

# Einführung i. d. Fluid- und Thermodynamik- Strömungsmechanik

- Übung: Nachdem der Stoff behandelt wurde
- Ankündigung abwarten - Moodle/LSF
- Strömungslehre
  - Dienstag : 14:00-16:00 Uhr, Raum PB-I-001
  - Beginn nächste Woche
  - Tutorien werden angeboten, allerdings werden viele Teilnehmer erwartet
  - Testat: in Diskussion

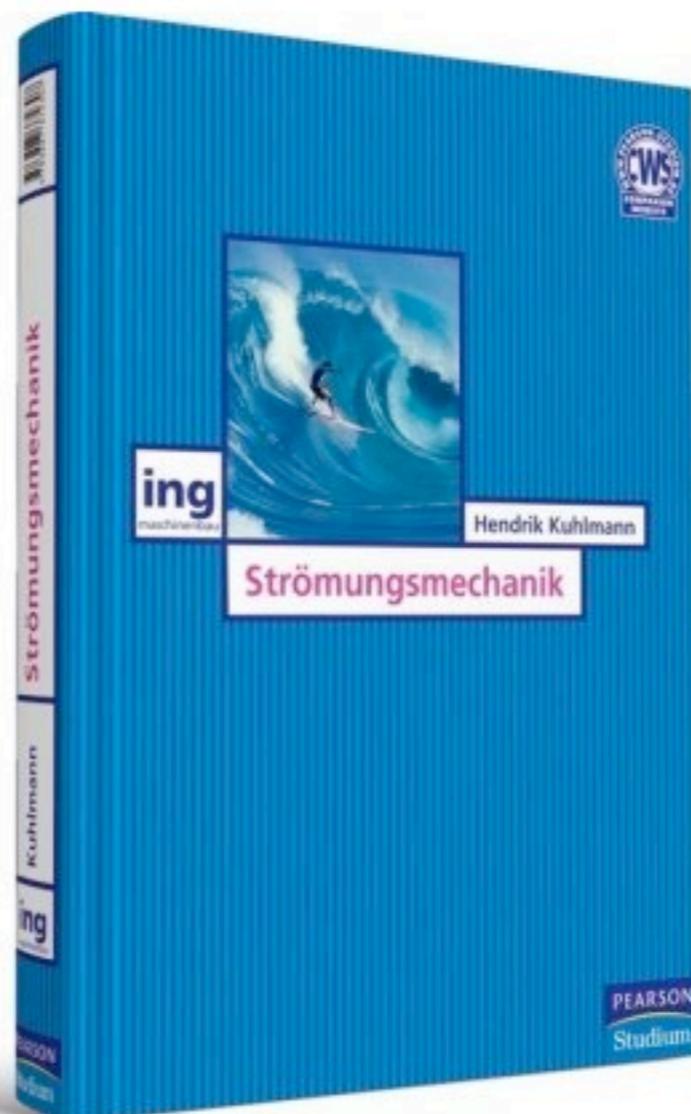
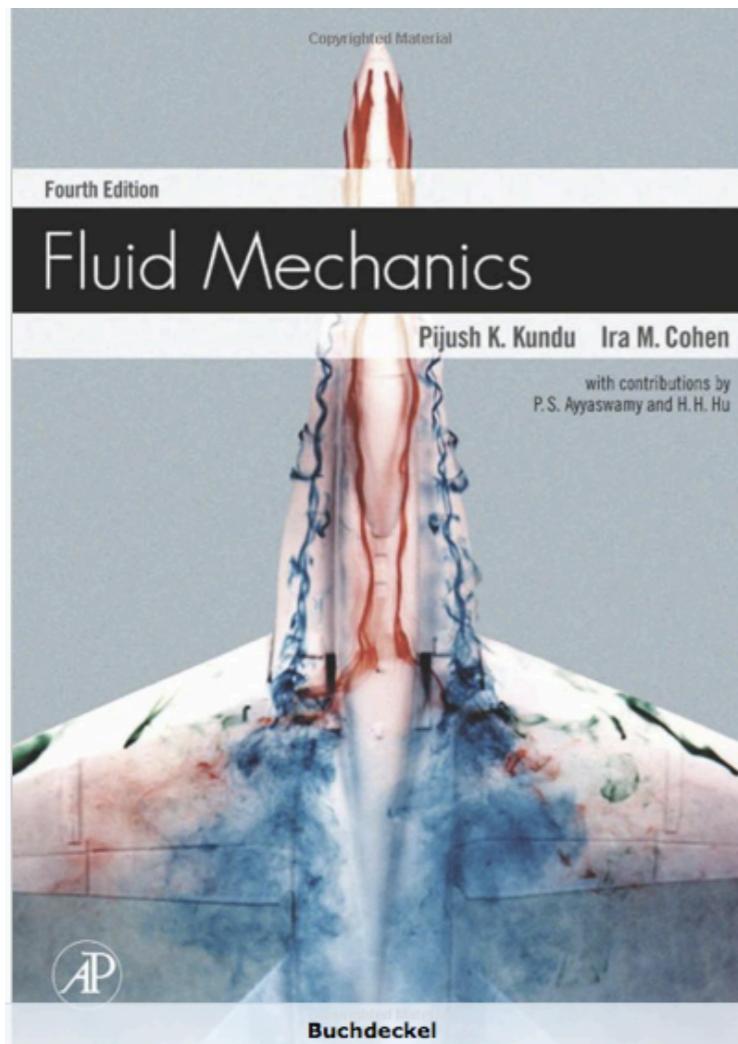
# Strömungsmechanik

