq T_k^\tau$. $\square$

Lemma 30. *Sea* $b \in Bal$*. Se tiene:*

(1) $|b|_(- |b|_) = 0$

(2) Si x es tramo inicial propio de b, entonces $|x|_(- |x|_) > 0$

(3) Si x es tramo final propio de b, entonces $|x|_(- |x|_) < 0$

Proof. Probaremos por inducción en k, que valen (1), (2) y (3) para cada $b \in Bal_k$.

Caso Base: $\boxed{k = 1}$

(1) $Bal_1 = \{()\}$. Luego, $|b|_(= |b|_) = 1$. Por lo tanto, $|b|_(- |b|_) = 0$.

(2) Supongamos x tramo inicial propio de b. Luego $x = ($, es decir, $|x|_(= 1$ y $|x|_) = 0$. Por lo tanto, $|x|_(- |x|_) > 0$.

(3) Supongamos x tramo final propio de b. Luego $x =)$, es decir, $|x|_(= 0$ y $|x|_) = 1$. Por lo tanto, $|x|_(- |x|_) < 0$.

Caso Inductivo: $\boxed{k > 1}$ Supongamos $b \in Bal_{k+1}$. Si $b \in Bal_k$, se aplica directamente HI para cualquiera de los casos. Supongamos entonces que $b = (b_1 \dots b_n)$, con $b_1, \dots, b_n \in Bal_k, n \geq 1$.

(1) Por HI, $b_1, \dots, b_n$ satifacen $|b|_(- |b|_) = 0$. Luego, $(b_1, \dots, b_n)$ también satisface, es decir, al agregar un paréntesis de cada tipo, el balanceo se mantiene.

(2) Sea x un tramo inicial propio de b. Notese que x es de la forma $x = (b_1 \dots b_i y$ con $0 \leq i \leq n-1$ y y un tramo inicial de b_{i+1}, pero entonces:

$$|x|_(- |x|_) = 1 + \left(\sum_{j=1}^{i} |b_j|_(- |b_j|_) \right) + |y|_(- |y|_)$$

tenemos que por HI, se da que $|x|_(- |x|_) > 0$.

(3) Sea x un tramo final propio de b. Notese que x es de la forma $x = yb_1 \dots b_i)$ con $1 \leq i \leq n$ y y un tramo final de b_{i+1}, pero entonces:

$$|x|_(- |x|_) = |y|_(- |y|_) + \left(\sum_{j=1}^{i} |b_j|_(- |b_j|_) \right) + 1$$

tenemos que por HI, se da que $|x|_(- |x|_) < 0$.

□

Lemma 31. *$del(xy) = del(x)del(y)$ $\forall x, y \in \Sigma^*$.*

Lemma 32. *Supongamos que Σ es tal que $T^\tau \subseteq \Sigma^*$, entonces $del(t) \in Bal$, para cada $t \in T^\tau - (Var \cup \mathcal{C})$.*

Lemma 33. *Sean $s, t \in T^\tau$ y supongamos que hay palabras x, y, z, con $y \neq \varepsilon$ tales que $s = xy$ y $t = yz$, entonces $x = z = \varepsilon$ ó $s, t \in \mathcal{C}$. En particular, si un término es tramo inicial o final de otro término, entonces dichos términos son iguales.*

Proof.
- Supongamos $s \in \mathcal{C}$: Ya que $y \neq \varepsilon$ tenemos que t debe comenzar con un símbolo que ocurre en un nombre de constante, lo cual dice que t no puede ser ni una variable ni de la forma $g(t_1, \dots, t_m)$, es decir $t \in \mathcal{C}$.

- Supongamos $s \in Var$: Si sucediese que $x \neq \varepsilon$, t comenzaría con alguno de los siguientes símbolos:
$$\mathit{0}\ \mathit{1}\ \ldots\ \mathit{9}\ \mathbf{0}\ \mathbf{1}\ \ldots\ \mathbf{9}$$
lo cual es absurdo. Luego, $x = \varepsilon$ y por lo tanto t debe comenzar con X, pero esto dice que $t \in Var$ de lo que sigue que $z = \varepsilon$.

- Supongamos que s es de la forma $f(s_1, \ldots, s_n)$: Ya que) debe ocurrir en t, tenemos que t es de la forma $g(t_1, \ldots, t_m)$, osea que $del(s), del(t) \in Bal$. Ya que) ocurre en y, $del(y) \neq \varepsilon$. Tenemos también que:
$$\begin{aligned} del(s) &= del(x)del(y) \\ del(t) &= del(y)del(z) \end{aligned}$$
Utilizando el **Lemma 30** obtenemos que:
$$\begin{aligned} &1)\ |del(y)|_(- |del(y)|_) \leq 0 \\ &2)\ |del(y)|_(- |del(y)|_) \geq 0 \end{aligned}$$
por lo cual:
$$|del(y)|_(- |del(y)|_) = 0$$
pero entonces ya que $del(y)$ es tramo final de $del(s)$, el **Lemma 30** nos dice que $del(x) = \varepsilon$. De la misma manera, obtenemos que $del(z) = \varepsilon$. Ya que que t termina con) tenemos que $z = \varepsilon$, osea que $f(s_1, \ldots, s_n) = xg(t_1, \ldots, t_m)$ con $del(x) = \varepsilon$, de lo que se desprende que $f = xg$ ya que (no ocurre en x. Finalmente, de la definición de tipo se desprende que $x = \varepsilon$.

□

Theorem 34. ***(Lectura única de terminos)***. *Dado $t \in T^\tau$ se da una de las siguientes:*

(1) $t \in Var \cup \mathcal{C}$

(2) Hay únicos $n \geq 1,\ f \in \mathcal{F}_n,\ t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$ tales que $t = f(t_1, \ldots, t_n)$.

Proof. En virtud del **Lemma 29** solo nos resta probar la unicidad de $t_1, \ldots, t_n$ en el punto (2). Supongamos que:
$$t = f(t_1, \ldots, t_n) = g(s_1, \ldots, s_m)$$
con $n, m \geq 1,\ f \in \mathcal{F}_n, g \in \mathcal{F}_m, t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_m \in T^\tau$. Notese que $f = g$, es decir, $n = m = a(f)$. Notemos que:

- t_1 es tramo inicial de s_1 ó
- s_1 es tramo inicial de t_1

En general:

- t_i es tramo inicial de s_i ó
- s_i es tramo inicial de t_i, para $1 \leq i \leq n$.

lo cual por el **Lemma 33** nos dice que $t_i = s_i$ con $1 \leq i \leq n$. □

Lemma 35. *Sean $r, s, t \in T^\tau$.*

(a) Si $s \neq t = f(t_1, \ldots, t_n)$ y s ocurre en t, entonces dicha ocurrencia sucede dentro de algún t_j, $j = 1, \ldots, n$.

(b) Si r, s ocurren en t, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una ocurre dentro de otra. En particular, las distintas ocurrencias de r en t son disjuntas.

(c) Si t' es el resultado de reemplazar una ocurrencia de s en t por r, entonces $t' \in T^\tau$.

Proof. (a) Supongamos la ocurrencia de s comienza en algún t_j, entonces el **Lemma 33** nos conduce a que dicha ocurrencia debera estar contenida en t_j. Veamos que la ocurrencia de s no puede ser a partir de un $i \in \{1, \ldots, |f|\}$. Supongamos lo contrario. Tenemos entonces que s debe ser de la forma $g(s_1, \ldots, s_m)$ ya que no puede estar en $Var \cup \mathcal{C}$. Notese que $i \neq 1$ ya que en caso contrario s seria un tramo inicial propio de t. Pero entonces g debe ser un tramo final propio de f, lo cual es absurdo. Ya que s no puede comenzar con parentesis o coma, hemos contemplado todos los posibles casos de comienzo de la ocurrencia de s en t.

(b) Por induccion, usando (a).

(c) Por induccion, usando (a).

□

Lemma 36. *Supongamos $\varphi \in F_k^\tau$, con $k \geq 1$, entonces φ es de alguna de las siguientes formas:*

- *$\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$.*
- *$\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$, con $r \in \mathcal{R}_n, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$.*
- *$\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, con $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F_{k-1}^\tau$.*
- *$\varphi = \neg\varphi_1$, con $\varphi_1 \in F_{k-1}^\tau$.*
- *$\varphi = Qv\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $v \in Var$ y $\varphi_1 \in F_{k-1}^\tau$.*

Llamaremos $(\star)$ a la lista anterior.

Proof. Probaremos este teorema por inducción en k, utilizando la definición del conjunto F^τ.

Caso Base:

$$\varphi \ \in \ \{(t \equiv s) : t, s \in T^\tau\} \ \cup \ \{r(t_1, \ldots, t_n) : r \in \mathcal{R}_n, n \geq 1, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau\}$$

por lo que φ es de alguna de las siguientes formas:

- $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$.
- $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$, con $r \in \mathcal{R}_n, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$.

Caso Inductivo: Supongamos que si $\varphi \in F_{k-1}^\tau$ entonces φ es de alguna de las formas de $(\star)$. Probaremos que si $\varphi \in F_k^\tau$ entonces φ también es de alguna de las formas de la lista $(\star)$.

$$\begin{aligned} \varphi \ \in \ F_{k-1}^\tau \ &\cup \ \{\neg\varphi : \varphi \in F_{k-1}^\tau\} \ \cup \ \{(\varphi\eta\psi) : \varphi, \psi \in F_{k-1}^\tau, \eta \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}\} \\ &\cup \ \{Qv\varphi : \varphi \in F_{k-1}^\tau, v \in Var, Q \in \{\forall, \exists\}\} \end{aligned}$$

Luego, si $\varphi \in F_{k-1}^\tau$ aplicando HI obtenemos que φ es de alguna de las formas de la lista anterior. Caso contrario, se dá alguna de las siguientes:

- $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F_{k-1}^\tau, \eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

- $\varphi = \neg\varphi_1$, con $\varphi_1 \in F^\tau_{k-1}$.
- $\varphi = Qv\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $v \in Var$ y $\varphi_1 \in F^\tau_{k-1}$.

□

Lemma 37. *Sea τ un tipo.*

a) Supongamos que Σ es tal que $F^\tau \subseteq \Sigma^*$, entonces $del(\varphi) \in Bal$, para cada $\varphi \in F^\tau$.

b) Sea $\varphi \in F^\tau_k$, con $k \geq 0$, existen $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}, v \in Var\})^*$ y $\varphi_1 \in F^\tau$ tales que $\varphi = x\varphi_1$ y φ_1 es de la forma $(\psi_1 \eta \psi_2)$ o atómica. En particular toda fórmula termina con el símbolo).

Proof. a) HACER!!!!

b) Induccion en k. El caso $k = 0$ es trivial. Supongamos (b) vale para cada $\varphi \in F^\tau_k$ y sea $\varphi \in F^\tau_{k+1}$. Hay varios casos de los cuales haremos solo dos

- CASO $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau_k$ y $\eta \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
  Podemos tomar $x = \varepsilon$ y $\varphi_1 = \varphi$.
- CASO $\varphi = Qx_i\psi$, con $\psi \in F^\tau_k$, $i \geq 1$ y $Q \in \{\forall, \exists\}$.
  Por HI hay $\bar{x} \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$ y $\psi_1 \in F^\tau$ tales que $\psi = x\psi_1$ y ψ_1 es de la forma $(\gamma_1 \eta \gamma_2)$ o atomica. Entonces es claro que $x = Qx_i\bar{x}$ y $\varphi_1 = \psi_1$ cumplen (b). □

□

Lemma 38. *Ninguna fórmula es tramo final propio de una fórmula atómica, es decir, si $\varphi = x\psi$, con $\varphi \in F^\tau_0$ y $\psi \in F^\tau$, entonces $x = \varepsilon$.*

Proof.
- Si φ es de la forma $(t \equiv s)$, entonces $|del(y)|_(- |del(y)|_) < 0$ para cada tramo final propio y de φ, lo cual termina el caso ya que $del(\psi)$ es balanceada.
- Supongamos entonces $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$. Notese que ψ no puede ser tramo final de $t_1, \ldots, t_n)$ ya que $del(\psi)$ es balanceada y $|del(y)|_(- |del(y)|_) < 0$ para cada tramo final y de $t_1, \ldots, t_n)$. Es decir que $\psi = y(t_1, \ldots, t_n)$, para algun tramo final y de r. Ya que en ψ no ocurren cuantificadores ni nexos ni el simbolo $\equiv$ el Lema 124 nos dice $\psi = \tilde{r}(s_1, \ldots, s_m)$, con $\tilde{r} \in \mathcal{R}_m$, $m \geq 1$ y $s_1, \ldots, s_m \in T^\tau$. Ahora es facil usando un argumento paresido al usado en la prueba del Teorema 122 concluir que $m = n$, $s_i = t_i$, $i = 1, \ldots, n$ y $\tilde{r}$ es tramo final de r. Por (3) de la definicion de tipo tenemos que $\tilde{r} = r$ lo cual nos dice que $\varphi = \psi$ y $x = \varepsilon$ □

□

Lemma 39. *Si $\varphi = x\psi$, con $\varphi, \psi \in F^\tau$ y x sin paréntesis, entonces $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$.*

Proof. Probaremos por inducción en k, tal que $\varphi \in F^\tau_k$.

<u>Caso Base:</u> El caso $k = 0$ es probado en el lema anterior.

<u>Caso Inductivo:</u> Asumamos que el resultado vale cuando $\varphi \in F^\tau_k$ y veamos que vale cuando $\varphi \in F^\tau_{k+1}$. Mas aun supongamos $\varphi \in F^\tau_{k+1} - F^\tau_k$. Primero haremos el caso en que $\varphi = Qv\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $v \in Var$ y $\varphi_1 \in F^\tau_k$. Supongamos $x \neq \varepsilon$. Ya que ψ no comienza con simbolos de v, tenemos que ψ debe ser tramo final de φ_1 lo cual nos dice que hay una palabra x_1 tal que $x = Qvx_1$ y $\varphi_1 = x_1\psi$. Por HI tenemos que $x_1 \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$ con

lo cual $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$. El caso en el que $\varphi = \neg\varphi_1$ con $\varphi_1 \in F_k^\tau$, es similar. Note que no hay mas casos posibles ya que φ no puede comenzar con (porque en x no ocurren parentesis por hipotesis □ □

Proposition 40. *Si $\varphi, \psi \in F^\tau$ y x, y, z son tales que $\varphi = xy, \psi = yz$ y $y \neq \varepsilon$, entonces $z = \varepsilon$ y $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$. En particular ningún tramo inicial propio de una fórmula es una fórmula.*

Proof. Ya que φ termina con) tenemos que $del(y) \neq \varepsilon$. Ya que $del(\varphi), del(\psi) \in Bal$ y ademas

$$\begin{aligned} del(\varphi) &= del(x)del(y) \\ del(\psi) &= del(y)del(z) \end{aligned}$$

tenemos que $del(y)$ es tramo inicial y final de palabras balanceadas, lo cual nos dice que $|del(y)|_(- |del(y)|_) = 0$

Pero esto por (3) del Lema 118 nos dice que $del(x) = \varepsilon$. Similarmente obtenemos que $del(z) = \varepsilon$. Pero ψ termina con) lo cual nos dice que $z = \varepsilon$. Es decir que $\varphi = x\psi$. Por el lema anterior tenemos que $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$ □ □

Theorem 41. ***(Lectura única de fórmulas)*** *Dada $\varphi \in F^\tau$ se da una y solo una de las siguientes:*

(1) $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$

(2) $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$, con $r \in \mathcal{R}_n, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$

(3) $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, con $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$

(4) $\varphi = \neg\varphi_1$, con $\varphi_1 \in F^\tau$

(5) $\varphi = Qv\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $\varphi_1 \in F^\tau$ y $v \in Var$.

Más aún, en todos los puntos tales descomposiciones son únicas.

Proof. (1)

(2)

(3)

(4)

(5)

Si una formula φ satisface (1), entonces φ no puede contener simbolos del alfabeto $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ lo cual garantiza que φ no puede satisfacer (3). Ademas φ no puede satisfacer (2) o (4) o (5) ya que φ comienza con (. En forma analoga se puede terminar de ver que las propiedades (1), ...,(5) son excluyentes.

