

Avril - Juillet 2020

Rapport de stage de Yohan Rosset







REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon tuteur de stage Guillaume Bois pour sa disponibilité et sa bienveillance tout au long de mon stage. Malgré la situation délicate dans laquelle s'est déroulé ce dernier, il m'a toujours accompagné dans mon travail même pendant ses vacances. Un grand merci.

Ensuite, je souhaite remercier mon co tuteur du CEA Alan Burlot pour son aide précieuse en particulier au niveau du numérique. Sans lui, je n'aurais pas réussi l'installation à distance des différents logiciels. Il a fait preuve d'une telle patience vis à vis de moi : j'en suis admiratif.

Mes remerciements vont également à mon co tuteur de l'X Chirstophe Josserand qui a suivi avec assiduité le bon déroulement du stage et qui a su, au cours de nos réunions bimensuelles, cadrer le stage pour me permettre de le mettre à profit pleinement.

Pour terminer, je souhaite remercier chaleureusement la chaire Énergies Renouvelables et son responsable François Willaime qui m'ont soutenu financièrement et moralement de la recherche de stage jusqu'à la rédaction de ce rapport.



EXECUTIVE SUMMARY

Afin de comprendre l'origine des erreurs physiques associées au code numérique développé par le CEA, j'ai commencé mon stage en effectuant un état des lieux assez exhaustif sur la dynamique des bulles dans un fluide et sur la mécanique des fluides associée. Cette étude m'a permis de comprendre en détail les différences de formes et de trajectoires que l'on peut observer sur une bulle qu'il est possible de caractériser par des valeurs de nombres adimensionnés tels que le nombre de Reynolds Re, le nombre d'Eotvos Eo ou encore le nombre de Weber We.

Suite à cette étude, j'ai décidé de me placer dans un domaine de la physique dans lequel les bulles restent sphériques et les mouvements rectilignes : cela me permettait d'être sûr qu'aucun autre paramètre ne pouvait venir interférer. Je me suis donc positionné dans le régime de Stokes $(Eo \ll 1 \text{ et } Re \ll 1)$. Grâce à ces simplifications, j'ai réalisé, en plus de mon étude numérique, une étude théorique : j'ai ainsi pu mettre en comparaison la théorie avec le numérique.

Enfin, j'ai lancé de nombreux essais numériques pour analyser l'origine des erreurs observées. J'ai alors compris que le code numérique modifiait en partie la physique de l'essai (en modifiant la gravité ou en ajoutant des conditions aux limites) ce qui expliquait en partie les approximations observées. Ces résultats permettront au CEA sur le long terme d'améliorer les développements informatiques mais surtout sur le court terme de continuer à les utiliser tout en intégrant la présence de ces éventuelles erreurs.

In order to understand the origin of the physical errors associated with the numerical code developed by CEA, I started my internship by carrying out a rather exhaustive inventory on the dynamics of bubbles in a fluid and on the associated fluid mechanics. This study allowed me to understand in detail the differences in shapes and trajectories that can be seen for a bubble and to characterize each of these situations by values of numbers such as the Reynolds number Re, the Eotvos number Eo or the Weber number We.

Following this study, I decided to place myself in a field of physics in which bubbles remain spherical and movements rectilinear: this allowed me to be sure that no other parameter could interfere in my study. Thus, I placed myself in the Stokes regime ($Eo \ll 1$ and $Re \ll 1$). Thanks to these simplifications, this regime allowed me to carry out, in addition to my numerical study, a theoretical study: then, I compared my two studies to compare the theory with the numerical one.

Finally, I launched many numerical tests to try to understand the origin of the errors observed. I understood that the numerical code partly modified the physics of the test (by modifying the gravity or by adding boundary conditions) which partly explained the observed approximations. These results will allow the CEA in the long term to improve the code but especially in the short term to continue to use this code while understanding the errors observed.



TABLE DES MATIÈRES

\mathbf{R}	emer	ciements	2
\mathbf{E}_{2}	xecut	tive Summary	3
In	\mathbf{trod}	uction	6
1	Éco	ulements turbulents à bulles	7
	1.1	Un monde inconnu et pourtant nécessaire	7
	1.2	Enjeux de telles études	7
	1.3	Objectif du stage	8
2	Mé	canique des fluides avec interfaces	9
	2.1	Remontée d'échelle	9
	2.2	Trio IJK : Simulation Numérique Directe	9
		2.2.1 La plateforme TRUST	9
		2.2.2 Des équations de Navier Stokes aux équations mono-fluides	10
		2.2.3 Front-Tracking	11
		2.2.4 Algorithme de résolution de Navier Stokes par TrioCFD	12
	2.3	Problèmes numériques	12
		2.3.1 Paramètres numériques de Front-Tracking	12
		2.3.2 Courants parasites : modélisation $\nabla \chi$	13
		2.3.3 Gestion de la périodicité : modélisation ρg et terme source	14
3	Mo	uvement d'une bulle unique dans un fluide	15
	3.1	Étude d'une sphère solide dans un milieu liquide	15
	3.2	Sphère solide vs bulle liquide	17
	3.3	Bulle liquide : quelles formes?	18
	3.4	Inclusion liquide : plusieurs prédictions analytiques sur son mouvement	21
		3.4.1 Correction proposée par Taylor et Acrivos en 1964 [9]	22
		3.4.2 Une mesure de C_d pour les bulles déformables	23
		3.4.3 Une corrélation proposée par Graham B. Wallis	24
	3.5	Synthèse	25
4	Pro	blématique de la conservation de la quantité de mouvement	26
	4.1	Méthode d'analyse	26
		4.1.1 Lancement de vagues d'essais numériques	26
		4.1.2 Réalisation d'un unique essai	26
	4.2	Manifestation du problème	27
	4.3	Des nouvelles implémentations numériques	28
		4.3.1 Un terme source variable	28



		4.3.2	Une force de rappel pour stabiliser la bulle à l'origine	29
	4.4	ction à un cas précis : la théorie d'Hadamard [13]	30	
	4.5	Etude	numérique et analyse des différentes implémentations	32
		4.5.1	Lien entre les différentes implémentations	32
		4.5.2	Erreur numérique liée à la périodicité du domaine	34
		4.5.3	Modification de la gravité par l'ajout de la force de rappel	37
		4.5.4	Erreur numérique liées aux dérivées temporelles	38
		4.5.5	Superposition de la source variable et de la force de rappel	39
Co	onclu	ısion		41
Bi	bliog	graphie		42
\mathbf{A}	Anı	nexe A	: Étude théorique des vitesses d'une bulle dans le régime de Stokes	44
	A.1	Donné	ées du problème	44
	A.2		en équation	44
	A.3		tions aux limites	45
	A.4		de la pression	46
			des constantes	46
	A.6		l du coefficient de traînée C_d	47
		A.6.1	La composante normale des forces visqueuses σ_n	47
		A.6.2	La composante tangentielle des forces visqueuses σ_{θ}	48
		A.6.3	Les forces de pression	48
			Calcul de C_d	49
	A.7		ation dans le repère cartésien	49
		A.7.1	Expression des vitesses en coordonnées cartésiennes	50
		A.7.2	Expression de la pression dans le repère cartésien	50
В	Anı	nexe B	: Tableau de suivi des essais réalisés	51



INTRODUCTION

Une bulle, qu'est-ce que c'est? Cette question semble enfantine et la réponse triviale mais nous allons voir que cela est loin d'être aussi simple qu'imaginé. Même si tous, nous arrivons à nous représenter une bulle comme une sphère ronde translucide qu'il est possible de former avec de l'air dans de l'eau ou en soufflant sur du savon, certains chercheurs comme ceux des laboratoires du Centre d'énergie atomique et des énergies alternatives (CEA) essayent d'étudier plus en détail ce phénomène.

De par son rôle de garant de la sûreté des installations nucléaires françaises, le CEA a mis en évidence l'importance que pouvait prendre les bulles dans les incidents de centrales nucléaires : rupture de confinement, augmentation ou diminution brutale de la pression, ... Ils se sont donc lancés dans l'étude approfondie des milieux bi-phasiques eau-vapeur pour mieux comprendre les phénomènes observés dans les centrales pour pouvoir par la suite essayer de trouver des solutions à ces problèmes.

Pour mener à bien leur étude, le CEA développe des outils capables de repérer, de stopper ou de gérer les situations à risque. En particulier, le Service de Thermohydraulique et de Mécanique des Fluides (STMF) auquel j'étais rattaché, met en place des codes de calculs à l'échelle système pour prévoir le comportement de ces milieux bi-phasiques au sein des réacteurs nucléaires grâce au principe de remontée d'échelle. Néanmoins, au moment de mon stage, ces développements informatiques présentaient quelques erreurs et j'ai donc essayé de comprendre l'origine de ces dysfonctionnements pour leur permettre par la suite d'y pallier.



1 ÉCOULEMENTS TURBULENTS À BULLES

1.1 Un monde inconnu et pourtant nécessaire

Des corps de tailles, de poids et de formes très différents peuvent décrire divers mouvements, qu'ils soient périodiques, chaotiques, rectilignes, ... La compréhension de l'origine et de la nature de ces trajectoires a toujours été au cœur des préoccupations dans de nombreux domaines, tels que la météorologie (croissance de la grêle), la mécanique du vol des insectes (forces aérodynamiques subies par des insectes volants, en particulier en vol stationnaire) ou encore dans le domaine de l'énergie (centrale thermique avec un changement de phase de l'eau). On les rencontre alors largement dans l'ingénierie des processus impliquant des flux diphasiques dispersés. Dans ces processus, les oscillations de trajectoire se révèlent être robustes aux perturbations affectant le fluide environnant, telles que les turbulences ou les interactions avec les corps voisins. Depuis les débuts de la mécanique des fluides, certains des plus grands noms de la physique, en particulier Leonardo, Newton (1687), Kirchhoff (1869), Maxwell (1853) et Eiffel (1912) ont contribué à identifier les caractéristiques distinctives des trajectoires du corps guidées par la flottabilité, telles que l'existence de mouvements périodiques et irréguliers, l'influence de la forme du corps, la modification de la trainée, ... Ils ont aussi en partie établi les bases théoriques sur lesquelles les études ultérieures ont été construites. Le problème a fait l'objet d'enquêtes inlassables au cours du XXe siècle. Néanmoins, ce n'est que récemment que des améliorations décisives ont pu être obtenues grâce en particulier aux développements des méthodes numériques.

Comment exprimer la vitesse terminale d'une sphère dans un milieu liquide? Quels sont les paramètres primordiaux dans l'étude du mouvement d'une sphère solide ou gazeuse dans un tel milieu? Comment déterminer avec précision la forme d'une bulle au cours du temps dans un domaine liquide? Toutes ces questions ne représentent qu'une infime partie de celles que se posent les scientifiques qui étudient le mouvement des sphères dans les milieux liquides. Mais bien que ce domaine soit étudié depuis plusieurs siècles avec des écrits remontant au début du XIXème siècle, de nombreuses incompréhensions continuent à questionner la communauté scientifique : les études se sont développées, des hypothèses ou solutions ont été proposées mais pour le moment, aucune d'entre elles ne permet une parfaite compréhension des résultats expérimentaux.

1.2 Enjeux de telles études

Pour évaluer la sûreté des installations nucléaires, le CEA développe, valide et utilise des outils de simulation en thermo hydraulique. Il s'intéresse en particulier à la modélisation des

1. ÉCOULEMENTS TURBULENTS À BULLES



écoulements diphasiques eau-vapeur par différentes approches de la plus fine à la plus intégrale. Afin de mieux comprendre les écoulements diphasiques, le laboratoire travaille à la mise en place d'une démarche multi-échelles où la simulation fine (DNS, Simulation Numérique Directe diphasique) est utilisée comme « expérience numérique » pour produire des données de référence. Cette démarche est appliquée aux écoulements bouillants en intégrant progressivement des niveaux de complexité croissants. Le but à terme est de mieux prédire le déclenchement de la crise d'ébullition.

1.3 Objectif du stage

Pour produire ces données, le laboratoire a développé une méthode de simulation fine diphasique (Front-Tracking). Cette méthode est implémentée dans le code Open-Source de thermohydraulique du laboratoire : TrioCFD (code orienté objet, C++). Elle permet de réaliser des simulations massivement parallèles pour décrire précisément les interfaces et les structures turbulentes sans recourir à des modèles. Le premier phénomène étudié est la turbulence induite par les bulles et les transferts de quantité de mouvement entre les phases.

Cependant, lors de ces travaux, le CEA a constaté que la méthode numérique utilisée ne garantissait pas la conservation stricte de la quantité de mouvement; en particulier, lors de simulations dans un domaine tri-périodique, une lente déviation de l'intégrale de la quantité de mouvement est observée. Plusieurs hypothèses peuvent être formulées sur la cause de ce problème (formulation du terme convectif, terme source interfacial de tension de surface ou de gravité, schéma en temps à pas fractionnaire, ...). Le travail proposé consistait donc à analyser l'influence de paramètres physiques (saut de densité, tension de surface, gravité...) ou numériques (choix de schémas, paramètres du maillage lagrangien...) sur cette erreur pour en déterminer la cause principale. Pour cela, le cas simple de l'ascension d'une bulle unique dans du liquide initialement au repos a été étudié. L'objectif du stage était de produire un état des lieux le plus précis possible de cette problématique pour ouvrir la voie à des travaux futurs d'amélioration de la méthode numérique.



2

MÉCANIQUE DES FLUIDES AVEC INTERFACES

2.1 Remontée d'échelle

Pour évaluer la sûreté des installations nucléaires, le CEA développe, valide et utilise des outils de simulation en thermo hydraulique. Afin de mieux comprendre les écoulements diphasiques, le laboratoire travaille à la mise en place d'une démarche multi-échelles où la simulation fine (DNS, Simulation Numérique Directe diphasique) est utilisée comme « expérience numérique » pour produire des données de référence de l'ordre du centimètre. Ces données sont ensuite moyennées pour être comparées aux modèles utilisés à plus grande échelle. Cette démarche est appliquée aux écoulements bouillants en intégrant progressivement des niveaux de complexité croissants. Pourquoi à différentes échelles? Parce qu'il est encore impossible, avec nos ressources informatiques actuelles, de réaliser une simulation suffisamment précise à l'échelle d'un réacteur : l'espace occupé et les temps de calcul seraient démesurés.

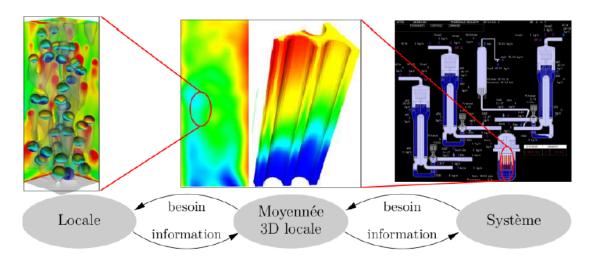


FIGURE 1 – Principe de remontée d'échelle [1]

2.2 Trio IJK: Simulation Numérique Directe

2.2.1 • La plateforme TRUST

Le projet TRUST développe un code de calcul orienté objet dédié à des applications scientifiques et industrielles du domaine nucléaire, tel que le code Trio que j'ai utilisé au cours de



mon stage. En dehors des capacités de traitement standard des écoulements turbulents monophasiques, le projet s'est particulièrement investi dans les développements de code de calcul diphasique afin d'explorer les mécanismes fondamentaux des écoulements à interfaces (bulles, stratifiés, avec ou sans changements de phase), d'analyser et de prédire le comportement des écoulements dominés par de grandes interfaces.

