

# Turing vence a von Neumann

Agustín Curto

FaMAF - UNC

2017

# Introduciendo notación

## Notación

Dados  $x_1, \dots, x_n \in \omega$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \Sigma^*$ , con  $n, m \in \omega$ , usaremos:

$$\|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|$$

para denotar el estado

$$((x_1, \dots, x_n, 0, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \varepsilon, \dots))$$

Nótese que por ejemplo:

$$\|x\| = ((x, 0, \dots), (\varepsilon, \dots)) \quad \text{Para } n = 1, m = 0$$

$$\|\diamond\| = ((0, \dots), (\varepsilon, \dots)) \quad \text{Para } n = m = 0$$

Además es claro que:

$$\|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\| = \|x_1, \dots, x_n, \overbrace{0, \dots, 0}^i, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \overbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}^j\|$$

cualesquiera sean  $i, j \in \omega$ .

# Toda función $\Sigma$ -computable es $\Sigma$ -Turing computable

## Probaremos

Si  $f$  es una función  $\Sigma$ -mixta que es computada por un programa  $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ , entonces existe una máquina de Turing determinística con unit  $M$  la cual computa a  $f$ .

## Definición

Dado  $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ , definamos:

$$N(\mathcal{P}) = \text{menor } k \in \mathbb{N} \text{ tal que las variables que ocurren en } \mathcal{P} \\ \text{están todas en la lista } N1, \dots, N\bar{k}, P1, \dots, P\bar{k}$$

**Ejemplo:** Sea  $\Sigma = \{\&, \#\}$ , si  $\mathcal{P}$  es el siguiente programa:

```
L1  N4 ← N4 + 1
    P1 ← P1.&
    IF N1 ≠ 0 GOTO L1
```

entonces tenemos  $N(\mathcal{P}) = 4$

Sea  $\mathcal{P}$  un programa y sea  $k$  fijo y  $k \leq N(\mathcal{P})$ . Describiremos como puede construirse una máquina de Turing la cual simulará a  $\mathcal{P}$ . La construcción de la máquina simuladora dependerá de  $\mathcal{P}$  y de  $k$ .

Nótese que cuando  $\mathcal{P}$  se corre desde algún estado de la forma

$$\|x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k\|$$

los sucesivos estados por los que va pasando son todos de la forma

$$\|y_1, \dots, y_k, \beta_1, \dots, \beta_k\|$$

es decir, en todos ellos las variables con índice mayor que  $k$  valen 0 o  $\varepsilon$ .

La razón es simple, ya que en  $\mathcal{P}$  no figuran las variables

$$\overline{Nk+1}, \overline{Nk+2}, \dots$$

$$\overline{Pk+1}, \overline{Pk+2}, \dots$$

estas variables quedan con valores 0 y  $\varepsilon$ , respectivamente a lo largo de toda la computación.

Necesitaremos tener alguna manera de representar en la cinta los diferentes estados por los cuales se va pasando, a medida que corremos a  $\mathcal{P}$ . Esto lo haremos de la siguiente forma, al estado

$$\|x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k\|$$

lo representaremos en la cinta de la siguiente manera

$$B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k B B B B \dots$$

**Ejemplo:** consideremos el programa  $\mathcal{P}$  mostrado recién y fijemos  $k = 6$ , entonces al estado

$$\|3, 2, 5, 0, 4, 2, \&, \&\&, \varepsilon, \#\&, \#, \#\#\#\|$$

lo representaremos en la cinta de la siguiente manera

$$B \equiv B \equiv B \equiv \equiv BB \equiv \equiv B \equiv B \& B \& \& BB \# \& B \# B \# \# \# B B B B B \dots$$

## Definición

A lo que queda entre dos blancos consecutivos, es decir, que no hay ningún blanco entre ellos, lo llamaremos *bloque*.

**Ejemplo:** en la cinta anterior tenemos que los primeros 12 bloques son

|||   ||   ||||    $\varepsilon$    ||||   ||   &   &&    $\varepsilon$    #&   #   ###

luego, los bloques siguientes, son todos iguales a  $\varepsilon$ .

## Observación

Esta forma de representación de estados en la cinta depende del  $k$  elegido, es decir, si tomáramos otro  $k$ , por ejemplo  $k = 9$ , entonces el estado anterior se representaría de otra forma en la cinta.