La unicidad en las descomposiciones de (4) y (5) es obvia. La de (3) se desprende facilmente del lema anterior y la de los puntos (1) y (2) del lema analogo para terminos. □ □

Lemma 42. *Sea τ un tipo.*

(a) Las fórmulas atómicas no tienen subfórmulas propias.

(b) Si φ ocurre propiamente en $(\psi\eta\varphi)$, entonces tal ocurrencia es en ψ ó en φ.

(c) *Si φ ocurre propiamente en $\neg\psi$, entonces tal ocurrencia es en ψ.*

(d) *Si φ ocurre propiamente en $Qx_k\psi$, entonces tal ocurrencia es en ψ.*

(e) *Si φ_1, φ_2 ocurren en φ, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una contiene a la otra.*

(f) *Si λ' es el resultado de reemplazar alguna ocurrencia de φ en λ por ψ, entonces $\lambda' \in F^\tau$.*

Proof. Ejercicio. □

3 Estructuras

Lemma 43. *Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y sea $t \in T^\tau$. Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que $a_i = b_i$ cada vez que x_i ocurra en t, entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$.*

Proof. Sea

- Teo$_k$: El lema vale para $t \in T_k^\tau$. Teo$_0$ es facil de probar. Veamos Teo$_k$ $\Rightarrow$Teo$_{k+1}$. Supongamos $t \in T_{k+1}^\tau - T_k^\tau$ y sean $\vec{a}, \vec{b}$ asignaciones tales que $a_i = b_i$ cada vez que x_i ocurra en t. Notese que $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, con $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$ y $t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$. Notese que para cada $j = 1, \ldots, n$, tenemos que $a_i = b_i$ cada vez que x_i ocurra en t_j, lo cual por Teo$_k$ nos dice que

$t_j^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t_j^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$, $j = 1, \ldots, n$

Se tiene entonces que

$$\begin{array}{rcl} t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] & = & i(f)(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \text{ (por def de } t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\ & = & i(f)(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{b}], \ldots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) \\ & = & t^{\mathbf{A}}[\vec{b}] \text{ (por def de } t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \end{array}$$

□

Lemma 44.

(a) *$Li((t \equiv s)) = \{v \in Var : v$ ocurre en t ó v ocurre en $s\}$*

(b) *$Li(r(t_1, \ldots, , t_n)) = \{v \in Var : v$ ocurre en algún $t_i\}$*

(c) *$Li(\neg\varphi) = Li(\varphi)$*

(d) *$Li((\varphi\eta\psi)) = Li(\varphi) \cup Li(\psi)$*

(e) *$Li(Qx_j\varphi) = Li(\varphi) - \{x_j\}$*

Proof. (a) son triviales de las definiciones, teniendo en cuenta que si una variable v ocurre en $(t \equiv s)$ (resp. en $r(t_1, \ldots, t_n)$) entonces v ocurre en t o v ocurre en s (resp.v ocurre en algun t_i)

(b) son triviales de las definiciones, teniendo en cuenta que si una variable v ocurre en $(t \equiv s)$ (resp. en $r(t_1, \ldots, t_n)$) entonces v ocurre en t o v ocurre en s (resp.v ocurre en algun t_i)

(c) es similar a (d)

(d) Supongamos $v \in Li((\varphi\eta\psi))$, entonces hay un i tal que v ocurre libremente en $(\varphi\eta\psi)$ a partir de i. Por definicion tenemos que ya sea v ocurre libremente en φ a partir de $i-1$ o v ocurre libremente en ψ a partir de $i - |(\varphi\eta|$, con lo cual $v \in Li(\varphi) \cup Li(\psi)$ Supongamos ahora que $v \in Li(\varphi) \cup Li(\psi)$. S.p.d.g. supongamos $v \in Li(\psi)$. Por definicion tenemos que hay un i tal que v ocurre libremente en ψ a partir de i. Pero notese que esto nos dice por definicion que v ocurre libremente en $(\varphi\eta\psi)$ a partir de $i + |(\varphi\eta|$ con lo cual $v \in Li((\varphi\eta\psi))$.

(e) Supongamos $v \in Li(Qx_j\varphi)$, entonces hay un i tal que v ocurre libremente en $Qx_j\varphi$ a partir de i. Por definicion tenemos que $v \neq x_j$ y v ocurre libremente en φ a partir de $i - |Qx_j|$, con lo cual $v \in Li(\varphi) - \{x_j\}$ Supongamos ahora que $v \in Li(\varphi) - \{x_j\}$. Por definicion tenemos que hay un i tal que v ocurre libremente en φ a partir de i. Ya que $v \neq x_j$ esto nos dice por definicion que v ocurre libremente en $Qx_j\varphi$ a partir de $i + |Qx_j|$, con lo cual $v \in Li(Qx_j\varphi)$.

□

Lemma 45. *Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$.*

Proof. Probaremos por induccion en k que el lema vale para cada $\varphi \in F_k^\tau$. El caso $k = 0$ se desprende del Lema 131. Veamos que Teo_k implica Teo_{k+1}. Sea $\varphi \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$. Hay varios casos:

CASO $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.

Ya que $Li(\varphi_i) \subseteq Li(\varphi)$, $i = 1, 2$, Teo_k nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi_i[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi_i[\vec{b}]$, para $i = 1, 2$. Se tiene entonces que

$\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$

$\Updownarrow$ (por (3) en la def de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$)

$\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$

$\Updownarrow$ (por Teo_k)

$\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{b}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{b}]$

$\Updownarrow$ (por (3) en la def de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$)

$\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$

CASO $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.

Es completamente similar al anterior.

CASO $\varphi = \neg\varphi_1$.

Es completamente similar al anterior.

CASO $\varphi = \forall x_j \varphi_1$.

Supongamos $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$. Entonces por (8) en la def de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ se tiene que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{a})]$, para todo $a \in A$. Notese que $\downarrow_j^a (\vec{a})$ y $\downarrow_j^a (\vec{b})$ coinciden en toda x_i de $x_i \in Li(\varphi_1) \subseteq Li(\varphi_1) \cup \{x_j\}$, con lo cual por Teo_k se tiene que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{b})]$, para todo $a \in A$, lo cual por (8) en la def de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$. La prueba de que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$ implica que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ es similar.

CASO $\varphi = \exists x_j \varphi_1$.

Es similar al anterior. □

Corollary 46. *Si φ es una sentencia, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$, cualesquiera sean las asignaciones $\vec{a}, \vec{b}$.*

Lemma 47.

(a) Si $Li(\varphi) \cup Li(\psi) \subseteq \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$, entonces $\varphi \sim \psi$ si y solo si la sentencia $\forall x_{i_1} \ldots \forall x_{i_n} (\varphi \leftrightarrow \psi)$ es universalmente válida.

(b) Si $\varphi_i \sim \psi_i, i = 1, 2$, entonces $\neg\varphi_1 \sim \neg\psi_1, (\varphi_1 \eta \varphi_2) \sim (\psi_1 \eta \psi_2)$ y $Qv\varphi_1 \sim Qv\psi_1$.

(c) Si $\varphi \sim \psi$ y α' es el resultado de reemplazar en una fórmula α algunas (posiblemente 0) ocurrencias de φ por ψ, entonces $\alpha \sim \alpha'$.

Proof. (a) Tenemos que

$$\begin{array}{l}
\varphi \sim \psi \\
\ \Updownarrow \ \text{(por (6) de la def de } \models \text{)} \\
\mathbf{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}], \text{ para todo } \mathbf{A} \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbb{N}} \\
\ \Updownarrow \\
\mathbf{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[\downarrow^{a}_{i_n}(\vec{a})], \text{ para todo } \mathbf{A},\ a \in A \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbb{N}} \\
\ \Updownarrow \ \text{(por (8) de la def de } \models \text{)} \\
\mathbf{A} \models \forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}], \text{ para todo } \mathbf{A} \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbb{N}} \\
\ \Updownarrow \\
\mathbf{A} \models \forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)[\downarrow^{a}_{i_{n-1}}(\vec{a})], \text{ para todo } \mathbf{A},\ a \in A \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbb{N}} \\
\ \Updownarrow \ \text{(por (8) de la def de } \models \text{)} \\
\mathbf{A} \models \forall x_{i_{n-1}} \forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}], \text{ para todo } \mathbf{A} \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbb{N}} \\
\ \Updownarrow \\
\quad \vdots \\
\ \Updownarrow \\
\mathbf{A} \models \forall x_{i_1} ... \forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}], \text{ para todo } \mathbf{A} \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbb{N}} \\
\ \Updownarrow \\
\forall x_{i_1} ... \forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi) \text{ es universalmente valida}
\end{array}$$

(b) Es dejado al lector.

(c) Por induccion en el k tal que $\alpha \in F^{\tau}_{k}$.

□

Lemma 48. *Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo, entonces:*

$$F(t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, \dots)] = t^{\mathbf{B}}[F(a_1), F(a_2), \dots)]$$

para cada $t \in T^{\tau}, (a_1, a_2, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$.

Proof. Sea

- Teo$_k$: Si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, entonces $F(t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, ...)] = t^{\mathbf{B}}[F(a_1), F(a_2), ...)]$ para cada $t \in T^{\tau}_{k}$, $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbb{N}}$. Teo$_0$ es trivial. Veamos que Teo$_k$ implica Teo$_{k+1}$. Supongamos que vale Teo$_k$ y supongamos $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, $t \in T^{\tau}_{k+1} - T^{\tau}_{k}$ y $\vec{a} = (a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbb{N}}$. Denotemos $(F(a_1), F(a_2), ...)$ con $F(\vec{a})$. Por Lema 117, $t = f(t_1, \dots, t_n)$, con $n \geq 1$ $f \in \mathcal{F}_n$ y $t_1, \dots, t_n \in T^{\tau}_{k}$. Tenemos entonces

$$\begin{array}{rcl}
F(t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) & = & F(f(t_1, \dots, t_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\
& = & F(f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \dots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])) \\
& = & f^{\mathbf{B}}(F(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}]), \dots, F(t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])) \\
& = & f^{\mathbf{B}}(t_1^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})], \dots, t_n^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})])) \\
& = & f(t_1, \dots, t_n)^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})] \\
& = & t^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})]
\end{array}$$

□

Lemma 49. *Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^{\tau}$, entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, \dots)] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), \dots)]$$

para cada $(a_1, a_2, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$. En particular $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ satisfacen las mismas sentencias de tipo τ.

Lemma 50. *Supongamos que τ es algebraico, si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo.*

Proof. Solo falta probar que F^{-1} es un homomorfismo. Supongamos que $c \in \mathcal{C}$. Ya que $F(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$, tenemos que $F^{-1}(c^{\mathbf{B}}) = c^{\mathbf{A}}$, por lo cual F^{-1} cumple (1) de la definicion de homomorfismo. Supongamos ahora que $f \in \mathcal{F}_n$ y sean $b_1, \ldots, b_n \in B$. Sean $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $F(a_i) = b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} F^{-1}(f^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n)) & = & F^{-1}(f^{\mathbf{B}}(F(a_1), \ldots, F(a_n))) \\ & = & F^{-1}(F(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(F^{-1}(b_1), \ldots, F^{-1}(b_n)) \end{array}$$

por lo cual F^{-1} satisface (2) de la definicion de homomorfismo □

Lemma 51. *Supongamos que τ es algebraico, si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $\mathbf{B}$.*

Proof. Ya que $A \neq \varnothing$ tenemos que $I_F \neq \varnothing$. Es claro que $c^{\mathbf{B}} = F(c^{\mathbf{A}}) \in I_F$ para cada $c \in \mathcal{C}$. Sea $f \in \mathcal{F}_n$ y sean $b_1, \ldots, b_n \in I_F$ Sean $a_1, \ldots, a_n$ tales que $F(a_i) = b_i$ $i = 1, \ldots, n$. Tenemos que

$$f^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n) = f^{\mathbf{B}}(F(a_1), \ldots, F(a_n)) = F(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \in I_F$$

por lo cual I_F es cerrada bajo $f^{\mathbf{B}}$. □

Lemma 52. *Supongamos que τ es algebraico, si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, entonces $\ker F$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$.*

Proof. Sea $f \in \mathcal{F}_n$. Supongamos que $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$ son tales que $a_1 \ker F b_1, \ldots, a_n \ker F b_n$. Tenemos entonces que

$$\begin{array}{rcl} F(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) & = & f^{\mathbf{B}}(F(a_1), \ldots, F(a_n)) \\ & = & f^{\mathbf{B}}(F(b_1), \ldots, F(b_n)) \\ & = & F(f^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n)) \end{array}$$

lo cual nos dice que $f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \ker F f^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n)$ □

Lemma 53. *$\pi_\theta : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\theta$ es un homomorfismo cuyo núcleo es θ.*

Proof. Sea $c \in \mathcal{C}$. Tenemos que

$$\pi_\theta(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{A}}/\theta = c^{\mathbf{A}/\theta}$$

Sea $f \in \mathcal{F}_n$, con $n \geq 1$ y sean $a_1, \ldots, a_n \in A$. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \pi_\theta(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) & = & f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)/\theta \\ & = & f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, \ldots, a_n/\theta) \\ & = & f^{\mathbf{A}/\theta}(\pi_\theta(a_1), \ldots, \pi_\theta(a_n)) \end{array}$$

con lo cual π_θ es un homomorfismo. Es trivial que $\ker \pi_\theta = \theta$. □

Corollary 54. *Para cada $t \in T^\tau, \vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$, se tiene que $t^{\mathbf{A}/\theta}[(a_1/\theta, a_2/\theta, \ldots)] = t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, \ldots)]/\theta$.*

Proof. Ya que π_θ es un homomorfismo, se puede aplicar el Lema 136. □

Theorem 55. *Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo sobreyectivo, entonces:*

$$\begin{array}{rcl} A/\ker F & \to & B \\ a/\ker F & \to & F(a) \end{array}$$

define sin ambiguedad una función $\bar{F}$ la cual es un isomorfismo de $\mathbf{A}/\ker F$ en $\mathbf{B}$.