2.2.2 • Des équations de Navier Stokes aux équations mono-fluides

D'après la seconde loi de Newton, nous pouvons décrire la variation de la quantité de mouvement d'après les forces extérieures qui agissent sur le système : $\frac{\partial p_{syst}}{\partial t} = Force_{ext}$ où $p_{syst} = \Sigma m_i v_i$. Dans notre cas, nous travaillons en volumique donc on peut définir la quantité de mouvement volumique grâce aux proportions α_i de chaque phase dans le milieu :

$$p_{syst} = \sum_{i} \alpha_i \rho_i v_i \tag{1}$$

Chaque phase, liquide ou vapeur, doit satisfaire les équations de Navier-Stokes ci-dessous. Dans la suite de notre étude, l'indice l sera associé au liquide tandis que l'indice v sera associé à la bulle. La conservation de la masse et de la quantité de mouvement peuvent alors s'écrire [2]:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k) = 0$$

$$\frac{\partial \rho_k \mathbf{u}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k + p_k \mathbf{I} - \tau_k) - \rho_k \mathbf{g} = 0$$
(3)

Mais le code TrioCFD ne résout pas les équations de cette manière. Il utilise des équations mono-fluides, c'est à dire qu'il ne traite que des systèmes qui sont assimilés à un unique fluide. Pour cela, il est donc nécessaire d'introduire la fonction dite de Heaviside en 3D χ_k tel que $\chi_k = 1$ si et seulement si la phase k est présente au point étudié. Elle vaut 0 sinon. Le comportement de cette fonction indicatrice de phase est régi par l'équation de transport :

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \mathbf{v}_k \nabla \chi_k = 0 \tag{4}$$

En multipliant alors les équations précédentes par la fonction de Heaviside et en sommant sur l'ensemble des phases, on retrouve les équations classiques de Navier Stokes dans la représentation mono-fluide comme elles sont écrites dans le livre de Grétar Tryggvason [3]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbf{I} - \tau) - \rho \mathbf{g} = (\nabla_S \sigma) \delta^i - \kappa \sigma \mathbf{n} \delta^i$$
 (6)

On a introduit dans ces équations les variables ρ et \mathbf{v} , telles que $\rho = \sum_k \chi_k \rho_k$ et $\mathbf{v} = \sum_k \chi_k \mathbf{v}_k$. On a également admis que $\nabla \chi_k = \mathbf{n}_k \delta^i$ où \mathbf{n}_k est la normale extérieure et δ^i une impulsion de Dirac localisée sur l'interface. Enfin, en supposant qu'il n'y a pas de changement de phase, on a pu écrire que $\Sigma_k(p_k\mathbf{n}_k\delta^i - \chi_k\nabla.\tau_k) = (\nabla_S\sigma)\delta^i - \kappa\sigma\mathbf{n}\delta^i$ [2].



2.2.3 • Front-Tracking

En ce qui concerne le suivi d'interface, étape primordiale dans l'étude d'une bulle en mouvement, il existe trois principales approches [3] : les méthodes VOF, Front-Tracking et Level Set. Les méthodes de type VOF calculent des volumes de fluides pour reconstruire a posteriori le comportement des interfaces. A l'inverse, la méthode de Front-Tracking va superposer 2 grilles, une fixe et régulière pour le fluide, appelée maillage eulérien, et une dynamique pour les frontières, appelée maillage lagrangien. Ce deuxième maillage sera caractérisé par des marqueurs déplacés par le fluide environnant, comme on peut le voir sur la figure ci-dessous. Le maillage lagrangien va porter les normales de l'interface ainsi que les inclinaisons pendant que le maillage eulérien va porter les propriétés physiques, la vitesse et la pression.

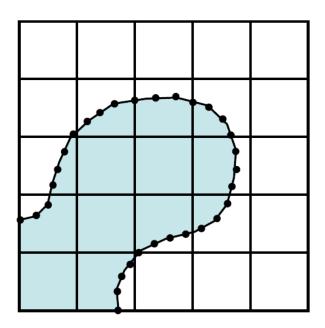


FIGURE 2 – Superposition des maillages eulérien et lagrangien en Front-Tracking [3]

Pour déterminer le déplacement de chaque marqueur de l'interface, on interpole la vitesse du fluide selon les marqueurs du maillage eulérien environnant pour déterminer la vitesse \mathbf{v}_i au point de la frontière. On obtient alors la nouvelle position du marqueur grâce à un schéma d'Euler explicite :

$$x_i^* = x_i^n + \Delta t \mathbf{v}_i \tag{7}$$

Néanmoins, cette méthode ne permet pas de garantir la conservation de la masse au cours du mouvement. Pour y remédier, une correction itérative est appliquée en déplaçant de la manière la plus locale possible les marqueurs lagrangiens dans la direction normale à l'interface. Pour améliorer au mieux la conservation de la masse, il peut être utile d'appliquer une interpolation à un ordre plus grand de type Legendre.



2.2.4 • Algorithme de résolution de Navier Stokes par TrioCFD

L'algorithme de résolution général se base sur 7 étapes expliquées ci-dessous [4] :

- 1. Mettre à jour la position x^* des marqueurs de l'interface, ce qu'on appelle le transport interfacial : $x^* = f(x^n, u^n, \Delta t)$
- 2. Appliquer les algorithmes de remaillage et de conservation de la masse associés au fronttracking : $x^{n+1} = g(x^*)$
- 3. Mettre à jour la fonction indicatrice de phase : $\chi^{n+1} = h(x^{n+1})$
- 4. Mettre à jour les paramètres physiques : $\rho^{n+1} = \rho(\chi^{n+1})$ et $\mu^{n+1} = \mu(\chi^{n+1})$
- 5. Prédire a priori la vitesse u^* : $\frac{\rho^{n+1}u^*-\rho^nu^n}{\Delta t}=F^n$ avec $F^n=-\nabla.(\rho uu)+\nabla.(\mu\nabla u)+S_i$, où S_i correspond aux termes restants dans l'équation (6) de Navier Stokes
- 6. Projeter la pression : $\nabla \cdot (\frac{1}{\rho^n} \nabla P^{n+1}) = \frac{\nabla \cdot u^*}{\Delta t}$
- 7. Corriger la vitesse : $u^{n+1} = u^* \frac{1}{\Delta t} \nabla P^{n+1}$

Les étapes 5 à 7 correspondent aux étapes de Prédiction-Correction, nécessaire pour satisfaire la conservation de la masse $\nabla .(u^{n+1}) = 0$. Pour prédire la vitesse u^* , plusieurs schémas peuvent être utilisés allant du schéma d'Euler explicite à la résolution par la méthode Runge-Kutta d'ordre 3 : c'est cette dernière méthode qui est utilisée dans le code Trio pour l'étude de configurations turbulentes.

2.3 Problèmes numériques

2.3.1 • Paramètres numériques de Front-Tracking

Les marqueurs représentant l'interface sont déplacés à chaque pas de temps selon la vitesse du liquide interpolée sur la maille lagrangienne. Ce maillage peut occasionner des erreurs purement numérique qui pourront entraı̂ner une variation plus ou moins importante de la solution physique. Pour cela, il est important de stabiliser le code par différentes méthodes :

- Lissage de la courbe : contrairement à l'interface réelle, le maillage lagrangien peut créer des variations brutales de courbure. Ces variations brutes peuvent engendrer des instabilités plus ou moins importantes et il est donc important de lisser la courbe à chaque itération pour les limiter. Cependant, ces modifications ne sont pas du tout physique et il ne faut donc pas en abuser.
- Barycentrage : cette étape permet de rééquilibrer la structure lagrangienne de l'interface pour éviter aux faces d'être trop aplatie. Cette étape, bien que purement numérique, peut impacter les volumes qu'il sera donc important de corriger ensuite.
- Remaillage : pour conserver une homogénéité de l'interface, il est parfois nécessaire de supprimer, ajouter ou modifier certaines arêtes ou certains sommets du maillage.
- Correction du volume : l'interpolation de la vitesse du fluide environnant et l'ensemble des opérations de correction ci-dessus ne conservent pas le volume. Il est donc nécessaire a posteriori de corriger les erreurs pour conserver un volume constant.



Les paramètres de ces méthodes sont donc à définir avec attention pour à la fois limiter les instabilités numériques tout en évitant de trop s'éloigner de la réalité pour conserver une résolution satisfaisante.

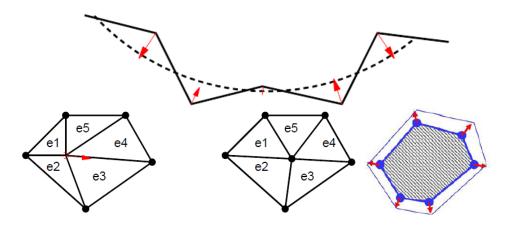


FIGURE 3 – Lissage, Barycentrage et Correction du volume [4]

2.3.2 • Courants parasites : modélisation $\nabla \chi$

La discrétisation des efforts de tension de surface sur l'interface peut créer des instabilités numériques appelées "courants parasites" [4] qui peuvent nuire à la précision des calculs voire même fournir des résultats physiquement incorrect. Pour les éliminer, il est nécessaire de modifier l'équation de conservation de la quantité de mouvement [5]. A l'équilibre mécanique au niveau de l'interface, on a

$$\nabla p = \rho \mathbf{g} + (\nabla_S \sigma) - \kappa \sigma \mathbf{n} \tag{8}$$

En introduisant un potentiel ϕ tel que $\mathbf{g} = -\nabla \phi$, on obtient facilement

$$\rho \mathbf{g} + \nabla_S \sigma - \kappa \sigma \mathbf{n} = \sigma \kappa \mathbf{n} \delta_i + \nabla_S \sigma - \rho \nabla \phi \tag{9}$$

$$\rho \mathbf{g} + \nabla_S \sigma - \kappa \sigma \mathbf{n} = \sigma \kappa \mathbf{n} \delta_i + \nabla_S \sigma + \phi \nabla \rho - \nabla(\rho \phi)$$
(10)

$$\rho \mathbf{g} + \nabla_S \sigma - \kappa \sigma \mathbf{n} = (\sigma \kappa + (\rho_v - \rho_l)\phi) \mathbf{n} \delta_i + \nabla_S \sigma - \nabla(\rho \phi)$$
(11)

En posant alors $p^* = p + \rho \phi$, on obtient

$$\nabla p^* = (\sigma \kappa + (\rho_n - \rho_l)\phi) \mathbf{n} \delta_i + \nabla_S \sigma \tag{12}$$

Désormais, en discrétisant au niveau de l'interface, c'est à dire au niveau des marqueurs lagrangiens, à la fois les forces de tension de surface et les forces de gravité, on est assuré de l'existence d'une solution discrète dans le cas statique. Le code TrioCFD devrait donc résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p^* + \nabla \tau + (\nabla_S \sigma) \delta^i + (\sigma \kappa + (\rho_v - \rho_l) \phi) \mathbf{n} \delta^i$$
(13)



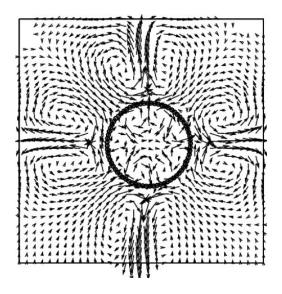


FIGURE 4 – Courant parasite autour d'une bulle [4]

2.3.3 • Gestion de la périodicité : modélisation ρq et terme source

Au cours de mon stage, j'ai souhaité me placer dans un canal périodique. Il était donc important de modifier les équations numériques afin de conserver cette périodicité sur toutes les limites de notre domaine, et en particulier sur l'axe de montée de la bulle où la pression varie sous l'effet de la gravité.

Nous avons donc mis en place une pression dite numérique P^{NUM} qui fluctue uniquement autour de 0 [2]. En effet, en remarquant que la moyenne dans le plan horizontal de P est

$$\langle P(x) \rangle = -x \langle \rho \rangle g \tag{14}$$

où $\langle x \rangle$ correspond à la moyenne spatiale du paramètre x, on peut écrire

$$P = P^{NUM} + \langle P \rangle \tag{15}$$

On transforme donc le gradient de pression moyen < P > en terme source S afin de pouvoir satisfaire les conditions de périodicité. Néanmoins, cette amélioration est incompatible avec les améliorations décrites dans la section sur les courants parasites, à cause de la différence entre le terme $< \rho > g$ et le terme ρg . Ainsi, nous n'avons pas encore trouvé de solutions pour à la fois supprimer les termes de la gravité et avoir une pression périodique. On peut alors écrire les nouvelles équations à résoudre :

$$\left| \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + P^{NUM} - \tau) = \rho \mathbf{g} + \mathbf{S} + (\nabla_S \sigma) \delta^i - \kappa \sigma \mathbf{n} \delta^i \text{ avec } S = - < \rho > \mathbf{g} \right|$$
(16)

Au cours de mon stage, je me suis basé sur cette équation pour essayer d'améliorer ce modèle et comprendre l'origine des erreurs numériques de conservation de quantité de mouvement.



3

MOUVEMENT D'UNE BULLE UNIQUE DANS UN FLUIDE

3.1 ÉTUDE D'UNE SPHÈRE SOLIDE DANS UN MILIEU LIQUIDE

De par sa forme sphérique constante au cours du temps, il est assez facile d'étudier le mouvement d'une sphère solide dans un milieu liquide tel que l'eau ou l'air. En effet, en appliquant au système la seconde loi de Newton à l'état stationnaire, c'est à dire lorsque l'accélération $\frac{dv}{dt}$ est nulle, il est nécessaire que la somme des forces qui s'appliquent sur le solide soit nulle. Dans le cas simple d'une sphère solide soumise à la pesanteur, deux forces interagissent :

- la force de pesanteur dirigée verticalement vers le sol de norme $F_g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_v g$ où r est le rayon de la sphère et ρ_v la densité de la sphère
- la force de traînée dirigée verticalement dans le sens opposé à la vitesse de norme $F_d = \frac{1}{2}C_d\rho_f\pi r^2v_r^2$ où C_d est le coefficient de traînée, ρ_f est la densité du fluide extérieur et v_r est la vitesse relative de la sphère par rapport au fluide.

Ainsi, en égalisant les normes de ces deux forces pour que l'accélération de la sphère soit nulle, on trouve

$$v = \sqrt{\frac{8a\rho_v g}{3C_d \rho_f}}$$
(17)

Cependant, dans notre équation, la vitesse v dépend du coefficient de traînée C_d qui n'est pas explicitement connu et qui dépend du nombre de Reynolds

$$Re = \frac{2\rho_f vr}{\mu_f} \tag{18}$$

Le nombre de Reynolds, quant à lui, dépend de la vitesse v: nous nous retrouvons alors dans un système couplé. Il est donc nécessaire d'exhiber une relation entre deux de ses paramètres pour pouvoir déterminer la vitesse terminale de la sphère.

En regroupant différents essais provenant de plusieurs études, il est possible d'expliciter une corrélation entre C_d et Re pour les corps sphériques solides. Le graphique ci-dessous [6] présente la courbe classique tirée des études de Schiller-Schmidel (1928), Libster (1924), Allan (1900) et Goettingen (1921, 1926), et en accord avec de nombreuses études plus récentes :



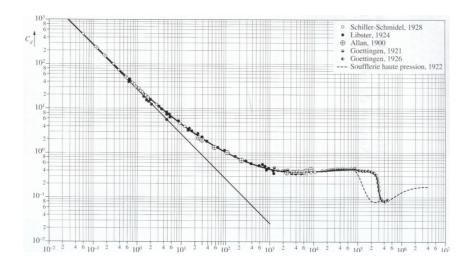


FIGURE 5 – C_d en fonction de Re

Une autre corrélation proposée plus tardivement par Graham B. Wallis [7] se base sur des variables adimensionnées de la vitesse v et du rayon r ne dépendant plus que d'une seule des deux variables contrairement aux équations (17) et (18) précédentes.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v^* & = & (\frac{4Re}{3C_d})^{1/3} & = & v(\frac{\rho_f^2}{\mu_f g \Delta \rho})^{1/3} \\ r^* & = & (\frac{3}{32}C_dRe^2)^{1/3} & = & r(\frac{\rho_f g \Delta \rho}{\mu_f^2})^{1/3} \end{array} \right.$$

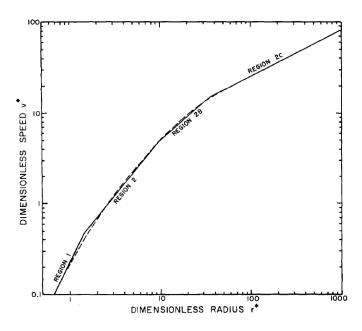


FIGURE $6 - v^*$ en fonction de r^* pour une particule solide [7]



Suite à l'analyse et la mise en commun de différentes études de la première moitié du XXème siècle, Graham B. Wallis [7] a relié la vitesse v^* au rayon r^* . 4 zones distinctes de signification physique différente ont ainsi pu être mises en évidence et ces résultats sont encore de nos jours en accord avec de nombreuses observations faites au travers de diverses expérimentations.

Equation	Espace	$Re = 2v^*r^*$	Signification
$v^* = \frac{2}{9}r^{*2}$	$r^* < 1, 5$, $v^* < 0, 5$	Re < 1, 5	Entière viscosité
$v^* = 0,307r^{*1,21}$	$1, 5 < r^* < 10$, $0, 5 < v^* < 5$	1, 5 < Re < 100	Forces d'inertie dominantes
$v^* = 0,693r^{*0,858}$	$10 < r^* < 36 , 5 < v^* < 15$	100 < Re < 1080	Vortex shedding
$v^* = 2,5r^{*1/2}$	$r^* > 36$, $v^* > 15$	Re > 1080	Turbulence

Table 1 – Les 4 zones de Graham B. Wallis [7]

3.2 Sphère solide vs bulle liquide

A première vue, les bulles ressemblent fortement aux sphères solides. On pourrait donc a priori penser que les résultats explicités précédemment puissent être appliqués aux bulles. Néanmoins, ce n'est pas le cas étant donné que les bulles sont des sphères fluides et donc déformables. Trois différences majeures existent entre le cas solide et le cas fluide.