- Armaremos la máquina simuladora como concatenación de máquinas. Para esto, a continuación describiremos, para los distintos tipos de instrucciones posibles de  $\mathcal{P}$ , sus respectivas máquinas asociadas.
- Asumiremos que en  $\mathcal{P}$  no hay instrucciones de la forma GOTO  $L\bar{m}$ , ni de la forma  $L\bar{n}$  GOTO  $L\bar{m}$ .
- En esta etapa solo describiremos que propiedades tendrá que tener cada máquina simuladora de cada tipo posible de instrucción, y más adelante mostraremos como pueden ser construídas efectivamente dichas máquinas.
- Todas las máquinas descriptas tendrán:
  - $\perp$  como unit
  - $B$  como blanco
  - $\Sigma$  como su alfabeto terminal
  - su alfabeto mayor será  $\Gamma = \Sigma \cup \{B, \perp\} \cup \{\tilde{a} : a \in \Sigma \cup \{\perp\}\}$ .
  - uno o dos estados finales con la siguiente propiedad:

Si  $q$  es un estado final  $\Rightarrow \delta(q, \sigma) = \emptyset$ , para cada  $\sigma \in \Gamma$

## Instrucción $N\bar{i} \leftarrow N\bar{i} + 1$

Para  $1 \leq i \leq k$ , sea  $M_{i,k}^+$  una máquina con estado inicial  $q_0$  y único estado final  $q_f$  tal que cualesquiera sean  $x_1, \dots, x_k \in \omega$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Sigma^*$

$$\begin{array}{c} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k \\ \uparrow \\ q_0 \end{array} \stackrel{*}{\vdash} \begin{array}{c} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_i-1} B \mid^{x_i+1} B \mid^{x_{i+1}} \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k \\ \uparrow \\ q_f \end{array}$$

## Instrucción $N\bar{i} \leftarrow N\bar{i} - 1$

Para  $1 \leq i \leq k$ , sea  $M_{i,k}^-$  una máquina con estado inicial  $q_0$  y único estado final  $q_f$  tal que cualesquiera sean  $x_1, \dots, x_k \in \omega$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Sigma^*$

$$\begin{array}{c} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k \\ \uparrow \\ q_0 \end{array} \stackrel{*}{\vdash} \begin{array}{c} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_i-1} B \mid^{x_i-1} B \mid^{x_{i+1}} \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k \\ \uparrow \\ q_f \end{array}$$



## Instrucción $P\bar{i} \leftarrow P\bar{i}.a$

Para  $1 \leq i \leq k$  y  $a \in \Sigma$ , sea  $M_{i,k}^a$  una máquina con estado inicial  $q_0$  y único estado final  $q_f$  tal que cualesquiera sean  $x_1, \dots, x_k \in \omega$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Sigma^*$

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k & \stackrel{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_{i-1} B \alpha_i a B \alpha_{i+1} B \dots B \alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

## Instrucción $P\bar{i} \leftarrow \curvearrowright P\bar{i}$

Para  $1 \leq i \leq k$ , sea  $M_{i,k}^{\curvearrowright}$  una máquina con estado inicial  $q_0$  y único estado final  $q_f$  tal que cualesquiera sean  $x_1, \dots, x_k \in \omega$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Sigma^*$

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k & \stackrel{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_{i-1} B^{\curvearrowright} \alpha_i B \alpha_{i+1} B \dots B \alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

## Instrucción $N\bar{i} \leftarrow N\bar{j}$

Para  $1 \leq i, j \leq k$ , sea  $M_{i \leftarrow j}^{\#,k}$  una máquina con estado inicial  $q_0$  y único estado final  $q_f$  tal que cualesquiera sean  $x_1, \dots, x_k \in \omega$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Sigma^*$

$$\begin{array}{c} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow \\ q_0 \end{array} \vdash^* \begin{array}{c} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_i-1} B \mid^{x_j} B \mid^{x_{j+1}} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow \\ q_f \end{array}$$

## Instrucción $P\bar{i} \leftarrow P\bar{j}$

Para  $1 \leq i, j \leq k$ , sea  $M_{i \leftarrow j}^{*,k}$  una máquina con estado inicial  $q_0$  y único estado final  $q_f$  tal que cualesquiera sean  $x_1, \dots, x_k \in \omega$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Sigma^*$

$$\begin{array}{c} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow \\ q_0 \end{array} \vdash^* \begin{array}{c} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_{i-1} B\alpha_j B\alpha_{i+1} B \dots B\alpha_k \\ \uparrow \\ q_f \end{array}$$

