

Resumen de teoremas para el final de Lógica

Agustín Curto, agucurto95@gmail.com
Francisco Nievas, frannievas@gmail.com

2017

Contents

1	Estructuras algebraicas ordenadas	2
2	Términos y fórmulas	11
3	Estructuras	15
4	Teorias de primer orden	19
5	La aritmética de Peano	29

Nota: Este resumen se corresponde con la materia dictada en el año 2017. Los autores no se responsabilizan de posibles cambios que pudiesen realizarse en los temas dictados en la misma, así como tampoco de errores involuntarios que pudiesen existir en dicho resumen.

1 Estructuras algebraicas ordenadas

Lemma 1. Sean (P, \leq) y (P', \leq') posets. Supongamos que F es un isomorfismo de (P, \leq) en (P', \leq') , entonces:

- a) Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que a es **cota superior** (resp. **inferior**) de S si y solo si $F(a)$ es **cota superior** (resp. **inferior**) de $F(S)$.
- b) Para cada $S \subseteq P$, se tiene que $\exists \sup(S)$ si y solo si $\exists \sup(F(S))$ y en el caso de que existan tales elementos se tiene que $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$.
- c) P tiene 1 (resp. 0) si y solo si P' tiene 1 (resp. 0) y en tal caso tales elementos están conectados por F .
- d) Para cada $m \in P$, m es **maximal** (resp. **minimal**) si y solo si $F(m)$ es **maximal** (resp. **minimal**).
- e) Para $a, b \in P$, tenemos que $a \prec b$ si y solo si $F(a) \prec' F(b)$.

Proof. a) Probaremos solo el caso de la **cota superior**.

\Rightarrow Supongamos que a es **cota superior** de S , veamos entonces que $F(a)$ es **cota superior** de $F(S)$. Sean:

- $x \in F(S)$
- $s \in S$ tal que $x = F(s)$.

Ya que $s \leq a$, tenemos que $x = F(s) \leq' F(a)$. Luego, $F(a)$ es **cota superior**.

\Leftarrow Supongamos ahora que $F(a)$ es **cota superior** de $F(S)$ y veamos entonces que a es cota superior de S .

Sea $s \in S$, ya que $F(s) \leq' F(a)$, tenemos que $s = F^{-1}(F(s)) \leq' F^{-1}(F(a)) = a$. Por lo tanto, a es **cota superior**.

- b) \Rightarrow Supongamos existe $\sup(S)$. Veamos que $F(\sup(S))$ es el supremo de $F(S)$. Por el inciso (a) $F(\sup(S))$ es cota superior de $F(S)$. Veamos que es la menor de las cotas superiores. Supongamos b' cota superior de $F(S)$, entonces $F^{-1}(b')$ es cota superior de S , es decir, $\sup(S) \leq F^{-1}(b')$, produciendo $F(\sup(S)) \leq' b'$. Por lo tanto, $F(\sup(S))$ es el supremo de $F(S)$.

\Leftarrow Supongamos existe $\sup(F(S))$. Veamos que $F^{-1}(\sup(F(S)))$ es el supremo de S . Nuevamente, por el inciso (a) $F^{-1}(\sup(F(S)))$ es cota superior de S . Veamos que es la menor de las cotas superiores. Supongamos b cota superior de S , entonces $F(b)$ es cota superior de $F(S)$, es decir, $\sup(F(S)) \leq F(b)$, produciendo $F^{-1}(\sup(F(S))) \leq b$. Por lo tanto, $F^{-1}(\sup(F(S)))$ es el supremo de S .

- c) Se desprende del inciso (b) tomando $S = P$.

- d) Probaremos solo el caso **maximal**.

\Rightarrow Supongamos que m es maximal de (P, \leq) . Veamos que $F(m)$ es maximal de (P', \leq') . Supongamos que $F(m)$ no es maximal de (P', \leq') , es decir, $F(m) <' b' \forall b' \in P'$. Dado que F es isomorfismo:

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(m)) &< F^{-1}(b') \\ m &< F^{-1}(b') \end{aligned}$$

Lo cual es un absurdo, dado que m es maximal de (P, \leq) . Por lo tanto, $F(m)$ es maximal de (P', \leq') .

