Resumen de teoremas para el final de Lógica

Agustín Curto, agucurto95@gmail.com

2017

Contents

Nota: Este resumen se corresponde con la materia dictada en el año 2017. El autor no se responsabiliza de posibles cambios que pudiesen realizarse en los temas dictados en la misma, así como tampoco de errores involuntarios que pudiesen existir en dicho resumen.

Por favor, mejorá este documento en github

https://github.com/ResumenesFaMAF/resumenLogica

1 Estructuras algebráicas ordenadas

Lemma 1. *Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Supongamos que F es un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$, entonces:*

*a) Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que a es **cota superior** (resp. **inferior**) de S si y solo si $F(a)$ es **cota superior** (resp. **inferior**) de $F(S)$.*

b) Para cada $S \subseteq P$, se tiene que existe $\sup(S)$ si y solo si existe $\sup(F(S))$ y en el caso de que existan tales elementos se tiene que $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$.

c) P tiene 1 (resp. 0) si y solo si P' tiene 1 (resp. 0) y en tal caso tales elementos están conectados por F.

*d) Para cada $m \in P$, m es **maximal** (resp. **minimal**) si y solo si $F(m)$ es **maximal** (resp. **minimal**).*

e) Para $a, b \in P$, tenemos que $a \prec b$ si y solo si $F(a) \prec' F(b)$.

Proof. a) Probaremos solo el caso de la **cota superior**.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que a es **cota superior** de S, veamos entonces que $F(a)$ es **cota superior** de $F(S)$. Sean:

- $x \in F(S)$
- $s \in S$ tal que $x = F(s)$.

Ya que $s \leq a$, tenemos que $x = F(s) \leq' F(a)$. Luego, $F(a)$ es **cota superior**.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que $F(a)$ es **cota superior** de $F(S)$ y veamos entonces que a es cota superior de S.

Sea $s \in S$, ya que $F(s) \leq' F(a)$, tenemos que $s = F^{-1}(F(s)) \leq' F^{-1}(F(a)) = a$. Por lo tanto, a es **cota superior**.

b) $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos existe $\sup(S)$. Veamos que $F(\sup(S))$ es el supremo de $F(S)$. Por el iniciso (a) $F(\sup(S))$ es cota superior de $F(S)$. Veamos que es la menor de las cotas superiores. Supongamos b' cota superior de $F(S)$, entonces $F^{-1}(b')$ es cota superior de S, es decir, $\sup(S) \leq F^{-1}(b')$, produciendo $F(\sup(S)) \leq' b'$. Por lo tanto, $F(\sup(S))$ es el supremo de $F(S)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos existe $\sup(F(S))$. Veamos que $F^{-1}(\sup(F(S)))$ es el supremo de S. Nuevamente, por el iniciso (a) $F^{-1}(\sup(F(S)))$ es cota superior de S. Veamos que es la menor de las cotas superiores. Supongamos b cota superior de S, entonces $F(b)$ es cota superior de $F(S)$, es decir, $\sup(F(S)) \leq F(b)$, produciendo $F^{-1}(\sup(F(S))) \leq b$. Por lo tanto, $F^{-1}(\sup(F(S)))$ es el supremo de S.

c) Se desprende del inciso (b) tomando $S = P$.

d) Probaremos solo el caso **maximal**.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que m es maximal de $(P, \leq)$. Veamos que $F(m)$ es maximal de $(P', \leq')$. Supongamos que $F(m)$ no es maximal de $(P', \leq')$, es decir, $\exists b' \in P'$ $F(m) <' b'$. Dado que F es isomorfismo:

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(m)) &< F^{-1}(b') \\ m &< F^{-1}(b') \end{aligned}$$

Lo cual es un absurdo, dado que m es maximal de $(P, \leq)$. Por lo tanto, $F(m)$ es maximal de $(P', \leq')$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $F(m)$ es maximal de $(P', \leq')$. Veamos que m es maximal de $(P, \leq)$. Supongamos que m no es maximal de $(P, \leq)$, es decir, $\exists b \in P \; m < b$. Dado que F es isomorfismo:

$$F(m) < F(b)$$

Lo cual es un absurdo, dado que $F(m)$ es maximal de $(P', \leq')$. Por lo tanto, m es maximal de $(P, \leq)$.

e) $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos $a \prec b$, veamos que $F(a) \prec' F(b)$. Debemos ver:

(1) $F(a) <' F(b)$

(2) $\nexists z'$ tal que $F(a) < z' < F(b)$

Ya que $a \prec b$, por definición tenemos: $\boxed{a < b \text{ y } \nexists z \text{ tal que } a < z < b}$ $(\star)$

Dado que la función F es un isomorfismo, se cumple (1). Veamos que se cumple (2), supongamos que $\exists z'$ tal que $F(a) < z' < F(b)$. Luego, nuevamente utilizando que F es isomorfismo, tenemos:

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(a)) < \; & F^{-1}(z') \; < F^{-1}(F(b)) \\ a < \; & F^{-1}(z') \; < b \end{aligned}$$

Lo cual, contradice $(\star)$, el absurdo vino de suponer que $\exists z'$ tal que $F(a) < z' < F(b)$, por lo tanto $\nexists z'$ tal que $F(a) < z' < F(b)$.

Finalmente, dado que se cumplen los puntos (1) y (2), se cumple también $F(a) \prec' F(b)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos $F(a) \prec' F(b)$, veamos que $a \prec b$.

Ya que $F^{-1} : (P', \leq') \to (P, \leq)$ es isomorfismo, por lo ya visto tenemos:

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(a)) \; & \prec \; F^{-1}(F(b)) \\ a \; & \prec \; b \end{aligned}$$

□

Lemma 2. *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y, z, w \in L$, se cumplen las siguientes propiedades:*

(1) $x \leq x \mathsf{s} y$

(2) $x \mathsf{i} y \leq x$

(3) $x \mathsf{s} x = x \mathsf{i} x = x$

(4) $x \mathsf{s} y = y \mathsf{s} x$

(5) $x \mathsf{i} y = y \mathsf{i} x$

(6) $x \leq y \Leftrightarrow x \mathsf{s} y = y \Leftrightarrow x \mathsf{i} y = x$

(7) $x \mathsf{s} (x \mathsf{i} y) = x$

(8) $x \mathsf{i} (x \mathsf{s} y) = x$

(9) $(x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z = x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z)$

(10) $(x \mathsf{i} y) \mathsf{i} z = x \mathsf{i} (y \mathsf{i} z)$

(11) Si $x \leq z$ e $y \leq w$ entonces:

- $x \mathsf{s} y \leq z \mathsf{s} w$
- $x \mathsf{i} y \leq z \mathsf{i} w$

(12) $(x \mathsf{i} y) \mathsf{s} (x \mathsf{i} z) \leq x \mathsf{i} (y \mathsf{s} z)$

Proof. Dado que las propiedades $(1), (2), (3), (4), (5), (6)$, son consecuencia inmediata de las definiciones de s e i, probaremos solo las restantes.

(7)

$$\begin{aligned} x \mathsf{~i~} y \leq x & \quad \text{Por (2)} \\ (x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~s~} x = x & \quad \text{Por (6)} \\ x \mathsf{~s~} (x \mathsf{~i~} y) = x & \quad \text{Por (4)} \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned} x \leq x \mathsf{~s~} y & \quad \text{Por (1)} \\ x \mathsf{~i~} (x \mathsf{~s~} y) = x & \quad \text{Por (6)} \\ x \mathsf{~i~} (y \mathsf{~s~} x) = x & \quad \text{Por (4)} \end{aligned}$$

(9) Para probar la igualdad probaremos las siguientes desigualdades:

- $\boxed{(x \mathsf{~s~} y) \mathsf{~s~} z \leq x \mathsf{~s~} (y \mathsf{~s~} z)}$
  Notese que $x \mathsf{~s~} (y \mathsf{~s~} z)$ es cota superior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$\begin{aligned} x &\leq x \mathsf{~s~} (y \mathsf{~s~} z) \\ y &\leq (y \mathsf{~s~} z) \leq x \mathsf{~s~} (y \mathsf{~s~} z) \\ z &\leq (y \mathsf{~s~} z) \leq x \mathsf{~s~} (y \mathsf{~s~} z) \end{aligned}$$

  Por otro lado, $x \mathsf{~s~} (y \mathsf{~s~} z)$ es cota superior de $\{x, y\}$, tenemos que $x \mathsf{~s~} y \leq x \mathsf{~s~} (y \mathsf{~s~} z)$, por lo cual $x \mathsf{~s~} (y \mathsf{~s~} z)$ es cota superior del conjunto $\{x \mathsf{~s~} y, z\}$, lo cual dice que $(x \mathsf{~s~} y) \mathsf{~s~} z \leq x \mathsf{~s~} (y \mathsf{~s~} z)$.

- $\boxed{(x \mathsf{~s~} y) \mathsf{~s~} z \geq x \mathsf{~s~} (y \mathsf{~s~} z)}$
  Notese que $(x \mathsf{~s~} y) \mathsf{~s~} z$ es cota superior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$\begin{aligned} x &\leq x \mathsf{~s~} y \leq (x \mathsf{~s~} y) \mathsf{~s~} z \\ y &\leq x \mathsf{~s~} y \leq (x \mathsf{~s~} y) \mathsf{~s~} z \\ z &\leq (x \mathsf{~s~} y) \mathsf{~s~} z \end{aligned}$$

  Por otro lado, $(x \mathsf{~s~} y) \mathsf{~s~} z$ es cota superior de $\{y, z\}$, tenemos que $y \mathsf{~s~} z \leq (x \mathsf{~s~} y) \mathsf{~s~} z$, por lo cual $(x \mathsf{~s~} y) \mathsf{~s~} z$ es cota superior del conjunto $\{x, y \mathsf{~s~} z\}$, lo cual dice que $(x \mathsf{~s~} y) \mathsf{~s~} z \geq x \mathsf{~s~} (y \mathsf{~s~} z)$.

Por lo tanto, $(x \mathsf{~s~} y) \mathsf{~s~} z = x \mathsf{~s~} (y \mathsf{~s~} z)$

(10) Para probar la igualdad probaremos las siguientes desigualdades:

- $\boxed{(x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~i~} z \leq x \mathsf{~i~} (y \mathsf{~i~} z)}$
  Notese que $(x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~i~} z$ es cota inferior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$\begin{aligned} (x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~i~} z \leq (x \mathsf{~i~} y) &\leq x \\ (x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~i~} z \leq (x \mathsf{~i~} y) &\leq y \\ (x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~i~} z &\leq z \end{aligned}$$

  Por otro lado, $(x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~i~} z$ es cota inferior de $\{y, z\}$, tenemos que $(x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~i~} z \leq y \mathsf{~i~} z$, por lo cual $(x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~i~} z$ es cota inferior del conjunto $\{x, y \mathsf{~i~} z\}$, lo cual dice que $(x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~i~} z \leq x \mathsf{~i~} (y \mathsf{~i~} z)$.

- $\boxed{(x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~i~} z \geq x \mathsf{~i~} (y \mathsf{~i~} z)}$
  Notese que $x \mathsf{~i~} (y \mathsf{~i~} z)$ es cota inferior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$\begin{aligned} x \mathsf{~i~} (y \mathsf{~i~} z) &\leq x \\ x \mathsf{~i~} (y \mathsf{~i~} z) \leq (y \mathsf{~i~} z) &\leq y \\ x \mathsf{~i~} (y \mathsf{~i~} z) \leq (y \mathsf{~i~} z) &\leq z \end{aligned}$$

Por otro lado, $x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ i\ } z)$ es cota inferior de $\{x, y\}$, tenemos que $x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ i\ } z) \leq x \mathsf{\ i\ } y$, por lo cual $x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ i\ } z)$ es cota inferior del conjunto $\{x \mathsf{\ i\ } y, z\}$, lo cual dice que $(x \mathsf{\ i\ } y) \mathsf{\ i\ } z \geq x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ i\ } z)$.

Por lo tanto, $(x \mathsf{\ i\ } y) \mathsf{\ i\ } z = x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ i\ } z)$

(11)

$$x \leq z \leq z \mathsf{\ s\ } w \qquad\qquad x \leq z \Rightarrow x \mathsf{\ i\ } y \leq z$$
$$y \leq w \leq z \mathsf{\ s\ } w \qquad\qquad y \leq w \Rightarrow x \mathsf{\ i\ } y \leq w$$

Luego, $z \mathsf{\ s\ } w$ es cota superior de $\{x, y\}$ y $x \mathsf{\ i\ } y$ es cota inferior de $\{z, w\}$, por lo tanto, $x \mathsf{\ s\ } y \leq z \mathsf{\ s\ } w$ y $x \mathsf{\ i\ } y \leq z \mathsf{\ i\ } w$.

(12)

$$\left.\begin{array}{l} (x \mathsf{\ i\ } y), (x \mathsf{\ i\ } z) \leq x \\ (x \mathsf{\ i\ } y), (x \mathsf{\ i\ } z) \leq y \mathsf{\ s\ } z \end{array}\right\} \Rightarrow (x \mathsf{\ i\ } y), (x \mathsf{\ i\ } z) \leq x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ s\ } z)$$

$$\therefore (x \mathsf{\ i\ } y) \mathsf{\ s\ } (x \mathsf{\ i\ } z) \leq x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ s\ } z)$$

$\square$

Lemma 3. *Sea $(L, \leq)$ un reticulado, dados elementos $x_1, \ldots, x_n \in L$, con $n \geq 2$, se tiene*

$$\begin{array}{rcl} (\ldots(x_1 \mathsf{\ s\ } x_2) \mathsf{\ s\ } \ldots) \mathsf{\ s\ } x_n & = & \sup(\{x_1, \ldots, x_n\}) \\ (\ldots(x_1 \mathsf{\ i\ } x_2) \mathsf{\ i\ } \ldots) \mathsf{\ i\ } x_n & = & \inf(\{x_1, \ldots, x_n\}) \end{array}$$

Proof. Probaremos por inducción en n.

Caso Base: $\boxed{n = 2}$

$$\begin{array}{rcl} x_1 \mathsf{\ s\ } x_2 & = & \sup(\{x_1, x_2\}) \\ x_1 \mathsf{\ i\ } x_2 & = & \inf(\{x_1, x_2\}) \end{array}$$

Lo cual vale, dado que es la definición.

Caso Inductivo: $\boxed{n > 2}$
Supongamos ahora que vale para n y veamos entonces que vale para $n+1$. Sean $x_1, \ldots, x_{n+1} \in L$, por hipótesis inductiva tenemos que:

$$\begin{array}{rcll} (\ldots(x_1 \mathsf{\ s\ } x_2) \mathsf{\ s\ } \ldots) \mathsf{\ s\ } x_n & = & \sup(\{x_1, \ldots, x_n\}) & (\star_1) \\ (\ldots(x_1 \mathsf{\ i\ } x_2) \mathsf{\ i\ } \ldots) \mathsf{\ i\ } x_n & = & \inf(\{x_1, \ldots, x_n\}) & (\star_2) \end{array}$$

Veamos entonces que vale:

$$\begin{array}{rcll} ((\ldots(x_1 \mathsf{\ s\ } x_2) \mathsf{\ s\ } \ldots) \mathsf{\ s\ } x_n) \mathsf{\ s\ } x_{n+1} & = & \sup(\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}) & (\dagger_1) \\ ((\ldots(x_1 \mathsf{\ i\ } x_2) \mathsf{\ i\ } \ldots) \mathsf{\ i\ } x_n) \mathsf{\ i\ } x_{n+1} & = & \inf(\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}) & (\dagger_2) \end{array}$$

Para ello debemos ver $((\ldots(x_1 \mathsf{\ s\ } x_2) \mathsf{\ s\ } \ldots) \mathsf{\ s\ } x_n) \mathsf{\ s\ } x_{n+1}$ es cota superior de $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ y que es la menor de las cotas superiores. Además, que $((\ldots(x_1 \mathsf{\ i\ } x_2) \mathsf{\ i\ } \ldots) \mathsf{\ i\ } x_n) \mathsf{\ i\ } x_{n+1}$ es cota inferior de $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ y que es la mayor de las cotas inferiores.

Es fácil ver que $((\ldots(x_1 \mathsf{s}\, x_2) \mathsf{s}\, \ldots) \mathsf{s}\, x_n) \mathsf{s}\, x_{n+1}$ es cota superior de $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$. Supongamos que z es otra cota superior de $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$. Ya que z es también cota superior del conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$, por $(\star_1)$ tenemos que:

$$(\ldots(x_1 \mathsf{s}\, x_2) \mathsf{s}\, \ldots) \mathsf{s}\, x_n \leq z$$

Además, dado que $x_{n+1} \leq z$, tenemos que:

$$((\ldots(x_1 \mathsf{s}\, x_2) \mathsf{s}\, \ldots) \mathsf{s}\, x_n) \mathsf{s}\, x_{n+1} \leq z$$

Por lo tanto, vale $(\dagger_1)$.

Nuevamente, es fácil ver que $((\ldots(x_1 \mathsf{i}\, x_2) \mathsf{i}\, \ldots) \mathsf{i}\, x_n) \mathsf{i}\, x_{n+1}$ es cota inferior de $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$. Supongamos que z' es otra cota inferior de $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$. Ya que z' es también cota inferior del conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$, por $(\star_2)$ tenemos que:

$$z' \leq (\ldots(x_1 \mathsf{i}\, x_2) \mathsf{i}\, \ldots) \mathsf{i}\, x_n$$

Además, dado que $z' \leq x_{n+1}$, tenemos que:

$$z' \leq ((\ldots(x_1 \mathsf{i}\, x_2) \mathsf{i}\, \ldots) \mathsf{i}\, x_n) \mathsf{i}\, x_{n+1}$$

Por lo tanto, vale $(\dagger_2)$. $\square$

Theorem 4. *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado, la relación binaria definida por:*

$$x \leq y \Leftrightarrow x \mathsf{s}\, y = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple:

$$\begin{array}{rcl} \sup(\{x, y\}) & = & x \mathsf{s}\, y \\ \inf(\{x, y\}) & = & x \mathsf{i}\, y \end{array}$$

Proof.

- <u>Reflexiva:</u> Sea $x \in L$ un elemento cualquiera. Luego,

$$\left.\begin{array}{r} x \mathsf{s}\, x = x \\ x \mathsf{i}\, x = x \end{array}\right\} \Rightarrow x \leq x$$

- <u>Antisimétrica:</u> Sean $x, y \in L$ elementos cualquieras. Supongamos que $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x \leq y \Rightarrow x \mathsf{s}\, y = y \\ y \leq x \Rightarrow x \mathsf{s}\, y = x \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

- <u>Transitiva:</u> Supongamos que $x \leq y$ e $y \leq z$, es decir, $x \mathsf{s}\, y = y$ y $y \mathsf{s}\, z = z$ entonces:

$$x \mathsf{s}\, z = x \mathsf{s}\, (y \mathsf{s}\, z) = (x \mathsf{s}\, y) \mathsf{s}\, z = y \mathsf{s}\, z = z$$

  por lo cual $x \leq z$.

  Veamos ahora que $\sup(\{x, y\}) = x \mathsf{s}\, y$. Es claro que $x \mathsf{s}\, y$ es una cota superior del conjunto $\{x, y\}$, veamos que es la menor. Supongamos $x, y \leq z$, entonces:

$$(x \mathsf{s}\, y) \mathsf{s}\, z = x \mathsf{s}\, (y \mathsf{s}\, z) = x \mathsf{s}\, z = z$$

por lo que $x \mathsf{s} y \leq z$, es decir, $x \mathsf{s} y$ es la menor cota superior.

Resta probar que $\inf(\{x,y\}) = x \mathsf{i} y$. Nuevamente, es claro que $x \mathsf{i} y$ es una cota inferior del conjunto $\{x,y\}$, veamos que es la mayor. Supongamos $z \leq x, y$, entonces:

$$(x \mathsf{i} y) \mathsf{i} z = x \mathsf{i} (y \mathsf{i} z) = x \mathsf{i} z = z$$

por lo que $z \leq x \mathsf{i} y$, es decir, $x \mathsf{i} y$ es la mayor cota inferior.

