# Turing vence a von Neumann

Agustín Curto

FaMAF - UNC

2017

# Introduciendo notación

## Notación

Dados $x_1, \ldots, x_n \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Sigma^*$, con $n, m \in \omega$, usaremos:

$$\|x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\|$$

para denotar el estado

$$((x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots), (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \varepsilon, \ldots))$$

Nótese que por ejemplo:

$$\begin{array}{lcll} \|x\| & = & ((x, 0, \ldots), (\varepsilon, \ldots)) & \text{Para } n = 1, m = 0 \\ \|\Diamond\| & = & ((0, \ldots), (\varepsilon, \ldots)) & \text{Para } n = m = 0 \end{array}$$

Además es claro que:

$$\|x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\| = \|x_1, \ldots, x_n, \overbrace{0, \ldots, 0}^{i}, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \overbrace{\varepsilon, \ldots, \varepsilon}^{j}\|$$

cualesquiera sean $i, j \in \omega$.

# Toda función Σ-computable es Σ-Turing computable

## Probaremos

Si $f$ es una función $\Sigma$-mixta que es computada por un programa $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$, entonces existe una máquina de Turing determinística con unit $M$ la cual computa a $f$.

## Definición

Dado $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$, definamos:

$$\begin{aligned} N(\mathcal{P}) \quad = \quad & \text{menor k} \in \mathbb{N} \text{ tal que las variables que ocurren en } \mathcal{P} \\ & \text{están todas en la lista N1}, \ldots, \mathrm{N}\bar{k}, \mathrm{P1}, \ldots, \mathrm{P}\bar{k} \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Sea $\Sigma = \{\&, \#\}$, si $\mathcal{P}$ es el siguiente programa:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{L1} & \mathrm{N4} \leftarrow \mathrm{N4} + 1 \\ & \mathrm{P1} \leftarrow \mathrm{P1}.\& \\ & \mathrm{IF\ N1} \neq 0 \ \mathrm{GOTO\ L1} \end{array}$$

entonces tenemos $N(\mathcal{P}) = 4$

Sea $\mathcal{P}$ un programa y sea $k$ fijo y $k \leq N(\mathcal{P})$. Describiremos como puede construirse una máquina de Turing la cual simulará a $\mathcal{P}$. La construcción de la máquina simuladora dependerá de $\mathcal{P}$ y de $k$.
Nótese que cuando $\mathcal{P}$ se corre desde algún estado de la forma

$$\|x_1, \ldots, x_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\|$$

los sucesivos estados por los que va pasando son todos de la forma

$$\|y_1, \ldots, y_k, \beta_1, \ldots, \beta_k\|$$

es decir, en todos ellos las variables con índice mayor que $k$ valen 0 o $\varepsilon$.
La razón es simple, ya que en $\mathcal{P}$ no figuran las variables

$$\begin{array}{c} \mathrm{N}\overline{k+1},\ \mathrm{N}\overline{k+2}, \ldots \\ \mathrm{P}\overline{k+1},\ \mathrm{P}\overline{k+2}, \ldots \end{array}$$

estas variables quedan con valores 0 y $\varepsilon$, respectivamente a lo largo de toda la computación.

Necesitaremos tener alguna manera de representar en la cinta los diferentes estados por los cuales se va pasando, a medida que corremos a $\mathcal{P}$. Esto lo haremos de la siguiente forma, al estado

$$\|x_1, \ldots, x_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\|$$

lo representaremos en la cinta de la siguiente manera

$$B \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k BBBB \ldots$$

**Ejemplo:** consideremos el programa $\mathcal{P}$ mostrado recién y fijemos $k = 6$, entonces al estado

$$\|3, 2, 5, 0, 4, 2, \&, \&\&, \varepsilon, \#\&, \#, \#\#\#\|$$

lo representaremos en la cinta de la siguiente manera

$$B{\mid}{\mid}{\mid}B{\mid}{\mid}B{\mid}{\mid}{\mid}{\mid}{\mid}BB{\mid}{\mid}{\mid}{\mid}B{\mid}{\mid}B\&B\&\&BB\#\&B\#B\#\#\#BBBBB \ldots$$

## Definición

A lo que queda entre dos blancos consecutivos, es decir, que no hay ningún blanco entre ellos, lo llamaremos *bloque*.

**Ejemplo:** en la cinta anterior tenemos que los primeros 12 bloques son

$$| | | \quad | | \quad | | | | | \quad \varepsilon \quad | | | | \quad | | \quad \& \quad \&\& \quad \varepsilon \quad \#\& \quad \# \quad \#\#\#$$

luego, los bloques siguientes, son todos iguales a $\varepsilon$.