## Instrucción $N\bar{i} \leftarrow 0$

Para  $1 \leq i \leq k$ , sea  $M_{i \leftarrow 0}^k$  una máquina con estado inicial  $q_0$  y único estado final  $q_f$  tal que cualesquiera sean  $x_1, \dots, x_k \in \omega$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Sigma^*$

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_{i-1}} B B \mid^{x_{i+1}} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

## Instrucción $P\bar{i} \leftarrow \varepsilon$

Para  $1 \leq i \leq k$ , sea  $M_{i \leftarrow \varepsilon}^k$  una máquina con estado inicial  $q_0$  y único estado final  $q_f$  tal que cualesquiera sean  $x_1, \dots, x_k \in \omega$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Sigma^*$

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k & \vdash^* & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_{i-1} B B \alpha_{i+1} B \dots B \alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

## Instrucción SKIP

Sea

$$M_{\text{SKIP}} = (\{q_0, q_f\}, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \mid, \{q_f\})$$

con  $\delta(q_0, B) = \{(q_f, B, K)\}$  y  $\delta = \emptyset$  en cualquier otro caso.

## Instrucción IF $N\bar{j} \neq 0$ GOTO $L\bar{m}$

Para  $1 \leq j \leq k$ , sea  $IF_{j,k}$  una máquina con estado inicial  $q_0$  y dos estados finales  $q_{si}$  y  $q_{no}$  tal que cualesquiera sean  $x_1, \dots, x_k \in \omega$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Sigma^*$

- Si  $x_j \neq 0$ , entonces

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \stackrel{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{si} \end{array}$$

- Si  $x_j = 0$ , entonces

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k & \stackrel{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \dots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no} \end{array}$$

## Instrucción IF $P_j^{\bar{}}$ BEGINS $a$ GOTO $L_{\bar{m}}$

Para  $1 \leq j \leq k$  y  $a \in \Sigma$ , sea  $IF_{j,k}^a$  una máquina con estado inicial  $q_0$  y dos estados finales  $q_{si}$  y  $q_{no}$  tal que cualesquiera sean  $x_1, \dots, x_k \in \omega$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Sigma^*$

- Si  $\alpha_j$  comienza con  $a$ , entonces

$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k & \stackrel{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{si} \end{array}$$

- Caso contrario

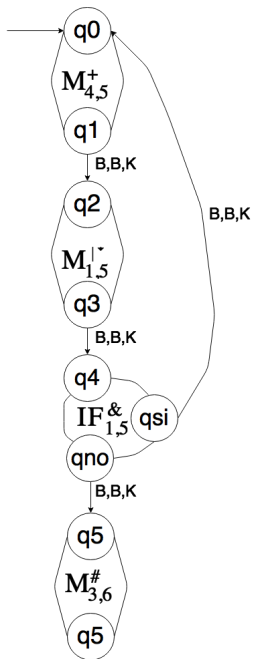
$$\begin{array}{ccc} B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k & \stackrel{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no} \end{array}$$

## Example

Sea  $\Sigma = \{\&, \#\}$  y sea  $\mathcal{P}$  el siguiente programa:

```
L3  N4  $\leftarrow$  N4 + 1  
    P1  $\leftarrow$   $\neg$ P1  
    IF P1 BEGINS & GOTO L3  
    P3  $\leftarrow$  P3.#
```

Tomemos  $k = 5$ , es claro que  $k \geq N(\mathcal{P}) = 4$ . A la máquina que simulará a  $\mathcal{P}$  respecto de  $k$ , la llamaremos  $M_{sim}$  y será la siguiente:



Veamos con un ejemplo como  $M_{sim}$  simula a  $\mathcal{P}$ . Supongamos que corremos  $\mathcal{P}$  desde el estado

$\|2, 1, 0, 5, 3, \# \& \# \#, \varepsilon, \& \&, \# \&, \# \|$

Tendremos entonces la siguiente sucesión de descripciones instantáneas:

(1,  $\|2, 1, 0, 5, 3, \# \& \# \#, \varepsilon, \& \&, \# \&, \# \|$ )

(2,  $\|2, 1, 0, 6, 3, \# \& \# \#, \varepsilon, \& \&, \# \&, \# \|$ )

(3,  $\|2, 1, 0, 6, 3, \& \# \# \#, \varepsilon, \& \&, \# \&, \# \|$ )

(1,  $\|2, 1, 0, 6, 3, \& \# \# \#, \varepsilon, \& \&, \# \&, \# \|$ )

(2,  $\|2, 1, 0, 7, 3, \& \# \# \#, \varepsilon, \& \&, \# \&, \# \|$ )