□

Lemma 5. *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo.*

Proof. Debemos probar que F^{-1} es un homomorfismo. Sean $F(x), F(y)$ dos elementos cualesquiera de L', tenemos que:

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(x) \mathsf{s}' F(y)) &= F^{-1}(F(x \mathsf{s} y)) \\ &= x \mathsf{s} y \\ &= F^{-1}(F(x)) \mathsf{s} F^{-1}(F(y)) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F^{-1}(F(x) \mathsf{i}' F(y)) &= F^{-1}(F(x \mathsf{i} y)) \\ &= x \mathsf{i} y \\ &= F^{-1}(F(x)) \mathsf{i} F^{-1}(F(y)) \end{aligned}$$

Luego, F^{-1} es homomorfismo y por lo tanto F es isomorfismo. □

Lemma 6. *Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados y sea $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$.*

Proof. Para probar que I_F es un subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$, debemos ver:

- $I_F \neq \emptyset$: Ya que $L \neq \emptyset$, tenemos que $I_F \neq \emptyset$.
- I_F es cerrado bajo la operaciones s' e i': Sean $a, b \in I_F$, $x, y \in L$ tales que $F(x) = a$ y $F(y) = b$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} a \mathsf{s}' b &= F(x) \mathsf{s}' F(y) = F(x \mathsf{s} y) \in I_F \\ a \mathsf{i}' b &= F(x) \mathsf{i}' F(y) = F(x \mathsf{i} y) \in I_F \end{aligned}$$

  por lo cual I_F es cerrada bajo s' e i'.

□

Lemma 7. *Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una función, entonces F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si y solo si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.*

Proof. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$.
<u>Para F</u>: Sean $x, y \in L$ tales que $x \leq y$. Tenemos:

$$\begin{aligned} y &= x \mathsf{s} y \\ F(y) &= F(x \mathsf{s} y) \\ &= F(x) \mathsf{s}' F(y) \\ \therefore F(x) &\leq' F(y) \end{aligned}$$

Para F^{-1}: Sean $x', y' \in L'$ tales que $x' \leq' y'$. Tenemos:

$$\begin{aligned} y' &= x' \;\mathsf{s}'\; y' \\ F^{-1}(y') &= F^{-1}(x' \;\mathsf{s}'\; y') \\ &= F^{-1}(x') \;\mathsf{s}\; F^{-1}(y') \\ \therefore F^{-1}(x') &\leq F^{-1}(y') \end{aligned}$$

Por lo tanto, F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$, entonces el **Lemma 1** nos dice que F y F^{-1} respetan la operaciones de supremo e ínfimo, por lo cual F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$. □

Lemma 8. *Sea $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}})$ un reticulado. El orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado a este reticulado cumple:*

$$x/\theta \;\tilde{\leq}\; y/\theta \Leftrightarrow y \;\theta\; (x \;\mathsf{s}\; y)$$

Proof. Veamos que $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}})$ satisface las 7 identidades de la definición de reticulado. Sean $x/\theta, y/\theta, z/\theta$ elementos cualesquiera de L/θ.

(I1) $\boxed{x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; x/\theta = x/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; x/\theta = x/\theta}$

$$\begin{aligned} x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; x/\theta &= (x \;\mathsf{s}\; x)/\theta = x/\theta \\ x/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; x/\theta &= (x \;\mathsf{i}\; x)/\theta = x/\theta \end{aligned}$$

(I2) $\boxed{x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta = y/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; x/\theta}$

$$\begin{aligned} x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta &= (x \;\mathsf{s}\; y)/\theta \\ &= (y \;\mathsf{s}\; x)/\theta \\ &= y/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta \end{aligned}$$

(I3) $\boxed{x/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; y/\theta = y/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; x/\theta}$

$$\begin{aligned} x/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; y/\theta &= (x \;\mathsf{i}\; y)/\theta \\ &= (y \;\mathsf{i}\; x)/\theta \\ &= y/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; y/\theta \end{aligned}$$

(I4) $\boxed{(x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta) \;\tilde{\mathsf{s}}\; z/\theta = x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; (y/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; z/\theta)}$

$$\begin{aligned} (x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta) \;\tilde{\mathsf{s}}\; z/\theta &= (x \;\mathsf{s}\; y)/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; z/\theta \\ &= ((x \;\mathsf{s}\; y) \;\mathsf{s}\; z)/\theta \\ &= (x \;\mathsf{s}\; (y \;\mathsf{s}\; z))/\theta \\ &= x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; (y \;\mathsf{s}\; z)/\theta \\ &= x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; (y/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; z/\theta) \end{aligned}$$

(I5) $\boxed{(x/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; y/\theta) \;\tilde{\mathsf{i}}\; z/\theta = x/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; (y/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; z/\theta)}$

$$\begin{aligned} (x/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; y/\theta) \;\tilde{\mathsf{i}}\; z/\theta &= (x \;\mathsf{i}\; y)/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; z/\theta \\ &= ((x \;\mathsf{i}\; y) \;\mathsf{i}\; z)/\theta \\ &= (x \;\mathsf{i}\; (y \;\mathsf{i}\; z))/\theta \\ &= x/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; (y \;\mathsf{i}\; z)/\theta \\ &= x/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; (y/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; z/\theta) \end{aligned}$$

(I6) $\boxed{x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; (x/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; y/\theta) = x/\theta}$

$$\begin{aligned} x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; (x/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; y/\theta) &= x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; (x \;\mathsf{i}\; y)/\theta \\ &= (x \;\mathsf{s}\; (x \;\mathsf{i}\; y))/\theta \\ &= x/\theta \end{aligned}$$

(I7) $\boxed{x/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; (x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta) = x/\theta}$

$$\begin{aligned} x/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; (x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta) &= x/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; (x \;\mathsf{s}\; y)/\theta \\ &= (x \;\mathsf{i}\; (x \;\mathsf{s}\; y))/\theta \\ &= x/\theta \end{aligned}$$

Por definición, $x/\theta \;\tilde{\leq}\; y/\theta \Leftrightarrow y/\theta = x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta$, por lo cual $x/\theta \;\tilde{\leq}\; y/\theta \Leftrightarrow y/\theta = (x \;\mathsf{s}\; y)/\theta$ y por lo tanto $y\theta(x \;\mathsf{s}\; y)$. □

Corollary 9. *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado en el cual hay un elemento máximo 1 (resp. mínimo 0), entonces si θ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$, $1/\theta$ (resp. $0/\theta$) es un elemento máximo (resp. mínimo) de $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}})$.*

Proof. Ya que $1 = x \;\mathsf{s}\; 1$ para cada $x \in L$ tenemos que $1/\theta = x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; 1/\theta$, es decir, $1/\theta = (x \;\mathsf{s}\; 1)/\theta$ para cada $x \in L$. Utilizando el **Lemma 8** tenemos que $x/\theta \;\tilde{\leq}\; 1/\theta$, para cada $x \in L$. □

Lemma 10. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ *es un homomorfismo de reticulados, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$.

Proof. Veamos primero que $\ker F$ es una relación de equivalencia.

- Reflexiva: $(x, x) \in \ker F$. Trivial pues $F(x) = F(x)$.
- Simétrica: Si $(x, y) \in \ker F \Rightarrow (y, x) \in \ker F$.
  Si $(x, y) \in \ker F \Rightarrow F(x) = F(y)$. Luego, vale también $F(y) = F(x)$.
- Transitiva: Si $(x, y), (y, z) \in \ker F \Rightarrow (x, z) \in \ker F$.

$$\left.\begin{array}{l} (x,y) \in \ker F \Rightarrow F(x) = F(y) \\ (y,z) \in \ker F \Rightarrow F(y) = F(z) \end{array}\right\} \Rightarrow F(x) = F(y) = F(z)$$

  Por lo tanto, $(x, z) \in \ker F$.

Veamos ahora que, si $x \ \ker F\ x'$ y $y \ \ker F\ y'$ entonces $(x \mathsf{\ s\ } y) \ \ker F\ (x' \mathsf{\ s\ } y')$ y $(x \mathsf{\ i\ } y) \ \ker F\ (x' \mathsf{\ i\ } y')$, es decir, $F(x \mathsf{\ s\ } y) = F(x' \mathsf{\ s\ } y')$ y $F(x \mathsf{\ i\ } y) = F(x' \mathsf{\ i\ } y')$.

Supongamos $x \ \ker F\ x'$ y $y \ \ker F\ y'$, entonces:

$$\begin{aligned} F(x \mathsf{\ s\ } y) &= F(x) \mathsf{\ s'\ } F(y) = F(x') \mathsf{\ s'\ } F(y') = F(x' \mathsf{\ s\ } y') \\ F(x \mathsf{\ i\ } y) &= F(x) \mathsf{\ i'\ } F(y) = F(x') \mathsf{\ i'\ } F(y') = F(x' \mathsf{\ i\ } y') \end{aligned}$$

□

Lemma 11. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado y sea* θ *una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$, *entonces* π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *en* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}})$. *Además* $\ker \pi_\theta = \theta$.

Proof. Sean $x, y \in L$ elementos cualquiera. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \pi_\theta(x \mathsf{\ s\ } y) &= (x \mathsf{\ s\ } y)/\theta = x/\theta \ \tilde{\mathsf{s}}\ y/\theta = \pi_\theta(x) \ \tilde{\mathsf{s}}\ \pi_\theta(y) \\ \pi_\theta(x \mathsf{\ i\ } y) &= (x \mathsf{\ i\ } y)/\theta = x/\theta \ \tilde{\mathsf{i}}\ y/\theta = \pi_\theta(x) \ \tilde{\mathsf{i}}\ \pi_\theta(y) \end{aligned}$$

por lo cual π_θ preserva las operaciones de supremo e ínfimo, es decir, es un homomorfismo. □

Lemma 12. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ *un homomorfismo biyectivo, entonces* F *es un isomorfismo.*

Proof. Debemos probar que F^{-1} es un homomorfismo. Sean $F(x), F(y)$ dos elementos cualesquiera de L', tenemos que:

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(1)) &= F^{-1}(1') \\ F^{-1}(1') &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F^{-1}(F(0)) &= F^{-1}(0') \\ F^{-1}(0') &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(x) \mathsf{\ s'\ } F(y)) &= F^{-1}(F(x \mathsf{\ s\ } y)) \\ &= x \mathsf{\ s\ } y \\ &= F^{-1}(F(x)) \mathsf{\ s\ } F^{-1}(F(y)) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F^{-1}(F(x) \mathsf{\ i'\ } F(y)) &= F^{-1}(F(x \mathsf{\ i\ } y)) \\ &= x \mathsf{\ i\ } y \\ &= F^{-1}(F(x)) \mathsf{\ i\ } F^{-1}(F(y)) \end{aligned}$$

Luego, F^{-1} es homomorfismo y por lo tanto F es isomorfismo. □

Lemma 13. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ *es un homomorfismo, entonces* I_F *es un subuniverso de* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$.

Proof. Para probar que I_F es un subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$, debemos ver:

- $I_F \neq \emptyset$: Ya que $L \neq \emptyset$, tenemos que $I_F \neq \emptyset$.
- Preserva 0 y 1: $0, 1 \in I_F$
- I_F es cerrado bajo la operaciones s' e i': Sean $a, b \in I_F,\ x, y \in L$ tales que $F(x) = a$ y $F(y) = b$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} a \ \mathsf{s}' \ b &= F(x) \ \mathsf{s}' \ F(y) = F(x \ \mathsf{s} \ y) \in I_F \\ a \ \mathsf{i}' \ b &= F(x) \ \mathsf{i}' \ F(y) = F(x \ \mathsf{i} \ y) \in I_F \end{aligned}$$

  por lo cual I_F es cerrada bajo s' e i'.

. □

Lemma 14. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados acotados, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$.

Proof. Dado que F es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ utilizando el **Lemma 10** tenemos que $\ker F$ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ lo cual por definición, nos dice que $\ker F$ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$. □

Lemma 15. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *un reticulado acotado y* θ *una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$*, entonces:*

a) $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ *es un reticulado acotado.*

b) π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *en* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ *cuyo núcleo es* θ.

Proof.

a) Sabemos por el **Lemma 11** que $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ es un reticulado. Además, por el **Lemma ??** se tiene que $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ es un reticulado acotado.

b) Por el **Lemma 11** se tiene que π_θ es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$. Además, dado que $\pi_\theta(1) = 1/\theta$ y $\pi_\theta(0) = 0/\theta$, tenemos que π_θ es homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$.

□

Lemma 16. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'} 0', 1')$ *un homomorfismo biyectivo, entonces* F *es un isomorfismo.*

Proof. Debemos probar que F^{-1} es un homomorfismo. Sean $F(x), F(y)$ dos elementos cualesquiera de L', tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} 1' &=& F(1) \\ F^{-1}(1') &=& F^{-1}(F(1)) \\ F^{-1}(1') &=& 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 0' &=& F(0) \\ F^{-1}(0') &=& F^{-1}(F(0)) \\ F^{-1}(0') &=& 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} F(x) \mathsf{s}' F(y) &=& F(x \mathsf{s} y) \\ F^{-1}(F(x) \mathsf{s}' F(y)) &=& F^{-1}(F(x \mathsf{s} y)) \\ &=& x \mathsf{s} y \\ &=& F^{-1}(F(x)) \mathsf{s} F^{-1}(F(y)) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} F(x) \mathsf{i}' F(y) &=& F(x \mathsf{i} y) \\ F^{-1}(F(x) \mathsf{i}' F(y)) &=& F^{-1}(F(x \mathsf{i} y)) \\ &=& x \mathsf{i} y \\ &=& F^{-1}(F(x)) \mathsf{i} F^{-1}(F(y)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1' &=& F(1) \\ &=& F(x \mathsf{s} x^c) \\ &=& F(x) \mathsf{s}' F(x^c) \\ &=& F(x) \mathsf{s}' F(x)^{c'} \\ F^{-}(1') &=& F^{-1}(F(x) \mathsf{s}' F(x)^{c'}) \\ &=& F^{-1}(F(x)) \mathsf{s} F^{-1}(F(x)^{c'})) \\ F^{-}(1') &=& x \mathsf{s} F^{-1}(F(x)^{c'}) \qquad (\star_1) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 0' &=& F(0) \\ &=& F(x \mathsf{i} x^c) \\ &=& F(x) \mathsf{i}' F(x^c) \\ &=& F(x) \mathsf{i}' F(x)^{c'} \\ F^{-}(0') &=& F^{-1}(F(x) \mathsf{i}' F(x)^{c'}) \\ &=& F^{-1}(F(x)) \mathsf{i} F^{-1}(F(x)^{c'})) \\ F^{-}(0') &=& x \mathsf{i} F^{-1}(F(x)^{c'}) \qquad (\star_2) \end{array}$$

Por lo tanto, de $(\star_1)$ y $(\star_2)$ obtenemos:

$$F^{-1}(F(x)^c) = x^c = F^{-1}(F(x))^c$$

Luego, F^{-1} es homomorfismo y por lo tanto F es isomorfismo. $\square$

Lemma 17. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}',^{c'} 0', 1')$ *es un homomorfismo, entonces* I_F *es un subuniverso de* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}',^{c'} 0', 1')$.

Proof. Para probar que I_F es un subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}',^{c'} 0', 1')$, debemos ver:

- $I_F \neq \emptyset$: Ya que $L \neq \emptyset$, tenemos que $I_F \neq \emptyset$.
- Preserva 0 y 1: $0, 1 \in I_F$
- I_F es cerrado bajo la operaciones s', i' y $^{c'}$: Sean $a, b \in I_F,\ x, y \in L$ tales que $F(x) = a$ y $F(y) = b$. Se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} a \mathsf{s}' b &=& F(x) \mathsf{s}' F(y) = F(x \mathsf{s} y) \in I_F \\ a \mathsf{i}' b &=& F(x) \mathsf{i}' F(y) = F(x \mathsf{i} y) \in I_F \\ a^{c'} &=& F(x)^{c'} = F(x^c) \in I_F \end{array}$$

por lo cual I_F es cerrada bajo s', i' y $^{c'}$:

. $\square$

Lemma 18. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}',^{c'} 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados complementados, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$.

Proof. Ya que F es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}',^{c'} 0', 1')$, tenemos por **Lemma 14** que $kerF$ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$, es decir, solo falta probar que para todos $x, y \in L$ se tiene que $x/kerF = y/kerF$ implica $x^c/kerF = y^c/kerF$, veamos esto. Supongamos $x/kerF = y/kerF$, es decir, por definición tenemos que $F(x) = F(y)$, luego:

$$\begin{aligned} F(x) = F(y) &\Leftrightarrow F(x)^{c'} = F(y)^{c'} \\ &\Leftrightarrow F(x^c) = F(y^c) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x^c/kerF = y^c/kerF$. □

Lemma 19. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$ *un reticulado complementado y sea* θ *una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$.

a) $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath},^c/\theta, 0/\theta, 1/\theta)$ *es un reticulado complementado.*

b) π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$ *en* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath},^c/\theta, 0/\theta, 1/\theta)$ *cuyo núcleo es* θ.

Proof.

a) Sabemos por el **Lemma 11** que $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ es un reticulado acotado, es decir, solo nos falta ver que $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath},^c/\theta, 0/\theta, 1/\theta)$ satisface:

- $\boxed{x/\theta \ \tilde{\mathsf{s}} \ (x/\theta)^{\tilde{c}} = 1/\theta}$ para cada $x/\theta \in L/\theta$: Sea x/θ un elemento cualquiera de L/θ. Ya que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$ satisface (I10), tenemos que $x \ \mathsf{s} \ x^c = 1$. Osea que:

$$\begin{aligned} x \ \mathsf{s} \ x^c = 1 &\Leftrightarrow (x \ \mathsf{s} \ x^c)/\theta = 1/\theta \\ &\Leftrightarrow x/\theta \ \tilde{\mathsf{s}} \ x^c/\theta = 1/\theta \\ &\Leftrightarrow x/\theta \ \tilde{\mathsf{s}} \ (x/\theta)^{\tilde{c}} = 1/\theta \end{aligned}$$

- $\boxed{x/\theta \ \tilde{\imath} \ (x/\theta)^{\tilde{c}} = 0/\theta}$ para cada $x/\theta \in L/\theta$: Sea x/θ un elemento cualquiera de L/θ. Ya que $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$ satisface (I11), tenemos que $x \ \mathsf{i} \ x^c = 0$. Osea que:

$$\begin{aligned} x \ \mathsf{i} \ x^c = 0 &\Leftrightarrow (x \ \mathsf{i} \ x^c)/\theta = 0/\theta \\ &\Leftrightarrow x/\theta \ \tilde{\imath} \ x^c/\theta = 0/\theta \\ &\Leftrightarrow x/\theta \ \tilde{\imath} \ (x/\theta)^{\tilde{c}} = 0/\theta \end{aligned}$$

b) Por el Lema **Lemma 15** tenemos que π_θ es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$, cuyo núcleo es θ. Notar que por definición de $^{\tilde{c}}$ tenemos que $x^c/\theta = (x/\theta)^{\tilde{c}}$, es decir, $\pi_\theta(x^c) = (\pi_\theta(x))^{\tilde{c}}$, cualquiera sea $x \in L$.

□

Lemma 20. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado. Son equivalentes:*

(1) $x \ \mathsf{i} \ (y \ \mathsf{s} \ z) = (x \ \mathsf{i} \ y) \ \mathsf{s} \ (x \ \mathsf{i} \ z)$, *cualesquiera sean* $x, y, z \in L$

(2) $x \ \mathsf{s} \ (y \ \mathsf{i} \ z) = (x \ \mathsf{s} \ y) \ \mathsf{i} \ (x \ \mathsf{s} \ z)$, *cualesquiera sean* $x, y, z \in L$.

