1 Estructuras algebráicas ordenadas

Lemma 1. *Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Supongamos que F es un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$, entonces:*

*a) Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que a es **cota superior** (resp. **inferior**) de S si y solo si $F(a)$ es **cota superior** (resp. **inferior**) de $F(S)$.*

b) Para cada $S \subseteq P$, se tiene que $\exists \sup(S)$ si y solo si $\exists \sup(F(S))$ y en el caso de que existan tales elementos se tiene que $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$.

c) P tiene 1 (resp. 0) si y solo si P' tiene 1 (resp. 0) y en tal caso tales elementos están conectados por F.

*d) Para cada $m \in P$, m es **maximal** (resp. **minimal**) si y solo si $F(m)$ es **maximal** (resp. **minimal**).*

e) Para $a, b \in P$, tenemos que $a \prec b$ si y solo si $F(a) \prec' F(b)$.

Proof. a) Probaremos solo el caso de la **cota superior**.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que a es **cota superior** de S, veamos entonces que $F(a)$ es **cota superior** de $F(S)$. Sean:

- $x \in F(S)$
- $s \in S$ tal que $x = F(s)$.

Ya que $s \leq a$, tenemos que $x = F(s) \leq' F(a)$. Luego, $F(a)$ es **cota superior**.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que $F(a)$ es **cota superior** de $F(S)$ y veamos entonces que a es cota superior de S.

Sea $s \in S$, ya que $F(s) \leq' F(a)$, tenemos que $s = F^{-1}(F(s)) \leq' F^{-1}(F(a)) = a$. Por lo tanto, a es **cota superior**.

b) $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos existe $\sup(S)$. Veamos que $F(\sup(S))$ es el supremo de $F(S)$. Por el iniciso (a) $F(\sup(S))$ es cota superior de $F(S)$. Veamos que es la menor de las cotas superiores. Supongamos b' cota superior de $F(S)$, entonces $F^{-1}(b')$ es cota superior de S, es decir, $\sup(S) \leq F^{-1}(b')$, produciendo $F(\sup(S)) \leq' b'$. Por lo tanto, $F(\sup(S))$ es el supremo de $F(S)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos existe $\sup(F(S))$. Veamos que $F^{-1}(\sup(F(S)))$ es el supremo de S. Nuevamente, por el iniciso (a) $F^{-1}(\sup(F(S)))$ es cota superior de S. Veamos que es la menor de las cotas superiores. Supongamos b cota superior de S, entonces $F(b)$ es cota superior de $F(S)$, es decir, $\sup(F(S)) \leq F(b)$, produciendo $F^{-1}(\sup(F(S))) \leq b$. Por lo tanto, $F^{-1}(\sup(F(S)))$ es el supremo de S.

c) Se desprende del inciso (b) tomando $S = P$.

d) Probaremos solo el caso **maximal**.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que m es maximal de $(P, \leq)$. Veamos que $F(m)$ es maximal de $(P', \leq')$. Supongamos que $F(m)$ no es maximal de $(P', \leq')$, es decir, $F(m) <' b'$ $\forall b' \in P'$. Dado que F es isomorfismo:

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(m)) &< F^{-1}(b') \\ m &< F^{-1}(b') \end{aligned}$$

Lo cual es un absurdo, dado que m es maximal de $(P, \leq)$. Por lo tanto, $F(m)$ es maximal de $(P', \leq')$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $F(m)$ es maximal de $(P', \leq')$. Veamos que m es maximal de $(P, \leq)$. Supongamos que m no es maximal de $(P, \leq)$, es decir, $m < b \ \forall b \in P$. Dado que F es isomorfismo:

$$F(m) < F(b)$$

Lo cual es un absurdo, dado que $F(m)$ es maximal de $(P', \leq')$. Por lo tanto, m es maximal de $(P, \leq)$.

e) $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos $a \prec b$, veamos que $F(a) \prec' F(b)$. Debemos ver:

1) $F(a) <' F(b)$
2) $\nexists z'$ tal que $F(a) < z' < F(b)$

Ya que $a \prec b$, por definición tenemos: $\boxed{a < b \text{ y } \nexists z \text{ tal que } a < z < b}$ $(\star)$

Dado que la función F es un isomorfismo, se cumple (1). Veamos que se cumple (2), supongamos que $\exists z'$ tal que $F(a) < z' < F(b)$. Luego, nuevamente utilizando que F es isomorfismo, tenemos:

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(a)) < \ & F^{-1}(z') \ < F^{-1}(F(b)) \\ a < \ & F^{-1}(z') \ < b \end{aligned}$$

Lo cual, contradice $(\star)$, el absurdo vino de suponer que $\exists z'$ tal que $F(a) < z' < F(b)$, por lo tanto $\nexists z'$ tal que $F(a) < z' < F(b)$.

Finalmente, dado que se cumplen los puntos (1) y (2), se cumple también $F(a) \prec' F(b)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos $F(a) \prec' F(b)$, veamos que $a \prec b$.

Ya que $F^{-1} : (P', \leq') \to (P, \leq)$ es isomorfismo, por lo ya visto tenemos:

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(a)) \ & \prec \ F^{-1}(F(b)) \\ a \ & \prec \ b \end{aligned}$$

$\square$

Lemma 2. *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y, z, w \in L$, se cumplen las siguientes propiedades:*

(1) $x \leq x \mathsf{s} y$

(2) $x \mathsf{i} y \leq x$

(3) $x \mathsf{s} x = x \mathsf{i} x = x$

(4) $x \mathsf{s} y = y \mathsf{s} x$

(5) $x \mathsf{i} y = y \mathsf{i} x$

(6) $x \leq y \Leftrightarrow x \mathsf{s} y = y \Leftrightarrow x \mathsf{i} y = x$

(7) $x \mathsf{s} (x \mathsf{i} y) = x$

(8) $x \mathsf{i} (x \mathsf{s} y) = x$

(9) $(x \mathsf{s} y) \mathsf{s} z = x \mathsf{s} (y \mathsf{s} z)$

(10) $(x \mathsf{i} y) \mathsf{i} z = x \mathsf{i} (y \mathsf{i} z)$

(11) Si $x \leq z$ *e* $y \leq w$ *entonces:*

- $x \mathsf{s} y \leq z \mathsf{s} w$
- $x \mathsf{i} y \leq z \mathsf{i} w$

(12) $(x \mathsf{i} y) \mathsf{s} (x \mathsf{i} z) \leq x \mathsf{i} (y \mathsf{s} z)$

Proof. Dado que las propiedades $(1), (2), (3), (4), (5), (6)$, son consecuencia inmediata de las definiciones de s e i, probaremos solo las restantes.

(7)

$$\begin{aligned} x \mathsf{\ i\ } y \leq & x & \text{Por (2)} \\ (x \mathsf{\ i\ } y) \mathsf{\ s\ } x = & x & \text{Por (6)} \\ x \mathsf{\ s\ } (x \mathsf{\ i\ } y) = & x & \text{Por (3)} \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned} x \leq & x \mathsf{\ s\ } y & \text{Por (1)} \\ x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ s\ } x) = & x & \text{Por (6)} \end{aligned}$$

(9) Para probar la igualdad probaremos las siguientes desigualdades:

- $\boxed{(x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ s\ } z \leq x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ s\ } z)}$
  Notese que $x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ s\ } z)$ es cota superior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$\begin{aligned} x &\leq x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ s\ } z) \\ y &\leq (y \mathsf{\ s\ } z) \leq x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ s\ } z) \\ z &\leq (y \mathsf{\ s\ } z) \leq x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ s\ } z) \end{aligned}$$

  Por otro lado, $x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ s\ } z)$ es cota superior de $\{x, y\}$, tenemos que $x \mathsf{\ s\ } y \leq x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ s\ } z)$, por lo cual $x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ s\ } z)$ es cota superior del conjunto $\{x \mathsf{\ s\ } y, z\}$, lo cual dice que $(x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ s\ } z \leq x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ s\ } z)$.