\Leftarrow Supongamos que $F(m)$ es maximal de (P', \leq') . Veamos que m es maximal de (P, \leq) . Supongamos que m no es maximal de (P, \leq) , es decir, $m < b \forall b \in P$. Dado que F es isomorfismo:

$$F(m) < F(b)$$

Lo cual es un absurdo, dado que $F(m)$ es maximal de (P', \leq') . Por lo tanto, m es maximal de (P, \leq) .

e) \Rightarrow Supongamos $a \prec b$, veamos que $F(a) \prec' F(b)$. Debemos ver:

$$1) F(a) <' F(b)$$

$$2) \nexists z' \text{ tal que } F(a) < z' < F(b)$$

Ya que $a \prec b$, por definición tenemos: $\boxed{a < b \text{ y } \nexists z \text{ tal que } a < z < b}$ (\star)

Dado que la función F es un isomorfismo, se cumple (1). Veamos que se cumple (2), supongamos que $\exists z'$ tal que $F(a) < z' < F(b)$. Luego, nuevamente utilizando que F es isomorfismo, tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} F^{-1}(F(a)) & < & F^{-1}(z') & < & F^{-1}(F(b)) \\ a & < & F^{-1}(z') & < & b \end{array}$$

Lo cual, contradice (\star), el absurdo vino de suponer que $\exists z'$ tal que $F(a) < z' < F(b)$, por lo tanto $\nexists z'$ tal que $F(a) < z' < F(b)$.

Finalmente, dado que se cumplen los puntos (1) y (2), se cumple también $F(a) \prec' F(b)$.

\Leftarrow Supongamos $F(a) \prec' F(b)$, veamos que $a \prec b$.

Ya que $F^{-1} : (P', \leq') \rightarrow (P, \leq)$ es isomorfismo, por lo ya visto tenemos:

$$\begin{array}{ccc} F^{-1}(F(a)) & \prec & F^{-1}(F(b)) \\ a & \prec & b \end{array}$$

□

Lemma 2. Dado un reticulado (L, \leq) y elementos $x, y, z, w \in L$, se cumplen las siguientes propiedades:

$$(1) x \leq x \text{ s } x$$

$$(8) x \text{ i } (x \text{ s } y) = x$$

$$(2) x \text{ i } y \leq x$$

$$(9) (x \text{ s } y) \text{ s } z = x \text{ s } (y \text{ s } z)$$

$$(3) x \text{ s } x = x \text{ i } x = x$$

$$(10) (x \text{ i } y) \text{ i } z = x \text{ i } (y \text{ i } z)$$

$$(4) x \text{ s } y = y \text{ s } x$$

$$(11) \text{ Si } x \leq z \text{ e } y \leq w \text{ entonces:}$$

$$(5) x \text{ i } y = y \text{ i } x$$

$$\bullet x \text{ s } y \leq z \text{ s } w$$

$$(6) x \leq y \Leftrightarrow x \text{ s } y = y \Leftrightarrow x \text{ i } y = x$$

$$\bullet x \text{ i } y \leq z \text{ i } w$$

$$(7) x \text{ s } (x \text{ i } y) = x$$

$$(12) (x \text{ i } y) \text{ s } (x \text{ i } z) \leq x \text{ i } (y \text{ s } z)$$

Proof. Dado que las propiedades (1), (2), (3), (4), (5), (6), son consecuencia inmediata de las definiciones de s e i, probaremos solo las restantes.

(7)

$$\begin{aligned}
x \dot{\vee} y &\leq x && \text{Por (2)} \\
(x \dot{\vee} y) \dot{\wedge} x &= x && \text{Por (6)} \\
x \dot{\wedge} (x \dot{\vee} y) &= x && \text{Por (3)}
\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
x &\leq x \dot{\wedge} y && \text{Por (1)} \\
x \dot{\vee} (y \dot{\wedge} x) &= x && \text{Por (6)}
\end{aligned}$$

(9) Para probar la igualdad probaremos las siguientes desigualdades:

- $\boxed{(x \dot{\wedge} y) \dot{\wedge} z \leq x \dot{\wedge} (y \dot{\wedge} z)}$

Notese que $x \dot{\wedge} (y \dot{\wedge} z)$ es cota superior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$\begin{aligned}
x &\leq x \dot{\wedge} (y \dot{\wedge} z) \\
y &\leq (y \dot{\wedge} z) \leq x \dot{\wedge} (y \dot{\wedge} z) \\
z &\leq (y \dot{\wedge} z) \leq x \dot{\wedge} (y \dot{\wedge} z)
\end{aligned}$$

Por otro lado, $x \dot{\wedge} (y \dot{\wedge} z)$ es cota superior de $\{x, y\}$, tenemos que $x \dot{\wedge} y \leq x \dot{\wedge} (y \dot{\wedge} z)$, por lo cual $x \dot{\wedge} (y \dot{\wedge} z)$ es cota superior del conjunto $\{x \dot{\wedge} y, z\}$, lo cual dice que $(x \dot{\wedge} y) \dot{\wedge} z \leq x \dot{\wedge} (y \dot{\wedge} z)$.