Proof. $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Notar que:

$$\begin{aligned} (x \ \mathsf{s} \ y) \ \mathsf{i} \ (x \ \mathsf{s} \ z) &= ((x \ \mathsf{s} \ y) \ \mathsf{i} \ x) \ \mathsf{s} \ ((x \ \mathsf{s} \ y) \ \mathsf{i} \ z) \\ &= x \ \mathsf{s} \ ((x \ \mathsf{s} \ y) \ \mathsf{i} \ z) \\ &= x \ \mathsf{s} \ (z \ \mathsf{i} \ (x \ \mathsf{s} \ y)) \\ &= x \ \mathsf{s} \ ((z \ \mathsf{i} \ x) \ \mathsf{s} \ (z \ \mathsf{i} \ y)) \\ &= (x \ \mathsf{s} \ (z \ \mathsf{i} \ x)) \ \mathsf{s} \ (z \ \mathsf{i} \ y) \\ &= x \ \mathsf{s} \ (z \ \mathsf{i} \ y) \\ &= x \ \mathsf{s} \ (y \ \mathsf{i} \ z) \end{aligned}$$

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Notar que:

$$\begin{aligned}
(x \mathsf{i} y) \mathsf{s} (x \mathsf{i} z) &= ((x \mathsf{i} y) \mathsf{s} x) \mathsf{i} ((x \mathsf{i} y) \mathsf{s} z) \\
&= x \mathsf{i} ((x \mathsf{i} y) \mathsf{s} z) \\
&= x \mathsf{i} (z \mathsf{s} (x \mathsf{i} y)) \\
&= x \mathsf{i} ((z \mathsf{s} x) \mathsf{i} (z \mathsf{s} y)) \\
&= (x \mathsf{i} (z \mathsf{s} x)) \mathsf{i} (z \mathsf{s} y) \\
&= x \mathsf{i} (z \mathsf{s} y) \\
&= x \mathsf{i} (y \mathsf{s} z)
\end{aligned}$$

□

Lemma 21. *Si* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento.*

Proof. Supongamos $x \in L$ tiene complementos y, z. Se tiene $y \mathsf{s} x = 1 = x \mathsf{s} z$ y $y \mathsf{i} x = 0 = x \mathsf{i} z$. Luego:

$$\begin{aligned}
y &= y \mathsf{s} 0 \\
&= y \mathsf{s} (x \mathsf{i} z) \\
&= (y \mathsf{s} x) \mathsf{i} (y \mathsf{s} z) \\
&= 1 \mathsf{i} (y \mathsf{s} z) \\
&= (x \mathsf{s} z) \mathsf{i} (y \mathsf{s} z) \\
&= (x \mathsf{i} y) \mathsf{s} z \\
&= 0 \mathsf{s} z \\
&= z
\end{aligned}$$

□

Lemma 22. *Si* $S \neq \emptyset$*, entonces* $[S)$ *es un filtro. Más aún si* F *es un filtro y* $F \supseteq S$*, entonces* $F \supseteq [S)$*, es decir,* $[S)$ *es el menor filtro que contiene a* S*.*

Proof. Recordemos:

$$[S) = \{y \in L : y \geq s_1 \mathsf{i} \dots \mathsf{i} s_n, \text{ para algunos } s_1, \dots, s_n \in S, n \geq 1\}$$

1. $\boxed{[S) \neq \emptyset:}$ Ya que $S \subseteq [S)$, tenemos que $[S) \neq \emptyset$.

2. $\boxed{x, y \in [S) \Rightarrow x \mathsf{i} y \in [S):}$ Sean x, y tales que:

$$\begin{aligned}
x &\geq s_1 \mathsf{i} s_2 \mathsf{i} \dots \mathsf{i} s_n, \quad \text{i.e, } x \in [S) \\
y &\geq t_1 \mathsf{i} t_2 \mathsf{i} \dots \mathsf{i} t_m, \quad \text{i.e, } y \in [S)
\end{aligned}$$

   con $s_1, s_2, \dots, s_n, t_1, t_2, \dots, t_m \in S$, entonces:

$$x \mathsf{i} y \geq s_1 \mathsf{i} s_2 \mathsf{i} \dots \mathsf{i} s_n \mathsf{i} t_1 \mathsf{i} t_2 \mathsf{i} \dots \mathsf{i} t_m$$

3. $\boxed{x \in [S) \text{ y } x \leq y \Rightarrow y \in [S):}$ Por construcción, claramente $[S)$ cumple esta propiedad.

□

Lemma 23. ***(Zorn)*** *Sea $(P, \leq)$ un poset y supongamos que cada cadena de $(P, \leq)$ tiene una cota superior, entonces existe un elemento maximal en $(P, \leq)$.*

Theorem 24. ***(Teorema del Filtro Primo)*** *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado distributivo y F un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$, entonces hay un filtro primo P tal que $x_0 \notin P$ y $F \subseteq P$.*

Proof. Sea:

$$\mathcal{F} = \{F_1 : F_1 \text{ es un filtro}, x_0 \notin F_1 \text{ y } F \subseteq F_1\}$$

Notar que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, por lo cual $(\mathcal{F}, \subseteq)$ es un poset.
Veamos que cada cadena en $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene una cota superior. Sea C una cadena.

- Si $C = \emptyset$, entonces cualquier elemento de $\mathcal{F}$ es cota de C.
- Si $C \neq \emptyset$. Sea:
$$G = \{x \in L : x \in F_1, \text{ para algún } F_1 \in C\}$$

Veamos que G es un filtro.

1. Es claro que $G \neq \emptyset$.
2. Supongamos que $x, y \in G$. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $x \in F_1$ y $y \in F_2$.
   - Si $F_1 \subseteq F_2$, entonces ya que F_2 es un filtro tenemos que $x \ \mathsf{i} \ y \in F_2 \subseteq G$.
   - Si $F_2 \subseteq F_1$, entonces tenemos que $x \ \mathsf{i} \ y \in F_1 \subseteq G$.

   Ya que C es una cadena, tenemos que siempre $x \ \mathsf{i} \ y \in G$.
3. En forma analoga se prueba la propiedad restante ...

Por lo tanto, tenemos que G es un filtro. Además $x_0 \notin G$, por lo que $G \in \mathcal{F}$ es cota superior de C. Por el **Lemma 23**, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene un elemento maximal P. Veamos que P es un filtro primo.

Supongamos $x \ \mathsf{s} \ y \in P$ y $x, y \notin P$, entonces ya que P es maximal tenemos que:

$$x_0 \in [P \cup \{x\}) \cap [P \cup \{y\})$$

Ya que $x_0 \in [P \cup \{x\})$, tenemos que hay elementos $p_1, \ldots, p_n \in P$, tales que:

$$x_0 \geq p_1 \ \mathsf{i} \ \ldots \ \mathsf{i} \ p_n \ \mathsf{i} \ x$$

Ya que $x_0 \in [P \cup \{y\})$, tenemos que hay elementos $q_1, \ldots, q_m \in P$, tales que:

$$x_0 \geq q_1 \ \mathsf{i} \ \ldots \ \mathsf{i} \ q_m \ \mathsf{i} \ y$$

Denotemos:

$$p = p_1 \ \mathsf{i} \ \ldots \ \mathsf{i} \ p_n \ \mathsf{i} \ q_1 \ \mathsf{i} \ \ldots \ \mathsf{i} \ q_m$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} x_0 &\geq p \ \mathsf{i} \ x \\ x_0 &\geq p \ \mathsf{i} \ y \end{aligned}$$

Se tiene que $x_0 \geq (p \ \mathsf{i} \ x) \ \mathsf{s} \ (p \ \mathsf{i} \ y) = p \ \mathsf{i} \ (x \ \mathsf{s} \ y) \in P$, lo cual es absurdo ya que $x_0 \notin P$. □

Corollary 25. *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado distributivo. Si $\emptyset \neq S \subseteq L$ es tal que $s_1 \ \mathsf{i} \ s_2 \ \mathsf{i} \ \ldots \ \mathsf{i} \ s_n \neq 0$, para cada $s_1, \ldots, s_n \in S$, entonces hay un filtro primo que contiene a S.*

Proof. Dado que $[S] \neq L$, se puede aplicar el **Theorem 24** (Teorema del filtro primo). $\square$

Lemma 26. *Sea* $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *un algebra de Boole, entonces para un filtro* $F \subseteq B$ *las siguientes son equivalentes:*

(1) F *es primo*

(2) $x \in F$ *ó* $x^c \in F$*, para cada* $x \in B$.

Proof. $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Ya que $1 \in F$ por definición de filtro, y $1 = x \ \mathsf{s} \ x^c$ entonces $x \ \mathsf{s} \ x^c \in F$. Finalmente, por definición de filtro primo se cumple que $x \in F$ ó $x^c \in F$.

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Supongamos que $x \ \mathsf{s} \ y \in F$ y que $x \notin F$, entonces por (2), $x^c \in F$ y por lo tanto tenemos que:

$$y \geq x^c \ \mathsf{i} \ y = 0 \ \mathsf{s} \ (x^c \ \mathsf{i} \ y) = (x^c \ \mathsf{i} \ x) \ \mathsf{s} \ (x^c \ \mathsf{i} \ y) = x^c \ \mathsf{i} \ (x \ \mathsf{s} \ y) \in F$$

lo cual dice que $y \in F$. $\square$

Lemma 27. *Sea* $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *un álgebra de Boole. Supongamos que* $b \neq 0$ *y* $a = \inf A$*, con* $A \subseteq B$*, entonces si* $b \ \mathsf{i} \ a = 0$ *existe un* $e \in A$ *tal que* $b \ \mathsf{i} \ e^c \neq 0$.

Proof. Supongamos que para cada $e \in A$, tengamos que $b \ \mathsf{i} \ e^c = 0$, entonces tenemos que para cada $e \in A$,

$$b = b \ \mathsf{i} \ (e \ \mathsf{s} \ e^c) = (b \ \mathsf{i} \ e) \ \mathsf{s} \ (b \ \mathsf{i} \ e^c) = b \ \mathsf{i} \ e$$

es decir, $b \leq e \ \forall e \in A$, lo cual nos dice que b es cota inferior de A. Pero si $b \leq a$, entonces $b = b \ \mathsf{i} \ a = 0$, es decir, $b = 0$, lo cual es un absurdo dado que por hipótesis sabíamos que $b \neq 0$. $\square$

Theorem 28. ***(Rasiova y Sikorski)*** *Sea* $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *un álgebra de Boole. Sea* $x \in B$*, tal que* $x \neq 0$*. Supongamos que* $A_1, A_2, \ldots$ *son subconjuntos de* B *tales que existe* $\inf(A_j)$*, para cada* $j = 1, 2, \ldots,$ *entonces hay un filtro primo* P *el cual cumple:*

a) $x \in P$

b) $A_j \subseteq P \Rightarrow \inf(A_j) \in P$*, para cada* $j = 1, 2, \ \ldots$

Proof. Sea $a_j = \inf(A_j)$, para $j = 1, 2, \ \ldots$ construiremos inductivamente una sucesión $b_0, b_1, \ldots$ de elementos de B tal que:

- $b_0 = x$
- $b_0 \ \mathsf{i} \ \ldots \ \mathsf{i} \ b_n \neq 0$, para cada $n \geq 0$
- $b_j = a_j$ ó $b_j^c \in A_j$, para cada $j \geq 1$

(1) Definamos $b_0 = x$

(2) Supongamos ya definimos $b_0, \ldots, b_n$, veamos como definir b_{n+1}.

  - Si $(b_0 \ \mathsf{i} \ \ldots \ \mathsf{i} \ b_n) \ \mathsf{i} \ a_{n+1} \neq 0$, entonces definamos $b_{n+1} = a_{n+1}$.
  - Si $(b_0 \ \mathsf{i} \ \ldots \ \mathsf{i} \ b_n) \ \mathsf{i} \ a_{n+1} = 0$, entonces por el **Lemma 27**, tenemos que hay un $e \in A_{n+1}$ tal que $(b_0 \ \mathsf{i} \ \ldots \ \mathsf{i} \ b_n) \ \mathsf{i} \ e^c \neq 0$, lo cual nos permite definir $b_{n+1} = e^c$.

Dado que el conjunto $S = \{b_0, b_1, \ldots\}$ satisface la hipótesis del **Corollary 25**, por lo tanto hay un filtro primo P tal que $\{b_0, b_1, \ldots\} \subseteq P$, el cual satisface las propiedades (a) y (b) dado que así lo construimos. $\square$

2 Términos y fórmulas

Lemma 29. *Supongamos* $t \in T_k^\tau$*, con* $k \geq 1$*, entonces ya sea* $t \in Var \cup \mathcal{C}$ *ó* $t = f(t_1, \ldots, t_n)$*, con* $f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1,\ t_1, \ldots, t_n \in T_{k-1}^\tau$*.*

Proof. Probaremos este lema por inducción en k.

<u>Caso Base:</u> $\boxed{k = 1}$ Es directo, ya que por definición:

$$T_1^\tau = Var \cup \mathcal{C} \cup \{f(t_1, t_2, \ldots t_n) : f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, t_1, t_2, \ldots t_n \in T_0^\tau\}$$

<u>Caso Inductivo:</u> $\boxed{k \Rightarrow k+1}$ Sea $t \in T_{k+1}^\tau$. Por definición de T_{k+1}^τ tenemos que:

- $t \in T_k^\tau$ ó
- $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ con $f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1$ y $t_1, \ldots, t_n \in T_k^\tau$.

Si se da que $t \in T_k^\tau$, entonces podemos aplicar hipótesis inductiva y usar que $T_{k-1}^\tau \subseteq T_k^\tau$. $\square$

Lemma 30. *Este lema no se evalua.*

Lemma 31. *Este lema no se evalua.*

Lemma 32. *Este lema no se evalua.*

Lemma 33. *Este lema no se evalua.*

Theorem 34. ***(Lectura única de terminos)****. Dado* $t \in T^\tau$ *se da una de las siguientes:*

(1) $t \in Var \cup \mathcal{C}$

(2) Hay únicos $n \geq 1,\ f \in \mathcal{F}_n,\ t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$ *tales que* $t = f(t_1, \ldots, t_n)$*.*

Lemma 35. *Sean* $r, s, t \in T^\tau$*.*

(a) Si $s \neq t = f(t_1, \ldots, t_n)$ *y* s *ocurre en* t*, entonces dicha ocurrencia sucede dentro de algún* t_j*,* $j = 1, \ldots, n$*.*

(b) Si r, s *ocurren en* t*, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una ocurre dentro de otra. En particular, las distintas ocurrencias de* r *en* t *son disjuntas.*

(c) Si t' *es el resultado de reemplazar una ocurrencia de* s *en* t *por* r*, entonces* $t' \in T^\tau$*.*

Lemma 36. *Supongamos* $\varphi \in F_k^\tau$*, con* $k \geq 1$*, entonces* φ *es de alguna de las siguientes formas:*

- $\varphi = (t \equiv s)$*, con* $t, s \in T^\tau$*.*
- $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$*, con* $r \in \mathcal{R}_n, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$*.*
- $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$*, con* $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$*,* $\varphi_1, \varphi_2 \in F_{k-1}^\tau$*.*
- $\varphi = \neg\varphi_1$*, con* $\varphi_1 \in F_{k-1}^\tau$*.*
- $\varphi = Qv\varphi_1$*, con* $Q \in \{\forall, \exists\}$*,* $v \in Var$ *y* $\varphi_1 \in F_{k-1}^\tau$*.*

Llamaremos $(\star)$ *a la lista anterior.*

Proof. Probaremos este teorema por inducción en k, utilizando la definición del conjunto F^τ.

Caso Base:

$$\varphi \in \{(t \equiv s) : t, s \in T^\tau\} \cup \{r(t_1, \ldots, t_n) : r \in \mathcal{R}_n, n \geq 1, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau\}$$

por lo que φ es de alguna de las siguientes formas:

- $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$.
- $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$, con $r \in \mathcal{R}_n, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$.

Caso Inductivo: Supongamos que si $\varphi \in F^\tau_{k-1}$ entonces φ es de alguna de las formas de $(\star)$. Probaremos que si $\varphi \in F^\tau_k$ entonces φ también es de alguna de las formas de la lista $(\star)$.

$$\begin{aligned} \varphi \in F^\tau_{k-1} &\cup \{\neg\varphi : \varphi \in F^\tau_{k-1}\} \cup \{(\varphi\eta\psi) : \varphi, \psi \in F^\tau_{k-1}, \eta \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}\} \\ &\cup \{Qv\varphi : \varphi \in F^\tau_{k-1}, v \in Var, Q \in \{\forall, \exists\}\} \end{aligned}$$

Luego, si $\varphi \in F^\tau_{k-1}$ aplicando HI y el hecho de que $F^\tau_{k-2} \subseteq F^\tau_{k-1}$, obtenemos que φ es de alguna de las formas de la lista anterior. Caso contrario, se dá alguna de las siguientes:

- $\varphi = (\varphi_1\eta\varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau_{k-1}, \eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
- $\varphi = \neg\varphi_1$, con $\varphi_1 \in F^\tau_{k-1}$.
- $\varphi = Qv\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $v \in Var$ y $\varphi_1 \in F^\tau_{k-1}$.

□

Lemma 37. *Este lema no se evalua.*

Lemma 38. *Este lema no se evalua.*

Lemma 39. *Este lema no se evalua.*

Proposition 40. *Este proposición no se evalua.*

Theorem 41. ***(Lectura única de fórmulas)*** *Dada $\varphi \in F^\tau$ se da una y solo una de las siguientes:*

(1) $\varphi = (t \equiv s)$, *con* $t, s \in T^\tau$

(2) $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$, *con* $r \in \mathcal{R}_n, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$

(3) $\varphi = (\varphi_1\eta\varphi_2)$, *con* $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$

(4) $\varphi = \neg\varphi_1$, *con* $\varphi_1 \in F^\tau$

(5) $\varphi = Qv\varphi_1$, *con* $Q \in \{\forall, \exists\}$, $\varphi_1 \in F^\tau$ *y* $v \in Var$.

Más aún, en todos los puntos tales descomposiciones son únicas.

Lemma 42. *Sea τ un tipo.*

(a) Las fórmulas atómicas no tienen subfórmulas propias.

(b) Si φ ocurre propiamente en $(\psi\eta\varphi)$, entonces tal ocurrencia es en ψ ó en φ.

(c) Si φ ocurre propiamente en $\neg\psi$, entonces tal ocurrencia es en ψ.

(d) Si φ ocurre propiamente en $Qx_k\psi$, entonces tal ocurrencia es en ψ.

(e) Si φ_1, φ_2 ocurren en φ, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una contiene a la otra.

(f) Si λ' es el resultado de reemplazar alguna ocurrencia de φ en λ por ψ, entonces $\lambda' \in F^\tau$.

3 Estructuras

Lemma 43. *Sea* $\mathbf{A}$ *una estructura de tipo* τ *y sea* $t \in T^\tau$*. Supongamos que* $\vec{a}, \vec{b}$ *son asignaciones tales que* $a_i = b_i$ *cada vez que* x_i *ocurra en* t*, entonces* $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$*.*

Proof. Sea

$$\text{Teo}_k\text{: El lema vale para } t \in T_k^\tau$$

Probaremos este lema por inducción en k.