- $\boxed{(x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ s\ } z \geq x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ s\ } z)}$
  Notese que $(x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ s\ } z$ es cota superior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$\begin{aligned} x &\leq x \mathsf{\ s\ } y \leq (x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ s\ } z \\ y &\leq x \mathsf{\ s\ } y \leq (x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ s\ } z \\ z &\leq (x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ s\ } z \end{aligned}$$

  Por otro lado, $(x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ s\ } z$ es cota superior de $\{y, z\}$, tenemos que $y \mathsf{\ s\ } z \leq (x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ s\ } z$, por lo cual $(x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ s\ } z$ es cota superior del conjunto $\{x, y \mathsf{\ s\ } z\}$, lo cual dice que $(x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ s\ } z \geq x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ s\ } z)$.

Por lo tanto, $(x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ s\ } z = x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ s\ } z)$

(10) Para probar la igualdad probaremos las siguientes desigualdades:

- $\boxed{(x \mathsf{\ i\ } y) \mathsf{\ i\ } z \leq x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ i\ } z)}$
  Notese que $x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ i\ } z)$ es cota inferior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$\begin{aligned} x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ i\ } z) &\leq x \\ (y \mathsf{\ i\ } z) \leq x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ i\ } z) &\leq y \\ z &\leq (y \mathsf{\ i\ } z) \leq x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ i\ } z) \end{aligned}$$

  Por otro lado, $x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ i\ } z)$ es cota inferior de $\{x, y\}$, tenemos que $x \mathsf{\ i\ } y \leq x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ i\ } z)$, por lo cual $x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ i\ } z)$ es cota inferior del conjunto $\{x \mathsf{\ i\ } y, z\}$, lo cual dice que $(x \mathsf{\ i\ } y) \mathsf{\ i\ } z \leq x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ i\ } z)$.

- $\boxed{(x \mathsf{\ i\ } y) \mathsf{\ i\ } z \geq x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ i\ } z)}$
  Notese que $(x \mathsf{\ i\ } y) \mathsf{\ i\ } z$ es cota inferior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$\begin{aligned} x &\leq x \mathsf{\ i\ } y \leq (x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ i\ } z \\ y &\leq x \mathsf{\ i\ } y \leq (x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ i\ } z \\ z &\leq (x \mathsf{\ i\ } y) \mathsf{\ i\ } z \end{aligned}$$

Por otro lado, $(x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~i~} z$ es cota inferior de $\{y, z\}$, tenemos que $y \mathsf{~i~} z \leq (x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~i~} z$, por lo cual $(x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~i~} z$ es cota inferior del conjunto $\{x, y \mathsf{~i~} z\}$, lo cual dice que $(x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~i~} z \geq x \mathsf{~i~} (y \mathsf{~i~} z)$.

Por lo tanto, $(x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~i~} z = x \mathsf{~i~} (y \mathsf{~i~} z)$

(11)

$$x \leq z \leq z \mathsf{~s~} w \qquad\qquad x \leq z \Rightarrow x \mathsf{~i~} y \leq z$$
$$y \leq w \leq z \mathsf{~s~} w \qquad\qquad y \leq w \Rightarrow x \mathsf{~i~} y \leq w$$

Luego, $z \mathsf{~s~} w$ es cota superior de $\{x, y\}$ y $x \mathsf{~i~} y$ es cota inferior de $\{z, w\}$, por lo tanto, $x \mathsf{~s~} y \leq z \mathsf{~s~} w$ y $x \mathsf{~i~} y \leq z \mathsf{~i~} w$.

(12)

$$\left.\begin{array}{l}(x \mathsf{~i~} y), (x \mathsf{~i~} z) \leq x \\ (x \mathsf{~i~} y), (x \mathsf{~i~} z) \leq y \mathsf{~s~} z\end{array}\right\} \Rightarrow (x \mathsf{~i~} y), (x \mathsf{~i~} z) \leq x \mathsf{~i~} (y \mathsf{~s~} z)$$

$$\therefore (x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~s~} (x \mathsf{~i~} z) \leq x \mathsf{~i~} (y \mathsf{~s~} z)$$

□

Lemma 3. *Sea $(L, \leq)$ un reticulado, dados elementos $x_1, \ldots, x_n \in L$, con $n \geq 2$, se tiene*

$$\begin{array}{rcl}(\ldots(x_1 \mathsf{~s~} x_2) \mathsf{~s~} \ldots) \mathsf{~s~} x_n &=& \sup(\{x_1, \ldots, x_n\}) \\ (\ldots(x_1 \mathsf{~i~} x_2) \mathsf{~i~} \ldots) \mathsf{~i~} x_n &=& \inf(\{x_1, \ldots, x_n\})\end{array}$$

Proof. Probaremos por inducción en n.

Caso Base: $\boxed{n = 2}$

$$\begin{array}{rcl}x_1 \mathsf{~s~} x_2 &=& \sup(\{x_1, x_2\}) \\ x_1 \mathsf{~i~} x_2 &=& \inf(\{x_1, x_2\})\end{array}$$

Lo cual vale, dado que es la definición.

Caso Inductivo: $\boxed{n > 2}$

Supongamos ahora que vale para n y veamos entonces que vale para $n+1$. Sean $x_1, \ldots, x_{n+1} \in L$, por hipótesis inductiva tenemos que:

$$\begin{array}{rcll}(\ldots(x_1 \mathsf{~s~} x_2) \mathsf{~s~} \ldots) \mathsf{~s~} x_n &=& \sup(\{x_1, \ldots, x_n\}) & (\star_1) \\ (\ldots(x_1 \mathsf{~i~} x_2) \mathsf{~i~} \ldots) \mathsf{~i~} x_n &=& \inf(\{x_1, \ldots, x_n\}) & (\star_2)\end{array}$$

Veamos entonces que:

$$\begin{array}{rcll}((\ldots(x_1 \mathsf{~s~} x_2) \mathsf{~s~} \ldots) \mathsf{~s~} x_n) \mathsf{~s~} x_{n+1} &=& \sup(\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}) & (\dagger_1) \\ ((\ldots(x_1 \mathsf{~i~} x_2) \mathsf{~i~} \ldots) \mathsf{~i~} x_n) \mathsf{~i~} x_{n+1} &=& \inf(\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}) & (\dagger_2)\end{array}$$

Para ello debemos ver $((\ldots(x_1 \mathsf{~s~} x_2) \mathsf{~s~} \ldots) \mathsf{~s~} x_n) \mathsf{~s~} x_{n+1}$ es cota superior de $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ y que es la menor de las cotas superiores. Además, que $((\ldots(x_1 \mathsf{~i~} x_2) \mathsf{~i~} \ldots) \mathsf{~i~} x_n) \mathsf{~i~} x_{n+1}$ es cota inferior de $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ y que es la mayor de las cotas inferiores.

Es fácil ver que $((\dots(x_1 \mathsf{s}\, x_2) \mathsf{s}\ \dots) \mathsf{s}\, x_n) \mathsf{s}\, x_{n+1}$ es cota superior de $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$. Supongamos que z es otra cota superior de $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$. Ya que z es también cota superior del conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$, por $(\star_1)$ tenemos que:

$$(\dots(x_1 \mathsf{s}\, x_2) \mathsf{s}\ \dots) \mathsf{s}\, x_n \leq z$$

Además, dado que $x_{n+1} \leq z$, tenemos que:

$$((\dots(x_1 \mathsf{s}\, x_2) \mathsf{s}\ \dots) \mathsf{s}\, x_n) \mathsf{s}\, x_{n+1} \leq z$$

Por lo tanto, vale $(\dagger_1)$.