- $\boxed{(x \dot{\wedge} y) \dot{\wedge} z \geq x \dot{\wedge} (y \dot{\wedge} z)}$

Notese que $(x \dot{\wedge} y) \dot{\wedge} z$ es cota superior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$\begin{aligned}
x &\leq x \dot{\wedge} y \leq (x \dot{\wedge} y) \dot{\wedge} z \\
y &\leq x \dot{\wedge} y \leq (x \dot{\wedge} y) \dot{\wedge} z \\
z &\leq (x \dot{\wedge} y) \dot{\wedge} z
\end{aligned}$$

Por otro lado, $(x \dot{\wedge} y) \dot{\wedge} z$ es cota superior de $\{y, z\}$, tenemos que $y \dot{\wedge} z \leq (x \dot{\wedge} y) \dot{\wedge} z$, por lo cual $(x \dot{\wedge} y) \dot{\wedge} z$ es cota superior del conjunto $\{x, y \dot{\wedge} z\}$, lo cual dice que $(x \dot{\wedge} y) \dot{\wedge} z \geq x \dot{\wedge} (y \dot{\wedge} z)$.

Por lo tanto, $(x \dot{\wedge} y) \dot{\wedge} z = x \dot{\wedge} (y \dot{\wedge} z)$

(10) Para probar la igualdad probaremos las siguientes desigualdades:

- $\boxed{(x \dot{\vee} y) \dot{\vee} z \leq x \dot{\vee} (y \dot{\vee} z)}$

Notese que $x \dot{\vee} (y \dot{\vee} z)$ es cota inferior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$\begin{aligned}
x \dot{\vee} (y \dot{\vee} z) &\leq x \\
(y \dot{\vee} z) \dot{\vee} x &\leq y \dot{\vee} z \leq x \dot{\vee} (y \dot{\vee} z) \\
z &\leq (y \dot{\vee} z) \leq x \dot{\vee} (y \dot{\vee} z)
\end{aligned}$$

Por otro lado, $x \dot{\vee} (y \dot{\vee} z)$ es cota inferior de $\{x, y\}$, tenemos que $x \dot{\vee} y \leq x \dot{\vee} (y \dot{\vee} z)$, por lo cual $x \dot{\vee} (y \dot{\vee} z)$ es cota inferior del conjunto $\{x \dot{\vee} y, z\}$, lo cual dice que $(x \dot{\vee} y) \dot{\vee} z \leq x \dot{\vee} (y \dot{\vee} z)$.

- $\boxed{(x \dot{\vee} y) \dot{\vee} z \geq x \dot{\vee} (y \dot{\vee} z)}$

Notese que $(x \dot{\vee} y) \dot{\vee} z$ es cota inferior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$\begin{aligned}
x &\leq x \dot{\vee} y \leq (x \dot{\vee} y) \dot{\vee} z \\
y &\leq x \dot{\vee} y \leq (x \dot{\vee} y) \dot{\vee} z \\
z &\leq (x \dot{\vee} y) \dot{\vee} z
\end{aligned}$$

Por otro lado, $(x \dot{\vee} y) \dot{\wedge} z$ es cota inferior de $\{y, z\}$, tenemos que $y \dot{\wedge} z \leq (x \dot{\vee} y) \dot{\wedge} z$, por lo cual $(x \dot{\vee} y) \dot{\wedge} z$ es cota inferior del conjunto $\{x, y \dot{\wedge} z\}$, lo cual dice que $(x \dot{\vee} y) \dot{\wedge} z \geq x \dot{\wedge} (y \dot{\wedge} z)$.

Por lo tanto, $(x \dot{\vee} y) \dot{\wedge} z = x \dot{\wedge} (y \dot{\wedge} z)$

(11)

$$\begin{array}{ll} x \leq z \leq z \text{ s } w & x \leq z \Rightarrow x \dot{\vee} y \leq z \\ y \leq w \leq z \text{ s } w & y \leq w \Rightarrow x \dot{\vee} y \leq w \end{array}$$

Luego, $z \text{ s } w$ es cota superior de $\{x, y\}$ y $x \dot{\vee} y$ es cota inferior de $\{z, w\}$, por lo tanto, $x \text{ s } y \leq z \text{ s } w$ y $x \dot{\vee} y \leq z \dot{\wedge} w$.