<u>Caso Base:</u> $\boxed{\text{Teo}_0}$ Sea $t \in T_0^\tau$ y sean $\vec{a}, \vec{b}$ asignaciones tales que $a_i = b_i$ cada vez que x_i ocurra en t, entonces

$$t \in Var \cup \mathcal{C}$$

es decir, sucede una de las siguientes:

- $t = x_i$, con $x_i \in Var$:
$$t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = a_i = b_i = t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$$

- $t = c$, con $c \in \mathcal{C}$:
$$t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = i(c) = t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$$

<u>Caso Inductivo:</u> $\boxed{\text{Teo}_k \Rightarrow \text{Teo}_{k+1}}$ Sea $t \in T_{k+1}^\tau$ y sean $\vec{a}, \vec{b}$ asignaciones tales que $a_i = b_i$ cada vez que x_i ocurra en t, entonces

$$t \in T_k^\tau \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) : f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, t_1, \ldots, t_n \in T_k^\tau\}$$

es decir, sucede una de las siguientes:

- $t \in T_k^\tau$: Aplicando HI y utilizando el hecho de que $T_k^\tau \subseteq T_{k+1}^\tau$, obtenemos que Teo_{k+1} vale.

- $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, con $f \in \mathcal{F}_n$ $n \geq 1$ y $t_1, \ldots, t_n \in T_k^\tau$: Notar que para cada $j = 1, \ldots, n$, tenemos que $a_i = b_i$ cada vez que x_i ocurra en t_j, lo cual por Teo_k nos dice que:
$$t_j^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t_j^{\mathbf{A}}[\vec{b}] \qquad \text{para } j = 1, \ldots, n$$

  Se tiene entonces que
$$\begin{aligned} t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] &= i(f)(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\ &= i(f)(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{b}], \ldots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) \\ &= t^{\mathbf{A}}[\vec{b}] \end{aligned}$$

□

Lemma 44.

(a) $Li((t \equiv s)) = \{v \in Var :$ *v ocurre en t ó v ocurre en s*$\}$

(b) $Li(r(t_1, \ldots, , t_n)) = \{v \in Var :$ *v ocurre en algún* $t_i\}$

(c) $Li(\neg\varphi) = Li(\varphi)$

(d) $Li((\varphi \eta \psi)) = Li(\varphi) \cup Li(\psi)$

(e) $Li(Qx_j\varphi) = Li(\varphi) - \{x_j\}$

Proof.

(a) son triviales de las definiciones, teniendo en cuenta que si una variable v ocurre en $(t \equiv s)$ (resp. en $r(t_1, \ldots, t_n)$) entonces v ocurre en t o v ocurre en s (resp.v ocurre en algun t_i)

(b) son triviales de las definiciones, teniendo en cuenta que si una variable v ocurre en $(t \equiv s)$ (resp. en $r(t_1, \ldots, t_n)$) entonces v ocurre en t o v ocurre en s (resp.v ocurre en algun t_i)

(c) es similar a (d)

(d) Supongamos $v \in Li((\varphi\eta\psi))$, entonces hay un i tal que v ocurre libremente en $(\varphi\eta\psi)$ a partir de i. Por definición tenemos que ya sea v ocurre libremente en φ a partir de $i-1$ ó v ocurre libremente en ψ a partir de $i - |(\varphi\eta|$, con lo cual $v \in Li(\varphi) \cup Li(\psi)$.

    Supongamos ahora que $v \in Li(\varphi) \cup Li(\psi)$. Supongamos $v \in Li(\psi)$. Por definición tenemos que hay un i tal que v ocurre libremente en ψ a partir de i. Pero notese que esto nos dice por definicion que v ocurre libremente en $(\varphi\eta\psi)$ a partir de $i + |(\varphi\eta|$ con lo cual $v \in Li((\varphi\eta\psi))$.

(e) Supongamos $v \in Li(Qx_j\varphi)$, entonces hay un i tal que v ocurre libremente en $Qx_j\varphi$ a partir de i. Por definicion tenemos que $v \neq x_j$ y v ocurre libremente en φ a partir de $i - |Qx_j|$, con lo cual $v \in Li(\varphi) - \{x_j\}$ Supongamos ahora que $v \in Li(\varphi) - \{x_j\}$. Por definicion tenemos que hay un i tal que v ocurre libremente en φ a partir de i. Ya que $v \neq x_j$ esto nos dice por definicion que v ocurre libremente en $Qx_j\varphi$ a partir de $i + |Qx_j|$, con lo cual $v \in Li(Qx_j\varphi)$.

□

Lemma 45. *Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$.*

Proof. Sea

$$\text{Teo}_k\text{: El lema vale para } \varphi \in F_k^\tau$$

Probaremos este lema por inducción en k.

Caso Base: $\boxed{\text{Teo}_0}$ Sea $\varphi \in F_0^\tau$ y sean $\vec{a}, \vec{b}$ asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$ entonces $a_i = b_i$ entonces

$$\varphi \in \{(t \equiv s) : t, s \in T^\tau\} \cup \{r(t_1, \ldots, t_n) : r \in \mathcal{R}_n, n \geq 1, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau\}$$

es decir, sucede una de las siguientes:

- $\varphi = (t \equiv s)$ con $t, s \in T^\tau$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] &\Leftrightarrow \mathbf{A} \models (t \equiv s)[\vec{a}] \\
&\Leftrightarrow t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}] \\
&\Leftrightarrow t^{\mathbf{A}}[\vec{b}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{b}] \qquad \text{(Por } \textbf{Lemma 43}\text{)} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{A} \models (t \equiv s)[\vec{b}] \\
&\Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]
\end{aligned}$$

- $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$ con $r \in \mathcal{R}_n, n \geq 1, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] &\Leftrightarrow \mathbf{A} \models r(t_1, \ldots, t_n)[\vec{a}] \\
&\Leftrightarrow r(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \in i(r) \\
&\Leftrightarrow r(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{b}], \ldots t_n^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) \in i(r) \qquad (\text{Por } \textbf{Lemma 43}) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{A} \models r(t_1, \ldots, t_n)[\vec{b}] \\
&\Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]
\end{aligned}$$

<u>Caso Inductivo:</u> $\boxed{\text{Teo}_k \Rightarrow \text{Teo}_{k+1}}$ Sea $\varphi \in F_{k+1}^\tau$ y sean $\vec{a}, \vec{b}$ asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$ entonces $a_i = b_i$ entonces si $\varphi \in F_k^\tau$, aplicando HI y utilizando el hecho de que $F_k^\tau \subseteq F_{k+1}^\tau$, obtenemos que Teo_{k+1} vale. Por el contrario, tenemos los siguientes casos:

- $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, con $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Probaremos $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ ya que los demás casos son análogos. Ya que $Li(\varphi_1), Li(\varphi_2) \subseteq Li(\varphi)$, Teo_k nos dice que:

$$\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}] \text{ sii } \mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{b}] \text{ y } \mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}] \text{ sii } \mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{b}]$$

  Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] &\Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}] \text{ y } \mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}] \\
&\Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{b}] \text{ y } \mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{b}] \qquad (\text{Por Teo}_k) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]
\end{aligned}$$

- $\varphi = \neg\varphi_1$: Ya que $Li(\varphi_1) \subseteq Li(\varphi)$, Teo_k nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{b}]$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] &\Leftrightarrow \mathbf{A} \models \neg\varphi_1[\vec{a}] \\
&\Leftrightarrow \mathbf{A} \models \neg\varphi_1[\vec{b}] \qquad (\text{Por Teo}_k) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]
\end{aligned}$$

- $\varphi = Qx_j\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$: Probaremos $\varphi = \forall x_j \varphi_1$ ya que el otro caso es análogo. Notar que $\downarrow_j^a (\vec{a})$ y $\downarrow_j^a (\vec{b})$ coinciden en toda $x_i \in Li(\varphi_1) \subseteq Li(\varphi_1) \cup \{x_j\}$, con lo cual por Teo_k nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{a})]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{b})]$ para todo $a \in A$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] &\Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{a})] \text{ para cada } a \in A \\
&\Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a (\vec{b})] \text{ para cada } a \in A \qquad (\text{Por Teo}_k) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]
\end{aligned}$$

□

Corollary 46. *Si φ es una sentencia, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$, cualesquiera sean las asignaciones $\vec{a}, \vec{b}$.*

Lemma 47.

(a) Si $Li(\varphi) \cup Li(\psi) \subseteq \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$, entonces $\varphi \sim \psi$ si y solo si la sentencia $\forall x_{i_1} \ldots \forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)$ es universalmente válida.

(b) Si $\varphi_i \sim \psi_i, i = 1, 2$, *entonces* $\neg\varphi_1 \sim \neg\psi_1, (\varphi_1\eta\varphi_2) \sim (\psi_1\eta\psi_2)$ *y* $Qv\varphi_1 \sim Qv\psi_1$.

(c) Si $\varphi \sim \psi$ *y* α' *es el resultado de reemplazar en una fórmula* α *algunas (posiblemente* 0*) ocurrencias de* φ *por* ψ*, entonces* $\alpha \sim \alpha'$.

Proof. (a) Tenemos que

$$\begin{array}{l}
\varphi \sim \psi \\
\Updownarrow \text{ (por (6) de la def de } \models \text{)} \\
\mathbf{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}], \text{ para todo } \mathbf{A} \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbb{N}} \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[\downarrow^{a}_{i_n} (\vec{a})], \text{ para todo } \mathbf{A},\ a \in A \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbb{N}} \\
\Updownarrow \text{ (por (8) de la def de } \models\text{)} \\
\mathbf{A} \models \forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}], \text{ para todo } \mathbf{A} \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbb{N}} \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A} \models \forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)[\downarrow^{a}_{i_{n-1}} (\vec{a})], \text{ para todo } \mathbf{A},\ a \in A \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbb{N}} \\
\Updownarrow \text{ (por (8) de la def de } \models \text{)} \\
\mathbf{A} \models \forall x_{i_{n-1}}\forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}], \text{ para todo } \mathbf{A} \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbb{N}} \\
\Updownarrow \\
\quad \vdots \\
\Updownarrow \\
\mathbf{A} \models \forall x_{i_1}...\forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi)[\vec{a}], \text{ para todo } \mathbf{A} \text{ y toda } \vec{a} \in A^{\mathbb{N}} \\
\Updownarrow \\
\forall x_{i_1}...\forall x_{i_n}(\varphi \leftrightarrow \psi) \text{ es universalmente valida}
\end{array}$$

(b) Es dejado al lector.

(c) Por induccion en el k tal que $\alpha \in F^{\tau}_{k}$.

□

Lemma 48. *Sea* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *un homomorfismo, entonces:*

$$F(t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, \ldots)] = t^{\mathbf{B}}[F(a_1), F(a_2), \ldots)]$$

para cada $t \in T^{\tau}, (a_1, a_2, \ldots) \in A^{\mathbb{N}}$.

Proof. Sea

$$\text{Teo}_k\text{: El lema vale para } t \in T^{\tau}_{k}$$

Probaremos este lema por inducción en k. Denotemos $(F(a_1), F(a_2), \ldots)$ con $F(\vec{a})$.

Caso Base: $\boxed{\text{Teo}_0}$ Sea $t \in T^{\tau}_{0}$ y sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo, entonces

$$t \in Var \cup \mathcal{C}$$

es decir, sucede una de las siguientes:

- $t = x_i$, con $x_i \in Var$:

$$F(t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \;=\; F(a_i)$$

- $t = c$, con $c \in \mathcal{C}$:

$$\begin{array}{rcl} F(t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) & = & F(c^{\mathbf{A}}) \\ & = & c^{\mathbf{B}} \\ & = & t^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})] \end{array}$$

Caso Inductivo: $\boxed{\text{Teo}_k \Rightarrow \text{Teo}_{k+1}}$ Supongamos que vale Teo_k y supongamos $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$, entonces:

$$t \in T_k^\tau \cup \{f(t_1, \dots, t_n) : f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, t_1, \dots, t_n \in T_k^\tau\}$$

es decir, sucede una de las siguientes:

- $t \in T_k^\tau$: Aplicando HI y utilizando el hecho de que $T_k^\tau \subseteq T_{k+1}^\tau$, obtenemos que Teo_{k+1} vale.
- $t = f(t_1, \dots, t_n)$, con $f \in \mathcal{F}_n$ $n \geq 1$ y $t_1, \dots, t_n \in T_k^\tau$, tenemos entonces

$$\begin{array}{rcl} F(t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) & = & F(f(t_1, \dots, t_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\ & = & F(f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \dots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])) \\ & = & f^{\mathbf{B}}(F(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}]), \dots, F(t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])) \\ & = & f^{\mathbf{B}}(t_1^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})], \dots, t_n^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})])) \\ & = & f(t_1, \dots, t_n)^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})] \\ & = & t^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})] \end{array}$$

□

Lemma 49. *Supongamos que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^\tau$, entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, \dots)] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), \dots)]$$

para cada $(a_1, a_2, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$. En particular $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ satisfacen las mismas sentencias de tipo τ.

Proof. □

Lemma 50. *Supongamos que τ es algebraico, si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo.*

Proof. Debemos probar que F^{-1} es un homomorfismo, es decir, debemos ver

- $F^{-1}(c^{\mathbf{B}}) = c^{\mathbf{A}}$, para todo $c \in \mathcal{C}$: Ya que $F(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$, tenemos que $F^{-1}(c^{\mathbf{B}}) = c^{\mathbf{A}}$
- $F^{-1}(f^{\mathbf{B}}(b_1, \dots, b_n)) = f^{\mathbf{A}}(F^{-1}(b_1), \dots, F^{-1}(b_n))$ para cada $f \in \mathcal{F}_n, b_1, \dots, b_n \in B$: Sean $a_1, \dots, a_n \in A$ tales que $F(a_i) = b_i, i = 1, \dots, n$. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} F^{-1}(f^{\mathbf{B}}(b_1, \dots, b_n)) & = & F^{-1}(f^{\mathbf{B}}(F(a_1), \dots, F(a_n))) \\ & = & F^{-1}(F(f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n))) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(F^{-1}(b_1), \dots, F^{-1}(b_n)) \end{array}$$

- $(b_1, \dots, b_n) \in r^{\mathbf{B}}$ implica $(F^{-1}(b_1), \dots, F^{-1}(b_n)) \in r^{\mathbf{A}}$ para todo $r \in \mathcal{R}_n, b_1, \dots, b_n \in B$:

Luego, F^{-1} es homomorfismo y por lo tanto F es isomorfismo. □

Lemma 51. *Supongamos que τ es algebraico, si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $\mathbf{B}$.*

Proof. Para probar que I_F es un subuniverso de $\mathbf{B}$, debemos ver:

- $I_F \neq \emptyset$: Ya que $A \neq \emptyset$, tenemos que $I_F \neq \emptyset$.
- $c^{\mathbf{B}} \in I_F$, para cada $c \in \mathcal{C}$: Es claro que $c^{\mathbf{B}} = F(c^{\mathbf{A}}) \in I_F$ para cada $c \in \mathcal{C}$, pues F es homomorfismo.
- $f^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n) \in I_F$, para cada $b_1, \ldots, b_n \in I_F$ y $f \in \mathcal{F}$: Sean $a_1, \ldots, a_n$ tales que $F(a_i) = b_i, i = 1, \ldots, n$. Tenemos que

$$f^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n) = f^{\mathbf{B}}(F(a_1), \ldots, F(a_n)) = F(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \in I_F$$

  por lo cual I_F es cerrada bajo $f^{\mathbf{B}}$.

$\square$

Lemma 52. *Supongamos que τ es algebraico, si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, entonces $\ker F$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$.*

Proof. Sea $f \in \mathcal{F}_n$. Supongamos que $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$ son tales que $a_1 \ker F\ b_1, \ldots, a_n \ker F\ b_n$. Tenemos entonces que

$$\begin{array}{rcl} F(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) & = & f^{\mathbf{B}}(F(a_1), \ldots, F(a_n)) \\ & = & f^{\mathbf{B}}(F(b_1), \ldots, F(b_n)) \\ & = & F(f^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n)) \end{array}$$

lo cual nos dice que $f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \ker F\ f^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n)$. $\square$

Lemma 53. *$\pi_\theta : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\theta$ es un homomorfismo cuyo núcleo es θ.*

Proof. Debemos ver que π_θ satisface

- $\pi_\theta(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{A}/\theta}$, para cada $c \in \mathcal{C}$: Tenemos que

$$\pi_\theta(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{A}}/\theta = c^{\mathbf{A}/\theta}$$

- $\pi_\theta(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathbf{A}/\theta}(\pi_\theta(a_1), \ldots, \pi_\theta(a_n))$, para cada $f \in \mathcal{F}_n$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$: Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \pi_\theta(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) & = & f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)/\theta \\ & = & f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, \ldots, a_n/\theta) \\ & = & f^{\mathbf{A}/\theta}(\pi_\theta(a_1), \ldots, \pi_\theta(a_n)) \end{array}$$

- $(a_1, \ldots, a_n) \in r^{\mathbf{A}}$ implica $(\pi_\theta(a_1), \ldots, \pi_\theta(a_n)) \in r^{\mathbf{A}/\theta}$, para todo $r \in \mathcal{R}_n, a_1, \ldots, a_n \in A$: Lo cual vale, dado que $\pi_\theta(a_1) = a_1/\theta, \ldots, \pi_\theta(a_n) = a_n/\theta$.

por lo tanto, π_θ es un homomorfismo. $\square$

Corollary 54. *Para cada $t \in T^\tau, \vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$, se tiene que $t^{\mathbf{A}/\theta}[(a_1/\theta, a_2/\theta, \ldots)] = t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, \ldots)]/\theta$.*

Proof. Ya que π_θ es un homomorfismo, utilizando el **Lemma 48** tenemos que

$$\pi_\theta(t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, \dots)] = t^{\mathbf{A}/\theta}[\pi_\theta(a_1), \pi_\theta(a_2), \dots)]$$

lo cual, por definición de π_θ es igual a

$$t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, \dots)]/\theta = t^{\mathbf{A}/\theta}[(a_1/\theta, a_2/\theta, \dots)]$$

□

Theorem 55. *Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo sobreyectivo. Definimos sin ambiguedad la siguiente función:*

$$\begin{array}{rcl} \bar{F} : A/\ker F & \to & B \\ a/\ker F & \to & F(a) \end{array}$$

la cual es un isomorfismo de $\mathbf{A}/\ker F$ en $\mathbf{B}$.

Proof. Notese que la definición de $\bar{F}$ es inambigua ya que si $a/\ker F = a'/\ker F$, entonces $F(a) = F(a')$. Veamos que $\bar{F}$ es biyectiva, es decir:

- $\bar{F}$ es sobreyectiva: Ya que F es sobre, tenemos que $\bar{F}$ lo es.
- $\bar{F}$ es inyectiva: Supongamos que $\bar{F}(a/\ker F) = \bar{F}(a'/\ker F)$, tenemos entonces que $F(a) = F(a')$, lo cual nos dice que $a/\ker F = a'/\ker F$, es decir, $\bar{F}$ es inyectiva.

Luego, $\bar{F}$ es biyectiva, por lo que el **Lemma 50** no dice que para ver que $\bar{F}$ es un isomorfismo, basta con ver que $\bar{F}$ es un homomorfismo. Veamos esto.