## ■ Lehrbücher:

- **Cohen & Kundu:** Fluid Mechanics (Academic Press)
- White: Fluid Mechanics (McGraw-Hill)
- Kuhlmann: Strömungsmechanik (Pearson)

## ■ Für **extrem Interessierte:**

- Tennekes & Lumley: First course in Turbulence (MIT Press)
- **Pope:** Turbulent Flows (CUP)



# Fragestellung - Methoden - Beispiele

- Strömungen und das Verhalten von Fluiden haben großen Einfluss auf viele Bereiche in der Natur und Technik. Dazu gehören unter anderem
  - die Bestimmung von Kräften auf Körper (z.B. Rennautos, Flugzeuge, Schiffe)
  - die Strömung in Arterien (z.B. Degenerierung des Endotheliums)
  - die Strömungsvorhersage (z.B. Wetter, Aerodynamik, Verbrennung, sowohl lokal als auch global)
  - die aktive und passive Beeinflussung von Strömungen(z.B.Golfball,Turbulenzreduktion, Lärmreduktion, Widerstandsreduktion)

# Theoretische Vorhergehensweise

- Bestimmung/ Herleitung und Analyse der das Problem beschreibenden Transport-, Erhaltungsgleichungen
- Bestimmung von Ähnlichkeitslösungen (prinzipiell: Umwandlung partieller in gewöhnliche Differentialgleichungen, evtl. Lie-Gruppen-Theorie)
- Entwicklung von Modellen und Parametrisierungen Approximationen, Näherungslösungen