(12)

$$\left. \begin{array}{l} (x \dot{\vee} y), (x \dot{\wedge} z) \leq x \\ (x \dot{\vee} y), (x \dot{\wedge} z) \leq y \text{ s } z \end{array} \right\} \Rightarrow (x \dot{\vee} y), (x \dot{\wedge} z) \leq x \dot{\wedge} (y \text{ s } z)$$

$$\therefore (x \dot{\vee} y) \text{ s } (x \dot{\wedge} z) \leq x \dot{\wedge} (y \text{ s } z)$$

□

Lemma 3. Sea (L, \leq) un reticulado, dados elementos $x_1, \dots, x_n \in L$, con $n \geq 2$, se tiene

$$\begin{array}{ll} (\dots (x_1 \text{ s } x_2) \text{ s } \dots) \text{ s } x_n &= \sup(\{x_1, \dots, x_n\}) \\ (\dots (x_1 \dot{\wedge} x_2) \dot{\wedge} \dots) \dot{\wedge} x_n &= \inf(\{x_1, \dots, x_n\}) \end{array}$$

Proof. Probaremos por inducción en n .

Caso Base: $n = 2$

$$\begin{array}{ll} x_1 \text{ s } x_2 &= \sup(\{x_1, x_2\}) \\ x_1 \dot{\wedge} x_2 &= \inf(\{x_1, x_2\}) \end{array}$$

Lo cual vale, dado que es la definición.

Caso Inductivo: $n > 2$

Supongamos ahora que vale para n y veamos entonces que vale para $n+1$. Sean $x_1, \dots, x_{n+1} \in L$, por hipótesis inductiva tenemos que:

$$\begin{array}{ll} (\dots (x_1 \text{ s } x_2) \text{ s } \dots) \text{ s } x_n &= \sup(\{x_1, \dots, x_n\}) \quad (\star_1) \\ (\dots (x_1 \dot{\wedge} x_2) \dot{\wedge} \dots) \dot{\wedge} x_n &= \inf(\{x_1, \dots, x_n\}) \quad (\star_2) \end{array}$$

Veamos entonces que:

$$\begin{array}{ll} ((\dots (x_1 \text{ s } x_2) \text{ s } \dots) \text{ s } x_n) \text{ s } x_{n+1} &= \sup(\{x_1, \dots, x_{n+1}\}) \quad (\dagger_1) \\ ((\dots (x_1 \dot{\wedge} x_2) \dot{\wedge} \dots) \dot{\wedge} x_n) \dot{\wedge} x_{n+1} &= \inf(\{x_1, \dots, x_{n+1}\}) \quad (\dagger_2) \end{array}$$

Para ello debemos ver $((\dots (x_1 \text{ s } x_2) \text{ s } \dots) \text{ s } x_n) \text{ s } x_{n+1}$ es cota superior de $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ y que es la menor de las cotas superiores. Además, que $((\dots (x_1 \dot{\wedge} x_2) \dot{\wedge} \dots) \dot{\wedge} x_n) \dot{\wedge} x_{n+1}$ es cota inferior de $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ y que es la mayor de las cotas inferiores.

Es fácil ver que $((\dots (x_1 \text{ s } x_2) \text{ s } \dots) \text{ s } x_n) \text{ s } x_{n+1}$ es cota superior de $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$. Supongamos que z es otra cota superior de $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$. Ya que z es también cota superior del conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$, por (\star_1) tenemos que:

$$(\dots (x_1 \text{ s } x_2) \text{ s } \dots) \text{ s } x_n \leq z$$

Además, dado que $x_{n+1} \leq z$, tenemos que:

$$((\dots (x_1 \text{ s } x_2) \text{ s } \dots) \text{ s } x_n) \text{ s } x_{n+1} \leq z$$

Por lo tanto, vale (\dagger_1) .

Nuevamente, es fácil ver que $((\dots (x_1 \text{ i } x_2) \text{ i } \dots) \text{ i } x_n) \text{ i } x_{n+1}$ es cota inferior de $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$. Supongamos que z' es otra cota inferior de $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$. Ya que z' es también cota inferior del conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$, por (\star_2) tenemos que:

$$z' \leq (\dots (x_1 \text{ i } x_2) \text{ i } \dots) \text{ i } x_n$$

Además, dado que $z' \leq x_{n+1}$, tenemos que:

$$z' \leq ((\dots (x_1 \text{ i } x_2) \text{ i } \dots) \text{ i } x_n) \text{ i } x_{n+1}$$

