



Caractérisation des écoulements turbulents fortement anisothermes au sein des récepteurs solaires

Dorian Dupuy

Rapport de Stage

Dans le cadre du
Master Energie solaire

Stage réalisé de février à juillet 2015
au laboratoire PROMES-CNRS UPR 8521

Sous la direction de
Adrien Toutant

Perpignan, Juin 2015

Remerciements

Je remercie Gilles Flamant, directeur du laboratoire PROMES ainsi que Laurent Thomas, directeur adjoint, pour m'avoir permis d'effectuer mon stage au sein du laboratoire.

Je remercie mon encadrant Adrien Toutant pour avoir rendu possible ce stage avec lequel j'ai apprécié travailler.

Je remercie Frédéric Aulery pour ses explications qui m'ont permis de poursuivre ses travaux.

Je remercie mon collègue de bureau Marc Sanchez pour ses conseils, avec qui il était intéressant de discuter.

Je remercie enfin toutes les autres personnes du laboratoire, qui font de PROMES un site où il est agréable de travailler.

Table des matières

Introduction	4
1 Présentation du laboratoire	5
1.1 Présentation générale	5
1.2 Historique	6
1.3 L'équipe TRECS	6
2 Thème du stage	8
3 Cadre d'étude	9
3.1 La turbulence	9
3.2 Équations à bas nombre de Mach	10
3.2.1 Hypothèses	10
3.2.2 Système physique à résoudre	10
3.2.3 Variation des propriétés du fluide	11
3.3 Le code de calcul Trio_U	11
4 Analyse des résultats d'une simulation	12
4.1 Paramètres d'étude	12
4.1.1 Géométrie étudiée	12
4.1.2 Adimensionnements utilisés	13
4.1.3 Conditions aux limites et conditions initiales	14
4.2 Résultats	14
4.2.1 Profil de vitesse longitudinale	15
4.2.2 Profil des fluctuations de la vitesse transverse	16
4.2.3 Résultats globaux sur l'écoulement.	18
5 Étude de l'énergie cinétique turbulente	19
5.1 Formulation dans le domaine spatial	20
5.2 Formulation dans l'espace spectral	22
5.2.1 Décomposition du terme thermique	26
5.2.2 Décomposition du terme visqueux	27
5.2.3 Décomposition du terme lié à la pression	28
5.2.4 Équation complète décomposée	29

Conclusion	30
Références	31
Nomenclature	32
A Caractéristiques de la simulation analysée	33
B Discrétisation d’une dérivée seconde non centrée	35
C Calcul du débit massique à partir de la corrélation de Dean	36
D Figures tracées pour l’analyse des simulations	38
E Écrire un jeu de données	53
E.1 Généralités	53
E.2 Géométrie et maillage	54
E.3 Paramètres de la simulation	55
E.3.1 Lier la simulation à la géométrie	55
E.3.2 Caractéristiques physiques du problème	56
E.3.3 Conditions initiales	56
E.3.4 Paramètres numériques	57
E.3.5 Paramètres liés aux post-traitement	58
E.4 Le solveur multigrille	58
E.4.1 Paramètres de <code>nb_full_mg_steps</code>	59
E.4.2 Autres paramètres	61
E.5 Définition des niveaux de maillage	63
E.5.1 Niveau 0	63
E.5.2 Niveaux 1 à n	64
E.6 Réaliser une simulation	65
E.6.1 Établissement	66
E.6.2 Réalisation des moyennes spatiales	66
E.6.3 Réalisation des post-traitement spatial et spectral	66
E.7 Conversion des données d’un maillage à un autre	67
F Exemple de jeu de données	68
G Exemples de structures d’itération du solveur multigrille	70

Introduction

Les centrales solaires thermodynamiques forment une source d'énergie très prometteuse qui pourrait se révéler clé dans la réduction des émissions de gaz à effet de serre. Équipées d'un système de stockage, elles peuvent fournir une énergie propre en continu même lorsque la ressource solaire est inaccessible.

Parmi elles, les centrales solaires thermodynamiques à tour permettent d'atteindre les plus hauts niveaux de température, et donc les plus hauts rendements. Ces travaux se placent dans le projet PÉGASE qui a pour but la mise en place d'une centrale solaire hybride solaire-gaz sur le site de l'ancienne centrale Thémis.

Le principe de fonctionnement de ces centrales est de concentrer par un champ d'héliostats le rayonnement solaire au sommet d'une tour, au niveau du récepteur solaire. La chaleur reçue est utilisée comme source chaude d'un cycle thermodynamique, dans notre cas un cycle combiné Joule-Rankine, et permet au final d'alimenter une turbine pour produire de l'électricité.

Le récepteur solaire est un composant spécifique de ces centrales d'importance particulière puisque c'est lui qui aura pour rôle le transfert de l'énergie du rayonnement solaire vers le fluide caloporteur. L'amélioration de ce récepteur solaire nécessite des recherches en amont sur la compréhension des écoulements en son sein, turbulents fortement anisothermes.

Ce stage s'inscrit dans une approche d'amélioration de la caractérisation de ce type d'écoulement par la réalisation de simulations numériques. Il est effectué au laboratoire PROMES à Perpignan au sein de l'équipe Thermophysique, rayonnement et écoulement dans les centrales solaires. Ce travail est réalisé dans le cadre du master Énergie Solaire de l'Université de Perpignan Via Domitia, sous l'encadrement d'Adrien Toutant.

Ce rapport peut se subdiviser en cinq parties. On présentera tout d'abord le laboratoire dans le lequel le stage a été effectué. Ensuite, on décrira rapidement le thème du stage et les travaux effectués. Avant de donner les résultats de l'analyse de simulations, on définira un certain nombre de notions préalables. Enfin, on présentera les travaux réalisés sur l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente.

1 Présentation du laboratoire

1.1 Présentation générale

PROMES (procédés, matériaux et énergie solaire) est une unité de recherche du CNRS (UPR 8521) rattachée à l'Institut des sciences de l'ingénierie et des systèmes (INSIS) et conventionnée avec l'université de Perpignan Via Domitia (UPVD) [1]. Le laboratoire comprend trois sites situés dans le département des Pyrénées-Orientales : Perpignan, Odeillo pour le grand four solaire et Targasonne avec la centrale solaire Thémis.

Gilles Flamant et Laurent Thomas sont respectivement directeur et directeur adjoint de PROMES. Le laboratoire coordonne les recherches de 150 personnes du CNRS et de l'UPVD qui coopèrent autour d'un sujet fédérateur : *l'énergie solaire* et sa valorisation sur tous les plans. Les activités de recherche de PROMES peuvent se regrouper en deux grands axes de recherche principaux :

- matériaux et conditions extrêmes ;
- conversion, stockage et transport de l'énergie.

Le laboratoire est structuré en 7 groupes de recherche et services comme le représente la figure 1.1.

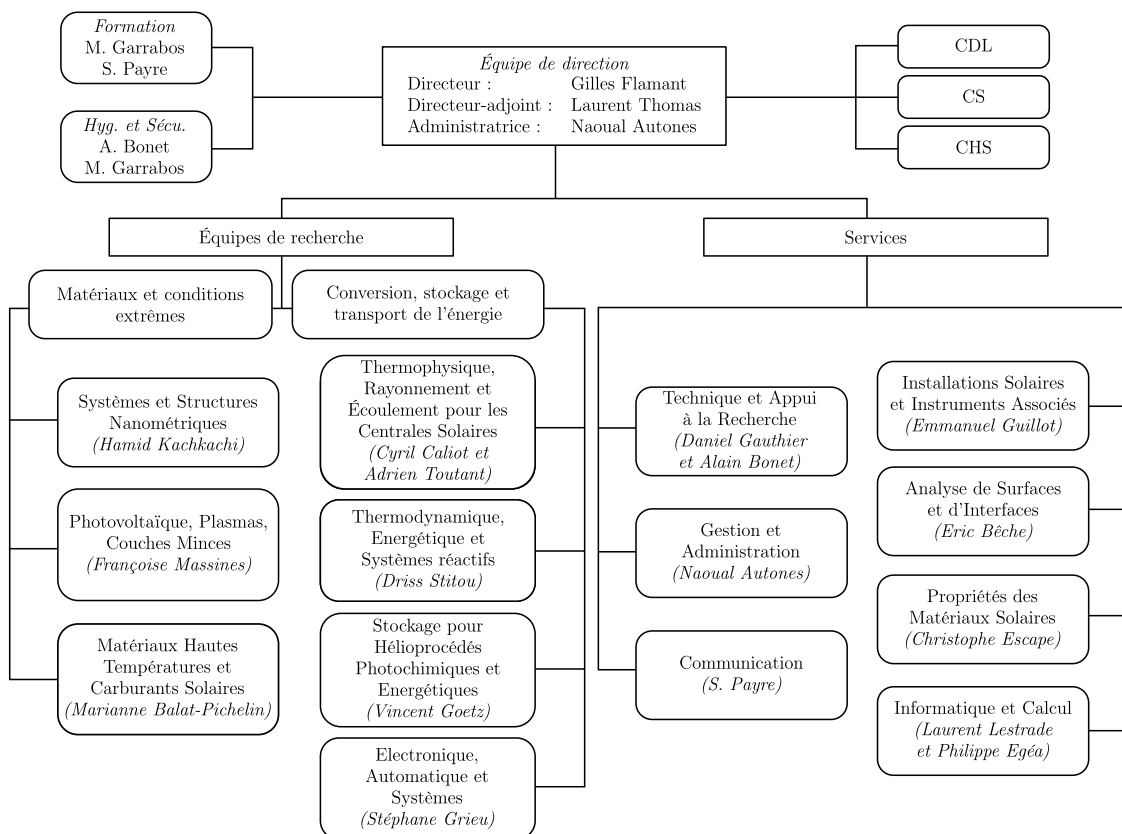


FIGURE 1.1 – Organigramme du laboratoire PROMES.

L'une des missions originales de PROMES est de développer des recherches avec

les grandes installations à concentration françaises du CNRS à Font Romeu (fours solaires en particulier) et du conseil général des Pyrénées-Orientales à Targasonne (tour solaire de Thémis).

Les objectifs du laboratoire visent principalement au développement de connaissances scientifiques et d'innovations technologiques mettant à profit les caractéristiques originales du rayonnement solaire concentré et ouvrant les domaines d'application de cette source d'énergie renouvelable [2]. Plus généralement, le laboratoire développe des recherches concernant les matériaux et les procédés ayant un impact potentiel dans le domaine du développement durable.

1.2 Historique

Le laboratoire PROMES prend ses origines dans le *Laboratoire des Ultra Réfractaires* créée par le CNRS et la DGA et 1949 [3]. Sa création est intimement liée à la construction en 1949 du four solaire de Mont-Louis à l'initiative de Felix Trombe. L'intention scientifique est alors d'exploiter l'énergie solaire fortement concentrée pour la synthèse et l'étude du comportement de matériaux à très haute température (e.g. dans la gamme 1500 – 3000°C).

Dans les années 1970, le premier choc pétrolier induit un regain d'intérêt pour l'utilisation de l'énergie solaire concentrée. Les activités du laboratoire s'orientent progressivement sur des programmes de développement de projets de centrales solaires à tour. Cette période est symbolisée par la construction de la centrale solaire THÉMIS, inaugurée par EDF en 1983, qui constitue alors une référence internationale en matière de conversion de l'énergie solaire en électricité.

Le projet est néanmoins arrêté en 1986, et tous les fours solaires redeviennent simplement des outils de haute température dans le domaine des matériaux, retrouvant ainsi leur vocation d'origine [4]. Un regain d'intérêt pour l'impact environnemental des énergies fossiles et la hausse du prix du pétrole à partir du début des années 2000 ont amené à la reprise de différents programmes de recherche sur l'utilisation de l'énergie solaire concentrée. En 2004, *l'énergie solaire* retrouve sa place dans l'intitulé du laboratoire qui prend son nom actuel : PROMES [1].

On mentionnera notamment du fait de son importance dans le cadre de mon stage le projet PÉGASE qui consiste en l'élaboration d'une centrale hybride solaire-gaz à cycle combiné Joule-Rankine sur la tour de Thémis. Ce projet soulève de nombreux enjeux scientifiques et techniques ; En effet, la température d'entrée de l'air dans une turbine à gaz (caractéristique du cycle Joule) est d'environ 1000°C et on ne sait pas aujourd'hui chauffer un gaz à de telles températures de façon fiable avec l'énergie solaire concentrée. On a donc nécessité de développer des *récepteurs solaires* spécifiques pour atteindre cet objectif.

1.3 L'équipe TRECS

TRECS (thermophysique, rayonnement et écoulement dans les centrales solaires) est une équipe de recherche du laboratoire PROMES co-dirigée par Cyril Caliot et

Adrien Toutant qui rassemble des activités de recherche visant à l'optimisation des récepteurs solaires au sein de systèmes solaires à concentration. Étant donné la dépendance en lien avec le rendement de Carnot du rendement des cycles thermodynamiques avec le niveau de température de la source chaude, elle a pour objectif la mise au point de récepteurs solaires haute température, qui permettraient le développement de centrales solaires de plus haut rendement. En particulier, l'équipe a la responsabilité des expérimentations avec le concentrateur à tour de Thémis et du projet PÉGASE.

Les recherches visent à développer des méthodes et moyens en vue [1] :

- de proposer des outils de modélisation et de simulation des systèmes thermiques de conversion de l'énergie solaire concentrée (en particulier les récepteurs solaires) ;
- de valider les concepts à l'échelle laboratoire ;
- dans certains cas, de développer des démonstrateurs à l'échelle pilote.

L'optimisation des récepteurs solaires passe tout d'abord par la modélisation du rayonnement, la simulation du système de concentration (champ d'héliostats) et de celle des transferts radiatifs à l'intérieur du récepteur solaire. Ceci pose la question de la géométrie optimale du récepteur par rapport au champ et des matériaux à utiliser.

Par ailleurs, l'étude du vieillissement des composants et des matériaux dans les centrales solaires est une thématique importante. En effet, les récepteurs solaires sont soumis à des conditions extrêmes que représente l'agression thermique violente et cyclique qu'est le flux solaire concentré. Ceci entraîne une dégradation prématurée de leurs capacités thermiques et mécaniques, de la fiabilité et du coût des systèmes, et de la performance de la centrale.

Enfin, optimiser le récepteur consiste à améliorer les échanges thermiques entre le fluide de travail et la paroi irradiée, ainsi que réduire les pertes de charge lors de son passage dans le récepteur. L'enjeu est donc de pouvoir prévoir la géométrie interne du récepteur et les matériaux à utiliser.

La démarche adoptée par l'équipe est multi-échelles et comprend l'étude des écoulements au sein des récepteurs solaires depuis un élément de l'architecture interne jusqu'au récepteur complet. Elle combine par ailleurs approche expérimentale et simulation numérique.

La plate-forme expérimentale est constituée de la soufflerie MEETIC (moyens d'essais des écoulements turbulents pour l'intensification des transferts de chaleur) instrumentée de multiples capteurs de pression et de vitesse. Un dispositif de SPIV (Stéréo Particle Image Velocimetry) permet d'avoir l'image dans un plan des trois composantes de la vitesse.

Pour les simulations numériques, la stratégie à adopter dépend de l'échelle de description choisie. Des modèles de type RANS sont utilisés pour l'étude du récepteur complet, par exemple dans la recherche d'une géométrie adaptée. Pour comprendre la manière dont les forts gradients thermiques modifient la structure de l'écoulement et notamment de la turbulence, on doit utiliser des simulations plus fines de type simulation numérique directe ou simulation des grandes échelles.

2 Thème du stage

Le récepteur solaire est un composant essentiel des centrales solaires thermodynamiques à tour, puisqu'il est siège du transfert de l'énergie du rayonnement solaire concentré vers le fluide de travail. Un enjeu majeur pour l'efficacité des centrales à tour est donc d'optimiser l'architecture du récepteur, en créant une géométrie interne permettant de maximiser les transferts thermiques tout en limitant les pertes de charge.

Pour cela, des recherches en amont sont nécessaires sur la compréhension fondamentale des écoulements présents dans les récepteurs solaires, caractérisés par :

- un fort gradient de température, car le rayonnement solaire n'arrive que sur une seule face du récepteur ;
- une nature turbulente, car le débit est important et les fortes puissances à extraire nécessite la turbulence de l'écoulement, celle-ci permettant d'intensifier les transferts de chaleur entre la paroi et le fluide.

La simulation numérique s'est montrée pour cela particulièrement utile. On citera comme exemple de ces études théoriques la simulation des écoulements pariétaux dans des conditions de forts gradients de température accomplie par Sylvain Serra lors de sa thèse [5], ou encore l'étude spectrale du couplage entre gradient de température et turbulence réalisée par Frédéric Aulery également lors de sa thèse [6].

Pour tous ces travaux, la géométrie étudiée est celle dans un canal plan bipériodique. Cette géométrie peut être vue comme deux parois de longueurs et largeurs infinies et de température constante, une chaude et une froide, entre lesquelles circule le fluide de travail. Ces résultats ne peuvent donc être considérés comme directement représentatif de l'écoulement dans un récepteur solaire réel, mais ils fournissent des résultats nous permettant d'affiner notre compréhension physique du couplage entre le gradient de température et la vitesse.

Ce stage a pour but de poursuivre ces travaux et d'encore améliorer la caractérisation des écoulements présents dans les récepteurs solaires et la compréhension de ce couplage. Les travaux réalisés lors de ce stage peuvent être regroupés en deux parties : l'étude des résultats d'une simulation puis de l'énergie cinétique turbulente.

Dans un premier temps, les résultats d'une nouvelle simulation numérique très fine d'un écoulement fortement anisotherme ont été post-traité et analysé. Ils fournissent des données de référence et constituent dans les conditions physiques de la simulation les résultats les plus précis que l'on ait à ce jour.

Par ailleurs, des travaux ont été réalisés sur la compréhension des mécanismes d'évolution de l'énergie cinétique turbulente, particulièrement importante en vue de l'optimisation des récepteurs solaires car l'agitation turbulente permet d'intensifier les transferts de chaleur. Une réécriture de l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente dans les domaines spatial et spectral a pour cela été réalisée lors de stage, dans la continuité des travaux de Frédéric Aulery. Les termes issus de cette nouvelle décomposition ont par la suite été discrétisés et implémentés dans le code de calcul Trio_U. L'analyse de ces termes doit permettre de proposer des géométries de récepteur solaire à haute température performantes et innovantes.

3 Cadre d'étude

Cette partie a pour but de définir succinctement un certain nombre de notions générales, communes à tous les travaux réalisés lors de ce stage. On présentera la problématique physique de la simulation des écoulements dans les récepteurs solaires, les équations à résoudre et les conventions utilisées. Puis, on décrira l'outil de simulation utilisé, en l'occurrence le code de calcul Trio_U.

3.1 La turbulence

Les écoulements dans les récepteurs solaires sont caractérisés par leur nature turbulente, de même que la plupart des écoulements naturels. Il est difficile de donner une définition précise de la turbulence mais tous les écoulements turbulents sont caractérisés par un certain nombre de propriétés [7] : une certaine irrégularité spatiale et temporelle, une imprévisibilité des trajectoires, une cinématique rotationnelle, la coexistence de tourbillons de tailles diverses, son caractère tridimensionnel, une diffusivité élevée et une forte dissipation.

Le régime d'un écoulement est caractérisé par son *nombre de Reynolds*. Il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses, c'est à dire l'importance relative du transfert de quantité de mouvement par convection et par diffusion :

$$Re = \frac{\rho U_0 L_0}{\mu} \quad (3.1)$$

U_0 et L_0 étant une vitesse et une échelle de longueur représentative de l'écoulement, ρ la masse volumique du fluide et μ sa viscosité dynamique. Généralement, on considère que la transition entre écoulement laminaire et turbulent s'effectue pour un nombre de Reynolds compris entre 2 000 et 3 000 [8]. Si le nombre de Reynolds passe au-dessus de ce seuil, les forces d'inertie l'emportent sur les forces de frottement et l'écoulement devient turbulent, et inversement.

Le caractère chaotique des écoulements turbulents conduit à l'utilisation de la *décomposition de Reynolds*. Chaque grandeur G est décomposée en une partie moyenne, notée $\overline{\cdot}$ ou $\langle \cdot \rangle$, et une partie fluctuante, notée $'$:

$$G = \langle G \rangle + G' \quad (3.2)$$

La partie moyenne représente la moyenne statistique de la grandeur G , définie comme la moyenne de cette grandeur sur un grand nombre d'expériences indépendantes :

$$\langle G(\underline{x}, t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_i(\underline{x}, t) \quad (3.3)$$

où G_i est la mesure de G lors de l'expérience i et N le nombre d'expériences. La partie fluctuante, de moyenne statistique nulle, est l'écart pour une expérience donnée entre la valeur de la grandeur et sa moyenne statistique.

3.2 Équations à bas nombre de Mach

3.2.1 Hypothèses

L'écoulement d'un fluide non newtonien est décrit par les équations de Navier-Stokes dans l'approximation des milieux continus. Ces équations sont riches et complexes de part le couplage des différents phénomènes physiques qui interagissent et créent une dynamique unique. Il est souvent préférable d'estimer quels sont les phénomènes prépondérants et ceux qui sont négligeables afin de simplifier la formulation et la résolution des équations régissant le comportement du fluide.

On utilise dans notre étude des récepteurs solaires l'approche dite de *quasi-compressibilité* ou de *bas nombre de Mach*. Les variations de propriétés du fluide avec la température sont prises en compte mais les phénomènes acoustiques sont négligés. Ce modèle est valable lorsque le nombre de Mach Ma de l'écoulement est faible, c'est à dire lorsque la vitesse caractéristique de l'écoulement U_0 est faible devant la vitesse du son c dans le fluide :

$$Ma = \frac{U_0}{c} < 0,3 \quad (3.4)$$

Dans cette approximation, la partie acoustique de l'écoulement n'est plus résolue et la compressibilité du fluide n'est plus gouvernée que par une loi d'état, dans notre cas la loi des gaz parfaits. Plus concrètement, l'approche du bas nombre de Mach se base sur un développement asymptotique des équations de conservation pour obtenir un nouveau système d'équations libre de contrainte acoustique.

On utilise le développement proposé par Samuel Paolucci [9] pour les écoulements fortement anisothermes. Il conduit à séparer la pression en deux termes : la *pression thermodynamique* P_{th} constante dans l'espace qui représente la pression moyenne dans le domaine ; la *pression dynamique* P_{dyn} liée à la vitesse du fluide et qui varie spatialement.

3.2.2 Système physique à résoudre

Le développement des équations de Navier-Stokes dans le cadre de l'hypothèse du bas nombre de Mach conduit à un système physique régi par les équations suivantes [6] :

— La conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (3.5)$$

— La conservation de la quantité de mouvement (la gravité est négligée) :

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \quad (3.6)$$

— La conservation de l'énergie :

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial P_{th}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (3.7)$$

— La loi des gaz parfaits :

$$P_{th} = \rho r T \quad (3.8)$$

— L'homogénéité de la pression thermodynamique :

$$\frac{\partial P_{th}}{\partial x_i} = 0, \quad \forall x_i \in \{x, y, z\} \quad (3.9)$$

où ρ est la masse volumique, T la température, μ la viscosité dynamique, λ la conductivité thermique, C_p la capacité calorifique à pression constante, r la constante spécifique des gaz parfaits du fluide, t le temps et U_k la vitesse du fluide dans la direction de la coordonnée d'espace x_k . On notera que la notation indicielle suit la convention de sommation d'Einstein.

3.2.3 Variation des propriétés du fluide

Le système formé par les équations (3.5–3.9) décrit la physique de l'écoulement mais pour le résoudre, il nous faut connaître par ailleurs les variations des propriétés du fluide avec la température. La capacité calorifique du fluide est considérée constante et les variations de densité sont prises en compte par la loi des gaz parfaits.

On utilisera l'équation de Sutherland pour décrire les variations de la viscosité du fluide,

$$\mu = 1,461 \cdot 10^{-6} \frac{T^{1,5}}{T + 111} \quad (3.10)$$

et la conductivité en sera déduite du nombre de Prandtl Pr , supposé constant :

$$\lambda = \frac{\mu C_p}{Pr} \quad (3.11)$$

La loi de Sutherland utilisée est valide pour l'air pour des températures comprises entre 220 K et 1900 K.

3.3 Le code de calcul Trio_U

L'outil utilisé pour réaliser les simulations est Trio_U, code de calcul de CFD (Computational Fluid Dynamics) développé depuis environ 15 ans par le CEA et en particulier le service de thermohydraulique et de mécanique des fluides (STMF) [10]. C'est un code C++ modulaire et ouvert qui permet de réaliser des calculs massivement parallèles. Il supporte les simulations numériques directes (DNS), des grandes échelles (LES) et de type *Reynolds averaged Navier-Stokes* (RANS). Il permet la résolution par la méthode des volumes finis (VDF) ou la méthode des éléments finis (VEF)

Dans notre cas, on utilisera une discrétisation de type VDF, où tous les scalaires sont discrétisés au centre des éléments et les composantes de la vitesse au centre des faces auxquelles elles sont perpendiculaires. Un schéma Runge-Kutta du troisième ordre est utilisé pour le temps. On trouvera une description de l'écriture d'un jeu de données Trio_U et du processus de réalisation d'une simulation en annexe E.

4 Analyse des résultats d'une simulation

Afin d'améliorer la caractérisation des caractéristiques fondamentales des écoulements dans les récepteurs solaires, une simulation numérique a été auparavant réalisé avec la double particularité d'avoir un maillage plus fin que les simulations précédentes et de disposer d'un nouvel algorithme de résolution supposé mieux garantir la conservation de l'énergie. Nous allons présenter les caractéristiques de cette simulation et analyser ses résultats en les comparant à ceux d'une simulation plus ancienne, publiée en 2013 [11].

4.1 Paramètres d'étude

4.1.1 Géométrie étudiée

La géométrie étudiée est la plus simple possible qui soit représentative des phénomènes physiques présents dans les récepteurs solaires : le canal plan bipériodique. Elle est constituée de deux parois planes parallèles entre elles, formant un domaine parallélépipédique rectangle. Les deux parois sont séparées d'une distance $2h$ avec $h = 0,014923$ m, valeur représentative de la demi-hauteur d'un récepteur solaire fixée par Xavier Daguene-Frick lors de son travail de thèse [12].

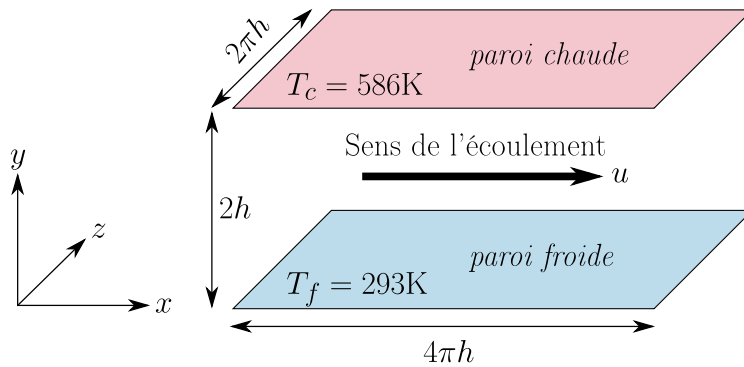


FIGURE 4.1 – Représentation de la géométrie étudiée, le canal plan bipériodique.

