Turing vence a von Neumann

Agustín Curto

FaMAF - UNC

2017

Introduciendo notación

Notación

Dados $x_1, \ldots, x_n \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Sigma^*$, con $n, m \in \omega$, usaremos:

$$\|x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\|$$

para denotar el estado

$$((x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots), (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \varepsilon, \ldots))$$

Nótese que por ejemplo:

$$\begin{array}{rcll} \|x\| & = & ((x, 0, \ldots), (\varepsilon, \ldots)) & \quad \text{Para } n = 1, m = 0 \\ \|\Diamond\| & = & ((0, \ldots), (\varepsilon, \ldots)) & \quad \text{Para } n = m = 0 \end{array}$$

Además es claro que:

$$\|x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\| = \|x_1, \ldots, x_n, \overbrace{0, \ldots, 0}^{i}, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \overbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}^{j}\|$$

cualesquiera sean $i, j \in \omega$.

Toda función Σ-computable es Σ-Turing computable

Probaremos

Si f es una función Σ-mixta que es computada por un programa $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$, entonces existe una máquina de Turing determinística con unit M la cual computa a f.

Definición

Dado $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$, definamos:

$$\begin{aligned} N(\mathcal{P}) \quad = \quad & \text{menor k} \in \mathbb{N} \text{ tal que las variables que ocurren en } \mathcal{P} \\ & \text{están todas en la lista N1}, \dots, \mathrm{N}\bar{k}, \mathrm{P1}, \dots, \mathrm{P}\bar{k} \end{aligned}$$

Ejemplo: Sea $\Sigma = \{\&, \#\}$, si $\mathcal{P}$ es el siguiente programa:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{L1} & \mathrm{N4} \leftarrow \mathrm{N4} + 1 \\ & \mathrm{P1} \leftarrow \mathrm{P1}.\& \\ & \mathrm{IF\ N1} \neq 0 \mathrm{\ GOTO\ L1} \end{array}$$

entonces tenemos $N(\mathcal{P}) = 4$

Sea $\mathcal{P}$ un programa y sea k fijo y $k \leq N(\mathcal{P})$. Describiremos como puede construirse una máquina de Turing la cual simulará a $\mathcal{P}$. La construcción de la máquina simuladora dependerá de $\mathcal{P}$ y de k.
Nótese que cuando $\mathcal{P}$ se corre desde algún estado de la forma

$$\|x_1, \ldots, x_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\|$$

los sucesivos estados por los que va pasando son todos de la forma

$$\|y_1, \ldots, y_k, \beta_1, \ldots, \beta_k\|$$

es decir, en todos ellos las variables con índice mayor que k valen 0 o ε.
La razon es simple, ya que en $\mathcal{P}$ no figuran las variables

$$\begin{gathered}\mathrm{N}\overline{k+1},\ \mathrm{N}\overline{k+2}, \ldots \\ \mathrm{P}\overline{k+1},\ \mathrm{P}\overline{k+2}, \ldots\end{gathered}$$

estas variables quedan con valores 0 y ε, respectivamente a lo largo de toda la computación.

Necesitaremos tener alguna manera de representar en la cinta los diferentes estados por los cuales se va pasando, a medida que corremos a $\mathcal{P}$. Esto lo haremos de la siguiente forma, al estado

$$\|x_1, \ldots, x_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\|$$

lo representaremos en la cinta de la siguiente manera

$$B \mid^{x_1} \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 \ldots B\alpha_k BBBB \ldots$$

Ejemplo: consideremos el programa $\mathcal{P}$ mostrado recién y fijemos $k = 6$, entonces al estado

$$\|3, 2, 5, 0, 4, 2, \&, \&\&, \varepsilon, \#\&, \#, \#\#\#\|$$

lo representaremos en la cinta de la siguiente manera

$$B \mid\mid\mid B \mid\mid B \mid\mid\mid\mid\mid BB \mid\mid\mid\mid B \mid\mid B\&B\&\&BB\#\&B\#B\#\#\#BBBBB \ldots$$

Definición

A lo que queda entre dos blancos consecutivos, es decir que no hay ningún blanco entre ellos, lo llamaremos *bloque*.

Ejemplo: en la cinta de arriba tenemos que los primeros 12 bloques son

$$|||\quad ||\quad |||||\quad \varepsilon\quad ||||\quad ||\quad \&\quad \&\&\quad \varepsilon\quad \#\&\quad \#\quad \#\#\#$$

luego, los bloques siguientes, son todos iguales a ε.

