1 Posets

ORDEN PARCIAL: Sea $P \neq \emptyset$ cualquiera, una relación binaria $\leq$ sobre P será llamada un **orden parcial** sobre P si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\leq$ es **reflexiva**, i.e $a \leq a \;\; \forall a \in P$.
2. $\leq$ es **antisimétrica**, i.e si $a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a = b \;\; \forall a, b \in P$.
3. $\leq$ es **transitiva**, i.e si $a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \leq c \;\; \forall a, b, c \in P$.

POSET: Un conjunto parcialmente ordenado o **poset** será un par $(P, \leq)$ donde:

- $P \neq \emptyset$ cualquiera
- $\leq$ es un orden parcial sobre P

RELACIÓN BINARIA $<$: Dado un poset $(P, \leq)$ definimos $<$ sobre P de la siguiente manera:

$$a < b \Leftrightarrow a \leq b \text{ y } a \neq b$$

DEFINICIONES: Sea $(P, \leq)$ un poset, entonces:

- **Maximal:** $a \in P$ es un elemento maximal de $(P, \leq)$ si $a \nless b, \; \forall b \in P$.
- **Minimal:** $a \in P$ es un elemento minimal de $(P, \leq)$ si $b \nless a, \; \forall b \in P$.
- **Máximo:** $a \in P$ es el elemento máximo de $(P, \leq)$ si $b \leq a, \; \forall b \in P$.
- **Mínimo:** $a \in P$ es el elemento mínimo de $(P, \leq)$ si $a \leq b, \; \forall b \in P$.

  Dado $S \subseteq P$:

- **Cota superior:** $a \in P$ es cota superior de S en $(P, \leq)$ cuando $b \leq a, \; \forall b \in S$.
- **Cota inferior:** $a \in P$ es cota inferior de S en $(P, \leq)$ cuando $a \leq b, \; \forall b \in S$
- **Supremo:** $a \in P$ será llamado supremo de S en $(P, \leq)$ cuando se den las siguientes condiciones:
  1. a es a cota superior de S en $(P, \leq)$
  2. Para cada $b \in P$, si b es una cota superior de S en $(P, \leq) \Rightarrow a \leq b$.
- **Ínfimo:** $a \in P$ será llamado ínfimo de S en $(P, \leq)$ cuando se den las siguientes condiciones:
  1. a es a cota inferior de S en $(P, \leq)$
  2. Para cada $b \in P$, si b es una cota inferior de S en $(P, \leq) \Rightarrow b \leq a$.

HOMOMORFISMO E ISOMORFISMO DE POSETS: Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets

- Una función $F : P \to P'$ será llamada un **homomorfismo** de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ si $\forall x, y \in P$ se cumple que $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq' F(y)$.
- Una función $F : P \to P'$ será llamada un **isomorfismo** de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ si F es **biyectiva** y tanto F como F^{-1} son **homomorfismos**.

2 Reticulados

RETICULADO:

1. Un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ es un **reticulado** si $\forall a, b \in L$, existen $\sup(\{a, b\})$ e $\inf(\{a, b\})$. Se definen:
$$\begin{array}{rcl} a \mathsf{~s~} b &=& \sup(\{a, b\}) \\ a \mathsf{~i~} b &=& \inf(\{a, b\}) \end{array}$$

2. Una terna $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$, donde $L \neq \emptyset$ cualquiera, $x, y, z \in L$ cualquieras y s e i son dos operaciones binarias sobre L será llamada **reticulado** cuando cumpla las siguientes identidades:
   (I1) $x \mathsf{~s~} x = x \mathsf{~i~} x = x$
   (I2) $x \mathsf{~s~} y = y \mathsf{~s~} x$
   (I3) $x \mathsf{~i~} y = y \mathsf{~i~} x$
   (I4) $(x \mathsf{~s~} y) \mathsf{~s~} z = x \mathsf{~s~} (y \mathsf{~s~} z)$
   (I5) $(x \mathsf{~i~} y) \mathsf{~i~} z = x \mathsf{~i~} (y \mathsf{~i~} z)$
   (I6) $x \mathsf{~s~} (x \mathsf{~i~} y) = x$
   (I7) $x \mathsf{~i~} (x \mathsf{~s~} y) = x$

SUBRETICULADO: Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado. $S \neq \emptyset \subseteq L$ será llamado **subuniverso** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ si es cerrado bajo las operaciones s e i. Diremos que el reticulado $(S, \mathsf{s}|_{S\times S}, \mathsf{i}|_{S\times S})$ es **subreticulado** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$.