- $\bar{F}(c^{\mathbf{A}/\ker F}) = c^{\mathbf{B}}$, para cada $c \in \mathcal{C}$: Tenemos que
$$\bar{F}(c^{\mathbf{A}/\ker F}) = \bar{F}(c^{\mathbf{A}}/\ker F) = F(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$$
- $\bar{F}(f^{\mathbf{A}/\ker F}(a_1/\ker F, \dots, a_n/\ker F)) = f^{\mathbf{B}}(\bar{F}(a_1/\ker F), \dots, \bar{F}(a_n/\ker F))$, para cada $f \in \mathcal{F}_n$ y $a_1, \dots, a_n \in A$: Tenemos que
$$\begin{array}{rcl} \bar{F}(f^{\mathbf{A}/\ker F}(a_1/\ker F, \dots, a_n/\ker F)) & = & \bar{F}(f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)/\ker F) \\ & = & F(f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)) \\ & = & f^{\mathbf{B}}(F(a_1), \dots, F(a_n)) \\ & = & f^{\mathbf{B}}(\bar{F}(a_1/\ker F), \dots, \bar{F}(a_n/\ker F)) \end{array}$$
- $(a_1/\ker F, \dots, a_n/\ker F) \in r^{\mathbf{A}/\ker F}$ implica $(\bar{F}(a_1/\ker F), \dots, \bar{F}(a_n/\ker F)) \in r^{\mathbf{A}/\ker F}$, para todo $r \in \mathcal{R}_n, a_1, \dots, a_n \in A$:

□

Lemma 56. *Este lema no se evalua.*

Lemma 57. *Este lema no se evalua.*

Lemma 58. *Sea τ un tipo cualquiera y supongamos $t \in T^\tau$. Si $t =_d t(v_1, \dots, v_n)$ entonces se da alguna de las siguientes:*

1. *$t = c$ para algún $c \in \mathcal{C}$.*
2. *$t = v_j$ para algún j.*

3. $t = f(t_1, \ldots, t_m)$, *con* $f \in \mathcal{F}_m$ *y* $t_1, \ldots, t_m \in T^{\tau}_{k-1}$ *tales que las variables que ocurren en cada uno de ellos están en* $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Proof. □

Lemma 59. *Sea* τ *un tipo cualquiera y supongamos* $t \in T^{\tau}$. *Si* $t =_d t(v_1, \ldots, v_n)$. *Sea* $\mathbf{A}$ *un modelo de tipo* τ. *Sean* $a_1, \ldots, a_n \in A$. *Se tiene que:*

1. *Si* $t = c$ *entonces* $t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = c^{\mathbf{A}}$.

2. *Si* $t = v_j$ *entonces* $t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = a_j$.

3. *Si* $t = f(t_1, \ldots, t_m)$, *con* $f \in \mathcal{F}_m$ *y* $t_1, \ldots, t_m \in T^{\tau}$, *entonces:*

$$t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_m^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n])$$

Proof. (1) trivial

(2) trivial

(3) Sea $\vec{b}$ una asignación tal que a cada $v_i$le asigna el valor a_i. Por definición tenemos EquivElim

$$\begin{array}{rcl} t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] & = & t^{\mathbf{A}}[\vec{b}] \\ & = & f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{b}], \ldots, t_m^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_m^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]) \end{array}$$

□

Lemma 60. ***(De reemplazo para términos)***. *Supongamos* $t =_d t(w_1, \ldots, w_k), s_1 =_d s_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, s_k =_d s_k(v_1, \ldots, v_n)$. *Todas las variables de* $t(s_1, \ldots, s_k)$ *están en* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *y si declaramos* $t(s_1, \ldots, s_k) =_d t(s_1, \ldots, s_k)(v_1, \ldots, v_n)$, *entonces para cada estructura* $\mathbf{A}$ *y* $a_1, \ldots a_n \in A$, *se tiene:*

$$t(s_1, \ldots, s_k)^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = t^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, s_k^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]]$$

Proof. Probaremos que valen (a) y (b), por induccion en el l tal que $t \in T^{\tau}_l$. El caso $l = 0$ es dejado al lector. Supongamos entonces que valen (a) y (b) siempre que $t \in T^{\tau}_l$ y veamos que entonces valen (a) y (b) cuando $t \in T^{\tau}_{l+1} - T^{\tau}_l$. Hay $f \in \mathcal{F}_m$ y $t_1, \ldots, t_m \in T^{\tau}_l$ tales que $t_1 =_d t_1(w_1, \ldots, w_k), \ldots, t_m =_d t_m(w_1, \ldots, w_k)$ y $t = f(t_1, \ldots, t_m)$. Notese que por (a) de la HI tenemos que

$t_i(s_1, \ldots, s_k) =_d t_i(s_1, \ldots, s_k)(v_1, \ldots, v_n)$, $i = 1, \ldots, m$

lo cual ya que $t(s_1, \ldots, s_k) = f(t_1(s_1, \ldots, s_k), \ldots, t_m(s_1, \ldots, s_k))$

nos dice que $t(s_1, \ldots, s_k) =_d t(s_1, \ldots, s_k)(v_1, \ldots, v_n)$

obteniendo asi (a). Para probar (b) notemos que por (b) de la hipotesis inductiva $t_j(s_1, \ldots, s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t_j^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]], j = 1, \ldots, m$

lo cual nos dice que

$$\begin{array}{rcl} t(s_1, \ldots, s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}] & = & f(t_1(s_1, \ldots, s_k), \ldots, t_m(s_1, \ldots, s_k))^{\mathbf{A}}[\vec{a}] \\ & = & f^{\mathbf{A}}(t_1(s_1, \ldots, s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, t_m(s_1, \ldots, s_k)^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \\ & = & f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]], \ldots, t_m^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]]) \\ & = & t^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, s_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]] \end{array}$$

□

Lemma 61. *Sea* τ *un tipo cualquiera y supongamos* $\varphi \in F^{\tau}$. *Si* $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n)$, *entonces se da una y solo una de las siguientes:*

(1) $\varphi = (t \equiv s)$, *con* $t, s \in T^\tau$, *únicos y tales que las variables que ocurren en* t *o en* s *están todas en* $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

(2) $\varphi = r(t_1, \ldots, t_m)$, *con* $r \in \mathcal{R}_m$ *y* $t_1, \ldots, t_m \in T^\tau$, *únicos y tales que las variables que ocurren en cada* t_i *están todas en* $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

(3) $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, *con* $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, *únicas y tales que* $Li(\varphi_1) \cup Li(\varphi_2) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$.

(4) $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, *con* $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, *únicas y tales que* $Li(\varphi_1) \cup Li(\varphi_2) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$.

(5) $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$, *con* $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, *únicas y tales que* $Li(\varphi_1) \cup Li(\varphi_2) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$.

(6) $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, *con* $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, *únicas y tales que* $Li(\varphi_1) \cup Li(\varphi_2) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$.

(7) $\varphi = \neg\varphi_1$, *con* $\varphi_1 \in F^\tau$, *única y tal que* $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$.

(8) $\varphi = \forall v_j \varphi_1$, *con* $v_j \in \{v_1, \ldots, v_n\}$ *y* $\varphi_1 \in F^\tau$, *únicas y tales que* $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$.

(9) $\varphi = \forall v \varphi_1$, *con* $v \in Var - \{v_1, \ldots, v_n\}$ *y* $\varphi_1\ inF^\tau$, *únicas y tales que* $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n, v\}$.

(10) $\varphi = \exists v_j \varphi_1$, *con* $v_j \in \{v_1, \ldots, v_n\}$ *y* $\varphi_1 \in F^\tau$, *únicas y tales que* $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$.

(11) $\varphi = \exists v \varphi_1$, *con* $v \in Var - \{v_1, \ldots, v_n\}$ *y* $\varphi_1 \in F^\tau$, *únicas y tales que* $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n, v\}$.

Proof. Induccion en el k tal que $\varphi \in F_k^\tau$ □

Lemma 62. *Supongamos* $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n)$. *Sea* $\mathbf{A} = (A, i)$ *un modelo de tipo* τ *y sean* $a_1, \ldots, a_n \in A$, *entonces:*

1. *Si* $\varphi = (t \equiv s)$, *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = s^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]$$

2. *Si* $\varphi = r(t_1, \ldots, t_m)$, *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } (t_1^A[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_m^A[a_1, \ldots, a_n]) \in r^A$$

3. *Si* $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n] \text{ y } \mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n]$$

4. *Si* $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n] \text{ o } \mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n]$$

5. *Si* $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$ *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n] \text{ o } \mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$$

6. *Si* $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si ya sea } \begin{array}{l} \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n] \text{ y } \mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n] \text{ o} \\ \mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n] \text{ y } \mathbf{A} \not\models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n] \end{array}$$

7. *Si* $\varphi = \neg\varphi_1$ *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$$

8. *Si* $\varphi = \forall v\varphi_1$ *con* $v \notin \{v_1, \ldots, v_n\}$ *y* $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, \ldots, v_n, v)$ *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n, a] \text{ para todo } a \in A$$

9. *Si* $\varphi = \forall v_j\varphi_1$ *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a, \ldots, a_n] \text{ para todo } a \in A$$

10. *) Si* $\varphi = \exists v\varphi_1$ *con* $v \notin \{v_1, \ldots, v_n\}$ *y* $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, \ldots, v_n, v)$ *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n, a] \text{ para algún } a \in A$$

11. *) Si* $\varphi = \exists v_j\varphi_1$ *entonces:*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a, \ldots, a_n] \text{ para algún } a \in A$$

Proof. □

Lemma 63. *Si* Qv *ocurre en* φ *a partir de* i*, entonces hay una única fórmula* ψ *tal que* $Qv\psi$ *ocurre en* φ *a partir de* i*.*

Lemma 64. *Supongamos* $\varphi =_d \varphi(w_1, \ldots, w_k), t_1 =_d t_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, t_k =_d t_k(v_1, \ldots, v_n)$ *y supongamos además que cada* w_j *es sustituible por* t_j *en* φ*, entonces:*

(a) $Li(\varphi(t_1, \ldots, t_k)) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$

(b) Si declaramos $\varphi(t_1, \ldots, t_k) =_d \varphi(t_1, \ldots, t_k)(v_1, \ldots, v_n)$*, entonces para cada estructura* $\mathbf{A}$ *y* $\vec{a} \in A^n$ *se tiene:*

$$\mathbf{A} \models \varphi(t_1, \ldots, t_k)[\vec{a}] \text{ si y solo si } \mathbf{A} \models \varphi[t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]]$$

4 Teorias de primer orden

Lemma 65. *Si* $(\varphi_1, \varphi_2) \in Generaliz^\tau$*, entonces el nombre de constante* c *del cual habla la definición de* $Generaliz^\tau$ *está unívocamente determinado por el par* (φ_1, φ_2)*.*

Proof. Recordemos la definición de $Generaliz^\tau$.

$$Generaliz^\tau = \{(\psi, \forall v\tilde{\psi}) : \psi \in S^\tau,\ v \text{ no ocurre en } \psi \text{ y existe } c \in \mathcal{C} \text{ tal que } \tilde{\psi} = \text{resultado de reemplazar en } \psi \text{ cada ocurrencia de } c \text{ por } v\}$$

Notese que c es el único nombre de constante que ocurre en φ_1 y no ocurre en φ_2. □

Lemma 66. *Si* $(\varphi_1, \varphi_2) \in Elec^\tau$*, entonces el nombre de constante* e *del cual habla la definición de* $Elec^\tau$ *está unívocamente determinado por el par* (φ_1, φ_2)*.*

Proof. Recordemos la definición de $Elec^\tau$.

$$Elect^\tau = \{(\exists v\varphi(v), \varphi(e)) : \varphi =_d \varphi(v),\ Li(\varphi) = \{v\} \text{ y } e \in \mathcal{C} \text{ no ocurre en } \varphi\}$$

Notese que e es el único nombre de constante que ocurre en φ_1 y no ocurre en φ_2. □

Lemma 67. *Todas las reglas excepto las reglas de elección y generalización son universales en el sentido que si φ se deduce de $\psi_1, \ldots, \psi_k$ por alguna de estas reglas, entonces $((\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k) \to \varphi)$ es una sentencia universalmente válida.*

Lemma 68. *Sea $\boldsymbol{\varphi} \in S^{\tau+}$, hay únicos $n \geq 1$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in S^\tau$ tales que $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_1 \ldots \varphi_n$.*

Lemma 69. *Sea $\mathbf{J} \in Just^+$, hay únicos $n \geq 1$ y $J_1, \ldots, J_n \in Just$ tales que $\mathbf{J} = J_1 \ldots J_n$.*

Lemma 70. *Sea $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ una prueba de φ en (Σ, τ).*

1. *Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{J}_i \neq \text{HIPOTESIS}\bar{m}$, para cada $i = 1, \ldots, n(\boldsymbol{\varphi})$. Supongamos que $\mathbf{J}_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ y que $\mathbf{J}_j = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$, con $[\alpha]_1 \notin Num$. Sea $\tilde{\mathbf{J}}$ el resultado de reemplazar en $\mathbf{J}$ la justificación $\mathbf{J}_i$ por* HIPOTESIS$\bar{m}$ *y reemplazar la justificación $\mathbf{J}_j$ por* TESIS$\bar{m}\alpha$, *entonces $(\boldsymbol{\varphi}, \tilde{\mathbf{J}})$ es una prueba de φ en (Σ, τ).*

2. *Sea $\mathcal{C}_1$ el conjunto de nombres de constante que ocurren en alguna $\boldsymbol{\varphi}_i$ y que no pertenecen a $\mathcal{C}$. Sea $e \in \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}$. Sea $\tilde{e} \notin \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1$ tal que $(\mathcal{C} \cup (\mathcal{C}_1 - \{e\}) \cup \{\tilde{e}\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo. Sea $\tilde{\varphi}_i$ = resultado de reemplazar en $\boldsymbol{\varphi}_i$ cada ocurrencia de e por $\tilde{e}$, entonces $(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1 \ldots \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{n(\varphi)}, \mathbf{J})$ es una prueba de φ en (Σ, τ).*

Lemma 71. *Sea (Σ, τ) una teoría.*

(1) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$ entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(2) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ y φ se deduce por alguna regla universal a partir de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(3) Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, para toda sentencia φ.

(4) Si (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.

(5) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ si y solo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.

(6) Si $(\Sigma, \tau) \nvdash \neg\varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.

Proof. (1) Haremos el caso $n = 2$. Supongamos entonces que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \varphi_2$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\}, \tau) \vdash \varphi$. Sean:

- $(\varphi_1^1 \ldots \varphi_{n_1}^1, J_1^1 \ldots J_{n_1}^1)$ una prueba de φ_1 en (Σ, τ).
- $(\varphi_1^2 \ldots \varphi_{n_2}^2, J_1^2 \ldots J_{n_2}^2)$ una prueba de φ_2 en (Σ, τ).
- $(\psi_1 \ldots \psi_n, J_1 \ldots J_n)$ una prueba de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \varphi_2\}, \tau)$.

Notese que por el **Lemma 70**, podemos suponer que estas tres pruebas no comparten ningún nombre de constante auxiliar y que tampoco comparten números asociados a hipotesis o tesis.

Para cada $i = 1, \ldots, n$, definamos $\widetilde{J}_i$ de la siguiente manera:

- Si $\psi_i = \varphi_1$ y J_i = AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J}_i$ = EVOCACION$(\overline{n_1})$
- Si $\psi_i = \varphi_2$ y J_i = AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J}_i$ = EVOCACION$(\overline{n_1 + n_2})$.
- Si $\psi_i \notin \{\varphi_1, \varphi_2\}$ y J_i = AXIOMAPROPIO, entonces $\widetilde{J}_i$ = AXIOMAPROPIO.
- Si J_i = AXIOMALOGICO, entonces $\widetilde{J}_i$ = AXIOMALOGICO
- Si J_i = CONCLUSION, entonces $\widetilde{J}_i$ = CONCLUSION.
- Si J_i = HIPOTESIS$\bar{k}$, entonces $\widetilde{J}_i$ = HIPOTESIS$\bar{k}$

- Si $J_i = \alpha P(\overline{l_1},\dots,\overline{l_k})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i} = \alpha P(\overline{l_1+n_1+n_2},\dots,\overline{l_k+n_1+n_2})$

Para cada $i=1,\dots,n_2$, definamos $\widetilde{J_i^2}$ de la siguiente manera.

- Si $J_i^2 = \text{AXIOMAPROPIO}$, entonces $\widetilde{J_i^2} = \text{AXIOMAPROPIO}$
- Si $J_i^2 = \text{AXIOMALOGICO}$, entonces $\widetilde{J_i^2} = \text{AXIOMALOGICO}$
- Si $J_i^2 = \text{CONCLUSION}$, entonces $\widetilde{J_i^2} = \text{CONCLUSION}$.
- Si $J_i^2 = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$, entonces $\widetilde{J_i^2} = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$
- Si $J_i^2 = \alpha P(\overline{l_1},\dots,\overline{l_k})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i^2} = \alpha P(\overline{l_1+n_1},\dots,\overline{l_k+n_1})$

Luego,

$$(\varphi_1^1\dots\varphi_{n_1}^1\varphi_1^2\dots\varphi_{n_2}^2\psi_1\dots\psi_n, J_1^1\dots J_{n_1}^1\widetilde{J_1^2}\dots\widetilde{J_{n_2}^2}\widetilde{J_1}\dots\widetilde{J_n})$$

es una prueba de φ en (Σ,τ).

(2) Supongamos que $(\Sigma,\tau) \vdash \varphi_1,\dots,\varphi_n$ y que φ se deduce por regla R a partir de $\varphi_1,\dots,\varphi_n$, con R universal. Notese que:

1.	φ_1	AXIOMAPROPIO
2.	φ_2	AXIOMAPROPIO
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n.	φ_n	AXIOMAPROPIO
$n+1$.	φ	$\text{R}(\bar{1},\dots,\bar{n})$

es una prueba de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1,\dots,\varphi_n\},\tau)$, lo cual por (1) nos dice que $(\Sigma,\tau) \vdash \varphi$.

(3) Si (Σ,τ) es inconsistente, entonces por definición tenemos que $(\Sigma,\tau) \vdash (\psi\wedge\neg\psi)$ para alguna sentencia ψ. Dada una sentencia cualquiera φ tenemos que φ se deduce por la regla del absurdo a partir de $(\psi\wedge\neg\psi)$ con lo cual (2) nos dice que $(\Sigma,\tau) \vdash \varphi$.

(4) Supongamos (Σ,τ) es consistente y $(\Sigma,\tau) \vdash \varphi$. Si $(\Sigma \cup \{\varphi\},\tau)$ fuera inconsistente, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\},\tau) \vdash (\psi\wedge\neg\psi)$, para alguna sentencia ψ, lo cual por (1) nos diría que $(\Sigma,\tau) \vdash (\psi\wedge\neg\psi)$, es decir, que (Σ,τ) es inconsistente.

(5) $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos $(\Sigma,\tau) \vdash (\varphi\to\psi)$, entonces tenemos que $(\Sigma \cup \{\varphi\},\tau) \vdash (\varphi\to\psi),\varphi$, lo cual por (2) nos dice que $(\Sigma \cup \{\varphi\},\tau) \vdash \psi$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que $(\Sigma\cup\{\varphi\},\tau) \vdash \psi$. Sea $(\varphi_1\dots\varphi_n, J_1\dots J_n)$ una prueba de ψ en $(\Sigma\cup\{\varphi\},\tau)$. Notese que podemos suponer que J_n es de la forma $P(\overline{l_1},\dots,\overline{l_k})$. Definimos $\widetilde{J_i} = \text{TESIS}\bar{m}P(\overline{l_1+1},\dots,\overline{l_k+1})$, donde m es tal que ninguna J_i es igual a $\text{HIPOTESIS}\bar{m}$.

Para cada $i=1,\dots,n-1$, definamos $\widetilde{J_i}$ de la siguiente manera:

- Si $\varphi_i = \varphi$ y $J_i = \text{AXIOMAPROPIO}$, entonces $\widetilde{J_i} = \text{EVOCACION}(1)$
- Si $\varphi_i \neq \varphi$ y $J_i = \text{AXIOMAPROPIO}$, entonces $\widetilde{J_i} = \text{AXIOMAPROPIO}$
- Si $J_i = \text{AXIOMALOGICO}$, entonces $\widetilde{J_i} = \text{AXIOMALOGICO}$
- Si $J_i = \text{CONCLUSION}$, entonces $\widetilde{J_i} = \text{CONCLUSION}$
- Si $J_i = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$ entonces $\widetilde{J_i} = \text{HIPOTESIS}\bar{k}$

- Si $J_i = \alpha P(\overline{l_1}, \dots, \overline{l_k})$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\widetilde{J_i} = \alpha P(\overline{l_1+1}, \dots, \overline{l_k+1})$

Luego,

$$(\varphi\varphi_1 \dots \varphi_n(\varphi \to \psi), \text{HIPOTESIS}\bar{m}\widetilde{J_1} \dots \widetilde{J_n}\text{CONCLUSION})$$

es una prueba de $(\varphi \to \psi)$ en (Σ, τ).