(3,  $\|2, 1, 0, 7, 3, \# \# \#, \varepsilon, \& \&, \# \&, \# \|$ )

(4,  $\|2, 1, 0, 7, 3, \# \# \#, \varepsilon, \& \&, \# \&, \# \|$ )

(5,  $\|2, 1, 0, 7, 3, \# \# \#, \varepsilon, \& \& \#, \# \&, \# \|$ )



Si hacemos funcionar a  $M_{sim}$  desde:

$$q_0 B \mid^2 B \mid BB \mid^5 B \mid^3 B \# \& \# \# BB \& \& B \# \& B \# B$$

obtendremos una sucesión de descripciones instantáneas dentro de las cuales estará la siguiente subsucesión

$$q_0 B \mid^2 B \mid BB \mid^5 B \mid^3 B \# \& \# \# BB \& \& B \# \& B \# B$$

$$q_1 B \mid^2 B \mid BB \mid^6 B \mid^3 B \# \& \# \# BB \& \& B \# \& B \# B$$

$$q_2 B \mid^2 B \mid BB \mid^6 B \mid^3 B \# \& \# \# BB \& \& B \# \& B \# B$$

$$q_3 B \mid^2 B \mid BB \mid^6 B \mid^3 B \& \# \# BB \& \& B \# \& B \# B$$

$$q_4 B \mid^2 B \mid BB \mid^6 B \mid^3 B \& \# \# BB \& \& B \# \& B \# B$$

$$q_{si} B \mid^2 B \mid BB \mid^6 B \mid^3 B \& \# \# BB \& \& B \# \& B \# B$$

$$q_0 B \mid^2 B \mid BB \mid^6 B \mid^3 B \& \# \# BB \& \& B \# \& B \# B$$

$q_1 B \mid^2 B \mid BB \mid^7 B \mid^3 B \& \# \# BB \& \& B \# \& B \# B$

$q_2 B \mid^2 B \mid BB \mid^7 B \mid^3 B \& \# \# BB \& \& B \# \& B \# B$

$q_3 B \mid^2 B \mid BB \mid^7 B \mid^3 B \# \# BB \& \& B \# \& B \# B$

$q_4 B \mid^2 B \mid BB \mid^7 B \mid^3 B \# \# BB \& \& B \# \& B \# B$

$q_{no} B \mid^2 B \mid BB \mid^7 B \mid^3 B \# \# BB \& \& B \# \& B \# B$

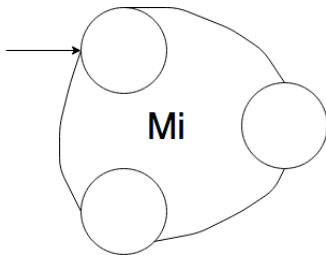
$q_5 B \mid^2 B \mid BB \mid^7 B \mid^3 B \# \# BB \& \& B \# \& B \# B$

$q_6 B \mid^2 B \mid BB \mid^7 B \mid^3 B \# \# BB \& \& \# B \# \& B \# B$

Supongamos que  $\mathcal{P} = I_1, \dots, I_n$ . Para cada  $i = 1, \dots, n$ , llamaremos  $M_i$  a la máquina que simulará el efecto que produce la instrucción  $I_i$ , es decir tomemos:

- $M_i = M_{j,k}^+$ , si  $Bas(I_i) = N\bar{j} \leftarrow N\bar{j} + 1$
- $M_i = M_{j,k}^-$ , si  $Bas(I_i) = N\bar{j} \leftarrow N\bar{j} - 1$
- $M_i = M_{j,k}^a$ , si  $Bas(I_i) = P\bar{j} \leftarrow P\bar{j}.a$
- $M_i = M_{j,k}^\cap$ , si  $Bas(I_i) = P\bar{j} \leftarrow \cap P\bar{j}$
- $M_i = M_{j \leftarrow m}^{\#,k}$ , si  $Bas(I_i) = N\bar{j} \leftarrow N\bar{m}$
- $M_i = M_{j \leftarrow m}^{*,k}$ , si  $Bas(I_i) = P\bar{j} \leftarrow P\bar{m}$
- $M_i = M_{j \leftarrow 0}^k$ , si  $Bas(I_i) = N\bar{j} \leftarrow 0$
- $M_i = M_{j \leftarrow \varepsilon}^k$ , si  $Bas(I_i) = P\bar{j} \leftarrow \varepsilon$
- $M_i = M_{\text{SKIP}}$ , si  $Bas(I_i) = \text{SKIP}$
- $M_i = IF_{j,k}$ , si  $Bas(I_i) = \text{IF } N\bar{j} \neq 0 \text{ GOTO } L\bar{m}$ , para algún  $m$
- $M_i = IF_{j,k}^a$ , si  $Bas(I_i) = \text{IF } P\bar{j} \text{ BEGINS } a \text{ GOTO } L\bar{m}$ , para algún  $m$