Nuevamente, es fácil ver que $((\dots(x_1 \mathsf{i}\, x_2) \mathsf{i}\ \dots) \mathsf{i}\, x_n) \mathsf{i}\, x_{n+1}$ es cota inferior de $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$. Supongamos que z' es otra cota inferior de $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$. Ya que z' es también cota inferior del conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$, por $(\star_2)$ tenemos que:

$$z' \leq (\dots(x_1 \mathsf{i}\, x_2) \mathsf{i}\ \dots) \mathsf{i}\, x_n$$

Además, dado que $z' \leq x_{n+1}$, tenemos que:

$$z' \leq ((\dots(x_1 \mathsf{i}\, x_2) \mathsf{i}\ \dots) \mathsf{i}\, x_n) \mathsf{i}\, x_{n+1}$$

Por lo tanto, vale $(\dagger_2)$. □

Theorem 4. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado, la relación binaria definida por:*

$$x \leq y \Leftrightarrow x \mathsf{s}\, y = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple:

$$\begin{array}{rcl} \sup(\{x, y\}) & = & x \mathsf{s}\, y \\ \inf(\{x, y\}) & = & x \mathsf{i}\, y \end{array}$$

Proof.

- Reflexiva: Sea $x \in L$ un elemento cualquiera. Luego,

$$\left.\begin{array}{l} x \mathsf{s}\, x = x \\ x \mathsf{i}\, x = x \end{array}\right\} \Rightarrow x \leq x$$

- Antisimétrica: Sean $x, y \in L$ elementos cualquieras. Supongamos que $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x \leq y \Rightarrow x \mathsf{s}\, y = y \\ y \leq x \Rightarrow x \mathsf{s}\, y = x \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

- Transitiva: Supongamos que $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces:

$$x \mathsf{s}\, z = x \mathsf{s}\, (y \mathsf{s}\, z) = (x \mathsf{s}\, y) \mathsf{s}\, z = y \mathsf{s}\, z = z$$

  por lo cual $x \leq z$.

  Veamos ahora que $\sup(\{x, y\}) = x \mathsf{s}\, y$. Es claro que $x \mathsf{s}\, y$ es una cota superior del conjunto $\{x, y\}$, veamos que es la menor. Supongamos $x, y \leq z$, entonces:

$$(x \mathsf{s}\, y) \mathsf{s}\, z = x \mathsf{s}\, (y \mathsf{s}\, z) = x \mathsf{s}\, z = z$$

  por lo que $x \mathsf{s}\, y \leq z$, es decir, $x \mathsf{s}\, y$ es la menor cota superior.

  Resta probar que $\inf(\{x, y\}) = x \mathsf{i}\, y$. Nuevamente, es claro que $x \mathsf{i}\, y$ es una cota inferior del conjunto $\{x, y\}$, veamos que es la mayor. Supongamos $z \leq x, y$, entonces:

$$(x \mathsf{i}\, y) \mathsf{i}\, z = x \mathsf{i}\, (y \mathsf{i}\, z) = x \mathsf{i}\, z = z$$

  por lo que $z \leq x \mathsf{i}\, y$, es decir, $x \mathsf{i}\, y$ es la mayor cota inferior.

□

Lemma 5. *Si $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo.*

Proof. Debemos probar que F^{-1} es un homomorfismo. Sean $F(x), F(y)$ dos elementos cualesquiera de L', tenemos que:

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(x) \mathsf{s}' F(y)) &= F^{-1}(F(x \mathsf{s} y)) \\ &= x \mathsf{s} y \\ &= F^{-1}(F(x)) \mathsf{s} F^{-1}(F(y)) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F^{-1}(F(x) \mathsf{i}' F(y)) &= F^{-1}(F(x \mathsf{i} y)) \\ &= x \mathsf{i} y \\ &= F^{-1}(F(x)) \mathsf{i} F^{-1}(F(y)) \end{aligned}$$

Luego, F^{-1} es homomorfismo y por lo tanto F es isomorfismo. □

Lemma 6. *Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados y sea $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ un homomorfismo, entonces I_F es un subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$.*

Proof. Ya que $L \neq \emptyset$, tenemos que $I_F \neq \emptyset$. Sean $a, b \in I_F$, $x, y \in L$ tales que $F(x) = a$ y $F(y) = b$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} a \mathsf{s}' b &= F(x) \mathsf{s}' F(y) = F(x \mathsf{s} y) \in I_F \\ a \mathsf{i}' b &= F(x) \mathsf{i}' F(y) = F(x \mathsf{i} y) \in I_F \end{aligned}$$

por lo cual I_F es cerrada bajo s' e i'. □

Lemma 7. *Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una función, entonces F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si y solo si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.*

Proof. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$.
Sean $x, y \in L$ tales que $x \leq y$. Tenemos:

$$\begin{aligned} y &= x \mathsf{s} y \\ F(y) &= F(x \mathsf{s} y) \\ &= F(x) \mathsf{s}' F(y) \\ \therefore F(x) &\leq' F(y) \end{aligned}$$

Sean $x', y' \in L'$ tales que $x' \leq' y'$. Tenemos:

$$\begin{aligned} y' &= x' \mathsf{s}' y' \\ F^{-1}(y') &= F^{-1}(x' \mathsf{s}' y') \\ &= F^{-1}(x') \mathsf{s} F^{-1}(y') \\ \therefore F^{-1}(x) &\leq F^{-1}(y) \end{aligned}$$

Por lo tanto, F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$, entonces el **Lemma ??** nos dice que F y F_1 respetan la operaciones de supremo e ínfimo, por lo cual F es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$. □

Lemma 8. *Sea $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ un reticulado. El orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado a este reticulado cumple:*

$$x/\theta \;\tilde{\leq}\; y/\theta \Leftrightarrow y \;\theta\; (x \mathsf{s} y)$$

Proof. Veamos que $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$ satisface las 7 identidades de la definición de reticulado. Sean $x/\theta, y/\theta, z/\theta$ elementos cualesquiera de L/θ.

(I1) $\boxed{x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, x/\theta = x/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, x/\theta = x/\theta}$

$$\begin{aligned} x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, x/\theta &= (x \mathrel{\mathsf{s}} x)/\theta = x/\theta \\ x/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, x/\theta &= (x \mathrel{\mathsf{i}} x)/\theta = x/\theta \end{aligned}$$

(I2) $\boxed{x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta = y/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, x/\theta}$

$$\begin{aligned} x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta &= (x \mathrel{\mathsf{s}} y)/\theta \\ &= (y \mathrel{\mathsf{s}} x)/\theta \\ &= y/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta \end{aligned}$$

(I3) $\boxed{x/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, y/\theta = y/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, x/\theta}$

$$\begin{aligned} x/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, y/\theta &= (x \mathrel{\mathsf{i}} y)/\theta \\ &= (y \mathrel{\mathsf{i}} x)/\theta \\ &= y/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, y/\theta \end{aligned}$$

(I4) $\boxed{(x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta) \,\tilde{\mathsf{s}}\, z/\theta = x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, (y/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, z/\theta)}$

$$\begin{aligned} (x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta) \,\tilde{\mathsf{s}}\, z/\theta &= (x \mathrel{\mathsf{s}} y)/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, z/\theta \\ &= ((x \mathrel{\mathsf{s}} y) \mathrel{\mathsf{s}} z)/\theta \\ &= (x \mathrel{\mathsf{s}} (y \mathrel{\mathsf{s}} z))/\theta \\ &= x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, (y \mathrel{\mathsf{s}} z)/\theta \\ &= x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, (y/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, z/\theta) \end{aligned}$$