Tout d'abord, le fait que les bulles soient fluides suppose que, contrairement aux sphères solides, les bulles soient déformables. Cette déformation peut être décrite par l'un des deux nombres adimensionnés suivants, à savoir le nombre de Weber $We = \frac{\rho_f v^2 d}{\sigma}$ ou le nombre d'Eotvos $Eo = \frac{\rho_f g d^2}{\sigma}$ [8] où σ est la tension de surface caractéristique des deux milieux et d est le diamètre apparent de la bulle (ie le diamètre d'une sphère de même volume). Cette déformation peut avoir plusieurs impacts sur la bulle, que ce soit au niveau de son transfert de masse ou de chaleur, de sa trajectoire ou même de sa dynamique. Cette tension de surface qui tend à rendre sphérique la bulle sera mise en concurrence avec le stress opéré par le liquide sur celle-ci qui aura, quant à lui, tendance à aplanir la bulle [9].

Ensuite, à cause du possible transfert de moment entre le fluide extérieur et la bulle au niveau de l'interface, une circulation interne à la bulle va naître. Baulmer [10] a étudié ce critère et indique que cette circulation va entraîner une diminution de la traînée de la bulle, ce qui va se solder par une vitesse terminale plus importante que celle exprimée dans le cas solide.

Enfin, la propreté du fluide environnant aura désormais une influence sur le mouvement de la bulle [7]. En effet, les impuretés vont venir s'agglomérer au niveau de l'interface ce qui limitera voire empêchera le transfert de moment entre le fluide extérieur et la bulle. Ainsi, plus le milieu environnant sera impure, plus la circulation interne diminuera et plus le comportement de la bulle se rapprochera du comportement d'une sphère solide.



Finalement, l'étude d'une bulle est bien plus complexe que l'étude d'une sphère solide : en plus de l'étude du mouvement, il est important d'étudier et de prendre en compte la forme de la bulle, les oscillations de forme possible au cours du mouvement, la pureté du liquide environnant, ... Du fait de cette difficulté, aucune étude scientifique n'a encore permis de trouver de corrélation parfaite décrivant l'ensemble des situations possibles relevées au cours des essais du XXème siècle. Néanmoins, certains scientifiques sont parvenus à mettre en évidence des corrélations valables sur des domaines précis : nous consacrerons donc la suite de cette partie à un état de l'art du mouvement d'une bulle dans un milieu liquide basé sur différentes études scientifiques.

3.3 Bulle liquide : quelles formes?

Comme nous l'avons expliqué au paravant, l'un des principaux problèmes liés à l'étude du mouvement d'une bulle liquide réside en sa forme : à l'inverse d'une sphère solide, les bulles liquides sont déformables et ce changement de forme peut avoir de grands impacts sur l'analyse de son mouvement. Afin de caractériser la forme de la bulle au cours du mouvement et en particulier à l'état stationnaire si celui-ci existe, définir un paramètre adimensionné caractéristique de la forme peut s'avérer utile. Les scientifiques se sont axés sur le paramètre géométrique χ , appelé aussi ratio d'aspect E, rapport entre les dimensions caractéristiques des deux axes principaux : pour une bulle, $\chi = \frac{1}{E} = \frac{a}{b}$ avec a et b respectivement le grand et le petit axe de l'ellipse de la bulle dans le plan parallèle à son mouvement.

Bien que la déformation puisse être en partie caractérisée par le nombre de Weber $We = \frac{\rho_f v^2 d}{\sigma}$ la viscosité du fluide environnant aura également un impact sur la forme que prendra la bulle [8] : de ce fait, le nombre de Morton $Mo = \frac{\mu_f^4 g}{\sigma^3 \rho_f}$ semble également nécessaire dans l'étude de la forme d'une goutte liquide.

A l'aide d'une vaste banque de données regroupant des mesures avec des nombres de Weber We allant de 0 à 10 et pour des nombres de Morton allant de 10^{-6} à 1, on peut étudier l'influence de ces nombres sur la forme de la bulle via le nombre adimensionné χ .

Les courbes du graphique 7 correspondent, en allant de la gauche vers la droite, à de l'eau ultra purifiée ou filtrée $(Mo \equiv 0)$, à deux sortes d'huile $(Mo = 1, 6*10^{-8} \text{ et } Mo = 9, 9*10^{-6})$ et à trois mélanges d'eau et de glycérine $(Mo = 1, 3*10^{-3}, Mo = 2, 9*10^{-2} \text{ et } Mo = 1, 7)$. On observe alors que la déformation diminue avec le nombre de Morton tandis que celle-ci augmente avec le nombre de Weber. La figure 8 montre des photographies de la bulle à différents nombres de Morton $(1, 7 \text{ pour la première ligne}, 2, 9*10^{-2} \text{ pour la seconde}, 1, 3*10^{-3} \text{ pour la seconde}$ et $4, 6*10^{-6}$ pour la dernière) et à différents diamètres équivalents, ce qui équivaut à différents nombres de Weber (1, 5mm pour la première colonne, 3, 9mm pour la seconde, 5, 9mm pour la troisième et 9mm pour la dernière): on retrouve alors les mêmes résultats que ceux attendus par le graphique précédent.



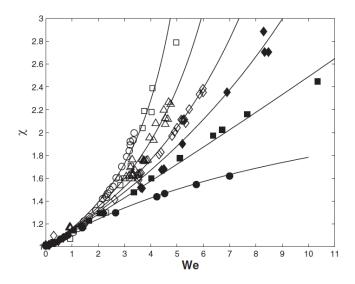


FIGURE 7 – Effets des nombres de Weber et de Morton sur la forme de la bulle [8]

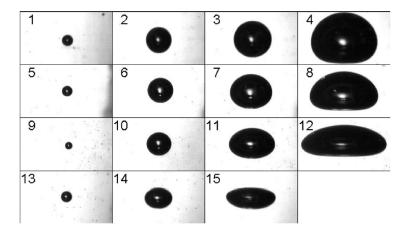


FIGURE 8 – Photographie de la forme des bulles à différents Mo et d [8]

Legendre [8] a alors exprimé la forme d'une bulle d'air dans de l'eau selon le diamètre équivalent d. On trouve alors le tableau 2 ci-dessous :

d	Forme de la bulle	
d < 0,83	Sphérique	
0,83 < d < 2	Ellipsoïde sans oscillation de forme	
2 < d < 4,2 Ellipsoïde avec oscillation de for		
d > 4, 2	Chapeau sphérique	

Table 2 – Formes d'une bulle dans de l'eau [8]

Une fois que la forme est connue, le mouvement peut être étudié. Dans ce cas, les études se



basent principalement sur le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho U d}{\mu}$. Il est donc important de relier ce nombre à la forme de la bulle. En s'accordant aux essais de Rastello et al. (2011) ainsi qu'aux essais de l'étude de Legendre [8], il est possible de relier Re, We et Eo : la formule ci-dessous relie alors ces trois grandeurs ce qui permettra de relier directement la forme de la bulle χ au nombre de Reynolds Re, valable à priori à faible Re et faible We.

$$Re = 2,05We^{2/3}Mo^{-1/5} (19)$$

D'autres études ont alors permis de relier directement le ratio d'aspect E de la bulle avec les nombres de Weber et de Reynolds dans le cas d'une bulle parfaitement propre. Dès 1964, Taylor et Acrivos ont proposé une expression de ce ratio avec une correction possible au deuxième ordre, valable à faible Re et faible We [9]:

$$E = \frac{1 - 2\lambda_{\tilde{\mu}}We}{1 + \lambda_{\tilde{\mu}}We} \approx 1 - 3\lambda_{\tilde{\mu}}We \tag{20}$$

avec $\lambda_{\tilde{\mu}}$ une fonction du ratio des viscosités qui oscille entre 0,052 et 0,063. Néanmoins, cette expression suggère une déformation trop importante dès que We devient plus grand que 0,5 comme on peut le voir sur la figure 9. Pour y remédier, certaines corrélations ont été proposées comme celle avancée par Loth dans son article :

$$E = 1 - (1 - E_{min}) \tanh(c_E W e) \tag{21}$$

où E_{min} correspond à la valeur minimale atteinte lorsque We tend vers l'infini, et c_E est une fonction dépendante de Re.

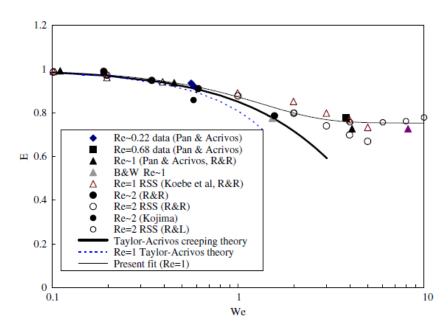


FIGURE 9 – Ratio d'aspects à faible Re [9]

Lorsque le nombre de Reynolds augmente, on arrive dans une zone où aucune étude théorique n'a encore permis de déterminer la forme exacte de la bulle en fonction de We. Cependant,



lorsque Re devient assez grand et que sa valeur n'influe donc plus sur la forme de la bulle, Moore [9] a pu développer une théorie au premier ordre indiquant la valeur du ratio E:

$$\frac{1}{E} = 1 + \frac{9}{64}We\tag{22}$$

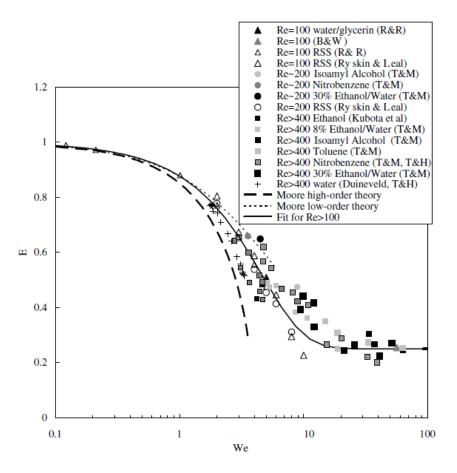


FIGURE 10 – Ratio d'aspects à Re élevé [9]

Finalement, un résumé rapide pourrait-être le suivant :

- lorsque $We \ll 1$, la bulle reste sphérique.
- lorsque $We \approx 1$, la bulle dévie de manière modérée de la forme sphérique.
- lorsque $We \gg 1$, la bulle dévie grandement d'une forme sphérique.

3.4 Inclusion liquide : plusieurs prédictions analytiques sur son mouvement

En ce qui concerne la direction du mouvement de la bulle, l'ensemble des résultats expérimentaux coïncident : la vitesse de la bulle est toujours parallèle à l'axe mineur de l'ellipsoïde



[11]. Il est ensuite possible de définir plusieurs types de mouvement selon la valeur du nombre de Reynolds [12]. Pour une bulle, plusieurs modes différents ont pu être mis en avant :

- Pour Re < 205, le mouvement est vertical sans aucune rotation de la bulle.
- Pour 205 < Re < 212, le mouvement reste vertical mais la bulle se met à tourner avec une vitesse orthoradiale autour de son axe de montée de manière lente et uniforme.
- Pour 212 < Re < 245, la bulle continue à monter, mais désormais selon un axe incliné de 5° par rapport à la verticale avec une certaine périodicité au cours du temps.
- Pour Re > 245, la bulle commence par réaliser des zigzag tout en conservant une montée verticale en moyenne avant d'entrer dans un régime chaotique dans les 3 dimensions.

Ces résultats restent malgré tout très expérimentaux et ne peuvent être appliqués dans tous les cas de figure. Il est donc important de prendre du recul sur ces études et de garder un oeil critique : l'étude du mouvement d'une bulle reste très peu connue et il est fort probable que tous les cas de figures n'aient pas encore pu être étudiés.

En plus des études qualitatives réalisées au cours du XXème siècle, quelques scientifiques ont essayé de quantifier la vitesse terminale qu'atteindrait une bulle dans un milieu liquide. Certains se sont uniquement basés sur une étude théorique et ont donc fourni des résultats analytiques valables dans les conditions indiquées, tandis que d'autres ont uniquement réalisé des corrélations entre plusieurs essais ce qui fournit des résultats plus approximatifs mais tout aussi important pour la science. Néanmoins, seulement certaines situations limites permettent d'obtenir une solution théorique. Dans la sections 3.4.1, nous présenterons uniquement la théorie associée à la situation présentant une faible inertie ($Re \ll 1$) accompagnée de petites déformations ($We \ll 1$ ou $Eo \ll 1$) étudiée par Hadamard [13].

3.4.1 • Correction proposée par Taylor et Acrivos en 1964 [9]

Il est intéressant de quantifier l'écart du coefficient de traînée associé par rapport à la solution idéale de Stokes $C_d=\frac{24}{Re}$ où $F_D=3\pi d\mu_f U_R$ acquise pour une particule liquide lorsque Re tend vers 0. Pour cela, on note

$$f_{\tilde{\mu}} = \frac{F_D(Re)}{F_D(Re \to 0)} = \frac{C_D(Re)}{24/Re}$$
 (23)

Selon les conditions de Hadamard [13] avec $Re \ll 1$ et $Eo \ll 1$ pour une bulle visqueuse non déformable dans un milieu visqueux, on obtient :

$$f_{\tilde{\mu}} = \frac{2 + 3\tilde{\mu}}{3 + 3\tilde{\mu}} \text{ avec } \tilde{\mu} = \frac{\mu_v}{\mu_l}$$
 (24)

Néanmoins, cette solution ne prend pas en compte les termes inertiels linéarisés dans l'expression de Oseen. Dès 1963, Brenner et Cox [9] ont ainsi prolongé l'expression de Hadamard pour prendre en compte ces termes et ont obtenu :

$$f_{\tilde{\mu}} = \frac{2 + 3\tilde{\mu}}{3 + 3\tilde{\mu}} + \frac{3}{16} Re \left(\frac{2 + 3\tilde{\mu}}{3 + 3\tilde{\mu}}\right)^2 + O(Re^2 \ln Re)$$
 (25)



Cette expression bien que raisonnable pour des valeurs de Re inférieur ou de l'ordre de 1 ne permet pas encore de prendre en compte les déformations subies par la bulle. Taylor et Acrivos (1964) ont alors utilisé la formule (20) reliant la déformation de la bulle E au nombre de Reynolds dans la limite des faibles nombres de Reynolds pour obtenir une formule du coefficient de traînée pour une sphéroïde autour de son axe de symétrie. Ils ont alors obtenu une formule prenant en compte à la fois les termes inertiels et les déformations de la bulle :

$$f_{\tilde{\mu}} = \frac{2+3\tilde{\mu}}{3+3\tilde{\mu}} + \frac{3}{16}Re(\frac{2+3\tilde{\mu}}{3+3\tilde{\mu}})^2 + \frac{6}{5}\lambda_{\tilde{\mu}}We\frac{(8+3\tilde{\mu}^2-\tilde{\mu})}{(3+3\tilde{\mu})^2}$$
(26)

3.4.2 • Une mesure de C_d pour les bulles déformables

La différence majeure entre les bulles liquides et les sphères solides résident dans l'expression de la force de traînée que subissent les bulles et du coefficient de traînée C_d associé : alors que le coefficient de traînée ne dépend que du nombre de Reynolds Re pour une sphère solide comme on le voit sur la figure 5, il va dépendre également des paramètres du milieu tels que la viscosité μ , la tension de surface σ , la gravité g, ... Utiliser le nombre de Morton $Mo = \frac{\mu_f^4 g}{\sigma^3 \rho_f}$ permet de n'avoir à traiter qu'une unique grandeur tout en prenant en compte les différentes influences possibles du coefficient de traînée.

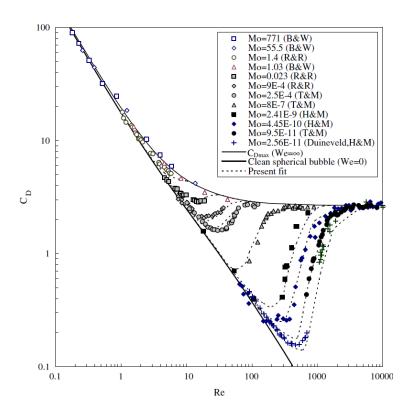


Figure 11 – Coefficient de trainée à l'état stationnaire selon différents Mo [9]



En mettant en corrélation différents essais du XXème siècle, à savoir ceux de Haberman et Morton de 1954, de Tadaki et Maeda de 1961, de Bhaga et Weber de 1981 et de Raymond et Rosant de 2000, Loth [9] a mis en évidence une triple corrélation entre le coefficient de trainée C_d à l'état stationnaire, le nombre de Reynolds Re à l'état stationnaire et le nombre de Morton Mo. Les essais couvrent un vaste domaine avec des nombres de Reynolds variant de 10^{-1} à 10^4 et des nombres de Morton variant de 10^{-11} à 10^2 . On observe une dépendance en Mo à faible Re mais cette dépendance s'atténue lorsque Re devient grand : en effet, un nombre de Reynolds Re grand se solde par l'atteinte d'un pallier pour le coefficient de traînée.