Ya que la máquina  $M_i$  puede tener uno o dos estados finales, la representaremos de la siguiente manera:



- Si  $M_i$  tiene **un solo estado final**, este está representado por el círculo de abajo a la izquierda
- Si  $M_i$  tiene **dos estados finales**, el estado final de la derecha corresponde al estado  $q_{si}$  y el de la izquierda abajo al estado  $q_{no}$ .

1) Primero unimos las maquinas  $M_1, \dots, M_n$  de la siguiente manera



- 2) Luego para cada  $i$  tal que  $Bas(I_i)$  es de la forma  $\alpha$  GOTO  $L\bar{m}$ , ligamos con una flecha de la forma

$$\xrightarrow{B, B, K}$$

el estado final  $q_{si}$  de la  $M_i$  con el estado inicial de la  $M_h$ , donde  $h$  es tal que  $I_h$  es la primer instrucción que tiene label  $L\bar{m}$ .

## Lema

Sea  $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$  y sea  $k \geq N(\mathcal{P})$ . Supongamos que en  $\mathcal{P}$  no hay instrucciones de la forma GOTO  $L\bar{m}$  ni de la forma  $L\bar{n}$  GOTO  $L\bar{m}$ . Sean:

- Para cada  $a \in \Sigma \cup \{|\}$ , sea  $\tilde{a}$  un nuevo símbolo
- $\Gamma = \Sigma \cup \{B, |\} \cup \{\tilde{a} : a \in \Sigma \cup \{|\}\}$

entonces existe una máquina de Turing determinística con unit  $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, |, \{q_f\})$ , la cual satisface:

- 1)  $\delta(q_f, \sigma) = \emptyset$ , para cada  $\sigma \in \Gamma$ .
- 2) Cualesquiera sean  $x_1, \dots, x_k \in \omega$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Sigma^*$ , el programa  $\mathcal{P}$  se detiene partiendo del estado

$$\|x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k\|$$

si y solo si  $M$  se detiene partiendo de la descripción instantánea

$$[q_0 B |^{x_1} B \dots B |^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k B]$$

3) Si  $x_1, \dots, x_k \in \omega$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Sigma^*$  son tales que  $\mathcal{P}$  se detiene partiendo del estado

$$\|x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k\|$$

y llega al estado

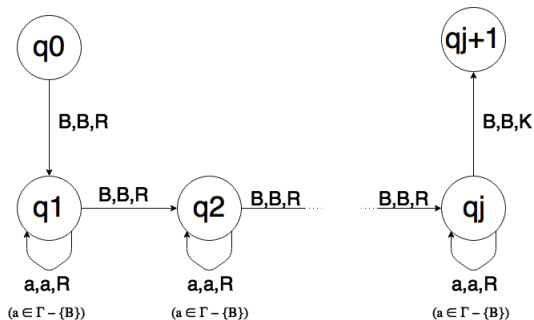
$$\|y_1, \dots, y_k, \beta_1, \dots, \beta_k\|$$

entonces

$$[q_0 B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_k} B \alpha_1 B \dots B \alpha_k B] \stackrel{*}{\vdash}_M [q_f B \mid^{y_1} B \dots B \mid^{y_k} B \beta_1 B \dots B \beta_k B]$$



Para cada  $j \geq 1$ , sea  $D_j$  la máquina siguiente:



Nótese que:

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha B \beta_1 B \beta_2 B \dots B \beta_j B \gamma & \stackrel{*}{\vdash} & \alpha B \beta_1 B \beta_2 B \dots B \beta_j B \gamma \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 q_0 & & q_f
 \end{array}$$

siempre que  $\alpha, \gamma \in \Gamma^*, \beta_1, \dots, \beta_j \in (\Gamma - \{B\})^*$ .