## Observación

Esta forma de representación de estados en la cinta depende del $k$ elegido, es decir, si tomaramos otro $k$, por ejemplo $k = 9$, entonces el estado anterior se representaría de otra forma en la cinta.

- Armaremos la máquina simuladora como concatenación de máquinas. Para esto, a continuación describiremos, para los distintos tipos de instrucciones posibles de $\mathcal{P}$, sus respectivas máquinas asociadas.
- Asumiremos que en $\mathcal{P}$ no hay instrucciones de la forma $\mathrm{GOTO\ L}\bar{m}$, ni de la forma $\mathrm{L}\bar{n}\ \mathrm{GOTO\ L}\bar{m}$.
- En esta etapa solo describiremos que propiedades tendrá que tener cada máquina simuladora de cada tipo posible de instrucción, y más adelante mostraremos como pueden ser construídas efectivamente dichas máquinas.
- Todas las máquinas descriptas tendrán:
  - $\shortmid$ como unit
  - $B$ como blanco
  - $\Sigma$ como su alfabeto terminal
  - su alfabeto mayor será $\Gamma = \Sigma \cup \{B, \shortmid\} \cup \{\tilde{a} : a \in \Sigma \cup \{\shortmid\}\}$.
  - uno o dos estados finales con la siguiente propiedad:

$$\text{Si } q \text{ es un estado final} \Rightarrow \delta(q, \sigma) = \emptyset, \text{ para cada } \sigma \in \Gamma$$

## Instrucción $\mathrm{N}\bar{\imath} \leftarrow \mathrm{N}\bar{\imath} + 1$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M^{+}_{i,k}$ una máquina con estado inicial $q_0$ y único estado final $q_f$ tal que cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_k \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Sigma^*$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ q_0}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \quad \overset{*}{\vdash} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ q_f}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_{i-1}} B \mid^{x_i+1} B \mid^{x_{i+1}} \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k$$

## Instrucción $\mathrm{N}\bar{\imath} \leftarrow \mathrm{N}\bar{\imath} \dot{-} 1$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M^{\dot{-}}_{i,k}$ una máquina con estado inicial $q_0$ y único estado final $q_f$ tal que cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_k \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Sigma^*$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ q_0}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \quad \overset{*}{\vdash} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ q_f}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_{i-1}} B \mid^{x_i \dot{-} 1} B \mid^{x_{i+1}} \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k$$

## Instrucción $\mathrm{P}\bar{\imath} \leftarrow \mathrm{P}\bar{\imath}.a$

Para $1 \leq i \leq k$ y $a \in \Sigma$, sea $M^{a}_{i,k}$ una máquina con estado inicial $q_0$ y único estado final $q_f$ tal que cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_k \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Sigma^*$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ q_0}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \quad \overset{*}{\vdash} \quad \underset{\substack{\uparrow\\ q_f}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_{i-1} B\alpha_i a B\alpha_{i+1} B \ldots B\alpha_k$$

## Instrucción $\mathrm{P}\bar{\imath} \leftarrow^{\curvearrowright} \mathrm{P}\bar{\imath}$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M^{\curvearrowright}_{i,k}$ una máquina con estado inicial $q_0$ y único estado final $q_f$ tal que cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_k \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Sigma^*$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ q_0}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \quad \overset{*}{\vdash} \quad \underset{\substack{\uparrow\\ q_f}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_{i-1} B {}^{\curvearrowright}\alpha_i B\alpha_{i+1} B \ldots B\alpha_k$$

## Instrucción $\mathrm{N}\bar{i} \leftarrow \mathrm{N}\bar{j}$

Para $1 \leq i, j \leq k$, sea $M^{\#,k}_{i \leftarrow j}$ una máquina con estado inicial $q_0$ y único estado final $q_f$ tal que cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_k \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Sigma^*$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ q_0}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \overset{*}{\vdash} \underset{\substack{\uparrow\\ q_f}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_{i-1}} B \mid^{x_j} B \mid^{x_{i+1}} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k$$

## Instrucción $\mathrm{P}\bar{i} \leftarrow \mathrm{P}\bar{j}$

Para $1 \leq i, j \leq k$, sea $M^{*,k}_{i \leftarrow j}$ una máquina con estado inicial $q_0$ y único estado final $q_f$ tal que cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_k \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Sigma^*$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ q_0}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \overset{*}{\vdash} \underset{\substack{\uparrow\\ q_f}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_{i-1} B\alpha_j B\alpha_{i+1} B \ldots B\alpha_k$$

## Instrucción $\mathrm{N}\bar{\imath} \leftarrow 0$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M^{k}_{i\leftarrow 0}$ una máquina con estado inicial $q_0$ y único estado final $q_f$ tal que cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_k \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Sigma^*$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ q_0}}{B}\ \shortmid^{x_1} B \ldots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \quad \overset{*}{\vdash} \quad \underset{\substack{\uparrow\\ q_f}}{B}\ \shortmid^{x_1} B \ldots B \shortmid^{x_{i-1}} BB \shortmid^{x_{i+1}} B \ldots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k$$