(I5) $\boxed{(x/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, y/\theta) \,\tilde{\mathsf{i}}\, z/\theta = x/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, (y/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, z/\theta)}$

$$\begin{aligned} (x/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, y/\theta) \,\tilde{\mathsf{i}}\, z/\theta &= (x \mathrel{\mathsf{i}} y)/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, z/\theta \\ &= ((x \mathrel{\mathsf{i}} y) \mathrel{\mathsf{i}} z)/\theta \\ &= (x \mathrel{\mathsf{i}} (y \mathrel{\mathsf{i}} z))/\theta \\ &= x/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, (y \mathrel{\mathsf{i}} z)/\theta \\ &= x/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, (y/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, z/\theta) \end{aligned}$$

(I6) $\boxed{x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, (x/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, y/\theta) = x/\theta}$

$$\begin{aligned} x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, (x/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, y/\theta) &= x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, (x \mathrel{\mathsf{i}} y)/\theta \\ &= (x \mathrel{\mathsf{s}} (x \mathrel{\mathsf{i}} y))/\theta \\ &= x/\theta \end{aligned}$$

(I7) $\boxed{x/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, (x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta) = x/\theta}$

$$\begin{aligned} x/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, (x/\theta \,\tilde{\mathsf{s}}\, y/\theta) &= x/\theta \,\tilde{\mathsf{i}}\, (x \mathrel{\mathsf{s}} y)/\theta \\ &= (x \mathrel{\mathsf{i}} (x \mathrel{\mathsf{s}} y))/\theta \\ &= x/\theta \end{aligned}$$

$\square$

Corollary 9. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado en el cual hay un elemento máximo* 1 *(resp. mínimo* 0*), entonces si* θ *es una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}), 1/\theta$ *(resp.* $0/\theta$*) es un elemento máximo (resp. mínimo) de* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}})$*.*

Proof. Ya que $1\ \theta\ (x \mathrel{\mathsf{s}} 1)$, para cada $x \in L$, tenemos que $x/\theta \mathrel{\tilde{\leq}} 1/\theta$, para cada $x \in L$. $\square$

Lemma 10. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ *es un homomorfismo de reticulados, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$*.*

Proof. Veamos primero que $\ker F$ es una relación de equivalencia.

- Reflexiva: $(x, x) \in \ker F$. Trivial pues $F(x) = F(x)$.
- Simétrica: Si $(x, y) \in \ker F \Rightarrow (y, x) \in \ker F$.
  Si $(x, y) \in \ker F \Rightarrow F(x) = F(y)$. Luego, vale también $F(y) = F(x)$.
- Transitiva: Si $(x, y), (y, z) \in \ker F \Rightarrow (x, z) \in \ker F$.

$$\left.\begin{array}{l} (x, y) \in \ker F \Rightarrow F(x) = F(y) \\ (y, z) \in \ker F \Rightarrow F(y) = F(z) \end{array}\right\} \Rightarrow F(x) = F(y) = F(z)$$

  Por lo tanto, $(x, z) \in \ker F$.

Supongamos $x \ker F (x')$ y $y \ker F (y')$, entonces:

$$\begin{aligned} F(x \mathrel{\mathsf{s}} y) &= F(x) \mathrel{\mathsf{s}'} F(y) = F(x') \mathrel{\mathsf{s}'} F(y') = F(x' \mathrel{\mathsf{s}} y') \\ F(x \mathrel{\mathsf{i}} y) &= F(x) \mathrel{\mathsf{i}'} F(y) = F(x') \mathrel{\mathsf{i}'} F(y') = F(x' \mathrel{\mathsf{i}} y') \end{aligned}$$

lo cual nos dice que $(x \mathrel{\mathsf{s}} y) \ker F (x' \mathrel{\mathsf{s}} y')$ y $(x \mathrel{\mathsf{i}} y) \ker F (x' \mathrel{\mathsf{i}} y')$. $\square$

Lemma 11. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *un reticulado y sea* θ *una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$*, entonces* π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ *en* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath})$*. Además* $\ker \pi_\theta = \theta$*.*

Proof. Sean $x, y \in L$ elementos cualquier. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \pi_\theta(x \mathsf{~s~} y) =& (x \mathsf{~s~} y)/\theta = x/\theta \ \tilde{\mathsf{s}} \ \ y/\theta = \pi_\theta(x) \ \tilde{\mathsf{s}} \ \pi_\theta(y) \\ \pi_\theta(x \mathsf{~i~} y) =& (x \mathsf{~i~} y)/\theta = x/\theta \ \tilde{\imath} \ \ y/\theta = \pi_\theta(x) \ \tilde{\imath} \ \pi_\theta(y) \end{aligned}$$

por lo cual π_θ preserva las operaciones de supremo e ínfimo. □

Lemma 12. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ *un homomorfismo biyectivo, entonces* F *es un isomorfismo.*

Proof. Debemos probar que F^{-1} es un homomorfismo. Sean $F(x), F(y)$ dos elementos cualesquiera de L', tenemos que:

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(1)) &= F^{-1}(1') \\ F^{-1}(1') &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F^{-1}(F(0)) &= F^{-1}(0') \\ F^{-1}(0') &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(x) \mathsf{~s}' \ F(y)) &= F^{-1}(F(x \mathsf{~s~} y)) \\ &= x \mathsf{~s~} y \\ &= F^{-1}(F(x)) \mathsf{~s~} F^{-1}(F(y)) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F^{-1}(F(x) \mathsf{~i}' \ F(y)) &= F^{-1}(F(x \mathsf{~i~} y)) \\ &= x \mathsf{~i~} y \\ &= F^{-1}(F(x)) \mathsf{~i~} F^{-1}(F(y)) \end{aligned}$$

Luego, F^{-1} es homomorfismo y por lo tanto F es isomorfismo. □

Lemma 13. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ *es un homomorfismo, entonces* I_F *es un subuniverso de* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$*.*

Proof. Dado que F es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ utilizando el **Lemma ??** tenemos que I_F es subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ lo cual ya que $0', 1' \in I_F$ implica que I_F es un subuniverso de $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$. □

Lemma 14. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados acotados, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$*.*

Lemma 15. *Sea* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *un reticulado acotado y* θ *una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$*, entonces:*

a) $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ *es un reticulado acotado.*

b) π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ *en* $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath}, 0/\theta, 1/\theta)$ *cuyo núcleo es* θ*.*

Lemma 16. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', {}^{c'}, 0', 1')$ *un homomorfismo biyectivo, entonces* F *es un isomorfismo.*

Lemma 17. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', {}^{c'}, 0', 1')$ *es un homomorfismo, entonces* I_F *es un subuniverso de* $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', {}^{c'}, 0', 1')$*.*

Lemma 18. *Si* $F : (L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1) \to (L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', {}^{c'}, 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados complementados, entonces* $\ker F$ *es una congruencia sobre* $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$*.*

Proof. Ya que F es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}',^{c'}, 0'$, tenemos por **Lemma ??** que $kerF$ es una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$, es decir, solo falta probar que para todos $x, y \in L$ se tiene que $x/kerF = y/kerF$ implica $x^c/kerF = y^c/kerF$, lo cual es dejado al lector. □

TODO

Lemma 19. *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$ un reticulado complementado y sea θ una congruencia sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$.*

a) $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath},^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es un reticulado complementado.

b) π_θ es un homomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i},^c, 0, 1)$ en $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\imath},^{\tilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ cuyo núcleo es θ.

Proof. [a)]

□

Lemma 20. *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado. Son equivalentes:*

(1) $x \;\mathsf{i}\; (y \;\mathsf{s}\; z) = (x \;\mathsf{i}\; y) \;\mathsf{s}\; (x \;\mathsf{i}\; z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

(2) $x \;\mathsf{s}\; (y \;\mathsf{i}\; z) = (x \;\mathsf{s}\; y) \;\mathsf{i}\; (x \;\mathsf{s}\; z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$.