Por lo tanto, vale (\dagger_2) . □

Theorem 4. Sea $(L, \text{ s }, \text{ i })$ un reticulado, la relación binaria definida por:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \text{ s } y = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple:

$$\begin{aligned} \sup(\{x, y\}) &= x \text{ s } y \\ \inf(\{x, y\}) &= x \text{ i } y \end{aligned}$$

Proof. • Reflexiva: Sea $x \in L$ un elemento cualquiera. Luego,

$$\left. \begin{aligned} x \text{ s } x &= x \\ x \text{ i } x &= x \end{aligned} \right\} \Rightarrow x \leq x$$

- Antisimétrica: Sean $x, y \in L$ elementos cualesquiera. Supongamos que $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces:

$$\left. \begin{aligned} x \leq y &\Rightarrow x \text{ s } y = y \\ y \leq x &\Rightarrow x \text{ s } y = x \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = y$$

- Transitiva: Supongamos que $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces:

$$x \text{ s } z = x \text{ s } (y \text{ s } z) = (x \text{ s } y) \text{ s } z = y \text{ s } z = z$$

por lo cual $x \leq z$.

Veamos ahora que $\sup(\{x, y\}) = x \text{ s } y$. Es claro que $x \text{ s } y$ es una cota superior del conjunto $\{x, y\}$, veamos que es la menor. Supongamos $x, y \leq z$, entonces:

$$(x \text{ s } y) \text{ s } z = x \text{ s } (y \text{ s } z) = x \text{ s } z = z$$

por lo que $x \text{ s } y \leq z$, es decir, $x \text{ s } y$ es la menor cota superior.

Resta probar que $\inf(\{x, y\}) = x \text{ i } y$. Nuevamente, es claro que $x \text{ i } y$ es una cota inferior del conjunto $\{x, y\}$, veamos que es la mayor. Supongamos $z \leq x, y$, entonces:

$$(x \text{ i } y) \text{ i } z = x \text{ i } (y \text{ i } z) = x \text{ i } z = z$$

por lo que $z \leq x \text{ i } y$, es decir, $x \text{ i } y$ es la mayor cota inferior. □

Lemma 5. Si $F : (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \rightarrow (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo.

Proof. Debemos probar que F^{-1} es un homomorfismo. Sean $F(x), F(y)$ dos elementos cualesquiera de L' , tenemos que:

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(x) \mathbf{s}' F(y)) &= F^{-1}(F(x \mathbf{s} y)) & F^{-1}(F(x) \mathbf{i}' F(y)) &= F^{-1}(F(x \mathbf{i} y)) \\ &= x \mathbf{s} y & &= x \mathbf{i} y \\ &= F^{-1}(F(x)) \mathbf{s} F^{-1}(F(y)) & &= F^{-1}(F(x)) \mathbf{i} F^{-1}(F(y)) \end{aligned}$$

Luego, F^{-1} es homomorfismo y por lo tanto F es isomorfismo. \square

Lemma 6. Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ y $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ reticulados y sea $F : (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \rightarrow (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$.

Proof. Ya que $L \neq \emptyset$, tenemos que $I_F \neq \emptyset$. Sean $a, b \in I_F$, $x, y \in L$ tales que $F(x) = a$ y $F(y) = b$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} a \mathbf{s}' b &= F(x) \mathbf{s}' F(y) = F(x \mathbf{s} y) \in I_F \\ a \mathbf{i}' b &= F(x) \mathbf{i}' F(y) = F(x \mathbf{i} y) \in I_F \end{aligned}$$

por lo cual I_F es cerrada bajo \mathbf{s}' e \mathbf{i}' . \square

Lemma 7. Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ y $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ reticulados y sean (L, \leq) y (L', \leq') los posets asociados. Sea $F : L \rightarrow L'$ una función, entonces F es un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ si y solo si F es un isomorfismo de (L, \leq) en (L', \leq') .

Proof. \Rightarrow Supongamos que F es un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$.

Sean $x, y \in L$ tales que $x \leq y$. Tenemos:

$$\begin{aligned} y &= x \mathbf{s} y \\ F(y) &= F(x \mathbf{s} y) \\ &= F(x) \mathbf{s}' F(y) \\ \therefore F(x) &\leq' F(y) \end{aligned}$$

Sean $x', y' \in L'$ tales que $x' \leq' y'$. Tenemos:

$$\begin{aligned} y' &= x' \mathbf{s}' y' \\ F^{-1}(y') &= F^{-1}(x' \mathbf{s}' y') \\ &= F^{-1}(x') \mathbf{s} F^{-1}(y') \\ \therefore F^{-1}(x') &\leq F^{-1}(y') \end{aligned}$$

Por lo tanto, F es un isomorfismo de (L, \leq) en (L', \leq') .