Proof. Notese que la definicion de $\bar{F}$ es inambigua ya que si $a/\ker F = a'/\ker F$, entonces $F(a) = F(a')$. Ya que F es sobre, tenemos que $\bar{F}$ lo es. Supongamos que $\bar{F}(a/\ker F) = \bar{F}(a'/\ker F)$. Claramente entonces tenemos que $F(a) = F(a')$, lo cual nos dice que $a/\ker F = a'/\ker F$. Esto prueba que $\bar{F}$ es inyectiva. Para ver que $\bar{F}$ es un isomorfismo, por el Lema 138, basta con ver que $\bar{F}$ es un homomorfismo. Sea $c \in \mathcal{C}$. Tenemos que

$\bar{F}(c^{\mathbf{A}/\ker F}) = \bar{F}(c^{\mathbf{A}}/\ker F) = F(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$

Sea $f \in \mathcal{F}_n$. Sean $a_1, \ldots, a_n \in A$. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \bar{F}(f^{\mathbf{A}/\ker F}(a_1/\ker F, \ldots, a_n/\ker F)) & = & \bar{F}(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)/\ker F) \\ & = & F(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \\ & = & f^{\mathbf{B}}(F(a_1), \ldots, F(a_n)) \\ & = & f^{\mathbf{B}}(\bar{F}(a_1/\ker F), \ldots, \bar{F}(a_n/\ker F)) \end{array}$$

con lo cual $\bar{F}$ cunple (2) de la definicion de homomorfismo. □

Lemma 56. *Los mapeos $\pi_1 : \mathbf{A} \times \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ y $\pi_2 : \mathbf{A} \times \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ son homomorfismos.*

Proof. Veamos que π_1 es un homomorfismo. Primero notese que si $c \in \mathcal{C}$, entonces

$\pi_1(c^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}) = \pi_1((c^{\mathbf{A}}, c^{\mathbf{B}})) = c^{\mathbf{A}}$

Sea $f \in \mathcal{F}_n$, con $n \geq 1$ y sean $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in A \times B$. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \pi_1(f^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) & = & \pi_1((f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n)) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(\pi_1(a_1, b_1), \ldots, \pi_1(a_n, b_n)) \end{array}$$

con lo cual hemos probado que π_1 cumple (2) de la definicion de homomorfismo □

Lemma 57. *Para cada $t \in T^\tau$, $((a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots) \in (A \times B)^{\mathbb{N}}$, se tiene que $t^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}[((a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots)] = (t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, \ldots)], t^{\mathbf{B}}[(b_1, b_2, \ldots)])$.*

Lemma 58. *Sea τ un tipo cualquiera y supongamos $t \in T^\tau$. Si $t =_d t(v_1, \ldots, v_n)$ entonces se da alguna de las siguientes:*

1. *$t = c$ para algún $c \in \mathcal{C}$.*
2. *$t = v_j$ para algún j.*
3. *$t = f(t_1, \ldots, t_m)$, con $f \in \mathcal{F}_m$ y $t_1, \ldots, t_m \in T^\tau_{k-1}$ tales que las variables que ocurren en cada uno de ellos están en $\{v_1, \ldots, v_n\}$.*

Proof. □

Lemma 59. *Sea τ un tipo cualquiera y supongamos $t \in T^\tau$. Si $t =_d t(v_1, \ldots, v_n)$. Sea $\mathbf{A}$ un modelo de tipo τ. Sean $a_1, \ldots, a_n \in A$. Se tiene que:*

1. *Si $t = c$ entonces $t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = c^{\mathbf{A}}$.*
2. *Si $t = v_j$ entonces $t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = a_j$.*
3. *Si $t = f(t_1, \ldots, t_m)$, con $f \in \mathcal{F}_m$ y $t_1, \ldots, t_m \in T^\tau$, entonces:*

$$t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_m^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n])$$

Proof. (1) trivial

(2) trivial

(3) Sea $\vec{b}$ una asignación tal que a cada $v_i$le asigna el valor a_i. Por definición tenemos EquivElim

$$\begin{aligned} t^{\mathbf{A}}[a_1,\ldots,a_n] &= t^{\mathbf{A}}[\vec{b}] \\ &= f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{b}],\ldots,t_m^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) \\ &= f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[a_1,\ldots,a_n],\ldots,t_m^{\mathbf{A}}[a_1,\ldots,a_n]) \end{aligned}$$

□

Lemma 60. ***(De reemplazo para términos).*** *Supongamos $t =_d t(w_1,\ldots,w_k), s_1 =_d s_1(v_1,\ldots,v_n),\ldots,s_k =_d s_k(v_1,\ldots,v_n)$. Todas las variables de $t(s_1,\ldots,s_k)$ están en $\{v_1,\ldots,v_n\}$ y si declaramos $t(s_1,\ldots,s_k) =_d t(s_1,\ldots,s_k)(v_1,\ldots,v_n)$, entonces para cada estructura $\mathbf{A}$ y $a_1,\ldots a_n \in A$, se tiene:*

$$t(s_1,\ldots,s_k)^{\mathbf{A}}[a_1,\ldots,a_n] = t^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[a_1,\ldots,a_n],\ldots,s_k^{\mathbf{A}}[a_1,\ldots,a_n]]$$

Proof. Probaremos que valen (a) y (b), por induccion en el l tal que $t \in T_l^\tau$. El caso $l = 0$ es dejado al lector. Supongamos entonces que valen (a) y (b) siempre que $t \in T_l^\tau$ y veamos que entonces valen (a) y (b) cuando $t \in T_{l+1}^\tau - T_l^\tau$. Hay $f \in \mathcal{F}_m$ y $t_1,\ldots,t_m \in T_l^\tau$ tales que $t_1 =_d t_1(w_1,\ldots,w_k),\ldots,t_m =_d t_m(w_1,\ldots,w_k)$ y $t = f(t_1,\ldots,t_m)$. Notese que por (a) de la HI tenemos que

$t_i(s_1,\ldots,s_k) =_d t_i(s_1,\ldots,s_k)(v_1,\ldots,v_n)$, $i = 1,\ldots,m$

lo cual ya que $t(s_1,\ldots,s_k) = f(t_1(s_1,\ldots,s_k),\ldots,t_m(s_1,\ldots,s_k))$

nos dice que $t(s_1,\ldots,s_k) =_d t(s_1,\ldots,s_k)(v_1,\ldots,v_n)$

obteniendo asi (a). Para probar (b) notemos que por (b) de la hipotesis inductiva $t_j(s_1,\ldots,s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t_j^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}],\ldots,s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]], j = 1,\ldots,m$

lo cual nos dice que

$$\begin{aligned} t(s_1,\ldots,s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] &= f(t_1(s_1,\ldots,s_k),\ldots,t_m(s_1,\ldots,s_k))^{\mathbf{A}}[\vec{a}] \\ &= f^{\mathbf{A}}(t_1(s_1,\ldots,s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}],\ldots,t_m(s_1,\ldots,s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\ &= f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}],\ldots,s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]],\ldots,t_m^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}],\ldots,s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]]) \\ &= t^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}],\ldots,s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]] \end{aligned}$$

□

Lemma 61. *Sea τ un tipo cualquiera y supongamos $\varphi \in F^\tau$. Si $\varphi =_d \varphi(v_1,\ldots,v_n)$, entonces se da una y solo una de las siguientes:*

(1) $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$, únicos y tales que las variables que ocurren en t o en s están todas en $\{v_1,\ldots,v_n\}$.

(2) $\varphi = r(t_1,\ldots,t_m)$, con $r \in \mathcal{R}_m$ y $t_1,\ldots,t_m \in T^\tau$, únicos y tales que las variables que ocurren en cada t_i están todas en $\{v_1,\ldots,v_n\}$.

(3) $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, con $\varphi_1,\varphi_2 \in F^\tau$, únicas y tales que $Li(\varphi_1) \cup Li(\varphi_2) \subseteq \{v_1,\ldots,v_n\}$.

(4) $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, con $\varphi_1,\varphi_2 \in F^\tau$, únicas y tales que $Li(\varphi_1) \cup Li(\varphi_2) \subseteq \{v_1,\ldots,v_n\}$.

(5) $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, con $\varphi_1,\varphi_2 \in F^\tau$, únicas y tales que $Li(\varphi_1) \cup Li(\varphi_2) \subseteq \{v_1,\ldots,v_n\}$.

(6) $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, con $\varphi_1,\varphi_2 \in F^\tau$, únicas y tales que $Li(\varphi_1) \cup Li(\varphi_2) \subseteq \{v_1,\ldots,v_n\}$.

(7) $\varphi = \neg\varphi_1$, con $\varphi_1 \in F^\tau$, única y tal que $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1,\ldots,v_n\}$.

(8) $\varphi = \forall v_j\varphi_1$, con $v_j \in \{v_1,\ldots,v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$, únicas y tales que $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1,\ldots,v_n\}$.

(9) $\varphi = \forall v\varphi_1$, con $v \in Var - \{v_1,\ldots,v_n\}$ y $\varphi_1\ inF^\tau$, únicas y tales que $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1,\ldots,v_n,v\}$.

(10) $\varphi = \exists v_j\varphi_1$, con $v_j \in \{v_1,\ldots,v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$, únicas y tales que $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1,\ldots,v_n\}$.

(11) $\varphi = \exists v \varphi_1$, *con* $v \in Var - \{v_1, \ldots, v_n\}$ *y* $\varphi_1 \in F^\tau$, *únicas y tales que* $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n, v\}$.

Proof. Induccion en el k tal que $\varphi \in F_k^\tau$ □

Lemma 62. *Supongamos* $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n)$. *Sea* $\mathbf{A} = (A, i)$ *un modelo de tipo* τ *y sean* $a_1, \ldots, a_n \in A$, *entonces:*

1. *Si* $\varphi = (t \equiv s)$, *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = s^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]$$

2. *Si* $\varphi = r(t_1, \ldots, t_m)$, *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } (t_1^A[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_m^A[a_1, \ldots, a_n]) \in r^A$$

3. *Si* $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n] \text{ y } \mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n]$$

4. *Si* $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n] \text{ o } \mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n]$$

5. *Si* $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n] \text{ o } \mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$$

6. *Si* $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si ya sea } \begin{array}{l} \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n] \text{ y } \mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n] \text{ o} \\ \mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n] \text{ y } \mathbf{A} \not\models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n] \end{array}$$

7. *Si* $\varphi = \neg\varphi_1$ *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$$

8. *Si* $\varphi = \forall v \varphi_1$ *con* $v \notin \{v_1, \ldots, v_n\}$ *y* $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, \ldots, v_n, v)$ *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n, a] \text{ para todo } a \in A$$

9. *Si* $\varphi = \forall v_j \varphi_1$ *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a, \ldots, a_n] \text{ para todo } a \in A$$

10. *) Si* $\varphi = \exists v \varphi_1$ *con* $v \notin \{v_1, \ldots, v_n\}$ *y* $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, \ldots, v_n, v)$ *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n, a] \text{ para algún } a \in A$$

11. *) Si* $\varphi = \exists v_j \varphi_1$ *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a, \ldots, a_n] \text{ para algún } a \in A$$

Proof. □

Lemma 63. *Si Qv ocurre en φ a partir de i, entonces hay una única fórmula ψ tal que $Qv\psi$ ocurre en φ a partir de i.*

Proof. Por induccion en el k tal que $\varphi \in F^{\tau}$. $\square$

Lemma 64. *Supongamos $\varphi =_d \varphi(w_1, \ldots, w_k), t_1 =_d t_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, t_k =_d t_k(v_1, \ldots, v_n)$ y supongamos además que cada w_j es sustituible por t_j en φ, entonces:*

(a) $Li(\varphi(t_1, \ldots, t_k)) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$

(b) Si declaramos $\varphi(t_1, \ldots, t_k) =_d \varphi(t_1, \ldots, t_k)(v_1, \ldots, v_n)$, entonces para cada estructura $\mathbf{A}$ y $\vec{a} \in A^n$ se tiene:

$$\mathbf{A} \models \varphi(t_1, \ldots, t_k)[\vec{a}] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi[t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]]$$

Proof. Probaremos que se dan (a) y (b), por induccion en el l tal que $\varphi \in F_l^{\tau}$. El caso $l = 0$ es una consecuencia directa del Lema 146. Supongamos (a) y (b) valen para cada $\varphi \in F_l^{\tau}$ y sea $\varphi \in F_{l+1}^{\tau} - F_l^{\tau}$. Notese que se puede suponer que cada v_i ocurre en algun t_i y que cada $w_i \in Li(\varphi)$, ya que para cada φ el caso general se desprende del caso con estas restricciones. Hay varios casos

CASO $\varphi = \forall w \varphi_1$ con $w \notin \{w_1, \ldots, w_k\}$ y $\varphi_1 =_d \varphi_1(w_1, \ldots, w_k, w)$

Notese que cada $w_j \in Li(\varphi_1)$. Ademas notese que $w \notin \{v_1, \ldots, v_n\}$ ya que de lo contrario w ocurriria en algun t_j, y entonces w_j no seria sustituible por t_j en φ. Sean

$$\begin{array}{rcl} \tilde{t}_1 & = & t_1 \\ & \vdots & \\ \tilde{t}_k & = & t_k \\ \tilde{t}_{k+1} & = & w \end{array}$$

Notese que $\tilde{t}_j =_d \tilde{t}_j(v_1, \ldots, v_n, w)$

Por (a) de la hipotesis inductiva tenemos que $Li(\varphi_1(t_1, \ldots, t_k, w)) = Li(\varphi_1(\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_k, \tilde{t}_{k+1})) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n, w\}$

y por lo tanto $Li(\varphi(t_1, \ldots, t_k)) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$ lo cual prueba (a). Finalmente notese que

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \models \varphi(t_1, \ldots, t_k)[\vec{a}] \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \varphi_1(\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_k, \tilde{t}_{k+1})[\vec{a}, a], \text{ para todo } a \in A \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \varphi_1[\tilde{t}_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}, a], \ldots, \tilde{t}_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}, a], \tilde{t}_{k+1}^{\mathbf{A}}[\vec{a}, a]], \text{ para todo } a \in A \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \varphi_1[t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}], a], \text{ para todo } a \in A \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \varphi[t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]] \end{array}$$

lo cual prueba (b). El caso del cuantificador $\exists$ es analogo y los casos de nexos logicos son directos. $\square$

4 Teorias de primer orden

Lemma 65. *Si $(\varphi_1, \varphi_2) \in Generaliz^{\tau}$, entonces el nombre de constante c del cual habla la definición de $Generaliz^{\tau}$ está unívocamente determinado por el par (φ_1, φ_2).*

Proof. Recordemos la definición de $Generaliz^{\tau}$.

$$Generaliz^{\tau} = \{(\psi, \forall v \tilde{\psi}) : \psi \in S^{\tau},\ v \text{ no ocurre en } \psi \text{ y existe } c \in \mathcal{C} \text{ tal que } \tilde{\psi} = \text{resultado de reemplazar en } \psi \text{ cada ocurrencia de } c \text{ por } v\}$$

Notese que c es el único nombre de constante que ocurre en φ_1 y no ocurre en φ_2. $\square$

Lemma 66. *Si* $(\varphi_1, \varphi_2) \in Elec^\tau$*, entonces el nombre de constante e del cual habla la definición de* $Elec^\tau$ *está unívocamente determinado por el par* (φ_1, φ_2)*.*

Proof. Recordemos la definición de $Elec^\tau$.

$$Elect^\tau = \{(\exists v\varphi(v), \varphi(e)) : \varphi =_d \varphi(v),\ Li(\varphi) = \{v\} \text{ y } e \in \mathcal{C} \text{ no ocurre en } \varphi\}$$

Notese que e es el único nombre de constante que ocurre en φ_1 y no ocurre en φ_2. □

Lemma 67. *Todas las reglas excepto las reglas de elección y generalización son universales en el sentido que si* φ *se deduce de* $\psi_1, \ldots, \psi_k$ *por alguna de estas reglas, entonces* $((\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k) \to \varphi)$ *es una sentencia universalmente válida.*

Proof.

- **DISJUNCIÓN-INTRODUCCIÓN:**
- **CONJUNCIÓN-INTRODUCCIÓN:**
- **CONJUNCIÓN-ELIMINACIÓN:**
- **EQUIVALENCIA-INTRODUCCIÓN:**
- **EQUIVALENCIA-ELIMINACIÓN:**
- **PARTICULARIZACIÓN:**
- **EXISTENCIA:** Supongamos $\varphi =_d \varphi(v)$, $t \in T_c^\tau$ y $\mathbf{A}$ es una estructura de tipo τ tal que $\mathbf{A} \models \varphi(t)$. Sea $t^{\mathbf{A}}$ el valor que toma t en $\mathbf{A}$. Por el Lema 148 tenemos que $\mathbf{A} \models \varphi\left[t^{\mathbf{A}}\right]$, por lo cual tenemos que $\mathbf{A} \models \exists v\varphi(v)$.
- **EVOCACIÓN:**
- **ABSURDO:**
- **CONMUTATIVIDAD:**
- **MODUS-PONENS:**
- **DIVISIÓN-POR-CASOS:**
- **REEMPLAZO:** Debemos probar que si $(\psi_1, \psi_2, \varphi) \in Reemp^\tau = Reemp1^\tau \cup Reemp2^\tau$, entonces $((\psi_1 \wedge \psi_2) \to \varphi)$ es una sentencia universalmente valida. El caso en el que $(\psi_1, \psi_2, \varphi) \in Reemp1^\tau$ es facil y lo dejaremos al lector. Para el caso en el que $(\psi_1, \psi_2, \varphi) \in Reemp2^\tau$ nos hara falta un resultado un poco mas general. Veamos por induccion en k que si se dan las siguienes condiciones

  - $\alpha \in F_k^\tau$ y $\varphi, \psi \in F^\tau$ - $\mathbf{A}$ es una estructura de tipo τ - $\overline{\alpha}$ = resultado de reemplazar en α una ocurrencia de φ por ψ, - $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \psi[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$ entonces se da que

  - $\mathbf{A} \models \alpha[\vec{a}]$ si y solo si $\mathbf{A} \models \overline{\alpha}[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$. CASO $k = 0$.