On note y la direction perpendiculaire aux parois, x la direction dans laquelle se fait l'écoulement et z la direction transverse. Les directions x et z sont des directions de périodicité. L'écoulement étant par ailleurs statistiquement stationnaire, toutes les grandeurs moyennes de l'écoulement ne vont varier que suivant la direction y . Prenant ceci en compte, la moyenne statistique d'une grandeur G sera calculé comme :

$$\langle G \rangle = \frac{1}{N_{t_f} N_x N_z} \sum_{t=1}^{N_{t_f}} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_z} G(x_i, y, z_j, t) \quad (4.1)$$

L'étude d'écoulements turbulents en présence de parois rend utile l'introduction du *nombre de Reynolds turbulent*, qui est le nombre qui caractérise le mieux le niveau

de turbulence en proche paroi. On le définit de la manière suivante :

$$Re_\tau = \frac{\rho_\omega h U_\tau}{\mu_\omega} \quad (4.2)$$

où μ_ω est la viscosité dynamique du fluide à la paroi, ρ_ω sa masse volumique à la paroi et U_τ la vitesse de frottement définie comme

$$U_\tau = \sqrt{\left. \frac{\langle \mu_\omega \rangle}{\langle \rho_\omega \rangle} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \right|_\omega} \quad (4.3)$$

Dans un récepteur solaire, les propriétés du fluide sur les deux parois sont différentes, ce qui conduit à définir deux nombres de Reynolds turbulents et un nombre de Reynolds turbulent moyen défini comme la moyenne de ces deux nombres.

4.1.2 Adimensionnements utilisés

Pour notre étude, nous allons utiliser deux types d'adimensionnement. *L'adimensionnement classique* noté $^+$ se fait en normalisant par rapport aux propriétés du fluide à la paroi,

$$y^+ = \frac{y U_\tau}{\nu_\omega} = Re_\tau \frac{y}{h} \quad (4.4)$$

$$U_\tau = \sqrt{\left. \frac{\langle \mu_\omega \rangle}{\langle \rho_\omega \rangle} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \right|_\omega} \quad (4.5)$$

$$T_\tau = \frac{\langle \lambda_\omega \rangle \left. \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \right|_\omega}{\langle \rho_\omega \rangle C_p U_\tau} \quad (4.6)$$

de telle sorte que toutes les vitesses sont normalisées par U_τ et les températures par T_τ avec notamment :

$$T^+ = \frac{|T_\omega - T|}{T_\tau} \quad (4.7)$$

L'adimensionnement semi-local noté * se fait en prenant les propriétés du fluide à l'endroit du point à adimensionner,

$$y^* = \frac{y U_\tau^*}{\langle \nu(y) \rangle} = Re_\tau^* \frac{y}{h} \quad (4.8)$$

$$U_\tau^* = \sqrt{\left. \frac{\langle \mu_\omega \rangle}{\langle \rho(y) \rangle} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \right|_\omega} \quad (4.9)$$

$$T_\tau^* = \frac{\langle \lambda_\omega \rangle \left. \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \right|_\omega}{\langle \rho(y) \rangle C_p U_\tau^*} \quad (4.10)$$

de telle sorte que toutes les vitesses sont normalisées par U_τ^* et les températures par T_τ^* avec notamment :

$$T^* = \frac{|T_\omega - T|}{T_\tau^*} \quad (4.11)$$

4.1.3 Conditions aux limites et conditions initiales

Le débit est imposé dans le canal de manière à avoir un nombre de Reynolds turbulent moyen de 395. Pour déterminer ce débit, on se base sur la corrélation de Dean comme décrit en annexe C pour avoir la valeur que devrait avoir le débit dans le cas isotherme puis on affine cette valeur en réalisant des simulations successives. La condition initiale sur le champ de vitesse est un profil parabolique sur la composante longitudinale u et sinusoïdale sur la composante transverse w .

La température est imposée sur les parois à 293 K pour la paroi froide et 586 K pour la paroi chaude. On a par ailleurs sur les parois une condition de non-glissement (vitesse nulle à la paroi) et sur les quatre autres faces du domaine des conditions aux limites périodiques.

4.2 Résultats

Afin d'analyser les résultats de cette simulation, nous allons les comparer aux résultats d'une simulation plus ancienne de caractéristiques similaires qui correspond à [11]. Par la suite, on désignera cette simulation par la dénomination *ancienne simulation* et par opposition la simulation analysée ici sera parfois appelée *nouvelle simulation*. On trouvera les caractéristiques détaillées de ces deux simulations notamment du point de vue du maillage en annexe A.

La principale différence entre les deux simulations est le changement du mode de calcul de la pression dynamique. Depuis que l'ancienne simulation a été réalisée, un nouvel algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes à bas nombre de Mach a été conçu afin de garantir explicitement la conservation de l'énergie dans le domaine. Cette nouvelle simulation a pour but de vérifier l'impact de ce changement d'algorithme sur les statistiques de la turbulence.

On dégage au final les trois différences suivantes entre les deux simulations :

- la taille du maillage, environ 2 milliards de mailles pour la nouvelle simulation contre 500 millions pour l'ancienne. Le maillage a été particulièrement augmenté dans la direction transverse pour mieux capturer les structures turbulentes de petites tailles dans cette direction car allongées dans la direction principale de l'écoulement ;
- le mode de calcul de la pression dynamique ;
- la pression thermodynamique dans le domaine, différente entre les deux simulations en raison du changement d'algorithme de résolution.

Le changement simultané de plusieurs paramètres pose toujours des problèmes dans l'interprétation des résultats car on ne peut pas isoler facilement l'influence des différents paramètres. Étant donné le temps extrêmement long de réalisation d'une simulation, cela est nécessaire dans notre cas.

On va présenter rapidement le résultat de l'analyse de quelques profils de vitesse pour ces simulations. L'ensemble des résultats et des figures tracées est disponible en annexe D. Dans tous les cas, les résultats de la nouvelle simulation seront simplement désignés par *Froid* ou *Chaud* selon le côté du profil tracé. Les résultats donnés de

cette manière, tout comme ceux correspondant à l'ancienne simulation, sont les moyennes des grandeurs dans le temps et sur le plan xOz , correspondant comme décrit en (4.1) aux moyennes statistiques.

On donne également dans chaque cas sous le nom *Spatiale* la moyenne spatiale dans le plan xOz pour le dernier pas de temps. Ceci peut donner un ordre d'idée du niveau typique des fluctuations autour de la moyenne. Enfin, on donne la moyenne temporelle et spatiale des grandeurs pour un *autre temps*, statistiques obtenues en moyennant sur une durée 2 fois plus faible, donnant une indication de la convergence des résultats.

4.2.1 Profil de vitesse longitudinale

On a tracé sur la figure 4.2 le profil de la vitesse longitudinale dans le canal, c'est-à-dire de la vitesse principale de l'écoulement, en utilisant l'adimensionnement classique. On notera avant de discuter de la physique de ces résultats que les profils des deux simulations sont confondus, validant nos résultats.

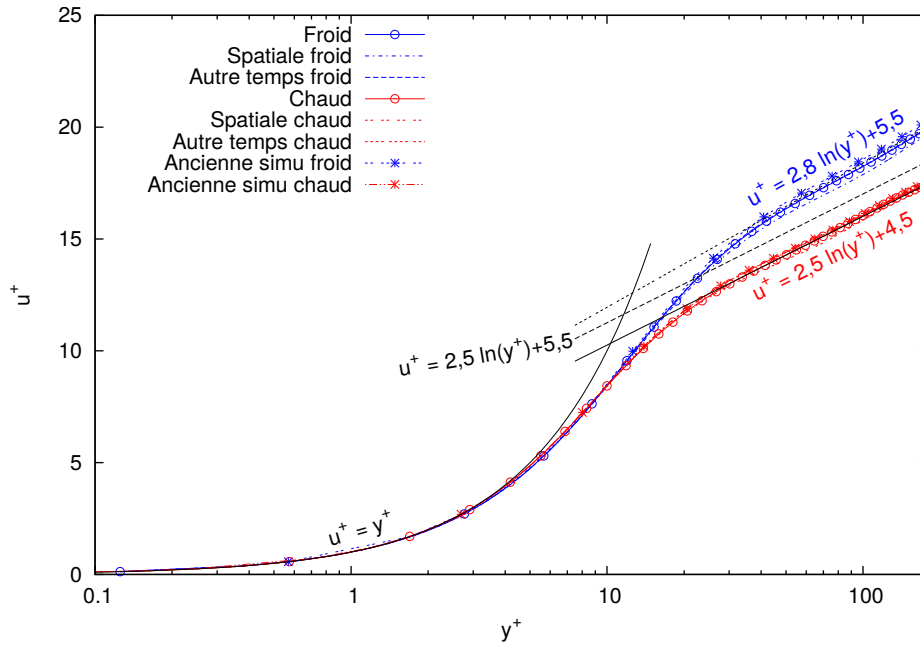


FIGURE 4.2 – Vitesse longitudinale, adimensionnement classique.

La vitesse longitudinale moyenne suit une loi linéaire en proche paroi, dans la sous-couche visqueuse.

$$u^+ = y^+ \quad (4.12)$$

Loin de la paroi, le profil est logarithmique,

$$u^+ = a \ln(y^+) + b \quad (4.13)$$

mais la valeur des coefficients a et b dépend du côté du canal. On a $a = 2,8$ et $b = 5,5$ du côté froid, $a = 2,5$ et $b = 4,5$ du côté chaud. Cette asymétrie entre les profils

côté froid et côté chaud illustre le couplage entre la vitesse et la température dans l'écoulement. Par ailleurs, aucun de ces deux profils ne respectent la loi classique $a = 2,5$ et $b = 5,5$.

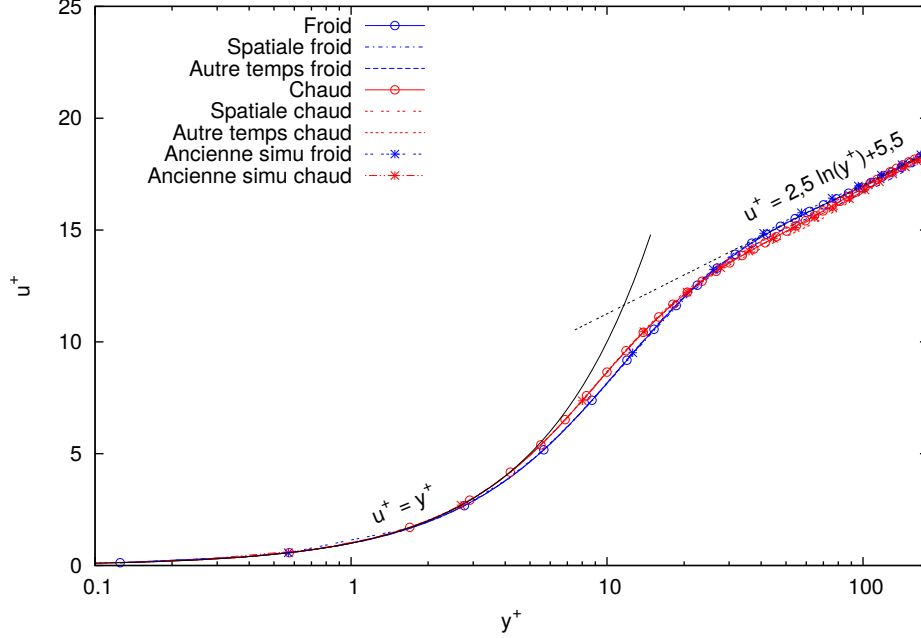


FIGURE 4.3 – Vitesse longitudinale, adimensionnement de Van Driest.

Le profil de la vitesse longitudinale avec l'adimensionnement de Van Driest est tracé sur la figure 4.3. Cet adimensionnement particulier correspond à la prise en compte d'une vitesse verticale dans l'écoulement du fait des variations de la masse volumique avec la température. Son expression est [13] :

$$U_{VD}^+ = \frac{2}{Pr_\tau T_\tau / T_\omega} \left(1 - \sqrt{Pr_\tau T_\tau / T_\omega U / U_\tau} \right) \quad (4.14)$$

Avec cet adimensionnement, les profils du côté chaud et du côté froid sont confondus et respectent de plus la loi de paroi classique. On arrive donc à modéliser et prédire le profil de la vitesse dans un écoulement fortement anisotherme par cet adimensionnement, et donc à comprendre cette asymétrie.

4.2.2 Profil des fluctuations de la vitesse transverse

On a tracé sur la figure 4.4 le profil des fluctuations de la vitesse transverse dans le canal en utilisant l'adimensionnement classique. Ces résultats sont d'une importance particulière puisque les fluctuations de vitesse sont directement liées au transfert de chaleur entre la paroi et le fluide, et donc à la performance du récepteur solaire.

Le résultat important de l'observation de cette courbe est la forte asymétrie entre les fluctuations de vitesse côté froid et côté chaud. Les fluctuations de vitesse sont

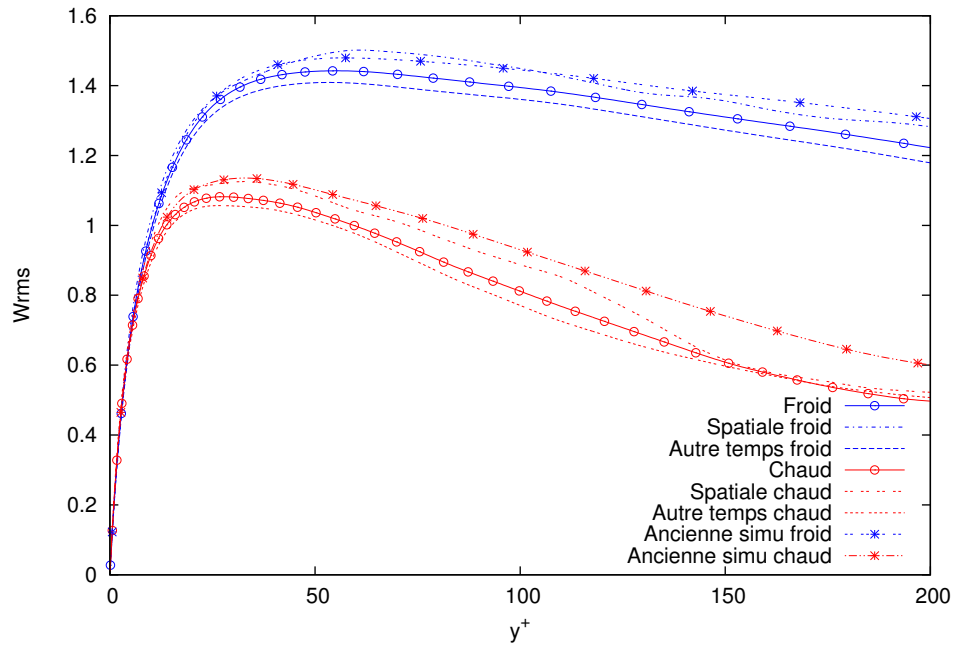


FIGURE 4.4 – Écart-type des fluctuations de la vitesse transverse, adimensionnement classique.

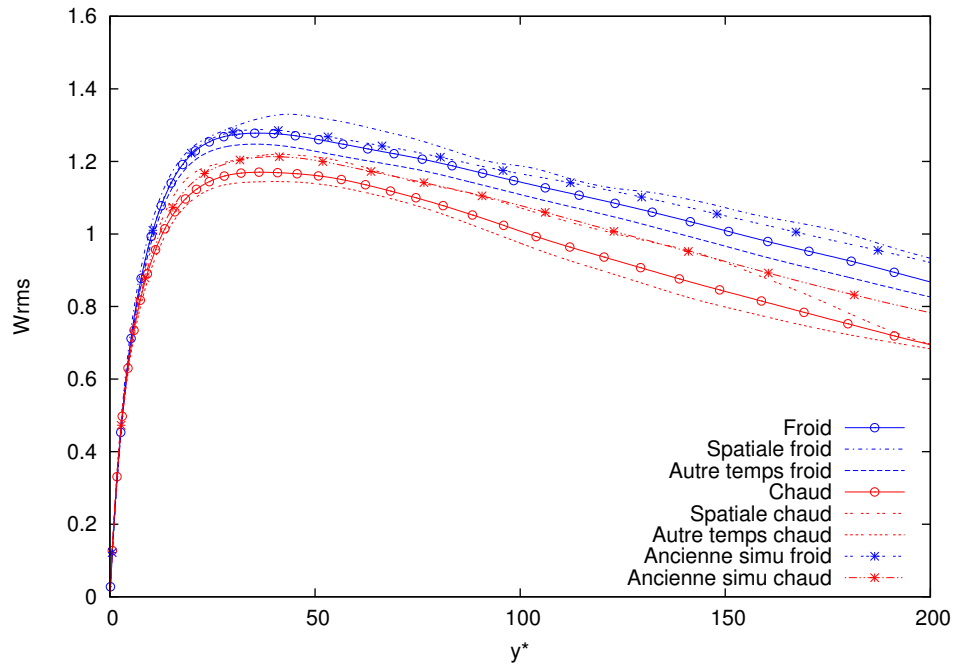


FIGURE 4.5 – Écart-type des fluctuations de la vitesse transverse, adimensionnement semi-local.

beaucoup plus importantes du côté froid que du côté chaud. Ce comportement est un problème du point de vue de l'application puisque l'on cherche à maximiser les transferts de chaleur entre la paroi chaude et le fluide, et donc à avoir des fluctuations

de vitesse les plus importantes possibles du côté chaud.

L'utilisation d'un adimensionnement semi-local sur la figure 4.5, prenant en compte les variations de propriétés du fluide avec la température, ne permet pas de faire disparaître complètement l'asymétrie entre le côté chaud et le côté froid. Cela montre que le couplage entre la vitesse et la température est *fort*.

Il existe un écart non négligeable entre les résultats de l'ancienne et de la nouvelle simulation sur les profils des fluctuations. De manière générale, il n'est pas étonnant que l'on ait un écart plus important sur les profils des fluctuations que sur la simple vitesse moyenne car c'est une grandeur d'ordre plus élevée, nécessitant une description plus précise de l'écoulement.

On remarquera par ailleurs que le profil des fluctuations n'est pas confondu avec le profil donné pour un *autre temps*, statistiques pour un temps de simulation deux fois plus court. Cela signifie que la nouvelle simulation, très précise du point de vue du maillage, n'est donc pas parfaitement convergée en temps.

4.2.3 Résultats globaux sur l'écoulement.

L'objectif de l'optimisation des performances d'un récepteur solaire est d'intensifier au maximum les transferts de chaleur entre la paroi et le fluide tout en minimisant les pertes de charge. Il est donc particulièrement intéressant de comparer les résultats des deux simulations suivant ces grandeurs.

On va plus précisément étudier la densité de flux de chaleur à la paroi,

$$\phi_\omega = \langle \lambda \rangle_\omega \left. \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \right|_\omega \quad (4.15)$$

directement liée au flux de chaleur et la contrainte de cisaillement à la paroi,

$$\tau_\omega = \langle \mu \rangle_\omega \left. \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \right|_\omega \quad (4.16)$$

directement liée aux pertes de charge.

Les résultats pour ces deux grandeurs sont donnés sur la table 4.1 pour les deux simulations. On donne pour ces deux quantités les valeurs du côté chaud et côté froid. Pour la densité de flux, la conservation de l'énergie sur le domaine impose que l'on doit trouver la même valeur en valeur absolue côté froid et chaud et on donnera également la moyenne des densités de flux entre les deux côtés. Pour la contrainte de cisaillement, il n'y a à priori aucune raison que les valeurs soient identiques entre les deux côtés.

On remarque qu'il existe pour l'ancienne simulation un écart très important entre la densité de flux de chaleur calculé du côté froid et du côté chaud. Cette différence indique que la conservation de l'énergie dans le domaine n'est pas respectée et justifie la volonté de développer un nouvel algorithme de résolution permettant de mieux garantir cette conservation.

Pour la nouvelle simulation, l'écart de résultat entre les deux côtés est considérablement réduit mais on a toujours un écart de 12% entre les deux côtés. On ne

TABLE 4.1 – Comparaison des résultats de la nouvelle simulation et de l'ancienne sur la densité de flux de chaleur et la contrainte de cisaillement à la paroi.

	Ancienne simulation	Nouvelle simulation
ϕ_ω coté froid (W/m ²)	−4699,9	−3894,3
ϕ_ω coté chaud (W/m ²)	2803,2	3388,5
ϕ_ω moyen (W/m ²)	3751,6	3641,4
τ_ω coté froid (Pa)	0,3802	0,2528
τ_ω coté chaud (Pa)	0,3497	0,2232

peut dire à l'heure actuelle dans quelle mesure la non convergence en temps des statistiques peut expliquer cette différence.

5 Étude de l'énergie cinétique turbulente

L'énergie cinétique turbulente définie comme la demi-somme des carrés des fluctuations de vitesse est un paramètre fondamental des écoulements turbulents.

$$E_c(y) = \frac{1}{2} \left\langle \sum_i u'_i(x, y, z, t) u'_i(x, y, z, t) \right\rangle \quad (5.1)$$

Son intensité et sa répartition, à la fois spatiale et fréquentielle, sont caractéristiques de chaque type d'écoulement et en même temps universelles puisque de nombreuses similarités existent.

Sa décomposition en différents termes nous renseigne sur les statistiques du transfert énergétique entre composantes de l'agitation turbulente. Ce processus énergétique s'articule autour de trois éléments majeurs :

- La *production*, échange énergétique du mouvement moyen vers l'agitation turbulente ;
- La *redistribution*, transfert d'énergie interne aux fluctuations, par exemple entre différentes échelles de tourbillons. Les dénominations *terme de transfert* et *diffusion* se rapportent à ce type d'échange ;
- La *dissipation*, perte d'énergie des fluctuations, vers une augmentation de la température. Le transfert inverse de la température vers les fluctuations est impossible. Aussi, les termes de dissipation ont pour particularité d'être toujours négatif.

La répartition de l'énergie cinétique turbulente est bien connue dans le cas d'un écoulement incompressible dans les domaines spatial et spectral. Ce n'est pas le cas de l'étude de l'énergie cinétique turbulente dans le cas d'un écoulement fortement anisotherme caractéristique de ceux présents dans les récepteurs solaires.

On se propose donc dans cette partie d'exprimer l'énergie cinétique turbulente pour ce type d'écoulement. Les différents termes seront décomposés de manière à retrouver les termes présents dans le cas incompressible. Ceci permettra de faire

apparaître les termes spécifiques au couplage entre la vitesse et la température dans ce type d'écoulement, notamment les termes non nuls car l'hypothèse d'incompressibilité n'est plus applicable ou du fait des variations des propriétés du fluide avec la température. Par ailleurs, cela permet de se rapprocher à des fins de validation de l'écriture des termes dans le cas incompressible présente dans la littérature.

Ce travail d'écriture de l'énergie cinétique turbulente se place dans la continuité des travaux de Frédéric Aulery lors de sa thèse [6]. Cette analyse est réalisée dans le cas particulier de l'écoulement dans un canal plan bipériodique et tirera parti des conditions de symétrie et d'homogénéité de ce type d'écoulement.

5.1 Formulation dans le domaine spatial

On cherche ici à faire le bilan de l'énergie cinétique turbulente dans le domaine physique. On part pour cela de l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour un écoulement anisotherme à faible nombre Mach :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \quad (5.2)$$

On la multiplie par u'_i et on utilise la décomposition de Reynolds des vitesse en partie fluctuante et partie moyenne $U_i = \overline{U_i} + u'_i$

$$\begin{aligned} u'_i \frac{\partial U_i + u'_i}{\partial t} + u'_i (\overline{U_j} + u'_j) \frac{\partial \overline{U_i} + u'_i}{\partial x_j} = & -\frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i} + \frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ & - \frac{2}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

On veut faire apparaître dans cette équation $E = \frac{1}{2} u'_i u'_i$, lié à l'énergie cinétique turbulente E_c par $E_c = \overline{E}$. On remarque tout d'abord pour cela :

$$\begin{aligned} u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial t} &= \frac{\partial E}{\partial t} \\ u'_i (\overline{U_j} + u'_j) \frac{\partial \overline{U_i} + u'_i}{\partial x_j} &= u'_i \overline{U_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + u'_i u'_j \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \overline{U_j} \frac{\partial E}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial E}{\partial x_j} \end{aligned}$$

On prend ensuite la moyenne statistique de l'équation (5.3) pour faire apparaître l'énergie cinétique turbulente :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{E}}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \overline{u'_j \frac{\partial E}{\partial x_j}} &= -\overline{\frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i}} \\ &+ \overline{\frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right]} - \overline{\frac{2u'_i}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right)} \end{aligned} \quad (5.4)$$

On considère désormais un écoulement établi, stationnaire en canal bipériodique ($\frac{\partial \bar{}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{}}{\partial z} = 0$). Ces simplifications conduisent à l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 \overbrace{\frac{\partial \bar{E}}{\partial y}}^{\text{Thermique}} + \underbrace{\overline{u'_x u'_y} \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial y}}_{\text{Production turbulente}} + \underbrace{\overline{u'_y u'_y} \frac{\partial \bar{U}_y}{\partial y}}_{\text{Production thermique turbulente}} = \underbrace{-\overline{u'_j \frac{\partial \bar{E}}{\partial x_j}}}_{\text{Diffusion turbulente}} - \underbrace{\overline{\frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i}}}_{\text{Diffusion par la pression}} \\
 + \underbrace{\overline{\frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2u'_i}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} \right)}}_{\text{diffusion visqueuse et dissipation}}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

On va maintenant chercher à décomposer cette équation pour faire apparaître les termes nuls dans le cas isotherme. On va écrire pour chaque terme lorsque c'est possible à décomposer en faisant apparaître la divergence de la vitesse, car celle-ci est nulle dans le cas isotherme :

$$\overline{u'_j \frac{\partial \bar{E}}{\partial x_j}} = \overline{\frac{\partial u'_y \bar{E}}{\partial y}} - \overline{\bar{E} \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} \tag{5.6}$$

$$\overline{\frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i}} = \overline{\frac{1}{\rho} \frac{\partial u'_i P_{dyn}}{\partial x_i}} - \overline{\frac{P_{dyn}}{\rho} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i}} \tag{5.7}$$

Pour décomposer l'ensemble dissipation-diffusion, on le sépare en trois parties I, J et K , puis on décompose chaque terme séparément. Pour simplifier l'écriture on n'écrira pas l'opérateur de moyenne statistique de la décomposition.

$$\begin{aligned}
 \overline{\frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right]} - \overline{\frac{2u'_i}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} \right)} = \underbrace{\overline{\frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right]}}_I + \underbrace{\overline{\frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right]}}_J \\
 - \underbrace{\overline{\frac{2u'_i}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} \right)}}_K
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

avec,

$$\begin{aligned}
 I &= \overline{\frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right]} = \overline{\frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right]} + \overline{\frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right]} \\
 &= \overline{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u'_i \mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right]} - \overline{\frac{1}{\rho} \mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \overline{\frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}} + \overline{u'_i \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2}} \\
 &= \overline{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\mu}{2} \frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j} \right]} - \overline{\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} + \overline{\frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial y}} + \overline{u'_i \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial y^2}} \\
 &= \underbrace{\overline{\nu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial z^2}}}_{\text{Diffusion visqueuse}} + \underbrace{\overline{\nu \left(\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial z^2} \right)}}_{\text{Diffusion visqueuse thermique}} - \underbrace{\overline{\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2}}_{\text{dissipation}} + \overline{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{E}}{\partial x_j}} + \overline{\frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial y}} + \overline{u'_i \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial y^2}}
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$J = \frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] = u'_i \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} + \frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \quad (5.10)$$

$$K = \frac{2 u'_i}{3 \rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) = \frac{2}{3} u'_i \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} + \frac{2 u'_i}{3 \rho} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \quad (5.11)$$

Tout pris en compte, on déduit de (5.5) l'équation finale de bilan de l'énergie cinétique turbulente :

$$\begin{aligned}
0 = & - \overbrace{\frac{u'_x u'_y}{\rho} \frac{\partial \overline{U_x}}{\partial y}}^{\text{Production}} - \overbrace{\frac{u'_y u'_y}{\rho} \frac{\partial \overline{U_y}}{\partial y}}^{\text{Thermique}} - \overbrace{\frac{\partial u'_y E}{\partial y}}^{\text{Diffusion turbulente}} - \overbrace{\frac{\partial \overline{E}}{\partial y}}^{\text{Thermique}} \\
& - \overbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial u'_y P_{dyn}}{\partial y}}^{\text{Diffusion par la Pression}} - \overbrace{\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u'_x P_{dyn}}{\partial x} + \frac{\partial u'_z P_{dyn}}{\partial z} \right)}^{\text{Thermique}} + \overbrace{\nu \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial y^2}}^{\text{Diffusion visqueuse}} + \overbrace{\nu \left(\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial z^2} \right)}^{\text{Thermique}} \\
& + \overbrace{\frac{P_{dyn}}{\rho} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i}}^{\text{Pression}} + \overbrace{\frac{E}{\rho} \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}}^{\text{Turbulente}} + \overbrace{\frac{1}{3} u'_i \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} - \frac{2 u'_i}{3 \rho} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_j}}^{\text{Visqueuse}} - \overbrace{\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2}^{\text{dissipation}} \\
& + \overbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left[\frac{\partial E}{\partial x_j} + u'_y \frac{\partial \overline{U_y}}{\partial x_j} \right]_{x_j=y} + u'_x \frac{\partial \overline{U_x}}{\partial x_j} \Big|_{x_j=y} + u'_i \frac{\partial U_j}{\partial x_i}}^{\text{Terme visqueux lie aux variations de viscosite}} + \underbrace{\overline{u'_y \nu} \frac{\partial^2 \overline{U_y}}{\partial y^2} + \overline{u'_x \nu} \frac{\partial^2 \overline{U_x}}{\partial y^2}}_{\text{diffusion scalaire}}
\end{aligned} \quad (5.12)$$

5.2 Formulation dans l'espace spectral

On cherche maintenant à exprimer l'énergie cinétique turbulente dans le domaine spectral. Pour étudier les différentes contributions de l'équation de l'énergie cinétique turbulente, nous appliquons une transformée de Fourier à l'équation (5.2), équation de conservation de la quantité de mouvement pour un écoulement anisotherme à faible nombre de Mach.