## Instrucción $\mathrm{P}\bar{\imath} \leftarrow \varepsilon$

Para $1 \leq i \leq k$, sea $M^{k}_{i\leftarrow \varepsilon}$ una máquina con estado inicial $q_0$ y único estado final $q_f$ tal que cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_k \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Sigma^*$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ q_0}}{B}\ \shortmid^{x_1} B \ldots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \quad \overset{*}{\vdash} \quad \underset{\substack{\uparrow\\ q_f}}{B}\ \shortmid^{x_1} B \ldots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_{i-1} BB\alpha_{i+1} B \ldots B\alpha_k$$

## Instrucción SKIP

Sea

$$M_{\mathrm{SKIP}} = (\{q_0, q_f\}, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \shortmid, \{q_f\})$$

con $\delta(q_0, B) = \{(q_f, B, K)\}$ y $\delta = \emptyset$ en cualquier otro caso.

## Instrucción IF N$\bar{j} \neq 0$ GOTO L$\bar{m}$

Para $1 \leq j \leq k$, sea $IF_{j,k}$ una máquina con estado inicial $q_0$ y dos estados finales $q_{si}$ y $q_{no}$ tal que cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_k \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Sigma^*$

- Si $x_j \neq 0$, entonces

$$\underset{\substack{\uparrow \\ q_0}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \overset{*}{\vdash} \underset{\substack{\uparrow \\ q_{si}}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k$$

- Si $x_j = 0$, entonces

$$\underset{\substack{\uparrow \\ q_0}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \overset{*}{\vdash} \underset{\substack{\uparrow \\ q_{no}}}{B} \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k$$

## Instrucción IF P$\bar{j}$ BEGINS $a$ GOTO L$\bar{m}$

Para $1 \leq j \leq k$ y $a \in \Sigma$, sea $IF^{a}_{j,k}$ una máquina con estado inicial $q_0$ y dos estados finales $q_{si}$ y $q_{no}$ tal que cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_k \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Sigma^*$

- Si $\alpha_j$ comienza con $a$, entonces

$$\begin{array}{lcl} B \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{si} \end{array}$$

- Caso contrario

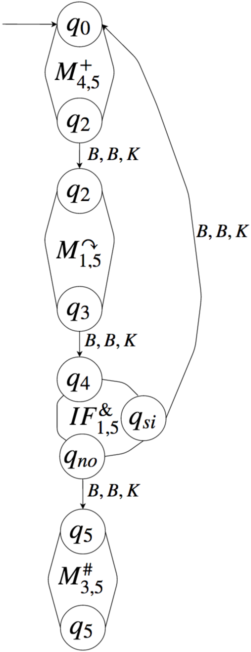
$$\begin{array}{lcl} B \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k & \overset{*}{\vdash} & B \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_{no} \end{array}$$

## Example

Sea $\Sigma = \{\&, \#\}$ y sea $\mathcal{P}$ el siguiente programa:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{L3} & \mathrm{N4} \leftarrow \mathrm{N4} + 1 \\ & \mathrm{P1} \leftarrow {}^{\frown}\mathrm{P1} \\ & \mathrm{IF\ P1\ BEGINS\ \&\ GOTO\ L3} \\ & \mathrm{P3} \leftarrow \mathrm{P3}.\# \end{array}$$

Tomemos $k = 5$, es claro que $k \geq N(\mathcal{P}) = 4$. A la máquina que simulará a $\mathcal{P}$ respecto de $k$, la llamaremos $M_{sim}$ y será la siguiente:


$q_0$
$M^{+}_{4,5}$
$q_2$
$B, B, K$
$q_2$
$M^{\curvearrowright}_{1,5}$
$q_3$
$B, B, K$
$q_4$
$IF^{\&}_{1,5}$
$q_{si}$
$q_{no}$
$B, B, K$
$q_5$
$M^{\#}_{3,5}$
$q_5$
$B, B, K$