  Entonces α es atomica y por lo tanto ya que α es la unica subformula de α, la situacion es facil de probar.

  CASO $\alpha = \forall x_i \alpha_1$.

  Si $\varphi = \alpha$, entonces la situacion es facil de probar. Si $\varphi \neq \alpha$, entonces la ocurrencia de φ a reemplazar sucede en α_1 y por lo tanto $\overline{\alpha} = \forall x_i \overline{\alpha_1}$. Se tiene entonces que para un $\vec{a}$ dado,

$$\begin{array}{c}\mathbf{A} \models \alpha\,[\vec{a}] \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \alpha_1\,[\downarrow_i^a \vec{a}]\,,\text{ para cada } a \in A \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \overline{\alpha_1}\,[\downarrow_i^a \vec{a}]\,,\text{ para cada } a \in A \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \overline{\alpha}\,[\vec{a}]\end{array}$$

CASO $\alpha = (\alpha_1 \vee \alpha_2)$. Si $\varphi = \alpha$, entonces la situacion es facil de probar. Supongamos $\varphi \neq \alpha$ y supongamos que la ocurrencia de φ a reemplazar sucede en α_1. Entonces $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha_1} \vee \alpha_2)$ y tenemos que

$$\begin{array}{c}\mathbf{A} \models \alpha\,[\vec{a}] \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \alpha_1\,[\vec{a}] \text{ o } \mathbf{A} \models \alpha_2\,[\vec{a}] \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \overline{\alpha_1}\,[\vec{a}] \text{ o } \mathbf{A} \models \alpha_2\,[\vec{a}] \\ \Updownarrow \\ \mathbf{A} \models \overline{\alpha}\,[\vec{a}]\end{array}$$

- **TRANSITIVIDAD:**

□

Lemma 68. *Sea $\boldsymbol{\varphi} \in S^{\tau+}$, hay únicos $n \geq 1$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in S^\tau$ tales que $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_1 \ldots \varphi_n$.*

Proof. Debemos probar la unicidad de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, pero esto vale utilizando la **Proposition ??** Solo hay que probar la unicidad la cual sigue de la Proposicion 128. □

Lemma 69. *Sea $\mathbf{J} \in Just^+$, hay únicos $n \geq 1$ y $J_1, \ldots, J_n \in Just$ tales que $\mathbf{J} = J_1 \ldots J_n$.*

Proof. Supongamos $J_1, \ldots, J_n, J'_1, \ldots, J'_m$, con $n, m \geq 1$, son justificaciones tales que $J_1 \ldots J_n = J'_1 \ldots J'_m$. Es facil ver que entonces tenemos $J_1 = J'_1$, por lo cual $J_2 \ldots J_n = J'_2 \ldots J'_m$. Un argumento inductivo nos dice que entonces $n = m$ y $J_i = J'_i$, $i = 1, \ldots, n$ □

Lemma 70. *Sea $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ una prueba de φ en (Σ, τ).*

1. *Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{J}_i \neq$ HIPOTESIS$\bar{m}$, para cada $i = 1, \ldots, n(\boldsymbol{\varphi})$. Supongamos que $\mathbf{J}_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$ y que $\mathbf{J}_j =$ TESIS$\bar{k}\alpha$, con $[\alpha]_1 \notin Num$. Sea $\tilde{\mathbf{J}}$ el resultado de reemplazar en $\mathbf{J}$ la justificación $\mathbf{J}_i$ por* HIPOTESIS$\bar{m}$ *y reemplazar la justificación $\mathbf{J}_j$ por* TESIS$\bar{m}\alpha$*, entonces $(\boldsymbol{\varphi}, \tilde{\mathbf{J}})$ es una prueba de φ en (Σ, τ).*

2. *Sea $\mathcal{C}_1$ el conjunto de nombres de constante que ocurren en alguna $\boldsymbol{\varphi}_i$ y que no pertenecen a $\mathcal{C}$. Sea $e \in \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}$. Sea $\tilde{e} \notin \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1$ tal que $(\mathcal{C} \cup (\mathcal{C}_1 - \{e\}) \cup \{\tilde{e}\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo. Sea $\tilde{\varphi}_i =$ resultado de reemplazar en $\boldsymbol{\varphi}_i$ cada ocurrencia de e por $\tilde{e}$, entonces $(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1 \ldots \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{n(\varphi)}, \mathbf{J})$ es una prueba de φ en (Σ, τ).*

Proof. 1. Obvio.

2. Sean

$$\begin{array}{rcl}\tau_1 & = & (\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a) \\ \tau_2 & = & (\mathcal{C} \cup (\mathcal{C}_1 - \{e\}) \cup \{\tilde{e}\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)\end{array}$$

Para cada $c \in \mathcal{C} \cup (\mathcal{C}_1 - \{e\})$ definamos $\tilde{c} = c$. Notese que el mapeo $c \to \tilde{c}$ es una biyeccion entre el conjunto de nombres de constante de τ_1 y el conjunto de nombres de cte de τ_2. Para cada $t \in T^{\tau_1}$ sea $\tilde{t} =$ resultado de reemplazar en t cada ocurrencia de c por $\tilde{c}$, para cada $c \in \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1$. Analogamente para una formula $\psi \in F^{\tau_1}$, sea $\tilde{\psi} =$ resultado de reemplazar en ψ cada ocurrencia de c por $\tilde{c}$, para cada $c \in \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1$. Notese que los mapeos $t \rightarrow \tilde{t}$ y $\psi \rightarrow \tilde{\psi}$ son biyecciones naturales entre T^{τ_1} y T^{τ_2} y entre F^{τ_1} y F^{τ_2}, respectivamente. Notese que cualesquiera sean $\psi_1, \psi_2 \in F^{\tau_1}$, tenemos que ψ_1 se deduce de ψ_2 por la regla de generalizacion con constante c sii $\tilde{\psi}_1$ se deduce de $\tilde{\psi}_2$ por la regla de generalizacion con constante $\tilde{c}$. Para las otras reglas sucede lo mismo. Notese tambien que c ocurre en ψ sii $\tilde{c}$ ocurre en $\tilde{\psi}$. Mas aun notese que c depende de d en $(\varphi, \mathbf{J})$ sii $\tilde{c}$ depende de $\tilde{d}$ en $(\tilde{\varphi}, \mathbf{J})$, donde $\tilde{\varphi} = \widetilde{\varphi_1} \ldots \widetilde{\varphi_{n(\varphi)}}$. Ahora es facil chequear que $(\tilde{\varphi}, \mathbf{J})$ es una prueba de φ en (Σ, τ) basandose en que $(\varphi, \mathbf{J})$ es una prueba de φ en (Σ, τ).

□

Lemma 71. *Sea (Σ, τ) una teoría.*

1. *Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$ entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*
2. *Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ y φ se deduce por alguna regla universal a partir de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*
3. *Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, para toda sentencia φ.*
4. *Si (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.*
5. *$(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ si y solo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.*
6. *Si $(\Sigma, \tau) \nvdash \neg\varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.*

Proof. 1. Haremos el caso $n = 2$. Supongamos entonces que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \varphi_2$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\}, \tau) \vdash \varphi$. Para $i = 1, 2$, sea $(\varphi_1^i \ldots \varphi_{n_i}^i, J_1^i \ldots J_{n_i}^i)$ una prueba de φ_i en (Σ, τ). Sea $(\psi_1 \ldots \psi_n, J_1 \ldots J_n)$ una prueba de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\}, \tau)$. Notese que por el Lema 154 podemos suponer que estas tres pruebas no comparten ningun nombre de constante auxiliar y que tampoco comparten numeros asociados a hipotesis o tesis. Para cada $i = 1, \ldots, n$, definamos $\widetilde{J}_i$ de la siguiente manera.

- Si $\psi_i = \varphi_1$ y $J_i =$ AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J}_i =$ EVOCACION$(\overline{n_1})$ - Si $\psi_i = \varphi_2$ y $J_i =$ AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J}_i =$ EVOCACION$(\overline{n_1 + n_2})$. - Si $\psi_i \notin \{\varphi_1, \varphi_2\}$ y $J_i =$ AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J}_i =$ AXIOMAPROPIO. - Si $J_i =$ AXIOMALOGICO, entonces $\widetilde{J}_i =$ AXIOMALOGICO - Si $J_i =$ CONCLUSION, entonces $\widetilde{J}_i =$ CONCLUSION. - Si $J_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$, entonces $\widetilde{J}_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$ - Si $J_i = \alpha P(\overline{l_1}, \ldots, \overline{l_k})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\widetilde{J}_i = \alpha P(\overline{l_1 + n_1 + n_2}, \ldots, \overline{l_k + n_1 + n_2})$ Para cada $i = 1, \ldots, n_2$, definamos $\widetilde{J_i^2}$ de la siguiente manera.

- Si $J_i^2 =$ AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J_i^2} =$ AXIOMAPROPIO - Si $J_i^2 =$ AXIOMALOGICO, entonces $\widetilde{J_i^2} =$ AXIOMALOGICO - Si $J_i^2 =$ CONCLUSION, entonces $\widetilde{J_i^2} =$ CONCLUSION. - Si $J_i^2 =$ HIPOTESIS$\bar{k}$, entonces $\widetilde{J_i^2} =$ HIPOTESIS$\bar{k}$ - Si $J_i^2 = \alpha P(\overline{l_1}, \ldots, \overline{l_k})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i^2} = \alpha P(\overline{l_1 + n_1}, \ldots, \overline{l_k + n_1})$ Es facil chequear que

$(\varphi_1^1 \ldots \varphi_{n_1}^1 \varphi_1^2 \ldots \varphi_{n_2}^2 \psi_1 \ldots \psi_n, J_1^1 \ldots J_{n_1}^1 \widetilde{J_1^2} \ldots \widetilde{J_{n_2}^2} \widetilde{J}_1 \ldots \widetilde{J}_n)$

es una prueba de φ en (Σ, τ)

2. Supongamos que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ y que φ se deduce por regla R a partir de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, con R universal. Notese que

1.	φ_1	AXIOMAPROPIO
2.	φ_2	AXIOMAPROPIO
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n.$	φ_n	AXIOMAPROPIO
$n+1$	φ	$\mathrm{R}(\bar{1},\ldots,\bar{n})$

es una prueba de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\},\tau)$, lo cual por (1) nos dice que $(\Sigma,\tau) \vdash \varphi$.

3. Si (Σ,τ) es inconsistente, entonces por definicion tenemos que $(\Sigma,\tau) \vdash \psi \wedge \neg\psi$ para alguna sentencia ψ. Dada una sentencia cualquiera φ tenemos que φ se deduce por la regla del absurdo a partir de $\psi \wedge \neg\psi$ con lo cual (2) nos dice que $(\Sigma,\tau) \vdash \varphi$

4. Supongamos (Σ,τ) es consistente y $(\Sigma,\tau) \vdash \varphi$. Si $(\Sigma \cup \{\varphi\},\tau)$ fuera inconsistente, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\},\tau) \vdash \psi \wedge \neg\psi$, para alguna sentencia ψ, lo cual por (1) nos diria que $(\Sigma,\tau) \vdash \psi \wedge \neg\psi$, es decir nos diria que (Σ,τ) es inconsistente.

5. Supongamos $(\Sigma,\tau) \vdash (\varphi \to \psi)$. Entonces tenemos que $(\Sigma \cup \{\varphi\},\tau) \vdash (\varphi \to \psi), \varphi$, lo cual por (2) nos dice que $(\Sigma \cup \{\varphi\},\tau) \vdash \psi$. Supongamos ahora que $(\Sigma \cup \{\varphi\},\tau) \vdash \psi$. Sea $(\varphi_1 \ldots \varphi_n, J_1 \ldots, J_n)$ una prueba de ψ en $(\Sigma \cup \{\varphi\},\tau)$. Notese que podemos suponer que J_n es de la forma $P(\overline{l_1},\ldots,\overline{l_k})$. Definimos $\widetilde{J}_i = \mathrm{TESIS}\bar{m}P(\overline{l_1+1},\ldots,\overline{l_k+1}$, donde m es tal que ninguna J_i es igual a HIPOTESIS$\bar{m}$. Para cada $i = 1,\ldots,n-1$, definamos $\widetilde{J}_i$ de la siguiente manera.

   - Si $\varphi_i = \varphi$ y $J_i =$ AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J}_i =$ EVOCACION(1) - Si $\varphi_i \neq \varphi$ y $J_i =$ AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J}_i =$ AXIOMAPROPIO - Si $J_i =$ AXIOMALOGICO, entonces $\widetilde{J}_i =$ AXIOMALOGICO - Si $J_i =$ CONCLUSION, entonces $\widetilde{J}_i =$ CONCLUSION - Si $J_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$ entonces $\widetilde{J}_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$ - Si $J_i = \alpha P(\overline{l_1},\ldots,\overline{l_k})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\mathrm{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\widetilde{J}_i = \alpha P(\overline{l_1+1},\ldots,\overline{l_k+1})$ Es facil chequear que

   $(\varphi\varphi_1 \ldots \varphi_n(\varphi \to \psi),\ \mathrm{HIPOTESIS}\bar{m}\widetilde{J}_1 \ldots \widetilde{J}_n\mathrm{CONCLUSION})$

   es una prueba de $(\varphi \to \psi)$ en (Σ,τ)

$\square$

Theorem 72. ***(Corrección)*** $(\Sigma,\tau) \vdash \varphi$ *implica* $(\Sigma,\tau) \models \varphi$.

Corollary 73. *Si* (Σ,τ) *tiene un modelo, entonces* (Σ,τ) *es consistente.*

Proof. Supongamos $\mathbf{A}$ es un modelo de (Σ,τ). Si (Σ,τ) fuera inconsistente, tendriamos que hay una $\varphi \in S^t$ tal que $(\Sigma,\tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$, lo cual por el Teorema de Correccion nos diria que $\mathbf{A} \models (\varphi \wedge \neg\varphi)$ $\square$

Lemma 74. $\dashv\vdash$ *es una relación de equivalencia.*

Proof.

- *Reflexiva:* La relacion es reflexiva ya que $(\varphi \leftrightarrow \varphi)$ es un axioma logico.
- *Simétrica:* Supongamos que $\varphi \dashv\vdash \psi$, es decir $(\Sigma,\tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$. Ya que $((\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi))$ es un axioma logico, tenemos que $(\Sigma,\tau) \vdash ((\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi))$. Notese que $(\psi \leftrightarrow \varphi)$ se deduce de $((\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi))$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ por la regla de reemplazo, lo cual por (2) del Lema 155 nos dice que $(\Sigma,\tau) \vdash (\psi \leftrightarrow \varphi)$.
- *Transitiva:* Analogamente, usando la regla de transitividad se puede probar que $\dashv\vdash$ es transitiva.

□

Lemma 75. *Dada una teoria $T = (\Sigma, \tau)$, se tiene que:*

(1) $\{\varphi \in S^\tau : \varphi$ *es un teorema de* $T\} \in S^\tau / \dashv\vdash_T$

(2) $\{\varphi \in S^\tau : \varphi$ *es refutable en* $T\} \in S^\tau / \dashv\vdash_T$

Proof. □

Lemma 76. *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría, entonces $(S^\tau / \dashv\vdash, \mathsf{s}^T, \mathsf{i}^T, 0^T, 1^T)$ es un álgebra de Boole.*

Proof. □

Lemma 77. *Sea T una teoría y sea $\leq^T$ el orden parcial asociado al álgebra de Boole $\mathcal{A}_T$ (es decir $[\varphi]_T \leq^T [\psi]_T$ si y solo si $[\varphi]_T \ \mathsf{s}^T \ [\psi]_T = [\psi]_T$), entonces se tiene que:*

$$[\varphi]_T \leq^T [\psi]_T \text{ si y solo si } T \vdash (\varphi \to \psi)$$

Proof. En virtud de los lemas anteriores solo falta probar que

$$\begin{array}{rcl} [\varphi] \ \mathsf{s} \ [\varphi]^c & = & 1 \\ [\varphi] \ \mathsf{i} \ [\varphi]^c & = & 0 \end{array}$$

Dejamos al lector la prueba de estas igualdades. □

Lemma 78. *Sean $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ y $\tau' = (\mathcal{C}', \mathcal{F}', \mathcal{R}', a')$ tipos.*

1. *Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}', \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}', \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$ y $a' \mid_{\mathcal{F} \cup \mathcal{R}} = a$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ implica $(\Sigma, \tau') \vdash \varphi$.*

2. *Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}', \mathcal{F} = \mathcal{F}', \mathcal{R} = \mathcal{R}'$ y $a' = a$, entonces $(\Sigma, \tau') \vdash \varphi$ implica $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, cada vez que $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq S^\tau$.*

Proof.