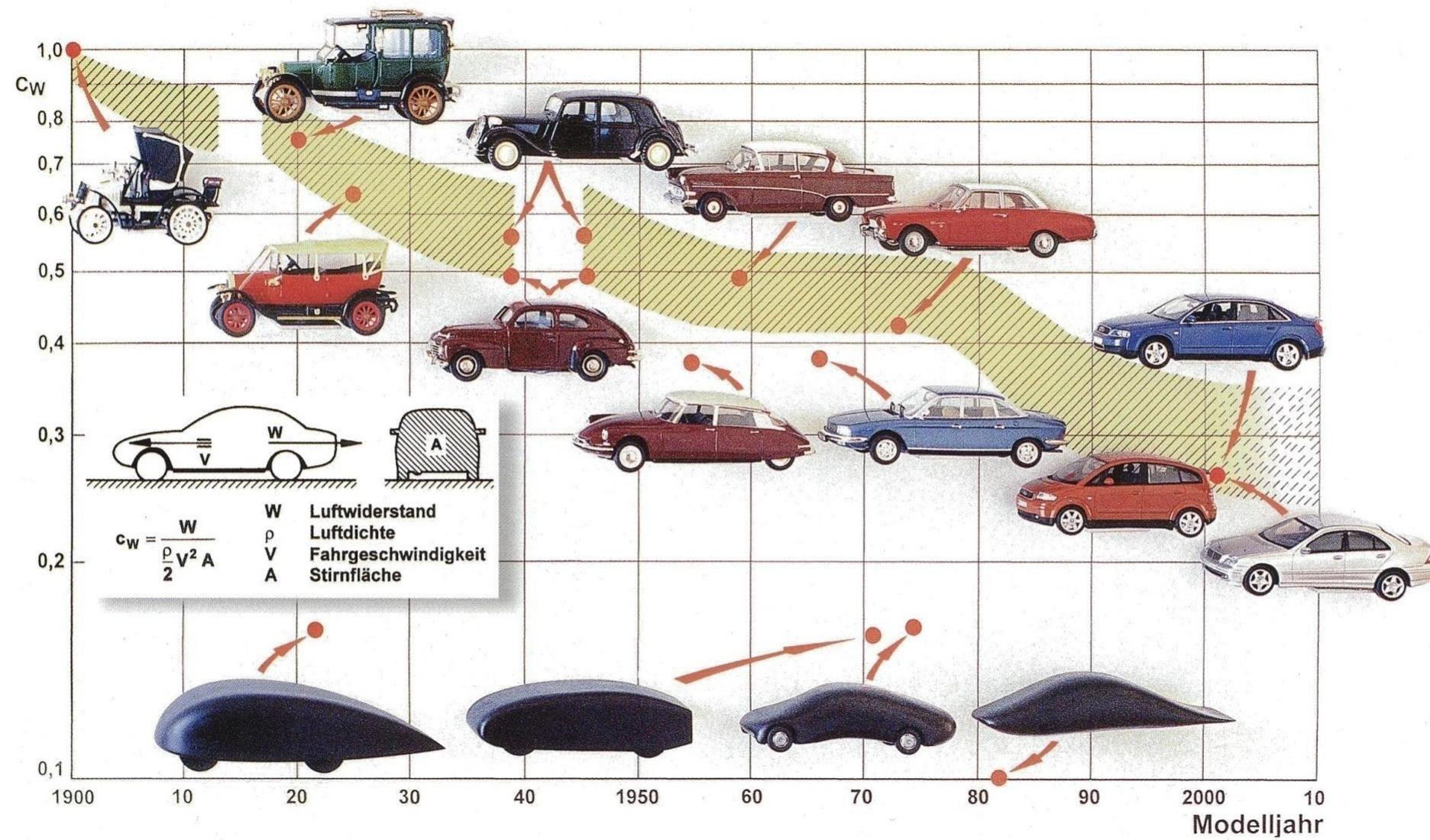
# Experimentelle Vorhergehensweise

- Visualisierung der Strömung und von Strömungsphänomenen (Pressure Sensitive Paint, Ölanstrichbilder, PIV, Schlierenaufnahmen, Tinte etc.)
- Messungen von
  - Kräften,
  - Momenten,
  - Strömungsvariablen (Druck, Dichte, Geschwindigkeit, ...)