Veamos con un ejemplo como $M_{sim}$ simula a $\mathcal{P}$. Supongamos que corremos $\mathcal{P}$ desde el estado

$$\|2, 1, 0, 5, 3, \#\&\#\#, \varepsilon, \&\&, \#\&, \#\|$$

Tendremos entonces la siguiente sucesión de descripciones instantáneas:

$$(1, \|2, 1, 0, 5, 3, \#\&\#\#, \varepsilon, \&\&, \#\&, \#\|)$$

$$(2, \|2, 1, 0, 6, 3, \#\&\#\#, \varepsilon, \&\&, \#\&, \#\|)$$

$$(3, \|2, 1, 0, 6, 3, \&\#\#, \varepsilon, \&\&, \#\&, \#\|)$$

$$(1, \|2, 1, 0, 6, 3, \&\#\#, \varepsilon, \&\&, \#\&, \#\|)$$

$$(2, \|2, 1, 0, 7, 3, \&\#\#, \varepsilon, \&\&, \#\&, \#\|)$$

$$(3, \|2, 1, 0, 7, 3, \#\#, \varepsilon, \&\&, \#\&, \#\|)$$

$$(4, \|2, 1, 0, 7, 3, \#\#, \varepsilon, \&\&, \#\&, \#\|)$$

$$(5, \|2, 1, 0, 7, 3, \#\#, \varepsilon, \&\&\#, \#\&, \#\|)$$

Si hacemos funcionar a $M_{sim}$ desde:

$$q_0 B \shortmid^2 B \shortmid BB \shortmid^5 B \shortmid^3 B\#\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$

obtendremos una sucesión de descripciones instantáneas dentro de las cuales estará la siguiente subsucesión

$$q_0 B \shortmid^2 B \shortmid BB \shortmid^5 B \shortmid^3 B\#\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$

$$q_1 B \shortmid^2 B \shortmid BB \shortmid^6 B \shortmid^3 B\#\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$
$$q_2 B \shortmid^2 B \shortmid BB \shortmid^6 B \shortmid^3 B\#\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$

$$q_3 B \shortmid^2 B \shortmid BB \shortmid^6 B \shortmid^3 B\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$
$$q_4 B \shortmid^2 B \shortmid BB \shortmid^6 B \shortmid^3 B\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$

$$q_{si} B \shortmid^2 B \shortmid BB \shortmid^6 B \shortmid^3 B\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$
$$q_0 B \shortmid^2 B \shortmid BB \shortmid^6 B \shortmid^3 B\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$

$$q_1 B\,|^2\,B\,|\,BB\,|^7\,B\,|^3\,B\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$
$$q_2 B\,|^2\,B\,|\,BB\,|^7\,B\,|^3\,B\&\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$

$$q_3 B\,|^2\,B\,|\,BB\,|^7\,B\,|^3\,B\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$
$$q_4 B\,|^2\,B\,|\,BB\,|^7\,B\,|^3\,B\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$

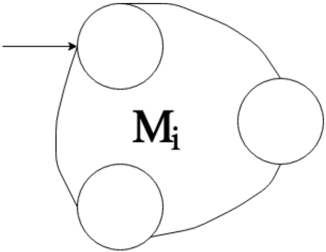
$$q_{no} B\,|^2\,B\,|\,BB\,|^7\,B\,|^3\,B\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$
$$q_5 B\,|^2\,B\,|\,BB\,|^7\,B\,|^3\,B\#\#BB\&\&B\#\&B\#B$$

$$q_6 B\,|^2\,B\,|\,BB\,|^7\,B\,|^3\,B\#\#BB\&\&\#B\#\&B\#B$$

Supongamos que $\mathcal{P} = I_1, \ldots, I_n$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, llamaremos $M_i$ a la máquina que simulará el efecto que produce la instrucción $I_i$, es decir tomemos:

- $M_i = M^{+}_{j,k}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{j} + 1$
- $M_i = M^{\dot{-}}_{j,k}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{j} \dot{-} 1$
- $M_i = M^{a}_{j,k}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \mathrm{P}\bar{j}.a$
- $M_i = M^{\curvearrowright}_{j,k}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow {}^{\curvearrowright}\mathrm{P}\bar{j}$
- $M_i = M^{\#,k}_{j\leftarrow m}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow \mathrm{N}\bar{m}$
- $M_i = M^{*,k}_{j\leftarrow m}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \mathrm{P}\bar{m}$
- $M_i = M^{k}_{j\leftarrow 0}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{N}\bar{j} \leftarrow 0$
- $M_i = M^{k}_{j\leftarrow \varepsilon}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{P}\bar{j} \leftarrow \varepsilon$
- $M_i = M_{\mathrm{SKIP}}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{SKIP}$
- $M_i = IF_{j,k}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{IF}\ \mathrm{N}\bar{j} \neq 0\ \mathrm{GOTO}\ \mathrm{L}\bar{m}$, para algún $m$
- $M_i = IF^{a}_{j,k}$, si $Bas(I_i) = \mathrm{IF}\ \mathrm{P}\bar{j}\ \mathrm{BEGINS}\ a\ \mathrm{GOTO}\ \mathrm{L}\bar{m}$, para algún $m$

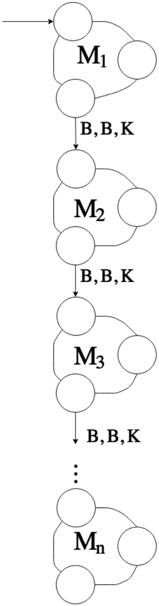
Ya que la máquina $M_i$ puede tener uno o dos estados finales, la representaremos de la siguiente manera:




- Si $M_i$ tiene **un solo estado final**, este está representado por el círculo de abajo a la izquierda
- Si $M_i$ tiene **dos estados finales**, el estado final de la derecha corresponde al estado $q_{si}$ y el de la izquierda abajo al estado $q_{no}$.