La transformée de Fourier, dans un plan xOz parallèle aux parois, d'une fonction $g(x, y, z)$ est définie comme [14, p. 157, 5.3] :

$$F_k^y \{g(x, y, z)\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int g(x, y, z) \exp(-i \underline{k} \cdot \underline{x}) d\underline{x} = \widehat{g}(\underline{k}, y)$$

où $\underline{x} = (x, z)$ est le vecteur position dans le plan xOz et $\underline{k} = (k_x, k_z)$ est le vecteur d'onde dans le plan $k_x Ok_z$. La transformée de Fourier de la fonction g sera notée \widehat{g} . Avec cette définition, la transformée inverse s'écrit :

$$g(x, y, z) = \int \widehat{g}(\underline{k}, y) \exp(i \underline{k} \cdot \underline{x}) d\underline{k}$$

L'équation (5.2) devient :

$$\frac{\partial \widehat{u'_i}}{\partial t} + \widehat{U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \widehat{\frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i}} + F_k^y \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \right] \quad (5.13)$$

On utilise une décomposition de Reynolds des vitesses en partie fluctuante et partie moyenne. On utilisera indifféremment les notations $\overline{\cdot}$ et $\langle \cdot \rangle$ pour désigner l'opération de moyenne statistique.

On commence par s'intéresser à $\widehat{U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}$

$$\begin{aligned} \widehat{U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} &= \widehat{u'_j \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}} + \overline{U_j} \widehat{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \widehat{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \\ &= \widehat{u'_j \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}} + \overline{U_j} \widehat{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \frac{\partial \widehat{u'_j u'_i}}{\partial x_j} - u'_i \widehat{\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} \end{aligned}$$

on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u'_i}}{\partial t} + \widehat{u'_j \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}} + \overline{U_j} \widehat{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \frac{\partial \widehat{u'_j u'_i}}{\partial x_j} - u'_i \widehat{\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} &= -\frac{1}{\rho} \widehat{\frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i}} \\ &+ F_k^y \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.14)$$

On multiplie ensuite par $\widehat{u'_i}^*$, le complexe conjugué de $\widehat{u'_i}$

$$\begin{aligned} \widehat{u'_i}^* \frac{\partial \widehat{u'_i}}{\partial t} + \widehat{u'_i}^* \widehat{u'_j \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}} + \widehat{u'_i}^* \overline{U_j} \widehat{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \widehat{u'_i}^* \frac{\partial \widehat{u'_j u'_i}}{\partial x_j} - \widehat{u'_i}^* u'_i \widehat{\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} &= -\widehat{u'_i}^* \frac{1}{\rho} \widehat{\frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i}} \\ &+ \widehat{u'_i}^* F_k^y \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.15)$$

On peut simplifier les deuxième et troisième termes du membre de gauche de l'équation en considérant les conditions de symétrie et d'homogénéité de l'écoulement ($\overline{U_z} = 0, \frac{\partial \overline{f}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 0$) :

$$\begin{aligned} \widehat{u'_i}^* \widehat{u'_j \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}} &= \widehat{u'_x}^* \widehat{u'_y} \frac{\partial \overline{U_x}}{\partial y} + \widehat{u'_y}^* \widehat{u'_y} \frac{\partial \overline{U_y}}{\partial y} \\ \widehat{u'_i}^* \overline{U_j} \widehat{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} &= \overline{U_y} \widehat{u'_i}^* \frac{\partial \widehat{u'_i}}{\partial y} + \overline{U_x} \widehat{u'_i}^* \frac{\partial \widehat{u'_i}}{\partial x} \end{aligned}$$

On note C_{ij} le tenseur de corrélation des vitesses. Dans notre cas, on ne fait les corrélations que dans les directions x et z . Avec la notation $\underline{r} = (r_x, r_z)$, il s'écrit donc :

$$C_{ij}(\underline{r}, y) = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_S u'_i(x, y, z, t) u'_j(x + r_x, y, z + r_z, t) dx dz \quad (5.16)$$

L'énergie cinétique turbulente peut donc s'écrire [14, p. 176, 5.79b]

$$E_c(y) = \frac{1}{2} \left\langle \sum_i u'_i(\underline{x}, t) u'_i(\underline{x}, t) \right\rangle = \frac{1}{2} C_{ii}(\underline{0}, y) \quad (5.17)$$

où la notation $\langle \cdot \rangle$ représente la moyenne statistique. On exprime alors $C_{ii}(\underline{0}, y)$ en terme de sa transformée de Fourier inverse :

$$\frac{1}{2}C_{ii}(\underline{0}, y) = \frac{1}{2} \int_{\underline{k}} \widehat{C}_{ii}(\underline{k}, y) d\underline{k} \quad (5.18)$$

Le tenseur \widehat{C}_{ii} peut être vu comme une corrélation des vitesses dans l'espace de Fourier. En effet, on peut écrire [14, p. 174, 5.73b] :

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{u}'_i(\underline{k}', y, t) \widehat{u}'_i(\underline{k}, y, t) \right\rangle &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^4 \int e^{-i(\underline{k}' \cdot \underline{x} + \underline{k} \cdot \underline{x}')} \left\langle \widehat{u}'_i(\underline{x}', y, t) \widehat{u}'_i(\underline{x}, y, t) \right\rangle d\underline{x}' d\underline{x} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^4 \iiint e^{-i(\underline{k} + \underline{k}') \cdot \underline{x}} d\underline{x} d\underline{z} \int C_{ii}(\underline{r}, y) e^{-i(\underline{k} \cdot \underline{r})} d\underline{r} \end{aligned}$$

On obtient alors [14, p.175, 5.74]

$$\left\langle \widehat{u}'_i(\underline{k}', y, t) \widehat{u}'_i(\underline{k}, y, t) \right\rangle = \widehat{C}_{ii}(\underline{k}, y) \delta(\underline{k} + \underline{k}') \quad (5.19)$$

en utilisant les propriétés [14, p.157, 5.5]

$$\delta(\underline{k}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}} d\underline{x} \quad (5.20)$$

et [14, p.174, 5.72]

$$\widehat{C}_{ij}(\underline{k}, y) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int C_{ij}(\underline{r}, y) e^{-i(\underline{k} \cdot \underline{r})} d\underline{r} \quad (5.21)$$

En posant $\underline{k}' = -\underline{k}$, (5.19) devient :

$$\left\langle \widehat{u}'_i^*(\underline{k}, y, t) \widehat{u}'_i(\underline{k}, y, t) \right\rangle = \widehat{C}_{ii}(\underline{k}, y) \delta(0) \quad (5.22)$$

avec l'aide de la propriété [14, p.165, 5.46]

$$\widehat{u}'_i^*(\underline{k}, y, t) = \widehat{u}'_i(-\underline{k}, y, t) \quad (5.23)$$

En combinant les équations (5.17), (5.18) et (5.22), on peut exprimer l'énergie cinétique turbulente par :

$$E_c(y) = \frac{1}{2\delta(0)} \int_{\underline{k}} \left\langle \widehat{u}'_i^*(\underline{k}, y, t) \widehat{u}'_i(\underline{k}, y, t) \right\rangle d\underline{k} \quad (5.24)$$

On définit alors $\widehat{E}(\underline{k}, y)$ par

$$E_c(y) = \frac{1}{\delta(0)} \int_{\underline{k}} \widehat{E}(\underline{k}, y) d\underline{k}$$

on peut alors l'écrire sous la forme

$$\widehat{E}(\underline{k}, y) = \frac{1}{2} \left\langle \widehat{u}'_i^*(\underline{k}, y, t) \widehat{u}'_i(\underline{k}, y, t) \right\rangle \quad (5.25)$$

En remarquant que (et en considérant la somme sur l'indice i)

$$\frac{\partial \widehat{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \widehat{u}_i'^* \widehat{u}_i'}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \Re \left(\widehat{u}_i'^* \frac{\partial \widehat{u}_i'}{\partial t} \right) \right\rangle \quad (5.26)$$

On arrive à l'équation finale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{E}}{\partial t}(\underline{k}, t) = & \left\langle \Re \left(-\widehat{u}_x'^* \widehat{u}_y' \frac{\partial \overline{U}_x}{\partial y} - \widehat{u}_y'^* \widehat{u}_y' \frac{\partial \overline{U}_y}{\partial y} - \overline{U}_y \widehat{u}_i'^* \frac{\partial \widehat{u}_i'}{\partial y} - \widehat{u}_i'^* \frac{\partial \widehat{u}_j' u_j'}{\partial x_j} + \widehat{u}_i'^* \widehat{u}_i' \frac{\partial \widehat{u}_j'}{\partial x_j} \right. \right. \\ & \left. \left. - \widehat{u}_i'^* \frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{P}_{dyn}}{\partial x_i} + \widehat{u}_i'^* F_k^y \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \right] \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (5.27)$$

On notera que le terme $\Re(\overline{U}_x \widehat{u}_i'^* \frac{\partial \widehat{u}_i'}{\partial x})$ s'annule car $\overline{U}_x \widehat{u}_i'^* \frac{\partial \widehat{u}_i'}{\partial x} = ik_x \overline{U}_x \widehat{u}_i'^* \widehat{u}_i'$ est un imaginaire pur.

Pour étudier les transferts d'énergie, on va maintenant exprimer cette variation comme la somme des trois mécanismes : la production Π , la redistribution ζ et la dissipation ε . On arrive ainsi à une décomposition du transfert d'énergie en sous-mécanismes :

$$\frac{\partial \widehat{E}}{\partial t}(k, y) = \Pi(k, y) + \zeta(k, y) + \varepsilon(k, y) \quad (5.28)$$

FIGURE 5.1 – Décomposition du transfert d'énergie en trois sous-mécanismes.

Au final, les différents termes sont :

— La *production turbulente* :

$$\Pi_I(k, y) = \int_{k=\|\underline{k}\|} - \left\langle \Re \left(\widehat{u}_x'^* \widehat{u}_y' \frac{\partial \overline{U}_x}{\partial y} \right) \right\rangle d\underline{k} \quad (5.29)$$

— Le *transfert triadique*, une redistribution, qui fait intervenir des produits triples de vitesses :

$$\text{dans le plan,} \quad T_{in}(k, y) = \int_{k=\|\underline{k}\|} - \left\langle \Re \left(\sum_i \sum_{j=x,z} \widehat{u}_i'^* \frac{\partial \widehat{u}_i' u_j'}{\partial x_j} \right) \right\rangle d\underline{k} \quad (5.30)$$

$$\text{inter-plan,} \quad T_{it}(k, y) = \int_{k=\|\underline{k}\|} - \left\langle \Re \left(\sum_i \widehat{u}_i'^* \frac{\partial \widehat{u}_i' u_y'}{\partial y} \right) \right\rangle d\underline{k} \quad (5.31)$$

- Le *terme thermique*, qui regroupe des termes nuls en incompressible et donc spécifiques au cas anisotherme :

$$\Gamma(k, y) = \int_{k=\|\underline{k}\|} - \left\langle \Re \left(\widehat{u}_y'^* \widehat{u}_y' \frac{\partial \overline{U}_y}{\partial y} + \sum_i \left[\overline{U}_y \widehat{u}_i'^* \frac{\partial \widehat{u}_i'}{\partial y} - \sum_j \widehat{u}_i'^* \widehat{u_j'} \frac{\partial \widehat{u_j'}}{\partial x_j} \right] \right) \right\rangle d\underline{k} \quad (5.32)$$

- Le *transfert par la pression*, à priori une redistribution, dont les termes font intervenir la pression dynamique :

$$\text{dans le plan,} \quad \Phi_{in}(k, y) = \int_{k=\|\underline{k}\|} - \left\langle \Re \left(\sum_{i=x,z} \widehat{u}_i'^* \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{dyn}}{\partial x_i} \right) \right\rangle d\underline{k} \quad (5.33)$$

$$\text{inter-plan,} \quad \Phi_{it}(k, y) = \int_{k=\|\underline{k}\|} - \left\langle \Re \left(\widehat{u}_y'^* \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{dyn}}{\partial y} \right) \right\rangle d\underline{k} \quad (5.34)$$

- Le *terme visqueux*, qui regroupe diffusion visqueuse et dissipation :

$$D(k, y) = \int_{k=\|\underline{k}\|} \left\langle \Re \left(\widehat{u}_i'^* F_k^y \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) \right] \right) \right\rangle d\underline{k} \quad (5.35)$$

On précise que notre problème est statistiquement stationnaire donc $\frac{\partial \overline{\cdot}}{\partial t} = 0$. Dans la pratique, le calcul des moyennes statistiques est réalisé par une moyenne sur x, z et t lorsque l'on est dans le domaine spatial et sur t seulement dans le domaine spectral.

On va maintenant décomposer encore plus les termes. On notera que la terminologie de tous les termes non présents dans le cas isotherme est imprécise car on n'a pas encore déterminé le sens physique de chaque terme.

5.2.1 Décomposition du terme thermique

On va séparer le terme thermique en trois parties :

- La *production thermique turbulente* :

$$\Gamma_{\Pi}(k, y) = \int_{k=\|\underline{k}\|} - \left\langle \Re \left(\widehat{u}_y'^* \widehat{u}_y' \frac{\partial \overline{U}_y}{\partial y} \right) \right\rangle d\underline{k} \quad (5.36)$$

- Le *transport d'énergie cinétique turbulente* (on remarque que l'on peut faire apparaître l'énergie cinétique) :

$$\Gamma_E(k, y) = \int_{k=\|\underline{k}\|} - \left\langle \Re \left(\sum_i \overline{U}_y \widehat{u}_i'^* \frac{\partial \widehat{u}_i'}{\partial y} \right) \right\rangle d\underline{k} = \int_{k=\|\underline{k}\|} - \left\langle \overline{U}_y \frac{\partial \widehat{E}}{\partial y} \right\rangle d\underline{k} \quad (5.37)$$

- La *déformation turbulente*, qui fait intervenir la divergence de la vitesse :

$$\Gamma_F(k, y) = \int_{k=\|\underline{k}\|} - \left\langle \Re \left(\sum_i \sum_j - \widehat{u}_i'^* \widehat{u_j'} \frac{\partial \widehat{u_j'}}{\partial x_j} \right) \right\rangle d\underline{k} \quad (5.38)$$

5.2.2 Décomposition du terme visqueux

On va maintenant décomposer le terme visqueux afin de séparer au maximum l'influence de la dissipation et de la diffusion visqueuse. Pour cela, on repart sur son écriture spatiale :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \quad (5.39)$$

$$= \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \quad (5.40)$$

De même on pourra écrire :

$$-\frac{2}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) = -\frac{2\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} - \frac{2}{3\rho} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \quad (5.41)$$

Ainsi on aura deux termes, un dépendant principalement des variations de propriétés du fluide, l'autre de la divergence de la vitesse.

Ce qui fait qu'on finit avec trois termes dans l'espace spectral :

$$D_{pseudo-inc}(k, y) = \int_{k=\|\underline{k}\|} \left\langle \Re \left(\widehat{u}_i^* F_k^y \left[\nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \right] \right) \right\rangle d\underline{k} \quad (5.42)$$

$$D_{mu}(k, y) = \int_{k=\|\underline{k}\|} \left\langle \Re \left(\widehat{u}_i^* F_k^y \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right] \right) \right\rangle d\underline{k} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} D_{div}(k, y) &= \int_{k=\|\underline{k}\|} \left\langle \Re \left(\widehat{u}_i^* F_k^y \left[\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{2\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right] \right) \right\rangle d\underline{k} \\ &= \int_{k=\|\underline{k}\|} \left\langle \Re \left(\widehat{u}_i^* F_k^y \left[\frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right] \right) \right\rangle d\underline{k} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Ici, le terme $D_{pseudo-inc}$ est un terme *pseudo-incompressible* dans le sens où il s'écrit de la même manière que s'écrirait le terme visqueux en incompressible mais il est néanmoins différent du fait des variations de viscosité et de masse volumique. Pour retrouver un terme vraiment incompressible et se rapprocher de l'écriture de Bolotnov et al. [15], on utilise la décomposition de Reynolds $\nu = \bar{\nu} + \nu'$:

$$D_{pseudo-inc}(k, y) = \int_{k=\|\underline{k}\|} \left\langle \Re \left(\widehat{u}_i^* \bar{\nu} F_k^y \left[\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} \right] + \widehat{u}_i^* F_k^y \left[\nu' \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \right] \right) \right\rangle d\underline{k} \quad (5.45)$$

On fait alors apparaître le terme D_{inc} que l'on peut décomposer à la manière de Bolotnov et al. [15] en utilisant les propriétés (5.51) sur la transformée de Fourier d'une dérivée.

$$D_{inc}(k, y) = \int_{k=\|\underline{k}\|} \left\langle \Re \left(\widehat{u}_i^* \bar{\nu} F_k^y \left[\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} \right] \right) \right\rangle d\underline{k} \quad (5.46)$$

$$= \int_{k=\|\underline{k}\|} \left\langle \Re \left(\widehat{u}_i^* \bar{\nu} \frac{\partial^2 \widehat{u}_i}{\partial y^2} - \bar{\nu} (k_x^2 + k_z^2) \widehat{u}_i^* \widehat{u}_i \right) \right\rangle d\underline{k} \quad (5.47)$$

En remarquant par ailleurs,

$$\Re \left(\widehat{u}_i^* \frac{\partial^2 \widehat{u}_i}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \widehat{u}_i^* \widehat{u}_i}{\partial y^2} - \frac{\partial \widehat{u}_i^*}{\partial y} \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial y} \quad (5.48)$$

on trouve au final :

$$D_{inc}(k, y) = \int_{k=\|\underline{k}\|} \left(\bar{\nu} \frac{\partial^2 \widehat{E}}{\partial y^2} - \underbrace{2\bar{\nu}k^2 \widehat{E}}_{Dissipation} - \bar{\nu} \left\langle \left| \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial y} \right|^2 \right\rangle \right) d\underline{k} \quad (5.49)$$

Réaliser cette décomposition permet de faire apparaître deux termes toujours négatifs que l'on peut de manière presque certaine identifier comme une dissipation.

Dans le code, on réalise le calcul de $D_{pseudo-inc}$ et de la moyenne statistique de $|\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial y}|^2$. Les termes $\bar{\nu} \frac{\partial^2 \widehat{E}}{\partial y^2}$ et $-2\bar{\nu}k^2 \widehat{E}$ sont calculés *après coup* à partir des moyennes statistiques. On peut en déduire la partie non incompressible de $D_{pseudo-inc}$ par différence entre le terme complet et la partie *vraiment* incompressible.

5.2.3 Décomposition du terme lié à la pression

Pour se rapprocher de l'écriture de Bolotnov et al. [15], on va travailler le terme de pression (somme de (5.33) et (5.34)) pour faire apparaître la divergence de la vitesse. Tout d'abord, il faut remarquer que :

$$-\widehat{u}_i^* \frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{P}_{dyn}}{\partial x_i} = -\widehat{u}_i^* \frac{\partial \widehat{\frac{P_{dyn}}{\rho}}}{\partial x_i} + \widehat{u}_i^* \widehat{P_{dyn}} \frac{\partial 1}{\partial x_i} = -\widehat{u}_i^* \frac{\partial \widehat{\frac{P_{dyn}}{\rho}}}{\partial x_i} - \widehat{u}_i^* \frac{\widehat{P_{dyn}}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (5.50)$$

On décompose ensuite le premier terme en utilisant les propriétés sur la transformée de Fourier d'une dérivée :

$$F_k^y \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = ik_x \widehat{f} \quad F_k^y \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial y} \quad F_k^y \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right] = ik_z \widehat{f} \quad (5.51)$$

On a :

$$\begin{aligned} \widehat{u}_x^* \frac{\partial \widehat{\frac{P_{dyn}}{\rho}}}{\partial x} &= ik_x \widehat{u}_x^* \frac{\widehat{P_{dyn}}}{\rho} = - \left(ik_x \widehat{u}_x \right)^* \left(\frac{\widehat{P_{dyn}}}{\rho} \right) = - \frac{\partial \widehat{u}_x^*}{\partial x} \left(\frac{\widehat{P_{dyn}}}{\rho} \right) \\ \widehat{u}_y^* \frac{\partial \widehat{\frac{P_{dyn}}{\rho}}}{\partial y} &= \widehat{u}_y^* \frac{\partial \left(\frac{\widehat{P_{dyn}}}{\rho} \right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\widehat{u}_y^* \left(\frac{\widehat{P_{dyn}}}{\rho} \right) \right) - \frac{\partial \widehat{u}_y^*}{\partial y} \left(\frac{\widehat{P_{dyn}}}{\rho} \right) \\ \widehat{u}_z^* \frac{\partial \widehat{\frac{P_{dyn}}{\rho}}}{\partial z} &= ik_z \widehat{u}_z^* \frac{\widehat{P_{dyn}}}{\rho} = - \left(ik_z \widehat{u}_z \right)^* \left(\frac{\widehat{P_{dyn}}}{\rho} \right) = - \frac{\partial \widehat{u}_z^*}{\partial z} \left(\frac{\widehat{P_{dyn}}}{\rho} \right) \end{aligned}$$

Au final,

$$-\widehat{u}_i'^* \frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{P}_{dyn}}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\widehat{u}_y'^* \left(\frac{\widehat{P}_{dyn}}{\rho} \right) \right) - \widehat{u}_i'^* \frac{\widehat{P}_{dyn}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial \widehat{u}_i'^*}{\partial x_i} \left(\frac{\widehat{P}_{dyn}}{\rho} \right) \quad (5.52)$$

Ainsi dans le cas d'un écoulement incompressible, seul le premier terme de cette expression est non nul. On ne peut cependant qualifier ce terme d'incompressible car il fait intervenir la masse volumique, variable en anisotherme.

5.2.4 Équation complète décomposée

Si l'on injecte l'ensemble des décompositions décrites dans (5.27), on arrive à l'équation finale suivante pour le bilan de l'évolution de l'énergie cinétique turbulente dans l'espace spectral :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{E}}{\partial t}(k, y) = & - \left\langle \Re \left(\underbrace{\widehat{u}_x'^* \widehat{u}_y' \frac{\partial \overline{U}_x}{\partial y}}_{\text{Production}} + \underbrace{\widehat{u}_i'^* \left(\frac{\partial \widehat{u}_i' u_x'}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{u}_i' u_z'}{\partial z} \right)}_{\substack{\text{Transfert triadique} \\ \text{dans le plan}}} + \underbrace{\widehat{u}_i'^* \frac{\partial \widehat{u}_i' u_y'}{\partial y}}_{\text{inter-plan}} \right) \right. \\ & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(\widehat{u}_y'^* \left(\frac{\widehat{P}_{dyn}}{\rho} \right) \right)}_{\text{Transfert par la pression}} + \underbrace{\widehat{u}_i'^* \frac{\widehat{P}_{dyn}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \frac{\partial \widehat{u}_i'^*}{\partial x_i} \left(\frac{\widehat{P}_{dyn}}{\rho} \right)}_{\substack{\text{Incompressible} \\ \text{Thermique}}} \\ & + \underbrace{\widehat{u}_y'^* \widehat{u}_y' \frac{\partial \overline{U}_y}{\partial y}}_{\text{Production turbulente}} + \underbrace{\overline{U}_y \frac{\partial \widehat{E}}{\partial y}}_{\text{Terme thermique}} - \underbrace{\sum_j \widehat{u}_i'^* u_i' \frac{\partial \widehat{u}_j'}{\partial x_j}}_{\text{Deformation turbulente}} - \underbrace{\widehat{u}_i'^* F_k^y \left[\frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right]}_{\substack{\text{Terme visqueux} \\ \text{en divergence}}} \\ & - \underbrace{\widehat{u}_i'^* F_k^y \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right]}_{\text{Transport d'énergie cinétique turbulente}} \\ & - \underbrace{\widehat{u}_i'^* F_k^y \left[\nu' \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \right]}_{\substack{\text{Terme visqueux lié aux variations de viscosité} \\ \text{Terme lié aux fluctuations} \\ \text{de viscosité cinématique}}} + \underbrace{\frac{\partial^2 \widehat{E}}{\partial y^2}}_{\text{Diffusion visqueuse}} - \underbrace{2\overline{\nu} k^2 \widehat{E} - \overline{\nu} \left\langle \left| \frac{\partial \widehat{u}_i'}{\partial y} \right|^2 \right\rangle}_{\text{Dissipation}} \quad (5.53) \\ & \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{Terme visqueux pseudo-incompressible}} \end{aligned}$$

Que ce soit dans les domaines spatial ou spectral, tous les termes des équations (5.12) et (5.53) ont été discrétisé et implémenté dans le code de calcul Trio_U. Des simulations sont actuellement en cours afin de calculer ces termes dans un premier temps dans le cas isotherme afin de se comparer à la littérature existante, en particulier [16] et [15].