(6) Supongamos que $(\Sigma, \tau) \not\vdash \neg\varphi$ y supongamos que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$. Por (5), tenemos que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to (\psi \wedge \neg\psi))$. La siguiente prueba atestigua que $(\Sigma, \tau) \vdash \neg\varphi$:

1.	$\varphi \to (\psi \wedge \neg\psi)$	AXIOMAPROPIO
2.	$\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$	AXIOMALOGICO
3.	$\neg\neg\varphi \leftrightarrow (\psi \wedge \neg\psi)$	REEMPLAZO$(2,1)$
4.	$\neg\neg\varphi \to (\psi \wedge \neg\psi)$	EQUIVALENCIAELIMINACION(3)
5.	$\neg\neg\neg\varphi$	ABSURDO(4)
6.	$\neg\varphi$	REEMPLAZO$(2,5)$

lo cual es absurdo y por lo tanto $(\Sigma \ \cup \ \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.

□

Theorem 72. ***(Corrección)*** $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ *implica* $(\Sigma, \tau) \models \varphi$.

Corollary 73. *Si* (Σ, τ) *tiene un modelo, entonces* (Σ, τ) *es consistente.*

Proof. Supongamos $\mathbf{A}$ es un modelo de (Σ, τ). Si (Σ, τ) fuera inconsistente, tendriamos que hay una $\varphi \in S^\tau$ tal que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$, lo cual por el **Theorem 72**, obtendríamos que $\mathbf{A} \models (\varphi \wedge \neg\varphi)$, lo cual es un absurdo y vino de suponer que (Σ, τ) era inconsistente. □

Lemma 74. $\dashv\vdash_T$ *es una relación de equivalencia.*

Proof.

- *Reflexiva:* La relación es reflexiva ya que $(\varphi \leftrightarrow \varphi)$ es un axioma lógico, y por lo tanto $((\varphi \leftrightarrow \varphi), \text{AXIOMALOGICO})$ es una prueba de $(\varphi \leftrightarrow \varphi)$ en T.
- *Simétrica:* Supongamos que $\varphi \dashv\vdash_T \psi$, es decir $T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$. Ya que $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ se deduce de $\psi \leftrightarrow \varphi$ por la regla de conmutatividad, el **Lemma 71**, nos dice que $T \vdash (\psi \leftrightarrow \varphi)$, es decir, $\psi \dashv\vdash_T \varphi$.
- *Transitiva:* Supongamos que $\varphi \dashv\vdash_T \psi$ y que $\psi \dashv\vdash_T \phi$, es decir $T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ y $T \vdash (\psi \leftrightarrow \phi)$. Ya que $(\varphi \leftrightarrow \phi)$ se deduce de $\varphi \leftrightarrow \psi$ y $\psi \leftrightarrow \phi$ por la regla de transitividad, el **Lemma 71**, nos dice que $T \vdash (\varphi \leftrightarrow \phi)$, es decir, $\varphi \dashv\vdash_T \phi$.

□

Lemma 75. *Dada una teoria* $T = (\Sigma, \tau)$*, se tiene que:*

(1) $\{\varphi \in S^\tau : \varphi$ *es un teorema de* $T\} \in S^\tau / \dashv\vdash_T$

(2) $\{\varphi \in S^\tau : \varphi$ *es refutable en* $T\} \in S^\tau / \dashv\vdash_T$

Proof. (1) $\{\varphi \in S^\tau : \varphi \text{ es un teorema de T}\} \in S^\tau/ \dashv\vdash_T$: Sean φ, ψ teoremas en T, veremos que $\varphi \dashv\vdash_T \psi$. Notese que

1.	φ	HIPOTESIS1
2.	ψ	TESIS1AXIOMAPROPIO
3.	$(\varphi \to \psi)$	CONCLUSION
4.	ψ	HIPOTESIS2
5.	φ	TESIS2AXIOMAPROPIO
6.	$(\psi \to \varphi)$	CONCLUSION
7.	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION$(3,6)$

justifica que $(\Sigma \cup \{\varphi, \psi\}, \tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ lo cual por el **Lemma 71** tenes que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$, obteniendo que $\varphi \dashv\vdash_T \psi$.

(2) $\{\varphi \in S^\tau : \varphi \text{ es refutable en T}\} \in S^\tau/ \dashv\vdash_T$: Sean φ, ψ refutables en T, veremos que $\varphi \dashv\vdash_T \psi$. Notese que

1.	φ	HIPOTESIS1
2.	$\neg\psi$	HIPOTESIS2
3.	$\neg\varphi$	AXIOMAPROPIO
4.	$(\varphi \wedge \neg\varphi)$	TESIS2CONJUNCIONINTRODUCCION$(1,3)$
5.	$\neg\psi \to (\varphi \wedge \neg\varphi)$	CONCLUSION
6.	ψ	TESIS1ABSURDO(5)
7.	$(\varphi \to \psi)$	CONCLUSION
8.	ψ	HIPOTESIS3
9.	$\neg\varphi$	HIPOTESIS4
10.	$\neg\psi$	AXIOMAPROPIO
11.	$(\psi \wedge \neg\psi)$	TESIS4CONJUNCIONINTRODUCCION$(8,10)$
12.	$\neg\varphi \to (\psi \wedge \neg\psi)$	CONCLUSION
13.	φ	TESIS3ABSURDO(5)
14.	$(\psi \to \varphi)$	CONCLUSION
15.	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION$(7,14)$

justifica que $(\Sigma \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\}, \tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ lo ual por el **Lemma 71** tenes que $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$, obteniendo que $\varphi \dashv\vdash_T \psi$.

□

Lemma 76. *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría, entonces $(S^\tau/\dashv\vdash, \mathsf{s}^T, \mathsf{i}^T, 0^T, 1^T)$ es un álgebra de Boole.*

Proof. Por definición de Álgebra de Boole, debemos probar que cualesquiera sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S^\tau$, se cumplen las siguientes igualdades:

(1) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_1]_T = [\varphi_1]_T$: Sea $\varphi_1 \in S^\tau$ fija. Por la definición de la operación i^T debemos probar que:

$$[(\varphi_1 \wedge \varphi_1)]_T = [\varphi_1]_T$$

es decir, debemos probar que $T \vdash ((\varphi_1 \wedge \varphi_1) \leftrightarrow \varphi_1)$.

1.	$(\varphi_1 \wedge \varphi_1)$	HIPOTESIS1
2.	φ_1	TESIS1CONJUNCIONELIMINACION(1)
3.	$(\varphi_1 \wedge \varphi_1) \to \varphi_1$	CONCLUSION
4.	φ_1	HIPOTESIS2
5.	$(\varphi_1 \wedge \varphi_1)$	TESIS2CONJUNCIONINTRODUCCION(4)
6.	$\varphi_1 \to (\varphi_1 \wedge \varphi_1)$	CONCLUSION
7.	$(\varphi_1 \wedge \varphi_1) \leftrightarrow \varphi_1$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION$(3,6)$

(2) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_1]_T = [\varphi_1]_T$: Sea $\varphi_1 \in S^\tau$ fija. Por la definición de la operación s^T debemos probar que:

$$[(\varphi_1 \vee \varphi_1)]_T = [\varphi_1]_T$$

es decir, debemos probar que $T \vdash ((\varphi_1 \vee \varphi_1) \leftrightarrow \varphi_1)$.

1.	$(\varphi_1 \vee \varphi_1)$	HIPOTESIS1
2.	$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_1$	AXIOMALOGICO
3.	$\varphi_1 \to \varphi_1$	EQUIVALENCIAELIMINACION(2)
4.	φ_1	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(1,3,3)$
5.	$(\varphi_1 \vee \varphi_1) \to \varphi_1$	CONCLUSION
6.	φ_1	HIPOTESIS3
7.	$(\varphi_1 \vee \varphi_1)$	TESIS3DISJUNCIONINTRODUCCION(6)
8.	$\varphi \to (\varphi_1 \vee \varphi_1)$	CONCLUSION
9.	$(\varphi_1 \vee \varphi_1) \leftrightarrow \varphi_1$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION$(5,8)$

(3) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_2]_T = [\varphi_2]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_1]_T$: Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in S^\tau$ fijas. Por la definición de la operación i^T debemos probar que:

$$[(\varphi_1 \wedge \varphi_2)]_T = [(\varphi_2 \wedge \varphi_1)]_T$$

es decir, debemos probar que $T \vdash ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \leftrightarrow (\varphi_2 \wedge \varphi_1))$.

1.	$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	HIPOTESIS1
2.	φ_1	CONJUNCIONELIMINACION(1)
3.	φ_2	CONJUNCIONELIMINACION(1)
4.	$(\varphi_2 \wedge \varphi_1)$	TESIS1CONJUNCIONINTRODUCCION$(3,2)$
5.	$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to (\varphi_2 \wedge \varphi_1)$	CONCLUSION
6.	$(\varphi_2 \wedge \varphi_1)$	HIPOTESIS2
7.	φ_2	CONJUNCIONELIMINACION(6)
8.	φ_1	CONJUNCIONELIMINACION(6)
9.	$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	TESIS1CONJUNCIONINTRODUCCION$(8,7)$
10.	$(\varphi_2 \wedge \varphi_1) \to (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	CONCLUSION
11.	$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \leftrightarrow (\varphi_2 \wedge \varphi_1)$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION$(5,10)$

(4) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_2]_T = [\varphi_2]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_1]_T$: Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in S^\tau$ fijas. Por la definición de la operación s^T debemos probar que:

$$[(\varphi_1 \vee \varphi_2)]_T = [(\varphi_2 \vee \varphi_1)]_T$$

es decir, debemos probar que $T \vdash ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \leftrightarrow (\varphi_2 \vee \varphi_1))$.

1.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	HIPOTESIS1
2.	φ_1	HIPOTESIS2
3.	$(\varphi_2 \vee \varphi_1)$	TESIS2DISJUNCIONINTRODUCCION(2)
4.	$\varphi_1 \to (\varphi_2 \vee \varphi_1)$	CONCLUSION
5.	φ_2	HIPOTESIS3
6.	$(\varphi_2 \vee \varphi_1)$	TESIS3DISJUNCIONINTRODUCCION(2)
7.	$\varphi_2 \to (\varphi_2 \vee \varphi_1)$	CONCLUSION
8.	$(\varphi_2 \vee \varphi_1)$	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(1, 4, 7)$
9.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2) \to (\varphi_2 \vee \varphi_1)$	CONCLUSION
10.	$(\varphi_2 \vee \varphi_1)$	HIPOTESIS4
11.	φ_2	HIPOTESIS5
12.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	TESIS5DISJUNCIONINTRODUCCION(11)
13.	$\varphi_2 \to (\varphi_1 \vee \varphi_2)$	CONCLUSION
14.	φ_1	HIPOTESIS6
15.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	TESIS6DISJUNCIONINTRODUCCION(14)
16.	$\varphi_1 \to (\varphi_1 \vee \varphi_2)$	CONCLUSION
17.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	TESIS4DIVISIONPORCASOS$(10, 13, 16)$
18.	$(\varphi_2 \vee \varphi_1) \to (\varphi_1 \vee \varphi_2)$	CONCLUSION
19.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2) \leftrightarrow (\varphi_2 \vee \varphi_1)$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION$(9, 18)$

(5) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T([\varphi_2]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_2]_T) \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_3]_T$: Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S^\tau$ fijas. Por la definición de la operación i^T debemos probar que:

$$[(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3))]_T = [((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3)]_T$$

es decir, debemos probar que $T \vdash ((\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)) \leftrightarrow ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3))$.

1.	$(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3))$	HIPOTESIS1
2.	φ_1	CONJUNCIONELIMINACION(1)
3.	$(\varphi_2 \wedge \varphi_3)$	CONJUNCIONELIMINACION(1)
4.	φ_2	CONJUNCIONELIMINACION(3)
5.	φ_3	CONJUNCIONELIMINACION(3)
6.	$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	CONJUNCIONINTRODUCCION$(2, 4)$
7.	$((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3)$	TESIS1CONJUNCIONINTRODUCCION$(6, 5)$
8.	$(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)) \to ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3)$	CONCLUSION
9.	$((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3)$	HIPOTESIS2
10.	$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	CONJUNCIONELIMINACION(9)
11.	φ_3	CONJUNCIONELIMINACION(9)
12.	φ_1	CONJUNCIONELIMINACION(10)
13.	φ_2	CONJUNCIONELIMINACION(10)
14.	$(\varphi_2 \wedge \varphi_3)$	CONJUNCIONINTRODUCCION$(13, 11)$
15.	$(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3))$	TESIS1CONJUNCIONINTRODUCCION$(12, 14)$
16.	$((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \to (\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3))$	CONCLUSION
17.	$(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)) \leftrightarrow ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3)$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION$(8, 16)$

(6) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ ([\varphi_2]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_2]_T) \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_3]_T$: Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S^\tau$ fijas. Por la definición de la operación s^T debemos probar que:

$$[(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))]_T = [((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)]_T$$

es decir, debemos probar que $T \vdash ((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \leftrightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$. Notese que por el **Lemma 71**, basta con probar que:

$$\begin{array}{lcl} T & \vdash & ((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)) \\ T & \vdash & (((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))) \end{array}$$

Prueba de $((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3))$

1.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	HIPOTESIS1
2.	φ_1	HIPOTESIS2
3.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(2)
4.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS2DISJUNCIONINTRODUCCION(3)
5.	$\varphi_1 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION
6.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	HIPOTESIS3
7.	φ_2	HIPOTESIS4
8.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(7)
9.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS4DISJUNCIONINTRODUCCION(8)
10.	$\varphi_2 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION
11.	φ_3	HIPOTESIS5
12.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS5DISJUNCIONINTRODUCCION(11)
13.	$\varphi_3 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION
14.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS3DIVISIONPORCASOS$(6, 10, 13)$
15.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION
16.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(1, 5, 15)$
17.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	CONCLUSION

Prueba de $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$

1.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	HIPOTESIS1
2.	φ_3	HIPOTESIS2
3.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(2)
4.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	TESIS2DISJUNCIONINTRODUCCION(3)
5.	$\varphi_3 \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
6.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	HIPOTESIS3
7.	φ_1	HIPOTESIS4
8.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	TESIS4DISJUNCIONINTRODUCCION(7)
9.	$\varphi_1 \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
10.	φ_2	HIPOTESIS5
11.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(10)
12.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	TESIS5DISJUNCIONINTRODUCCION(11)
13.	$\varphi_2 \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
14.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	TESIS3DIVISIONPORCASOS$(6, 9, 13)$
15.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
16.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_2) \vee \varphi_3))$	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(1, 15, 5)$
17.	$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	CONCLUSION

(7) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ ([\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_2]_T) = [\varphi_1]_T$: Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in S^\tau$ fijas. Por la definición de la operación s^T debemos probar que:

$$[(\varphi_1 \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_2))]_T = [\varphi_1]_T$$

es decir, debemos probar que $T \vdash ((\varphi_1 \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_2)) \leftrightarrow \varphi_1)$.

1.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$	HIPOTESIS1
2.	$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_1$	AXIOMALOGICO
3.	$\varphi_1 \to \varphi_1$	EQUIVALENCIAELIMINACION(2)
4.	$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	HIPOTESIS2
5.	φ_1	TESIS2CONJUNCIONELIMINACION(4)
6.	$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \varphi_1$	CONCLUSION
7.	φ_1	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(1,3,6)$
8.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_2)) \to \varphi_1$	CONCLUSION
9.	φ_1	HIPOTESIS3
10.	$(\varphi_1 \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$	TESIS3DISJUNCIONINTRODUCCION(9)
11.	$\varphi_1 \to (\varphi_1 \vee (\varphi \wedge \varphi_2))$	CONCLUSION
12.	$((\varphi_1 \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_2)) \leftrightarrow \varphi_1)$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION$(8,11)$

(8) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T([\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_2]_T) = [\varphi_1]_T$: Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in S^\tau$ fijas. Por la definición de la operación i^T debemos probar que:

$$[(\varphi_1 \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2))]_T = [\varphi_1]_T$$

es decir, debemos probar que $T \vdash ((\varphi_1 \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2)) \leftrightarrow \varphi_1)$.

1.	$(\varphi_1 \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2))$	HIPOTESIS1
2.	φ_1	TESIS1CONJUNCIONELIMINACION(1)
3.	$(\varphi_1 \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2)) \to \varphi_1$	CONCLUSION
4.	φ_1	HIPOTESIS2
5.	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(4)
6.	$\varphi_1 \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2)$	TESIS2CONJUNCIONINTRODUCCION$(4,5)$
7.	$\varphi_1 \to \varphi_1 \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2)$	CONCLUSION
8.	$((\varphi_1 \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2)) \leftrightarrow \varphi_1)$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION$(3,7)$

(9) $0^T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_1]_T = [\varphi_1]_T$: Ya que $(\varphi \wedge \neg\varphi)$ es refutable en T, tenemos que el **Lemma 75** nos dice que $0^T = \{\varphi \in S^\tau : \varphi \text{ es refutable de } T\} = [(\varphi \wedge \neg\varphi)]_T$, es decir, que debemos probar que para cualquier $\varphi_1 \in S^\tau$, se da que:

$$[0]_T \ \mathsf{i}^T \ [(\varphi \wedge \neg\varphi)]_T = \{\varphi \in S^\tau : \varphi \text{ es refutable en } T\}$$

Ya que $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ [\forall x_1(x_1 \equiv x_1)]_T = [\varphi_1 \vee \forall x_1(x_1 \equiv x_1)]_T$, debemos probar que $\varphi_1 \vee \forall x_1(x_1 \equiv x_1)$ es un teorema de T, lo cual es atestiguado por la siguiente prueba

1.	$c \equiv c$	AXIOMALOGICO
2.	$\forall x_1(x_1 \equiv x_1)$	GENERALIZACION(1)
3.	$(\varphi_1 \vee \forall x_1(x_1 \equiv x_1))$	DISJUNCIONINTRODUCCION(2)

(10) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ 1^T = 1^T$: Ya que $\forall x_1(x_1 \equiv x_1)$ es un teorema de T, atestiguado por la prueba

1.	$c \equiv c$	AXIOMALOGICO
2.	$\forall x_1(x_1 \equiv x_1)$	GENERALIZACION(1)

donde c es un nombre de constante que no pertenece a $\mathcal{C}$ y tal que $(\mathcal{C} \cup \{c\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo. Tenemos que el **Lemma 75** nos dice que $1^T = \{\varphi \in S^\tau : \varphi \text{ es un teorema de } T\} = [\forall x_1(x_1 \equiv x_1)]_T$, es decir, que debemos probar que para cualquier $\varphi_1 \in S^\tau$, se da que:

$$[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ [\forall x_1(x_1 \equiv x_1)]_T = \{\varphi \in S^\tau : \varphi \text{ es un teorema de } T\}$$

Ya que $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ [\forall x_1(x_1 \equiv x_1)]_T = [\varphi_1 \vee \forall x_1(x_1 \equiv x_1)]_T$, debemos probar que $\varphi_1 \vee \forall x_1(x_1 \equiv x_1)$ es un teorema de T, lo cual es atestiguado por la siguiente prueba

1.	$c \equiv c$	AXIOMALOGICO
2.	$\forall x_1(x_1 \equiv x_1)$	GENERALIZACION(1)
3.	$(\varphi_1 \vee \forall x_1(x_1 \equiv x_1))$	DISJUNCIONINTRODUCCION(2)

(11) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{s}^T \ ([\varphi_1]_T)^{\mathsf{c}^T} = 1^T$: Sea $\varphi_1 \in S^\tau$ fija. Ya que $\forall x_1(x_1 \equiv x_1)$ es un teorema de T y por la definición de la operación s^T debemos probar que:

$$[(\varphi_1 \vee \neg\varphi_1)]_T = [\forall x_1(x_1 \equiv x_1)]_T$$

es decir, debemos probar que $T \vdash ((\varphi_1 \vee \neg\varphi_1) \leftrightarrow \forall x_1(x_1 \equiv x_1))$.