Para armar la máquina que simulará a $\mathcal{P}$ hacemos lo siguiente:

1) Primero unimos las máquinas $M_1, \ldots, M_n$ de la siguiente manera



2) Luego para cada $i$ tal que $Bas(I_i)$ es de la forma $\alpha$ $\mathrm{GOTO}$ $\mathrm{L}\bar{m}$, ligamos con una flecha de la forma

$$\xrightarrow{\quad B, B, K \quad}$$

el estado final $q_{si}$ de la $M_i$ con el estado inicial de la $M_h$, donde $h$ es tal que $I_h$ es la primer instrucción que tiene label $\mathrm{L}\bar{m}$.

## Lema

Sea $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$ y sea $k \geq N(\mathcal{P})$. Supongamos que en $\mathcal{P}$ no hay instrucciones de la forma $\mathrm{GOTO\ L}\bar{m}$ ni de la forma $\mathrm{L}\bar{n}\ \mathrm{GOTO\ L}\bar{m}$. Sean:

- Para cada $a \in \Sigma \cup \{\shortmid\}$, sea $\tilde{a}$ un nuevo símbolo
- $\Gamma = \Sigma \cup \{B, \shortmid\} \cup \{\tilde{a} : a \in \Sigma \cup \{\shortmid\}\}$

entonces existe una máquina de Turing determinística con unit $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \shortmid, \{q_f\})$, la cual satisface:

1) $\delta(q_f, \sigma) = \emptyset$, para cada $\sigma \in \Gamma$.

2) Cualesquiera sean $x_1, \ldots, x_k \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Sigma^*$, el programa $\mathcal{P}$ se detiene partiendo del estado

$$\|x_1, \ldots, x_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\|$$

si y solo si $M$ se detiene partiendo de la descripción instantánea

$$\lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} B \ldots B \shortmid^{x_k} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_k B \rfloor$$

3) Si $x_1, \ldots, x_k \in \omega$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Sigma^*$ son tales que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo del estado

$$\|x_1, \ldots, x_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\|$$

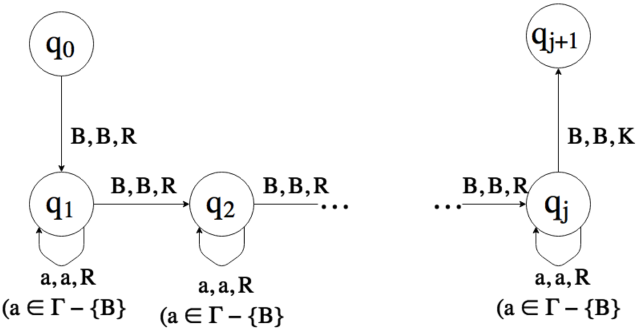
y llega al estado

$$\|y_1, \ldots, y_k, \beta_1, \ldots, \beta_k\|$$

entonces

$$\lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} B \ldots B \shortmid^{x_k} B \alpha_1 B \ldots B \alpha_k B \rfloor \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \lfloor q_f B \shortmid^{y_1} B \ldots B \shortmid^{y_k} B \beta_1 B \ldots B \beta_k B \rfloor$$

Para cada $j \geq 1$, sea $D_j$ la máquina siguiente:




Nótese que:

$$\alpha \underset{\substack{\uparrow \\ q_0}}{B} \beta_1 B \beta_2 B \ldots B \beta_j B \gamma \quad \overset{*}{\vdash} \quad \alpha B \beta_1 B \beta_2 B \ldots B \beta_j \underset{\substack{\uparrow \\ q_f}}{B} \gamma$$

siempre que $\alpha, \gamma \in \Gamma^*, \beta_1, \ldots, \beta_j \in (\Gamma - \{B\})^*$.