\Leftarrow Supongamos ahora que F es un isomorfismo de (L, \leq) en (L', \leq') , entonces el **Lemma 1** nos dice que F y F' respetan la operaciones de supremo e ínfimo, por lo cual F es un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ y $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$. \square

Lemma 8. Sea $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}})$ un reticulado. El orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado a este reticulado cumple:

$$x/\theta \tilde{\leq} y/\theta \Leftrightarrow y \theta (x \mathbf{s} y)$$

Proof. Veamos que $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}})$ satisface las 7 identidades de la definición de reticulado. Sean $x/\theta, y/\theta, z/\theta$ elementos cualesquiera de L/θ .

$$(I1) \quad \boxed{x/\theta \tilde{s} x/\theta = x/\theta \tilde{i} x/\theta = x/\theta}$$

$$\begin{aligned} x/\theta \tilde{s} x/\theta &= (x \mathbf{s} x)/\theta = x/\theta \\ x/\theta \tilde{i} x/\theta &= (x \mathbf{i} x)/\theta = x/\theta \end{aligned}$$

$$(I2) \quad \boxed{x/\theta \tilde{s} y/\theta = y/\theta \tilde{s} x/\theta}$$

$$\begin{aligned} x/\theta \tilde{s} y/\theta &= (x \mathbf{s} y)/\theta \\ &= (y \mathbf{s} x)/\theta \\ &= y/\theta \tilde{s} y/\theta \end{aligned}$$

$$(I3) \quad \boxed{x/\theta \tilde{i} y/\theta = y/\theta \tilde{i} x/\theta}$$

$$\begin{aligned} x/\theta \tilde{i} y/\theta &= (x \mathbf{i} y)/\theta \\ &= (y \mathbf{i} x)/\theta \\ &= y/\theta \tilde{i} y/\theta \end{aligned}$$

$$(I4) \quad \boxed{(x/\theta \tilde{s} y/\theta) \tilde{s} z/\theta = x/\theta \tilde{s} (y/\theta \tilde{s} z/\theta)}$$

$$\begin{aligned} (x/\theta \tilde{s} y/\theta) \tilde{s} z/\theta &= (x \mathbf{s} y)/\theta \tilde{s} z/\theta \\ &= ((x \mathbf{s} y) \mathbf{s} z)/\theta \\ &= (x \mathbf{s} (y \mathbf{s} z))/\theta \\ &= x/\theta \tilde{s} (y \mathbf{s} z)/\theta \\ &= x/\theta \tilde{s} (y/\theta \tilde{s} z/\theta) \end{aligned}$$

$$(I5) \quad \boxed{(x/\theta \tilde{i} y/\theta) \tilde{i} z/\theta = x/\theta \tilde{i} (y/\theta \tilde{i} z/\theta)}$$

$$\begin{aligned} (x/\theta \tilde{i} y/\theta) \tilde{i} z/\theta &= (x \mathbf{i} y)/\theta \tilde{i} z/\theta \\ &= ((x \mathbf{i} y) \mathbf{i} z)/\theta \\ &= (x \mathbf{i} (y \mathbf{i} z))/\theta \\ &= x/\theta \tilde{i} (y \mathbf{i} z)/\theta \\ &= x/\theta \tilde{i} (y/\theta \tilde{i} z/\theta) \end{aligned}$$

$$(I6) \quad \boxed{x/\theta \tilde{s} (x/\theta \tilde{i} y/\theta) = x/\theta}$$

$$\begin{aligned} x/\theta \tilde{s} (x/\theta \tilde{i} y/\theta) &= x/\theta \tilde{s} (x \mathbf{i} y)/\theta \\ &= (x \mathbf{s} (x \mathbf{i} y))/\theta \\ &= x/\theta \end{aligned}$$

$$(I7) \quad \boxed{x/\theta \tilde{i} (x/\theta \tilde{s} y/\theta) = x/\theta}$$

$$\begin{aligned} x/\theta \tilde{i} (x/\theta \tilde{s} y/\theta) &= x/\theta \tilde{i} (x \mathbf{s} y)/\theta \\ &= (x \mathbf{i} (x \mathbf{s} y))/\theta \\ &= x/\theta \end{aligned}$$

□

Corollary 9. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado en el cual hay un elemento máximo 1 (resp. mínimo 0), entonces si θ es una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$, $1/\theta$ (resp. $0/\theta$) es un elemento máximo (resp. mínimo) de $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$.