Conclusion

Les résultats d'une simulation numérique de l'écoulement dans un canal plan bipériodique fortement anisotherme ont été post-traités, analysés, et comparés à ceux d'une simulation plus ancienne. Les profils de vitesse, de la température, de différentes corrélations et des statistiques de la turbulence en général ont été tracés des côtés chaud et froid. Bénéficiant d'un maillage très fin et d'un nouvel algorithme de résolution, cette simulation constitue malgré une convergence en temps imparfaite les résultats les plus précis que l'on ait à ce jour dans ces conditions physiques.

Par ailleurs, l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente a été écrite dans le cas d'un écoulement turbulent fortement anisotherme dans un canal plan bipériodique. Les différents termes de cette équation ont été décomposés dans le domaine spatial et dans le domaine spectral afin de retrouver les termes dans le cas incompressible et de mettre en évidence les termes spécifiques au cas anisotherme.

Tous ces termes ont été discrétisés et implémentés dans le code de calcul Trio_U afin de réaliser des simulations nous permettant d'obtenir la valeur de chacun de ces termes. Ces simulations sont en cours mais nous ne disposons d'aucun résultat au moment de la rédaction de ce manuscrit. L'analyse de la valeur des termes spécifiques au cas anisotherme devrait nous permettre de mieux comprendre ce type d'écoulement.

Cette analyse sur l'énergie cinétique réalisée du point de vue des fluctuations devra se compléter d'une étude similaire dans les domaines spatial et spectral pour le mouvement moyen et la température. Aussi, on pourra déterminer de manière plus précise le sens physique de certains termes. Les termes présents à la fois dans l'équation de l'énergie cinétique du mouvement moyen et des fluctuations avec un signe opposé correspondent avec certitude à une production. De même, les termes présents dans l'équation de la température et des fluctuations avec un signe opposé correspondent avec certitude à une dissipation.

Les résultats de la simulation analysée lors de ce stage peuvent enfin servir de résultats de référence en vue de la modélisation des écoulements présents dans les récepteurs solaires. Souhaitant poursuivre dans la recherche et travailler dans le domaine de la simulation de la turbulence, j'ai proposé ma candidature à une bourse ministère en ce sens, sous la direction d'Adrien Toutant et Françoise Bataille.

Références

- [1] Site internet du laboratoire PROMES. <http://www.promes.cnrs.fr/>. [Consulté le 24/05/2015].
- [2] Site internet du CNRS. <http://www.cnrs.fr/fr/une/credits1.htm>. [Consulté le 25/05/2015].
- [3] Wikipédia, l'encyclopédie libre. PROMES-CNRS. <http://fr.wikipedia.org/wiki/PROMES-CNRS>. [Consulté le 25/05/2015].
- [4] Claude Royère. *Éléments d'histoire des fours solaires et développements récents. In L'énergie solaire en France : actes du 118e Congrès national des sociétés historiques et scientifiques*, Pau, 1993.
- [5] Syvain Serra. *Couplage écoulements pariétaux et transferts thermiques dans les récepteurs solaires à haute température*. PhD thesis, Université de Perpignan Via Domitia, 2009.
- [6] Frédéric Auléry. *Analyse du couplage entre turbulence et gradient de température dans les écoulements pariétaux par simulations numériques fines*. PhD thesis, Université de Perpignan Via Domitia, 2013.
- [7] Roland Schiestel. *Modélisation et simulation des écoulements turbulents*. Traité des Nouvelles Technologies. Hermès, 1993.
- [8] P. Chassaing. *Turbulence en mécanique des fluides*. Cépaduès-Éditions, 2000.
- [9] Samuel Paolucci. On the filtering of sound from the Navier-Stokes equations. Technical Report SAND82-8257, SANDIA National Labs., Livermore, CA (USA), 1982.
- [10] Site internet de présentation du projet Trio_U. <http://www-trio-u.cea.fr/>. [Consulté le 12/06/2015].
- [11] Adrien Toutant and Francoise Bataille. Turbulence statistics in a fully developed channel flow submitted to a high temperature gradient. *International Journal of Thermal Sciences*, 74 :104–118, 2013.
- [12] Xavier Dagenet-Frick. *Études numériques et expérimentales des écoulements turbulents dans les échangeurs à chauffage asymétrique. Application aux récepteurs solaires à haute température*. PhD thesis, Université de Perpignan Via Domitia, 2011.
- [13] Edward R Van Driest. Turbulent boundary layer in compressible fluids. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 18(3) :145–160, 1951.
- [14] Marcel Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Fluid Mechanics and Its Applications. Springer, 2008.
- [15] Igor A Bolotnov, Richard T Lahey, Donald A Drew, Kenneth E Jansen, and Assad A Oberai. Spectral analysis of turbulence based on the DNS of a channel flow. *Computers & Fluids*, 39(4) :640–655, 2010.
- [16] Robert D Moser, John Kim, and Nagi N Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to Re=590. *Phys. Fluids*, 11(4) :943–945, 1999.
- [17] R.B. Dean. Reynolds number dependence of skin friction and other bulk flow variables in two-dimensional rectangular duct flow. 100 :215, 1978.
- [18] J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number. 177 :142, 1987.

Nomenclature

c = vitesse du son (m.s^{-1})	v = vitesse dans la direction perpendiculaire à la paroi (m.s^{-1})
C_f = coefficient de frottement	w = vitesse dans la direction transverse (m.s^{-1})
C_{ij} = tenseur de corrélation des vitesses ($\text{m}^2.\text{s}^{-2}$)	\underline{x} = vecteur position dans le plan xOz , autrement dit $\underline{x} = (x, z)$ (m)
C_p = capacité calorifique à pression constante ($\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$)	x_i = coordonnée cartésienne dans la direction i (m)
D_m = débit massique (kg.s^{-1})	x, y, z = coordonnée cartésienne dans la direction longitudinale, perpendiculaire aux parois et transverse respectivement (m)
E_c = énergie cinétique turbulente ($\text{m}^2.\text{s}^{-2}$)	δ = distribution de Dirac (m)
\widehat{E} = équivalent spectral de l'énergie cinétique turbulente (s^{-2})	λ = conductivité thermique ($\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$)
h = demi hauteur du canal (m)	μ = viscosité dynamique ($\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$)
\underline{k} = vecteur d'onde dans le plan k_xOk_z , autrement dit $\underline{k} = (k_x, k_z)$ (m^{-1})	ν = viscosité cinématique ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)
L_0 = échelle de longueur représentative de l'écoulement (m.s^{-1})	ρ = masse volumique ($\text{kg}^2.\text{m}^{-3}$)
P = pression (Pa)	ϕ_ω = densité de flux de chaleur à la paroi (W/m^2)
P_{dyn} = pression dynamique (Pa)	τ_ω = contrainte de cisaillement à la paroi (Pa)
P_{th} = pression thermodynamique (Pa)	Ma = nombre de Mach
r = constante spécifique des gaz parfaits ($\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$)	Pr = nombre de Prandtl
S = section (m^2)	Re = nombre de Reynolds
T = température (K)	Re_b = nombre de Reynolds <i>bulk</i>
t = temps (s)	Re_m = nombre de Reynolds moyen
T_τ = température de frottement (K)	Re_τ = nombre de Reynolds turbulent
U = vecteur vitesse (m.s^{-1})	rms = indice relatif à l'écart-type d'une grandeur
U_0 = vitesse caractéristique de l'écoulement (m.s^{-1})	$+$ = exposant relatif à l'adimensionnement classique
U_i = vitesse dans la direction x_i (m.s^{-1})	$*$ = exposant relatif à l'adimensionnement semi-local
U_b = vitesse moyenne sur la section dite vitesse <i>bulk</i> (m.s^{-1})	$*$ = opérateur de complexe conjugué
U_τ = vitesse de frottement (m.s^{-1})	$\langle \cdot \rangle, \bar{\cdot}$ = opérateur de moyenne statistique
u'_i = fluctuation de la vitesse dans la direction x_i (m.s^{-1})	$F_k^y[\cdot], \widehat{\cdot}$ = opérateur de transformée de Fourier
u = vitesse dans la direction longitudinale (m.s^{-1})	

A Caractéristiques de la simulation analysée

TABLE A.1 – Comparaison des caractéristiques de la nouvelle simulation et de l’ancienne.

	Ancienne simu.	Nouvelle simu.
Nb de mailles	$470 \cdot 10^6$	$2,12 \cdot 10^9$
Nb de processeurs	4096	8192
Découpage entre les cœurs	$32 \times 8 \times 16$	$32 \times 16 \times 16$
Nb de mailles par cœurs	$11 \cdot 10^3$	$26 \cdot 10^3$
Dimensions du domaine		
L_x (m)	0,187528	0,187528
L_y (m)	0,029846	0,029846
L_z (m)	0,093764	0,093764
Nombre de mailles		
N_x	1537	1536
N_y	397	897
N_z	769	1536
Tailles de mailles		
Δx	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$
Δz	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$6,1 \cdot 10^{-5}$
Δy paroi froide (m)	$3,0 \cdot 10^{-5}$	$6,8 \cdot 10^{-6}$
Δy paroi chaude (m)	$3,0 \cdot 10^{-5}$	$6,8 \cdot 10^{-6}$
Δy au milieu (m)	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$5,8 \cdot 10^{-5}$
Taille de mailles adimensionnées		
Δx^+	4,7	4,5
Δz^+	4,7	2,2
Δy^+ paroi froide	1,2	0,25
Δy^+ paroi chaude	0,47	0,10
Δy^+ au milieu	4,4	2,1

Adimensionnements utilisés :

$$\begin{aligned}
\Delta x^+ &= \frac{\Delta x \cdot U_\tau^{\text{froid}}}{\nu^{\text{froid}}} & \Delta z^+ &= \frac{\Delta z \cdot U_\tau^{\text{froid}}}{\nu^{\text{froid}}} \\
\Delta y^{+, \text{froid}} &= \frac{\Delta y^{\text{froid}} \cdot U_\tau^{\text{froid}}}{\nu^{\text{froid}}} & \Delta y^{+, \text{chaud}} &= \frac{\Delta y^{\text{chaud}} \cdot U_\tau^{\text{chaud}}}{\nu^{\text{chaud}}} \\
\Delta y^{+, \text{milieu}} &= \frac{\Delta y^{\text{milieu}} \cdot U_\tau^{\text{froid}}}{\nu^{\text{froid}}}
\end{aligned}$$

TABLE A.2 – Comparaison de quelques grandeurs caractéristiques de l'écoulement pour les résultats de la nouvelle simulation et de l'ancienne.

	Ancienne simulation	Nouvelle simulation
T_τ coté froid	-6,70	-5,83
T_τ coté chaud	5,94	7,63
U_τ coté froid	0,545	0,381
U_τ coté chaud	0,745	0,505
ν_ω coté froid	$1,414 \cdot 10^{-5}$	$1,039 \cdot 10^{-5}$
ν_ω coté chaud	$4,714 \cdot 10^{-5}$	$3,402 \cdot 10^{-5}$
μ_ω coté froid	$1,81 \cdot 10^{-5}$	$1,81 \cdot 10^{-5}$
μ_ω coté chaud	$2,97 \cdot 10^{-5}$	$2,87 \cdot 10^{-5}$
ρ_ω coté froid	1,28	1,745
ρ_ω coté chaud	0,63	0,875
Re_τ coté froid	566	547
Re_τ coté chaud	237	222
Re_τ moyen	402	385

TABLE A.3 – Comparaison des résultats de la nouvelle simulation et de l'ancienne sur la densité de flux de chaleur et la contrainte de cisaillement à la paroi.

	Ancienne simulation	Nouvelle simulation
ϕ_ω coté froid (W/m ²)	-4699,9	-3894,3
ϕ_ω coté chaud (W/m ²)	2803,2	3388,5
ϕ_ω moyen (W/m ²)	3751,6	3641,4
τ_ω coté froid (Pa)	0,3802	0,2528
τ_ω coté chaud (Pa)	0,3497	0,2232

B Discrétisation d'une dérivée seconde non centrée

Ici notre objectif est d'obtenir une dérivée seconde en 3 points non centrée pour le calcul de la dissipation interplan. On va partir de l'hypothèse que l'on connaît 3 points f^+, f^0, f^- et que l'on veut calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_c$ où c est le point au centre de la maille définie par les faces 0 et + et de dimension Δ^+ (voir figure B.1).

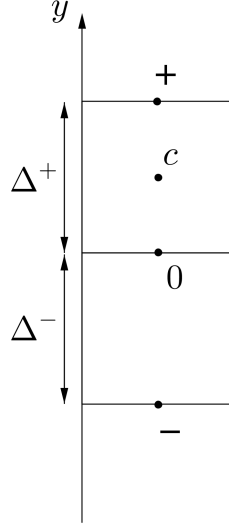


FIGURE B.1 – Les points utilisables pour construire nos schémas de discrétisation sont +, 0 et -.

On utilise le schéma suivant :

$$D \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_c \right] = 2 \frac{(f^+ - f^0) \frac{1}{\Delta^+} - (f^0 - f^-) \frac{1}{\Delta^-}}{\Delta^+ + \Delta^-} \quad (\text{B.1})$$

où la notation $D[\cdot]$ dénote la discrétisation du terme entre crochets. Dans le code, la méthode `derivee_2_aniso` réalise cette opération.

Pour déterminer l'ordre de l'opérateur, on écrit le développement limité autour de c aux points 0, + et - . On trouve :

$$\begin{aligned} f^0 &= f^c - \frac{\Delta^+}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_c + \frac{\Delta^{+2}}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_c - \frac{\Delta^{+3}}{48} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Big|_c + \dots \\ f^+ &= f^c + \frac{\Delta^+}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_c + \frac{\Delta^{+2}}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_c + \frac{\Delta^{+3}}{48} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Big|_c + \dots \\ f^- &= f^c - \left(\frac{\Delta^+}{2} + \Delta^- \right) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_c + \frac{\left(\frac{\Delta^+}{2} + \Delta^- \right)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_c - \frac{\left(\frac{\Delta^+}{2} + \Delta^- \right)^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Big|_c + \dots \end{aligned}$$

On a alors en injectant ces trois développements dans (B.1) :

$$D \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_c \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_c - \frac{1}{6} \frac{\Delta^{+2} + 3\Delta^+\Delta^- + 2\Delta^{-2}}{\Delta^+ + \Delta^-} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Big|_c + \dots$$

On a donc formé un opérateur d'ordre 1.

C Calcul du débit massique à partir de la corrélation de Dean

Notre objectif est ici de déterminer le débit massique D_m dans le canal pour obtenir le nombre de Reynolds turbulent voulu. Pour cela, on se place dans le cas d'un écoulement isotherme. Le débit massique peut alors s'écrire :

$$D_m = \int_S \langle \rho U \rangle dS = \rho S U_b \quad (\text{C.1})$$

où S la surface de la section traversée par le fluide, ρ sa masse volumique constante car on est dans le cas isotherme. $\langle U \rangle$ désigne la vitesse moyenne du fluide et U_b la moyenne de la vitesse sur la section, également appelée vitesse *bulk* et définie comme

$$U_b = \frac{1}{S} \int_S \langle U \rangle dS \quad (\text{C.2})$$

La première étape est de développer la corrélation de Dean pour lier le nombre de Reynolds turbulent au nombre de Reynolds *bulk*. Dans le cas incompressible, on peut écrire les définitions de nombres de Reynolds suivantes :

— nombre de Reynolds turbulent :

$$Re_\tau = \frac{U_\tau h}{\nu} \quad (\text{C.3})$$

— nombre de Reynolds *bulk* :

$$Re_b = \frac{U_b h}{\nu} \quad (\text{C.4})$$

— nombre de Reynolds moyen :

$$Re_m = \frac{2U_b h}{\nu} \quad (\text{C.5})$$

où h est la demi-hauteur du canal, U_τ est la vitesse de frottement et ν la viscosité cinématique du fluide.

D'après Dean [17] repris par Kim [18], il existe la relation suivante entre le coefficient de frottement C_f , et le nombre de Reynolds moyen :

$$C_f = 0,073 Re_m^{-\frac{1}{4}} \quad (\text{C.6})$$

La définition du coefficient de frottement est :

$$C_f = \frac{\tau_\omega}{\frac{1}{2}\rho U_b^2} \quad (\text{C.7})$$

Sachant par ailleurs que $\tau_\omega = \rho U_\tau^2$, on a :

$$C_f = 2 \frac{U_\tau^2}{U_b^2} \quad (\text{C.8})$$

C Calcul du débit massique à partir de la corrélation de Dean

On en déduit

$$\frac{U_\tau^2}{U_b^2} = \frac{Re_\tau^2}{\left(\frac{1}{4}Re_m^2\right)} = \frac{1}{2} \cdot 0,073 \cdot Re_m^{-\frac{1}{4}} \quad (\text{C.9})$$

puis les relations entre le nombre de Reynolds moyen et le nombre de Reynolds turbulent

$$\begin{aligned} Re_\tau &= \sqrt{\frac{0,073}{8}} Re_m^{\frac{7}{8}} \\ &= 0,09553 Re_m^{\frac{7}{8}} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

et entre le Reynold *bulk* et le nombre de Reynolds turbulent :

$$\begin{aligned} Re_\tau &= 2^{-\frac{5}{8}} \sqrt{0,073} Re_b^{\frac{7}{8}} \\ &= 0,17519 Re_b^{\frac{7}{8}} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

En reprenant l'expression du débit massique (C.1), on a

$$D_m = \rho S U_b = \frac{\mu S}{h} Re_b \quad (\text{C.12})$$

soit au final :

$$D_m = \frac{\mu S}{h} \left(\frac{Re_\tau}{0,17519} \right)^{\frac{8}{7}} \quad (\text{C.13})$$

D Figures tracées pour l'analyse des simulations

Table des figures

D.1	Température moyenne.	39
D.2	Écart-type des fluctuations des trois coordonnées de la vitesse, adimensionné par la vitesse de frottement côté froid.	39
D.3	Écart-type des fluctuations des trois coordonnées de la vitesse, adimensionné par la vitesse de frottement côté froid.	40
D.4	Écart-type des fluctuations de la température, adimensionnement classique.	40
D.5	Vitesse longitudinale, adimensionnement classique.	41
D.6	Vitesse longitudinale, adimensionnement de Van Driest.	41
D.7	Comparaison entre la vitesse transverse et la vitesse de transpiration équivalente telle qu'utilisée dans l'adimensionnement de Van Driest.	42
D.8	Écart-type des fluctuations de la vitesse longitudinale, adimensionnement classique.	42
D.9	Écart-type des fluctuations de la vitesse longitudinale, adimensionnement semi-local.	43
D.10	Écart-type des fluctuations de la vitesse perpendiculaire à la paroi, adimensionnement classique.	43
D.11	Écart-type des fluctuations de la vitesse perpendiculaire à la paroi, adimensionnement semi-local.	44
D.12	Écart-type des fluctuations de la vitesse transverse, adimensionnement classique.	44

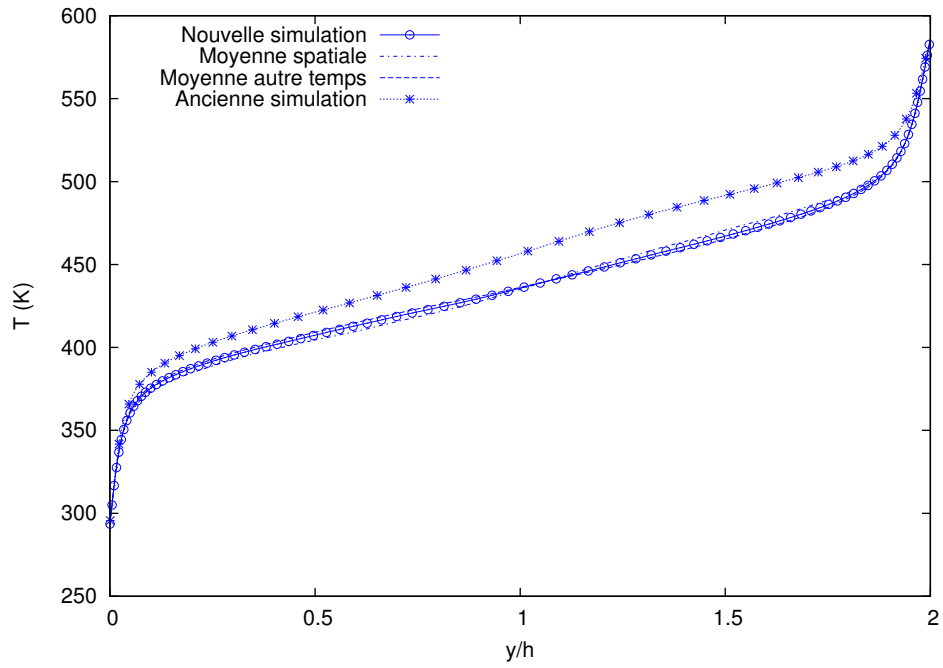


FIGURE D.1 – Température moyenne.

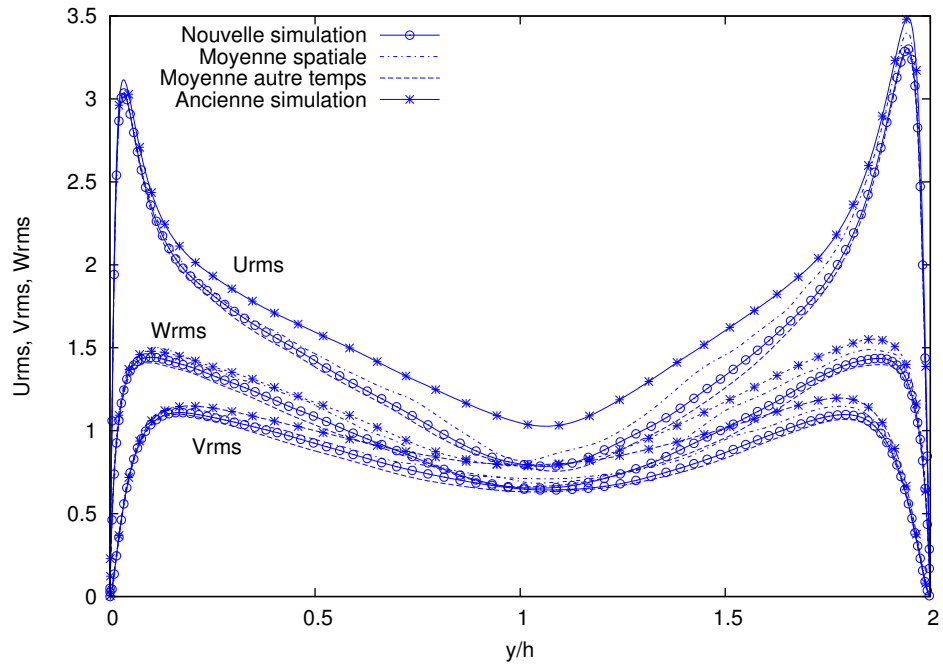


FIGURE D.2 – Écart-type des fluctuations des trois coordonnées de la vitesse, adimensionné par la vitesse de frottement côté froid.

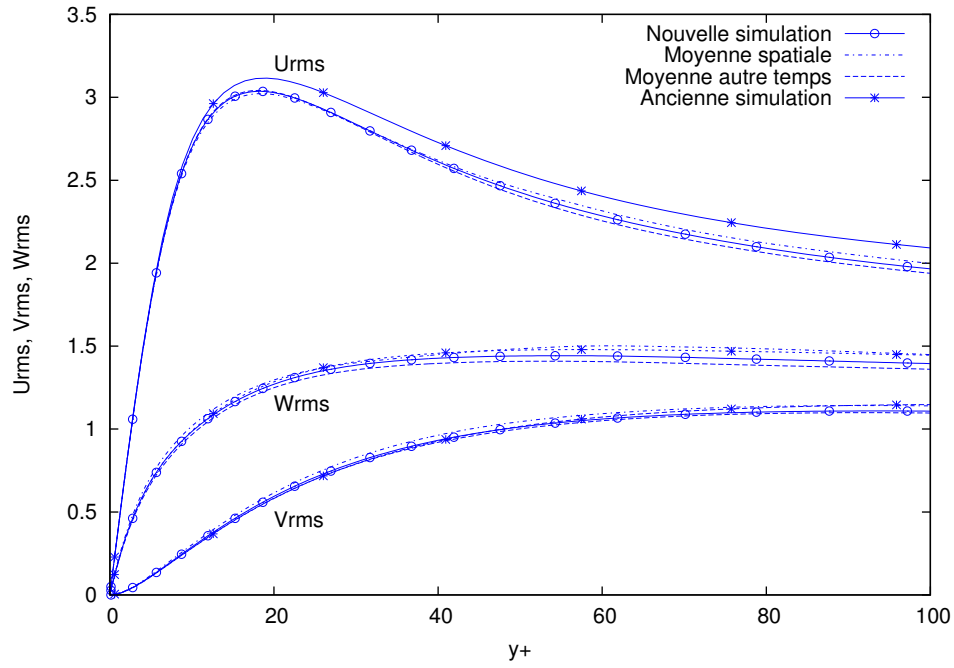


FIGURE D.3 – Écart-type des fluctuations des trois coordonnées de la vitesse, adimensionné par la vitesse de frottement côté froid.

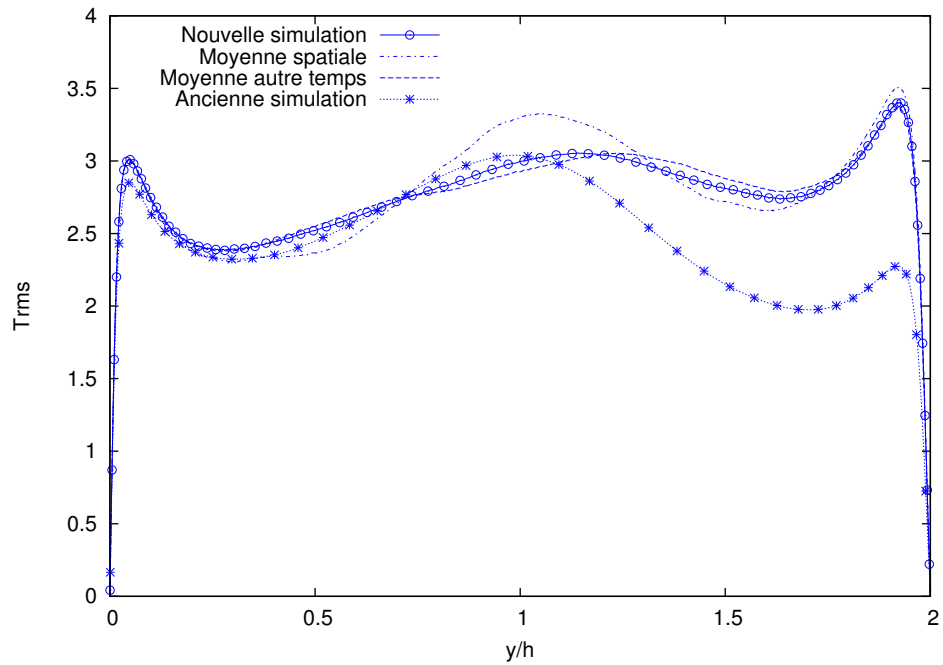


FIGURE D.4 – Écart-type des fluctuations de la température, adimensionnement classique.