(1) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. Entonces hay una prueba $(\varphi_1 \dots \varphi_n, J_1 \dots J_n)$ de φ en (Σ, τ). Sea $\mathcal{C}_1$ el conjunto de nombres de constante que ocurren en alguna φ_i y que no pertenecen a $\mathcal{C}$. Notese que aplicando varias veces el Lema 154 podemos obtener una prueba $(\tilde{\varphi}_1 \dots \tilde{\varphi}_n, J_1 \dots J_n)$ de φ en (Σ, τ) la cual cumple que los nombres de constante que ocurren en alguna ψ_i y que no pertenecen a $\mathcal{C}$ no pertenecen a $\mathcal{C}'$. Pero entonces $(\tilde{\varphi}_1 \dots \tilde{\varphi}_n, J_1 \dots J_n)$ es una prueba de φ en (Σ, τ'), con lo cual $(\Sigma, \tau') \vdash \varphi$

(2) Supongamos $(\Sigma, \tau') \vdash \varphi$. Entonces hay una prueba $(\varphi, \mathbf{J})$ de φ en (Σ, τ'). Veremos que $(\varphi, \mathbf{J})$ es una prueba de φ en (Σ, τ). Ya que $(\varphi, \mathbf{J})$ es una prueba de φ en (Σ, τ') hay un conjunto finito $\mathcal{C}_1$, disjunto con $\mathcal{C}'$, tal que $(\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}_1, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo y cada φ_i es una sentencia de tipo $(\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}_1, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$. Notese que $\widetilde{\mathcal{C}_1} = \mathcal{C}_1 \cup (\mathcal{C}' - \mathcal{C})$ es tal que $(\mathcal{C} \cup \widetilde{\mathcal{C}_1}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo y cada φ_i es una sentencia de tipo $(\mathcal{C} \cup \widetilde{\mathcal{C}_1}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$, con lo cual $(\varphi, \mathbf{J})$ cunple el punto 1. de la definicion de prueba. Todos los otros puntos se cumplen en forma directa, exepto los puntos 4(f) y 4(g)i para los cuales es necesario notar que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$.

□

Lemma 79. *Sea (Σ, τ) una teoría y supongamos que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de Σ, entonces para cada formula $\varphi =_d \varphi(v)$, se tiene que $[\forall v \varphi(v)]_T = \inf(\{[\varphi(t)]_T : t$ es un término cerrado$\})$.*

Proof. Primero notese que $[\forall v\ \varphi(v)] \leq [\varphi(t)]$, para todo termino cerrado t, ya que podemos dar la siguiente prueba:

1.	$\forall v\ \varphi(v)$	HIPOTESIS1
2.	$\varphi(t)$	TESIS1PARTICULARIZACION(1)
3.	$(\forall v\ \varphi(v) \to \varphi(t))$	CONCLUSION

Supongamos ahora que $[\psi] \leq [\varphi(t)]$, para todo termino cerrado t. Por hipotesis hay un nombre de cte $c \in \mathcal{C}$ el cual no ocurre en los elementos de $\Sigma \cup \{\psi, \varphi(v)\}$. Ya que $[\psi] \leq [\varphi(c)]$, hay una prueba $(\varphi_1 \ldots \varphi_n, J_1 \ldots J_n)$ de $(\psi \to \varphi(c))$ en (Σ, τ). Pero entonces es facil de chequear que la siguiente es una prueba en $(\Sigma, (\mathcal{C} - \{c\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a))$ de $(\psi \to \forall v\ \varphi(v))$:

1.	φ_1	J_1
2.	φ_2	J_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	$\varphi_n = (\psi \to \varphi(c))$	J_n
$n+1$.	ψ	HIPOTE
$n+2$.	$\varphi(c)$	MODUS
$n+3$.	$\forall v \varphi(v)$	TESIS$\bar{m}$
$n+4$.	$(\psi \to \forall v \varphi(v))$	CONCL

(con m elejido suficientemente grande). Por el Lema 162 tenemos entonces que $(\Sigma, \tau) \vdash (\psi \to \forall v\ \varphi(v))$ $\square$

Lemma 80. ***(Coincidencia)*** *Sean τ y τ' dos tipos cualesquiera y sea $\tau_\cap$ dado por:*

- $\mathcal{C}_\cap = \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$
- $\mathcal{F}_\cap = \{f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' : a(f) = a'(f)\}$
- $\mathcal{R}_\cap = \{r \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}' : a(r) = a'(r)\}$
- $a_\cap = a \mid_{\mathcal{F}_\cap \cup \mathcal{R}_\cap}$

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ modelos de tipo τ y τ' respectivamente. Supongamos que $A = A'$ y que $c^{\mathbf{A}} = c^{\mathbf{A}'}$, para cada $c \in \mathcal{C}_\cap$, $f^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{A}'}$, para cada $f \in \mathcal{F}_\cap$ y $r^{\mathbf{A}} = r^{\mathbf{A}'}$, para cada $r \in \mathcal{R}_\cap$, entonces:

(a) Para cada $t =_d t(\vec{v}) \in T^{\tau_\cap}$ se tiene que $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{A}'}[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^n$.

(b) Para cada $\varphi =_d \varphi(\vec{v}) \in F^{\tau_\cap}$ se tiene que:

$$\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \text{ si y solo si } \mathbf{A}' \models \varphi[\vec{a}]$$

(c) Si $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq S^{\tau_\cap}$, entonces:

$$(\Sigma, \tau) \models \varphi \text{ si y solo si } (\Sigma, \tau') \models \varphi$$

Proof. (a) y (b) son directos por induccion.

(c) Supongamos que $(\Sigma, \tau) \models \varphi$. Sea $\mathbf{A}'$ un modelo de τ' tal que $\mathbf{A}' \models \Sigma$. Sea $a \in A'$ un elemento fijo. Sea $\mathbf{A}$ el modelo de tipo τ definido de la siguiente manera

- universo de $\mathbf{A} = A'$ - $c^{\mathbf{A}} = c^{\mathbf{A}'}$, para cada $c \in \mathcal{C}_\cap$, - $f^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{A}'}$, para cada $f \in \mathcal{F}_\cap$ - $r^{\mathbf{A}} = r^{\mathbf{A}'}$, para cada $r \in \mathcal{R}_\cap$ - $c^{\mathbf{A}} = a$, para cada $c \in \mathcal{C} - \widetilde{\mathcal{C}}$ - $f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_{a(f)}) = a$, para cada $f \in \mathcal{F} - \mathcal{F}_\cap$, $a_1, \ldots, a_{a(f)} \in A'$ - $r^{\mathbf{A}} = \emptyset$, para cada $r \in \mathcal{R} - \mathcal{R}_\cap$ Ya que $\mathbf{A}' \models \Sigma$, (b) nos dice que $\mathbf{A} \models \Sigma$, lo cual nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi$. Nuevamente por (b) tenemos que $\mathbf{A}' \models \varphi$, con lo cual hemos probado que $(\Sigma, \tau') \models \varphi$ $\square$

Lemma 81. *Sea τ un tipo. Hay una infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \in F^{\tau_{\mathbb{N}}}$ tal que:*

1. *$|Li(\gamma_j)| \leq 1$, para cada $j = 1, 2, \ldots$*

2. Si $|Li(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$, para algún $j \in \mathbb{N}$

Proof. Notese que las formulas de tipo τ son palabras de algun alfabeto finito A. Dado un orden total estricto $<$ para A, podemos definir

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1 & = & \min_{\alpha}^{<} (\alpha \in F^\tau \wedge |Li(\alpha)| \leq 1) \\ \gamma_{t+1} & = & \min_{\alpha}^{<} (\alpha \in F^\tau \wedge |Li(\alpha)| \leq 1 \wedge (\forall i \in \omega)_{i \leq t} \alpha \neq \gamma_i) \end{array}$$

Claramente esta sucesion cumple (1) y es facil ver que tambien se cumple la propiedad (2). □

Theorem 82. ***(Completitud) (Gödel)*** *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría de primer orden. Si $T \models \varphi$ entonces $T \vdash \varphi$.*

Corollary 83. *Toda teoría consistente tiene un modelo.*

Proof. Supongamos (Σ, τ) es consistente y no tiene modelos. Entonces $(\Sigma, \tau) \models (\varphi \wedge \neg\varphi)$, con lo cual por completitud $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$, lo cual es absurdo. □

Corollary 84. ***(Teorema de Compacidad)***

(a) Si (Σ, τ) es tal que (Σ_0, τ) tiene un modelo, para cada subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, entonces (Σ, τ) tiene un modelo.

(b) Si $(\Sigma, \tau) \models \varphi$, entonces hay un subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que $(\Sigma_0, \tau) \models \varphi$.

Proof. (a) Si (Σ, τ) fuera inconsistente habria un subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que la teoria (Σ_0, τ) es inconsistente (Σ_0 puede ser formado con los axiomas de Σ usados en una prueba que atestigue que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$). O sea que (Σ, τ) es consistente por lo cual tiene un modelo.

(b) Si $(\Sigma, \tau) \models \varphi$, entonces por completitud, $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. Pero entonces hay un subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que $(\Sigma_0, \tau) \vdash \varphi$, es decir tal que $(\Sigma_0, \tau) \models \varphi$ (correccion). □

Lemma 85. *Dados $t_1, \ldots, t_n, t =_d t(x_1, \ldots, x_n) \in T^\tau$, se tiene que $t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, \ldots, t_n] = t(t_1, \ldots, t_n)$.*

Proof. Para cada $k \geq 0$, sea

- Teo$_k$: Dados $t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$ y $t =_d t(x_1, \ldots, x_n) \in T_k^\tau$, se tiene que $t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, \ldots, t_n] = t(t_1, \ldots, t_n)$. Veamos que es cierto Teo$_0$. Hay dos casos

Caso $t =_d t(x_1, \ldots, x_n) = c \in \mathcal{C}$.

Entonces tenemos

$$\begin{array}{rcl} t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, \ldots, t_n] & = & c^{\mathbf{T}^\tau} \\ & = & c \\ & = & t(t_1, \ldots, t_n) \end{array}$$

Caso $t =_d t(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, para algun i.

Entonces tenemos

$$\begin{array}{rcl} t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, \ldots, t_n] & = & t_i \\ & = & t(t_1, \ldots, t_n) \end{array}$$

Veamos que Teo$_k$ implica Teo$_{k+1}$. Supongamos que vale Teo$_k$. Sean $t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$ y $t =_d t(x_1, \ldots, x_n) \in T_{k+1}^\tau - T_k^\tau$. Hay $f \in \mathcal{F}_m$, con $m \geq 1$, y terminos $s_1, \ldots, s_m \in T_k^\tau$ tales que $t = f(s_1, \ldots, s_m)$. Notese que $s_i =_d s_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, m$. Tenemos entonces que

$$\begin{array}{rcl} t^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, \ldots, t_n] & = & f(s_1, \ldots, s_m)^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, \ldots, t_n] \\ & = & f^{\mathbf{T}^\tau}(s_1^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, \ldots, t_n], \ldots, s_m^{\mathbf{T}^\tau}[t_1, \ldots, t_n]) \\ & = & f^{\mathbf{T}^\tau}(s_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, s_m(t_1, \ldots, t_n)) \\ & = & f(s_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, s_m(t_1, \ldots, t_n)) \\ & = & t(t_1, \ldots, t_n) \end{array}$$

con lo cual vale Teo$_{k+1}$ □

Lemma 86. ***(Universal Mapping Property)*** *Si $\mathbf{A}$ es cualquier τ-álgebra y $F : Var \to A$, es una función cualquiera, entonces F puede ser extendida a un homomorfismo $\bar{F} : \mathbf{T}^\tau \to \mathbf{A}$.*

Proof. Definamos $\bar{F}$ de la siguiente manera:

$\bar{F}(t) = t^{\mathbf{A}}[(F(x_1), F(x_2), \dots)]$

Es claro que $\bar{F}$ extiende a F. Veamos que es un homomorfismo. Dada $c \in \mathcal{C}$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \bar{F}(c^{\mathbf{T}^\tau}) & = & \bar{F}(c) \\ & = & c^{\mathbf{A}}[(F(x_1), F(x_2), \dots)] \\ & = & c^{\mathbf{A}} \end{array}$$

Dados $f \in \mathcal{F}_n, t_1, \dots, t_n \in T^\tau$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \bar{F}(f^{\mathbf{T}^\tau}(t_1, \dots, t_n)) & = & \bar{F}(f(t_1, \dots, t_n)) \\ & = & f(t_1, \dots, t_n)^{\mathbf{A}}[(F(x_1), F(x_2), \dots)] \\ & = & f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[(F(x_1), F(x_2), \dots)], \dots, t_n^{\mathbf{A}}[(\\ & = & f^{\mathbf{A}}(\bar{F}(t_1), \dots, \bar{F}(t_n)) \end{array}$$

con lo cual hemos probado que $\bar{F}$ es un homomorfismo. □

Lemma 87. *Todas las reglas excepto las reglas anteriores son universales en el sentido que si φ se deduce de $\psi_1, \dots, \psi_k$ por alguna de estas reglas, entonces $((\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k) \to \varphi)$ es una sentencia universalmente válida.*

Proof. Veamos que la regla de reemplazo es universal. Basta con ver por induccion en k que

- Teo$_k$: Sean $t, s \in T^\tau$, $r \in T_k^\tau$ y sea $\mathbf{A}$ una τ-algebra tal que $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$. Entonces $r^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = \tilde{r}^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$, donde $\tilde{r}$ es el resultado de reemplazar algunas ocurrencias de t en r por s. La prueba de Teo$_0$ es dejada al lector. Asumamos que vale Teo$_k$ y probemos que vale Teo$_{k+1}$. Sean $t, s \in T^\tau$, $r \in T_{k+1}^\tau - T_k^\tau$ y sea $\mathbf{A}$ una τ-algebra tal que $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$. Sea $\tilde{r}$ el resultado de reemplazar algunas ocurrencias de t en r por s. El caso $t = r$ es trivial. Supongamos entonces que $t \neq r$. Supongamos $r = f(r_1, \dots, r_n)$, con $r_1, \dots, r_n \in T_k^\tau$ y $f \in \mathcal{F}_n$. Notese que por Lema 123 tenemos que $\tilde{r} = f(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n)$, donde cada $\tilde{r}_i$ es el resultado de reemplazar algunas ocurrencias de t en r_i por s. Para $\vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$ se tiene que

$$\begin{array}{rcll} r^{\mathbf{A}}[\vec{a}] & = & f(r_1, \dots, r_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] & \\ & = & f^{\mathbf{A}}(r_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \dots, r_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) & \\ & = & f^{\mathbf{A}}(\tilde{r}_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \dots, \tilde{r}_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) & \text{por Teo}_k \\ & = & f(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] & \\ & = & \tilde{r}^{\mathbf{A}}[\vec{a}] & \end{array}$$

lo cual prueba Teo$_{k+1}$ Veamos que la regla de substitucion es universal. Supongamos $\mathbf{A} \models t \approx s$, con $t =_d t(x_1, \dots, x_n)$ y $s =_d s(x_1, \dots, x_n)$. Veremos que entonces $\mathbf{A} \models t(p_1, \dots, p_n) \approx s(p_1, \dots, p_n)$. Supongamos que $p_i =_d p_i(x_1, \dots, x_m)$, para cada $i = 1, \dots, n$. Por (a) del Lema 146, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} t(p_1, \dots, p_n) & = & _d t(p_1, \dots, p_n)(x_1, \dots, x_m) \\ s(p_1, \dots, p_n) & = & _d s(p_1, \dots, p_n)(x_1, \dots, x_m) \end{array}$$