3.4.3 • Une corrélation proposée par Graham B. Wallis

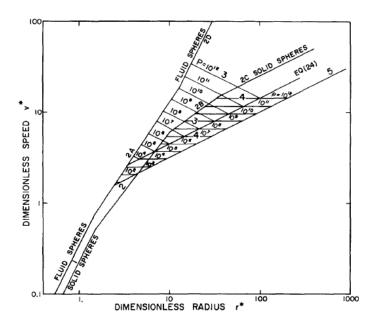


FIGURE 12 – Corrélation entre vitesse et rayon adimensionnés

Au cours de la deuxième moitié du XXème siècle, Graham B. Wallis a lui aussi essayé de quantifier la valeur de la vitesse de montée d'une bulle dans un liquide à l'état stationnaire [7]. Il ne s'est pas limité à un domaine précis de la physique des bulles : il a souhaité donné une estimation de la vitesse à l'état stationnaire de la bulle quel que soit les paramètres la définissant. Il n'a alors pas pu se baser exclusivement sur une étude théorique et s'est, au contraire, aidé de l'ensemble des essais déjà effectués au cours des études scientifiques antérieures pour mettre en avant une ou plusieurs équations.

Comme nous l'avons déja annoncé au paravant pour les sphères solides, Graham B. Wallis a défini deux variables a dimensionnées v^* et r^* . Néan moins, lors de l'étude de sphères liquides, la déformation des bulles étant un paramètre important, il a décidé de la prendre en compte via le paramètre P qui est le carré du nombre d'Archimède : $P=N_{Ar}^2=\frac{\sigma^3\rho_f^2}{\mu_f^4g\Delta\rho}$. Son étude



lui a alors permis de mettre en évidence plusieurs portions linéaires de courbes, avec l'équation associée, représentant différentes situations observées au cours d'essais comme nous pouvons le voir sur le graphique 12 : plus le rayon augmente, plus la vitesse de la bulle augmente et plus celle-ci peut être modifiée par la valeur de P.

La pureté du liquide influant énormément sur le comportement de la bulle, ce graphique nous donne d'avantages des valeurs extrêmes que des valeurs précises. La transition entre les zones reste complexe sans équation universelle mais l'étude de Graham B. Wallis nous permet d'avoir une idée de la vitesse de la bulle en fonction de la situation dans laquelle nous nous trouvons.

3.5 Synthèse

Finalement, même si une bulle semble simple à définir, on remarque qu'il existe de nombreuses subtilités autour de celle-ci. Bien qu'elle soit à peu près ronde, elle diffère grandement d'une sphère solide. Comme nous l'avons vu, une bulle est capable de transférer du moment avec le fluide environnant ce qui peut entraîner la formation d'une circulation interne à la bulle : celle-ci aura un fort impact sur la dynamique de la bulle, ce qui la différencie d'une sphère solide. De plus, le fait qu'une bulle ne soit pas solide la rend déformable. Ces déformations auront des impacts au niveau de ses transferts, de sa trajectoire, de sa dynamique et connaître la forme de la bulle sera donc primordial lors de son étude.

Concernant sa dynamique, une bulle est soumise aux mêmes forces qu'une sphère solide et en particulier à la force de traînée. Pour cela, il est donc important de connaître la forme exacte de la bulle ainsi que la valeur que prendra le coefficient de traînée. Et là, il est important de faire remarquer que le nombre de Reynolds Re n'est pas le seul à influencer ce paramètre : même si pour les sphères solides il est possible de relier le coefficient de traînée au nombre de Reynolds, il est nécessaire, pour les bulles, de prendre en considération leur déformations par le nombre de Weber We ou le nombre d'Eotvos Eo. Néanmoins, une similitude subsiste entre les sphères solides et les bulles : il n'existe pas encore de corrélation générique permettant de connaître le coefficient de traînée à partir d'autres paramètres valables dans toutes les situations. En effet, il n'existe pour le moment que des lois approximées valables sous certaines conditions.



4

PROBLÉMATIQUE DE LA CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

4.1 MÉTHODE D'ANALYSE

Lors de ses travaux, le CEA a constaté que la méthode numérique utilisée dans le code Trio IJK ne garantissait pas la stricte conservation de la quantité de mouvement, avec une lente déviation de l'intégrale spatiale de la quantité de mouvement lors de simulations tripériodiques. L'objectif de mon stage fut alors d'analyser l'impact des paramètres physiques et numériques sur cette erreur et d'établir un état des lieux précis pour permettre de futures améliorations.

4.1.1 • Lancement de vagues d'essais numériques

Pour effectuer cette étude, j'ai opté pour une méthode longue mais certaine. J'ai donc lancé de nombreux essais numériques en variant respectivement les paramètres physiques (gravité, densités, tension de surface, taille de la bulle ...) ou les paramètres numériques (type de convection, d'interpolation, nombre d'éléments dans le maillage, ...). Cette première vague d'essais m'a permis d'obtenir un grand nombre de cas tests que je pouvais alors mettre en comparaison pour étudier les impacts de chacun des paramètres indépendamment des autres. Il me suffisait ensuite de relancer certains essais avec des nouveaux paramètres pour confirmer, infirmer ou corriger mes premières intuitions.

Lors de vagues d'essais comme celles-ci, il est important de faire attention à comparer ce qui est comparable. Afin d'étudier l'impact d'un paramètre précis comme la densité ou la tension de surface, il est nécessaire de vérifier que les essais mis en relation ne diffèrent que par ce paramètre afin que nous ne confondions pas son impact avec l'impact potentiel d'un autre paramètre. Un exemple typique se trouve au niveau des densités : même si 2 essais ne varient que de la valeur de la densité du liquide ρ_l , l'impact est-il lié à la densité du liquide ρ_l , à la densité moyenne du domaine ρ_m , à la variation de densité $\Delta \rho$, ...? Il est donc important de réaliser un nombre conséquent de tests pour valider précisément l'influence d'un paramètre ou d'un autre.

4.1.2 • Réalisation d'un unique essai

La réalisation d'un essai classique nécessite plusieurs étapes plus ou moins complexes :

• Le lancement de l'essai : cette étape est la plus importante lors de a réalisation d'un essai numérique. Lors du lancement d'un essai, de nombreux paramètres sont à déterminer,



qu'ils soient physiques ou numériques. Cette étape fut primordiale lors de la réalisation de mon stage puisque qu'elle induisait toute l'analyse ultérieure de l'essai : un simple oubli pouvait me faire perdre un temps précieux étant donné qu'un essai numérique prenait au minimum 1 jour à s'exécuter.

- L'exécution de l'essai : cette étape est réalisée numériquement. La sortie du code était des fichiers .lata permettant de visionner les grandeurs dans l'espace, et des fichiers .out fournissant les données sous forme de "tableaux".
- L'analyse des résultats. Deux méthodes d'analyse ont été employées : l'étude globale des grandeurs en les moyennant sur le domaine d'étude grâce à des codes Python, ou alors l'étude locale des grandeurs grâce au logiciel *Visit*.

4.2 Manifestation du problème

L'étude numérique se base sur l'équation de Navier Stokes dans le modèle ρg pour prendre en compte la périodicité du domaine, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P^{NUM} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{S} + \nabla (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})) - \kappa \sigma \mathbf{n} \delta^i$$
 (27)

avec $S = \rho_m |g|$. En moyennant cette équation sur l'ensemble du domaine, on obtient théoriquement :

$$\frac{\partial < \rho \mathbf{u} >}{\partial t} = 0 \tag{28}$$

Néanmoins, comme attendu par les objectifs du stage suite aux observations du CEA, la quantité de mouvement ne se conserve pas rigoureusement dans le domaine au cours du temps et l'équation de conservation ci-dessus n'est pas vérifiée comme on peut le voir sur la figure 13.

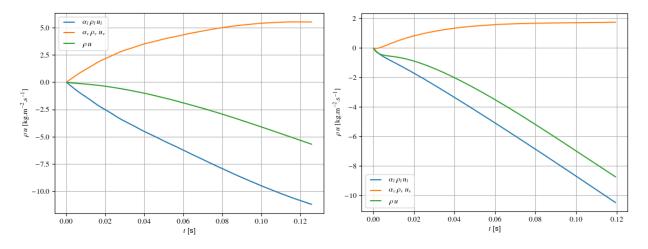


FIGURE 13 – Variation de la quantité de mouvement de la bulle (orange), du liquide (bleu) et globale (vert) au cours du temps pour 2 essais



A l'état stationnaire, la pente se stabilise et l'équation de conservation peut se réécrire avec la présence d'une erreur numérique ϵ , paramètre dont nous souhaitions connaître l'origine et les dépendances au cours du stage.

$$\frac{\partial < \rho \mathbf{u} >}{\partial t} = \epsilon \tag{29}$$

L'erreur commise a certainement un impact sur la décomposition que le CEA fait ensuite pour la modélisation entre l'écoulement moyen et la partie turbulente. Un autre stagiaire travaillait sur l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente dans un tel système et mon étude lui aura donc permis d'évaluer plus correctement certains termes dans son étude.

4.3 Des nouvelles implémentations numériques

Afin de résoudre ce problème de déviation, le CEA a imaginé plusieurs solutions numériques, dont certaines que j'ai pu étudier au cours de mon stage. J'ai eu en particulier l'occasion de tester et d'analyser 2 de ces nouvelles implémentations, à savoir le terme source variable et la force de rappel : leur différence majeure, pour le cas d'une bulle unique, réside dans la localisation spatiale de la modification apportée que nous spécifierons ci-dessous.

4.3.1 • Un terme source variable

Une des premières modifications fut proposée par Guillaume Bois [14] et elle impacte directement le terme source. En effet, au lieu d'ajouter un terme source constant $S_0 = \rho_m |g|$, il a imaginé ajouter un terme source variable S proche de S_0 en espérant que les variations viennent compenser l'erreur ϵ . Il a alors décidé de décrire la variation du terme source S grâce à l'équation ci-dessous, avec $<\rho u>_0$, λ et ω des paramètres libres :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\omega^2 (\langle \rho u \rangle - \langle \rho u \rangle_0) - 2\lambda (S - S_0) \tag{30}$$

En couplant cette équation avec celle décrivant l'évolution en temps de $< \rho u >$ et comprenant une erreur instantanée ϵ de conservation de la quantité de mouvement, on obtient

$$\frac{\partial^2 < \rho u >}{\partial t^2} + 2\lambda \frac{\partial < \rho u >}{\partial t} + \omega^2 < \rho u > \omega^2 < \rho u >_0 + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + 2\lambda \epsilon \tag{31}$$

Cette équation décrit un oscillateur harmonique amorti dont le comportement dépend des paramètres libres λ , ω et $< \rho u >_0$: théoriquement, la quantité de mouvement devrait donc atteindre un palier après un certain temps si nous évitons le régime oscillant. L'amortissement est maximum dans le régime critique lorsque $\lambda = \omega$. On remarque également que si les deux paramètres augmentent tout en restant dans le régime critique, l'état stationnaire est atteint plus rapidement [14] donc il est préférable de choisir des valeurs élevées. Dans notre étude, ce n'est pas ces paramètres qui nous intéressent le plus donc on a pris, d'après des études faites précédemment, $\lambda = \omega = 80$. Ce raisonnement reste cependant approché puisqu'il suppose que le terme de droite de l'équation (31) reste indépendant de $< \rho u >$.



Par conséquent, au cours de nos essais, nous avons vérifié qu'à l'état stationnaire, lorsqu'il n'y a plus de dépendance en temps, on retrouve bien la relation :

$$\frac{\omega^2}{2\lambda}(\langle \rho u \rangle_f - \langle \rho u \rangle_0) = -(S_f - S_0) = \epsilon$$
(32)

Cet ajout S_f est distribué sur l'ensemble du domaine spatial et non pas localement. Il faudra donc étudier a posteriori si cette modification impacte la solution physique, que ce soit localement ou globalement.

4.3.2 • Une force de rappel pour stabiliser la bulle à l'origine

L'ajout d'une force de rappel dans la bulle a également été imaginé, non pas directement pour permettre la conservation de la quantité de mouvement mais pour simuler un changement de référentiel et donc empêcher la bulle de traverser les frontières. En effet, le CEA a remarqué que le passage de la bulle à la frontière pouvait entraîner des erreurs sur la solution physique [15]. Avec cette force, on essaye donc de se placer dans le référentiel de la bulle où celle-ci a une vitesse U_v nulle à l'état stationnaire : le référentiel devient ainsi galiléen.

Pour ce faire, on a ajouté numériquement un ressort centré en l'origine (x, y, z) = (0, 0, 0) de raideur k, dont la force sera noté F_k . Dans le code, cette force est indiquée en $N.kg^{-1}$ et donc pour ne pas faire de confusion, nous noterons F_{NUM} la valeur fournie numériquement. L'équation de Navier Stokes devient donc

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P^{NUM} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{S}_0 + \nabla (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})) - \kappa \sigma \mathbf{n} \delta^i + \rho F_{NUM} \chi_{bulle}$$
(33)

qui se réécrit, en moyennant sur le domaine :

$$\boxed{\frac{\partial < \rho \mathbf{u} >}{\partial t} = \alpha \rho_v F_{NUM} + \epsilon} \text{ avec } \alpha = \frac{V_{bulle}}{V_{domaine}}$$
(34)

A l'état stationnaire, on s'attend donc, dans l'hypothèse où la bulle se stabilise, à ce que

$$\alpha \rho_v F_{NUM} + \epsilon = 0 \tag{35}$$

Contrairement à la source variable S_f , la force de rappel n'a un impact direct que localement au niveau de la bulle. Cette modification locale aura-t-elle un impact sur la solution globale?

Enfin, l'utilisation conjointe de la source variable et de la force de rappel est a priori possible, mais cela introduit potentiellement un degré de liberté en trop dans le système, ce qui peut conduire, en fonction de la loi d'évolution de S_f retenue, à la résolution de problèmes différents de celui souhaité. Nous discuterons de ce couplage dans la section 4.5.5.



4.4 RESTRICTION À UN CAS PRÉCIS : LA THÉORIE D'HADA-MARD [13]

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, la dynamique d'une bulle est conditionnée par la valeur de grandeurs adimensionnées telles que le nombre de Reynolds Re, le nombre de Morton Mo ou encore le nombre d'Eotvos Eo. Afin de pouvoir comparer efficacement deux essais, il est primordial que la dynamique des bulles dans chacun des essais soient identiques : dans le cas contraire, des modifications pourraient provenir de cette différence et il serait alors très difficile voire impossible de distinguer l'erreur numérique de ces changements. Nous avons donc décidé au cours de mon stage de nous placer dans un cas précis déjà étudié théoriquement dans la littérature : une bulle sphérique (Eo < 1) dans un liquide très visqueux (Re < 1).

Ce choix est motivé par plusieurs points :

- Ce domaine est large et nous permet d'étudier des plages de données immenses sans risque de changer la dynamique associée à la bulle : celle-ci suivra un mouvement vertical rectiligne et son mouvement sera axisymmétrique par rapport à la direction de la gravité.
- Cette étude théorique a déjà été effectuée en partie dès 1911 par Hadamard [13]. Ainsi, nous savons que cette étude est faisable théoriquement et il sera possible de s'appuyer sur ces calculs même si nous allons un peu dériver de sa solution comme nous le verrons ensuite.

En contrepartie, il est possible que dans ce régime, l'absence de turbulence, de déformations ou de fluctuations conduise à une très forte réduction de l'erreur numérique par rapport à un cas turbulent. Nous avons donc du faire preuve d'une réelle précision dans l'analyse de nos essais pour ne pas faire de fausses interprétations.

L'étude théorique effectuée, et présentée en détail dans l'annexe A, est dérivée de l'article d'Hadamard de 1911 [13]. Contrairement à lui, nous avons rajouté une condition aux limites qui nous semblait pertinente : la vitesse non nulle du liquide à l'infini telle que $u_z = -U_R$ avec U_R la vitesse relative entre le liquide et la bulle. Nous avons donc étudié le mouvement d'une bulle dans un liquide avec pour conditions aux limites :

- Des conditions d'adhésion en r = a (au bord de la bulle).
- Un saut dans la direction normale à l'interface de la transmission de l'effort radial en r=a.
- Une égalité de la transmission de l'effort tangent en r = a.
- Une vitesse à l'infini telle que $u_z = -U_R$, $u_x = u_y = 0$, ce qui revient à se placer dans le référentiel où la bulle est immobile.