Observación

Es que esta forma de representación de estados en la cinta depende del k elejido, es decir, si tomaramos otro k, por ejemplo $k = 9$, entonces el estado anterior se representaría de otra forma en la cinta.

- Armaremos la máquina simuladora como concatenación de máquinas. Para esto, a continuación describiremos, para los distintos tipos de instrucciones posibles de $\mathcal{P}$, sus respectivas máquinas asociadas.
- Asumiremos que en $\mathcal{P}$ no hay instrucciones de la forma $\mathrm{GOTO}\ \mathrm{L}\bar{m}$, ni de la forma $\mathrm{L}\bar{n}\ \mathrm{GOTO}\ \mathrm{L}\bar{m}$.
- En esta etapa solo describiremos que propiedades tendrá que tener cada máquina simuladora de cada tipo posible de instrucción, y más adelante mostraremos como pueden ser construídas efectivamente dichas máquinas.
- Todas las máquinas descriptas tendrán:
  - $\shortmid$ como unit
  - B como blanco
  - Σ como su alfabeto terminal
  - su alfabeto mayor será $\Gamma = \Sigma \cup \{B, \shortmid\} \cup \{\tilde{a} : a \in \Sigma \cup \{\shortmid\}\}$.
  - uno o dos estados finales con la siguiente propiedad:

$$\text{Si } q \text{ es un estado final} \Rightarrow \delta(q, \sigma) = \emptyset, \text{ para cada } \sigma \in \Gamma$$

Instrucción $\mathrm{N}\bar{\imath} \leftarrow \mathrm{N}\bar{\imath} + 1$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M^{+}_{i,k}$ una máquina con estado inicial q_0 y único estado final q_f tal que cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_n \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Sigma^*$

$$\underset{\overset{\uparrow}{q_0}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \quad \overset{*}{\vdash} \quad \underset{\overset{\uparrow}{q_f}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_{i-1}} B \mid^{x_i+1} B \mid^{x_{i+1}} \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k$$

Instrucción $\mathrm{N}\bar{\imath} \leftarrow \mathrm{N}\bar{\imath} \dot{-} 1$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M^{\dot{-}}_{i,k}$ una máquina con estado inicial q_0 y único estado final q_f tal que cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_n \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Sigma^*$

$$\underset{\overset{\uparrow}{q_0}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \quad \overset{*}{\vdash} \quad \underset{\overset{\uparrow}{q_f}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_{i-1}} B \mid^{x_i \dot{-} 1} B \mid^{x_{i+1}} \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k$$

Instrucción $\mathrm{P}\bar{\imath} \leftarrow \mathrm{P}\bar{\imath}.a$

Para $1 \leq i \leq k$ y $a \in \Sigma$, sea $M^{a}_{i,k}$ una máquina con estado inicial q_0 y único estado final q_f tal que cualesquiera sean $x_1, \dots, x_n \in \omega$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \Sigma^*$

$$\begin{array}{l} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow \\ q_0 \end{array} \quad \overset{*}{\vdash} \quad \begin{array}{l} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_{i-1} B\alpha_i a B\alpha_{i+1} B \dots B\alpha_k \\ \uparrow \\ q_f \end{array}$$

Instrucción $\mathrm{P}\bar{\imath} \leftarrow^{\frown} \mathrm{P}\bar{\imath}$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M^{\frown}_{i,k}$ una máquina con estado inicial q_0 y único estado final q_f tal que cualesquiera sean $x_1, \dots, x_n \in \omega$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \Sigma^*$

$$\begin{array}{l} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow \\ q_0 \end{array} \quad \overset{*}{\vdash} \quad \begin{array}{l} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_{i-1} B {}^{\frown}\alpha_i B\alpha_{i+1} B \dots B\alpha_k \\ \uparrow \\ q_f \end{array}$$

Instrucción $\mathrm{N}\bar{i} \leftarrow \mathrm{N}\bar{j}$

Para $1 \leq i, j \leq k$, sea $M^{\#,k}_{i \leftarrow j}$ una máquina con estado inicial q_0 y único estado final q_f tal que cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_n \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Sigma^*$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ q_0}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \quad \overset{*}{\vdash} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ q_f}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_{i-1}} B \mid^{x_j} B \mid^{x_{i+1}} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k$$