HOMOMORFISMO E ISOMORFISMO DE RETICULADOS: Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados.

- Una función $F : L \to L'$ será llamada un **homomorfismo** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si $\forall x, y \in L$ se cumple que:
$$\begin{array}{rcl} F(x \mathsf{~s~} y) &=& F(x) \mathsf{~s}' F(y) \\ F(x \mathsf{~i~} y) &=& F(x) \mathsf{~i}' F(y) \end{array}$$
- Una función $F : L \to L'$ será llamada un **isomorfismo** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si F es **biyectiva** y tanto F como F^{-1} son **homomorfismos**.

CONGRUENCIAS DE RETICULADOS: Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado, una **congruencia** sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ será una **relación de equivalencia** θ la cual cumpla:

$$x\theta x' \text{ y } y\theta y' \Rightarrow (x \mathsf{~s~} y)\theta(x' \mathsf{~s~} y') \text{ y } (x \mathsf{~i~} y)\theta(x' \mathsf{~i~} y')$$

Definimos, sobre L/θ, $\tilde{\mathsf{s}}$ e $\tilde{\imath}$, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} x/\theta \mathrel{\tilde{\mathsf{s}}} y/\theta &=& (x \mathsf{~s~} y)/\theta \\ x/\theta \mathrel{\tilde{\mathsf{i}}} y/\theta &=& (x \mathsf{~i~} y)/\theta \end{array}$$

KERNEL: Dada una función $F : A \to B$, llamaremos núcleo de F a la relación binaria:

$$\{(a, b) \in A^2 : F(a) = F(b)\}$$

Notación: $\ker F$.

PROYECCIÓN CANÓNICA: Si R es una **relación de equivalencia** sobre un conjunto A, definimos la función:

$$\begin{array}{rl} \pi_R : & A \to A/R \\ & a \to a/R \end{array}$$

3 Reticulados Acotados

RETICULADO ACOTADO: Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$, donde $L \neq \emptyset$, s e i operaciones binarias sobre L y $0, 1 \in L$, será llamada un **reticulado acotado** si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ es un reticulado y además se cumplen las siguientes identidades:

(I8) $0 \;\mathsf{s}\; x = x$, para cada $x \in L$

(I9) $x \;\mathsf{s}\; 1 = 1$, para cada $x \in L$

SUBRETICULADO ACOTADO: Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. $S \neq \emptyset \subseteq L$ será llamado **subuniverso** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ si es cerrado bajo las operaciones s e i. Diremos que el reticulado acotado $(S, \mathsf{s}|_{S\times S}, \mathsf{i}|_{S\times S}, 0, 1)$ es **subreticulado acotado** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$.

HOMOMORFISMO E ISOMORFISMO DE RETICULADOS ACOTADOS: Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ reticulados acotados.

- Una función $F : L \to L'$ será llamada un **homomorfismo** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ si $\forall x, y \in L$ se cumple que:

$$\begin{array}{rcl} F(x \;\mathsf{s}\; y) & = & F(x) \;\mathsf{s}'\; F(y) \\ F(x \;\mathsf{i}\; y) & = & F(x) \;\mathsf{i}'\; F(y) \\ F(0) & = & 0' \\ F(1) & = & 1' \end{array}$$

- Una función $F : L \to L'$ será llamada un **isomorfismo** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ si F es **biyectiva** y tanto F como F^{-1} son **homomorfismos**.

CONGRUENCIAS DE RETICULADOS ACOTADOS: Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado, una **congruencia** sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ será una **relación de equivalencia** θ la cual cumpla:

$$x\theta x' \text{ y } y\theta y' \Rightarrow (x \;\mathsf{s}\; y)\theta(x' \;\mathsf{s}\; y') \text{ y } (x \;\mathsf{i}\; y)\theta(x' \;\mathsf{i}\; y')$$

Definimos, sobre L/θ, $\tilde{\mathsf{s}}$ e $\tilde{\imath}$, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} x/\theta \;\tilde{\mathsf{s}}\; y/\theta & = & (x \;\mathsf{s}\; y)/\theta \\ x/\theta \;\tilde{\mathsf{i}}\; y/\theta & = & (x \;\mathsf{i}\; y)/\theta \end{array}$$

4 Reticulados Complementados

COMPLEMENTO: Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Dado $a \in L$, diremos que a es **complementado**, si $\exists b \in L$ tal que:

$$\begin{array}{rcl} a \;\mathsf{s}\; b & = & 1 \\ a \;\mathsf{i}\; b & = & 0 \end{array}$$