$I_j$  cumplirá que:

$$\begin{array}{ccc} \alpha B \beta_j B \dots B \beta_2 B \beta_1 B \gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha B \beta_j B \dots B \beta_2 B \beta_1 B \gamma \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

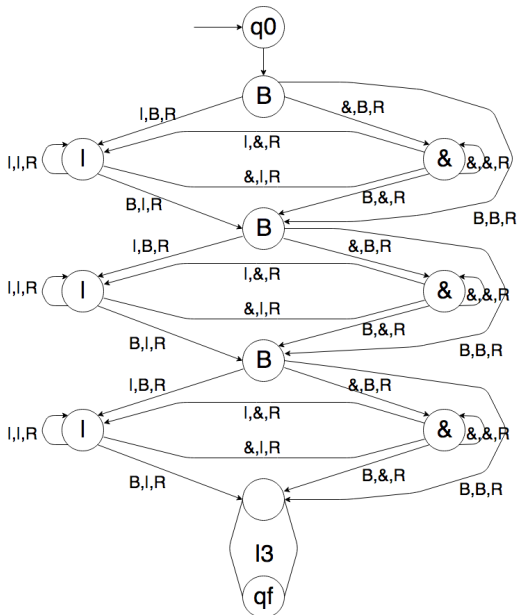
siempre que  $\alpha, \gamma \in \Gamma^*$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_j \in (\Gamma - \{B\})^*$ . Dejamos al lector la manufactura de esta máquina.

Para  $j \geq 1$ , sea  $TD_j$  una máquina con un solo estado final  $q_f$  y tal que:

$$\begin{array}{ccc} \alpha B \gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha B B \gamma \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

cada vez que  $\alpha, \gamma \in \Gamma^*$  y  $\gamma$  tiene exactamente  $j$  ocurrencias de  $B$ .

**Ejemplo:** Sea  $\Sigma = \{&, \#\}$  podemos tomar  $TD_3$  igual a la siguiente máquina



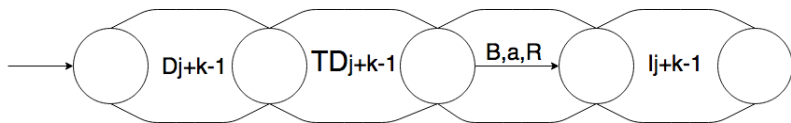
Análogamente, para  $j \geq 1$ , sea  $Tl_j$  una máquina tal que

$$\begin{array}{ccc} \alpha B \sigma \gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha B \gamma \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

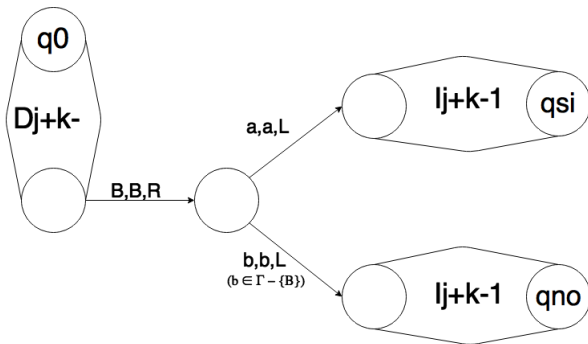
cada vez que  $\alpha \in \Gamma^*$ ,  $\sigma \in \Gamma$  y  $\gamma$  tiene exactamente  $j$  ocurrencias de  $B$ .  
Dejamos al lector la construcción de, por ejemplo,  $Tl_3$  para  $\Sigma = \{\&, \#\}$ .

Teniendo las máquinas auxiliares antes definidas podemos combinarlas para obtener las máquinas simuladoras de instrucciones.

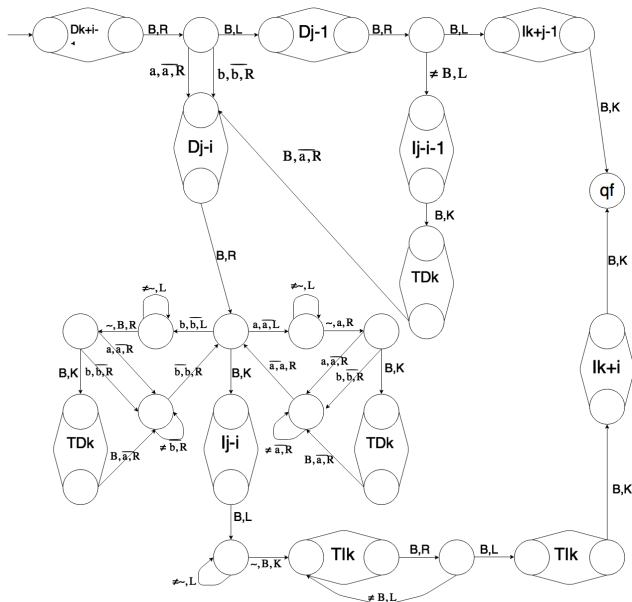
$M_{i,k}^a$  puede ser la siguiente máquina:



Una posible forma de diseñar la máquina  $IF_{i,k}^a$  es la siguiente:



Una posible forma de diseñar la máquina  $M_{i \leftarrow j}^{*,k}$  para el caso  $\Sigma = \{\&, \#\}$  y  $i < j$ , es la siguiente:



## Probaremos

El paradigma computacional de Turing es por lo menos tan expresivo como el paradigma imperativo dado por el lenguaje  $S^\Sigma$ , es decir, probaremos que toda función  $\Sigma$ -computable es  $\Sigma$ -Turing computable.