Sea $\vec{a} \in A^m$. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} t(p_1, \dots, p_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] & = & t^{\mathbf{A}}\left[p_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \dots, p_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]\right] \\ & = & s^{\mathbf{A}}\left[p_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \dots, p_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]\right] \\ & = & s(p_1, \dots, p_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] \end{array}$$

lo cual nos dice que $\mathbf{A} \models t(p_1, \dots, p_n) \approx s(p_1, \dots, p_n)$. □

Theorem 88. ***(Corrección)*** *Si $(\Sigma, \tau) \vdash_{ec} p \approx q$, entonces $(\Sigma, \tau) \models p \approx q$.*

Proof. Sea

$p_1 \approx q_1, \dots, p_n \approx q_n$

una prueba ecuacional de $p \approx q$ en (Σ, τ). Usando el lema anterior se puede probar facilmente por induccion en i que $(\Sigma, \tau) \models p_i \approx q_i$, por lo cual $(\Sigma, \tau) \models p \approx q$. □

Theorem 89. ***(Completitud) (Birkhoff)*** *Sea (Σ, τ) una teoría ecuacional. Si $(\Sigma, \tau) \models p \approx q$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash_{ec} p \approx q$.*

Corollary 90. *Sea (Σ, τ) una teoría ecuacional. Si $(\Sigma, \tau) \vdash p \approx q$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash_{ec} p \approx q$.*

5 La aritmética de Peano

Lemma 91. *$\boldsymbol{\omega}$ es un modelo de Arit.*

Proof. Sea $\psi =_d \psi(v_1, ..., v_n, v)$, fórmula de τ_A. Veremos que $\omega \vDash Ind_\psi$. Sea

$\varphi = ((\psi(\vec{v}, 0) \wedge \forall v\ (\psi(\vec{v}, v) \rightarrow \psi(\vec{v}, v+1))) \rightarrow \forall v\ \psi(\vec{v}, v))$

Declaremos $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n)$. Notese que $\omega \vDash Ind_\psi$ si y solo si para cada $a_1, ..., a_n \in \omega$ se tiene que $\omega \vDash \varphi[\vec{a}]$. Sean $a_1, ..., a_n \in \omega$ fijos. Probaremos que $\omega \vDash \varphi[\vec{a}]$. Notar que si $\omega \nvDash (\psi(\vec{v}, 0) \wedge \forall v\ (\psi(\vec{v}, v) \rightarrow \psi(\vec{v}, v+1)))[\vec{a}]$

entonces $\omega \vDash \varphi[\vec{a}]$ por lo cual podemos hacer solo el caso en que $\omega \vDash (\psi(\vec{v}, 0) \wedge \forall v\ (\psi(\vec{v}, v) \rightarrow \psi(\vec{v}, v+1)))[\vec{a}]$

Sea $S = \{a \in \omega : \omega \vDash \psi(\vec{v}, v)[\vec{a}, a]\}$. Ya que $\omega \vDash \psi(\vec{v}, 0)[\vec{a}]$, es facil ver usando el lema de reemplazo que $\omega \vDash \psi(\vec{v}, v)[\vec{a}, 0]$, lo cual nos dice que $0 \in S$. Ya que $\omega \vDash (\forall v\ (\psi(\vec{v}, v) \rightarrow \psi(\vec{v}, v+1)))[\vec{a}]$, tenemos que (1) Para cada $a \in \omega$, si $\omega \vDash \psi(\vec{v}, v)[\vec{a}, a]$, entonces $\omega \vDash \psi(\vec{v}, v+1)[\vec{a}, a]$. Pero por el lema de reemplazo, tenemos que $\omega \vDash \psi(\vec{v}, v+1)[\vec{a}, a]$ sii $\omega \vDash \psi(\vec{v}, v)[\vec{a}, a+1]$, lo cual nos dice que

(2) Para cada $a \in \omega$, si $\omega \vDash \psi(\vec{v}, v)[\vec{a}, a]$, entonces $\omega \vDash \psi(\vec{v}, v)[\vec{a}, a+1]$. Ya que (2) nos dice que $a \in S$ implica $a + 1 \in S$, tenemos que $S = \omega$ ya que $0 \in S$. Es decir que para cada $a \in \omega$, se da que $\omega \vDash \psi(\vec{v}, v)[\vec{a}, a]$ lo cual nos dice que $\omega \vDash \forall v\ \psi(\vec{v}, v)[\vec{a}]$.

Es rutina probar que ω satisface los otros 15 axiomas de *Arit*. □ □

Proposition 92. *Hay un modelo de Arit el cual no es isomorfo a $\boldsymbol{\omega}$.*

Proof. Sea $\tau = (\{0, 1, \blacktriangle\}, \{+^2, .^2\}, \{\leq^2\}, a)$ y sea $\Sigma = \Sigma_A \cup \{\neg(\widehat{n} \equiv \blacktriangle) : n \in \omega\}$. Por el Teorema de Compacidad la teoria (Σ, τ) tiene un modelo $\mathbf{A} = (A, i)$. Ya que

$\mathbf{A} \vDash \neg(\widehat{n} \equiv \blacktriangle)$, para cada $n \in \omega$

tenemos que $i(\blacktriangle) \neq \widehat{n}^{\mathbf{A}}$, para cada $n \in \omega$

Por el Lema de Coincidencia la estructura $\mathbf{B} = (A, i\ |_{\{0,1,+,.,\leq\}})$ es un modelo de *Arit*. Ademas dicho lema nos garantiza que $\widehat{n}^{\mathbf{B}} = \widehat{n}^{\mathbf{A}}$, para cada $n \in \omega$, por lo cual tenemos que $i(\blacktriangle) \neq \widehat{n}^{\mathbf{B}}$, para cada $n \in \omega$

Veamos que $\mathbf{B}$ no es isomorfo a ω. Supongamos $F : \omega \rightarrow A$ es un isomorfismo de ω en $\mathbf{B}$. Es facil de probar por induccion en n que $F(n) = \widehat{n}^{\mathbf{B}}$, para cada $n \in \omega$. Pero esto produce un absurdo ya que nos dice que $i(\blacktriangle)$ no esta en la imagen de F. □ □

Lemma 93. *Las siguientes sentencias son teoremas de la aritmética de Peano:*

(a) $\forall x\ 0 \leq x$

(b) $\forall x\ (x \leq 0 \rightarrow x \equiv 0)$

(c) $\forall x \forall y\ (x + y \equiv 0 \rightarrow (x \equiv 0 \wedge y \equiv 0))$

(d) $\forall x\ (\neg(x \equiv 0) \rightarrow \exists z\ (x \equiv z + 1))$

(e) $\forall x \forall y\ (x < y \rightarrow x + 1 \leq y)$

(f) $\forall x \forall y\ (x < y + 1 \rightarrow x \leq y)$

(g) $\forall x \forall y\ (x \leq y + 1 \rightarrow (x \leq y \vee x \equiv y + 1))$

(h) $\forall x \forall y\ (\neg y \equiv 0 \rightarrow \exists q \exists r\ x \equiv q.y + r \wedge r < y)$

Proof. (a) Prueba para $\forall x\ 0 \leq x$:

(b) Prueba para $\forall x\ (x \leq 0 \rightarrow x \equiv 0)$:

1.	$x_0 \leq 0$	HIPOTESIS1
2.	$\forall x\ 0 \leq x$	TEOREMA
3.	$0 \leq x_0$	PARTICULARIZACION(2)
4.	$x_0 \leq 0 \wedge 0 \leq x_0$	CONJUNCIONINTRODUCCION$(1,3)$
5.	$\forall x_1 \forall x_2\ ((x_1 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_1) \rightarrow x_1 \equiv x_2)$	AXIOMAPROPIO
6.	$\forall x_2\ ((x_0 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_0) \rightarrow x_0 \equiv x_2)$	PARTICULARIZACION(5)
7.	$((x_0 \leq 0 \wedge 0 \leq x_0) \rightarrow x_0 \equiv 0)$	PARTICULARIZACION(6)
8.	$x_0 \equiv 0$	TESIS1MODUSPONENS$(4,7)$
9.	$x_0 \leq 0 \rightarrow x_0 \equiv 0$	CONCLUSION
10.	$\forall x\ (x \leq 0 \rightarrow x \equiv 0)$	GENERALIZACION(9)

(c) Prueba para $\forall x \forall y\ (x + y \equiv 0 \rightarrow (x \equiv 0 \wedge y \equiv 0))$:

1.	$x_0 + y_0 \equiv 0$	HIPOTESIS1
2.	$(x_0 + y_0 \equiv 0 \leftrightarrow 0 \equiv x_0 + y_0)$	AXIOMALOGICO
3.	$0 \equiv x_0 + y_0$	REEMPLAZO(1,2)
4.	$\exists X_3\ (0 \equiv x_0 + X_3)$	EXISTENCIAL(3)
5.	$\forall x_1 \forall x_2\ (x_1 \leq x_2 \leftrightarrow \exists x_3\ x_2 \equiv x_1 + x_3)$	PARTICULARIZACION(2)
6.	$x_0 \leq 0$	CONJUNCIONINTRODUCCION$(1,3)$
7.	$\forall x_1 \forall x_2\ ((x_1 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_1) \rightarrow x_1 \equiv x_2)$	AXIOMAPROPIO
8.	$\forall x_2\ ((x_0 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_0) \rightarrow x_0 \equiv x_2)$	PARTICULARIZACION(5)
9.	$((x_0 \leq 0 \wedge 0 \leq x_0) \rightarrow x_0 \equiv 0)$	PARTICULARIZACION(6)
10.	$x_0 \equiv 0$	TESIS1MODUSPONENS$(4,7)$
11.	$x_0 \leq 0 \rightarrow x_0 \equiv 0$	CONCLUSION
12.	$\forall x\ (x \leq 0 \rightarrow x \equiv 0)$	GENERALIZACION(9)

(d) Prueba para $\forall x\ (\neg(x \equiv 0) \rightarrow \exists z\ (x \equiv z + 1))$:

(e) Prueba para $\forall x \forall y\ (x < y \rightarrow x + 1 \leq y)$:

(f) Prueba para $\forall x \forall y\ (x < y + 1 \rightarrow x \leq y)$:

(g) Prueba para $\forall x \forall y\ (x \leq y + 1 \rightarrow (x \leq y \vee x \equiv y + 1))$:

(h) Prueba para $\forall x \forall y\ (\neg y \equiv 0 \rightarrow \exists q \exists r\ x \equiv q.y + r \wedge r < y)$:

$\square$

Lemma 94. *Sean $n, m \in \omega$. Las siguientes sentencias son teoremas de la aritmética de Peano:*

1. $(+(\widehat{n}, \widehat{m}) \equiv \widehat{n+m})$
2. $(.(\widehat{n}, \widehat{m}) \equiv \widehat{n.m})$
3. $\forall x\ (x \leq \widehat{n} \rightarrow (x \equiv \widehat{0} \vee x \equiv \widehat{1} \vee \ldots \vee x \equiv \widehat{n}))$

Lemma 95. *Para cada término cerrado t, tenemos que $Arit \vdash (t \equiv \widehat{t^\omega})$.*

Lemma 96. *Si φ es una sentencia atómica o negación de atómica y $\boldsymbol{\omega} \models \varphi$, entonces $Arit \vdash \varphi$.*

Proof. Hay dos casos. Supongamos $\varphi = (t \equiv s)$, con t, s terminos cerrados. Ya que $\omega \models \varphi$, tenemos que $t^\omega = s^\omega$ y por lo tanto $\widehat{t^\omega} = \widehat{s^\omega}$. Por el lema anterior tenemos que $Arit \vdash (t \equiv \widehat{t^\omega}), (s \equiv \widehat{s^\omega})$ lo cual, ya que $\widehat{t^\omega}$ y $\widehat{s^\omega}$ son el mismo termino nos dice por la regla de transitividad que $Arit \vdash (t \equiv s)$. Supongamos $\varphi = (t \leq s)$, con t, s terminos cerrados. Ya que $\omega \models \varphi$, tenemos que $t^\omega \leq s^\omega$ y por lo tanto hay un $k \in \omega$ tal que $t^\omega + k = s^\omega$. Se tiene entonces que $\widehat{t^\omega + k} = \widehat{s^\omega}$. Por el lema anterior tenemos que $Arit \vdash +(\widehat{t^\omega}, \widehat{k}) \equiv \widehat{t^\omega + k}$ lo cual nos dice que

$Arit \vdash +(\widehat{t^\omega}, \widehat{k}) \equiv \widehat{s^\omega}$

Pero el lema anterior nos dice que $Arit \vdash (t \equiv \widehat{t^\omega}), (s \equiv \widehat{s^\omega})$

y por lo tanto la regla de reemplazo nos asegura que $Arit \vdash +(t, \widehat{k}) \equiv s$. Ya que $\forall x_1 \forall x_2\ (x_1 \leq x_2 \leftrightarrow \exists x_3\ x_2 \equiv x_1 + x_3)$

es un axioma de *Arit*, tenemos que $Arit \vdash (t \leq s)$. $\square$

Lemma 97. *Sea* $\varphi =_d \varphi(\vec{v}, v) \in F^{\tau_A}$. *Supongamos* v *es sustituible por* w *en* φ *y* $w \notin \{v_1, \ldots, v_n\}$, *entonces:*

$$Arit \vdash \forall \vec{v}((\varphi(\vec{v}, 0) \wedge \forall v(\forall w(w < v \rightarrow \varphi(\vec{v}, w)) \rightarrow \varphi(\vec{v}, v))) \rightarrow \forall v \varphi(\vec{v}, v))$$

Proof. Sea $\tilde{\varphi} = \forall w(w \leq v \rightarrow \varphi(\vec{v}, w))$. Notar que $\tilde{\varphi} =_d \tilde{\varphi}(\vec{v}, v)$. Sea $IndCom_\varphi$ la sentencia

$\forall \vec{v}((\varphi(\vec{v}, 0) \wedge \forall v(\forall w(w < v \rightarrow \varphi(\vec{v}, w)) \rightarrow \varphi(\vec{v}, v))) \rightarrow \forall v \varphi(\vec{v}, v))$

Salvo por el uso de algunos teoremas simples y el uso simultaneo de las reglas de particularizacion y generalizacion, la siguiente es la prueba buscada