$I_j$ cumplirá que:

$$\begin{array}{ccc} \alpha B\beta_j B\ldots B\beta_2 B\beta_1 \underset{\substack{\uparrow \\ q_0}}{B}\gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha \underset{\substack{\uparrow \\ q_f}}{B}\beta_j B\ldots B\beta_2 B\beta_1 B\gamma \end{array}$$

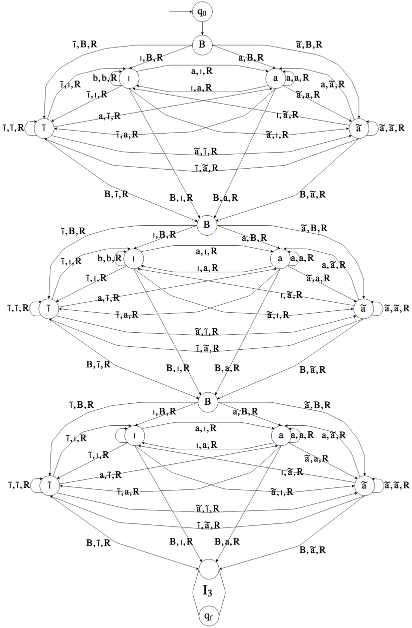
siempre que $\alpha, \gamma \in \Gamma^*, \beta_1, \ldots, \beta_j \in (\Gamma - \{B\})^*$. Dejamos al lector la manufactura de esta máquina.

Para $j \geq 1$, sea $TD_j$ una máquina con un solo estado final $q_f$ y tal que:

$$\begin{array}{ccc} \alpha \underset{\substack{\uparrow \\ q_0}}{B}\gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha B \underset{\substack{\uparrow \\ q_f}}{B}\gamma \end{array}$$

cada vez que $\alpha, \gamma \in \Gamma^*$ y $\gamma$ tiene exactamente $j$ ocurrencias de $B$.

**Ejemplo:** Sea $\Sigma = \{a\}$ podemos tomar $TD_3$ igual a la siguiente máquina



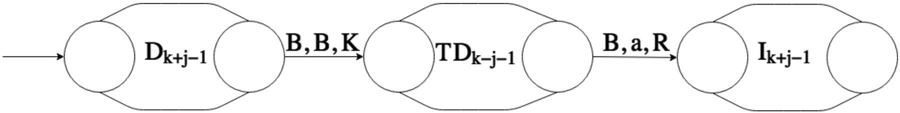
Análogamente, para $j \geq 1$, sea $TI_j$ una máquina tal que

$$\begin{array}{ccc} \alpha B \sigma \gamma & \overset{*}{\vdash} & \alpha B \gamma \\ \uparrow & & \uparrow \\ q_0 & & q_f \end{array}$$

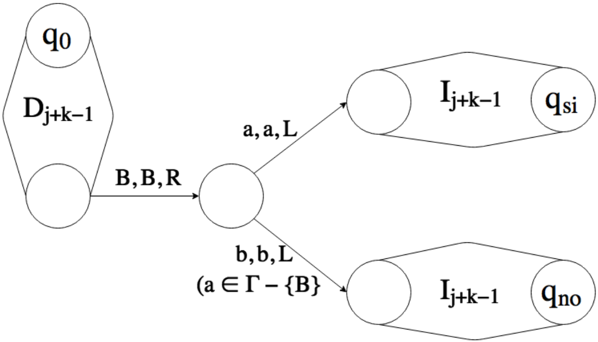
cada vez que $\alpha \in \Gamma^*, \sigma \in \Gamma$ y $\gamma$ tiene exactamente $j$ ocurrencias de $B$. Dejamos al lector la construcción de, por ejemplo, $TI_3$ para $\Sigma = \{\&, \#\}$.

Teniendo las máquinas auxiliares antes definidas podemos combinarlas para obtener las máquinas simuladoras de instrucciones.

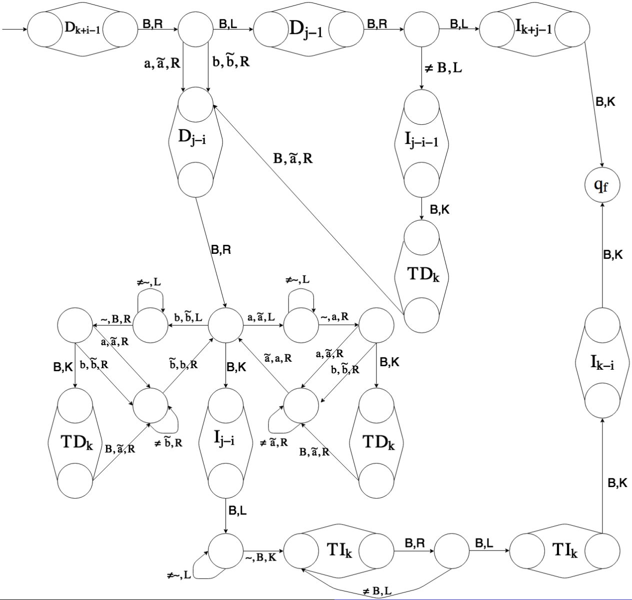
$M^{a}_{i,k}$ puede ser la siguiente máquina:




Una posible forma de diseñar la máquina $IF^{a}_{i,k}$ es la siguiente:



Una posible forma de diseñar la máquina $M^{*,k}_{i \leftarrow j}$ para el caso $\Sigma = \{a, b\}$ y $i < j$, es la siguiente:



## Probaremos

El paradigma computacional de Turing es por lo menos tan expresivo como el paradigma imperativo dado por el lenguaje $\mathcal{S}^{\Sigma}$, es decir, probaremos que toda función $\Sigma$-computable es $\Sigma$-Turing computable.