Proof. $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Notar que:

$$\begin{aligned}
(x \;\mathsf{s}\; y) \;\mathsf{i}\; (x \;\mathsf{s}\; z) &= ((x \;\mathsf{s}\; y) \;\mathsf{i}\; x) \;\mathsf{s}\; ((x \;\mathsf{s}\; y) \;\mathsf{i}\; z) \\
&= (x \;\mathsf{s}\; (z \;\mathsf{i}\; (x \;\mathsf{s}\; y)) \\
&= (x \;\mathsf{s}\; ((z \;\mathsf{i}\; x) \;\mathsf{s}\; (z \;\mathsf{i}\; y)) \\
&= (x \;\mathsf{s}\; (z \;\mathsf{i}\; x)) \;\mathsf{s}\; (z \;\mathsf{i}\; y) \\
&= x \;\mathsf{s}\; (z \;\mathsf{i}\; y) \\
&= x \;\mathsf{s}\; (y \;\mathsf{i}\; z)
\end{aligned}$$

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Notar que:

$$\begin{aligned}
(x \;\mathsf{i}\; y) \;\mathsf{s}\; (x \;\mathsf{i}\; z) &= ((x \;\mathsf{i}\; y) \;\mathsf{s}\; x) \;\mathsf{i}\; ((x \;\mathsf{i}\; y) \;\mathsf{s}\; z) \\
&= (x \;\mathsf{i}\; (z \;\mathsf{s}\; (x \;\mathsf{i}\; y)) \\
&= (x \;\mathsf{i}\; ((z \;\mathsf{s}\; x) \;\mathsf{i}\; (z \;\mathsf{s}\; y)) \\
&= (x \;\mathsf{i}\; (z \;\mathsf{s}\; x)) \;\mathsf{i}\; (z \;\mathsf{s}\; y) \\
&= x \;\mathsf{i}\; (z \;\mathsf{s}\; y) \\
&= x \;\mathsf{i}\; (y \;\mathsf{s}\; z)
\end{aligned}$$

□

Lemma 21. *Si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento.*

Proof. Supongamos $x \in L$ tiene complementos y, z. Se tiene:

$$\begin{aligned}
y \;\mathsf{s}\; x = 1 = x \;\mathsf{s}\; z \\
y \;\mathsf{i}\; x = 0 = \; x \;\mathsf{i}\; z
\end{aligned}$$

por lo cual:

$$y = y \;\mathsf{s}\; 0 = y \;\mathsf{s}\; (x \;\mathsf{i}\; z) = (y \;\mathsf{s}\; x) \;\mathsf{i}\; (y \;\mathsf{s}\; z) = 1 \;\mathsf{i}\; (y \;\mathsf{s}\; z) = (x \;\mathsf{s}\; z) \;\mathsf{i}\; (y \;\mathsf{s}\; z) = (x \;\mathsf{i}\; y) \;\mathsf{s}\; z = 0 \;\mathsf{s}\; z = z$$

Por lo tanto, $y = z$. □

Lemma 112: Con prueba. Lemma 22.

Lemma 22. *Si $S \neq \emptyset$, entonces $[S)$ es un filtro. Más aún si F es un filtro y $F \supseteq S$, entonces $F \supseteq [S)$, es decir, [S) es el menor filtro que contiene a S.*

Proof. Recordemos:

$$[S) = \{y \in L : y \geq s_1 \mathsf{i} \dots \mathsf{i} s_n, \text{ para algunos } s_1, \dots, s_n \in S, n \geq 1\}$$

1. $\boxed{[S) \neq \emptyset:}$ Ya que $S \subseteq [S)$, tenemos que $[S) \neq \emptyset$.

2. $\boxed{x, y \in [S) \Rightarrow x \mathsf{i} y \in [S):}$ Sean x, y tales que:

$$y \geq s_1 \mathsf{i} s_2 \mathsf{i} \dots \mathsf{i} s_n, \quad \text{i.e, } y \in [S)$$
$$z \geq t_1 \mathsf{i} t_2 \mathsf{i} \dots \mathsf{i} t_m, \quad \text{i.e, } z \in [S)$$

   con $s_1, s_2, \dots, s_n, t_1, t_2, \dots, t_m \in S$, entonces:

$$y \mathsf{i} z \geq s_1 \mathsf{i} s_2 \mathsf{i} \dots \mathsf{i} s_n \mathsf{i} t_1 \mathsf{i} t_2 \mathsf{i} \dots \mathsf{i} t_m$$

3. $\boxed{x \in [S) \text{ y } x \leq y \Rightarrow y \in [S):}$ Por construcción, claramente $[S)$ cumple esta propiedad.

□

Lemma 23. ***(Zorn)*** *Sea $(P, \leq)$ un poset y supongamos que cada cadena de $(P, \leq)$ tiene una cota superior, entonces existe un elemento maximal en $(P, \leq)$.*

Theorem 24. ***(Teorema del Filtro Primo)*** *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado distributivo y F un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$, entonces hay un filtro primo P tal que $x_0 \notin P$ y $F \subseteq P$.*

Proof. Sea:

$$\mathcal{F} = \{F_1 : F_1 \text{ es un filtro, } x_0 \notin F_1 \text{ y } F \subseteq F_1\}$$

Notar que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, por lo cual $(\mathcal{F}, \subseteq)$ es un poset.
Veamos que cada cadena en $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene una cota superior. Sea C una cadena.

- Si $C = \emptyset$, entonces cualquier elemento de $\mathcal{F}$ es cota de C.
- Si $C \neq \emptyset$. Sea:

$$G = \{x \in L : x \in F_1, \text{ para algún } F_1 \in C\}$$

Veamos que G es un filtro.

1. Es claro que $G \neq \emptyset$.
2. Supongamos que $x, y \in G$. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $x \in F_1$ y $y \in F_2$.
   - Si $F_1 \subseteq F_2$, entonces ya que F_2 es un filtro tenemos que $x \mathsf{i} y \in F_2 \subseteq G$.
   - Si $F_2 \subseteq F_1$, entonces tenemos que $x \mathsf{i} y \in F_1 \subseteq G$.

   Ya que C es una cadena, tenemos que siempre $x \mathsf{i} y \in G$.
3. En forma analoga se prueba la propiedad restante ...

Por lo tanto, tenemos que G es un filtro. Además $x_0 \notin G$, por lo que $G \in \mathcal{F}$ es cota superior de C. Por el **Lemma ??**, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene un elemento maximal P. Veamos que P es un filtro primo.

Supongamos $x \mathsf{s} y \in P$ y $x, y \notin P$, entonces ya que P es maximal tenemos que:

$$x_0 \in [P \cup \{x\}) \cap [P \cup \{y\})$$

Ya que $x_0 \in [P \cup \{x\})$, tenemos que hay elementos $p_1, \ldots, p_n \in P$, tales que:

$$x_0 \geq p_1 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} p_n \mathsf{i} x$$

Ya que $x_0 \in [P \cup \{y\})$, tenemos que hay elementos $q_1, \ldots, q_m \in P$, tales que:

$$x_0 \geq q_1 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} q_m \mathsf{i} y$$

Denotemos:

$$p = p_1 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} p_n \mathsf{i} q_1 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} q_m$$

tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} x_0 & \geq & p \mathsf{i} x \\ x_0 & \geq & p \mathsf{i} y \end{array}$$

Se tiene que $x_0 \geq (p \mathsf{i} x) \mathsf{s} (p \mathsf{i} y) = p \mathsf{i} (x \mathsf{s} y) \in P$, lo cual es absurdo ya que $x_0 \notin P$. $\square$

Corollary 25. *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado distributivo. Si $\emptyset \neq S \subseteq L$ es tal que $s_1 \mathsf{i} s_2 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i} s_n \neq 0$, para cada $s_1, \ldots, s_n \in S$, entonces hay un filtro primo que contiene a S.*

Proof. Dado que $[S) \neq L$, se puede aplicar el **Theorem ??** (Teorema del filtro primo). $\square$

Lemma 26. *Sea $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$ un algebra de Boole, entonces para un filtro $F \subseteq B$ las siguientes son equivalentes:*

(1) F es primo

(2) $x \in F$ ó $x^c \in F$, para cada $x \in B$.