1.	$(\varphi(\vec{c},0) \wedge \forall v(\forall w(w < v \to \varphi(\vec{c},w)) \to \varphi(\vec{c},v))$	HIPOTESIS1
2.	$w_0 \leq 0$	HIPOTESIS2
3.	$\forall x\ (x \leq 0 \to x \equiv 0)$	TEOREMA
4.	$w_0 \leq 0 \to w_0 \equiv 0$	PARTICULARIZACION(3)
5.	$w_0 \equiv 0$	MODUSPONENS$(2,4)$
6.	$\varphi(\vec{c},0)$	CONJUNCIONELIMINACION(1
7.	$\varphi(\vec{c},w_0)$	TESIS2REEMPLAZO$(5,6)$
8.	$w_0 \leq 0 \to \varphi(\vec{c},w_0)$	CONCLUSION
9.	$\tilde{\varphi}(\vec{c},0)$	GENERALIZACION(8)
10.	$\tilde{\varphi}(\vec{c},v_0)$	HIPOTESIS3
11.	$w_0 < v_0 + 1$	HIPOTESIS4
12.	$\forall x, y\ x < y + 1 \to x \leq y$	TEOREMA
13.	$w_0 < v_0 + 1 \to w_0 \leq v_0$	PARTICULARIZACION(12)
14.	$w_0 \leq v_0$	MODUSPONENS$(11,13)$
15.	$w_0 \leq v_0 \to \varphi(\vec{c},w_0)$	PARTICULARIZACION(10)
16.	$\varphi(\vec{c},w_0)$	TESIS4MODUSPONENS$(14,15)$
17.	$w_0 < v_0 + 1 \to \varphi(\vec{c},w_0)$	CONCLUSION
18.	$\forall w\ w < v_0 + 1 \to \varphi(\vec{c},w)$	GENERALIZACION(17)
19.	$\forall v(\forall w(w < v \to \varphi(\vec{c},w)) \to \varphi(\vec{c},v))$	CONJUNCIONELIMINACION(1
20.	$(\forall w(w < v_0 + 1 \to \varphi(\vec{c},w)) \to \varphi(\vec{c},v_0+1))$	PARTICULARIZACION(19)
21.	$\varphi(\vec{c},v_0+1)$	MODUSPONENS$(18,20)$
22.	$w_0 \leq v_0 + 1$	HIPOTESIS5
23.	$\forall x, y\ x \leq y + 1 \to (x \leq y \vee x \equiv y + 1)$	TEOREMA
24.	$w_0 \leq v_0 + 1 \to (w_0 \leq v_0 \vee w_0 \equiv v_0 + 1)$	PARTICULARIZACION(23)
25.	$(w_0 \leq v_0 \vee w_0 \equiv v_0 + 1)$	MODUSPONENS$(22,24)$
26.	$w_0 \leq v_0 \to \varphi(\vec{c},w_0)$	PARTICULARIZACION(10)
27.	$w_0 \equiv v_0 + 1$	HIPOTESIS6
28.	$\varphi(\vec{c},w_0)$	TESIS6REEMPLAZO$(21,27)$
29.	$w_0 \equiv v_0 + 1 \to \varphi(\vec{c},w_0)$	CONCLUSION
30.	$\varphi(\vec{c},w_0)$	TESIS5DISJUNCIONELIMINACI
31.	$w_0 \leq v_0 + 1 \to \varphi(\vec{c},w_0)$	CONCLUSION
32.	$\tilde{\varphi}(\vec{c},v_0+1)$	TESIS3GENERALIZACION(31)
33.	$\tilde{\varphi}(\vec{c},v_0) \to \tilde{\varphi}(\vec{c},v_0+1)$	CONCLUSION
34.	$\forall v\tilde{\varphi}(\vec{c},v) \to \tilde{\varphi}(\vec{c},v+1)$	GENERALIZACION(33)
35.	$\tilde{\varphi}(\vec{c},0) \wedge \forall v\tilde{\varphi}(\vec{c},v) \to \tilde{\varphi}(\vec{c},v+1)$	CONJUNCIONINTRODUCCION
36.	$Ind_{\tilde{\varphi}}$	AXIOMAPROPIO
37.	$(\tilde{\varphi}(\vec{c},0) \wedge \forall v(\tilde{\varphi}(\vec{c},v) \to \tilde{\varphi}(\vec{c},v+1)) \to \forall v\tilde{\varphi}(\vec{c},v)$	PARTICULARIZACION(36)
38.	$\forall v\tilde{\varphi}(\vec{c},v)$	MODUSPONENS$(35,37)$
39.	$\tilde{\varphi}(\vec{c},v_0)$	PARTICULARIZACION(38)
40.	$v_0 \leq v_0 \to \varphi(\vec{c},v_0)$	PARTICULARIZACION(39)
41.	$\forall x\ x \leq x$	AXIOMAPROPIO
42.	$v_0 \leq v_0$	PARTICULARIZACION(41)
43.	$\varphi(\vec{c},v_0)$	MODUSPONENS$(40,42)$
44.	$\forall v\varphi(\vec{c},v)$	TESIS1GENERALIZACION(43)
45.	$(\varphi(\vec{c},0) \wedge \forall v(\forall w(w < v \to \varphi(\vec{c},w)) \to \varphi(\vec{c},v))) \to \forall v\varphi(\vec{c},v)$	CONCLUSION
46.	$IndCom_{\varphi}$	GENERALIZACION(45)

$\square$

Lemma 98. *Los conjuntos* $T^{\tau^e_A}, F^{\tau^e_A}, T^{\tau_A}$ *y* F^{τ_A} *son* $\mathcal{A}$*-recursivos.*

Proof. Notese que los conjuntos $T^{\tau_A^e}$, $F^{\tau_A^e}$, T^{τ_A} y F^{τ_A} son $\mathcal{A}$-efectivamente computables (justifique). Entonces la Tesis de Church nos garantiza que dichos conjuntos son $\mathcal{A}$-recursivos.
A continuacion daremos una prueba de que dichos conjuntos son en realidad $\mathcal{A}$-primitivos recursivos.

Veamos que $T^{\tau_A^e}$ es A-p.r. Fijemos un orden total estricto $<$ sobre A. Sea $P = \lambda x[*^<(x) \in T^{\tau_A^e}]$. Notese que $P(0) = 0$ y $P(x+1) = 1$ si y solo si se da alguna de las siguientes

- $*^<(x+1) \in \{0,1\} \cup Aux$ - $(\exists u, v \in \omega) *^<(x+1) = +(*^<(u), *^<(v)) \wedge (P^{\downarrow}(x))_{u+1} \wedge (P^{\downarrow}(x))_{v+1}$ - $(\exists u, v \in \omega) *^< (x+1) = .(*^<(u), *^<(v)) \wedge (P^{\downarrow}(x))_{u+1} \wedge (P^{\downarrow}(x))_{v+1}$ Por el Lema 48 tenemos que P es A-p.r., por lo cual $\chi_{T^{\tau_A^e}} = P \circ \#^<$ lo es. Notese que

$t \in T^{\tau_A}$sii $t \in T^{\tau_A^e} \wedge \triangle$no ocurre en $t \wedge \square$no ocurre en t

por lo cual T^{τ_A} es A-p.r. □

Lemma 99. *Los siguientes predicados son $\mathcal{A}$-recursivos:*

(a) "v ocurre libremente en φ a partir de i": $\omega \times Var \times F^{\tau_A^e} \to \omega$

(b) "$v \in Li(\varphi)$": $Var \times F^{\tau_A^e} \to \omega$

(c) "v es sustituible por t en φ": $Var \times T^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \to \omega$

Proof. (1). Veamos que $P : \omega \times Var \times F^{\tau_A^e} \to \omega$, dado por

$$P(i,v,\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \text{ ocurre libremente en } \varphi \text{a partir de } i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

es B-p.r.. Sea $R : \omega \times Var \to \omega$ el predicado dado por $R(x,v) = 1$ si y solo si $*^<((x)_1) \in F^{\tau_A^e}$ y v ocurre libremente en $*^< ((x)_1)$ a partir de $(x)_2$. Sea Nex $= \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$. Notese que $F_0^{\tau_A^e}$ es A-p.r. ya que $F_0^{\tau_A^e} = F^{\tau_A^e} \cap (A - \{\forall, \exists, \neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\})^*$

Notese que $R(0,v) = 0$, para cada $v \in Var$ y que $R(x+1,v) = 1$ si y solo si $(x+1)_2 \geq 1$ y se da alguna de las siguientes: - $*^<((x+1)_1) \in F_0^{\tau_A^e} \wedge v$ ocurre en $*^<((x+1)_1)$ a partir de $(x+1)_2$ - $(\exists \varphi_1, \varphi_2 \in F^{\tau_A^e})(\exists \eta \in \text{Nex}) *^<((x+1)_1) = (\varphi_1 \eta \varphi_2) \wedge$ $\Big((R^{\downarrow}(x,v))_{\langle \#^<(\varphi_1),(x+1)_2-1\rangle+1} \vee (R^{\downarrow}(x,v))_{\langle \#$

- $(\exists \varphi_1 \in F^{\tau_A^e}) *^<((x+1)_1) = \neg\varphi_1 \wedge (R^{\downarrow}(x,v))_{\langle \#^<(\varphi_1),(x+1)_2-1\rangle+1}$ - $(\exists \varphi_1 \in F^{\tau_A^e})(\exists w \in Var)(Q \in \{\forall, \exists\})\ w \neq v \wedge$ $*^<((x+1)_1) = Qw\varphi_1 \wedge (R^{\downarrow}(x,v))_{\langle \#^<(\varphi_1),(x+1)_2-|(Qw|\rangle+1}$

Es decir que por el Lema 48 tenemos que R es A -p.r.. Notese que para $(i,v,\varphi) \in \omega \times Var \times F^{\tau_A^e}$, tenemos $P(i,v,\varphi) = R(\langle \#^<(\varphi), i\rangle, v)$. Ahora es facil obtener la funcion P haciendo composiciones adecuadas con R. □

Lemma 100. *Las funciones $\lambda svt[\downarrow_v^t (s)]$ y $\lambda\varphi vt[\downarrow_v^t (\varphi)]$ son $\mathcal{A}$-recursivas.*

Proof. Sea $<$ un orden total estricto sobre A. Sea $h : \omega \times Var \times T^{\tau_A^e} \to \omega$ dada por

$$h(x,v,t) = \begin{cases} \#^<(\downarrow_v^t (*^<(x))) & \text{si } *^< (x) \in T^{\tau_A^e} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Sea $P : \omega \times \omega \times Var \times T^{\tau_A^e} \times A^* \to \omega$ tal que $P(A,x,v,t,\alpha) = 1$ si y solo si se da alguna de las siguientes - $*^<(x+1) \notin T^{\tau_A^e} \wedge \alpha = \varepsilon$ - $*^<(x+1) = v \wedge \alpha = t$ - $*^<(x+1) \in (\{0,1\} \cup Aux) - \{v\} \wedge \alpha = *^<(x+1)$ - $(\exists r, s \in T^{\tau_A^e}) *^< (x+1) = +(r,s) \wedge \alpha = +(*^<((A)_{\#^<(r)+1}), *^<((A)_{\#^<(s)+1}))$ - $(\exists r, s \in T^{\tau_A^e}) *^<(x+1) = .(r,s) \wedge \alpha = .(*^<((A)_{\#^<(r)+1}), *^<((A)_{\#^<(s)+1}))$ Notese que $P(h^{\downarrow}(x,v,t), x, v, t, \alpha) = 1$ si y solo si ya sea $*^<(x+1) \notin T^\tau$ y $\alpha = \varepsilon$ o $*^<(x+1) \in T^\tau$ y $\alpha = \downarrow_v^t(*^<(x+1))$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} h(0,v,t) &= 0 \\ h(x+1,v,t) &= \#^<(\min_\alpha^< P(h^{\downarrow}(x,v,t), x, v, t, \alpha)), \end{aligned}$$

por lo cual el Lema 48 nos dice que h es A-p.r. Ahora es facil obtener la funcion $\downarrow_v^t (s) : T^{\tau_A^e} \times Var \times T^{\tau_A^e} \to T^{\tau_A^e}$ haciendo composiciones adecuadas con h. □ □

Lemma 101. *El predicado* $R : F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \to \omega$, *dado por:*

$$R(\varphi, \tilde{\varphi}, \psi_1, \psi_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{\varphi} = \text{ resultado de reemplazar algunas (posiblemente 0)} \\ & \qquad\text{ocurrencias de } \psi_1 \text{ en } \varphi \text{ por } \psi_2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

es $\mathcal{A}$*-recursivo.*

Proof. Sea Nex $= \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$. Sea $<$ un orden total estricto sobre A. Notese que $R(\varphi, \tilde{\varphi}, \psi_1, \psi_2) = 1$ sii se da alguna de las siguientes

- $\varphi = \tilde{\varphi}$ - $(\varphi = \psi_1 \wedge \tilde{\varphi} = \psi_2)$ - $(\exists \varphi_1, \varphi_2, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \in F^{\tau_A^e})(\exists \eta \in \text{Nex})\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2) \wedge \tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1 \eta \tilde{\varphi}_2) \wedge R(\varphi_1, \tilde{\varphi}_1, \psi_1, \psi_2) \wedge R(\varphi_2, \tilde{\varphi}_2, \psi_1, \psi_2)$

- $(\exists \varphi_1, \tilde{\varphi}_1 \in F^{\tau_A^e})\varphi = \neg\varphi_1 \wedge \tilde{\varphi} = \neg\tilde{\varphi}_1 \wedge R(\varphi_1, \tilde{\varphi}_1, \psi_1, \psi_2)$ - $(\exists \varphi_1, \tilde{\varphi}_1 \in F^{\tau_A^e})(\exists v \in Var)(\exists Q \in \{\forall, \exists\})\varphi = Qv\varphi_1 \wedge$ $\tilde{\varphi} = Qv\tilde{\varphi}_1 \wedge R(\varphi_1, \tilde{\varphi}_1, \psi_1, \psi_2)$

Se puede usar lo anterior para ver que $R' : \omega \times F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \to \omega$, dado por

$$R'(x, \psi_1, \psi_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } *^{<}((x)_1), *^{<}((x)_2) \in F^{\tau_A^e} \text{y } *^{<}((x)_2) = \text{resultado de} \\ & \text{reemplazar algunas ocurrencias de } \psi_1 \text{en } *^{<}((x)_1) \text{por } \psi_2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

es A-p.r., via el Lema 48. Finalmente R puede obtenerse haciendo composiciones adecuadas con R'. □

Lemma 102. *Sea* Σ *un alfabeto finito. Sea* $S \subseteq \Sigma^*$ *un conjunto* Σ*-recursivo. El conjunto* S^+ *es* Σ*-recursivo.*

Proof. Notese que $\alpha \in S^+$ si y solo si

$(\exists z \in \mathbb{N})(\forall i \in \mathbb{N})_{i \leq Lt(z)} *^{<}((z)_i) \in S \wedge \alpha = \subset_{i=1}^{Lt(z)} *^{<}((z)_i)$

Dejamos al lector completar los detalles faltantes. □

Lemma 103. *Los conjuntos* $ModPon^{\tau_A^e}, Elect^{\tau_A^e}, Reemp^{\tau_A^e}, ConjInt^{\tau_A^e}, ConjElim^{\tau_A^e}, EquivInt^{\tau_A^e}, DisjElim^{\tau_A^e}, DisjInt^{\tau_A^e}, EquivElim^{\tau_A^e}, Generaliz^{\tau_A^e}, Commut^{\tau_A^e}, Trans^{\tau_A^e}, Exist^{\tau_A^e}, Evoc^{\tau_A^e}, Absur^{\tau_A^e}, DivPorCas^{\tau_A^e}, Partic^{\tau_A^e}$, *son* $\mathcal{A}$*-recursivos.*

Proof. Veamos que $Reem_2^{\tau_A^e}$ es A-p.r.. Sea $Q : F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \to \omega$ el predicado tal que $Q(\varphi, \psi, \sigma) = 1$ si y solo si

$(\exists \alpha \in (\forall Var)^+)(\exists \psi_1, \psi_2 \in F^{\tau_A^e})\ \psi = \alpha(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2) \wedge$ $Li(\psi_1) = Li(\psi_2) \wedge$ $((\forall v \in Var)\ v \notin Li(\psi_1) \vee v\text{ocurre en } \alpha)$ $\wedge R(\varphi, \sigma, \psi$

(R es el predicado dado por el Lema 185). Es facil ver que Q es A-p.r. y que $Reem_2^{\tau_A^e} = Q \mid_{S^{\tau_A^e} \times S^{\tau_A^e} \times S^{\tau_A^e}}$. □ □

Lemma 104. *El predicado "*ψ *se deduce de* φ *por generalización con constante* c*, con respecto a* τ_A^e*":* $S^{\tau_A^e} \times S^{\tau_A^e} \times Aux \to \omega$ *es* $\mathcal{A}$*-recursivo.*

Proof. Notese que ψ se deduce de φ por generalizacion con constante c si y solo si hay una formula γ y una variable v tales que

- $Li(\gamma) = \{v\}$ - cada ocurrencia de v en γ es libre - c no ocurre en γ - $\varphi = \downarrow_v^c(\gamma) \wedge \psi = \forall v\gamma$

El lector podra usando esta equivalencia facilmente justificar que el predicado en cuestion es A-p.r.. □

Lemma 105. *El predicado "*ψ *se deduce de* φ *por elección con constante* e*, con respecto a* τ_A^e*":* $S^{\tau_A^e} \times S^{\tau_A^e} \times Aux \to \omega$ *es* $\mathcal{A}$*-PR.*

Proof. Es claro que el predicado en cuestión es $\mathcal{A}$-efectivamente computable (justifique). Por la Tesis de Church tenemos entonces que dicho predicado es $\mathcal{A}$-recursivo. □

Lemma 106. $AxLog^{\tau_A^e}$ *es* $\mathcal{A}$*-recursivo.*

Proof. Es claro que el conjunto en cuestión es $\mathcal{A}$-efectivamente computable (justifique). Por la Tesis de Church tenemos entonces que dicho predicado es $\mathcal{A}$-recursivo. $\square$

Lemma 107. *Las funciones:*

$$\begin{array}{rcc} S^{\tau_A^e +} & \to & \omega \\ \boldsymbol{\varphi} & \to & n(\boldsymbol{\varphi}) \end{array} \qquad \begin{array}{rcc} \omega \times S^{\tau_A^e +} & \to & S^{\tau_A^e} \cup \{\varepsilon\} \\ (i, \boldsymbol{\varphi}) & \to & \boldsymbol{\varphi}_i \end{array}$$

son $\mathcal{A}$-recursivas.