Antes un lema:

### Lemma

*Si  $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma^*$  es  $\Sigma$ -computable, entonces existe un programa  $Q$ , el cual computa a  $f$  y cumple con las siguientes propiedades:*

- 1) En  $Q$  no hay instrucciones de la forma GOTO  $L\bar{i}$ , ni de la forma  $L\bar{j}$  GOTO  $L\bar{i}$ .*
- 2) Cuando  $Q$  termina partiendo de un estado cualquiera dado, el estado alcanzado es tal que las variables numéricas tienen todas el valor 0 y las alfabéticas tienen, todas excepto  $P1$ , el valor  $\varepsilon$ .*

## Proof.

Sean:

- $\mathcal{P}$  un programa que compute a  $f$
- $r \in \mathbb{N}$  tal que  $r \geq N(\mathcal{P}), n, m$
- $\tilde{\mathcal{P}}$  el resultado de reemplazar en  $\mathcal{P}$  cada instrucción de la forma  $\alpha \text{GOTO } L\bar{i}$  con  $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{L\bar{j} : j \in \mathbb{N}\}$  por  $\alpha \text{IF } N\bar{r} \neq 0 \text{ GOTO } L\bar{i}$ .

Ahora, sea  $\mathcal{Q}$  el siguiente programa:

$$N\bar{r} \leftarrow N\bar{r} + 1$$

$$\tilde{\mathcal{P}}$$

$$N1 \leftarrow 0$$

$$\vdots$$

$$N\bar{r} \leftarrow 0$$

$$P2 \leftarrow \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$P\bar{r} \leftarrow \varepsilon$$

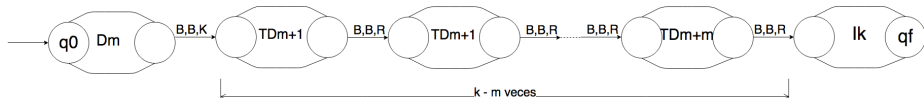


## Theorem

Si  $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow O$  es  $\Sigma$ -computable, entonces  $f$  es  $\Sigma$ -Turing computable.

## Proof

Supongamos  $O = \Sigma^*$ . Por el Lema anterior, existe  $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$  el cual computa  $f$  y tiene las propiedades (1) y (2). Sea  $k = \max\{n, m, N(\mathcal{P})\}$  y sea  $M_{sim}$  la máquina de Turing con unit que simula a  $\mathcal{P}$  respecto de  $k$ . Como puede observarse, la máquina  $M_{sim}$ , no necesariamente computará a  $f$ . Sea  $M_1$  la siguiente máquina:



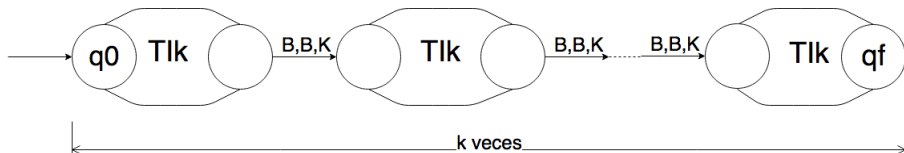
Cuando  $n = 0$  debemos interpretar que  $D_0 = (\{q_0, q_f\}, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \vdash, \{q_f\})$ , con  $\delta(q_0, B) = \{(q_f, B, K)\}$  y  $\delta = \emptyset$  en cualquier otro caso.

Nótese que  $M_1$  cumple que, para cada  $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$

$$\lfloor q_0 B \vdash^{x_1} B \dots B \vdash^{x_n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m B \rfloor \vdash^* \lfloor q_f B \vdash^{x_1} B \dots B \vdash^{x_n} B^{k-n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m B \rfloor$$

Nótese que en la confección de  $M_1$ , para el caso  $m > 0$  podríamos haber usado directamente la  $TD_m$  en lugar de usar  $D_m$ .

