Explicación lema de posets

Agustín Curto
Francisco Nievas

Lógica
FaMAF - UNC

2017

Lema a probar

Probaremos el siguiente lema:

Lemma

Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Supongamos que f es un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$, entonces para $a, b \in P$, tenemos que $a \prec b$ si y solo si $F(a) \prec' F(b)$.

Antes de comenzar, enunciaremos y probaremos lo siguiente:

$$\boxed{a < b \Rightarrow f(a) <' f(b)} \; (\dagger)$$

Prueba $a, b \in P$, $a \prec b$ si y solo si $F(a) \prec' F(b)$

Proof

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos $a \prec b$, veamos que $F(a) \prec' F(b)$. Debemos ver:

1) $f(a) <' f(b)$
2) $\nexists z'$ tal que $f(a) < z' < f(b)$

Ya que $a \prec b$, tenemos por definición que:

$$\boxed{a \prec b \Leftrightarrow a < b \text{ y } \nexists z \text{ tal que } a < z < b} \quad (\star)$$

1. Por la observación $(\dagger)$, este primer punto se cumple.
2. Supongamos que $\exists z'$ tal que $f(a) < z' < f(b)$. Luego, nuevamente utilizando $(\dagger)$, tenemos:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(a)) &< f^{-1}(z') < f^{-1}(f(b)) \\ a &< f^{-1}(z') < b \end{aligned}$$

Prueba $a, b \in P$, $a \prec b$ si y solo si $F(a) \prec' F(b)$

Lo cual, contradice $(\star)$. El absurdo vino de suponer que $\exists z'$ tal que $f(a) < z' < f(b)$, por lo tanto $\nexists z'$ tal que $f(a) < z' < f(b)$.

Finalmente, dado que se cumplen los puntos (1) y (2), es decir, hemos probado:

1. $f(a) <' f(b)$
2. $\nexists z'$ tal que $f(a) < z' < f(b)$

se cumple también $f(a) \prec' f(b)$.

Prueba $a, b \in P$, $a \prec b$ si y solo si $F(a) \prec' F(b)$

Proof

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos $F(a) \prec' F(b)$, veamos que $a \prec b$. Ya que $F^{-1} : (P, \leq) \to (P', \leq')$, por lo ya visto tenemos:

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(f(a)) & \prec & f^{-1}(f(b)) \\ a & \prec & b \end{array}$$