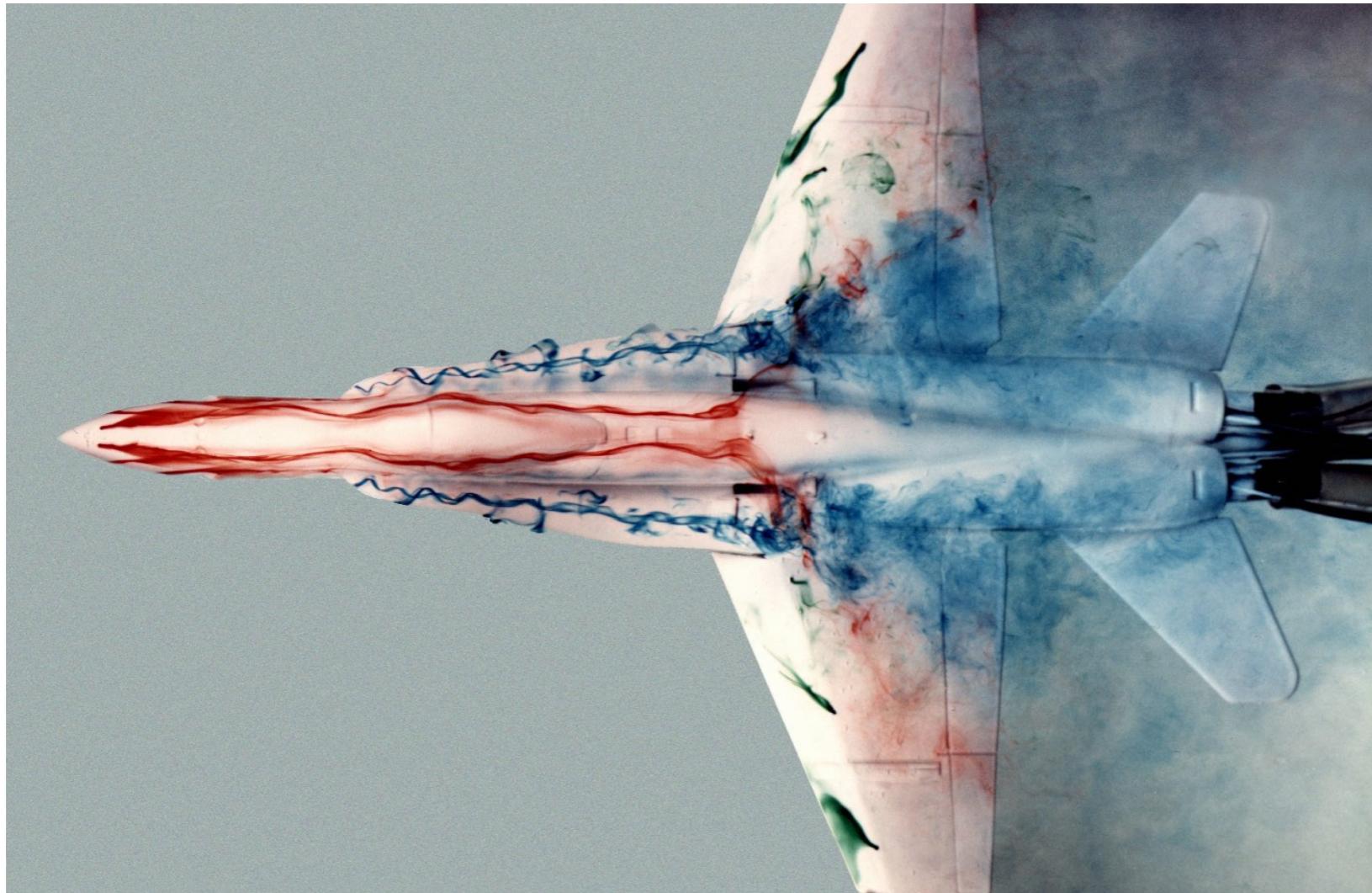
# Numerische Vorhergehensweise

- DNS (Direkte numerische Simulation)
  - Auflösung aller relevanten Zeit- und Längenskalen, keine Modellannahmen für Strömungsphänomene; wird oft als “numerisches Experiment angesehen”
  - Rechenaufwand ist sehr hoch
- LES (Large Eddy Simulation od. Grobstruktursimulation)
  - Berechnung der energiereichen großen, relevanten Skalen, Modellierung der vernachlässigten kleinen, “irrelevanten” Skalen.
  - Wie? Filterung der Gleichungen (Filter lässt nur die großen Skalen durch), viel geringerer Rechenaufwand als DNS.
- RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes): zeitliche Mittelung der Gleichungen → Einsatz empirischer Turbulenzmodelle. Hauptwerkzeug in der Industrie (Überprüfe ob die Modellierung die Physik wiedergibt.)