Antes un lema:

## Lemma

*Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$ es $\Sigma$-computable, entonces existe un programa $\mathcal{Q}$, el cual computa a $f$ y cumple con las siguientes propiedades:*

1) *En $\mathcal{Q}$ no hay instrucciones de la forma $\mathrm{GOTO\ L}\bar{\imath}$, ni de la forma $\mathrm{L}\bar{\jmath}\ \mathrm{GOTO\ L}\bar{\imath}$.*
2) *Cuando $\mathcal{Q}$ termina partiendo de un estado cualquiera dado, el estado alcanzado es tal que las variables numéricas tienen todas el valor $0$ y las alfabéticas tienen, todas exepto $\mathrm{P1}$, el valor $\varepsilon$.*

## Proof.

Sean:

- $\mathcal{P}$ un programa que compute a $f$
- $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \geq N(\mathcal{P}), n, m$
- $\tilde{\mathcal{P}}$ el resultado de reemplazar en $\mathcal{P}$ cada instrucción de la forma $\alpha \mathrm{GOTO}\ \mathrm{L}\bar{\imath}$ con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\mathrm{L}\bar{j} : j \in \mathbb{N}\}$ por $\alpha \mathrm{IF}\ \mathrm{N}\bar{r} \neq 0\ \mathrm{GOTO}\ \mathrm{L}\bar{\imath}$.

Ahora, sea $\mathcal{Q}$ el siguiente programa:

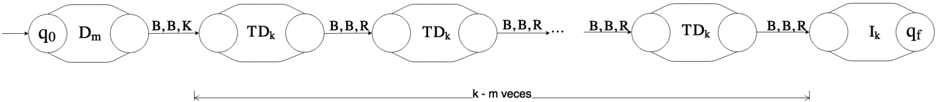
$$
\begin{array}{l}
\mathrm{N}\bar{r} \leftarrow \mathrm{N}\bar{r} + 1 \\
\tilde{\mathcal{P}} \\
\mathrm{N}1 \leftarrow 0 \\
\vdots \\
\mathrm{N}\bar{r} \leftarrow 0 \\
\mathrm{P}2 \leftarrow \varepsilon \\
\vdots \\
\mathrm{P}\bar{r} \leftarrow \varepsilon
\end{array}
$$

## Theorem

*Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es $\Sigma$-computable, entonces $f$ es $\Sigma$-Turing computable.*

## Proof

Supongamos $O = \Sigma^*$. Por el Lema anterior, existe $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$ el cual computa $f$ y tiene las propiedades (1) y (2). Sea $k = \max\{n, m, N(\mathcal{P})\}$ y sea $M_{sim}$ la máquina de Turing con unit que simula a $\mathcal{P}$ respecto de $k$. Como puede observarse, la máquina $M_{sim}$, no necesariamente computará a $f$. Sea $M_1$ la siguiente máquina:



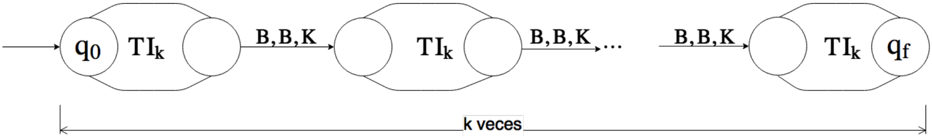
## Observación

Cuando $n = 0$ debemos interpretar que $D_0 = (\{q_0, q_f\}, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, \shortmid, \{q_f\})$, con $\delta(q_0, B) = \{(q_f, B, K)\}$ y $\delta = \emptyset$ en cualquier otro caso.