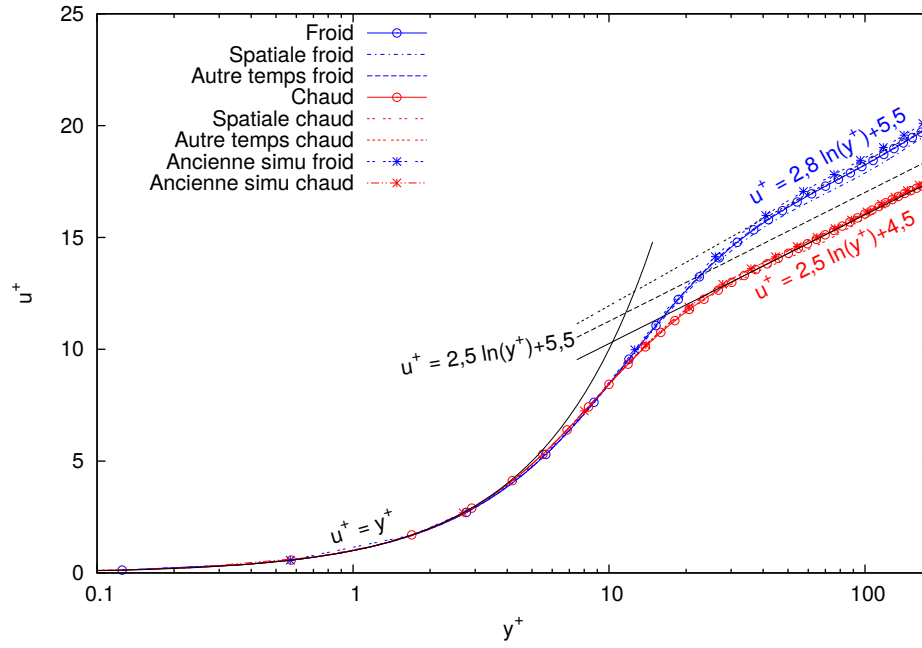


FIGURE D.5 – Vitesse longitudinale, adimensionnement classique.

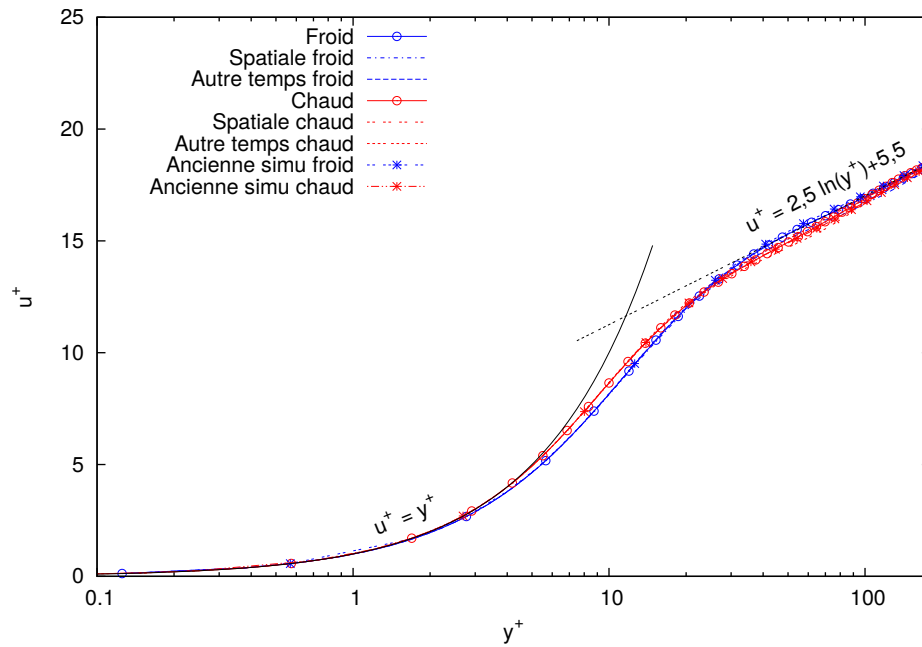


FIGURE D.6 – Vitesse longitudinale, adimensionnement de Van Driest.

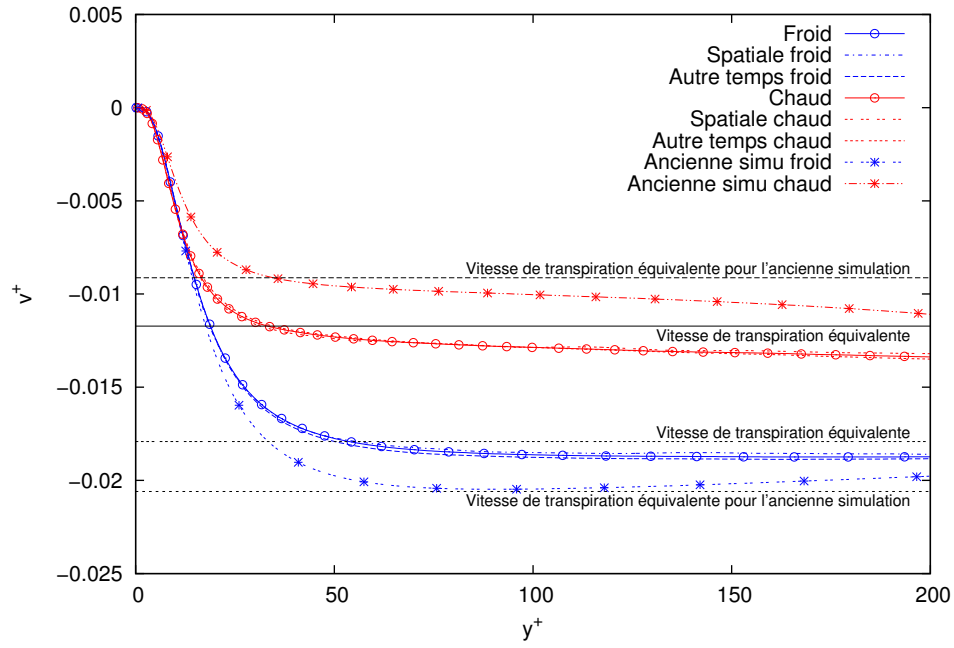


FIGURE D.7 – Comparaison entre la vitesse transverse et la vitesse de transpiration équivalente telle qu'utilisée dans l'adimensionnement de Van Driest.

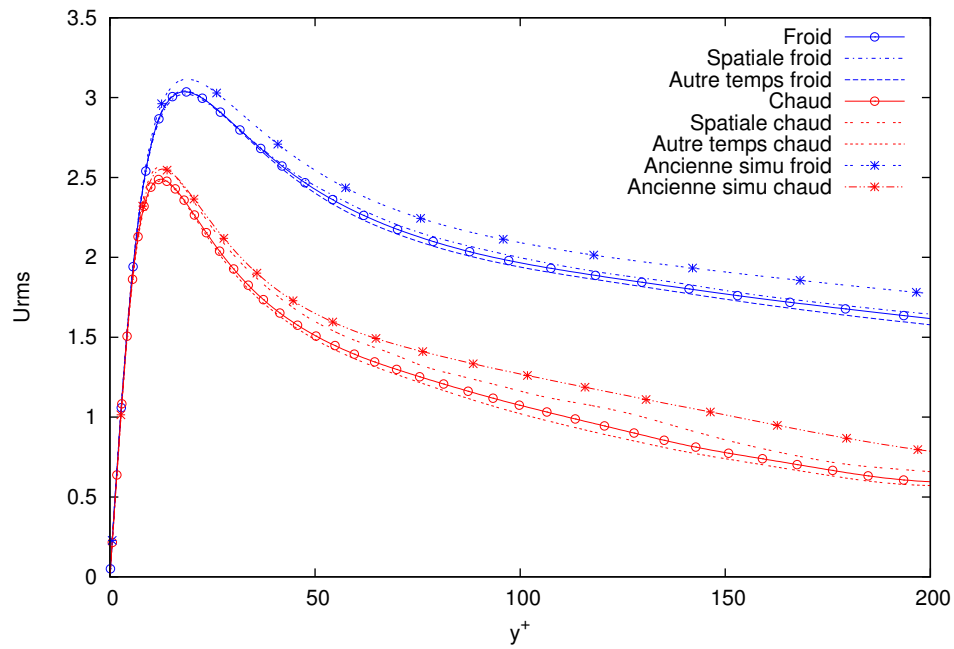


FIGURE D.8 – Écart-type des fluctuations de la vitesse longitudinale, adimensionnement classique.

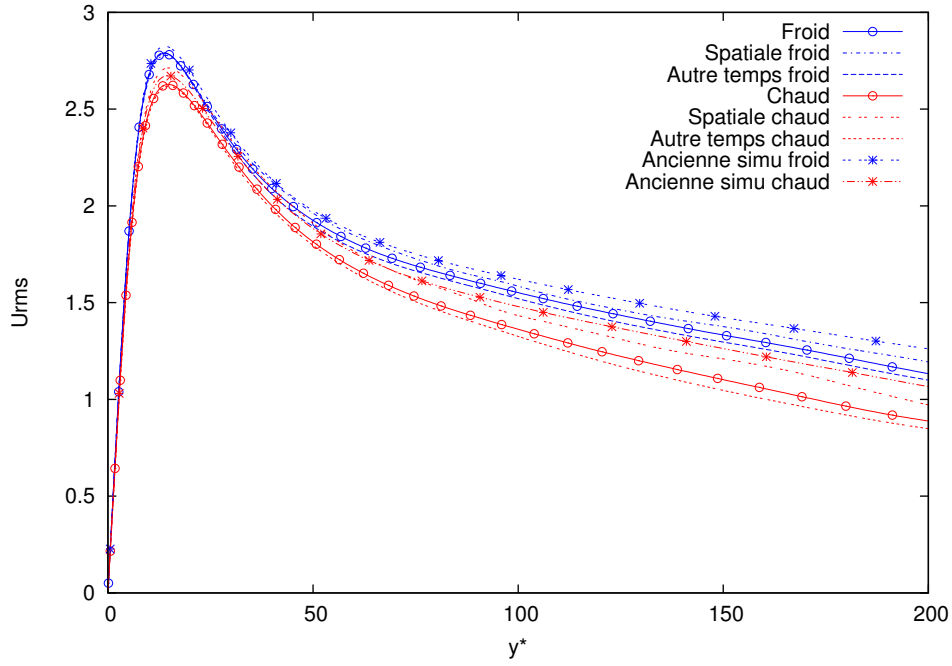


FIGURE D.9 – Écart-type des fluctuations de la vitesse longitudinale, adimensionnement semi-local.

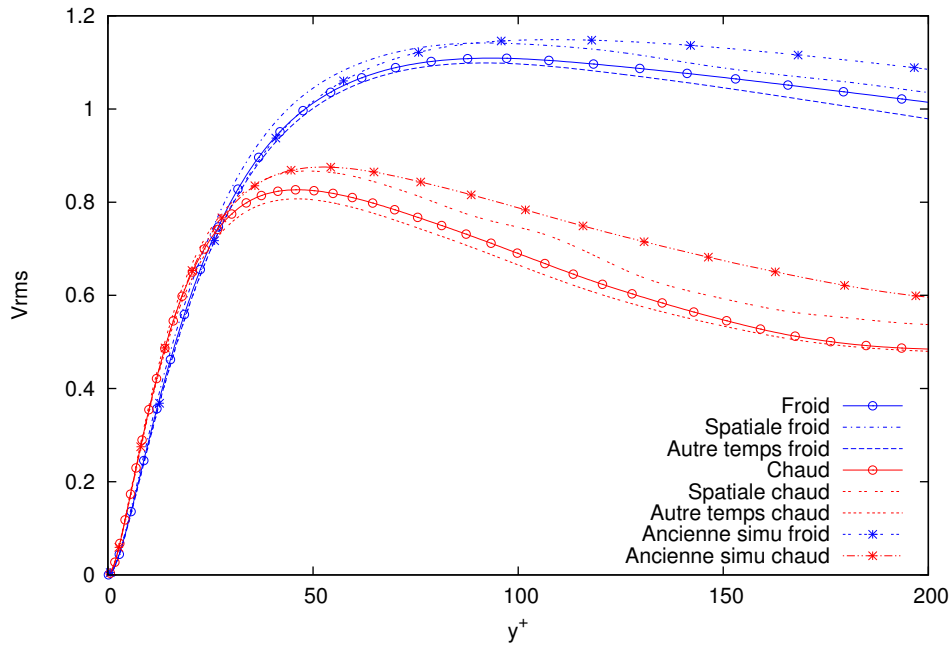


FIGURE D.10 – Écart-type des fluctuations de la vitesse perpendiculaire à la paroi, adimensionnement classique.

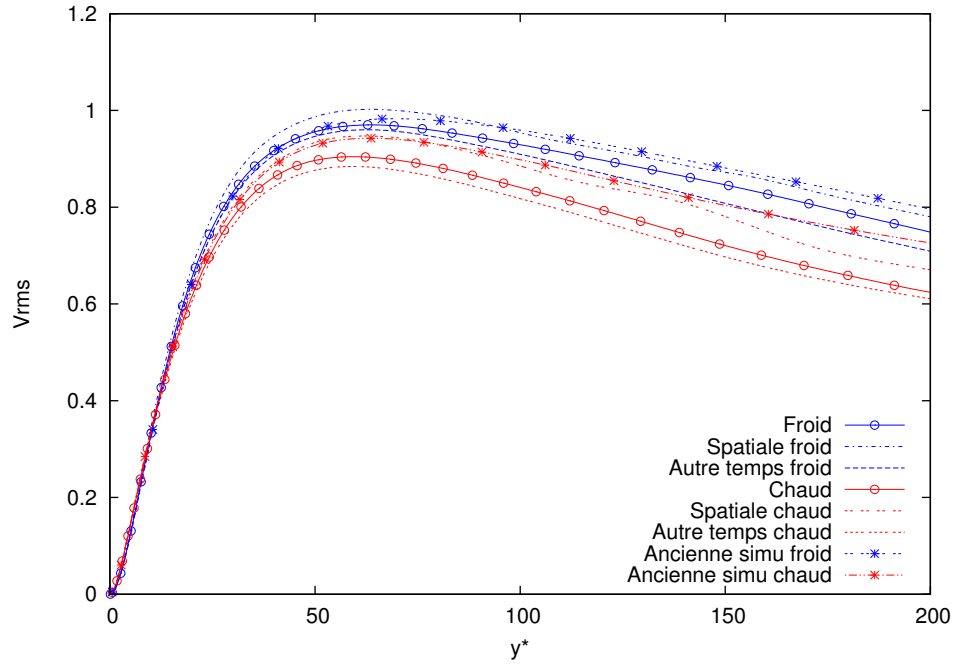


FIGURE D.11 – Écart-type des fluctuations de la vitesse perpendiculaire à la paroi, adimensionnement semi-local.

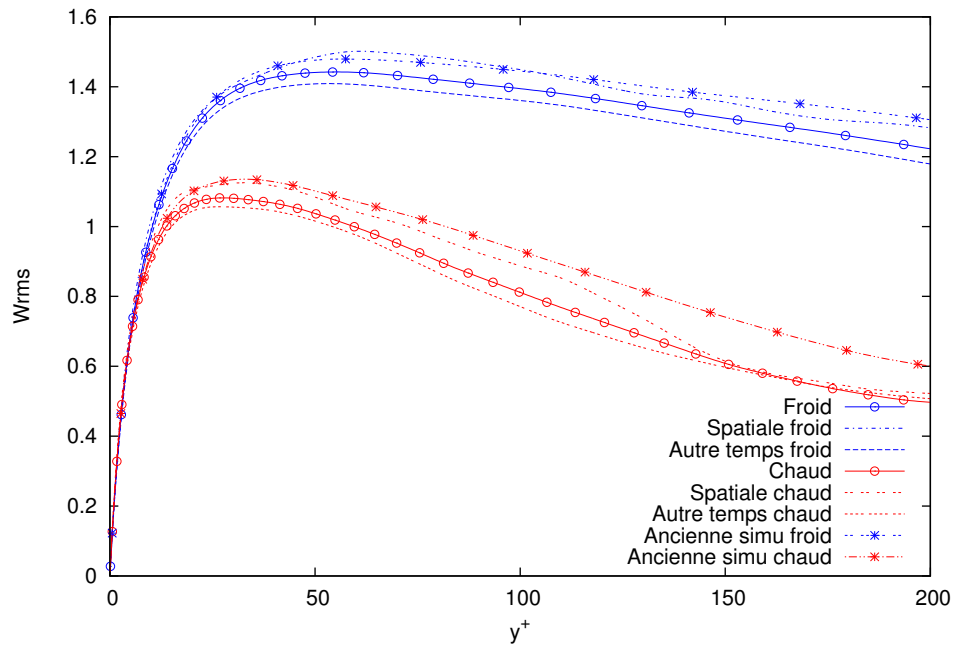


FIGURE D.12 – Écart-type des fluctuations de la vitesse transverse, adimensionnement classique.

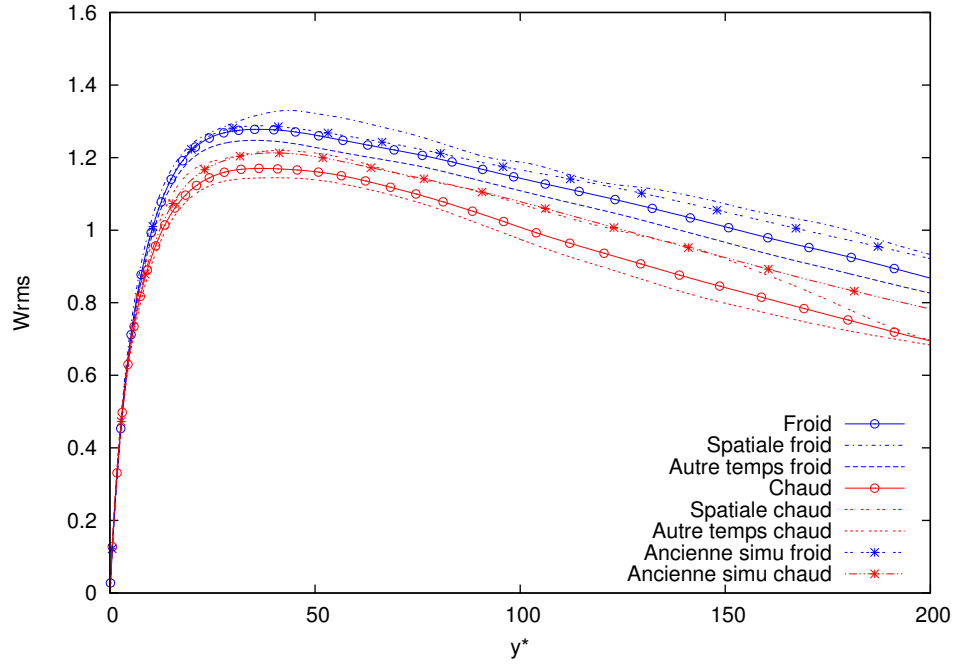


FIGURE D.13 – Écart-type des fluctuations de la vitesse transverse, adimensionnement semi-local.

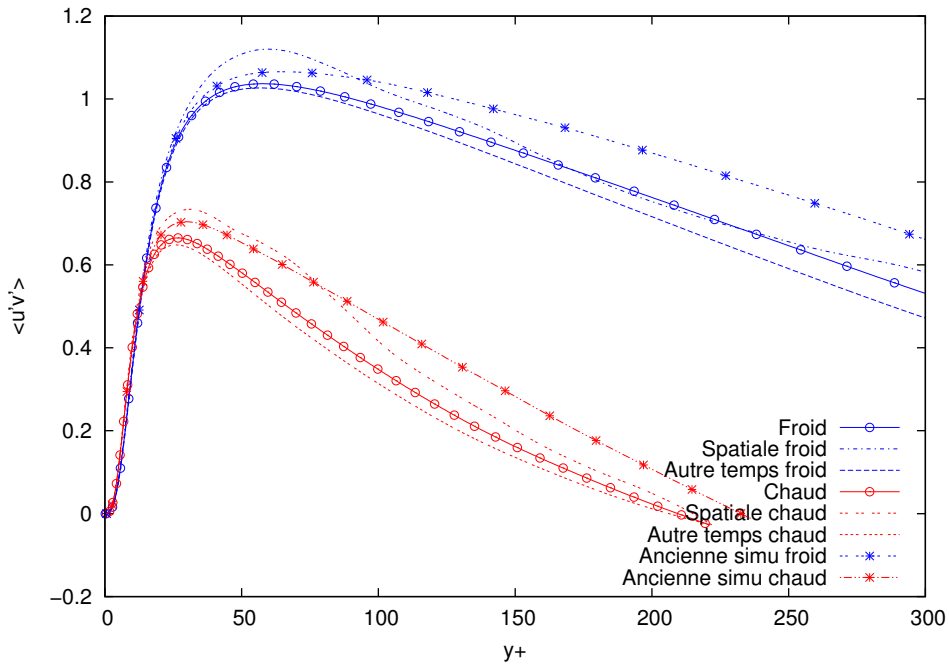


FIGURE D.14 – Corrélation des fluctuations de la vitesse longitudinale et de la vitesse perpendiculaire à la paroi, adimensionnement classique.

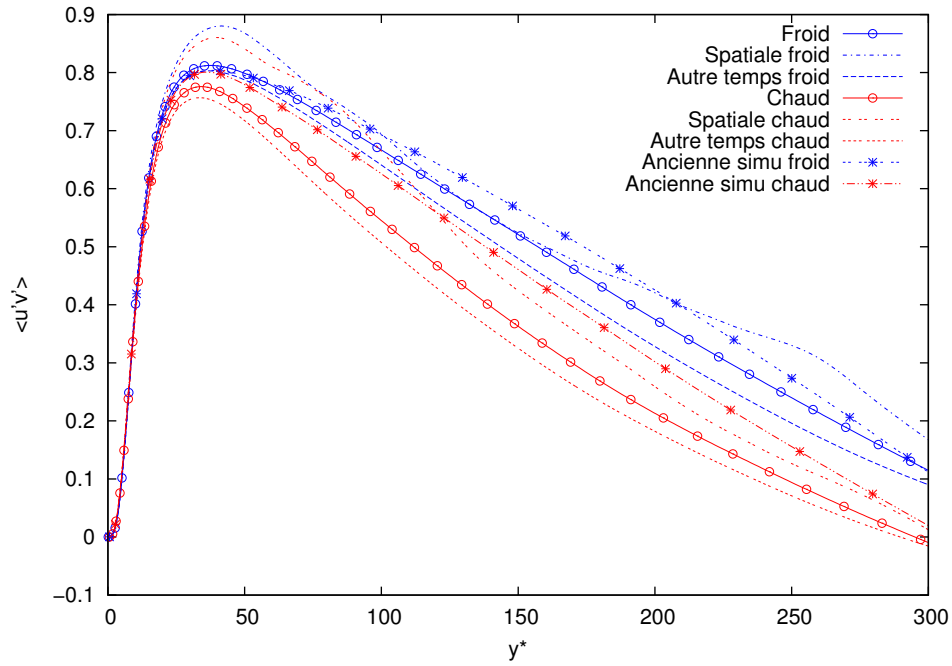


FIGURE D.15 – Corrélation des fluctuations de la vitesse longitudinale et de la vitesse perpendiculaire à la paroi, adimensionnement semi-local.

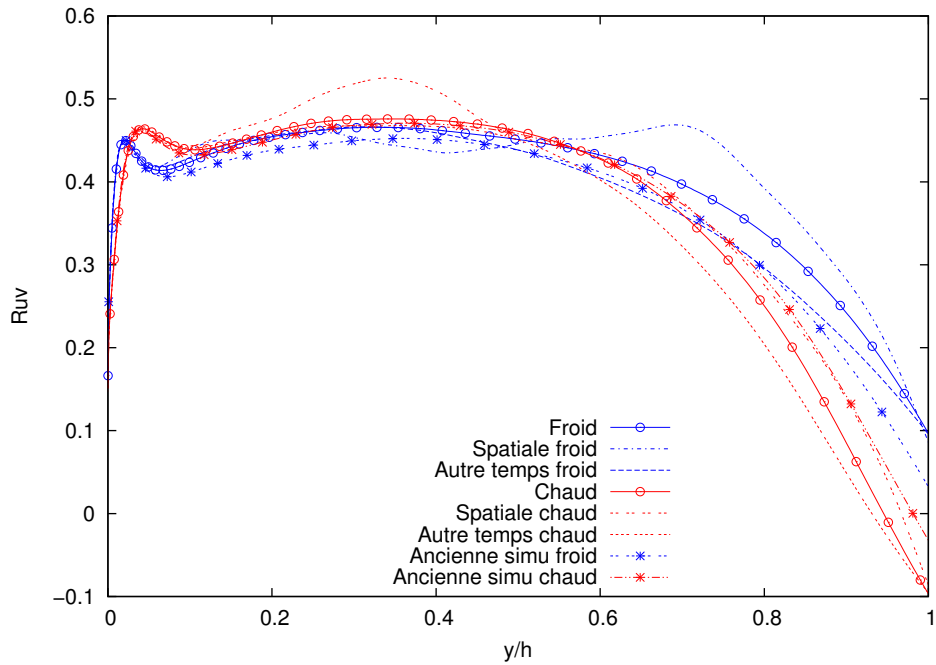


FIGURE D.16 – Coefficient de corrélation des fluctuations de la vitesse longitudinale et de la vitesse perpendiculaire à la paroi.

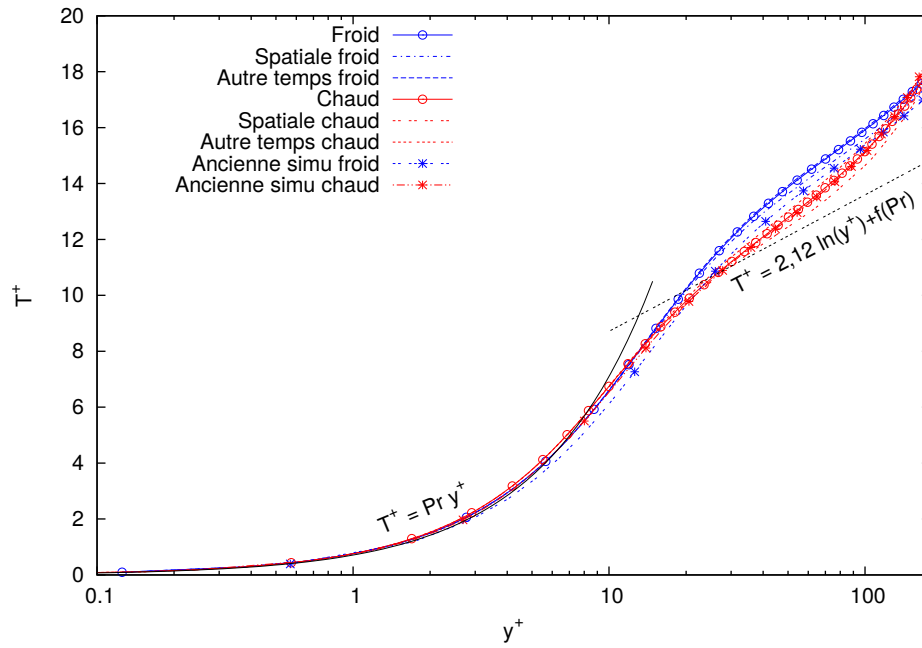


FIGURE D.17 – Température, adimensionnement classique.