Proof. $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Ya que $x \mathsf{s} x^c = 1 \in F$, y F es filtro primo, por definición de filtro primo se cumple que $x \in F$ ó $x^c \in F$.

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Supongamos que $x \mathsf{s} y \in F$ y que $x \notin F$, entonces por (2), $x^c \in F$ y por lo tanto tenemos que:

$$y \geq x^c \mathsf{i} y = 0 \mathsf{s} (x^c \mathsf{i} y) = (x^c \mathsf{i} x) \mathsf{s} (x^c \mathsf{i} y) = x^c \mathsf{i} (x \mathsf{s} y) \in F$$

lo cual dice que $y \in F$. $\square$

Lemma 27. *Sea $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Supongamos que $b \neq 0$ y $a = \inf A$, con $A \subseteq B$, entonces si $b \mathsf{i} a = 0$ existe un $e \in A$ tal que $b \mathsf{i} e^c \neq 0$.*

Proof. Supongamos que para cada $e \in A$, tengamos que $b \mathsf{i} e^c = 0$, entonces tenemos que para cada $e \in A$,

$$b = b \mathsf{i} (e \mathsf{s} e^c) = (b \mathsf{i} e) \mathsf{s} (b \mathsf{i} e^c) = b \mathsf{i} e$$

lo cual nos dice que b es cota inferior de A. Pero si $b \leq a$, entonces $b = b \mathsf{i} a = 0$, es decir, $b = 0$, lo cual es un absurdo dado que por hipótesis sabíamos que $b \neq 0$. $\square$

Theorem 28. ***(Rasiova y Sikorski)*** *Sea* $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ *un álgebra de Boole. Sea* $x \in B$*, tal que* $x \neq 0$*. Supongamos que* $A_1, A_2, \ldots$ *son subconjuntos de* B *tales que existe* $\inf(A_j)$*, para cada* $j = 1, 2, \ldots,$ *entonces hay un filtro primo* P *el cual cumple:*

a) $x \in P$

b) $A_j \subseteq P \Rightarrow \inf(A_j) \in P$*, para cada* $j = 1, 2, \ \ldots$

Proof. Sea $a_j = \inf(A_j)$, para $j = 1, 2, \ \ldots$ construiremos inductivamente una sucesión $b_0, b_1, \ldots$ de elementos de B tal que:

- $b_0 = x$
- $b_0 \ \mathsf{i} \ \ldots \ \mathsf{i} \ b_n \neq 0$, para cada $n \geq 0$
- $b_j = a_j$ ó $b_j^c \in A_j$, para cada $j \geq 1$

(1) Definamos $b_0 = x$

(2) Supongamos ya definimos $b_0, \ldots, b_n$, veamos como definir b_{n+1}.

- Si $(b_0 \ \mathsf{i} \ \ldots \ \mathsf{i} \ b_n) \ \mathsf{i} \ a_{n+1} \neq 0$, entonces definamos $b_{n+1} = a_{n+1}$.
- Si $(b_0 \ \mathsf{i} \ \ldots \ \mathsf{i} \ b_n) \ \mathsf{i} \ a_{n+1} = 0$, entonces por el **Lemma ??**, tenemos que hay un $e \in A_{n+1}$ tal que $(b_0 \ \mathsf{i} \ \ldots \ \mathsf{i} \ b_n) \ \mathsf{i} \ e^c \neq 0$, lo cual nos permite definir $b_{n+1} = e^c$.

Dado que el conjunto $S = \{b_0, b_1, \ldots\}$ satisface la hipótesis del **Corollary ??**, por lo tanto hay un filtro primo P tal que $\{b_0, b_1, \ldots\} \subseteq P$, el cual satisface las propiedades (a) y (b) dado que así lo construimos. □

2 Términos y fórmulas

Lemma 29. *Supongamos* $t \in T_k^\tau$*, con* $k \geq 1$*, entonces ya sea* $t \in Var \cup \mathcal{C}$ *ó* $t = f(t_1, \ldots, t_n)$*, con* $f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, \ t_1, \ldots, t_n \in T_{k-1}^\tau$*.*

Proof. Probaremos este teorema por inducción en k.

Caso Base: $\boxed{k = 1}$ Es directo, ya que por definición:

$$T_1^\tau = Var \cup \mathcal{C} \cup \{f(t_1, t_2, \ldots t_n) : f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, t_1, t_2, \ldots t_n \in T_0^\tau\}$$

Caso Inductivo: $\boxed{k > 1}$ Sea $t \in T_{k+1}^\tau$. Por definición de T_{k+1}^τ tenemos que:

- $t \in T_k^\tau$ ó
- $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ con $f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1$ y $t_1, \ldots, t_n \in T_k^\tau$.

Si se da que $t \in T_k^\tau$, entonces podemos aplicar hipótesis inductiva y usar que $T_{k-1}^\tau \subseteq T_k^\tau$. □

Lemma 30. *Sea* $b \in Bal$*. Se tiene:*

(1) $|b|_(- |b|_) = 0$

(2) Si x *es tramo inicial propio de* b*, entonces* $|x|_(- |x|_) > 0$

(3) Si x *es tramo final propio de* b*, entonces* $|x|_(- |x|_) < 0$

Proof. Probaremos por inducción en k, que valen (1), (2) y (3) para cada $b \in Bal_k$.

Caso Base: $\boxed{k = 1}$

(1) $Bal_1 = \{()\}$. Luego, $|b|_(= |b|_) = 1$. Por lo tanto, $|b|_(- |b|_) = 0$.

(2) Supongamos x tramo inicial propio de b. Luego $x =($, es decir, $|x|_(= 1$ y $|x|_) = 0$. Por lo tanto, $|x|_(- |x|_) > 0$.

(3) Supongamos x tramo final propio de b. Luego $x =)$, es decir, $|x|_(= 0$ y $|x|_) = 1$. Por lo tanto, $|x|_(- |x|_) < 0$.

Caso Inductivo: $\boxed{k > 1}$ Supongamos $b \in Bal_{k+1}$. Si $b \in Bal_k$, se aplica directamente HI para cualquiera de los casos. Supongamos entonces que $b = (b_1 \dots b_n)$, con $b_1, \dots, b_n \in Bal_k, n \geq 1$.

(1) Por HI, $b_1, \dots, b_n$ satifacen $|b|_(- |b|_) = 0$. Luego, $(b_1, \dots, b_n)$ también satisface, es decir, al agregar un paréntesis de cada tipo, el balanceo se mantiene.

(2) Sea x un tramo inicial propio de b. Notese que x es de la forma $x = (b_1 \dots b_i y$ con $0 \leq i \leq n-1$ y y un tramo inicial de b_{i+1}, pero entonces:

$$|x|_(- |x|_) = 1 + \left(\sum_{j=1}^{i} |b_j|_(- |b_j|_) \right) + |y|_(- |y|_)$$

tenemos que por HI, se da que $|x|_(- |x|_) > 0$.