## ■ Entwicklung der Fahrzeugaerodynamik (Hucho, 2005)



# Beispiel 1



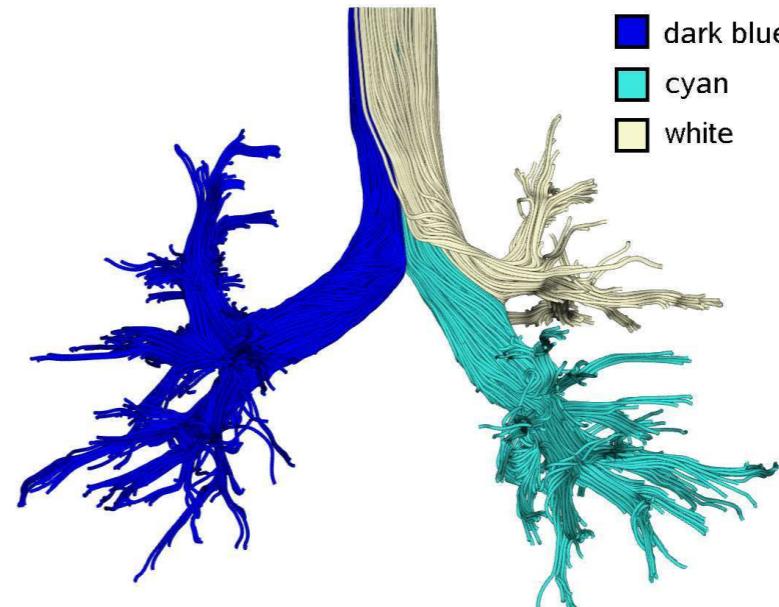
NASA Dryden Flight Research Center Photo Collection  
<http://www.dfrc.nasa.gov/gallery/photo/index.html>  
NASA Photo: ECN-33298-03 Date: 1985

1/48-scale model of an F-18 aircraft in Flow Visualization Facility (FVF)

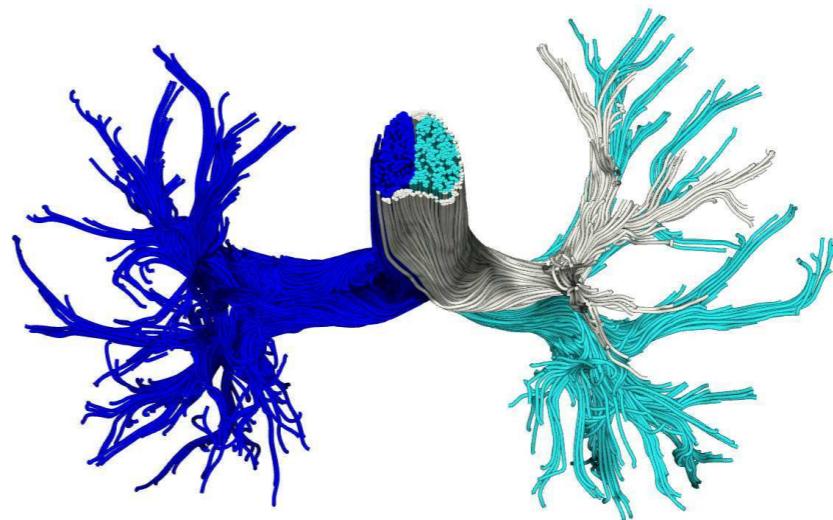
## Beispiel 2

### ■ LBM-Simulation

- Lattice-Boltzmann-Simulation
- Lungenmodell mit 6 Generationen
- Partikeltransport