Nótese que $M_1$ cumple que, para cada $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$

$$\lfloor q_0 B \shortmid^{x_1} B \ldots B \shortmid^{x_n} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_m B \rfloor \overset{*}{\vdash} \lfloor q_f B \shortmid^{x_1} B \ldots B \shortmid^{x_n} B^{k-n} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_m B \rfloor$$

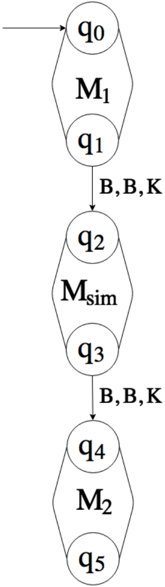
Sea $M_2$ la siguiente máquina:




Nótese que $M_2$ cumple que para cada $\alpha \in \Sigma^*$

$$\left\lfloor q_0 B^{k+1} \alpha \right\rfloor \overset{*}{\vdash} \lfloor q_f B \alpha \rfloor$$

## Sea $M$ la máquina dada por el siguiente diagrama:



Supongamos que $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in (\omega^n \times \Sigma^{*m}) - D_f$. Debemos ver que $M$ no termina partiendo de:

$$\lfloor q_0 B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m B \rfloor \ (*)$$

Primero notemos que, ya que $\mathcal{P}$ computa a $f$, tenemos que $\mathcal{P}$ no termina partiendo de $\|x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m\|$ por lo cual $\mathcal{P}$ no termina partiendo de

$$\|x_1, \dots, x_n, \overbrace{0, \dots, 0}^{k-n}, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \overbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}^{k-m}\|$$

lo cual implica, por el Lema 1, que $M_{sim}$ no termina partiendo de:

$$\left\lfloor q_0 B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_n} B^{k-n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m B \right\rfloor \ (**)$$

Ahora, nótese que si hacemos funcionar a $M$ desde la descripción instantánea dada en (*), llegaremos indefectiblemente a la siguiente descripción instantánea:

$$\left\lfloor q_2 B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_n} B^{k-n} B \alpha_1 B \dots B \alpha_m B \right\rfloor$$

entonces (**) nos dice que al seguir trabajando $M$, la máquina $M$ nunca terminará.

Para terminar de ver que $M$ computa a $f$, tomemos $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_f$ y veamos que

$$\lfloor q_0 B \mid^{x_1} B ... B \mid^{x_n} B \alpha_1 B ... B \alpha_m B \rfloor \underset{M}{\overset{*}{\vdash}} \lfloor q_5 B f(\vec{x}, \vec{\alpha}) \rfloor$$

y que la máquina $M$ se detiene en $\lfloor q_5 B f(\vec{x}, \vec{\alpha}) \rfloor$.

- La máquina $M$ se detiene en $\lfloor q_5 B f(\vec{x},\vec{\alpha})\rfloor$, ya que $q_5$ es el estado final de una copia de $M_2$ y por lo tanto no sale ninguna flecha desde él.
- Ya que $\mathcal{P}$ computa a $f$ y tiene la propiedad (2) del Lema 2, tenemos que $\mathcal{P}$ termina partiendo de $\|x_1,\ldots,x_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_m\|$ y llega al estado $\|f(\vec{x},\vec{\alpha})\|$, o lo que es lo mismo, $\mathcal{P}$ termina partiendo de

$$\|x_1,\ldots,x_n,\overbrace{0,\ldots,0}^{k-n},\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\overbrace{\varepsilon,\ldots,\varepsilon}^{k-m}\|$$

y llega al estado

$$\|\overbrace{0,\ldots,0}^{k},f(\vec{x},\vec{\alpha}),\overbrace{\varepsilon,\ldots,\varepsilon}^{k-1}\|$$

Pero entonces el Lema 1 nos dice que:

$$\lfloor q_0 B \mid^{x_1} B \ldots B \mid^{x_n} B^{k-n} B\alpha_1 B \ldots B\alpha_m B\rfloor \overset{*}{\underset{M_{sim}}{\vdash}} \lfloor q_f B^{k+1} f(\vec{x},\vec{\alpha})\rfloor \quad (***)$$

Como ya lo vimos, si hacemos funcionar a $M$ desde:

$$\lfloor q_0 B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_n} B\alpha_1 B \dots B\alpha_m B \rfloor$$

llegaremos, vía la copia de $M_1$ dentro de $M$, indefectiblemente a la siguiente descripción instantánea

$$\left\lfloor q_2 B \mid^{x_1} B \dots B \mid^{x_n} B^{k-n} B\alpha_1 B \dots B\alpha_m B \right\rfloor$$

Luego, (***) nos dice que, vía la copia de $M_{sim}$ dentro de $M$, llegaremos a $\lfloor q_3 B^{k+1} f(\vec{x}, \vec{\alpha}) \rfloor$ e inmediatamente a $\lfloor q_4 B^{k+1} f(\vec{x}, \vec{\alpha}) \rfloor$.

Finalmente, vía la copia de $M_2$ dentro de $M$, llegaremos a $\lfloor q_5 B f(\vec{x}, \vec{\alpha}) \rfloor$, lo cual termina de demostrar que $M$ computa a $f$.