L'étude nous permet alors de montrer que, dans le repère cartésien où \mathbf{g} est dirigé selon $-e_z$, les vitesses valent, respectivement dans le liquide et la bulle :

$$u_x = \frac{3}{r^5}Azx + \frac{B}{r^3}zx , u_y = \frac{3}{r^5}Azy + \frac{B}{r^3}zy \text{ et } u_z = \frac{3}{r^5}Az^2 - \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r^3}z^2 + \frac{B}{r} + 2C$$
 (36)



$$u_{x,v} = -2D_v xz$$
, $u_{y,v} = -2D_v yz$ et $u_{z,v} = 2C_v + 2D_v r^2 + 2t^2 D_v$ (37)

où les constantes A, B, C, C_v et D_v valent, en posant $\Delta \rho = \rho - \rho_v$ et $\tilde{\mu} = \frac{\mu_v}{\mu}$:

$$\begin{cases} A = -\frac{a^{3}U_{r}}{4} \frac{\tilde{\mu}}{1+\tilde{\mu}} \\ B = \frac{aU_{r}}{4} \frac{2+3\tilde{\mu}}{1+\tilde{\mu}} \\ C = -\frac{U_{R}}{2} \\ C_{v} = \frac{U_{r}}{4} \frac{1}{1+\tilde{\mu}} \\ D_{v} = -\frac{U_{r}}{4a^{2}} \frac{1}{1+\tilde{\mu}} \\ U_{r} = \frac{2}{9} \frac{a^{2}}{\mu} \Delta \rho g \frac{(\tilde{\mu}+1)}{(\tilde{\mu}+\frac{2}{3})} \end{cases}$$

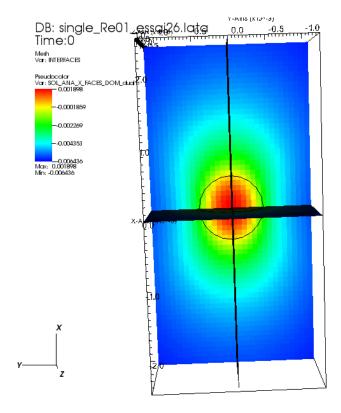


FIGURE 14 – Solution analytique de u_x pour les données de l'essai 26 [Annexe B] (les axes x et z sont inversés par rapport à l'étude théorique)

Cette solution analytique nous permettra, en plus de l'étude globale, de pouvoir comparer localement les solutions numériques avec la solution théorique. Nous pourrons alors distinguer



si l'erreur numérique mesurée est localisée précisément dans le système ou si celle-ci est étendue sur tout le domaine d'étude.

Cette étude nous a également permis d'effectuer un bilan des forces global sur le système et donc de mesurer le coefficient de traînée d'une bulle. On retrouve alors la valeur d'Hadamard :

$$C_d = \frac{24 \frac{2}{3} + \tilde{\mu}}{Re \, 1 + \tilde{\mu}} \text{ avec } Re = \frac{\rho U_r(2a)}{\mu} \text{ le nombre de Reynolds et } \tilde{\mu} = \frac{\mu_v}{\mu}$$
 (38)

Ce résultat est cohérent puisque si $\tilde{\mu}$ tend vers 0, et donc que l'on considère le cas d'une bulle, on retrouve bien $C_d = 16/Re$ et si $\tilde{\mu}$ tend vers l'infini, on se retrouve dans le cas d'une sphère solide et on retrouve bien la solution asymptotique de Stokes $C_d = 24/Re$.

4.5 Etude numérique et analyse des différentes implémentations

Après une première vague d'essais mélangeant à la fois la source variable et la force de rappel dans laquelle je n'ai jamais réussi à analyser correctement les résultats, j'ai décidé d'analyser séparément chacune des implémentations pour essayer de les comprendre en détail individuellement avant de les mettre en compétition. Après de nombreux essais et de longues discussions avec mon tuteur et les chercheurs du CEA, je pense que nous avons compris en partie chacune des erreurs obtenues et que nous avons réussi à les lier. Mon stage aura donc permis de mettre en évidence ces erreurs, première étape nécessaire à la correction et à l'amélioration du code numérique.

4.5.1 • Lien entre les différentes implémentations

Suite à l'étude théorique faite précédemment, nous devrions être en mesure de lier certains termes de chaque essai. En effet, à l'état stationnaire, la pente ϵ de l'implémentation classique, le terme $\alpha \rho_v F_{NUM}$ de l'implémentation avec la force de rappel et la variation de terme source $S_f - S_0$ de l'écriture avec source variable devraient être, a priori, égaux (au signe près) : une inégalité serait alors synonyme d'erreur numérique dans l'une ou l'autre des méthodes.

Essai	Classique	Source Variable	Force de rappel
[Annexe B]	pente ϵ	$-(S_f - S_0)$	$-\alpha \rho_v F_{NUM}$
3 (17, 24bis et 25bis)	$-1,078*10^{-1}$	$-1,078*10^{-1}$	$-8,98*10^{-2}$
5 (17bis, 24ter et 25ter)	$-1,62*10^{-3}$	$-1,52*10^{-3}$	N.D
6 (17ter, 24quater et 25quater)	$-1,342*10^{-2}$	$-1,358*10^{-2}$	$-1,187*10^{-2}$

Table 3 – Mise en lien des différentes implémentations. Chaque ligne correspond des essais ayant les mêmes propriétés physiques : 3, 5 et 6 correspondent au numéro de l'essai témoin.



Au vu du tableau précédent, on remarque que le lien théorique attendu entre les différentes méthodes de calcul se retrouve bien dans les essais effectués. Cela nous permet de valider la théorie associée aux essais numériques et justifie les choix faits pour ces nouvelles implémentations.

Cependant, on observe une égalité imparfaite entre les termes : cela est possiblement du à de nouvelles erreurs numériques qui apparaissent selon la méthode utilisée. Comme nous le verrons ensuite, les essais avec la force de rappel entraînent une modification de la gravité dans le système, et par conséquent de la poussée d'Archimède dans la bulle : ce changement est donc à l'origine d'une erreur, non pas numérique mais physique. Nous allons ici nous intéresser plus précisément à l'implémentation avec source variable pour montrer l'apparition d'une nouvelle erreur numérique.

La théorie nous annonçait qu'à l'état stationnaire, on aurait une égalité entre 3 termes, avec ϵ la pente de l'essai classique similaire :

$$\frac{\omega^2}{2\lambda}(<\rho u>_f - <\rho u>_0) = -(S_f - S_0) = \epsilon$$
 (39)

Cependant, dans notre étude, nous avons remarqué une légère variation dans cette égalité comme le montre la table ci-dessous :

Essai	Source Variable	Source Variable	Variation
	$-(S_f - S_0)$	$\frac{\omega^2}{2\lambda}((\rho u)_f - (\rho u)_0)$	$-\Delta S - \frac{\omega^2}{2\lambda} \Delta(\rho u)$
3 (17, 24bis et 25bis)	$-1,078*10^{-1}$	$-1,102*10^{-1}$	$2,34*10^{-3}$
5 (17bis, 24ter et 25ter)	$-1,52*10^{-3}$	$-3,95*10^{-3}$	$2,43*10^{-3}$
6 (17ter, 24quater et 25quater)	$-1,358*10^{-2}$	$-1,591*10^{-2}$	$2,33*10^{-3}$

Table 4 – Mise en évidence de l'erreur numérique liée à la source variable

On observe donc bien que l'égalité n'est pas parfaitement respectée. On peut donc en conclure qu'une nouvelle erreur numérique ϵ_S apparaît dans l'implémentation de la source variable. On pourrait alors réécrire la dérivée du terme source en prenant en compte cette erreur comme nous l'avions fait pour l'erreur sur le calcul de $<\rho u>$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\omega^2 (\langle \rho u \rangle - \langle \rho u \rangle_0) - 2\lambda (S - S_0) + \epsilon_S$$
(40)

Il se peut que cette "erreur" corresponde uniquement à un terme résiduel de la dérivée en temps $\frac{\partial S}{\partial t}$. En effet, si l'état stationnaire n'est pas parfaitement atteint, ce terme n'est donc pas nulle et il serait donc normal que l'équation (39) ne soit pas vérifiée.

Néanmoins, quelque soit la méthode employée (classique, source variable ou force de rappel), la vitesse relative calculée dans le code ne correspond pas à la la vitesse théorique attendue. Même si les erreurs numériques mises en avant ici influencent le système et donc potentiellement la vitesse relative terminale, l'impact majeur ne provient pas de celles-ci mais de la présence de



bords dans notre domaine (voir section 4.5.2). Ensuite, d'autres paramètres aux contributions plus faibles peuvent également venir influencer notre vitesse relative comme la variation de gravité avec l'ajout de la force de rappel ou le calcul numérique des dérivées en temps.

4.5.2 • Erreur numérique liée à la périodicité du domaine

Même si globalement, il semble que la solution numérique reste assez éloignée de la solution analytique, en particulier lorsque l'on regarde la vitesse relative U_r , localement le constat n'est pas aussi criant. Comme on peut le voir sur les figures ci-dessous, à proximité de la bulle, ou de manière équivalente assez loin des bords, la solution numérique colle parfaitement avec la solution analytique, alors qu'elles tendent à s'éloigner au niveau des bords du domaine.

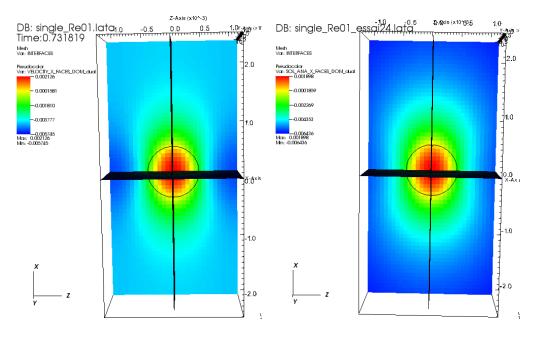


FIGURE 15 – u_x numérique (à gauche) et analytique (à droite) pour l'essai 24 (la gravité est selon $-e_x$) via le logiciel Visit

Cette différence est particulièrement due aux conditions aux limites appliquées au système : en effet, pour que le système reste périodique, le code ajoute des conditions de dérivée nulle aux différentes grandeurs aux points équidistants des différentes bulles, réelles et fantômes pour le front-tracking. Cela est d'autant plus visible sur les graphiques de la figure 16, représentant une coupe linéaire de la vitesse u_x selon x en (y, z) = (0, 0).

On observe alors bien qu'à proximité de l'origine (0,0,0), et donc au niveau de la bulle, les solutions numériques et analytiques sont très proches mais que celles-ci s'éloignent lorsque l'on se rapproche des points équidistants de 2 bulles. On remarque alors, sur les solutions numériques, la dérivée nulle imposée par le choix de la condition limite périodique les oblige à se stabiliser à une vitesse relative plus faible : cette condition supplémentaire modifie la physique des essais ce qui justifie donc les différences obtenues par rapport au développement théorique en milieu



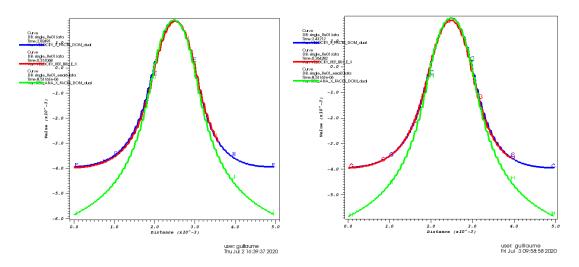


FIGURE 16 – Coupe linéaire de u_x en (y,z)=(0,0) pour les essais 3 (à gauche) et 6 (à droite) : les essais 17 et 17 ter en rouge (source variable et translaté en x=0), les essais 24 bis et 24 quater en bleu (source constante avec force de rappel) et la solution analytique (en vert)

infini. On remarque cependant que les différences ne sont pas globales mais bien localisées à distance des bulles.

En impactant la physique du problème traité, la condition limite modifie donc la vitesse relative globale entre la bulle et le liquide. Le domaine n'étant pas assez grand, le liquide n'a pas le temps d'atteindre sa vitesse terminale dictée par la théorie. En effet, la demi-longueur L/2 de notre domaine ne mesure que 5 fois le rayon de la bulle : si nous voulions atteindre 95\% de la vitesse relative théorique au bord du domaine, il faudrait un domaine 5 fois plus grand par direction que celui que nous avons actuellement, soit un maillage 125 fois plus grand. En effet, on a:

$$\left| \frac{V_x(x, y = 0, z = 0) - V_{Hadamard}}{V_{Hadamard}} \right| = \left| \frac{-a^3}{2r^3} \frac{\tilde{\mu}}{1 + \tilde{\mu}} + \frac{a}{2r} \frac{2 + 3\tilde{\mu}}{1 + \tilde{\mu}} \right|$$

$$\left| \frac{V_x(x, y = 0, z = 0) - V_{Hadamard}}{V_{Hadamard}} \right| < 0,05 \iff \boxed{x > 25a}$$

$$(42)$$

$$\left| \frac{V_x(x, y = 0, z = 0) - V_{Hadamard}}{V_{Hadamard}} \right| < 0, 05 \iff \boxed{x > 25a}$$
 (42)

La présence de ces conditions aux bords du domaine nous oblige donc à ajouter une correction à la solution analytique : cela nous permettra de prédire la vitesse attendue $V_{Hadamard,corr}$ et de pouvoir étudier d'autres impacts sans les mélanger avec l'impact des bords du domaine.

Essai	$L_x/2a$	$V_{Hadamard}$	V_{NUM}	Correction $V_{NUM}/V_{Hadamard}$
2, 5 ou 8	5	$2,46*10^{-3}$	$1,33*10^{-3}$	0,5407
3, 6 ou 9	5	$7,78*10^{-3}$	$4,10*10^{-3}$	0,5270
6 (ou 28)	10	$7,78*10^{-3}$	$5,88*10^{-3}$	0,7558

Table 5 – Correction à apporter à la solution analytique



Les mesures effectuées pour le tableau 5 ont été faites sur la composante U_x de la vitesse et ont été mesurées aux extrémités de l'axe vertical x en (y,z)=(0,0). L'étude effectuée ne porte que sur cette composante et il serait intéressant d'effectuer, par la suite, la même étude pour les autres composantes et les autres directions.

Cette correction n'est, a priori, valable que pour un jeu de paramètres précis, dépendant de la taille du domaine et de la bulle : il faudra donc faire attention en utilisant la correction. Comme nous pouvons le voir dans le tableau ci-dessus, si le rapport $L_x/2a$ augmente, dans la direction verticale, en conservant les proportions du domaine, la correction à apporter est plus faible : la condition périodique étant plus lointaine, le liquide a d'avantage de temps pour se stabiliser en suivant la théorie. On le voit bien sur la figure 17 où la taille du domaine a été modifiée : plus le domaine est grand, plus les résultats numériques restent proches de la solution analytique.

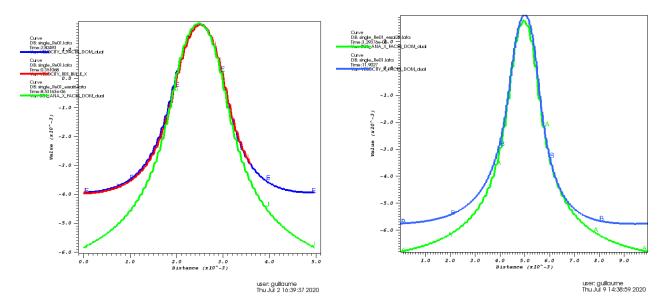


FIGURE 17 – Coupe linéaire de u_x en (y, z) = (0, 0): l'essai 17ter en rouge (source variable et translaté en x = 0), les essais 28 et 24quater en bleu (source constante avec force de rappel) et la solution analytique (en vert). Le domaine de l'essai 28 (à droite) est 2 fois plus grand dans chaque direction.

Sur les essais, on peut remarquer que les courbes ne sont pas toujours parfaitement superposables. Cela est dû en particulier aux approximations faites lors des coupes manuelles et à la différence de maillage entre les essais (certains étaient lancés depuis ma machine personnelle moins puissante, donc je me devais de réduire le nombre de mailles).

Finalement, en comparaison de l'écart induit par le bord du domaine, l'erreur entre les solutions numériques et les solutions analytiques que l'on peut mesurer à proximité de la bulle sont plutôt faibles. Cela signifie donc que l'erreur de conservation de quantité de mouvement a un impact assez minime sur les écoulements étudiés. Ce n'est pas pour autant qu'il faut les



ignorer et il est donc important d'essayer de comprendre leur origine comme nous allons le faire par la suite : en effet, même les erreurs les plus minimes méritent d'être corrigées.

4.5.3 ● Modification de la gravité par l'ajout de la force de rappel

L'erreur numérique liée à la périodicité du domaine n'est pas la seule erreur importante qui existe dans le code TrioIJK. En effet, l'ajout de la force de rappel F_k apporte, si elle ne tend pas vers une moyenne nulle au stationnaire, une modification sur la physique du système, qui peut, comme on le verra par la suite, modifier grandement le comportement du système.