(a) Front view

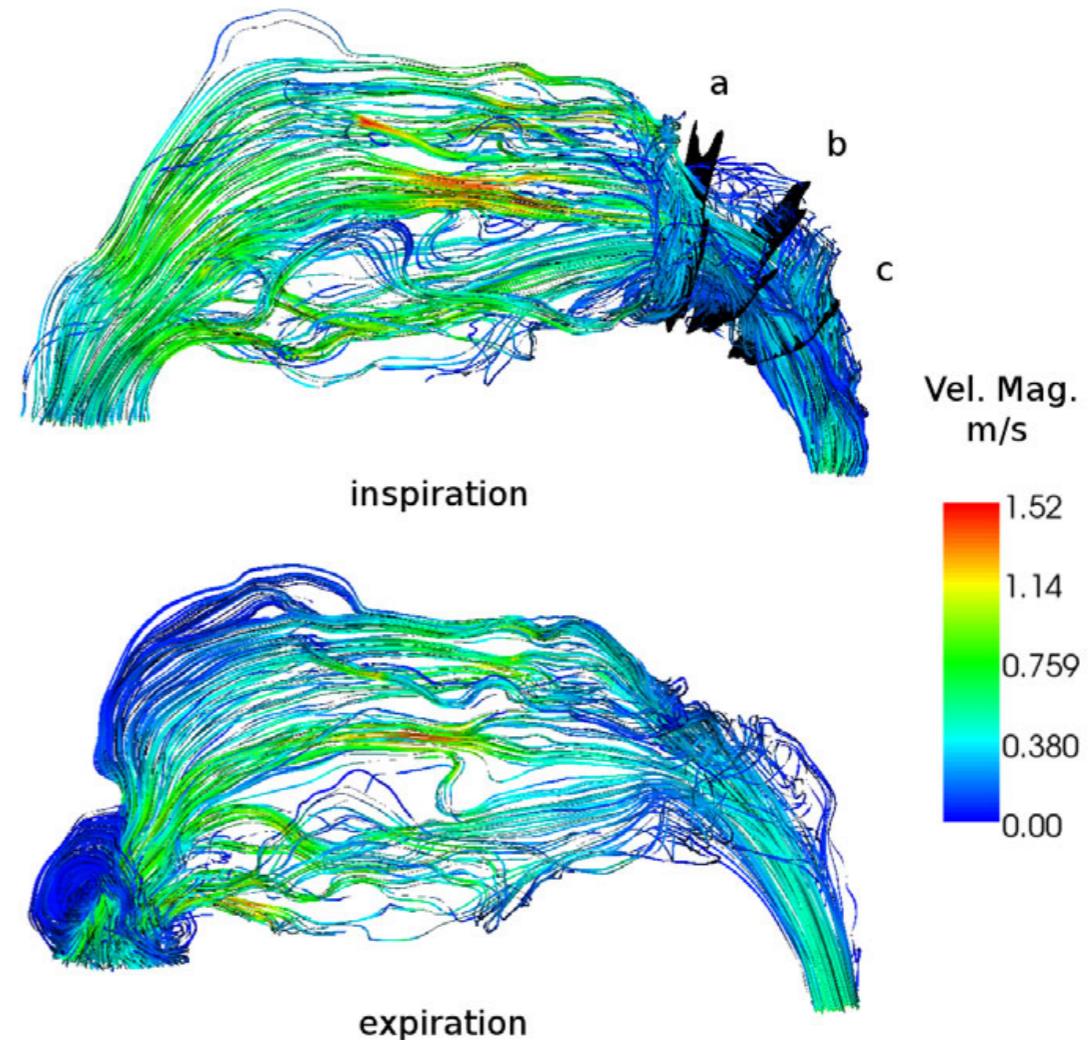


(b) Top view

## Beispiel 3

### ■ LBM

- Ein- Ausatemvorgang in der Nase