(3) Sea x un tramo final propio de b. Notese que x es de la forma $x = yb_1 \dots b_i)$ con $1 \leq i \leq n$ y y un tramo final de b_{i+1}, pero entonces:

$$|x|_(- |x|_) = |y|_(- |y|_) + \left(\sum_{j=1}^{i} |b_j|_(- |b_j|_) \right) + 1$$

tenemos que por HI, se da que $|x|_(- |x|_) < 0$.

$\square$

Lemma 31. *$del(xy) = del(x)del(y)$ $\forall x, y \in \Sigma^*$.*

Lemma 32. *Supongamos que Σ es tal que $T^\tau \subseteq \Sigma^*$, entonces $del(t) \in Bal$, para cada $t \in T^\tau - (Var \cup \mathcal{C})$.*

Lemma 33. *Sean $s, t \in T^\tau$ y supongamos que hay palabras x, y, z, con $y \neq \varepsilon$ tales que $s = xy$ y $t = yz$, entonces $x = z = \varepsilon$ ó $s, t \in \mathcal{C}$. En particular, si un término es tramo inicial o final de otro término, entonces dichos términos son iguales.*

Proof.

- Supongamos $s \in \mathcal{C}$: Ya que $y \neq \varepsilon$ tenemos que t debe comenzar con un símbolo que ocurre en un nombre de constante, lo cual dice que t no puede ser ni una variable ni de la forma $g(t_1, \dots, t_m)$, es decir $t \in \mathcal{C}$.

- Supongamos $s \in Var$: Si sucediese que $x \neq \varepsilon$, t comenzaría con alguno de los siguientes símbolos:

$$\mathit{0}\ \mathit{1}\ \dots\ \mathit{9}\ \mathbf{0}\ \mathbf{1}\ \dots\ \mathbf{9}$$

lo cual es absurdo. Luego, $x = \varepsilon$ y por lo tanto t debe comenzar con X, pero esto dice que $t \in Var$ de lo que sigue que $z = \varepsilon$.

- Supongamos que s es de la forma $f(s_1, \ldots, s_n)$: Ya que) debe ocurrir en t, tenemos que t es de la forma $g(t_1, \ldots, t_m)$, osea que $del(s), del(t) \in Bal$. Ya que) ocurre en y, $del(y) \neq \varepsilon$. Tenemos también que:

$$\begin{aligned} del(s) &= del(x)del(y) \\ del(t) &= del(y)del(z) \end{aligned}$$

Utilizando el **Lemma 2** obtenemos que:

$$\begin{aligned} &1)\ |del(y)|_(- |del(y)|_) \leq 0 \\ &2)\ |del(y)|_(- |del(y)|_) \geq 0 \end{aligned}$$

por lo cual:

$$|del(y)|_(- |del(y)|_) = 0$$

pero entonces ya que $del(y)$ es tramo final de $del(s)$, el **Lemma 2** nos dice que $del(x) = \varepsilon$. De la misma manera, obtenemos que $del(z) = \varepsilon$. Ya que que t termina con) tenemos que $z = \varepsilon$, osea que $f(s_1, \ldots, s_n) = xg(t_1, \ldots, t_m)$ con $del(x) = \varepsilon$, de lo que se desprende que $f = xg$ ya que (no ocurre en x. Finalmente, de la definición de tipo se desprende que $x = \varepsilon$.

□

Theorem 34. *(Lectura única de terminos). Dado $t \in T^\tau$ se da una de las siguientes:*

(1) $t \in Var \cup \mathcal{C}$

(2) Hay únicos $n \geq 1,\ f \in \mathcal{F}_n,\ t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$ tales que $t = f(t_1, \ldots, t_n)$.

Proof. En virtud del **Lemma 1** solo nos resta probar la unicidad de $t_1, \ldots, t_n$ en el punto (2). Supongamos que:

$$t = f(t_1, \ldots, t_n) = g(s_1, \ldots, s_m)$$

con $n, m \geq 1,\ f \in \mathcal{F}_n, g \in \mathcal{F}_m, t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_m \in T^\tau$. Notese que $f = g$, es decir, $n = m = a(f)$. Notemos que:

- t_1 es tramo inicial de s_1 ó
- s_1 es tramo inicial de t_1

En general:

- t_i es tramo inicial de s_i ó
- s_i es tramo inicial de t_i, para $1 \leq i \leq n$.

lo cual por el **Lemma 5** nos dice que $t_i = s_i$ con $1 \leq i \leq n$. □

Lemma 35. *Sean $r, s, t \in T^\tau$.*

(a) Si $s \neq t = f(t_1, \ldots, t_n)$ y s ocurre en t, entonces dicha ocurrencia sucede dentro de algún t_j, $j = 1, \ldots, n$.

(b) Si r, s ocurren en t, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una ocurre dentro de otra. En particular, las distintas ocurrencias de r en t son disjuntas.

(c) Si t' es el resultado de reemplazar una ocurrencia de s en t por r, entonces $t' \in T^\tau$.

Proof. (a) Supongamos la ocurrencia de s comienza en algún t_j, entonces el **Lemma 5** nos conduce a que dicha ocurrencia debera estar contenida en t_j. Veamos que la ocurrencia de s no puede ser a partir de un $i \in \{1, \ldots, |f|\}$. Supongamos lo contrario. Tenemos entonces que s debe ser de la forma $g(s_1, \ldots, s_m)$ ya que no puede estar en $Var \cup \mathcal{C}$. Notese que $i \neq 1$ ya que en caso contrario s seria un tramo inicial propio de t. Pero entonces g debe ser un tramo final propio de f, lo cual es absurdo. Ya que s no puede comenzar con parentesis o coma, hemos contemplado todos los posibles casos de comienzo de la ocurrencia de s en t.

(b) Por induccion, usando (a).

(c) Por induccion, usando (a).

□

Lemma 36. *Supongamos $\varphi \in F^\tau_k$, con $k \geq 1$, entonces φ es de alguna de las siguientes formas:*

- $\varphi = (t \equiv s)$, *con* $t, s \in T^\tau$.
- $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$, *con* $r \in \mathcal{R}_n, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$.
- $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, *con* $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau_{k-1}$.
- $\varphi = \neg\varphi_1$, *con* $\varphi_1 \in F^\tau_{k-1}$.
- $\varphi = Qv\varphi_1$, *con* $Q \in \{\forall, \exists\}$, $v \in Var$ *y* $\varphi_1 \in F^\tau_{k-1}$.

Llamaremos ($\star$) a dicha lista.

Proof. Probaremos este teorema por inducción en k, utilizando la definición del conjunto F^τ.

Caso Base:

$$\varphi \in \{(t \equiv s) : t, s \in T^\tau\} \cup \{r(t_1, \ldots, t_n) : r \in \mathcal{R}_n, n \geq 1, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau\}$$

por lo que φ es de alguna de las siguientes formas:

- $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$.
- $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$, con $r \in \mathcal{R}_n, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$.

Caso Inductivo: Supongamos que si $\varphi \in F^\tau_{k-1}$ entonces φ es de alguna de las formas de ($\star$). Probaremos que si $\varphi \in F^\tau_k$ entonces φ también es de alguna de las formas de la lista ($\star$).

$$\begin{aligned} \varphi \in F^\tau_{k-1} &\cup \{\neg\varphi : \varphi \in F^\tau_{k-1}\} \cup \{(\varphi\eta\psi) : \varphi, \psi \in F^\tau_{k-1}, \eta \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}\} \\ &\cup \{Qv\varphi : \varphi \in F^\tau_{k-1}, v \in Var, Q \in \{\forall, \exists\}\} \end{aligned}$$

Luego, si $\varphi \in F^\tau_{k-1}$ aplicando HI obtenemos que φ es de alguna de las formas de la lista anterior. Caso contrario, se dá alguna de las siguientes:

- $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau_{k-1}, \eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
- $\varphi = \neg\varphi_1$, con $\varphi_1 \in F^\tau_{k-1}$.
- $\varphi = Qv\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $v \in Var$ y $\varphi_1 \in F^\tau_{k-1}$.