Proof. Ya que $1 \theta (x \mathbf{s} 1)$, para cada $x \in L$, tenemos que $x/\theta \tilde{\leq} 1/\theta$, para cada $x \in L$. □

Lemma 10. Si $F : (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \rightarrow (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ es un homomorfismo de reticulados, entonces $\ker F$ es una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$.

Proof. Veamos primero que $\ker F$ es una relación de equivalencia.

• Reflexiva: $(x, x) \in \ker F$. Trivial pues $F(x) = F(x)$.

• Simétrica: Si $(x, y) \in \ker F \Rightarrow (y, x) \in \ker F$.

Si $(x, y) \in \ker F \Rightarrow F(x) = F(y)$. Luego, vale también $F(y) = F(x)$.

• Transitiva: Si $(x, y), (y, z) \in \ker F \Rightarrow (x, z) \in \ker F$.

$$\left. \begin{aligned} (x, y) &\in \ker F \Rightarrow F(x) = F(y) \\ (y, z) &\in \ker F \Rightarrow F(y) = F(z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F(x) = F(y) = F(z)$$

Por lo tanto, $(x, z) \in \ker F$.

Supongamos $x \ker F(x')$ y $y \ker F(y')$, entonces:

$$\begin{aligned} F(x \mathbf{s} y) &= F(x) \mathbf{s}' F(y) = F(x') \mathbf{s}' F(y') = F(x' \mathbf{s} y') \\ F(x \mathbf{i} y) &= F(x) \mathbf{i}' F(y) = F(x') \mathbf{i}' F(y') = F(x' \mathbf{i} y') \end{aligned}$$

lo cual nos dice que $(x \mathbf{s} y) \ker F(x' \mathbf{s} y')$ y $(x \mathbf{i} y) \ker F(x' \mathbf{i} y')$. □

Lemma 11. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado y sea θ una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$, entonces π_θ es un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}})$. Además $\ker \pi_\theta = \theta$.

Proof. Sean $x, y \in L$ elementos cualquier. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\pi_\theta(x \mathbf{s} y) &= (x \mathbf{s} y)/\theta = x/\theta \tilde{\mathbf{s}} y/\theta = \pi_\theta(x) \tilde{\mathbf{s}} \pi_\theta(y) \\ \pi_\theta(x \mathbf{i} y) &= (x \mathbf{i} y)/\theta = x/\theta \tilde{\mathbf{i}} y/\theta = \pi_\theta(x) \tilde{\mathbf{i}} \pi_\theta(y)\end{aligned}$$

por lo cual π_θ preserva las operaciones de supremo e ínfimo. \square

Lemma 12. Si $F : (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \rightarrow (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', 0', 1')$ un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo.

Proof. Debemos probar que F^{-1} es un homomorfismo. Sean $F(x), F(y)$ dos elementos cualesquiera de L' , tenemos que:

$$\begin{aligned}F^{-1}(F(1)) &= F^{-1}(1') & F^{-1}(F(0)) &= F^{-1}(0') \\ F^{-1}(1') &= 1 & F^{-1}(0') &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F^{-1}(F(x) \mathbf{s}' F(y)) &= F^{-1}(F(x \mathbf{s} y)) & F^{-1}(F(x) \mathbf{i}' F(y)) &= F^{-1}(F(x \mathbf{i} y)) \\ &= x \mathbf{s} y & &= x \mathbf{i} y \\ &= F^{-1}(F(x)) \mathbf{s} F^{-1}(F(y)) & &= F^{-1}(F(x)) \mathbf{i} F^{-1}(F(y))\end{aligned}$$

Luego, F^{-1} es homomorfismo y por lo tanto F es isomorfismo. \square

Lemma 13. Si $F : (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \rightarrow (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', 0', 1')$ es un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', 0', 1')$.

Proof. Dado que F es un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ utilizando el **Lemma 6** tenemos que I_F es subuniverso de $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ lo cual ya que $0', 1' \in I_F$ implica que I_F es un subuniverso de $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', 0', 1')$. \square

Lemma 14. Si $F : (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \rightarrow (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', 0', 1')$ es un homomorfismo de reticulados acotados, entonces $\ker F$ es una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$.

Lemma 15. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado y θ una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$, entonces:

a) $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es un reticulado acotado.

b) π_θ es un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ cuyo núcleo es θ .

Lemma 16. Si $F : (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}^c, 0, 1) \rightarrow (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', \mathbf{c}', 0', 1')$ un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo.

Lemma 17. Si $F : (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}^c, 0, 1) \rightarrow (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', \mathbf{c}', 0', 1')$ es un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', \mathbf{c}', 0', 1')$.