Instrucción $\mathrm{P}\bar{i} \leftarrow \mathrm{P}\bar{j}$

Para $1 \leq i, j \leq k$, sea $M^{*,k}_{i \leftarrow j}$ una máquina con estado inicial q_0 y único estado final q_f tal que cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_n \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Sigma^*$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ q_0}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \quad \overset{*}{\vdash} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ q_f}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_{i-1} B\alpha_j B\alpha_{i+1} B \ldots B\alpha_k$$

Instrucción $\mathrm{N}\bar{\imath} \leftarrow 0$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M^k_{i\leftarrow 0}$ una máquina con estado inicial q_0 y único estado final q_f tal que cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_n \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Sigma^*$

$$\underset{\underset{q_0}{\uparrow}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \overset{*}{\vdash} \underset{\underset{q_f}{\uparrow}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_{i-1}} BB \mid^{x_{i+1}} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k$$

Instrucción $\mathrm{P}\bar{\imath} \leftarrow \varepsilon$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M^k_{i\leftarrow \varepsilon}$ una máquina con estado inicial q_0 y único estado final q_f tal que cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_n \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Sigma^*$

$$\underset{\underset{q_0}{\uparrow}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \overset{*}{\vdash} \underset{\underset{q_f}{\uparrow}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_{i-1} BB\alpha_{i+1} B \ldots B\alpha_k$$

Instrucción SKIP

Sea

$$M_{\mathrm{SKIP}} = (\{q_0, q_f\}, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \mid, \{q_f\})$$

con $\delta(q_0, B) = \{(q_f, B, K)\}$ y $\delta = \emptyset$ en cualquier otro caso.

Instrucción IF N$\bar{j} \neq 0$ GOTO L$\bar{m}$

Para $1 \leq j \leq k$, sea $IF_{j,k}$ una máquina con estado inicial q_0 y dos estados finales q_{si} y q_{no} tal que cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_n \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Sigma^*$

- Si $x_j \neq 0$, entonces

$$\begin{array}{lcl} B \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{si} \end{array}$$

- Si $x_j = 0$, entonces

$$\begin{array}{lcl} B \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no} \end{array}$$

Instrucción IF P$\bar{j}$ BEGINS a GOTO L$\bar{m}$

Para $1 \leq j \leq k$, sea $IF^{a}_{j,k}$ una máquina con estado inicial q_0 y dos estados finales q_{si} y q_{no} tal que cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_n \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Sigma^*$

- Si α_j comienza con a, entonces

$$\begin{array}{lcl} B \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{si} \end{array}$$

- Caso contrario

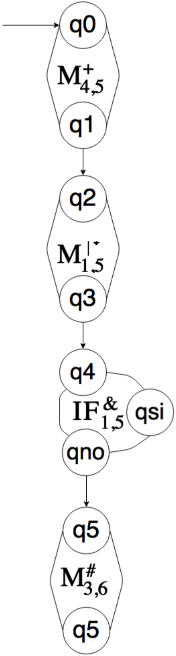
$$\begin{array}{lcl} B \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no} \end{array}$$

Example

Sea $\Sigma = \{\&, \#\}$ y sea $\mathcal{P}$ el siguiente programa:

$$\begin{array}{ll} \text{L3} & \text{N4} \leftarrow \text{N4} + 1 \\ & \text{P1} \leftarrow \ ^{\frown}\text{P1} \\ & \text{IF P1 BEGINS \& GOTO L3} \\ & \text{P3} \leftarrow \text{P3}.\# \end{array}$$

Tomemos $k = 5$, es claro que $k \geq N(\mathcal{P}) = 4$. A la máquina que simulará a $\mathcal{P}$ respecto de k, la llamaremos M_{sim} y será la siguiente:


q0
$M^{+}_{4,5}$
q1
q2
$M^{|}_{1,5}$
q3
q4
$IF^{\&}_{1,5}$
qsi
qno
q5
$M^{\#}_{3,6}$
q5