RETICULADO COMPLEMENTADO: $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, {}^c, 0, 1)$, donde $L \neq \emptyset$, s e i son operaciones binarias sobre L, ^{c} es una operación unaria sobre L y $0, 1 \in L$, será llamada un **reticulado complementado** si $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ es un reticulado acotado y además:

(I10) $x \;\mathsf{s}\; x^c = 1$, para cada $x \in L$

(I11) $x \;\mathsf{i}\; x^c = 0$, para cada $x \in L$

SUBRETICULADO COMPLEMENTADO: Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. $S \neq \emptyset \subseteq L$ será llamado **subuniverso** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ si es cerrado bajo las operaciones s, i y ^{c}. Diremos que el reticulado complementado $(S, \mathsf{s}|_{S\times S}, \mathsf{i}|_{S\times S}, ^c|_{S\times S}, 0, 1)$ es **subreticulado complementado** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$.

HOMOMORFISMO E ISOMORFISMO DE RETICULADOS COMPLEMENTADOS: Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ reticulados complementados.

- Una función $F : L \to L'$ será llamada un **homomorfismo** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', 0', 1')$ si $\forall x, y \in L$ se cumple que:

$$\begin{array}{rcl} F(x \mathsf{\ s\ } y) & = & F(x) \mathsf{\ s'\ } F(y) \\ F(x \mathsf{\ i\ } y) & = & F(x) \mathsf{\ i'\ } F(y) \\ F(x^c) & = & F(x)^{c'} \\ F(0) & = & 0' \\ F(1) & = & 1' \end{array}$$

- Una función $F : L \to L'$ será llamada un **isomorfismo** de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ si F es **biyectiva** y tanto F como F^{-1} son **homomorfismos**.

CONGRUENCIAS DE RETICULADOS COMPLEMENTADO: Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ un reticulado, una **congruencia** sobre $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i}, 0, 1)$ será una **relación de equivalencia** θ la cual cumpla:

1. $x\theta x'$ y $y\theta y' \Rightarrow (x \mathsf{\ s\ } y)\theta(x' \mathsf{\ s\ } y')$ y $(x \mathsf{\ i\ } y)\theta(x' \mathsf{\ i\ } y')$
2. $x/\theta = y/\theta \Rightarrow x^c/\theta = y^c/\theta$

Definimos, sobre L/θ, $\tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}}$ y $\tilde{c}$, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} x/\theta \mathbin{\tilde{\mathsf{s}}} y/\theta & = & (x \mathsf{\ s\ } y)/\theta \\ x/\theta \mathbin{\tilde{\mathsf{i}}} y/\theta & = & (x \mathsf{\ i\ } y)/\theta \\ (x/\theta)^{\tilde{c}} & = & x^c/\theta \end{array}$$

5 Reticulados Distributivos

RETICULADO DISTRIBUTIVO: Un reticulado se llamará **distributivo** cuando cumpla alguna de las siguiente propiedades, para $x, y, z \in L$ cualquieras:

1. $x \mathsf{\ i\ } (y \mathsf{\ s\ } z) = (x \mathsf{\ i\ } y) \mathsf{\ s\ } (x \mathsf{\ i\ } z)$
2. $x \mathsf{\ s\ } (y \mathsf{\ i\ } z) = (x \mathsf{\ s\ } y) \mathsf{\ i\ } (x \mathsf{\ s\ } z)$

FILTRO: Un **filtro** de un reticulado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ será un subconjunto $F \subseteq L$ tal que:

1. $F \neq \emptyset$
2. $x, y \in F \Rightarrow x \mathsf{\ i\ } y \in F$
3. $x \in F$ y $x \leq y \Rightarrow y \in F$.

FILTRO GENERADO: Dado un conjunto $S \subseteq L$, el **filtro generado por S** será el siguiente conjunto:

$$[S) = \{y \in L : y \geq s_1 \mathsf{i} \ldots \mathsf{i}\, s_n, \text{ para algunos } s_1, \ldots, s_n \in S, n \geq 1\}$$

FILTRO PRIMO: Un filtro F de un reticulado $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ será llamado **primo** cuando se cumplan:

1. $F \neq L$
2. $x \,\mathsf{s}\, y \in F \Rightarrow x \in F$ o $y \in F$.

ÁLGEBRA DE BOOLE: Un **Álgebra de Boole** será un reticulado complementado y distributivo.