Lemma 18. Si $F : (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}^c, 0, 1) \rightarrow (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', \mathbf{c}', 0', 1')$ es un homomorfismo de reticulados complementados, entonces $\ker F$ es una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}^c, 0, 1)$.

Lemma 19. Sea $(L, s, i, c, 0, 1)$ un reticulado complementado y sea θ una congruencia sobre $(L, s, i, c, 0, 1)$.

a) $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, \tilde{c}, 0/\theta, 1/\theta)$ es un reticulado complementado.

b) π_θ es un homomorfismo de $(L, s, i, c, 0, 1)$ en $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, \tilde{c}, 0/\theta, 1/\theta)$ cuyo núcleo es θ .

Lemma 20. Sea (L, s, i) un reticulado. Son equivalentes:

(1) $x \dot{i} (y \dot{s} z) = (x \dot{i} y) \dot{s} (x \dot{i} z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

(2) $x \dot{s} (y \dot{i} z) = (x \dot{s} y) \dot{i} (x \dot{s} z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$.

Proof. $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Notar que:

$$\begin{aligned} (x \dot{s} y) \dot{i} (x \dot{s} z) &= ((x \dot{s} y) \dot{i} x) \dot{s} ((x \dot{s} y) \dot{i} z) \\ &= (x \dot{s} (z \dot{i} (x \dot{s} y))) \\ &= (x \dot{s} ((z \dot{i} x) \dot{s} (z \dot{i} y))) \\ &= (x \dot{s} (z \dot{i} x)) \dot{s} (z \dot{i} y) \\ &= x \dot{s} (z \dot{i} y) \\ &= x \dot{s} (y \dot{i} z) \end{aligned}$$

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Notar que:

$$\begin{aligned} (x \dot{i} y) \dot{s} (x \dot{i} z) &= ((x \dot{i} y) \dot{s} x) \dot{i} ((x \dot{i} y) \dot{s} z) \\ &= (x \dot{i} (z \dot{s} (x \dot{i} y))) \\ &= (x \dot{i} ((z \dot{s} x) \dot{i} (z \dot{s} y))) \\ &= (x \dot{i} (z \dot{s} x)) \dot{i} (z \dot{s} y) \\ &= x \dot{i} (z \dot{s} y) \\ &= x \dot{i} (y \dot{s} z) \end{aligned}$$

□

Lemma 21. Si $(L, s, i, 0, 1)$ un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento.

Proof. Supongamos $x \in L$ tiene complementos y, z . Se tiene:

$$\begin{aligned} y \dot{s} x &= 1 = x \dot{s} z \\ y \dot{i} x &= 0 = x \dot{i} z \end{aligned}$$

por lo cual:

$$y = y \dot{s} 0 = y \dot{s} (x \dot{i} z) = (y \dot{s} x) \dot{i} (y \dot{s} z) = 1 \dot{i} (y \dot{s} z) = (x \dot{s} z) \dot{i} (y \dot{s} z) = (x \dot{i} y) \dot{s} z = 0 \dot{s} z = z$$

Por lo tanto, $y = z$. □

Lemma 22. Si $S \neq \emptyset$, entonces $[S]$ es un filtro. Más aún si F es un filtro y $F \supseteq S$, entonces $F \supseteq [S]$.

Proof. Recordemos:

$$[S] = \{y \in L : y \geq s_1 \dot{i} \dots \dot{i} s_n, \text{ para algunos } s_1, \dots, s_n \in S, n \geq 1\}$$

1. $[S] \neq \emptyset$: Ya que $S \subseteq [S]$, tenemos que $[S] \neq \emptyset$.
2. $x, y \in [S] \Rightarrow x \dot{\vee} y \in [S]$: Sean x, y tales que:

$$\begin{aligned} y &\geq s_1 \dot{\vee} s_2 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} s_n, \quad \text{i.e., } y \in [S] \\ z &\geq t_1 \dot{\vee} t_2 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} t_m, \quad \text{i.e., } z \in [S] \end{aligned}$$

con $s_1, s_2, \dots, s_n, t_1, t_2, \dots, t_m \in S$, entonces:

$$y \dot{\vee} z \geq s_1 \dot{\vee} s_2 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} s_n \dot{\vee} t_1 \dot{\vee} t_2 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} t_m$$

3. $x \in [S]$ y $x \leq y \Rightarrow y \in [S]$: Por construcción, claramente $[S]$ cumple esta propiedad.

□

Lemma 23. (*Zorn*) Sea (P, \leq) un poset y supongamos que cada cadena de P tiene una cota superior, entonces existe un elemento maximal en P .