Veamos con un ejemplo como M_{sim} simula a $\mathcal{P}$. Supongamos que corremos $\mathcal{P}$ desde el estado

$$\|2, 1, 0, 5, 3, \#\&\#\#, \varepsilon, \&\&, \#\&, \#\|$$

Tendremos entonces la siguiente sucesión de descripciones instantaneas:

$$(1, \|2, 1, 0, 5, 3, \#\&\#\#, \varepsilon, \&\&, \#\&, \#\|)$$

$$(2, \|2, 1, 0, 6, 3, \#\&\#\#, \varepsilon, \&\&, \#\&, \#\|)$$

$$(3, \|2, 1, 0, 6, 3, \&\#\#, \varepsilon, \&\&, \#\&, \#\|)$$

$$(1, \|2, 1, 0, 6, 3, \&\#\#, \varepsilon, \&\&, \#\&, \#\|)$$

$$(2, \|2, 1, 0, 7, 3, \&\#\#, \varepsilon, \&\&, \#\&, \#\|)$$

$$(3, \|2, 1, 0, 7, 3, \#\#, \varepsilon, \&\&, \#\&, \#\|)$$

$$(4, \|2, 1, 0, 7, 3, \#\#, \varepsilon, \&\&, \#\&, \#\|)$$

$$(5, \|2, 1, 0, 7, 3, \#\#, \varepsilon, \&\&\#, \#\&, \#\|)$$

Si hacemos funcionar a M_{sim} desde:

$$q_0 B \shortmid^2 B \shortmid BB \shortmid^5 B \shortmid^3 B\#\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$

obtendremos una sucesión de descripciones instantaneas dentro de las cuales estará la siguiente subsucesión

$$q_0 B \quad \shortmid \quad {}^2B \shortmid BB \shortmid^5 B \shortmid^3 B\#\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$

$$q_1 B \quad \shortmid \quad {}^2B \shortmid BB \shortmid^6 B \shortmid^3 B\#\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$
$$q_2 B \quad \shortmid \quad {}^2B \shortmid BB \shortmid^6 B \shortmid^3 B\#\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$

$$q_3 B \quad \shortmid \quad {}^2B \shortmid BB \shortmid^6 B \shortmid^3 B\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$
$$q_4 B \quad \shortmid \quad {}^2B \shortmid BB \shortmid^6 B \shortmid^3 B\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$

$$q_{si} B \quad \shortmid \quad {}^2B \shortmid BB \shortmid^6 B \shortmid^3 B\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$
$$q_0 B \quad \shortmid \quad {}^2B \shortmid BB \shortmid^6 B \shortmid^3 B\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$

$$q_1 B \quad \mid \quad {}^2B \mid BB \mid^7 B \mid^3 B\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$
$$q_2 B \quad \mid \quad {}^2B \mid BB \mid^7 B \mid^3 B\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$

$$q_3 B \quad \mid \quad {}^2B \mid BB \mid^7 B \mid^3 B\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$
$$q_4 B \quad \mid \quad {}^2B \mid BB \mid^7 B \mid^3 B\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$

$$q_{no} B \quad \mid \quad {}^2B \mid BB \mid^7 B \mid^3 B\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$
$$q_5 B \quad \mid \quad {}^2B \mid BB \mid^7 B \mid^3 B\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$

$$q_6 B \quad \mid \quad {}^2B \mid BB \mid^7 B \mid^3 B\#\#BB\&\&\#B\#\&B\#B$$

Supongamos que $\mathcal{P} = I_1, \ldots, I_n$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, llamaremos M_i a la máquina que simulará el efecto que produce la instrucción I_i, es decir tomemos:

- $M_i = M^{+}_{j,k}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{j} + 1$
- $M_i = M^{\dot{-}}_{j,k}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{j} \dot{-} 1$
- $M_i = M^{a}_{j,k}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \mathrm{P}\bar{j}.a$
- $M_i = M^{\curvearrowright}_{j,k}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow\ ^{\curvearrowright}\mathrm{P}\bar{j}$
- $M_i = M^{\#,k}_{j \leftarrow m}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{m}$
- $M_i = M^{*,k}_{j \leftarrow m}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \mathrm{P}\bar{m}$
- $M_i = M^{k}_{j \leftarrow 0}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow 0$
- $M_i = M^{k}_{j \leftarrow \varepsilon}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \varepsilon$
- $M_i = M_{\mathrm{SKIP}}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{SKIP}$
- $M_i = IF_{j,k}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{IF\ N}\bar{j} \neq 0 \mathrm{\ GOTO\ L}\bar{m}$, para algún m
- $M_i = IF^{a}_{j,k}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{IF\ P}\bar{j}\mathrm{\ BEGINS\ } a \mathrm{\ GOTO\ L}\bar{m}$, para algún m