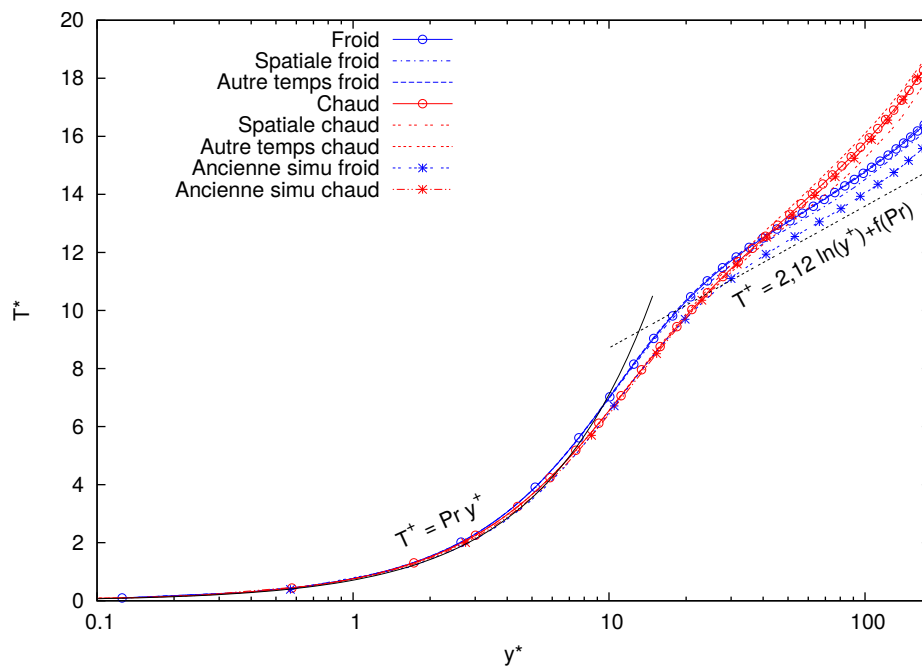


FIGURE D.18 – Température, adimensionnement semi-local.

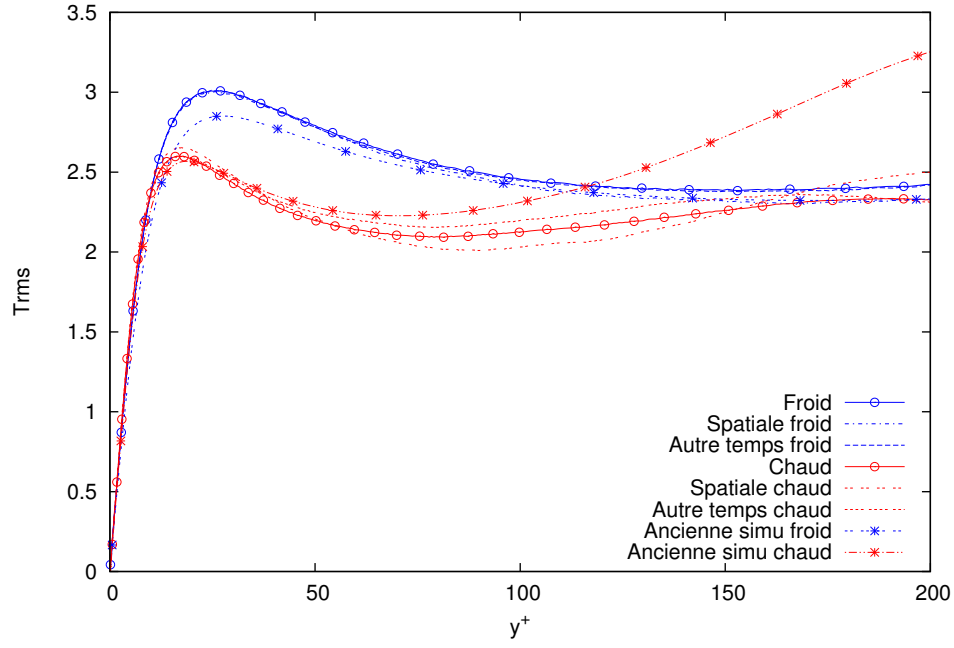


FIGURE D.19 – Écart-type des fluctuations de température, adimensionnement classique.

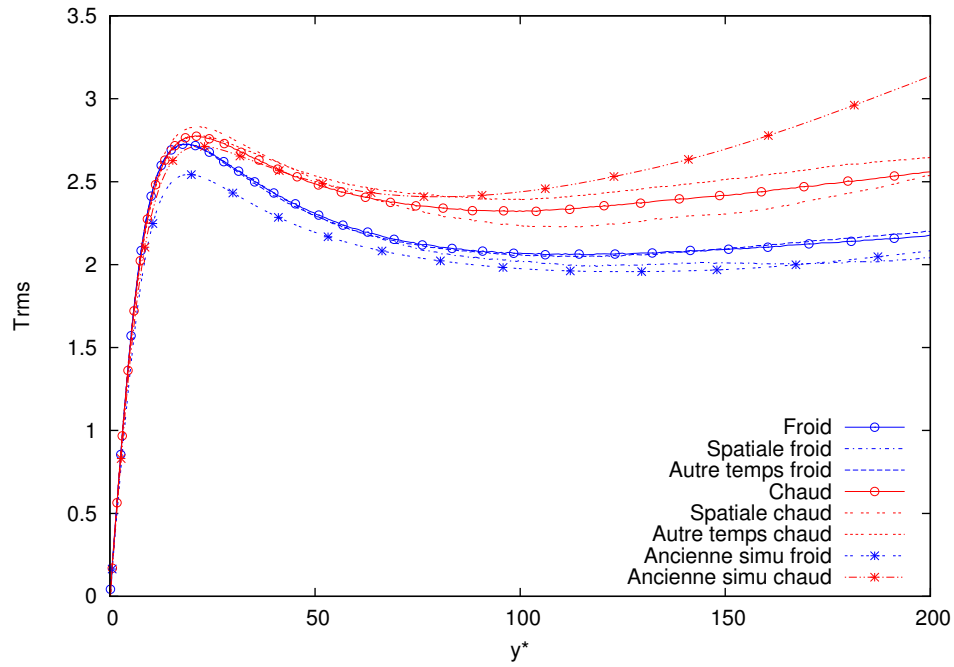


FIGURE D.20 – Écart-type des fluctuations de température, adimensionnement semi-local.

D Figures tracées pour l'analyse des simulations

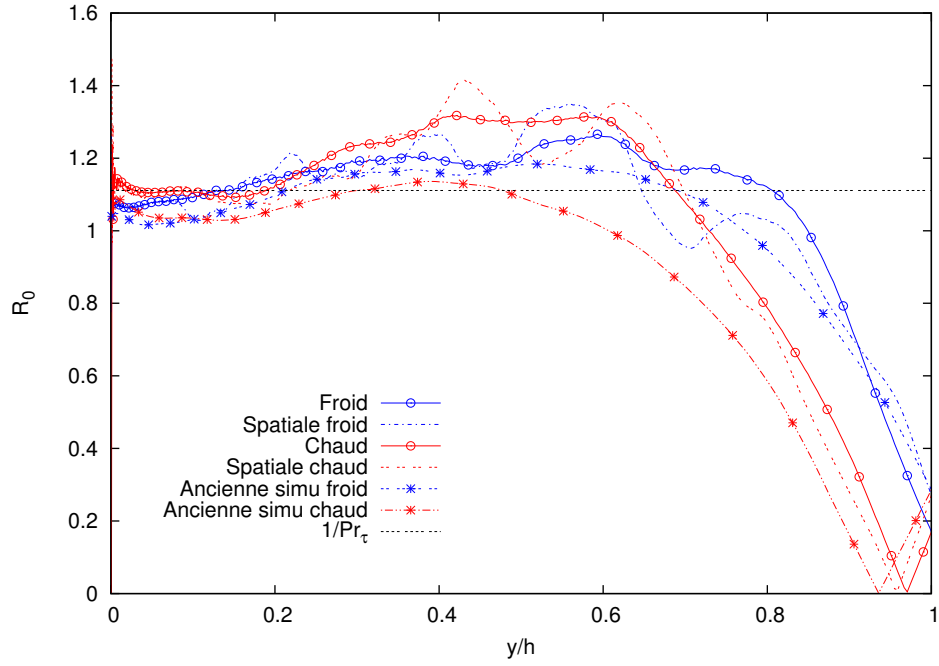


FIGURE D.21 – Coefficient $R_0 = \frac{T_{\text{rms}} \left| \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right|}{U_{\text{rms}} \left| \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \right|}$

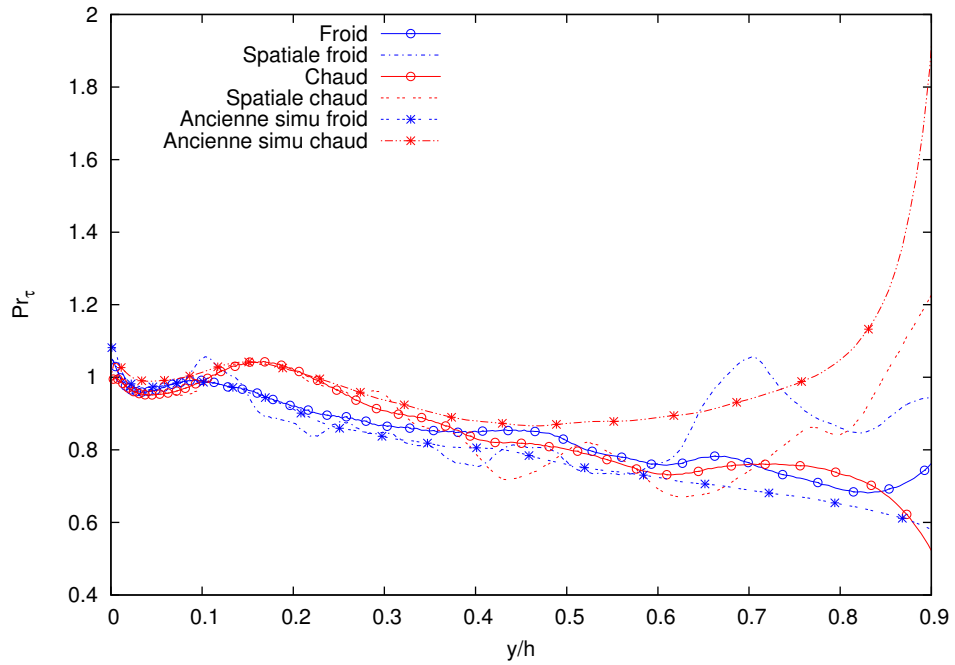


FIGURE D.22 – Nombre de Prandtl turbulent $Pr_\tau = \frac{\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y}}{\langle v'T' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}}$

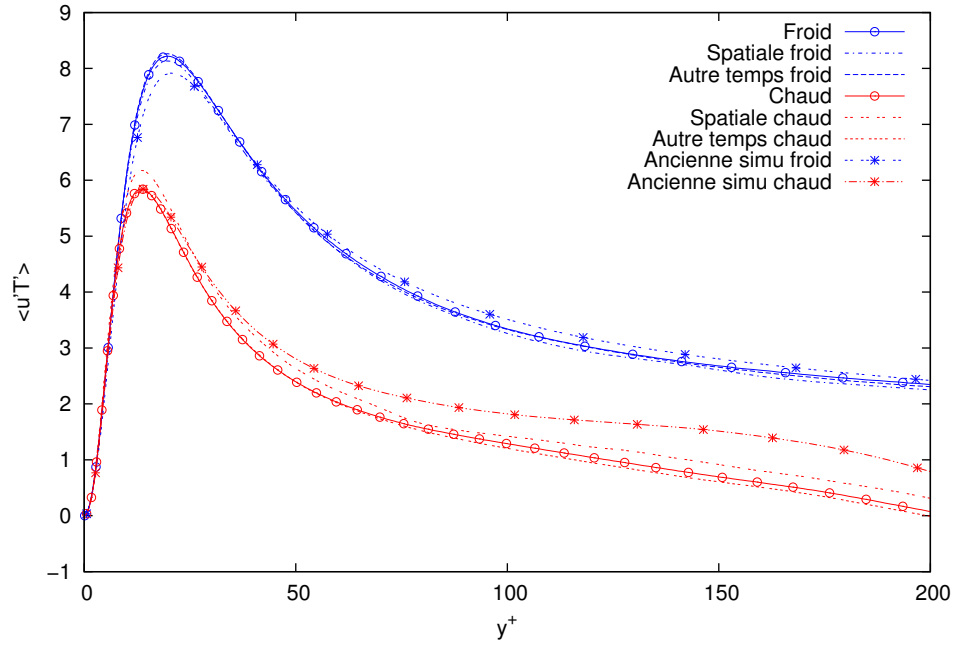


FIGURE D.23 – Corrélation des fluctuations de la vitesse longitudinale et de la température, adimensionnement classique.

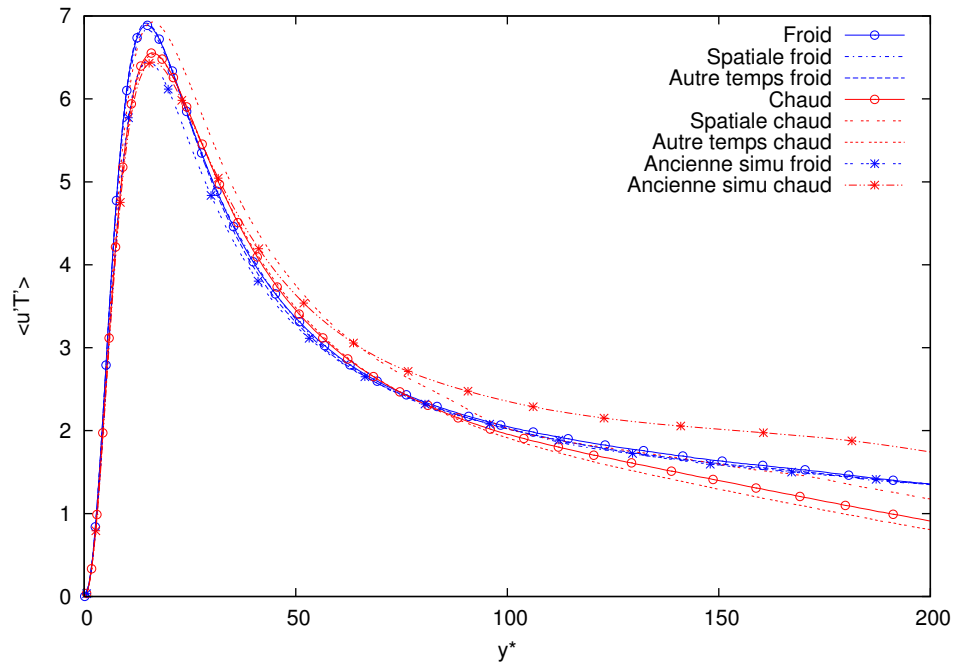


FIGURE D.24 – Corrélation des fluctuations de la vitesse longitudinale et de la température, adimensionnement semi-local.

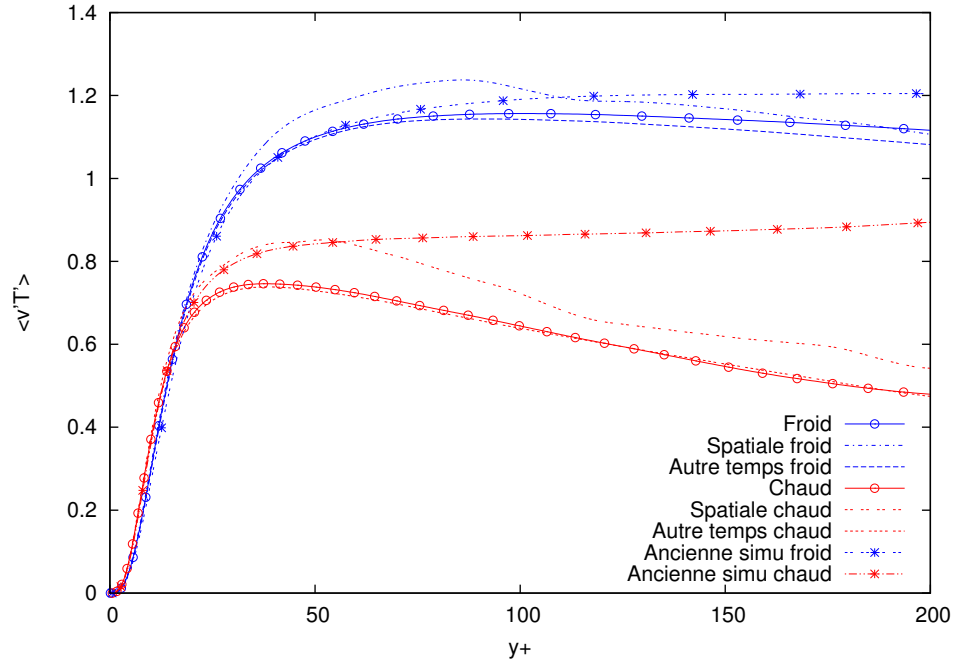


FIGURE D.25 – Corrélation des fluctuations de la vitesse transverse et de la température, adimensionnement classique.

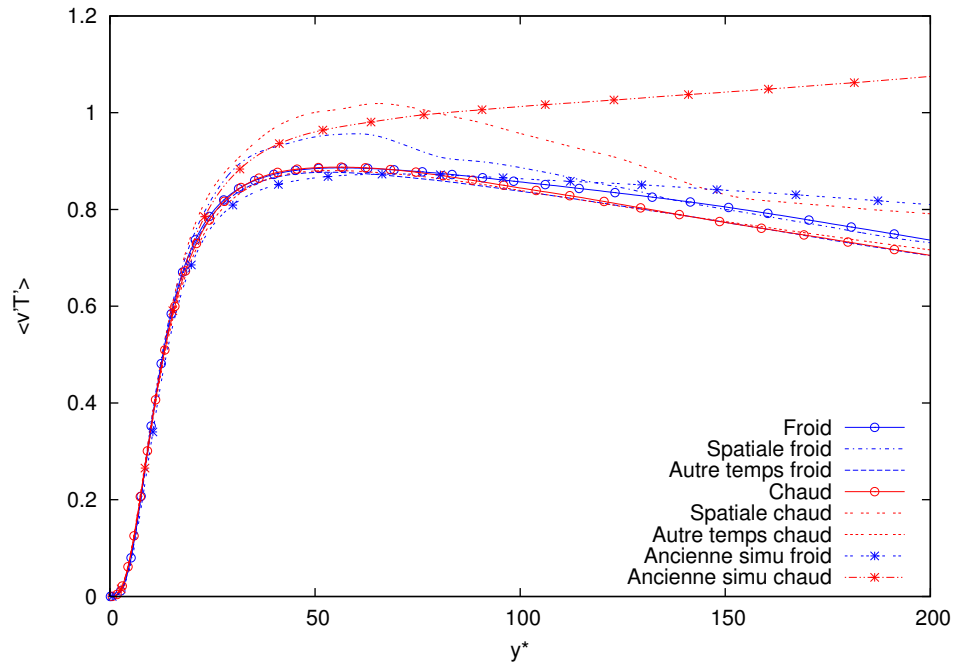


FIGURE D.26 – Corrélation des fluctuations de la vitesse transverse et de la température, adimensionnement classique.

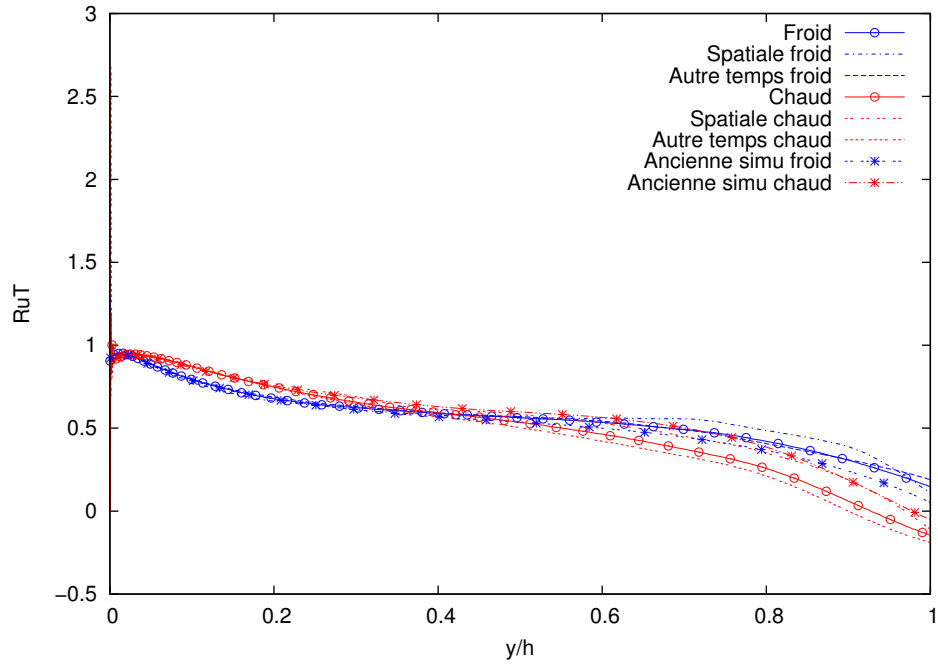


FIGURE D.27 – Coefficient de corrélation des fluctuations de la vitesse longitudinale et de la température $R_{uT} = \frac{\langle u'T' \rangle}{U_{rms} T_{rms}}$

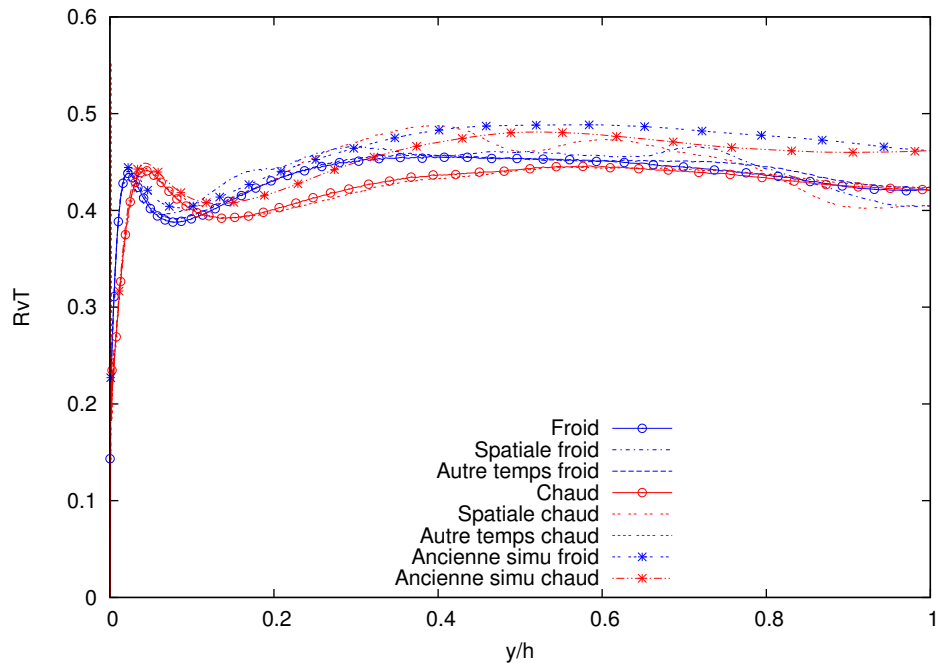


FIGURE D.28 – Coefficient de corrélation des fluctuations de la vitesse transverse et de la température $R_{vT} = \frac{\langle v'T' \rangle}{V_{rms} T_{rms}}$

E Écrire un jeu de données

Dans cette partie, on va présenter la manière dont on écrit un jeu de données `Trio_U` et dont on l'utilise pour réaliser une simulation dans notre contexte de simulation d'un écoulement turbulent fortement anisotherme dans un canal plan bi-périodique. Plus précisément, on n'utilise pas véritablement le logiciel `Trio_U` mais un code dérivée qui utilise le *framework baltik* (acronyme de *Building AppLications using Trio_U Kernels*, dont l'objectif est de faciliter le développement de code utilisant tout ou en partie le code `Trio_U`.

La description du jeu de données qui sera ici faites contiendra donc un certain nombre d'éléments spécifiques au code utilisé, appelé *Maquette IJK*, développé par Gauthier Fauchet et enrichi d'un post-traitement particulier sur l'énergie cinétique turbulente par Frédéric Aulery et moi-même.

La géométrie du problème est un canal plan bipériodique tel que décrit en 4.1.1. On conserve les conventions de notations sur les axes x , y et z . Néanmoins, on utilise en plus une notation basée sur les lettres i , j et k :

- la direction i correspond à la direction x et donc à la direction dans laquelle se fait l'écoulement ;
- la direction j à la direction z et donc à la direction transverse ;
- la direction k à la direction y et donc à la direction perpendiculaire aux parois.

E.1 Généralités

De manière générale, dans un jeu de données `Trio_U` on crée un objet du type `Type` que l'on souhaite appeler `nom` par une expression du type

```
Type nom
```

`nom` est l'identificateur de l'objet de type `Type` ainsi créée. Le nom choisi ici est arbitraire mais il ne doit pas avoir déjà utilisé pour identifier un autre objet.

L'objet et son identificateur ainsi créée est détruit à la fin du bloc courant. Pour que l'identificateur ait une portée globale on utilise le mot clé `export`. On crée alors l'objet par l'expression

```
export Type nom
```

Pour ensuite définir l'objet, on utilise le mot clé `Lire` (ou `Read` qui est synonyme) de la manière suivante :

```
Lire nom
{
    ...
}
```

Enfin, on donne dans le bloc compris entre les accolades les paramètres nécessaires à la définition de l'objet.

Pour introduire des commentaires dans le jeu de données, on utilisera le symbole `#` pour ouvrir et fermer les commentaires (ou `/*` et `*/`). Cela donne des constructions du type `# ... #` et `/* ... */`.

E.2 Géométrie et maillage

On crée tout d’abord un objet du type `IJK_Grid_Geometry` que l’on va appeler `grid_geom`. Ceci est réalisé par la commande

```
IJK_Grid_Geometry grid_geom
```

Cet objet a pour but de préciser les caractéristiques géométriques du volume et du maillage associé.

On définit ensuite cet objet :

- Pour les deux directions d’homogénéité, on donne la dimension du domaine avec les mots-clés `uniform_domain_size_i` et `uniform_domain_size_j` ainsi que le nombre de mailles à l’aide des mots-clés `nbelem_i` et `nbelem_j`. On précise ensuite que i et j sont des directions de périodicité avec les mots-clés `perio_i` et `perio_j`.
- Pour la direction anisotrope on inclue un fichier donnant les coordonnées de chacun des points à l’aide du mot-clé `file_coord_k`.