De par sa localisation uniquement au sein de la bulle, la force de rappel peut facilement se rapprocher d'une poussée d'Archimède artificielle et donc d'une gravité additionnelle. Classiquement, une force dite de poussée d'Archimède dans un milieu tel que le notre, avec $\Delta \rho$ la différence de densité entre le liquide et la bulle et g la gravité, s'écrit :

$$F_{poussee} = \Delta \rho g \tag{43}$$

En notant g^* la gravité additionnelle apportée par la force de rappel, on peut montrer, au vu des dimensions spécifiques de chacun des termes dans le code, que

$$g^* = \frac{F_{NUM}\rho_v}{\Delta\rho} \tag{44}$$

Finalement, l'ajout de la force de rappel dans le milieu revient à étudier un système dans lequel la gravité vaut $g+g^*$. En complément de l'effet de la taille du domaine, cet ajout permet de justifier les différences de vitesse que l'on trouve entre la solution analytique d'Hadamard et la solution numérique. En remplaçant dans la correction précédente de la solution d'Hadamard le terme de gravité g par le nouveau terme $g_{NEW}=g+g^*$, l'analyse théorique valide les résultats numériques obtenues en nous proposant une nouvelle vitesse V_{NEW} :

Essai	g	$V_{Hadamard}$	$V_{Hadamard,corr}$	F_{NUM}	g_{NEW}	V_{NEW}	V_{NUM}
14	0,981	$7,78*10^{-3}$	$4,10*10^{-3}$	2	1,143	$4,78*10^{-3}$	$5,00*10^{-3}$
18quater	0,981	$7,78*10^{-3}$	$4,10*10^{-3}$	12	1,950	$8,16*10^{-3}$	$8,60*10^{-3}$
22bis	0,981	$7,78*10^{-3}$	$4,10*10^{-3}$	2,1	1,151	$4,81*10^{-3}$	$5,00*10^{-3}$
22ter	0,981	$7,78*10^{-3}$	$4,10*10^{-3}$	16	2,273	$9,51*10^{-3}$	$1,07*10^{-2}$
24bis	0,981	$7,78*10^{-3}$	$4,10*10^{-3}$	0,1	0,986	$4,12*10^{-3}$	$4,11*10^{-3}$

Table 6 – Gravité additionnelle et Vitesse attendue

Comme on le voit dans la table 6, la valeur de F_{NUM} à l'état stationnaire n'est pas nulle, ce qui explique la modification de la gravité comme expliquée précédemment. Elle permet ainsi de compenser l'erreur ϵ commise au niveau de la conservation de la quantité de matière. Finalement, cela revient donc à résoudre un problème différent que celui attendu au départ, avec une gravité modifiée dont la valeur vaut désormais $g_{NEW} = g + g^*$ tout en conservant le gradient de pression moyen $S = \rho_m g$.



4.5.4 • Erreur numérique liées aux dérivées temporelles

Vu que deux dérivées en temps, à savoir celle de ρu et celle de S, provoquent des erreurs numériques, respectivement ϵ et ϵ_S , il est possible que l'amélioration à apporter dans le code pour corriger ces erreurs se trouve dans l'approximation numérique des dérivées temporelles par le schéma de RK3. J'ai commencé à étudier cette piste sur la fin de mon stage en me basant sur deux paramètres du code : le type de schéma de convection et le pas de temps dt. A cause du peu de temps restant sur la fin de mon stage, je n'ai pas eu l'occasion d'étudier en profondeur ces paramètres mais j'ai néanmoins obtenu quelques pistes intéressantes qui mériteraient d'être approfondies dans des études ultérieures.

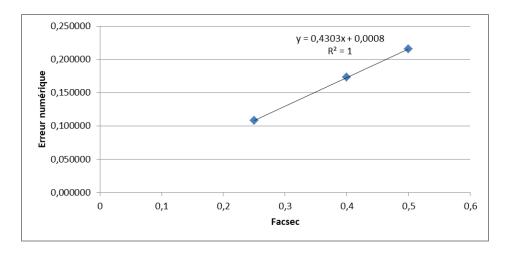


FIGURE 18 – Erreur numérique ϵ moyenné selon les méthodes (en valeur absolue) selon la valeur du facsec (proportionnelle au pas de temps dt) pour les paramètres de l'essai 3 pour un schéma en RK3.

Après une dernière vague d'essais, l'erreur mesurée ϵ semble dépendre linéairement du pas de temps via la valeur du facsec, coefficient multiplicatif du pas de temps calculé numériquement pour maintenir la stabilité. A priori, l'erreur numérique ϵ tendrait vers 0 si le pas de temps tendait lui aussi vers 0. Avec ces résultats, on peut donc supposer que le calcul des dérivées en temps crée une erreur numérique. Néanmoins, cette brève étude mériterait un approfondissement : en effet, afin de valider cette hypothèse, il faudrait réaliser d'avantage d'essais.

Enfin, une comparaison rapide entre deux schémas temporels, à savoir RK3 et Euler explicite, montre qu'a priori, le schéma n'impacte pas l'erreur numérique. En effet, sur 6 comparaisons effectuées, les erreurs ϵ ou ϵ_S restaient quasiment égales : celles-ci ne variaient que de l'ordre de 1% et donc ne permettaient pas de voir un réel impact. Cependant, il pourrait également être intéressant de relancer une étude sur ces schémas pour confirmer ou infirmer mes premières impressions.



4.5.5 • Superposition de la source variable et de la force de rappel

Jusqu'à présent, l'étude portait exclusivement sur la source variable ou sur la force de rappel sans essayer de mettre en concurrence les deux méthodes de calcul. Dans cette section, nous allons alors superposer notre étude et montrer que le cumul des deux solutions peut conduire à un comportement non souhaitable.

Comme on peut le voir sur certains essais, en particulier sur l'essai 22 ter dans la table 6, la vitesse calculée numériquement est assez loin de la vitesse d'Hadamard corrigée suite aux erreurs liées au bord du domaine et à la gravité additionnelle. Cela est lié à une autre erreur plus physique : la superposition des deux nouvelles implémentations, à savoir du terme source variable et de la force de rappel.

A priori, vu que la source variable nous permet de stabiliser la quantité de mouvement et que la force de rappel nous place dans un repère d'étude favorable à l'analyse, il semblerait intéressant d'essayer de fusionner ces deux implémentations. Les équations d'évolution se verraient alors modifiées de sorte que

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P^{NUM} - S_0 + S + \nabla (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})) - \kappa \sigma \mathbf{n} \delta^i + \rho F_{NUM} \chi_{bulle}$$
(45)

ce qui se réécrit, en moyennant sur le domaine :

$$\frac{\partial \langle \rho \mathbf{u} \rangle}{\partial t} = \alpha \rho_v F_{NUM} + (S - S_0) + \epsilon$$
(46)

Néanmoins, ici, ce n'est pas cette erreur qui va nous intéresser. En effet, même si on observe que ϵ varie selon les essais entre 0,01 et 2, un autre effet m'a davantage interpellé : selon le choix du paramètre $(\rho u)_0$ dans la dérivée du terme source variable, la vitesse relative obtenue à l'équilibre change également. Cela pose donc un problème au niveau de la physique : théoriquement, la vitesse relative devrait être dictée uniquement par les paramètres physiques et non pas par les paramètres numériques modifiés ici.

Essai	$<\rho u>_0$	$V_{Hadamard}$	U_R	ϵ
26	$-8,96*10^{0}$	$7,78*10^{-3}$	$7,7*10^{-3}$	1,51
14	$-5,76*10^{0}$	$7,78*10^{-3}$	$5*10^{-3}$	0,57
14bis	$-1,04*10^{1}$	$7,78*10^{-3}$	$8,8*10^{-3}$	2,54
14ter	$-1,27*10^{1}$	$7,78*10^{-3}$	$1,05*10^{-2}$	N.D
14quater	$-3,45*10^{0}$	$7,78*10^{-3}$	$3,2*10^{-3}$	N.D
14cinq	$-4,72*10^{0}$	$7,78*10^{-3}$	$4,15*10^{-3}$	-0,47

TABLE 7 – Variation de U_R en fonction du terme $<\rho u>_0$ sur les variations de l'essai 6. Tous les essais ci-dessus ont les mêmes paramètres physiques, seule la valeur de $<\rho u>_0$ change.



Contrairement à précédemment, la force F_{rappel} et la variation de S, $S_f - S_0$, ne tendent pas vers des valeurs proches de 0 à l'état stationnaire. Au contraire, ces deux valeurs restent à des valeurs élevées tout en se compensant mutuellement pour que la somme des deux reste proche de 0. Le problème provient en partie de cette non décroissance : vu que la force de rappel modifie numériquement la gravité dans le système, on se rend compte qu'une valeur trop importante de F_{rappel} va impacter fortement la physique.

Même si ce cas reste encore très obscur pour moi, nous avons l'impression que l'ajout à la fois de la source variable S et de la force de rappel F_{rappel} rajoute trop de paramètres d'un coup dans le système. En effet, au vu de l'équation (46), on voit qu'il y a un degré de liberté en trop, et donc qu'il peut y avoir une infinité de solutions conduisant à la même erreur ϵ . Autrement dit, on introduit un mécanisme de compensation entre une force de rappel non nulle et un écart entre S et S_0 . Nous ne savons plus alors ce que l'on contrôle réellement : au lieu de contrôler les paramètres physiques pour modifier la dynamique de l'essai, on a l'impression de contrôler la dynamique de la bulle via les paramètres de la source variable. L'équilibre obtenue est alors dicté par la loi d'évolution choisie pour S et non pas par la physique. Finalement, alors que l'on souhaite contrôler des paramètres telles que μ , ρ ou g pour obtenir la vitesse relative U_r , on se retrouve dans la situation inverse en contrôlant U_r pour atteindre une gravité g finale. Néanmoins, ces conclusions restent très flous et il faudrait étudier d'avantage ces essais pour en tirer de vrais conclusions.



CONCLUSION

Lorsqu'il existe une ou plusieurs erreurs dans un programme, il est nécessaire de suivre un algorithme précis de correction pour ne pas oublier des étapes. J'ai eu l'occasion au cours de mon stage d'en réaliser les premières étapes et ainsi d'ouvrir la voie à de futures améliorations sur le code Trio.

Tout d'abord, par le biais de nombreux essais dans des conditions parfois très variables, j'ai mis en évidence le problème : la non conservation de la quantité de mouvement dans les essais les plus simples et une égalité non stricte dans les essais plus avancés. Une étude théorique m'a permis d'exprimer les résultats attendus qui se sont alors montrés assez loin de la réalité des essais numériques. Il était alors important d'essayer de résoudre ces problèmes.

Pour cela, il a fallu que je comprenne précisément l'origine de ces problèmes, afin de savoir si ceux-ci provenaient de formulations numériques, d'approximations faites dans le code ou directement de choix de paramètres de simulation (conditions aux limites, etc...). Finalement, la mise en comparaison de la théorie avec le numérique a permis d'écarter le code erroné : en effet, les essais suivaient globalement la théorie avec des erreurs assez localisées. Les écarts marquants entre la solution analytique et la solution théorique provenaient principalement de la présence de conditions limites périodiques supplémentaires dans nos essais. Avec un rapport de 5 entre la taille de notre domaine et la taille de la bulle, l'erreur obtenue était de 50% et elle diminuait si le rapport augmentait : pour atteindre une erreur négligeable de l'ordre de 5%, il faudrait un rapport de 25, soit un domaine 5 fois plus important qu'actuellement.

En comparaison, l'erreur numérique de conservation de la quantité de mouvement restait très faible dans le régime de Stokes. Nous disposons alors de deux options pour essayer de la corriger globalement : soit par l'évolution en temps de la source S_f représentant le gradient de pression moyen, soit par l'ajout d'une force d'Archimède artificielle appliquée uniquement à l'intérieur de la bulle. Dans le cas de la force, la gravité sera légèrement modifiée : il sera donc important de corriger la valeur initiale de g dans l'essai pour qu'à l'état stationnaire, la force vienne compenser cette variation. Pour l'option avec source globale, la compréhension a été plus compliquée : néanmoins, j'ai su mettre en évidence l'existence d'une nouvelle erreur ϵ_S dont il faudra étudier les dépendances par la suite. Par contre, si nous souhaitons cumuler ces deux possibilités, il faudra choisir un asservissement très particulier : en les cumulant, on rajoute dans notre problème un degré de liberté et il faudra donc choisir un asservissement adapté pour pouvoir étudier la situation voulue.

Enfin, pour terminer l'étude que j'ai commencée, il serait important de trouver une manière de corriger directement le code. Mon stage étant trop court, je n'ai pas eu l'occasion de débuter cette partie mais le CEA a déjà imaginé un post-doctorat pour étudier ce problème. Ce n'est donc plus qu'une question de temps pour que cette erreur soit rapidement corrigée.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] Antoine du Cluzeau, Thèse, Modélisation physique de la dynamique des écoulements à bulles par remontée d'échelle à partir de simulations fines., soutenue le 30 septembre 2019.
- [2] Antoine Bittard du Cluzeau, Rapport de stage, *Turbulence dans les écoulements diphasiques à bulles*, Mars 2016 Septembre 2016.
- [3] Grétar Tryggvason, Ruben Scardovelli et Stéphane Zaleski, Direct Numerical Simulations of Gas-Liquid Multiphase Flows, 2010.
- [4] Guillaume Bois et Benoit Mathieu, Présentation, Some hints on the front-tracking method and some applications.
- [5] Benoit Mathieu, Thèse, Études physiques, expérimentale et numérique des mécanismes de base intervenant dans les écoulements diphasiques en micro-fluidique., soutenue le 12 novembre 2003.
- [6] Morregia, Trainée d'une sphère solide dans un fluide, Cours de PSI, Chapitre 3, 2013-2014.
- [7] Graham B. Wallis, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 1, pp. 491-511, The terminal Speed of single drops or bubbles in an infinite medium, 1974.
- [8] Dominique Legendre et Roberto Zenit, On the deformation of gas bubbles in liquids., 2012.
- [9] E. Loth, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 34, pp. 523-546, Quasi-steady shape and drag of deformable bubbles and drops, 2008.
- [10] K. Bäumler, Int. J. Chemicl Engineering Science, Vol. 66, pp. 426-439, Drop rise velocities and fluid dynamic behavior in standard test systems for liquid/liquid extraction experimental and numerical investigations, 2011.
- [11] Kjetil Ellingsen et Frédéric Risso, On the rise of an ellipsoidal bubble in water : oscillatory paths and liquid-induced velocity., Révisé en 2001.
- [12] Patricia Ern et Frédéric Risso, Wake-Induced Oscillatory Paths of Bodies Freely Rising or Falling in Fluids., 2012.
- [13] Hadamard, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Séance du 19 juin 1911..
- [14] Guillaume Bois, Rapport d'étude, Description of the momentum forcing in periodic boxes with Front-Tracking simulations, 3 decembre 2019.



- [15] Guillaume Bois, Rapport d'étude, Report on upscaling and comparison of momentum transfer models, 8 juillet 2015.
 - [16] Christophe Morel, Springer, Mathematical Modeling of Disperse Two-Phase Flows, 2015.
 - [17] Nedderman, Stokes' law for solid speres and sperical bubbles, 9 février 2011, http://thermopedia.com/content/1157/

Δ

ANNEXE A : ÉTUDE THÉORIQUE DES VITESSES D'UNE BULLE DANS LE RÉGIME DE STOKES

A.1 Données du problème

La solution présentée ci-dessous est dérivée de la solution d'Hadamard de 1911 [13]. Elle consiste en l'étude du mouvement d'une petite bulle visqueuse dans un fluide visqueux. Les conditions ci-dessous doivent alors être respectées [16]:

- Le système est à l'état stationnaire et on se place dans le repère de la bulle.
- Les deux phases sont incompressibles.
- Les termes d'inertie peuvent être négligés ($Re \ll 1$).
- Les deux fluides sont des fluides newtoniens avec des paramètres constants.
- Il n'y a pas de changement de phase.
- Le courant est axisymmetrique autour de l'axe z.

On peut alors définir les différents paramètres du problème :

- a : le rayon de la bulle
- κ : le rayon de courbure de la bulle $\kappa = \frac{2}{a}$
- μ et μ_v : les viscosités du liquide et de la bulle
- ρ et ρ_v : les densités du fluide et de la bulle
- \bullet g : le terme de gravité
- $\bullet~U_R$: la vitesse relative à l'infini entre la bulle et le liquide environnant.

A.2 MISE EN ÉQUATION

En nous plaçant dans le régime de Stokes à l'état stationnaire, l'équation de Navier Stokes se résume à :

$$\nabla P = \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \kappa \sigma \mathbf{n} \delta^i - \rho g \mathbf{e} \mathbf{z} \tag{47}$$

où δ^i permet de représenter la frontière entre la bulle et le liquide.

