Explicación lema de posets

Agustín Curto
Francisco Nievas

Lógica
FaMAF - UNC

2017

Lema a probar

Probaremos el siguiente lema:

Lemma

Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Supongamos que f es un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$, entonces para $a, b \in P$, tenemos que $a \prec b$ si y solo si $f(a) \prec' f(b)$.

Recordemos, que por definición de $<$: $a < b \Leftrightarrow a \leq b$ y $a \neq b$

Antes de comenzar, enunciaremos y probaremos lo siguiente:

$$\boxed{a < b \Rightarrow f(a) <' f(b)} \ (\dagger)$$

En palabras: f isomorfismo preserva el menor estricto.

Prueba $a, b \in P$, $a \prec b$ si y solo si $f(a) \prec' f(b)$

Proof

Recordemos que por definición, $x \prec y$ en un poset $(P, \leq) \Leftrightarrow x < y$ y $\nexists z$ tal que $x < z < y$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos $a \prec b$, veamos que $f(a) \prec' f(b)$. Debemos probar entonces:

1) $f(a) <' f(b)$
2) $\nexists z'$ tal que $f(a) <' z' <' f(b)$

Ya que $a \prec b$, tenemos:

i) $a < b$
ii) $\nexists z$ tal que $x < z < y$

1) Por la observación ($\dagger$) y (i), este primer punto se cumple.

Prueba $a, b \in P$, $a \prec b$ si y solo si $f(a) \prec' f(b)$

2) Supongamos que $\exists z'$ tal que $f(a) <' z' <' f(b)$. Luego, nuevamente utilizando $(\dagger)$, tenemos:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(a)) &< f^{-1}(z') < f^{-1}(f(b)) \\ a &< f^{-1}(z') < b \end{aligned}$$

Lo cual, contradice (ii). El absurdo vino de suponer que $\exists z'$ tal que $f(a) <' z' <' f(b)$, por lo tanto $\nexists z'$ tal que $f(a) <' z' <' f(b)$. Finalmente, dado que se cumplen los puntos 1) y 2), se cumple también $f(a) \prec' f(b)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos $f(a) \prec' f(b)$, veamos que $a \prec b$.
Ya que $f^{-1} : (P', \leq') \to (P, \leq)$ es isomorfismo, por lo ya visto tenemos:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(a)) &\prec f^{-1}(f(b)) \\ a &\prec b \end{aligned}$$