## Beispiel 4

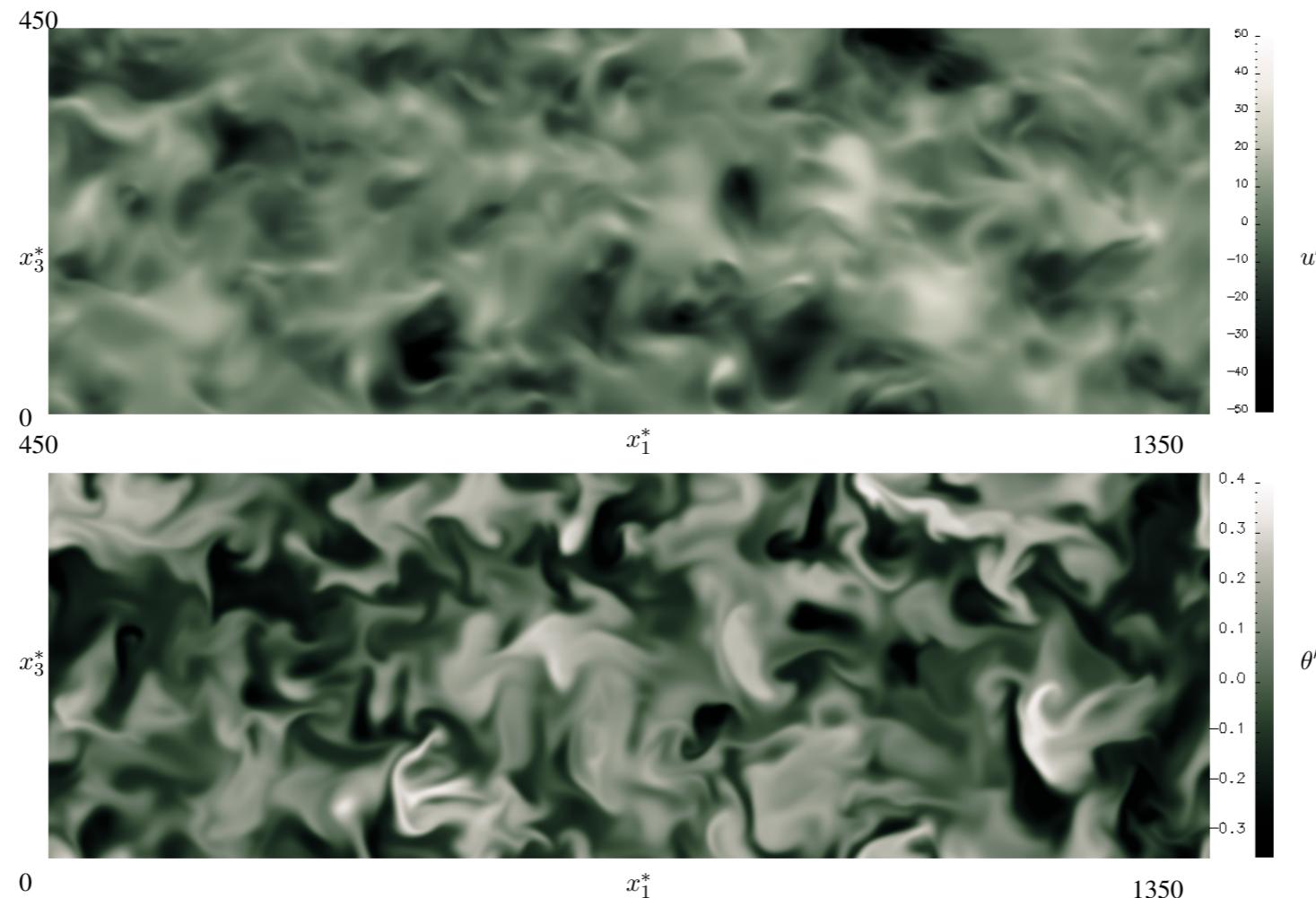
### ■ Flügelendwirbel, B747

- Sicherheitsabstand