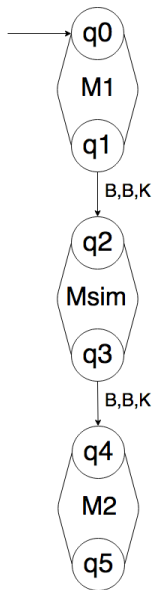
Sea  $M_2$  la siguiente máquina:



Nótese que  $M_2$  cumple que para cada  $\alpha \in \Sigma^*$

$$\left[ q_0 B^{k+1} \alpha \right] \vdash^* \left[ q_f B \alpha \right]$$

Sea  $M$  la máquina dada por el siguiente diagrama:



Supongamos que  $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in (\omega^n \times \Sigma^{*m}) - D_f$ . Debemos ver que  $M$  no termina partiendo de:

$$[q_0 B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m B] \quad (*)$$

Primero notemos que, ya que  $\mathcal{P}$  computa a  $f$ , tenemos que  $\mathcal{P}$  no termina partiendo de  $\|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|$  por lo cual  $\mathcal{P}$  no termina partiendo de

$$\|x_1, \dots, x_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-n}, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{k-m}\|$$

lo cual implica, por el Lema 1, que  $M_{sim}$  no termina partiendo de:

$$[q_0 B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_n} B^{k-n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m B] \quad (**)$$

Ahora, nótese que si hacemos funcionar a  $M$  desde la descripción instantánea dada en (\*), llegaremos indefectiblemente a la siguiente descripción instantánea:

$$\left[ q_2 B^{x_1} B \dots B^{x_n} B^{k-n} B_{\alpha_1} B \dots B_{\alpha_m} B \right]$$

entonces (\*\*) nos dice que al seguir trabajando  $M$ , la máquina  $M$  nunca terminará.

Para terminar de ver que  $M$  computa a  $f$ , tomemos  $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f$  y veamos que

$$\left[ q_0 B^{x_1} B \dots B^{x_n} B_{\alpha_1} B \dots B_{\alpha_m} B \right] \stackrel{*}{\vdash}_M \left[ q_5 Bf(\vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

y que la máquina  $M$  se detiene en  $\left[ q_5 Bf(\vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$ .

- La máquina  $M$  se detiene en  $\lfloor q_5 B f(\vec{x}, \vec{\alpha}) \rfloor$ , ya que  $q_5$  es el estado final de una copia de  $M_2$  y por lo tanto no sale ninguna flecha desde él.
- Ya que  $\mathcal{P}$  computa a  $f$  y tiene la propiedad (2) del Lema 2, tenemos que  $\mathcal{P}$  termina partiendo de  $\|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|$  y llega al estado  $\|f(\vec{x}, \vec{\alpha})\|$ , o lo que es lo mismo,  $\mathcal{P}$  termina partiendo de

$$\|x_1, \dots, x_n, \overbrace{0, \dots, 0}^{k-n}, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \overbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}^{k-m}\|$$

y llega al estado

$$\|\overbrace{0, \dots, 0}^k, f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \overbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}^{k-1}\|$$

Pero entonces el Lema 1 nos dice que:

$$\lfloor q_0 B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_n} B^{k-n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m B \rfloor \vdash_{M_{sim}}^* \lfloor q_f B^{k+1} f(\vec{x}, \vec{\alpha}) \rfloor \quad (***)$$

Como ya lo vimos, si hacemos funcionar a  $M$  desde:

$$\lfloor q_0 B^{x_1} B \dots B^{x_n} B^{\alpha_1} B \dots B^{\alpha_m} B \rfloor$$

llegaremos, vía la copia de  $M_1$  dentro de  $M$ , indefectiblemente a la siguiente descripción instantánea

$$\lfloor q_2 B^{x_1} B \dots B^{x_n} B^{k-n} B^{\alpha_1} B \dots B^{\alpha_m} B \rfloor$$

Luego, (\*\*\*) nos dice que, vía la copia de  $M_{sim}$  dentro de  $M$ , llegaremos a  $\lfloor q_3 B^{k+1} f(\vec{x}, \vec{\alpha}) \rfloor$  e inmediatamente a  $\lfloor q_4 B^{k+1} f(\vec{x}, \vec{\alpha}) \rfloor$ .

Finalmente, vía la copia de  $M_2$  dentro de  $M$ , llegaremos a  $\lfloor q_5 B f(\vec{x}, \vec{\alpha}) \rfloor$ , lo cual termina de demostrar que  $M$  computa a  $f$ .