On définit également une pression artificielle, notée respectivement Π et Π_v dans le liquide et dans la bulle telle que $\Pi = P + \rho gz$ et $\Pi_v = P_v + \rho_v gz$. L'équation (1) devient alors

$$\nabla \Pi = \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \kappa \sigma \mathbf{n} \delta^i \tag{48}$$

Il est donc classique de définir deux fonctions de courant, une pour chaque milieu (bulle et liquide) vérifiant :

$$D^2\psi = D^2\psi_v = 0 \tag{49}$$

οù

$$D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin(\theta)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$
 (50)

On peut donc définir les vitesses R et Θ suivant la direction du rayon vecteur et la direction perpendiculaire dans le fluide extérieur :

$$R = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \Theta = \frac{-1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$
 (51)

Par analogie, on définit ces mêmes vitesses dans la bulle :

$$R_v = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta}, \Theta_v = \frac{-1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \psi_v}{\partial r}$$
 (52)

A.3 Conditions aux limites

Plusieurs conditions aux limites vont exister dans notre cas. On suppose que la bulle reste sphérique tout au long de l'expérience ($Eo \ll 1$). On observe donc les conditions suivantes :

ullet Des conditions d'adhésion en r=a (au bord de la bulle) sachant qu'il n'y a pas d'échange de matière dans le milieu :

$$R(r=a) = R_v(r=a) = 0 (53)$$

$$\Theta(r=a) = \Theta_v(r=a) \tag{54}$$

• Un saut dans la direction normale à l'interface de la transmission de l'effort radial en r=a:

$$-(p+\kappa\sigma) + 2\mu \frac{\partial R}{\partial r} = -p_v + 2\mu_v \frac{\partial R_v}{\partial r} \text{ soit } \Pi - \Pi_v = -\kappa\sigma + 2(\mu \frac{\partial R}{\partial r} - \mu_v \frac{\partial R_v}{\partial r}) + \Delta\rho gz$$
 (55)

• Une égalité de la transmission de l'effort tangent en r=a :

$$\mu(r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\Theta}{r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial \theta}) = \mu_v(r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\Theta_v}{r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial R_v}{\partial \theta})$$
 (56)

• Une vitesse à l'infini telle que $u_z = -U_R$, $u_x = u_y = 0$ soit

$$R = -\cos(\theta)U_R \text{ et } \Theta = \sin(\theta)U_R \tag{57}$$

Ces différentes conditions nous poussent à définir ψ (et ψ_v) sous la forme de $f(r) * \sin^2(\theta)$. En injectant cette solution dans l'équation de définition de ψ et ψ_v , on trouve alors : $f(r) = (\frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4)$.

Dans notre cas, afin de respecter les vitesses finies en 0 et en l'infini, on peut d'ores et déja dire que $D = A_v = B_v = 0$. On peut donc écrire :

$$\psi = \sin^2(\theta)(\frac{A}{r} + Br + Cr^2) \tag{58}$$

$$\psi_v = \sin^2(\theta)(C_v r^2 + D_v r^4) \tag{59}$$

On obtient ainsi

$$\begin{cases} R = \frac{2\cos(\theta)}{r^2} \left(\frac{A}{r} + Br + Cr^2\right) \\ \Theta = \frac{-\sin(\theta)}{r} \left(\frac{-A}{r^2} + B + 2Cr\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_v = 2\cos(\theta)(C_v + D_v r^2) \\ \Theta_v = -2\sin(\theta)(C_v + 2D_v r^2) \end{cases}$$

A.4 CALCUL DE LA PRESSION

Pour calculer la pression, on résout la formule de Stokes en intégrant les expressions de ψ et de ψ_v . On trouve alors :

$$\begin{cases}
-d(\Pi) &= \mu \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[r \frac{\partial (D\psi)}{\partial r} d\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial (D\psi)}{\partial \theta} dr \right] \\
-d(\Pi_v) &= \mu_v \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[r \frac{\partial (D\psi_v)}{\partial r} d\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial (D\psi_v)}{\partial \theta} dr \right]
\end{cases}$$

d'où

$$p = (-\rho gr + \frac{2\mu B}{r^2})\cos(\theta) + p_0 \text{ soit } \Pi = \frac{2\mu B}{r^2}\cos(\theta) + p_0$$
 (60)

$$p_v = (-\rho_v gr + 20D_v \mu_v r)\cos(\theta) + p_{v,0} \text{ soit } \Pi_v = 20D_v \mu_v r\cos(\theta) + p_{v,0}$$
(61)

En prenant en compte le saut de contrainte aux interfaces, on peut donner aux constantes additives les valeurs : $p_0 + \kappa \sigma = p_{v,0}$.

A.5 Valeur des constantes

Les conditions aux limites nous donnent un système d'équation à résoudre pour déterminer les constantes de ψ , de ψ_v et de U_r .

$$\begin{cases} \frac{A}{a} + Ba + Ca^2 &= 0\\ C_v a^2 + D_v a^4 &= 0\\ \frac{A}{a^2} - B - 2Ca &= -2(C_v a + 2D_v a^3)\\ \Delta \rho g a &= -12D_v \mu_v a + \mu(\frac{12A}{a^4} + \frac{6B}{a^2})\\ \frac{6\mu A}{a^3} &= 6\mu_v D_v a^2\\ 2C &= U_R \end{cases}$$

En résolvant le système, on obtient :

$$\begin{cases} A = -\frac{a^{3}U_{r}}{4} \frac{\tilde{\mu}}{1+\tilde{\mu}} \\ B = \frac{aU_{r}}{4} \frac{2+3\tilde{\mu}}{1+\tilde{\mu}} \\ C = -\frac{U_{R}}{2} \\ C_{v} = \frac{U_{r}}{4} \frac{1}{1+\tilde{\mu}} \\ D_{v} = -\frac{U_{r}}{4a^{2}} \frac{1}{1+\tilde{\mu}} \\ U_{r} = \frac{2}{9} \frac{a^{2}}{\mu} \Delta \rho g \frac{(\tilde{\mu}+1)}{(\tilde{\mu}+\frac{2}{3})} \end{cases}$$

On a posé $\Delta \rho = \rho - \rho_v$ et $\tilde{\mu} = \frac{\mu_v}{\mu}$

Ces résultats sont cohérents puisque si $\rho = \rho_v$ et donc $U_R = 0$, on a $A = B = C = C_v = D_v = 0$ puisque la bulle reste stationnaire dans le milieu.

A.6 CALCUL DU COEFFICIENT DE TRAÎNÉE C_d

Pour mesurer le coefficient de traînée, on ne s'intéresse qu'à la composante des forces dans la direction du mouvement, c'est à dire selon la composante e_z : nous allons donc projeter l'ensemble de nos forces selon cette direction. Pour mesurer la force de traînée, il est important de s'intéresser aux forces visqueuses, qui se décomposent selon la composante normale et la composante tangentielle, et aux forces de pression.

A.6.1 • LA COMPOSANTE NORMALE DES FORCES VISQUEUSES σ_n

Par définition [17], on a, vu qu'on mesure les forces de pression à part :

$$\sigma_n = 2\mu \frac{\partial R}{\partial r} \tag{62}$$

A. Annexe A : Étude théorique des vitesses d'une bulle dans le régime de Stokes

On trouve alors que

$$\sigma_n = -4\mu \left(\frac{3A}{a^4} + \frac{B}{a^2}\right)\cos(\theta) \tag{63}$$

On peut alors intégrer cette expression sur l'ensemble de la bulle :

$$F_{f,z} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (\sigma_n \cos(\theta)) a^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$$
 (64)

$$F_{f,z} = \frac{4\pi}{3}a^2(-4\mu(\frac{3A}{a^4} + \frac{B}{a^2})) = -16\pi\mu\frac{A}{a^2} - \frac{16\pi}{3}\mu B$$
 (65)

$$F_{f,z} = -\frac{8\pi}{3}\mu a U_r \frac{1}{1+\tilde{\mu}}$$

$$\tag{66}$$

A.6.2 • La composante tangentielle des forces visqueuses σ_{θ}

Par définition [17], on a :

$$\sigma_{\theta} = \mu(r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\Theta}{r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial \theta}) = \mu_{v}(r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\Theta_{v}}{r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial R_{v}}{\partial \theta})$$
(67)

On trouve alors que

$$\sigma_{\theta} = -\frac{6A}{a^4}\mu\sin(\theta) = -6\mu_v D_v a\sin(\theta) \tag{68}$$

On peut alors intégrer cette expression sur l'ensemble de la bulle :

$$F_{s,z} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (-\sigma_{\theta} \sin(\theta)) a^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$$
 (69)

$$F_{s,z} = 16\pi \mu_v D_v a^3 \tag{70}$$

$$F_{s,z} = 16\pi \mu_v D_v a^3$$

$$F_{s,z} = -4\pi \mu a U_r \frac{\tilde{\mu}}{1 + \tilde{\mu}}$$

$$(70)$$

A.6.3 • Les forces de pression

On utilise la pression numérique II pour ne pas prendre en compte la poussée d'Archimède dans la force de traînée. On a donc par définition :

$$F_{p,z} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} -\Pi \cos(\theta) a^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$$
 (72)

ce qui donne

$$F_{p,z} = -\frac{8\pi}{3}\mu B \tag{73}$$

$$F_{p,z} = -\frac{4\pi}{3} \frac{a\mu U_r}{2} \frac{2 + 3\tilde{\mu}}{1 + \tilde{\mu}}$$
 (74)

A.6.4 • Calcul de C_d

La force de traînée F_d s'écrit : $F_d = \frac{1}{2}\pi\rho a^2 U_r^2$ avec C_d le coefficient de traînée. De plus, cette force regroupe les forces visqueuses et de pression. On a donc

$$F_d = \frac{1}{2}\pi\rho a^2 U_r^2 C_d = F_{s,z} + F_{f,z} + F_{p,z}$$
(75)

$$F_d = -6\pi U_r a \mu \frac{\frac{2}{3} + \tilde{\mu}}{1 + \tilde{\mu}} \tag{76}$$

Ainsi, on obtient

$$C_d = \frac{|F_d|}{\frac{1}{2}\pi\rho U_r^2 a^2} \tag{77}$$

$$C_d = \frac{24}{Re} \frac{\frac{2}{3} + \tilde{\mu}}{1 + \tilde{\mu}} \tag{78}$$

avec $Re = \frac{\rho U_r(2a)}{\mu}$ le nombre de Reynolds.

A.7 Translation dans le repère cartésien

Afin de pouvoir étudier les problèmes de notre programme de front-tracking, il est important de translater les expressions des vitesses et des pressions dans le repère cartésien.

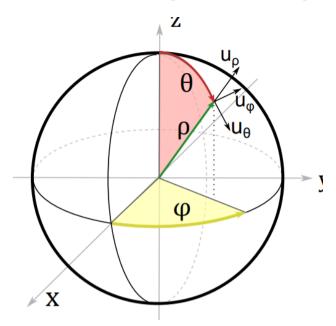


FIGURE 19 – Repère sphérique dans le repère cartésien

A.7.1 • Expression des vitesses en coordonnées cartésiennes

Comme nous pouvons le voir sur la figure et sachant que $u_\phi=0$ on a :

$$\begin{cases} u_x &= R\sin(\theta)\cos(\phi) + \Theta\cos(\theta)\cos(\phi) \\ u_y &= R\sin(\theta)\sin(\phi) + \Theta\cos(\theta)\sin(\phi) \\ u_z &= R\cos(\theta) - \Theta\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{x,v} &= R_v\sin(\theta)\cos(\phi) + \Theta_v\cos(\theta)\cos(\phi) \\ u_{y,v} &= R_v\sin(\theta)\sin(\phi) + \Theta_v\cos(\theta)\sin(\phi) \\ u_{z,v} &= R_v\cos(\theta) - \Theta_v\sin(\theta) \end{cases}$$

De plus, les relations entre les coordonnées sphériques et les coordonnées cartésiennes sont les suivantes :

$$\begin{cases} z = r\cos(\theta) \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \phi = \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}) \text{ si } y > 0 \\ \phi = 2\pi - \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}) \text{ si } y < 0 \end{cases}$$

De ce fait, on a les résultats suivants, en posant $t = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\begin{cases}
\cos(\theta) &= z/r \\
\sin(\theta) &= t/r \\
\cos(\phi) &= x/t \\
\sin(\phi) &= y/t
\end{cases}$$

On trouve donc les valeurs suivantes :

$$u_x = \frac{3}{r^5}Azx + \frac{B}{r^3}zx , u_y = \frac{3}{r^5}Azy + \frac{B}{r^3}zy \text{ et } u_z = \frac{3}{r^5}Az^2 - \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r^3}z^2 + \frac{B}{r} + 2C$$
 (79)

$$u_{x,v} = -2D_v xz$$
, $u_{y,v} = -2D_v yz$ et $u_{z,v} = 2C_v + 2D_v r^2 + 2t^2 D_v$ (80)

A.7.2 • Expression de la pression dans le repère cartésien

D'après l'étude faite précédemment, on a

$$\begin{cases} p = (-\rho gr + \frac{2\mu B}{r^2})\cos(\theta) + p_0 \\ p_v = (-\rho_v gr + 20D\mu_v r)\cos(\theta) + p_{v,0} \end{cases}$$

Ainsi, on peut donc écrire, en coordonnées cartésiennes :

$$p = -\rho gz + 2\mu B \frac{z}{r^3} + p_0 \text{ et } p_v = -\rho_v gz + 20D\mu_v z + p_{0,v}$$
(81)