Par exemple,

```
Lire grid_geom {
  nbelem_i 32
  nbelem_j 32
  uniform_domain_size_i 0.0312546667
  uniform_domain_size_j 0.0104182
  file_coord_k          coord_k_level0.txt
  perio_i
  perio_j
}
```

Il nous faut ensuite indiquer la manière dont on souhaite que le volume soit subdivisé entre les processeurs. Pour cela, il faut créer un objet du type `IJK_Splitting`.

Dans notre cas, on définit deux découpages différents du domaine : le premier pour résoudre l’écoulement et le second pour le post-traitement spectral. En effet, celui-ci nécessite que chaque processeur connaisse au moins un plan en entier suivant les directions i et j .

Lors de la définition de l’objet, on commence par associer le découpage à une géométrie existante par le mot-clé `ijk_grid_geometry`. Ensuite, on indique le découpage en donnant pour chaque direction le nombre de processeurs souhaité (utilisation des mots-clés `nproc_i`, `nproc_j` et `nproc_k`). Le produit du nombre de processeurs dans chaque direction doit être inférieur ou égal au nombre de processeurs de la machine. Par ailleurs, il doit correspondre au nombre de processeurs indiqué lors de l’utilisation de la commande `mpirun`.

Par exemple,

```
IJK_Splitting grid_splitting
Lire grid_splitting {
    ijk_grid_geometry grid_geom
    nproc_i 4
    nproc_j 2
    nproc_k 2
    process_grouping_i 2
    process_grouping_j 2
    process_grouping_k 2
}

IJK_Splitting post_splitting
Lire post_splitting {
    ijk_grid_geometry grid_geom
    nproc_i 1
    nproc_j 1
    nproc_k 16
}
```

E.3 Paramètres de la simulation

Une fois les objets liés au maillage et à la parallélisation du calcul définis, il est temps de donner les caractéristiques de la simulation à réaliser. On commence par déclarer un problème de type `dns_qc_double` et tous ces paramètres seront à spécifier dans ce bloc, à ouvrir de la manière suivante :

```
dns_qc_double
{
    ...
}
```

Parmi ces paramètres, on exclura dans cette partie ceux liés au réglage du solveur multigrille, un point particulièrement important et complexe que l'on discutera à part.

E.3.1 Lier la simulation à la géométrie

La première chose à indiquer dans le bloc `dns_qc_double` est le maillage utilisé ainsi que son découpage par processeur. Pour cela, il faut indiquer l'identificateur de l'objet `IJK_Splitting` créée à l'aide du mot-clé `ijk_splitting`. Par exemple, si on a comme dans le code donné en exemple nommé celui-ci `grid_splitting`, on utilisera l'expression suivante :

```
ijk_splitting grid_splitting
```

E.3.2 Caractéristiques physiques du problème

Les mots-clés à utiliser pour indiquer les propriétés du fluide et de l'écoulement sont :

<code>t_paro_i_mpose_kmin</code>	Température de la paroi froide (K)
<code>t_paro_i_mpose_kmax</code>	Température de la paroi chaude (K)
<code>p_thermo_init</code>	Pression thermodynamique initiale (Pa)
<code>cp</code>	Capacité calorifique à pression constante (J/(kg.K))
<code>gamma</code>	Indice adiabatique
<code>debit_massique</code>	Débit massique dans le canal (kg/s)

Ici, le débit massique D_m est déterminé à partir des autres données du problème afin d'avoir le nombre de Reynolds turbulent souhaité avec la corrélation de Dean donné en annexe C (valable dans le cas isotherme ; donne une première approximation dans le cas anisotherme) :

$$D_m = \frac{\mu S}{h} \left(\frac{Re_\tau}{0,17519} \right)^{\frac{8}{7}} \quad (\text{E.1})$$

E.3.3 Conditions initiales

Il est nécessaire de donner une valeur initiale de la température et de la vitesse dans le domaine pour arriver à une solution. Pour la température, on suppose un profil de température linéaire :

$$T(z) = T_f + (T_c - T_f) \cdot \frac{z}{h} \quad (\text{E.2})$$

Pour la vitesse, on prend pour base un profil parabolique de type *écoulement de Poiseuille*. On a ainsi pour la vitesse longitudinale :

$$u(z) = u_{max} \cdot \frac{4}{(2h)^2} \cdot z(2h - z) \quad (\text{E.3})$$

où u_{max} est lié au débit massique D_m par la relation

$$u_{max} = \frac{3}{2} \frac{D_m}{\rho S} \quad (\text{E.4})$$

Par la suite, on ajoute pour générer la turbulence une composante sinusoïdale à la parabole dans la direction transverse. On a en décomposant la vitesse en ses trois composantes u , v et w :

$$u = u_{max} \cdot \frac{4}{(2h)^2} \cdot z(2h - z) \quad (\text{E.5})$$

$$v = 0 \quad (\text{E.6})$$

$$\begin{aligned} w = & \sin\left(2\pi \frac{x - L_i}{L_i}\right) \sin\left(2\pi \frac{y}{L_j}\right) \\ & + \sin\left(6 \cdot 2\pi \frac{x - L_i}{L_i}\right) \sin\left(4 \cdot 2\pi \frac{y}{L_j}\right) \\ & + \sin\left(2 \cdot 2\pi \frac{x - L_i}{L_i}\right) \sin\left(8 \cdot 2\pi \frac{y}{L_j}\right) \cdot \frac{4}{(2h)^2} \cdot z(2h - z) \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Ici, on note h la demi-hauteur du canal ; L_i et L_j désignent la dimension du domaine dans les directions i et j respectivement.

Au final, on indique ces conditions initiales à Trio_U à l'aide des mots-clés `expression_t_init`, `expression_vx_init`, `expression_vy_init` et `expression_vz_init`.

Par exemple, avec $2h = 0,029846$, $L_i = 0,093764$ et $L_j = 0,062509$:

```
expression_t_init    293.+293/0.029846*z
expression_vx_init   2.558*z*(0.029846-z)↵
                    *4/(0.029846*0.029846)
expression_vy_init    0.
expression_vz_init   (sin((x-0.093764)↵
                    /0.093764*6.28318530717959)*sin(y↵
                    /0.062509*6.28318530717959)+sin((x-0.093764)↵
                    /0.093764*6.28318530717959*6)*sin(y↵
                    /0.062509*6.28318530717959*4)+sin((x-0.093764)↵
                    /0.093764*6.28318530717959*2)*sin(y↵
                    /0.062509*6.28318530717959*8))*z*(0.029846-z)↵
                    *4/(0.029846*0.029846)
```

La valeur du premier pas de temps de la simulation est imposée à une certaine valeur par le mot-clé `dt_start`. Ceci est nécessaire car nos conditions initiales ne respectent pas les contraintes de l'écoulement sur la divergence de la vitesse

$$\nabla \cdot U = \frac{1}{\gamma P_{th}} \left[(\gamma - 1) (\nabla \cdot (\lambda \nabla T) + S) - \frac{\partial P_{th}}{\partial t} \right] \quad (E.8)$$

On choisit une valeur la plus faible possible de `dt_start`. De cette manière, le premier pas de temps permet de recalculer le champ de vitesse en faisant avancer le moins possible temporellement la simulation.

Cependant, des problèmes numériques subsistent et à l'heure actuelle une valeur trop faible de `dt_start` fera planter la simulation car elle entraîne une trop grande valeur du second membre lors de calcul de la pression dynamique par le solveur multigrille.

Même si la simulation ne plante pas, l'algorithme de résolution reste instable face à des valeurs de pas de temps trop faibles. En particulier, elles déstabilisent la pression thermodynamique. On n'utilisera donc `dt_start` que pour réaliser le premier pas de temps d'une simulation et il sera à éviter si l'on fait simplement une reprise.

E.3.4 Paramètres numériques

Le nombre de pas de temps de la simulation est donné par le mot-clé `nb_pas_dt_max`. Une sauvegarde des données est réalisée à intervalle régulier ; Cet intervalle est indiqué en nombre de pas de temps par le mot-clé `dt_sauvegarde`.

La sauvegarde des données est réalisée sur le fichier indiqué par `nom_sauvegarde` et des fichiers associées dont le nom porte la même base. Par exemple, si on écrit dans le jeu de données

```
nom_sauvegarde dns_1.sauv
```

alors les données les données seront enregistrées dans les fichiers du type `dns_1.sauv*` : `dns_1.sauv`, `dns_1.sauv.lata`, `dns_1.sauv.lata.0.RHO`, `dns_1.sauv.lata.0.VELOCITY`, `dns_1.sauv.lata.grid_geom.coordx`, `dns_1.sauv.lata.grid_geom.coordy` et `dns_1.sauv.lata.grid_geom.coordz`.

À l'inverse, si l'on souhaite faire une reprise de données sauvegardées, on l'indique dans le jeu de données à l'aide du mot-clé `nom_reprise` qui s'utilise de la même manière que `nom_sauvegarde`.

Il nous faut également dans tout les cas indiquer par le mot-cle `check_stop_file` le nom d'un fichier qui nous permettra d'arrêter le calcul. Par exemple, si on indique

```
check_stop_file dns.stop
```

alors, on pourra arrêter *proprement* le calcul en cours d'exécution par :

```
$ echo "1" > dns.stop
```

E.3.5 Paramètres liés aux post-traitement

L'intervalle en nombre de pas de temps entre deux post-traitements spatiaux est donné par `dt_post`. Pour le post-traitement dans l'espace spectral, il faut utiliser le mot-clé `dt_post_spectral`. Il ne faut pas oublier à cette étape de préciser auparavant le découpage du domaine entre les processeurs à utiliser spécifiquement pour ce post-traitement. Ceci est fait par l'utilisation du mot-clé `spectral_splitting`.

On écrira par exemple,

```
dt_post          50
spectral_splitting post_splitting
dt_post_spectral 200
```

E.4 Le solveur multigrille

Le solveur multigrille désigne un outil dont le rôle est de calculer la pression dynamique. L'équation à résoudre pour un temps donné a la forme de l'équation de Poisson :

$$\Delta P = f \quad (\text{E.9})$$

Par le jeu de la discrétisation, le problème est ramené à la résolution d'une équation matricielle :

$$AP = B \quad (\text{E.10})$$

Pour résoudre ce système matriciel, on utilise la méthode de Jacobi qui est un algorithme itératif : à chaque itération du solveur Jacobi, une valeur approximative de la solution est déduite de la valeur donnée à l'itération précédente, ce processus est répété jusqu'à avoir convergence.

Afin de réduire le temps de calcul, le solveur multigrille résout le système matriciel global par résolution du problème de Poisson sur des maillages de plus en plus précis, en utilisant comme condition initiale du solveur Jacobi le résultat du niveau de grille précédent.

L'algorithme du solveur multigrille est une méthode récursive qui résout $AX = B$ et calcule le résidu résultant $AX - B$ pour un certain niveau de grille. Si on est au niveau de grille le plus grossier, la méthode fait appel au solveur grossier. Dans le cas contraire, on effectue tout d'abord un *pre-smoothing* puis des itérations sur les actions suivantes :

- *coarsening*;
- appel récursif à la méthode au niveau de grille supérieur ;
- interpolation ;
- *post-smoothing*.

Les étapes *pre-smoothing* et *coarsening* correspondent au calcul de la pression et du résidu au niveau de grille inférieur (plus grossier) et les étapes d'interpolation et de *post-smoothing* au niveau supérieur

Pour chaque niveau de grille, le nombre d'itérations est donné par les arguments d'un mot clé appelé `nb_full_mg_steps`. Néanmoins, à partir du niveau de grille 2 et jusqu'aux niveaux les plus grossiers, l'itération de niveau 0 ne fait appel qu'une fois à la récursion au niveau supérieur (on ne fait qu'une itération de la boucle).

E.4.1 Paramètres de `nb_full_mg_steps`

Pour expliquer plus précisément la manière dont fonctionne le solveur multigrille, on va expliquer les paramètres de `nb_full_mg_steps`. Dans `nb_full_mg_steps`, le premier paramètre indique le nombre de paramètres à suivre. Ces paramètres décrivent la structure du motif correspondant à une itération du solveur. Le nombre d'itérations de ce type réalisé dépend de la précision demandée sur la pression.

Pour expliquer la manière dont les arguments de `nb_full_mg_steps` contrôlent la structure des itérations du solveur, on prend l'exemple du cas où on a 6 niveaux de maillage, 0 étant le niveau le plus fin et 6 le niveau le plus grossier.

Prenons le cas où l'on donne des paramètres du type :

```
nb_full_mg_steps 2 A 1
```

Une itération est dans ce cas la répétition `A` fois d'une structure de la forme ∇ partant du niveau 0 vers le niveau 6 pour retourner vers le niveau 0 (figures [G.1](#), [G.2](#), [G.3](#) et [G.4](#)).

Prenons maintenant le cas où l'on donne des paramètres du type :

```
nb_full_mg_steps 2 A B
```

Une itération est dans ce cas la répétition A fois d'une structure de forme plus complexe avec des pics de tailles intermédiaires (figures G.5, G.6, G.7, G.8 et G.9). On comprend donc que dans tous les cas, le second paramètre, noté ici A , donne le nombre de fois où le motif entre deux niveaux zéros successifs est répété.

Lors d'une itération, le solveur passe alors plusieurs fois par les niveaux grossiers et fins avant d'atteindre le résultat final. Pour comprendre la structure des itérations internes, on se place dans le cas plus général :

```
nb_full_mg_steps 6 A B C D E F
```

On associe chaque paramètre $A \dots F$ à un niveau de grille de la manière suivante :

```
A correspond au niveau 0
B correspond au niveau 1
C correspond au niveau 2
D correspond au niveau 3
E correspond au niveau 4
F correspond au niveau 5
```

Les paramètres $B, C \dots F$ correspondent au nombre de fois plus un, où le motif entre deux sommets successifs aux niveaux $1, 2 \dots 5$ respectivement est répété.

Si l'on donne moins de 6 arguments, alors le dernier paramètre de la liste est utilisé pour tous les suivants. Autrement dit,

```
nb_full_mg_steps 1 A      ⇔ nb_full_mg_steps 6 A A A A A A
nb_full_mg_steps 2 A B    ⇔ nb_full_mg_steps 6 A B B B B B
nb_full_mg_steps 3 A B C  ⇔ nb_full_mg_steps 6 A B C C C C
nb_full_mg_steps 4 A B C D ⇔ nb_full_mg_steps 6 A B C D D D
nb_full_mg_steps 5 A B C D E ⇔ nb_full_mg_steps 6 A B C D E E
```

On peut décrire ce qu'il se passe sur une itération en donnant successivement tous les niveaux par lesquels passe le solveur, c'est la *notation complète*. On peut aussi voir la structure d'une itération comme une succession de *pics* ayant tous pour base le niveau 6 (le plus grossier). Dans la *notation condensée*, on décrit ainsi ce qu'il se passe sur une itération en ne donnant que les niveaux des sommets des pics, sachant qu'entre deux sommets on descend en passant par tous les niveaux jusqu'au niveau 6 puis on remonte en passant par tous les niveaux jusqu'au pic suivant.

On peut passer de la notation condensée à la notation complète par la table de correspondance suivante :

Notation condensée	Notation complète
5	65
4	6545
3	654345
2	65432345
1	6543212345
0 (au milieu)	654321012345
0 (initial)	012345
0 (final)	6543210

Chaque point en notation condensée correspond à un pic partant de 6 pour aller à un niveau donné et redescendre jusqu'à 6. Comme chaque itération du solveur débute et termine au niveau 0, cette vision des choses n'est pas adapté en ces deux points. C'est pourquoi on donne une correspondance particulière pour les points initiaux et finaux.

En notation condensée, la structure d'une itération est

$$([0[1[2[3[4[5] \times (F - 1)] \times (E - 1)] \times (D - 1)] \times (C - 1)] \times (B - 1)] \times (A))0$$

où l'on note $S \times k$ la répétition k fois de S c'est-à-dire $S \times k \equiv \underbrace{SSS \cdots S}_{k \text{ fois}}$

On notera en particulier que le premier 1 de la liste de paramètres marque l'endroit du niveau le plus fin à partir duquel on n'a plus de sommets intermédiaires (car il signifie la répétition 0 fois et donc l'absence). Cet effet est bien visible sur la figure G.11. Il explique également l'aspect des figures G.1, G.2, G.3 et G.4.

E.4.2 Autres paramètres

Tous ces paramètres, de même que `nb_full_mg_steps` sont à placer dans le bloc `multigrid_solver` dédié au solveur multigrille et lui même contenu dans le bloc `dns_qc_double`. On a donc une structure de la forme,

```
dns_qc_double
{
    ...
    multigrid_solver
    {
        ...
    }
    ...
}
```

`coarsen_operators_`

Ce mot-clé permet de définir les différents niveaux de maillage utilisés pour le solveur multigrille. On donne ici tout d'abord le nombre de maillages supplémen-

taires à utiliser puis on décrit par des mots-clés le type d'agglomération utilisée entre deux niveaux :

1. **Coarsen_Operator_K** pour une agglomération anisotrope. En paramètres, on doit donner la règle de construction du maillage dans la direction k . On lui indique le nom d'un fichier contenant les coordonnées dans cette direction par l'expression :

```
Coarsen_Operator_K {file_z_coord <nom_fich>}
```

2. **Coarsen_Operator_Uniform** pour des agglomérations isotropes ou bi-directionnelles. Si aucun paramètre n'est donné, les agglomérations sont isotropes. Sinon, pour chaque direction, on indique le nombre de mailles qui doivent être agglomérées. Par exemple, pour agglomérer par deux dans les directions j et k seulement on utilisera :

```
Coarsen_Operator_Uniform {coarsen_i 1 coarsen_j 2↵
                           coarsen_k 2}
```

ghost_size

Le paramètre **ghost_size** définit le nombre de mailles de joint connues par chaque processeur. Un grand **ghost_size** permet de réduire les communications entre processeurs car il retarde d'autant la nécessité de mettre à jour les éléments de joint utilisés par les schémas numériques. Un trop grand **ghost_size** peut avoir des effets négatifs sur les performances si la taille des tableaux du niveau le plus grossier devient trop importante pour que les tableaux soient stockés de manière optimale dans la mémoire cache. Il y a donc un compromis à trouver qui dépend de chaque calculateur.

smooth_steps

Les paramètres de **smooth_steps** indiquent le nombre d'itérations du lisseur jacobi qui seront faites sur chaque grille. Le premier paramètre indique le nombre de paramètres à suivre et les paramètres suivant indique pour chaque grille le nombre d'itérations de lissage à faire.

Le nombre d'itérations est calculé selon deux critères. Tout d'abord, il faut que le nombre d'itérations *plus un* soit un multiple du nombre de mailles indiqué en **ghost_size**. Ensuite, on choisira un nombre d'itérations d'autant plus important que le nombre de mailles agglomérées est grand entre deux niveaux. Pour un déraffinement dans une seule direction d'un facteur 2 au maximum, un bon nombre d'itérations semble être 5. Pour un déraffinement isotrope, on trouvera donc logiquement plus d'itérations.

relax_Jacobi

C'est un des mots-clés qui sert à paramétrer le comportement du solveur Jacobi. Il faut indiquer un coefficient de relaxation pour chaque niveau de maillage du solveur

multigrille : Le premier paramètre indique le nombre de paramètres à suivre, qui doit correspondre au nombre de maillage ; Les arguments suivants donne pour chaque niveau de maillage un coefficient de relaxation, le dernier correspondant au maillage le plus grossier.

Par exemple, si on a 5 niveaux de maillage en plus du maillage initial, on pourra écrire :

```
relax_jacobi 5 0.69 0.69 0.69 0.65 0.65
```

Plus les facteurs de formes changent entre deux niveaux, plus ces facteurs doivent être importants. Ainsi, pour un déraffinement isotrope, le paramètre de relaxation optimal sera proche de 0,65. Pour un déraffinement anisotrope, donc dans une seule direction, le `relax_jacobi` optimal est plutôt de 0,65.

`solver_precision`

Le paramètre `solver_precision` indique la précision numérique que l'on désire utiliser, c'est-à-dire le nombre de chiffres utilisés pour décrire les nombres dans la machine. Les arguments possibles à donner sont `float` pour utiliser des flottants simple précision, `double` pour des flottants double précision et `mixed` où les deux types de précision sont utilisés.

L'utilisation du solveur `double` permet d'atteindre des résidus bien plus faible qu'avec le solveur `float`. Par contre, il est au moins deux fois plus lent par itération. Le solveur `mixed` représente un bon compromis. Il est suivant les cas 1,5 à 3 fois plus rapide que le solveur `double` avec une précision finale similaire.

`impr`

L'ajout du mot-clé `impr` affiche les résidus a chaque niveau et a chaque itération du solveur dans le fichier de sortie à des fins de débogage.

E.5 Définition des niveaux de maillage

L'utilisation du solveur multigrille nécessite la création d'une gamme de niveaux de maillage. Le niveau 0, niveau le plus fin, correspond au maillage de la simulation donné à l'aide du mot-clé `ijk_splitting`. Les niveaux 1 à n correspondent à des maillages plus grossiers créés par agglomération des mailles au niveau précédent.

E.5.1 Niveau 0

Le choix du maillage se fait en fonction de la finesse de la simulation désirée. Le maillage est homogène et régulier dans les directions longitudinales et transverses i et j . Dans la direction anisotrope k , le maillage est irrégulier et se raffine en proche paroi pour capturer les forts gradients de température et de vitesse en proche paroi.

Il suit une croissance en tangente hyperbolique de telle sorte à ce que les coordonnées des points soient données par :

$$y_k = h \left[1 + \frac{1}{a} \tanh \left(\left(-1 + \frac{k-1}{N_k-1} \right) \tanh^{-1}(a) \right) \right], \quad k \in [1, N_k] \quad (\text{E.11})$$

où N_k est le nombre de nœuds dans la direction k , h la demi-hauteur du canal et a est une constante comprise entre 0 et 1 qui indique dans quelles proportions les mailles en proches paroi sont raffinées par rapport au centre : en $a = 0$, le maillage est homogène ; si a tend vers 1, alors toutes les mailles sauf une sont infiniment proches de la paroi. Cette équation décrit le maillage sur la demi-hauteur du canal. Le maillage complet peut s'en déduire par symétrie par rapport au centre du canal.

Le paramètre a et le nombre de mailles N_k sont à déterminer en prenant pour contraintes la taille souhaitée de la première maille et de la maille au centre. On choisira généralement la taille de la maille au centre dans la direction anisotrope comme le minimum des tailles des mailles dans les deux directions homogènes.

E.5.2 Niveaux 1 à n

Ces maillages sont construits par agglomération des mailles entre deux niveaux. Trois types d'agglomération sont disponibles :

- *Agglomération isotrope* : Les mailles sont agglomérées par deux dans les 3 directions ce qui divise par 8 le nombre de mailles total. Ce type d'agglomération ne peut être utilisé que si les tailles des mailles dans les trois directions ne sont pas trop différentes (rapport inférieur à 2) ;
- *Agglomération bi-directionnelle* : Les mailles sont agglomérées par deux dans 2 directions dont une doit être k . Le nombre de mailles total est donc divisé par 4. Ce type d'agglomération est à utiliser pour rattraper de fortes disparités de maillage entre les directions x et y ;
- *Agglomération anisotrope* : Seules certaines mailles sont agglomérées (par deux ou trois) dans la direction perpendiculaire aux parois. Ce type d'agglomération est à utiliser pour réduire la disparité de maillage entre les directions de périodicité et la direction anisotrope.

Les agglomérations qui réduisent le plus le maillage sont les agglomérations isotropes mais elles ne peuvent être utilisées sur le maillage de départ car on a une trop grande disparité de maillage entre la direction anisotrope et la direction d'homogénéité. Notre stratégie sera donc d'appliquer dans un premier temps des agglomérations anisotropes jusqu'à obtenir un maillage régulier dans les 3 directions. Ensuite, des agglomérations isotropes sont effectuées.

Les niveaux obtenus par agglomération isotrope ou bi-directionnelle sont générés automatiquement dans Trio_U. Par contre, les coordonnées du maillage dans la direction k sont à donner par l'utilisateur. La méthode choisie pour réaliser une agglomération anisotrope est d'agglomérer par deux les mailles proches de la paroi, assez petites pour que leurs agglomérations ne créent pas de mailles de taille plus importante que la maille au centre. Un maillage régulier est utilisé pour les mailles restantes.

E.6 Réaliser une simulation

Réaliser une simulation nécessite d'appliquer une procédure particulière en plusieurs étapes. Ce déroulement est représenté par un schéma sur la figure E.1. On tentera d'explicitier chacune de ces étapes en prenant l'exemple du jeu de données écrit en annexe F.

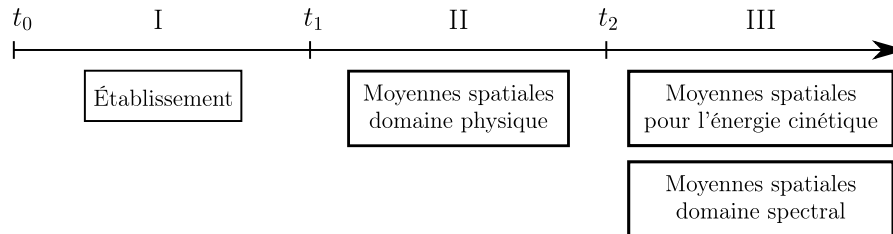


FIGURE E.1 – Représentation schématique des trois étapes d'une simulation.

Pour chacune de ces étapes, on lancera une simulation par la commande :

```
$ mpirun -np <nb_proc> <chemin_exec_atelier> ↵
    <chemin_jdd> <nb_proc> 1>out 2>err &
```

L'utilisation de `mpirun` permet de lancer le calcul en parallèle. L'expression `1>out 2>err` permet de rediriger la sortie standard vers le fichier `out` et la sortie d'erreur vers le fichier `err`. Enfin, le `&` final permet de lancer la commande en arrière-plan afin de ne pas bloquer le terminal.

Par exemple, dans notre exemple avec 16 cœurs on se placera dans le répertoire contenant le jeu de données et on utilisera la commande

```
$ mpirun -np 16 ~/170Adrien_new/New_algo_qc_opt ↵
    dns.data 16 1>out 2>err &
```

Pour faire des tests sur des cas simples, il est également utile de lancer des simulations en séquentiel. Dans ce cas, on utilisera simplement :

```
$ <chemin_exec_atelier> <chemin_jdd> 1>out 2>err &
```

L'utilisation d'un jeu de données destiné à être utilisé en séquentiel rend notamment beaucoup plus simple l'utilisation d'un débogueur tel que `gdb`. Pour l'utiliser, on commence par le lancer de cette manière,

```
$ gdb <chemin_exec_atelier>
```

puis on démarre une simulation une fois dans `gdb` par une commande du type

```
(gdb) r <chemin_jdd>
```

E.6.1 Établissement

On réalise tout d'abord une simulation qui aura pour rôle d'atteindre la convergence des statistiques sur l'écoulement. Les moyennes dans le domaine spatial sont ici enregistrées afin de suivre leurs évolutions mais cette étape n'a pas pour but de les conserver. Le jeu de données à utiliser ici est celui donné en annexe [E.1](#).