□

Lemma 37. *Sea τ un tipo.*

a) Supongamos que Σ es tal que $F^\tau \subseteq \Sigma^*$, entonces $del(\varphi) \in Bal$, para cada $\varphi \in F^\tau$.

b) Sea $\varphi \in F^\tau_k$, con $k \geq 0$, existen $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}, v \in Var\})^*$ y $\varphi_1 \in F^\tau$ tales que $\varphi = x\varphi_1$ y φ_1 es de la forma $(\psi_1 \eta \psi_2)$ o atómica. En particular toda fórmula termina con el símbolo).

Proof. a) HACER!!!!

b) Induccion en k. El caso $k = 0$ es trivial. Supongamos (b) vale para cada $\varphi \in F^\tau_k$ y sea $\varphi \in F^\tau_{k+1}$. Hay varios casos de los cuales haremos solo dos

- CASO $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau_k$ y $\eta \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
  Podemos tomar $x = \varepsilon$ y $\varphi_1 = \varphi$.
- CASO $\varphi = Qx_i\psi$, con $\psi \in F^\tau_k$, $i \geq 1$ y $Q \in \{\forall, \exists\}$.
  Por HI hay $\bar{x} \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$ y $\psi_1 \in F^\tau$ tales que $\psi = x\psi_1$ y ψ_1 es de la forma $(\gamma_1 \eta \gamma_2)$ o atomica. Entonces es claro que $x = Qx_i\bar{x}$ y $\varphi_1 = \psi_1$ cumplen (b). $\square$

$\square$

Lemma 38. *Ninguna fórmula es tramo final propio de una fórmula atómica, es decir, si $\varphi = x\psi$, con $\varphi \in F^\tau_0$ y $\psi \in F^\tau$, entonces $x = \varepsilon$.*

Proof.
- Si φ es de la forma $(t \equiv s)$, entonces $|del(y)|_(- |del(y)|_) < 0$ para cada tramo final propio y de φ, lo cual termina el caso ya que $del(\psi)$ es balanceada.
- Supongamos entonces $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$. Notese que ψ no puede ser tramo final de $t_1, \ldots, t_n)$ ya que $del(\psi)$ es balanceada y $|del(y)|_(- |del(y)|_) < 0$ para cada tramo final y de $t_1, \ldots, t_n)$. Es decir que $\psi = y(t_1, \ldots, t_n)$, para algun tramo final y de r. Ya que en ψ no ocurren cuantificadores ni nexos ni el simbolo $\equiv$ el Lema 124 nos dice $\psi = \tilde{r}(s_1, \ldots, s_m)$, con $\tilde{r} \in \mathcal{R}_m$, $m \geq 1$ y $s_1, \ldots, s_m \in T^\tau$. Ahora es facil usando un argumento paresido al usado en la prueba del Teorema 122 concluir que $m = n$, $s_i = t_i$, $i = 1, \ldots, n$ y $\tilde{r}$ es tramo final de r. Por (3) de la definicion de tipo tenemos que $\tilde{r} = r$ lo cual nos dice que $\varphi = \psi$ y $x = \varepsilon$ $\square$

$\square$

Lemma 39. *Si $\varphi = x\psi$, con $\varphi, \psi \in F^\tau$ y x sin paréntesis, entonces $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$.*

Proof. Probaremos por inducción en k, tal que $\varphi \in F^\tau_k$.

<u>Caso Base:</u> El caso $k = 0$ es probado en el lema anterior.

<u>Caso Inductivo:</u> Asumamos que el resultado vale cuando $\varphi \in F^\tau_k$ y veamos que vale cuando $\varphi \in F^\tau_{k+1}$. Mas aun supongamos $\varphi \in F^\tau_{k+1} - F^\tau_k$. Primero haremos el caso en que $\varphi = Qv\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $v \in Var$ y $\varphi_1 \in F^\tau_k$. Supongamos $x \neq \varepsilon$. Ya que ψ no comienza con simbolos de v, tenemos que ψ debe ser tramo final de φ_1 lo cual nos dice que hay una palabra x_1 tal que $x = Qvx_1$ y $\varphi_1 = x_1\psi$. Por HI tenemos que $x_1 \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$ con lo cual $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$. El caso en el que $\varphi = \neg\varphi_1$ con $\varphi_1 \in F^\tau_k$, es similar. Note que no hay mas casos posibles ya que φ no puede comenzar con (porque en x no ocurren parentesis por hipotesis $\square$ $\square$

Proposition 40. *Si $\varphi, \psi \in F^\tau$ y x, y, z son tales que $\varphi = xy, \psi = yz$ y $y \neq \varepsilon$, entonces $z = \varepsilon$ y $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$. En particular ningún tramo inicial propio de una fórmula es una fórmula.*

Proof. Ya que φ termina con) tenemos que $del(y) \neq \varepsilon$. Ya que $del(\varphi), del(\psi) \in Bal$ y ademas

$$\begin{array}{rcl} del(\varphi) & = & del(x)del(y) \\ del(\psi) & = & del(y)del(z) \end{array}$$

tenemos que $del(y)$ es tramo inicial y final de palabras balanceadas, lo cual nos dice que $|del(y)|_(- |del(y)|_) = 0$

Pero esto por (3) del Lema 118 nos dice que $del(x) = \varepsilon$. Similarmente obtenemos que $del(z) = \varepsilon$. Pero ψ termina con) lo cual nos dice que $z = \varepsilon$. Es decir que $\varphi = x\psi$. Por el lema anterior tenemos que $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ y $v \in Var\})^*$ □ □

Theorem 41. *(Lectura única de fórmulas) Dada $\varphi \in F^\tau$ se da una y solo una de las siguientes:*

(1) $\varphi = (t \equiv s)$, *con* $t, s \in T^\tau$

(2) $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$, *con* $r \in \mathcal{R}_n, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$

(3) $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, *con* $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$

(4) $\varphi = \neg\varphi_1$, *con* $\varphi_1 \in F^\tau$

(5) $\varphi = Qv\varphi_1$, *con* $Q \in \{\forall, \exists\}$, $\varphi_1 \in F^\tau$ *y* $v \in Var$.

Más aún, en todos los puntos tales descomposiciones son únicas.

Proof. (1)

(2)

(3)

(4)

(5)

Si una formula φ satisface (1), entonces φ no puede contener simbolos del alfabeto $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ lo cual garantiza que φ no puede satisfacer (3). Ademas φ no puede satisfacer (2) o (4) o (5) ya que φ comienza con (. En forma analoga se puede terminar de ver que las propiedades (1), ...,(5) son excluyentes.

La unicidad en las descomposiciones de (4) y (5) es obvia. La de (3) se desprende facilmente del lema anterior y la de los puntos (1) y (2) del lema analogo para terminos. □ □

Lemma 42. *Sea τ un tipo.*

(a) Las fórmulas atómicas no tienen subfórmulas propias.

(b) Si φ ocurre propiamente en $(\psi\eta\varphi)$, entonces tal ocurrencia es en ψ ó en φ.

(c) Si φ ocurre propiamente en $\neg\psi$, entonces tal ocurrencia es en ψ.

(d) Si φ ocurre propiamente en $Qx_k\psi$, entonces tal ocurrencia es en ψ.

(e) Si φ_1, φ_2 ocurren en φ, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una contiene a la otra.

(f) Si λ' es el resultado de reemplazar alguna ocurrencia de φ en λ por ψ, entonces $\lambda' \in F^\tau$.

Proof. Ejercicio. □