B ANNEXE B : TABLEAU DE SUIVI DES ESSAIS RÉALISÉS

20cinq (Re=0,527 , Eo=0,1)	20quater (Re=0,1, Eo=0,1)	20ter (Re = 1, Eo=0,01)	20 (Re=1 , Eo=0,1)	19cinq (Re=0,527 , Eo=0,1)	19quater (Re=0,1, Eo=0,1)	19ter (Re = 1, Eo=0,01)	19bis (Re=0,1, Eo=0,01)	19 (Re=1 , Eo=0,1)	18six (Re=0,527, Eo=0,1)	18cing (Re=0,527, E0=0,1)	10-1 (D-0-127 F-0-1)	18guater (Re=1 16 Fo=0.1)	18ter (Re=1,16, Eo=0,1)	18bis (Re=0,643, Eo=0,1)	18 (Re=0,643, Eo=0,1)	1/quater (Re=0,52/, Eo=0,1	17 (No. 1) E0 0/1/	17ter (Re=1, Eo=0.1)	17bis (Re=0,1, Eo=0,1)	17 (Re=1, Eo=0,01)	16six (Re=0,527, Eo=0,019)	16cinq (Re=1, Eo=0,0038)	16quater (Re=1, Eo=0,038)	16ter (Re=1, Eo=0,38)	16bis (Re=1, E0=0,19)	10 (Ne-1, E0-0,019)	16 (Bo-1 Fo-0 010)	15sept (Re=1 6 Fo=1)	15six (Re=0 491 Fo=1)	15cing (Re=2,96 , Eo=0,1)	15quater (Re=0,686, Eo=0,:	15ter (Re=0,37 , Eo=0,01)	15bis (Re=1,85, Eo=0,01)	15 (Re=0,57 , Eo=0,01)	14sept (Re=1, Eo=0,1)	14six (Re=0,527, Eo=0,1)	14cinq (Re=0,527, Eo=0,1)	14quater (Re=0,386, Eo=0,1	14ter (Re=1,41, Eo=0,1)	14bis (Re=1,16, Eo=0,1)	14 (Re=0,643, Eo=0,1)	12ter (Re=0,1, Eo=0,1)	12bis (Re=0,1, Eo=0,01)	12 (Re=0,1, Eo=0,001)	11sept (Re=0,85, Eo = 0,1)	11six (Re=1,26, Eo = 0,13)	11cinq (Re=1,09, Eo = 0,1)	11quater (Re=1,4, Eo = 0,1)	11ter (Re=0,31, Eo = 0,06)	11bis (Re=2, Eo = 0,14)	11 (Re=0,57, Eo = 0,1)	10bis (Re=0.1. Eo=0.01)	9 (Re=1, Eo=1)	8bis (Re=0,1, Eo=1)	7 (Re=0,01, Eo=1)	5bis (Re=0,1, Eo=0,1)	4 (Re=0,01, Eo=0,1)	3ter (Re=1, Eo=0,01)	2neuf (Re=0.054, Eo=0.01)	2sent (Re=0 089 Fo=0 01)	2six (Ro-0 1 Fo-0 01)	2 (Re=0,1, E0=0,01)	1015 (Re=0,01, E0=0,01)	Essai
RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	R.S.	25 2	RK3	RK3	RK3	RK3	R.S.S	DK2	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	2 770	BK3	RKS	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	BK3	PK3	RKS	Temporel Schéma
Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centre	Centré	Centre	Collina	Centré	Centré	Centré	Centre	centre	Control	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centre	Celline	Contro	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Schéma
Consta	Consta	Consta	Consta	Consta	Consta	Consta	Consta	Consta	Variabl	variabi	Valida	Variahl	Variabl	Variabl	Variabl	variabi	Voriob	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	variabi	Validu	Variab	Variahl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Variabl	Source Uinit
4,10E-03 Non	2,46E-03 Non	7,78E-03 Non	7,78E-03 Non	4,10E-03 Oui	2,46E-03 Oui	7,78E-03 Oui	2,46E-03 Oui	7,78E-03 Oui	4,10E-03 Oui	4,10E-03 Ou	2,000	9 00F-03 Oui	9,00E-03 Oui	5,00E-03 Oui	5,00E-03 Oui	4,10E-03 Ou	1105 00 00	7.78F-03 Oui	2,46E-03 Oui	7,78E-03 Oui	4,10E-03 Oui	7,78E-03 Oui	7,78E-03 Oui	7,78E-03 Oui	/,/8E-03 Oui	1,70E-03 Ou	7 705 03 00	9 84F-03 O.I.	5.45F-03 Oui	1,34E-02 Oui	6,44E-03 Oui	4,73E-03 Oui	1,06E-02 Oui	5,91E-03 Oui	7,78E-03 Oui	4,10E-03 Oui	4,10E-03 Oui	3,00E-03 Oui	1,10E-02 Oui	9,00E-03 Oui	5,00E-03 Oui	7,78E-04 Oui	7,78E-04 Oui	7,78E-04 Oui	6,63E-03 Oui	7,78E-03 Oui	7,78E-03 Oui	7,78E-03 Oui	4,19E-03 Oui	1,14E-02 Oui	4,48E-03 Oui	7.78E-04 Oui	7.78E-03 Oui	2,46E-03 Oui	7,78E-04 Oui	2,46E-03 Oui	7,78E-04 Oui	7,78E-03 Oui	1.33E-03 Oui	2 20E-03 Oui	2,60E-03 Oui	2,46E-03 Oui	7,78E-04 Oui	init Force
	0				i 0,25							1			0,	_	+	4	_	i 0,25			0,					+		i 0,	i 0,									, 0,			i 0,	0									+	4		_			+	1	+		+	e Fa
0,5								0,5					0,5	0,5							0,5	0,5							5	5	5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	5	0,5	0,9	5			0,5	0,5		0,5		5											Ī	Ī	Densité Liq
1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	11/1,3	174,0	1171.3	1171,3	1171,3	1171,3	11/1,3	171)	1171.3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	11/1,3	11/1/3	171 3	1171 3	1171.3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1471,3	1271,3	1671,3	671,3			1171.3	1171.3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171.3	1171 3	1171,3	1171,3	1171 3	ide Densité Bulle
87,545		87,545	87,545	87,545	87,545	$\overline{}$	87,545	87,545	т			\neg	87,545	87,545	-					87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	040,70	\neg	\neg		87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545		87,545	$\overline{}$	-	87,545	$\overline{}$		387,545	187,545		87,545		\neg	\neg	\neg		\neg		-	87,545	87.545	87 545	87 5/5	87,545	07 5/5	'
0,0114	0,0114 0,1	0,114	0,0114	0,0114	0,0114 0,0			0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	0.0114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	00111	\rightarrow	_	0,114	0,06	0,3	0,03	0,003	0,006	0,00	200	0 0011	0.0011	0,0114	0,0114	0,114	0,114	0,114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0011	0,0114	0,114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	0.0114				\rightarrow	0,0114		0.114 0.	0,114 0,		0,114 0,	0,114	ension Vis
0,00911	0,028808349	0,00911	0,00911	0,00911	0,028808349	0,00911	0,028808349	0,00911	0,00911	0,00911	0,00044	0.00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00011	0.00911	0,028808349	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	11600,0	0,000,1	0 0072	0.013	0,0053	0,011	0,015	0,0067	0,012	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0.00911	0.00911	0,028808349	0,0911	0,028808349	0,0911	0,00911	0.028808349	0.114 0.028808349	0,02808349	0,028808349	1160'0	scosité liqui V
0,00911 0,0005	0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005		0,028808349 0,0005	0,0005	0,0005	0,00911 0,0005	0,0005	0,0005	0,000	0 0005	2000,0	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,0005	0,000	0.0005	0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,0005	2000,0	0,000	0,000	0 0005	0.0005	0,0053 0,0005			0,0067 0,0005	0,012 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,0005	0,00911 0,0005	0,0005		0,00911 0,0005	0,0005	0,0005	0,00911 0,0005	0,0005	0,0005		0,0005	0,0005	0.0005	0.0005	0,0005	0,0005		0,0005	0,0005	\neg	0.028808349 0.0005	2000	2000,0	0,0005	Rayon
0,981 0,01 0,003	0,981 0,01	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01	0,981 0,01	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01		0,981 0,01 0,003	0,0	0 981 0 01	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01	0,981 0,01 0,003	0,001	0.981 0.01 0.003	0,981 0,01	0,981 0,01	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01	10,0	0,001	0 981 0 01 0 003	0.981 0.01 0.003	0,981 0,01 0,003	0,0 186,0		0,981 0,01	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,0	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01	0,981 0,01	0,981 0,01 0,003	0,098 0,01 0,003	0,098 0,01	0,098 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01	0,981 0,01 0,003		0,981 0,01	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01	0.098 0.01	0.981 0.01 0.003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,0	0,981 0,01 0,003	0.981 0.01	0.981 0.01	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	Gravité Lx
1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003		1 0,003	0,000	0.003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	0,000	0.003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	0,000	0,000	0.003	0.003	1 0,003	1 0,003	0,01 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	0.003	1 0.003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0,003	1 0.003	1 0,003	0,003	0,003	0,003	
0	0	0 4			0			Ι	Τ	Ī	T	1	0	0	0	T	T	1	0	0	0	0	0	T	Ī	T		T	о .	0	0 6	0	0	0	0	0	0	0	0	0			0	Ī		0 7	0	0 7	0 4,	1	1	1	1	1		1				T	1 2			
4,10E-03	1,33E-03	4,10E-03	4,10E-03		1,30E-03 0			T		Т				4,90E-03 2	4,90E-03 2		CO 30C	4.20F-03	1,33E-03	,15E-03	4,15E-03	7,70E-03	7,70E-03	7,70E-03	/,/UE-U3	7,705-05	705 03	9 70F-03	5.20F-03	1,35E-02	6,20E-03	4,50E-03	1,05E-02	5,80E-03	7,70E-03	4,15E-03		3,20E-03	1,05E-02				7,70E-04	7,70E-04	6,50E-03	7,70E-03	7,70E-03	7,70E-03	4,000E-03	1,130E-02	4,300E-03	700E-04	7.500E-03	2,250E-03	6,000E-04	2,200E-03	6,000E-04	7,600E-03	1.350E-03	2 100F-03	2,400E-03	2,250E-03	3 3505 03	Fmean
				0,00E+00	0,00E+00	1,00E-01		0,00E+00	-3,00E-02		,101	1.20F+01		2,10E+00	2,08E+00	3																					-2,00E-02			1,07E+01	2,00E+00																							
									-0,35	Т	T	T	18,20	3,13	3,13	\top	Т	П		-0,11	-0,09	T	13,41	T	Т	T	Т	Т	T				12,93		13,42	-0,07		-4,12		17,80	3,17	1,72	1,36	1,44	11,30	13,41			6,84	\neg	7,48	╅	П		\neg				0.27	8 75	Т	1	Т	Eps rho_v Eps S
									-0,35	-0,25	2,0,1	18 23	18,05	3,15	3,11	-0,0±0	0,00	-0.001	-0,003	-0,08	-0,50	13,43	13,43	13,43	13,43	5,45	1 1,11	14 73	13.23	14,73	13,23	12,73	14,03	13,03	13,42	-0,07	-0,50	-4,10	25,23	18,23	3,50	1,72	1,33	1,42	11,36	13,53	13,43	13,73	6,75	20,71	7,49	1.35	15.73	11,43	7,03	11,33	7,03	13,43	0.25	8 73	12,73	11,53	11 50	5
####		####	####						-0,35	-0,26	20,02	18.62	18,13	3,14	3,12	-0,U13	0,000	-0.008	-0,004	-0,09	-0,29	13,42	13,42	13,52	13,52	13,42	12 42	14 26	13.20	14,00	13,23	12,60	13,48	12,96	13,42	-0,07	-0,28	-4,11	25,38	18,02	3,34	1,72	1,35	1,43	11,33	13,47	13,42	13,77	6,80	19,83	7,49	1.36	15.87	11,49	6,98	11,34	6,98	13,52	0.26	8 74	0.13	12,44	6,96	Epsilon_moy Pent
#		#	#								_						_											_																																1				te (si exis \
7,780E-03	2,460E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	2,460E-03	7,780E-03	2,460E-03	7,780E-03	7,780E-03	/,/8UE-U3	7,7000.00	7.780F-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	+	Т	7.780F-03	2,460E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	/,/80E-03	7,7605-03	7 7005 03	9 844F-03	5.452F-03	1,337E-02	6,443E-03	4,725E-03	1,058E-02	5,906E-03	7,780E-03	7,780E-03			7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-04	7,780E-04	7,780E-04	6,632E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03		\neg	4,478E-03	7.780E-04	7.780E-03	2,460E-03	7,780E-04	2,460E-03	7,780E-04	7,780E-03	2.460E-03	2,460E-03	2,460E-03	2,460E-03	7,780E-04	Pente (si exis Vcalc Hadam Re
1,000E+00	1,000E-01	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E-01	1,000E+00	1,000E-01	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,0001.00	1.000F+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,0005.00	1.000F+00	1,000E-01	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,0001	T,000E+00	1,0010.00	1 601F+00	4.912F-01	2,955E+00	6,861E-01	3,690E-01	1,849E+00	5,765E-01	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E-01	1,000E-01	1,000E-01	8,526E-01	1,257E+00	1,086E+00	1,427E+00	3,088E-01	2,086E+00	5,757E-01	1.000E-01	1.000E+00	1,000E-01	1,000E-02	1,000E-01	1,000E-02	1,000E+00	1,000E-01	1,000E-01	1,0005-01	1,0006-01	1,0005-01	₹e
0 1,008E-01					1,008E-01	Т	T	T	1	Т	Т	┪		0 1,008E-01	Т	T	T	T) 1,008E-02	0 1,915E-02		3,830E-02	Т	Т	Т	1	7							1,008E-01	1,008E-01		ı		1,008E-01		П	1,008E-02	Т		1,266E-01				\neg	T	\neg	_						\top	1 1,000E-02	\top	T	\top	ᄪ

30six (Re=1, Eo=0,01)	30cinq (Re=1, Eo=0,01)	30quater (Re=1, Eo=0,01)	30ter (Re=1, Eo=0,01)	30bis (Re=1, Eo=0,01)	30 (Re=1, Eo=0,01)	29six (Re=1, Eo=0,01)	29cinq (Re=1, Eo=0,01)	29quater (Re=1, Eo=0,01)	29ter (Re=1, Eo=0,01)	29bis (Re=1, Eo=0,01)	29 (Re=1, Eo=0,01)	28 (Re=1, Eo=0,1)	26treize (Re=1, Eo=0,1)	26douze (Re=1, Eo=0,1)	26onze (Re=1, Eo=0,1)	26dix (Re=1, Eo=0,1)	26huit (Re=1, Eo=0,1)	26quater(Re=1, Eo=0,1)	26ter (Re=1, Eo=0,1)	26 (Re=1, Eo=0,1)	25quater (Re=1, Eo=0,1)	25ter (Re=0,1, Eo=0,1)	25bis (Re=1, Eo=0,01)	24quater (Re=1, Eo=0,1)	24ter (Re=0,1, Eo=0,1)	24bis (Re=1, Eo=0,01)	23bis (Re=1, Eo=0,1)	23 (Re=1, Eo=0,1)	22ter (Re=1 , Eo=0,1)	22bis (Re=1 , Eo=0,1)	
			RK3	Euler e	RK3	Euler e	RK3		RK3	Euler e	RK3	Euler e	RK3	RK3		Euler e	Euler e	RK3	Euler e	RK3	1) RK3	RK3	RK3	1) RK3		RK3	RK3	RK3	RK3	RK3	
Euler expli Centré	Centré	Euler expli Centré	Centré	Euler expli Centré	Centré	Euler expli Centré	Centré	Euler expli Centré	Centré	Euler expli Centré	Centré	Euler expli Centré	Centré	Centré	Euler expli Centré	Euler expli Centré	Euler expli Centré	Centré	Euler expli Quick	Quick	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	Centré	
	é Consta	é Consta	é Consta	é Consta	é Consta	é Variabl	é Variabl	é Variabl	é Variabl	é Variabl	é Variabl	é Consta	é Variabl	é Variabl	é Variabl	é Variabl	é Variabl	é Variabl	Variabl	Variabl	é Consta	é Consta	é Consta	é Consta	é Consta	é Consta	é Consta	é Consta	é Consta	é Consta	-
	a 7,78E-03 Non			a 7,78E-03 Non	a 7,78E-03 Non					7,78E-03 Non	7,78E-03 Non	a 7,78E-03 Oui	7,78E-03 Oui	7,78E-03 Oui	7,78E-03 Oui	7,78E-03 Oui	7,78E-03 Oui	7,78E-03 Oui	7,78E-03 Oui	7,78E-03 Oui	a 7,78E-03 Non	a 2,46E-03 Non	a 7,78E-03 Non			a 7,78E-03 Oui	a 7,78E-03 Non	a 7,78E-03 Non	1,10E-02 Oui	5,00E-03 Oui	
0,5	0,5	0,4	0,4	0,25	0,25	0,5	0,5	0,4	0,4	0,25	0,25	0,25	0,36	0,33	0,36	0,33	0,4	0,4	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,5	
1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	1171,3	
87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	87,545	
0,114	0,114	0,114	0,114	0,114	0,114	0,114	0,114	0,114	0,114	0,114	0,114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	0,0114	87,545 0,0114	87,545 0,0114	87,545 0,0114 0,028808349	0,114	87,545 0,0114	87,545 0,0114 0,028808349	0,114	87,545 0,0114	0,0114	87,545 0,0114	87,545 0,0114	
0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911		0,00911	0,00911		0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	0,00911	
0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911	0,00911 0,0005	0,00911	0,00911	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,028808349 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,028808349 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	0,00911 0,0005	
			0,0005 0,981	0,0005 0,981	0,0005 0,981	0,0005 0,981	0,0005 0,981	ı	ı	ı	ı	ı																П		\vdash	
0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	31 0,01 0,003	31 0,01 0,003	31 0,01 0,003	31 0,01 0,003	31 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,005	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	0,981 0,01 0,003	
0 500,	,003 0	,003 0	,003 0	,003 0	,003 0	0 200	0 200	0 200	,003 0	,003 0	,003 0	,005 0,01	,003 0	0 200	0 200	,003 0	,003 0	,003 0	,003 0	,003 0	0 000	,003 0	,003 0	,003 0	,003 0	,003 0	,003 0	,003 0	0,003	0,003	
4,100E-03	4,100E-03	4,100E-03	4,100E-03	4,100E-03	4,100E-03	4,100E-03	4,100E-03	4,100E-03	4,100E-03	4,100E-03	4,100E-03		7,700E-03	7,700E-03	7,700E-03	7,700E-03	7,700E-03	7,700E-03	7,700E-03	7,700E-03	4,100E-03	1,330E-03	4,100E-03	4,100E-03	1,300E-03	4,100E-03	4,10E-03	4,10E-03	1,07E-02	5,00E-03	
)3)3)3)3	33	33)3)3)3	33	33	33		3 8,100E+00)3 8,100E+00)3 8,100E+00	3 8,100E+00)3 8,100E+00	3 8,100E+00)3 8,100E+00	3 8,100E+00)3	33	33)3 0,000E+00)3 0,000E+00	1,000E-01)3 0,00E+00	0,00E+00	1,60E+01)3 2,10E+00	
						0,23	0,20	0,24	0,24	0,30	0,32		13,61	13,61	13,61	13,61	13,61	13,61	13,61	13,61											
						3 -0,18	0 -0,21	4 -0,17	4 -0,17	0 -0,11	2 -0,08		1 13,43	1 13,43	1 13,43	1 13,43	1 13,43	1 13,43	1 13,43	1 13,43											
						0,	-0,	,0,	,0	0,	,0		13,52	13,52	13,52	13,52	13,52	13,52	13,52	13,52											
####	####	####	####	###	###	0,02	-0,01	0,03	0,03	0,10	0,12		52	52	52	52	52	52	52	52	####	####	####				###				
7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	2,460E-03	7,780E-03	7,780E-03	2,460E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	7,780E-03	
1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E-01	1,000E+00	1,000E+00	1,000E-01	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	
1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-02	1,008E-01	. 1,008E-01	1,008E-02	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	1,008E-01	