E.6.2 Réalisation des moyennes spatiales

Lors de cette étape, le but sera d'enregistrer les moyennes statistiques. Les post-traitements sur l'énergie cinétique dans l'espace spatial et spectral restent désactivés car ils nécessitent de d'abord connaître les moyennes statistiques, en particulier pour la vitesse moyenne.

Pour faire correctement la reprise des données de l'étape précédente, on pensera à ajouter au jeu de données la ligne `nom_reprise dns_1.sauv` et à modifier le nom du fichier de sauvegarde des données (`nom_sauvegarde dns_1.sauv` devient `nom_sauvegarde dns_2.sauv`). On supprimera également dans le jeu de données le mot-clé `dt_start` à partir du moment où l'on fait une reprise.

Pour indiquer que l'on souhaite redémarrer les statistiques, on supprimera dans le fichier `dns_1.sauv` tout le bloc `statistiques`, y compris les lignes qui ouvrent et ferment le bloc :

```
statistiques {
    ...
} } lignes à supprimer
```

E.6.3 Réalisation des post-traitement spatial et spectral

On veut ici obtenir les statistiques de l'écoulement du point de vue du post-traitement dans le domaine spatial et dans l'espace spectral. On réalise à nouveau une reprise donc on modifie dans le jeu de données les noms des fichiers de sauvegarde et de reprise avec la même logique qu'à l'étape précédente.

Pour indiquer que les moyennes statistiques sont convergées et que l'on souhaite débiter l'enregistrement des moyennes pour l'analyse de l'énergie cinétique turbulente, on ajoute dans le fichier dont on fait la reprise (par exemple `dns_2.sauv`) le mot-clé `converge` juste après l'ouverture du bloc `statistiques` de la manière suivante :

```
...
statistiques {
    converge
    ...
}
```

Pour avoir *en plus* les statistiques dans l'espace spectral, on ajoutera dans le jeu de données les deux lignes (dans le jeu de données pris en exemple ces deux lignes sont commentées) :

```
spectral_splitting  post_splitting
dt_post_spectral    200
```

E.7 Conversion des données d'un maillage à un autre

Pour faire la conversion des données d'un maillage à un autre, il faut créer un jeu de données `Trio_U` dans lequel on déclare et définit deux objets de type `IJK_Splitting` et leurs géométries `IJK_Grid_Geometry` associées. Ensuite, on déclare un problème de type `switch_double` (au lieu d'un problème de type `dns_qc_double` pour lancer une simulation). Par exemple on écrira,

```
switch_double
{
    direct_write          0
    old_ijk_splitting     old_splitting
    new_ijk_splitting     new_splitting
    t_paro_i_impose_kmin  293.0
    t_paro_i_impose_kmax  586.0
    cp                    1005.0
    gamma                 1.4
    nom_sauvegarde        dns_2.sauv
    nom_reprise           dns_1.sauv
}
```

Les mots-clés importants ici sont `old_ijk_splitting` et `nom_reprise` pour indiquer l'ancien maillage et l'emplacement des données respectivement ; `new_ijk_splitting` et `nom_sauvegarde` pour indiquer le nouveau maillage et le nom du fichier où écrire les nouvelles données. S'il est présent, il faudra supprimer des données en entrée le bloc `statistiques` comme décrit en [E.6.2](#) car il n'est pas supporté par l'outil.

L'option `direct_write`, par défaut à 1 si l'on n'inclue pas ce mot-clé, permet d'écrire à la volée les fichiers sans allouer la mémoire. Pour une raison ou une autre, le code ne fonctionne pas dans mon cas sans désactiver cette option en la mettant à zéro.

On pourra utiliser les données ainsi créées pour faire une reprise du calcul sur un maillage différent. On notera lors de l'écriture du jeu de données pour la reprise qu'il sera nécessaire de nommer la géométrie utilisée en cohérence avec le nom donné à cette étape.

F Exemple de jeu de données

```

IJK_Grid_Geometry grid_geom
Lire grid_geom
{
    nbelem_i 192
    nbelem_j 128
    uniform_domain_size_i 0.093764
    uniform_domain_size_j 0.062509
    file_coord_k          coord_k_0.txt
    perio_i
    perio_j
}

IJK_Splitting grid_splitting
Lire grid_splitting
{
    ijk_grid_geometry grid_geom
    nproc_i 4
    nproc_j 2
    nproc_k 2
    process_grouping_i 2
    process_grouping_j 2
    process_grouping_k 2
}

IJK_Splitting post_splitting
Lire post_splitting
{
    ijk_grid_geometry grid_geom
    nproc_i 1
    nproc_j 1
    nproc_k 16
}

dns_qc_double
{
    ijk_splitting grid_splitting
    timestep 1
    nb_pas_dt_max 200000
    multigrid_solver
    {
        coarsen_operators 5
        Coarsen_Operator_K { file_z_coord coord_k_1.txt }
        Coarsen_Operator_K { file_z_coord coord_k_2.txt }
        Coarsen_Operator_K { file_z_coord coord_k_3.txt }
    }
}

```

F Exemple de jeu de données

```

Coarsen_Operator_Uniform {  }
Coarsen_Operator_Uniform {  }

ghost_size 6
pre_smooth_steps 5 5 5 5 8 8
smooth_steps      5 5 5 5 8 8

relax_jacobi 5 0.69 0.69 0.69 0.65 0.65
solveur_grossier GCP { seuil 0.5e-9 precondition ssor↵
    { omega 1.5 } }
check_residu 0
seuil 2.5e-8
nb_full_mg_steps 2 3 1
solver_precision mixed
}
timestep_facsec 1.

tinit 0.

expression_t_init 293.+293/0.029846*z
expression_vx_init 2.558*z*(0.029846-z)↵
    *4/(0.029846*0.029846)
expression_vy_init 0.
expression_vz_init (sin((x-0.093764)↵
    /0.093764*6.28318530717959)*sin(y↵
    /0.062509*6.28318530717959)+sin((x-0.093764)↵
    /0.093764*6.28318530717959*6)*sin(y↵
    /0.062509*6.28318530717959*4)+sin((x-0.093764)↵
    /0.093764*6.28318530717959*2)*sin(y↵
    /0.062509*6.28318530717959*8))*z*(0.029846-z)↵
    *4/(0.029846*0.029846)

dt_post 50
# spectral_splitting post_splitting #
# dt_post_spectral 200 #
dt_start 1.e-8
dt_sauvegarde 10000
nom_sauvegarde dns_1.sauv
check_stop_file dns.stop
t_paroι_impose_kmin 586.0
t_paroι_impose_kmax 293.0
p_thermo_init 1.5e5
cp 1005.0
gamma 1.4
debit_massique 0.005675194187
}

```

G Exemples de structures d'itération du solveur multigrille

Table des figures

G.1	Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 2 1 1	71
G.2	Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 2 2 1	71
G.3	Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 2 3 1	72
G.4	Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 2 4 1	72
G.5	Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 2 1 2	73
G.6	Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 2 3 2	73
G.7	Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 2 4 2	74
G.8	Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 2 1 3	74
G.9	Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 2 1 4	75
G.10	Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 3 1 2 4	76
G.11	Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 5 1 4 2 4 1	76
G.12	Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 5 3 2 2 4 1	77
G.13	Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 6 1 3 2 2 2 3	77
G.14	Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 6 1 4 2 4 2 4	78

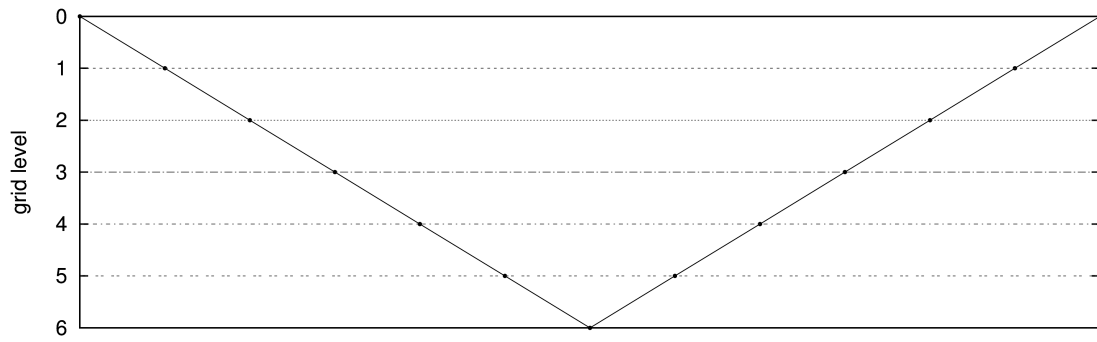


FIGURE G.1 – Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 2 1 1

Notation condensée : 00

= ([0[1[2[3[4[5] × 0] × 0] × 0] × 0] × 0] × 1)0

Notation complète : 0123456543210

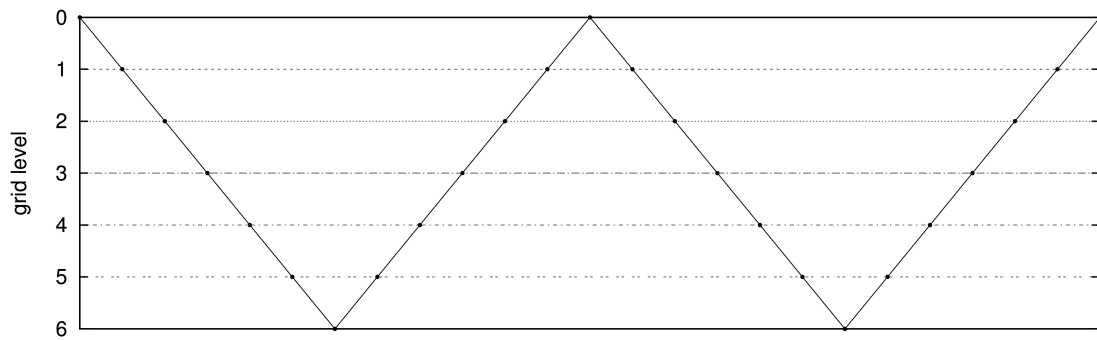


FIGURE G.2 – Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 2 2 1

Notation condensée : 000

= ([0[1[2[3[4[5] × 0] × 0] × 0] × 0] × 0] × 2)0

Notation complète : 0123456543210123456543210

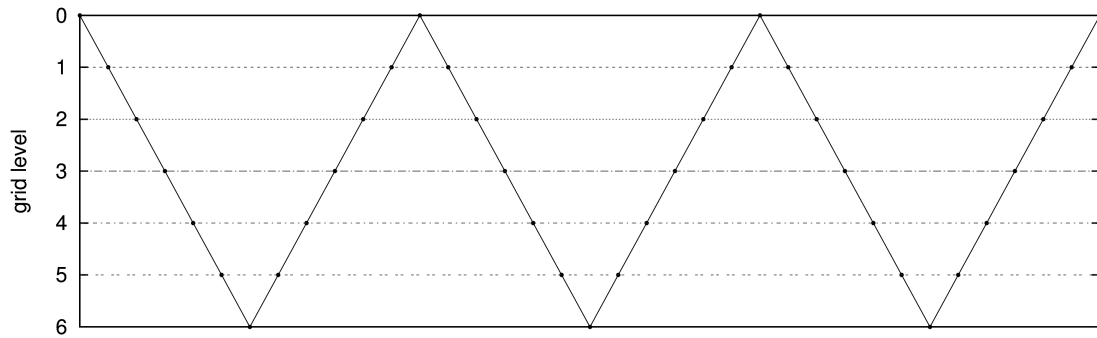


FIGURE G.3 – Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 2 3 1

Notation condensée : 0000

= ([0[1[2[3[4[5] × 0] × 0] × 0] × 0] × 0] × 3)0

Notation complète : 0123456543210123456543210123456543210

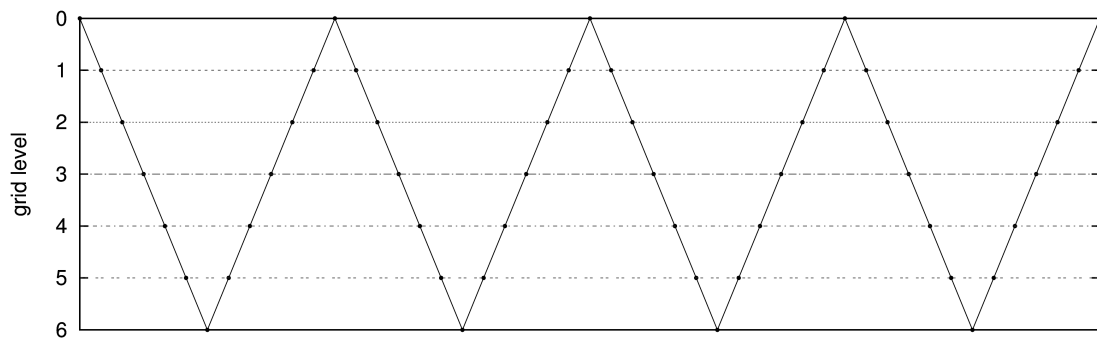


FIGURE G.4 – Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 2 4 1

Notation condensée : 00000

= ([0[1[2[3[4[5] × 0] × 0] × 0] × 0] × 0] × 4)0

Notation complète : 0123456543210123456543210123456543210123456543210

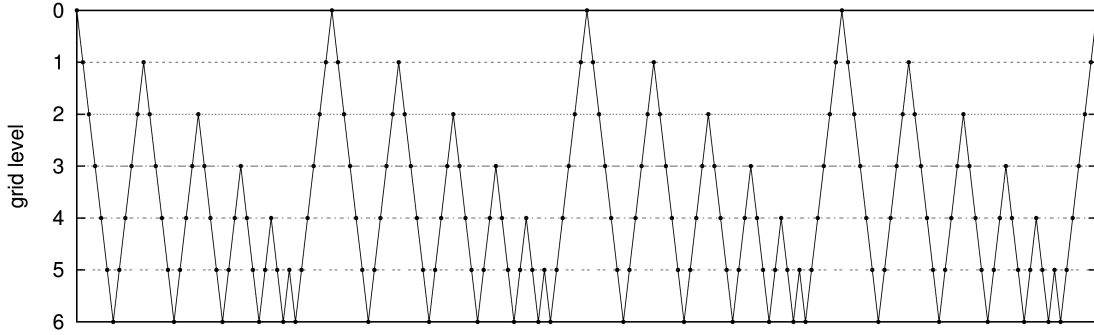


FIGURE G.7 – Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 2 4 2

Notation condensée : 0123450123450123450123450

= ([0[1[2[3[4[5] × 1] × 1] × 1] × 1] × 1] × 1] × 4)0

Notation complète : 012345654321234565432345654345654565654321012345654321-
23456543234565434565456565432101234565432123456543234565434565456565432-
10123456543212345654323456543456545656543210

= ([01234565432([123456543([23456543([34565([456([56] × 1)5] × 1)4] × 1)3] × 1)2] ×
1)1] × 4)0

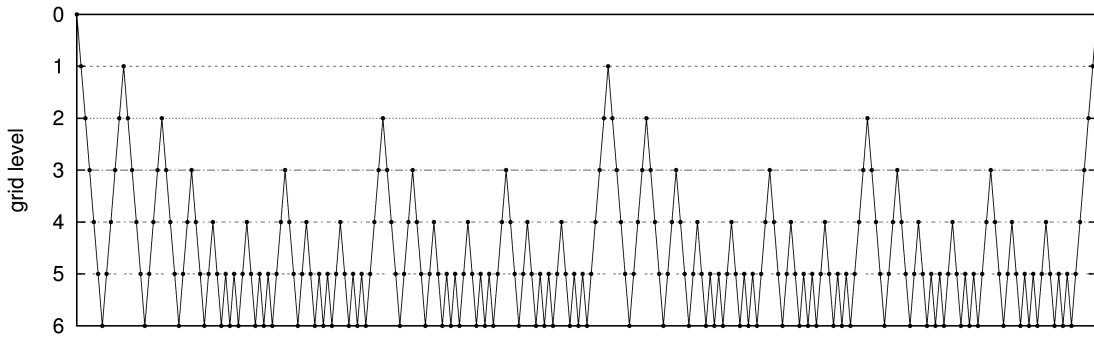


FIGURE G.8 – Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 2 1 3

Notation condensée : 01234554553455455234554553455455123455455345545523455-
45534554550

= ([0[1[2[3[4[5] × 2] × 2] × 2] × 2] × 2] × 1)0

Notation complète : 012345654321234565432345654345654565656545656565434565-
45656565456565654323456543456545656565456565654345654565656545656565432-
12345654323456543456545656565456565654345654565656545656565432345654345-
654565656545656565434565456565654565656543210

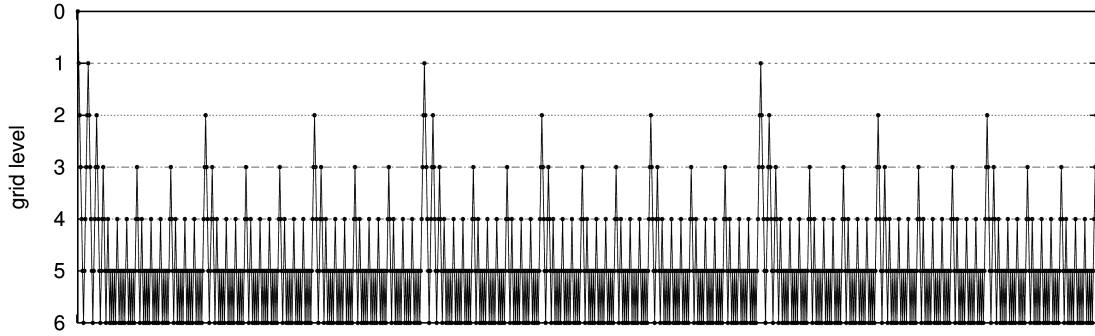


FIGURE G.9 – Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 2 1 4

Notation condensée : 01234555455545553455545554555345554555455523455545554555345554555455512-
34555455545553455545554555345554555455523455545554555345554555455534555-
455545552345554555455534555455545553455545554555345554555455512345554555455534555455-
54555345554555455523455545554555345554555455534555455545552345554555455-
5345554555455534555455545550

= ([0[1[2[3[4[5] × 3] × 3] × 3] × 3] × 3] × 1)0

Notation complète : 01234565432123456543234565434565456565654565656565456565656545-
65656565434565456565656545656565654565656565434565456565656545656565654-
5656565654323456543456545656565654565656565434565456565656545-
65656565456565656543456545656565654565656565456565656543234565434565456-
56565654565656565456565656543456545656565654565656565456565656543456545-
65656565456565656545656565654321234565432345654345654565656565456565656-
54565656565434565456565656545656565654565656565434565456565656545656565-
65456565656543234565434565456565656545656565654565656565434565456565656-
54565656565456565656543456545656565654565656565456565656543234565434565-
45656565654565656565456565656543456545656565654565656565456565656543456-
54565656565456565656545656565654321234565432345654345654565656565456565-
65654565656565434565456565656545656565654565656565434565456565656545656-
56565456565656543234565434565456565656545656565654345654565656565456565-
656545656565654565656565434565456565656545654565656565456565656543234565434-
56545656565654565656565456565656543456545656565654565656565456565656543-
4565456565656545656565654565656565456565656543210

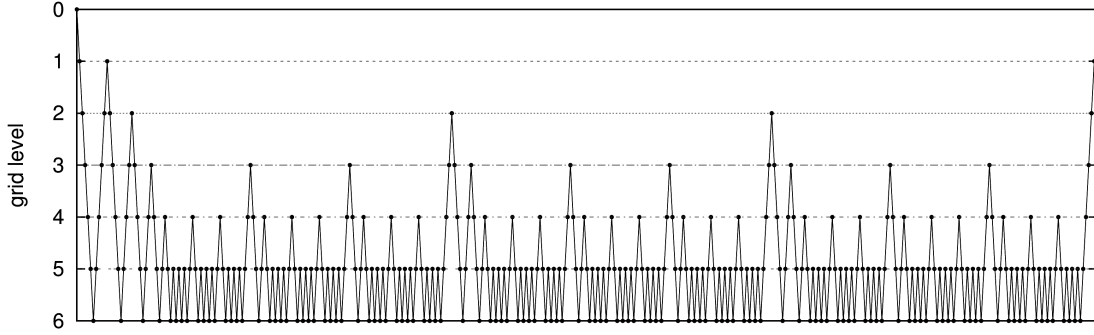


FIGURE G.10 – Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 3 1 2 4

Notation condensée : 01234555455545553455545554555345554555455523455545554-
5553455545554555345554555455523455545554555345554555455534555455545550

= ([0[1[2[3[4[5] × 3] × 3] × 3] × 3] × 1] × 1)0

Notation complète : 012345654321234565432345654345654565656565456565656545-
65656565434565456565656545656565654565656565434565456565656545656565654-
56565656543234565434565456565656545656565654565656565434565456565656545-
65656565456565656543456545656565654565656565456565656543234565434565456-
56565654565656565456565656543456545656565654565656565456565656543456545-
656565654565656565456565656543210

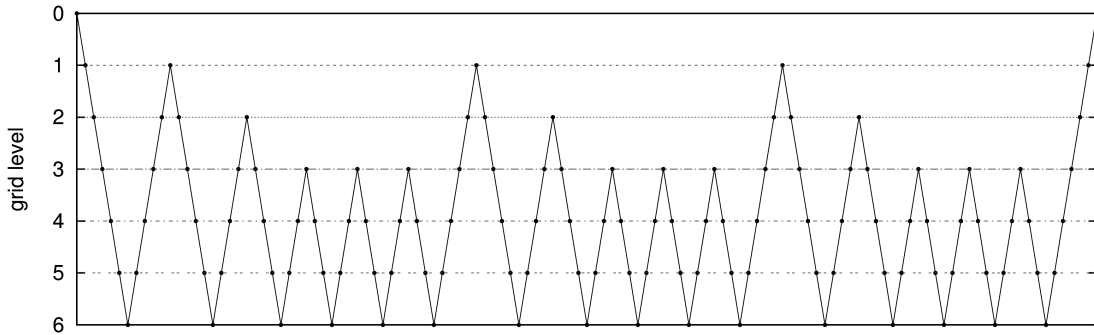


FIGURE G.11 – Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 5 1 4 2 4 1

Notation condensée : 01233312333123330

= ([0[1[2[3[4[5] × 0] × 0] × 3] × 1] × 3] × 1)0

Notation complète : 012345654321234565432345654345654345654321234565-
4323456543456543456543456543456543212345654323456543456543456543210

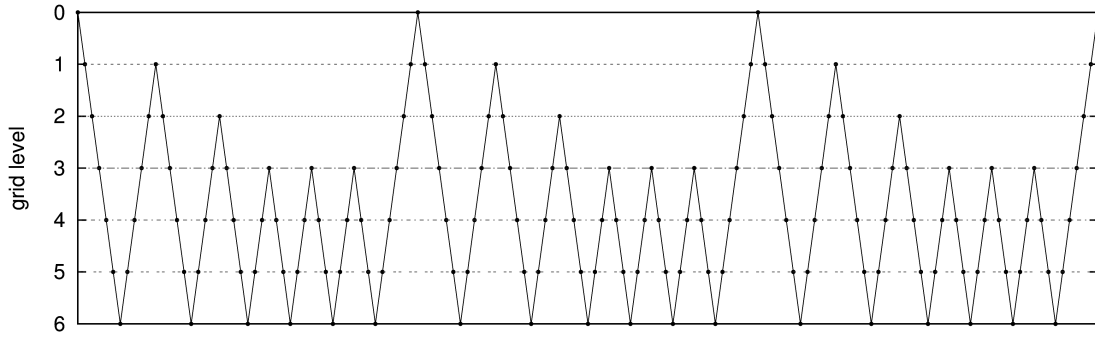


FIGURE G.12 – Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 5 3 2 2 4 1

Notation condensée : 0123330123330123330

= ([0[1[2[3[4[5] × 0] × 0] × 3] × 1] × 1] × 3)0

Notation complète : 012345654321234565432345654345654345654345654321012345-
65432123456543234565434565434565434565434565432101234565432123456543234565434-
56543456543456543210

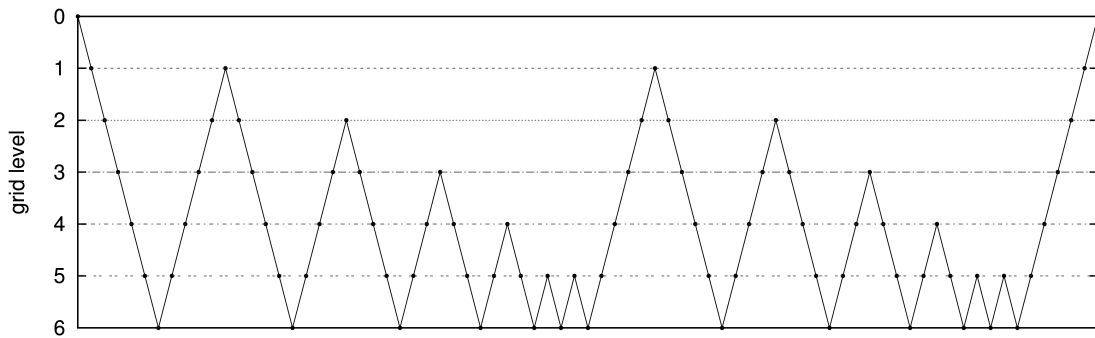


FIGURE G.13 – Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 6 1 3 2 2 2 3

Notation condensée : 01234551234550

= ([0[1[2[3[4[5] × 2] × 1] × 1] × 1] × 2] × 1)0

Notation complète : 012345654321234565432345654345654565656543212345654323-
45654345654565656543210

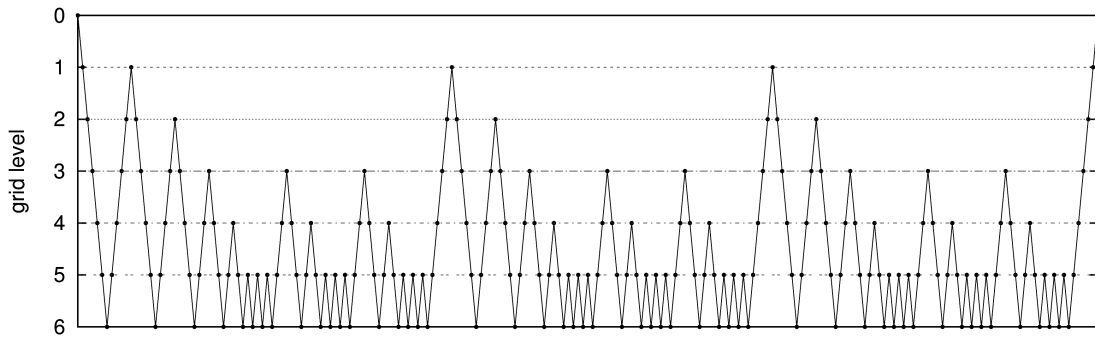


FIGURE G.14 – Structure des itérations du solveur multigrille avec comme arguments de nb_full_mg_step 6 1 4 2 4 2 4

Notation condensée : 01234555345553455512345553455534555123455534555345550
 = ([0[1[2[3[4[5] × 3] × 1] × 3] × 1] × 3] × 1)0

Notation complète : 012345654321234565432345654345654565656565434565456565-
 656543456545656565654321234565432345654345654565656565434565456565654-
 34565456565656543212345654323456543456545656565654345654565656565434565-
 456565656543210