1.	$(\varphi_1 \vee \neg\varphi_1)$	HIPOTESIS1
2.	$c \equiv c$	AXIOMALOGICO
3.	$\forall x_1(x_1 \equiv x_1)$	TESIS1GENERALIZACION(2)
4.	$(\varphi_1 \vee \neg\varphi_1) \rightarrow \forall x_1(x_1 \equiv x_1)$	CONCLUSION
5.	$\forall x_1(x_1 \equiv x_1)$	HIPOTESIS2
6.	$(\varphi_1 \vee \neg\varphi_1)$	TESIS2AXIOMALOGICO
7.	$\forall x_1(x_1 \equiv x_1) \rightarrow (\varphi_1 \vee \neg\varphi_1)$	CONCLUSION
8.	$(\varphi_1 \vee \neg\varphi_1) \leftrightarrow \forall x_1(x_1 \equiv x_1)$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION$(8, 16)$

donde c es un nombre de constante que no pertenece a $\mathcal{C}$ y tal que $(\mathcal{C} \cup \{c\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo.

(12) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ ([\varphi_1]_T)^{\mathsf{c}^T} = 0^T$

(13) $[\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T([\varphi_2]_T \ \mathsf{s}^T \ [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_2]_T) \ \mathsf{s}^T \ ([\varphi_1]_T \ \mathsf{i}^T \ [\varphi_3]_T)$: Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S^\tau$ fijas. Por la definición de las operaciones $\mathsf{s}^T, \mathsf{i}^T$ debemos probar que:

$$[(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3))]_T = [((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3))]_T$$

es decir, debemos probar que $T \vdash (\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \leftrightarrow ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3))$. Notese que por el **Lemma 71**, basta con probar que:

$$\begin{array}{lll} T & \vdash & (\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)) \\ T & \vdash & ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)) \rightarrow (\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \end{array}$$

Prueba de $(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3))$

1.	$(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	HIPOTESIS1
2.	φ_1	CONJUNCIONELIMINACION(1)
3.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	CONJUNCIONELIMINACION(1)
4.	φ_2	HIPOTESIS2
5.	$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	CONJUNCIONINTRODUCCION$(2, 4)$
6.	$((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3))$	TESIS2DISJUNCIONINTRODUCCION(5)
7.	$\varphi_2 \rightarrow ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3))$	CONCLUSION
8.	φ_3	HIPOTESIS3
9.	$(\varphi_1 \wedge \varphi_3)$	CONJUNCIONINTRODUCCION$(2, 8)$
10.	$((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3))$	TESIS3DISJUNCIONINTRODUCCION(9)
11.	$\varphi_3 \rightarrow ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3))$	CONCLUSION
12.	$((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3))$	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(3, 7, 11)$
13.	$(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3))$	CONCLUSION

Prueba de $((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)) \rightarrow (\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3))$

1.	$((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3))$	HIPOTESIS1
2.	$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	HIPOTESIS2
3.	φ_1	CONJUNCIONELIMINACION(2)
4.	φ_2	CONJUNCIONELIMINACION(2)
5.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(4)
6.	$\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$	TESIS2CONJUNCIONINTRODUCCION$(3,5)$
7.	$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \rightarrow (\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
8.	$(\varphi_1 \wedge \varphi_3)$	HIPOTESIS3
9.	φ_1	CONJUNCIONELIMINACION(8)
10.	φ_3	CONJUNCIONELIMINACION(8)
11.	$(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(10)
12.	$\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$	TESIS3CONJUNCIONINTRODUCCION$(9,11)$
13.	$(\varphi_1 \wedge \varphi_3) \rightarrow (\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	CONCLUSION
14.	$(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(1,7,13)$
15.	$((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)) \rightarrow (\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	CONCLUSION

□

Lemma 77. *Sea T una teoría y sea $\leq^T$ el orden parcial asociado al álgebra de Boole $\mathcal{A}_T$ (es decir $[\varphi]_T \leq^T [\psi]_T$ si y solo si $[\varphi]_T \ \mathsf{s}^T \ [\psi]_T = [\psi]_T$), entonces se tiene que:*

$$[\varphi]_T \leq^T [\psi]_T \textit{si y solo si } T \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$$

Proof. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos $[\varphi]_T \leq^T [\psi]_T$, es decir, $[\varphi]_T \ \mathsf{s}^T \ [\psi]_T = [\psi]_T$. Por la definición de s^T, tenemos que $[(\varphi \vee \psi)]_T = [\psi]_T$, es decir, $T \vdash ((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \psi)$. Luego, la siguiente prueba atestigua que $T \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$

1.	φ	HIPOTESIS1
2.	$(\varphi \vee \psi)$	DISJUNCIONINTRODUCCION(1)
3.	$(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \psi$	AXIOMAPROPIO
4.	$(\varphi \vee \psi) \rightarrow \psi$	EQUIVALENCIAELIMINACION(3)
5.	ψ	TESIS1MODUSPONENS$(2,4)$
6.	$\varphi \rightarrow \psi$	CONCLUSION

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos $T \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$, la siguiente prueba atestigua que $T \vdash ((\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \psi)$.

1.	$(\varphi \vee \psi)$	HIPOTESIS1
2.	$\varphi \rightarrow \psi$	AXIOMAPROPIO
3.	$\psi \leftrightarrow \psi$	AXIOMALOGICO
4.	$\psi \rightarrow \psi$	EQUIVALENCIAELIMINACION(3)
5.	ψ	TESIS1DIVISIONPORCASOS$(1,2,4)$
6.	$(\varphi \vee \psi) \rightarrow \psi$	CONCLUSION
7.	ψ	HIPOTESIS2
8.	$(\varphi \vee \psi)$	TESIS2DISJUNCIONINTRODUCCION
9.	$\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$	CONCLUSION
10.	$(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \psi$	EQUIVALENCIAINTRODUCCION$(6,9)$

Esto nos dice que $[\varphi \vee \psi]_T = [\psi]_T$, que por la definición de s^T, tenemos que $[\varphi]_T \ \mathsf{s}^T \ [\psi]_T = [\psi]_T$, es decir, $[\varphi_T] \leq^T [\psi]_T$. □

Lemma 78. *Sean $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ y $\tau' = (\mathcal{C}', \mathcal{F}', \mathcal{R}', a')$ tipos.*

1. Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}', \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}', \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$ y $a' \mid_{\mathcal{F}\cup\mathcal{R}} = a$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ implica $(\Sigma, \tau') \vdash \varphi$.

2. Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}', \mathcal{F} = \mathcal{F}', \mathcal{R} = \mathcal{R}'$ y $a' = a$, entonces $(\Sigma, \tau') \vdash \varphi$ implica $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, cada vez que $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq S^{\tau}$.

Proof.

(1) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. Sea $(\varphi_1 \ldots \varphi_n, J_1 \ldots J_n)$ la prueba de φ en (Σ, τ). Sea $\mathcal{C}_1$ el conjunto de nombres de constante que ocurren en alguna φ_i y que no pertenecen a $\mathcal{C}$. Notese que aplicando varias veces el **Lemma 70**, podemos obtener una prueba $(\tilde{\varphi}_1 \ldots \tilde{\varphi}_n, J_1 \ldots J_n)$ de φ en (Σ, τ) la cual cumple que los nombres de constante que ocurren en alguna ψ_i y que no pertenecen a $\mathcal{C}$ no pertenecen a $\mathcal{C}'$. Luego, $(\tilde{\varphi}_1 \ldots \tilde{\varphi}_n, J_1 \ldots J_n)$ es una prueba de φ en (Σ, τ'), con lo cual $(\Sigma, \tau') \vdash \varphi$.

(2) Supongamos $(\Sigma, \tau') \vdash \varphi$. Sea $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ de φ en (Σ, τ'). Veremos que $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{J})$ es una prueba de φ en (Σ, τ). Recordemos la definición de prueba:

Sea (Σ, τ) una teoría de primer orden. Sea φ una sentencia de tipo τ. Una **prueba** de φ en (Σ, τ) será un par adecuado $(\varphi, \mathbf{J})$ de algún tipo $\tau_1 = (\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$, con $\mathcal{C}_1$ finito y disjunto con $\mathcal{C}$, tal que

(1) Cada φ_i es una sentencia de tipo τ_1

(2) $\varphi_{n(\varphi)} = \varphi$

(3) Si $\langle i, j\rangle \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$, entonces $\mathbf{J}_{j+1}$ es de la forma αCONCLUSION y $\varphi_{j+1} = (\varphi_i \to \varphi_j)$

(4) Para cada $i = 1, \ldots, n(\varphi)$, se da una de las siguientes:

(a) $\mathbf{J}_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$ para algún $k \in \mathbf{N}$

(b) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αCONCLUSION y hay un j tal que $\langle j, i-1\rangle \in \mathcal{B}^{\mathbf{J}}$ y $\varphi_i = (\varphi_j \to \varphi_{i-1})$

(c) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αAXIOMALOGICO y φ_i es un axioma lógico de tipo τ_1

(d) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αAXIOMAPROPIO y $\varphi_i \in \Sigma$

(e) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αPARTICULARIZACION($\bar{l}$), con l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Partic^{\tau_1}$

(f) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αCOMMUTATIVIDAD($\bar{l}$), con l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Commut^{\tau_1}$

(g) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αABSURDO($\bar{l}$), con l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Absur^{\tau_1}$

(h) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αEVOCACION($\bar{l}$), con l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Evoc^{\tau_1}$

(i) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αEXISTENCIA($\bar{l}$), con l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Exist^{\tau_1}$

(j) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αCONJUNCIONELIMINACION($\bar{l}$), con l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in ConjElim^{\tau_1}$

(k) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αDISJUNCIONINTRODUCCION($\bar{l}$), con l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in DisjInt^{\tau_1}$

(l) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αEQUIVALENCIAELIMINACION($\bar{l}$), con l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in EquivElim^{\tau_1}$

(m) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αMODUSPONENS($\overline{l_1}, \overline{l_2}$), con l_1 y l_2 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_i) \in ModPon^{\tau_1}$

(n) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αCONJUNCIONINTRODUCCION($\overline{l_1}, \overline{l_2}$), con l_1 y l_2 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_i) \in ConjInt^{\tau_1}$

(o) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αEQUIVALENCIAINTRODUCCION($\overline{l_1}, \overline{l_2}$), con l_1 y l_2 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_i) \in EquivInt^{\tau_1}$

(p) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αDISJUNCIONELIMINACION$(\overline{l_1}, \overline{l_2})$, con l_1 y l_2 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_i) \in DisjElim^{\tau_1}$

(q) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αREEMPLAZO$(\overline{l_1}, \overline{l_2})$, con l_1 y l_2 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_i) \in Reemp^{\tau_1}$

(r) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αTRANSITIVIDAD$(\overline{l_1}, \overline{l_2})$, con l_1 y l_2 anteriores a i y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_i) \in Trans^{\tau_1}$

(s) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αDIVISIONPORCASOS$(\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3})$, con l_1, l_2 y l_3 anteriores a i y y $(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \varphi_{l_3}, \varphi_i) \in DivPorCas^{\tau_1}$

(t) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αELECCION$(\bar{l})$, con l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Elec^{\tau_1}$ vía el nombre de constante e, el cual no pertenece a $\mathcal{C}$ y no ocurre en $\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}$.

(u) $\mathbf{J}_i$ es de la forma αGENERALIZACION$(\bar{l})$, con l anterior a i y $(\varphi_l, \varphi_i) \in Generaliz^{\tau_1}$ vía el nombre de constante c el cual cumple:

  (i) $c \notin \mathcal{C}$

  (ii) c no es un nombre de constante que ocurra en φ el cual sea introducido por la aplicación de la regla de elección, es decir para cada $u \in \{1, \ldots, n(\varphi)\}$, si $\mathbf{J}_u$ es de la forma αELECCION$(\bar{v})$, entonces no se da que $(\varphi_v, \varphi_u) \in Elec^{\tau_1}$ vía c.

  (iii) c no ocurre en ninguna hipotesis de φ_l.

  (iv) Ningún nombre de constante que ocurra en φ_l o en sus hipotesis, depende de c.

Ya que $(\varphi, \mathbf{J})$ es una prueba de φ en (Σ, τ') hay un conjunto finito $\mathcal{C}_1$, disjunto con $\mathcal{C}'$, tal que $(\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}_1, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo y cada φ_i es una sentencia de tipo $(\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}_1, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$. Notese que $\widetilde{\mathcal{C}_1} = \mathcal{C}_1 \cup (\mathcal{C}' - \mathcal{C})$ es tal que $(\mathcal{C} \cup \widetilde{\mathcal{C}_1}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ es un tipo y cada φ_i es una sentencia de tipo $(\mathcal{C} \cup \widetilde{\mathcal{C}_1}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$, con lo cual $(\varphi, \mathbf{J})$ cumple el punto (1) de la definición de prueba. Con la excepción de los puntos 4(f) y 4(g)i para los cuales es necesario notar que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$, todos los demás puntos se cumplen en forma directa.

$\square$

Lemma 79. *Sea (Σ, τ) una teoría y supongamos que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de Σ, entonces para cada formula $\varphi =_d \varphi(v)$, se tiene que $[\forall v \varphi(v)]_T = \inf(\{[\varphi(t)]_T : t$ es un término cerrado$\})$.*

Lemma 80. ***(Coincidencia)*** *Sean τ y τ' dos tipos cualesquiera y sea $\tau_\cap$ dado por:*

- $\mathcal{C}_\cap = \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$
- $\mathcal{F}_\cap = \{f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' : a(f) = a'(f)\}$
- $\mathcal{R}_\cap = \{r \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}' : a(r) = a'(r)\}$
- $a_\cap = a \mid_{\mathcal{F}_\cap \cup \mathcal{R}_\cap}$

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ modelos de tipo τ y τ' respectivamente. Supongamos que $A = A'$ y que $c^{\mathbf{A}} = c^{\mathbf{A}'}$, para cada $c \in \mathcal{C}_\cap$, $f^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{A}'}$, para cada $f \in \mathcal{F}_\cap$ y $r^{\mathbf{A}} = r^{\mathbf{A}'}$, para cada $r \in \mathcal{R}_\cap$, entonces:

(a) Para cada $t =_d t(\vec{v}) \in T^{\tau_\cap}$ se tiene que $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{A}'}[\vec{a}]$, para cada $\vec{a} \in A^n$.

(b) Para cada $\varphi =_d \varphi(\vec{v}) \in F^{\tau_\cap}$ se tiene que:

$$\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \text{ si y solo si } \mathbf{A}' \models \varphi[\vec{a}]$$

(c) Si $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq S^{\tau \cap}$, entonces:

$$(\Sigma,\tau) \models \varphi \text{ si y solo si } (\Sigma,\tau') \models \varphi$$

Lemma 81. *Sea τ un tipo. Hay una infinitupla $(\gamma_1,\gamma_2,\dots) \in F^{\tau\mathbb{N}}$ tal que:*

1. *$|Li(\gamma_j)| \leq 1$, para cada $j = 1,2,\dots$*

2. *Si $|Li(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$, para algún $j \in \mathbb{N}$*

Theorem 82. ***(Completitud) (Gödel)*** *Sea $T = (\Sigma,\tau)$ una teoría de primer orden. Si $T \models \varphi$ entonces $T \vdash \varphi$.*

Proof. Primero probaremos completitud para el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de Σ. Lo probaremos por el absurdo, es decir supongamos que φ_0 es tal que $(\Sigma,\tau) \models \varphi_0$ y $(\Sigma,\tau) \nvdash \varphi_0$. Notese que ya que $(\Sigma,\tau) \nvdash \varphi_0$, tenemos que $[\neg\varphi_0] \neq 0^{\mathcal{A}_{(\Sigma,\tau)}}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea $w_j \in Var$ tal que $Li(\gamma_j) \subseteq \{w_j\}$. Para cada j, declaremos $\gamma_j =_d \gamma_j(w_j)$. Notese que por el Lema 163 tenemos que $\inf\{[\gamma_j(t)] : t \in T_c^\tau\} = [\forall w_j \gamma_j(w_j)]$, para cada $j = 1,2,\dots$. Por el Teorema de Rasiova y Sikorski tenemos que hay un filtro primo de $\mathcal{A}_{(\Sigma,\tau)}$, $\mathcal{U}$ el cual cumple:

(a) $[\neg\varphi_0] \in \mathcal{U}$ (b) para cada $j \in \mathbb{N}$, $\{[\gamma_j(t)] : t \in T_c^\tau\} \subseteq \mathcal{U}$ implica que $[\forall w_j \gamma_j(w_j)] \in \mathcal{U}$ Ya que la sucesion de las γ_i cubre todas las formulas con a lo sumo una variable libre, podemos reescribir la propiedad (b) de la siguiente manera

(b)$'$ para cada $\varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau$, si $\{[\varphi(t)] : t \in T_c^\tau\} \subseteq \mathcal{U}$ entonces $[\forall v \varphi(v)] \in \mathcal{U}$ Definamos sobre T_c^τ la siguiente relacion:

$t \bowtie s$si y solo si $[(t \equiv s)] \in \mathcal{U}$.

Veamos entonces que: (1) $\bowtie$ es de equivalencia. (2) Para cada $\varphi =_d \varphi(v_1,\dots,v_n) \in F^\tau$, $t_1,\dots,t_n,s_1,\dots,s_n \in T_c^\tau$, si $t_1 \bowtie s_1$, $t_2 \bowtie s_2$, $\dots$, $t_n \bowtie s_n$, entonces $[\varphi(t_1,\dots,t_n)] \in \mathcal{U}$ si y solo si $[\varphi(s_1,\dots,s_n)] \in \mathcal{U}$. (3) Para cada $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1,\dots,t_n,s_1,\dots,s_n \in T_c^\tau$, $t_1 \bowtie s_1, t_2 \bowtie s_2,\dots,$ $t_n \bowtie s_n$implica $f(t_1,\dots,t_n) \bowtie f(s_1,\dots,s_n)$.

Probaremos (2). Notese que

$(\Sigma,\tau) \vdash ((t_1 \equiv s_1) \wedge (t_2 \equiv s_2) \wedge \dots \wedge (t_n \equiv s_n) \wedge \varphi(t_1,\dots,t_n)) \rightarrow \varphi(s_1,\dots,s_n)$

lo cual nos dice que $[(t_1 \equiv s_1)] \mathsf{i} [(t_2 \equiv s_2)] \mathsf{i} \dots \mathsf{i} [(t_n \equiv s_n)] \mathsf{i} [\varphi(t_1,\dots,t_n)] \leq [\varphi(s_1,\dots,s_n)]$

de lo cual se desprende que $[\varphi(t_1,\dots,t_n)] \in \mathcal{U}$implica $[\varphi(s_1,\dots,s_n)] \in \mathcal{U}$

ya que $\mathcal{U}$ es un filtro. La otra implicacion es analoga. Para probar (3) podemos tomar $\varphi = (f(v_1,\dots,v_n) \equiv f(s_1,\dots,s_n))$ y aplicar (2).

Definamos ahora un modelo $\mathbf{A}_\mathcal{U}$ de tipo τ de la siguiente manera:

- Universo de $\mathbf{A}_\mathcal{U} = T_c^\tau/\bowtie$ - $f^{\mathbf{A}_\mathcal{U}}(t_1/\bowtie,\dots,t_n/\bowtie) = f(t_1,\dots,t_n)/\bowtie$, $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1,\dots,t_n \in T_c^\tau$ - $r^{\mathbf{A}_\mathcal{U}} = \{(t_1/\bowtie,\dots,t_n/\bowtie) : [(t_1,\dots,t_n)] \in \mathcal{U}\}$, $r \in \mathcal{R}_n$. Notese que la definicion de $f^{\mathbf{A}_\mathcal{U}}$ es inambigua por (3). Probaremos las siguientes propiedades basicas:

(4) Para cada $t =_d t(v_1,\dots,v_n) \in T^\tau$, $t_1,\dots,t_n \in T_c^\tau$, tenemos que $t^{\mathbf{A}_\mathcal{U}}[t_1/\bowtie,\dots,t_n/\bowtie] = t(t_1,\dots,t_n)/\bowtie$

(5) Para cada $\varphi =_d \varphi(v_1,\dots,v_n) \in F^\tau$, $t_1,\dots,t_n \in T_c^\tau$, tenemos que $\mathbf{A}_\mathcal{U} \models \varphi[t_1/\bowtie,\dots,t_n/\bowtie]$si y solo si $\mathcal{U}$.