Proof. Es claro que las funciones en cuestión es $\mathcal{A}$-efectivamente computable (justifique). Por la Tesis de Church tenemos entonces que dicho predicado es $\mathcal{A}$-recursivo. $\square$

Lemma 108. *Just es $\mathcal{B}$-recursivo. Las funciones:*

$$\begin{array}{rcc} Just^{+} & \to & \omega \\ \mathbf{J} & \to & n(\mathbf{J}) \end{array} \qquad \begin{array}{rcc} \omega \times Just^{+} & \to & Just \cup \{\varepsilon\} \\ (i, \mathbf{J}) & \to & \mathbf{J}_i \end{array}$$

son $\mathcal{B}$-recursivas.

Proof. Es claro que las funciones en cuestión es $\mathcal{B}$-efectivamente computable (justifique). Por la Tesis de Church tenemos entonces que dicho predicado es $\mathcal{B}$-recursivas. $\square$

Lemma 109. *El conjunto $\{\mathbf{J} \in Just^{+} : \mathbf{J}$ es balanceada$\}$ es $\mathcal{B}$-recursivo.*

Proof. Es claro que el conjunto en cuestión es $\mathcal{B}$-efectivamente computable (justifique). Por la Tesis de Church tenemos entonces que dicho predicado es $\mathcal{B}$-recursivo. $\square$

Lemma 110. *El predicado*

$$\begin{array}{rcl} \omega \times S^{\tau_A^e} \times S^{\tau_A^e +} \times Just^{+} & \to & \omega \\ (i, \varphi, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J}) & \to & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & si\ (\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})\ es\ adecuado\ y\ \varphi\ es\ hipótesis\ de\ \boldsymbol{\varphi}_i\ en\ (\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J}) \\ 0 & caso\ contrario \end{array} \right. \end{array}$$

es $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-recursivo.

Proof. Es claro que el predicado en cuestión es $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$-efectivamente computable (justifique). Por la Tesis de Church tenemos entonces que dicho predicado es $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$-recursivo. $\square$

Lemma 111. *El predicado*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times S^{\tau_A^e +} \times Just^{+} & \to & \omega \\ (e, d, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J}) & \to & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & si\ (\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})\ es\ adecuado\ y\ e\ depende\ de\ d\ en\ (\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J}) \\ 0 & caso\ contrario \end{array} \right. \end{array}$$

es $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-recursivo.

Proof. Es claro que el predicado en cuestión es $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$-efectivamente computable (justifique). Por la Tesis de Church tenemos entonces que dicho predicado es $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$-recursivo. $\square$

Lemma 112. *Sea (Σ, τ_A) una teoría tal que Σ es $\mathcal{A}$-recursivo (resp. $\mathcal{A}$-RE), entonces $Pruebas_{(\Sigma,\tau_A)}$ es $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-recursivo (resp. $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-RE).*

Proof. Notese que Σ es $\mathcal{A}$-efectivamente computable (resp. $\mathcal{A}$-efectivamente enumerable) (justifique). Usando esto se puede ver que $Pruebas_{(\Sigma,\tau_A)}$ es $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$- efectivamente computable (resp. $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ -efectivamente enumerable) (justifique). Por la Tesis de Church tenemos entonces que $Pruebas_{(\Sigma,\tau_A)}$ es $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$- recursivo (resp. $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$-r.e.). $\square$

Lemma 113. *Si* (Σ,τ_A) *es una teoría tal que* Σ *es* $\mathcal{A}$*-RE., entonces* $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$ *es* $\mathcal{A}$*-RE.*

Proof. Ya que $Pruebas_{(\Sigma,\tau_A)}$ es $(A\cup B)$-r.e. tenemos que hay una funcion $F:\omega\to S^{\tau_A^e+}\times Just^+$ la cual cumple que $p_1^{0,2}\circ F$ y $p_2^{0,2}\circ F$ son $(A\cup B)$-r. y ademas $I_F=Pruebas_{(\Sigma,\tau_A)}$. Sea

$$\begin{array}{rcl} g: S^{\tau_A^e+} & \to & S^{\tau_A^e} \\ \varphi & \to & \varphi_{n(\varphi)} \end{array}$$

Por lemas anteriores g es A-p.r.. Notese que $I_{(g\circ p_1^{0,2}\circ F)}=Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$, lo cual dice que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$ es $(A\cup B)$-r.e.. Por el teorema de independencia del alfabeto tenemos que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$ es A -r.e..
□ □

Lemma 114. *Cualesquiera sean* $z_0,\dots,z_n\in\omega, n\geq 0$*, hay* $x,y\in\omega$*, tales que* $\beta(x,y,i)=z_i, i=0,\dots,n$*.*

Proof. Dados $x,y,m\in\omega$ con $m\geq 1$, usaremos $x\equiv y(m)$ para expresar que x es congruente a y modulo m, es decir para expresar que $x-y$ es divisible por m. Usaremos en esta prueba el Teorema Chino del Resto:

- Dados $m_0,...,m_n,z_0,...,z_n\in\omega$ tales que $m_0,...,m_n$ son coprimos de a pares, hay un $x\in\omega$ tal que $x\equiv z_i(m_i)$, para $i=0,...,n$. Sea $y=\max(z_0,...,z_n,n)!$. Sean $m_i=y(i+1)+1$, $i=0,...,n$. Veamos que $m_0,...,m_n$ son coprimos de a pares. Supongamos p divide a m_i y a m_j con $i<j$. Entonces p divide a $m_j-m_i=y(j-i)$ y ya que p no puede dividir a y, tenemos que p divide a $j-i$. Pero ya que $j-i<n$ tenemos que $p<n$ lo cual es absurdo ya que implicaria que p divide y.

Por el Teorema Chino del Resto hay un x tal que $x\equiv z_i(m_i)$, para $i=0,...,n$. Ya que $z_i<m_i$, tenemos que

$\beta(x,y,i)=r(x,y(i+1)+1)=r(x,m_i)=z_i$, $i=0,...,n$. □

Proposition 115. *Si* h *es* $\emptyset$*-recursiva, entonces* h *es representable.*

Proof. Supongamos $f:S_1\times...\times S_n\to\omega$ y $g:\omega\times\omega\times S_1\times...\times S_n\to\omega$ son representables, con $S_1,...,S_n\subseteq\omega$. Probaremos que $R(f,g):\omega\times S_1\times...\times S_n\to\omega$ lo es. Para esto primero notese que para $t,x_1,...,x_n,z\in\omega$, las siguientes son equivalentes

(1) $R(f,g)(t,\vec{x})=z$ (2) hay $z_0,...,z_t\in\omega$ tales que $\begin{array}{rcl} z_0 & = & f(\vec{x}) \\ z_{i+1} & = & g(z_i,i,\vec{x}),\ i=0,...,t-1 \\ z_t & = & z \end{array}$

(3) hay $x,y\in\omega$ tales que $\begin{array}{rcl} \beta(x,y,0) & = & f(\vec{x}) \\ \beta(x,y,i+1) & = & g(\beta(x,y,i),i,\vec{x}),\ i=0,...,t-1 \\ \beta(x,y,t) & = & z \end{array}$

Sean

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\beta & = & {}_d\varphi_\beta(v_1,v_2,v_3,v) \\ \varphi_f & = & {}_d\varphi_f(v_1,...,v_n,v) \\ \varphi_g & = & {}_d\varphi_g(v_1,...,v_{n+2},v) \end{array}$$

formulas que representen a las funciones β, f y g, respectivamente. Sean $w_1,...,w_{n+1},w$, y_1,y_2,y_3,y_4,z_1,z_2 variables todas distintas y tales que cada una de las variebles libres de φ_β, φ_f y φ_g es sustituible por cada una de las variables $w_1,...,w_{n+1},w$, y_1,y_2,y_3,y_4,z_1,z_2. Sea $\varphi_{R(f,g)}=\varphi_{R(f,g)}(w_1,...,w_{n+1},w)$ la siguiente formula $\exists z_1,z_2\ (\exists y_1\varphi_\beta(z_1,z_2,0,y_1)\wedge\varphi_f(w_2,...,w_{n+1},y_1))\wedge$ $\varphi_\beta(z_1,z_2,w_1,w)\wedge\forall y_2(y_2<w_1\to\exists y_3,y_4\ \varphi_\beta(z_1,z_2,y_2{+}1,y_3)\wedge$ $\varphi_\beta(z_1,z$ $\varphi_g(y_4,y_2,w_2,...,w_{n+1},y_3))$ Es facil usando (3) ver que la formula $\varphi_{R(f,g)}$ representa a $R(f,g)$.

En forma analoga se puede probar que las reglas de composicion y minimizacion preservan representabilidad por lo cual ya que los elementos de $\mathrm{R}_0^\emptyset$ son representables, tenemos que lo es toda funcion $\emptyset$-r. □ □

Lemma 116. *Hay un predicado* $P:\omega\times\omega\to\omega$ *el cual es* $\emptyset$*-PR y tal que el predicado* $Q=\lambda x\,[(\exists t\in\omega)P(t,x)]:\omega\to\omega$ *no es* $\emptyset$*-recursivo.*

Proof. Sea $\Sigma = \Sigma_p$. Recordemos que el predicado

$P_1 = \lambda t\mathcal{P}\left[i^{0,1}(t,\mathcal{P},\mathcal{P}) = n(\mathcal{P})+1\right]$

es Σ_p-p.r. ya que la funcion $i^{0,1}$ lo es. Notese que el dominio de P_1 es $\omega \times \mathrm{Pro}^{\Sigma_p}$. Por Lema 69 (de la materia de lenguajes) tenemos que $Halt^{\Sigma_p} = \lambda\mathcal{P}\left[(\exists t \in \omega)\ P_1(t,\mathcal{P})\right]$

no es Σ_p-recursivo. Sea $<$ un orden total sobre Σ_p. Definamos $P : \omega \times \omega \to \omega$ de la siguiente manera $P(t,x) = \begin{cases} P_1(t, *^{<}(x)) & \text{si} \quad *^{<}(x) \in \mathrm{Pro}^{\Sigma_p} \\ 0 & \text{si} \quad *^{<}(x) \notin \mathrm{Pro}^{\Sigma_p} \end{cases}$

Claramente P es Σ_p-p.r., por lo cual es $\emptyset$-p.r.. Sea $Q = \lambda x\left[(\exists t \in \omega)P(t,x)\right]$. Notese que $Halt^{\Sigma_p} = Q \circ \#^{<}|_{\mathrm{Pro}^{\Sigma_p}}$

lo cual dice que Q no es Σ_p-r. ya que de serlo, el predicado $Halt^{\Sigma_p}$ lo seria. Por el teorema de independencia del alfabeto tenemos entonces que Q no es $\emptyset$-recursivo. □

Lemma 117. *No toda función representable es $\emptyset$-recursiva.*

Proof. HACER! □

Lemma 118. *Si $Verd_\omega$ es $\mathcal{A}$-RE, entonces es $\mathcal{A}$-recursivo.*

Proof. Supongamos $Verd_\omega$ es A-r. e. Sea $f : \omega \to Verd_\omega$ una funcion sobre y A-r. Sea $g : S^{\tau_A} \to S^{\tau_A}$, dada por

$g(\varphi) = \begin{cases} \frown\varphi & \text{si} \ [\varphi]_1 = \neg \\ \neg\varphi & \text{caso contrario} \end{cases}$

Notar que g es A-p.r. por lo cual $g \circ f$ es A-r. Ya que $I_{g\circ f} = S^{\tau_A} - Verd_\omega$ (justifique), tenemos que $S^{\tau_A} - Verd_\omega$ es A-r. e., por lo cual $A^* - Verd_\omega = (A^* - S^{\tau_A}) \cup (S^{\tau_A} - Verd_\omega)$

lo es. Es decir que $Verd_\omega$ y su complemento son A-r.e. por lo cual $Verd_\omega$ es A-r. □

Lemma 119. *$Verd_\omega$ no es $\mathcal{A}$-RE.*

Proof. Por el Lema 200 hay un predicado $\emptyset$-p.r., $P : \omega \times \omega \to \omega$ tal que el predicado $Q = \lambda x\left[(\exists t \in \omega)P(t,x)\right] : \omega \to \omega$ no es $\emptyset$-recursivo. Notese que Q tampoco es A-recursivo. Ya que P es representable, hay una formula $\varphi =_d \varphi(v_1, v_2, v) \in F^{\tau_A}$ la cual cumple

$\omega \models \varphi\,[t,x,k]$ si y solo si $P(t,x) = k$,

cualesquiera sean $t,x,k \in \omega$. Sea $\psi = \varphi(v_1, v_2, 1)$. Notese que $\psi =_d \psi(v_1,v_2)$ y que $\omega \models \psi\,[t,x]$ si y solo si $P(t,x) = 1$,

cualesquiera sean $t,x \in \omega$. Sea $\psi_0 = \exists v_1\ \psi(v_1,v_2)$. Notese que $\psi_0 =_d \psi_0(v_2)$ y que $\omega \models \psi_0\,[x]$ si y solo si $Q(x) = 1$

cualesquiera sea $x \in \omega$. Por el lema de reemplazo tenemos que para $x \in \omega$, $\omega \models \psi_0\,[x]$ si y solo si $\omega \models \psi_0(\widehat{x})$

(justifique), por lo cual $\omega \models \psi_0(\widehat{x})$si y solo si $Q(x) = 1$

cualesquiera sea $x \in \omega$. Ya que $\psi_0(\widehat{x})$ es una sentencia, $\psi_0(\widehat{x}) \in Verd_\omega$si y solo si $Q(x) = 1$

Sea $h : \omega \to A^*$, dada por $h(x) = \psi_0(\widehat{x})$. Es facil ver que h es A-recursiva. Ya que $Q = \chi_{Verd_\omega} \circ h$ y Q no es A-recursivo, tenemos que χ_{Verd_ω} no es A-recursiva, es decir que $Verd_\omega$ es un conjunto no A-recursivo. El lema anterior nos dice entonces que es $Verd_\omega$ no es A-r.e.. □

Theorem 120. ***(Incompletitud) (Godel).*** *Si $\Sigma \subseteq Verd_\omega$ es $\mathcal{A}$-RE, entonces $Teo_{(\Sigma,\tau_A)} \subsetneq Verd_\omega$.*

Proof. Por el Teorema de Correccion, tenemos que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)} \subseteq Verd_\omega$. Ya que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$ es A-r.e y $Verd_\omega$ no lo es, tenemos que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)} \neq Verd_\omega$. □ □

Corollary 121. *Existe $\varphi \in S^{\tau_A}$ tal que $Arit \nvdash \varphi$ y $Arit \nvdash \neg\varphi$.*

Proof. Dejamos al lector la prueba de que el conjunto Σ_A es $\mathcal{A}$ -r.e.. Una ves probado esto, podemos aplicar el teorema anterior a la teoria $Arit = (\Sigma_A, \tau_A)$, lo cual nos dice que $Teo_{Arit} \subsetneq Verd_\omega$. Sea $\varphi \in Verd_\omega - Teo_{Arit}$. O sea que $Arit \nvdash \varphi$ y $\varphi \in Verd_\omega$. Ya que $\neg\varphi \notin Verd_\omega$, tenemos que $\neg\varphi \notin Teo_{Arit}$, es decir $Arit \nvdash \neg\varphi$. □