La prueba de (4) es directa por induccion. Probaremos (5) por induccion en el k tal que $\varphi \in F_k^\tau$. El caso $k = 0$ es dejado al lector. Supongamos (5) vale para $\varphi \in F_k^\tau$. Sea $\varphi =_d \varphi(v_1,\dots,v_n) \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$. Hay varios casos:

CASO $\varphi(v_1,\dots,v_n) = (\varphi_1(v_1,\dots,v_n) \vee \varphi_2(v_1,\dots,v_n))$.

Tenemos

$$\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie]$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi_1[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] \text{o } \mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi_2[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie]$$
$$\Updownarrow$$
$$[\varphi_1(t_1, \dots, t_n)] \in \mathcal{U} \text{o } [\varphi_2(t_1, \dots, t_n)] \in \mathcal{U}$$
$$\Updownarrow$$
$$[\varphi_1(t_1, \dots, t_n)] \ \mathsf{s} \ [\varphi_2(t_1, \dots, t_n)] \in \mathcal{U}$$
$$\Updownarrow$$
$$[(\varphi_1(t_1, \dots, t_n) \vee \varphi_2(t_1, \dots, t_n))] \in \mathcal{U}$$
$$\Updownarrow$$
$$[\varphi(t_1, \dots, t_n)] \in \mathcal{U}.$$

CASO $\varphi(v_1, \dots, v_n) = \forall v \varphi_1(v_1, \dots, v_n, v)$. Tenemos

$$\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie]$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi_1[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie, t/\bowtie], \text{ para todo } t \in T_c^\tau$$
$$\Updownarrow$$
$$[\varphi_1(t_1, \dots, t_n, t)] \in \mathcal{U}, \text{ para todo } t \in T_c^\tau$$
$$\Updownarrow$$
$$[\forall v \varphi_1(t_1, \dots, t_n, v)] \in \mathcal{U}$$
$$\Updownarrow$$
$$[\varphi(t_1, \dots, t_n)] \in \mathcal{U}.$$

CASO $\varphi(v_1, \dots, v_n) = \exists v \varphi_1(v_1, \dots, v_n, v)$. Tenemos

$$\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie]$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \varphi_1[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie, t/\bowtie], \text{ para algun } t \in T_c^\tau$$
$$\Updownarrow$$
$$[\varphi_1(t_1, \dots, t_n, t)] \in \mathcal{U}, \text{ para algun } t \in T_c^\tau$$
$$\Updownarrow$$
$$[\varphi_1(t_1, \dots, t_n, t)]^c \notin \mathcal{U}, \text{ para algun } t \in T_c^\tau$$
$$\Updownarrow$$
$$[\neg \varphi_1(t_1, \dots, t_n, t)] \notin \mathcal{U}, \text{ para algun } t \in T_c^\tau$$
$$\Updownarrow$$
$$[\forall v \ \neg \varphi_1(t_1, \dots, t_n, v)] \notin \mathcal{U}$$
$$\Updownarrow$$
$$[\forall v \ \neg \varphi_1(t_1, \dots, t_n, v)]^c \in \mathcal{U}$$
$$\Updownarrow$$
$$[\neg \forall v \ \neg \varphi_1(t_1, \dots, t_n, v)] \in \mathcal{U}$$
$$\Updownarrow$$
$$[\varphi(t_1, \dots, t_n)] \in \mathcal{U}.$$

Pero ahora notese que (5) en particular nos dice que para cada sentencia $\psi \in S^\tau$, $\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \psi$ si y solo si $[\psi] \in \mathcal{U}$. De esta forma llegamos a que $\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \Sigma$ y $\mathbf{A}_{\mathcal{U}} \models \neg \varphi_0$, lo cual contradice la suposicion de que $(\Sigma, \tau) \models \varphi_0$. Ahora supongamos que τ es cualquier tipo. Sean s_1 y s_2 un par de simbolos no pertenecientes a la lista

$\forall \ \exists \ \neg \ \vee \ \wedge \ \rightarrow \ \leftrightarrow \ (\ ) \ , \ \equiv$ X *0* *1* ... *9* **0** **1** ... **9**

y tales que ninguno ocurra en alguna palabra de $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$. Si $(\Sigma, \tau) \models \varphi$, entonces usando el Lema de Coincidencia se puede ver que $(\Sigma, (\mathcal{C} \cup \{s_1 s_2 s_1, s_1 s_2 s_2 s_1, \dots\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)) \models \varphi$, por lo cual $(\Sigma, (\mathcal{C} \cup \{s_1 s_2 s_1, s_1 s_2 s_2 s_1, \dots\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)) \vdash \varphi$.

Pero por Lema 162, tenemos que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. $\square$

Corollary 83. *Toda teoría consistente tiene un modelo.*

Proof. Supongamos (Σ,τ) es consistente y no tiene modelos. Entonces $(\Sigma,\tau) \models (\varphi \wedge \neg\varphi)$, con lo cual por **Completitud**, $(\Sigma,\tau) \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$, lo cual es absurdo. Dicho absurdo vino de suponer que (Σ,τ) no tenía modelos. $\square$

Corollary 84. ***(Teorema de Compacidad)***

(a) Si (Σ,τ) es tal que (Σ_0,τ) tiene un modelo, para cada subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, entonces (Σ,τ) tiene un modelo.

(b) Si $(\Sigma,\tau) \models \varphi$, entonces hay un subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que $(\Sigma_0,\tau) \models \varphi$.

Proof. (a) Si (Σ,τ) no tuviera un modelo, es decir, si fuera inconsistente, habría un subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que la teoría (Σ_0,τ) es inconsistente, lo cual es absurdo, pues cada subconjunto finito de Σ es consistente.

(b) Si $(\Sigma,\tau) \models \varphi$, entonces por **Completitud**, $(\Sigma,\tau) \vdash \varphi$, es decir que hay un subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que $(\Sigma_0,\tau) \vdash \varphi$. Por lo tanto, por **Correción**, $(\Sigma_0,\tau) \models \varphi$.

$\square$

Lemma 85. *Este lema no se evalua.*

Lemma 86. *Este lema no se evalua.*

Lemma 87. *Este lema no se evalua.*

Theorem 88. *Este teorema no se evalua.*

Theorem 89. *Este teorema no se evalua.*

Corollary 90. *Este corolario no se evalua.*

5 La aritmética de Peano

Lemma 91. *$\boldsymbol{\omega}$ es un modelo de Arit.*

Proof. Sea $\psi =_d \psi(v_1,...,v_n,v)$, fórmula de τ_A. Veremos que $\omega \vDash Ind_\psi$. Sea
$\varphi = ((\psi(\vec{v},0) \wedge \forall v\ (\psi(\vec{v},v) \to \psi(\vec{v},v+1))) \to \forall v\ \psi(\vec{v},v))$

Declaremos $\varphi =_d \varphi(v_1,...,v_n)$. Notese que $\omega \vDash Ind_\psi$ si y solo si para cada $a_1,...,a_n \in \omega$ se tiene que $\omega \vDash \varphi[\vec{a}]$. Sean $a_1,...,a_n \in \omega$ fijos. Probaremos que $\omega \vDash \varphi[\vec{a}]$. Notar que si $\omega \nvDash (\psi(\vec{v},0) \wedge \forall v\ (\psi(\vec{v},v) \to \psi(\vec{v},v+1)))[\vec{a}]$

entonces $\omega \vDash \varphi[\vec{a}]$ por lo cual podemos hacer solo el caso en que $\omega \vDash (\psi(\vec{v},0) \wedge \forall v\ (\psi(\vec{v},v) \to \psi(\vec{v},v+1)))[\vec{a}]$

Sea $S = \{a \in \omega : \omega \vDash \psi(\vec{v},v)[\vec{a},a]\}$. Ya que $\omega \vDash \psi(\vec{v},0)[\vec{a}]$, es facil ver usando el lema de reemplazo que $\omega \vDash \psi(\vec{v},v)[\vec{a},0]$, lo cual nos dice que $0 \in S$. Ya que $\omega \vDash (\forall v\ (\psi(\vec{v},v) \to \psi(\vec{v},v+1)))[\vec{a}]$, tenemos que (1) Para cada $a \in \omega$, si $\omega \vDash \psi(\vec{v},v)[\vec{a},a]$, entonces $\omega \vDash \psi(\vec{v},v+1)[\vec{a},a]$. Pero por el lema de reemplazo, tenemos que $\omega \vDash \psi(\vec{v},v+1)[\vec{a},a]$ sii $\omega \vDash \psi(\vec{v},v)[\vec{a},a+1]$, lo cual nos dice que

(2) Para cada $a \in \omega$, si $\omega \vDash \psi(\vec{v},v)[\vec{a},a]$, entonces $\omega \vDash \psi(\vec{v},v)[\vec{a},a+1]$. Ya que (2) nos dice que $a \in S$ implica $a+1 \in S$, tenemos que $S = \omega$ ya que $0 \in S$. Es decir que para cada $a \in \omega$, se da que $\omega \vDash \psi(\vec{v},v)[\vec{a},a]$ lo cual nos dice que $\omega \vDash \forall v\ \psi(\vec{v},v)[\vec{a}]$.

Es rutina probar que ω satisface los otros 15 axiomas de *Arit*. $\square$ $\square$

Proposition 92. *Hay un modelo de Arit el cual no es isomorfo a $\boldsymbol{\omega}$.*

Lemma 93. *Este lema no se evalua.*

Lemma 94. *Este lema no se evalua.*

Lemma 95. *Este lema no se evalua.*

Lemma 96. *Este lema no se evalua.*

Lemma 97. *Este lema no se evalua.*

Lemma 98. *Los conjuntos* $T^{\tau_A^e}, F^{\tau_A^e}, T^{\tau_A}$ *y* F^{τ_A} *son* $\mathcal{A}$*-recursivos.*

Lemma 99. *Los siguientes predicados son* $\mathcal{A}$*-recursivos:*

(a) "v ocurre libremente en φ *a partir de i":* $\omega \times Var \times F^{\tau_A^e} \to \omega$

(b) "$v \in Li(\varphi)$*":* $Var \times F^{\tau_A^e} \to \omega$

(c) "v es sustituible por t en φ*":* $Var \times T^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \to \omega$

Lemma 100. *Las funciones* $\lambda svt[\downarrow_v^t (s)]$ *y* $\lambda\varphi vt[\downarrow_v^t (\varphi)]$ *son* $\mathcal{A}$*-recursivas.*

Lemma 101. *El predicado* $R : F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \times F^{\tau_A^e} \to \omega$*, dado por:*

$$R(\varphi, \tilde{\varphi}, \psi_1, \psi_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{\varphi} = \text{ resultado de reemplazar algunas (posiblemente 0)} \\ & \qquad\quad \text{ocurrencias de } \psi_1 \text{ en } \varphi \text{ por } \psi_2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

es $\mathcal{A}$*-recursivo.*

Lemma 102. *Sea* Σ *un alfabeto finito. Sea* $S \subseteq \Sigma^*$ *un conjunto* Σ*-recursivo. El conjunto* S^+ *es* Σ*-recursivo.*

Lemma 103. *Los conjuntos* $ModPon^{\tau_A^e}, Elect^{\tau_A^e}, Reemp^{\tau_A^e}, ConjInt^{\tau_A^e}, ConjElim^{\tau_A^e}, EquivInt^{\tau_A^e}, DisjElim^{\tau_A^e}, DisjInt^{\tau_A^e}, EquivElim^{\tau_A^e}, Generaliz^{\tau_A^e}, Commut^{\tau_A^e}, Trans^{\tau_A^e}, Exist^{\tau_A^e}, Evoc^{\tau_A^e}, Absur^{\tau_A^e}, DivPorCas^{\tau_A^e}, Partic^{\tau_A^e}$*, son* $\mathcal{A}$*-recursivos.*

Lemma 104. *El predicado "*ψ *se deduce de* φ *por generalización con constante c, con respecto a* τ_A^e*":* $S^{\tau_A^e} \times S^{\tau_A^e} \times Aux \to \omega$ *es* $\mathcal{A}$*-recursivo.*

Lemma 105. *El predicado "*ψ *se deduce de* φ *por elección con constante e, con respecto a* τ_A^e*":* $S^{\tau_A^e} \times S^{\tau_A^e} \times Aux \to \omega$ *es* $\mathcal{A}$*-PR.*

Lemma 106. $AxLog^{\tau_A^e}$ *es* $\mathcal{A}$*-recursivo.*

Lemma 107. *Las funciones:*

$$\begin{array}{rc} S^{\tau_A^e +} \to & \omega \\ \boldsymbol{\varphi} \to & n(\boldsymbol{\varphi}) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} \omega \times S^{\tau_A^e +} \to & S^{\tau_A^e} \cup \{\varepsilon\} \\ (i, \boldsymbol{\varphi}) \to & \boldsymbol{\varphi}_i \end{array}$$

son $\mathcal{A}$*-recursivas.*

Lemma 108. *Just es* $\mathcal{B}$*-recursivo. Las funciones:*

$$\begin{array}{rc} Just^+ \to & \omega \\ \mathbf{J} \to & n(\mathbf{J}) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} \omega \times Just^+ \to & Just \cup \{\varepsilon\} \\ (i, \mathbf{J}) \to & \mathbf{J}_i \end{array}$$

son $\mathcal{B}$*-recursivas.*

Lemma 109. *El conjunto* $\{\mathbf{J} \in Just^+ : \mathbf{J} \text{ es balanceada}\}$ *es* $\mathcal{B}$*-recursivo.*

Lemma 110. *El predicado*

$$\begin{array}{rcl} \omega \times S^{\tau_A^e} \times S^{\tau_A^e +} \times Just^+ & \rightarrow & \omega \\ (i,\varphi,\boldsymbol{\varphi},\mathbf{J}) & \rightarrow & \begin{cases} 1 & \text{si } (\boldsymbol{\varphi},\mathbf{J}) \text{ es adecuado y } \varphi \text{ es hipótesis de } \boldsymbol{\varphi}_i \text{ en } (\boldsymbol{\varphi},\mathbf{J}) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \end{array}$$

es $(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})$*-recursivo.*

Lemma 111. *El predicado*

$$\begin{array}{rcl} Aux \times Aux \times S^{\tau_A^e +} \times Just^+ & \rightarrow & \omega \\ (e,d,\boldsymbol{\varphi},\mathbf{J}) & \rightarrow & \begin{cases} 1 & \text{si } (\boldsymbol{\varphi},\mathbf{J}) \text{ es adecuado y } e \text{ depende de } d \text{ en } (\boldsymbol{\varphi},\mathbf{J}) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \end{array}$$

es $(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})$*-recursivo.*

Lemma 112. *Sea* (Σ,τ_A) *una teoría tal que* Σ *es* $\mathcal{A}$*-recursivo (resp.* $\mathcal{A}$*-RE), entonces* $Pruebas_{(\Sigma,\tau_A)}$ *es* $(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})$*-recursivo (resp.* $(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})$*-RE).*

Lemma 113. *Si* (Σ,τ_A) *es una teoría tal que* Σ *es* $\mathcal{A}$*-RE., entonces* $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$ *es* $\mathcal{A}$*-RE.*

Lemma 114. *Este lema no se evalua.*

Proposition 115. *Si* h *es* $\emptyset$*-recursiva, entonces* h *es representable.*

Lemma 116. *Hay un predicado* $P:\omega\times\omega\rightarrow\omega$ *el cual es* $\emptyset$*-PR y tal que el predicado* $Q=\lambda x\left[(\exists t\in\omega)P(t,x)\right]:\omega\rightarrow\omega$ *no es* $\emptyset$*-recursivo.*

Lemma 117. *Este lema no se evalua.*

Lemma 118. *Si* $Verd_\omega$ *es* $\mathcal{A}$*-RE, entonces es* $\mathcal{A}$*-recursivo.*

Lemma 119. $Verd_\omega$ *no es* $\mathcal{A}$*-RE.*

Proof. Por el Lema 200 hay un predicado $\emptyset$-p.r., $P:\omega\times\omega\rightarrow\omega$ tal que el predicado $Q=\lambda x\left[(\exists t\in\omega)P(t,x)\right]:\omega\rightarrow\omega$ no es $\emptyset$-recursivo. Notese que Q tampoco es A-recursivo. Ya que P es representable, hay una formula $\varphi =_d \varphi(v_1,v_2,v)\in F^{\tau_A}$ la cual cumple

$\omega\models\varphi\left[t,x,k\right]$si y solo si $P(t,x)=k$,

cualesquiera sean $t,x,k\in\omega$. Sea $\psi=\varphi(v_1,v_2,1)$. Notese que $\psi=_d\psi(v_1,v_2)$ y que $\omega\models\psi\left[t,x\right]$si y solo si $P(t,x)=1$,

cualesquiera sean $t,x\in\omega$. Sea $\psi_0=\exists v_1\ \psi(v_1,v_2)$. Notese que $\psi_0=_d\psi_0(v_2)$ y que $\omega\models\psi_0\left[x\right]$si y solo si $Q(x)=1$

cualesquiera sea $x\in\omega$. Por el lema de reemplazo tenemos que para $x\in\omega$, $\omega\models\psi_0\left[x\right]$si y solo si $\omega\models\psi_0(\widehat{x})$

(justifique), por lo cual $\omega\models\psi_0(\widehat{x})$si y solo si $Q(x)=1$

cualesquiera sea $x\in\omega$. Ya que $\psi_0(\widehat{x})$ es una sentencia, $\psi_0(\widehat{x})\in Verd_\omega$si y solo si $Q(x)=1$

Sea $h:\omega\rightarrow A^*$, dada por $h(x)=\psi_0(\widehat{x})$. Es facil ver que h es A-recursiva. Ya que $Q=\chi_{Verd_\omega}\circ h$ y Q no es A-recursivo, tenemos que χ_{Verd_ω} no es A-recursiva, es decir que $Verd_\omega$ es un conjunto no A-recursivo. El lema anterior nos dice entonces que es $Verd_\omega$ no es A-r.e.. □

Theorem 120. ***(Incompletitud) (Godel)****. Si* $\Sigma\subseteq Verd_\omega$ *es* $\mathcal{A}$*-RE, entonces* $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}\subsetneq Verd_\omega$*.*

Proof. Por el Teorema de Correccion, tenemos que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}\subseteq Verd_\omega$. Ya que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}$ es A-r.e y $Verd_\omega$ no lo es, tenemos que $Teo_{(\Sigma,\tau_A)}\neq Verd_\omega$. □ □

Corollary 121. *Existe* $\varphi \in S^{\tau_A}$ *tal que* $Arit \nvdash \varphi$ *y* $Arit \nvdash \neg\varphi$.

Proof. Dejamos al lector la prueba de que el conjunto Σ_A es $\mathcal{A}$ -r.e.. Una ves probado esto, podemos aplicar el teorema anterior a la teoria $Arit = (\Sigma_A, \tau_A)$, lo cual nos dice que $Teo_{Arit} \subsetneq Verd_\omega$. Sea $\varphi \in Verd_\omega - Teo_{Arit}$. O sea que $Arit \nvdash \varphi$ y $\varphi \in Verd_\omega$. Ya que $\neg\varphi \notin Verd_\omega$, tenemos que $\neg\varphi \notin Teo_{Arit}$, es decir $Arit \nvdash \neg\varphi$. $\square$