Kleinflugzeug, A380: 18.5 km



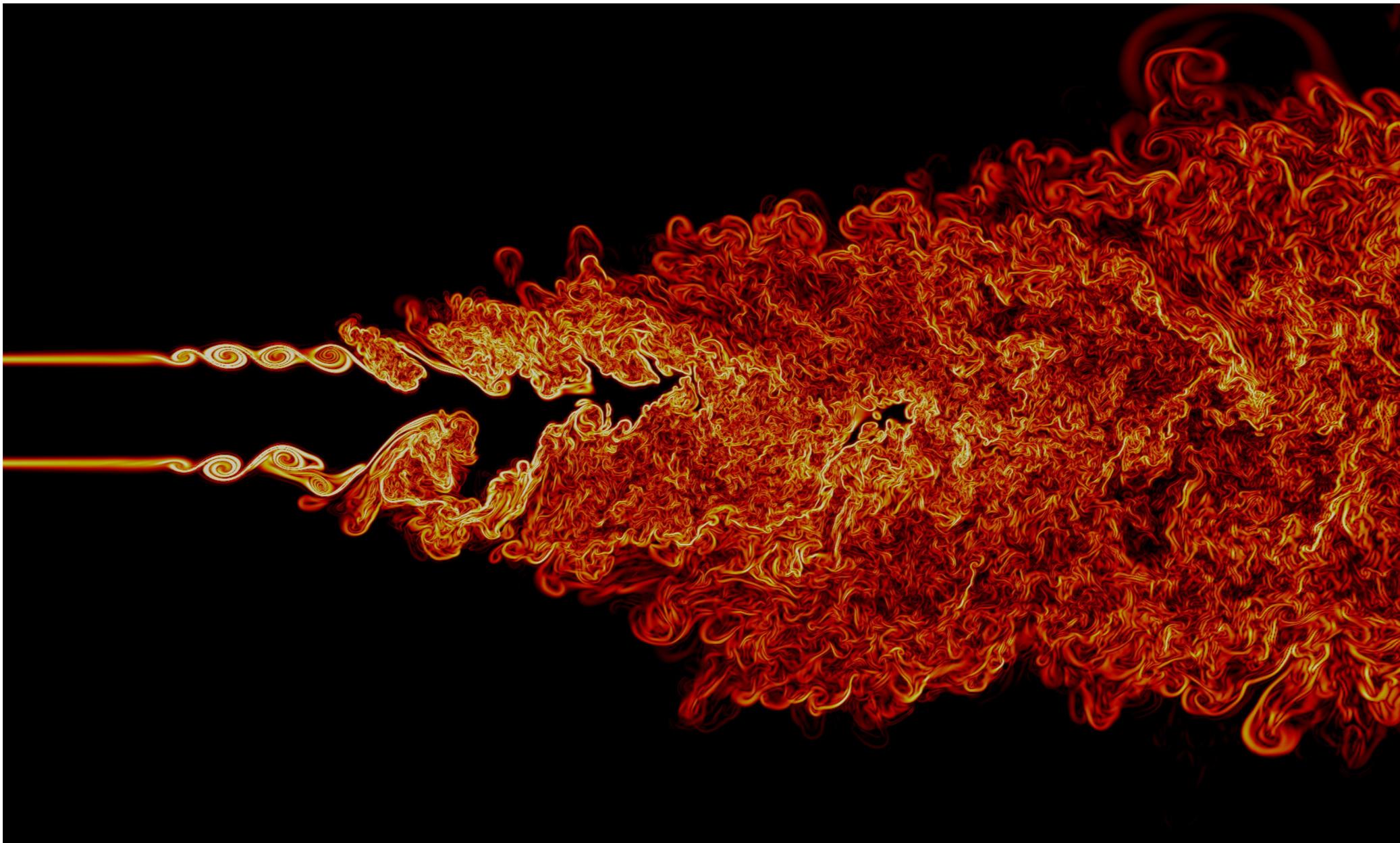
## Beispiel 5

- Turbulente Kanalströmung,  $Ma = 3$



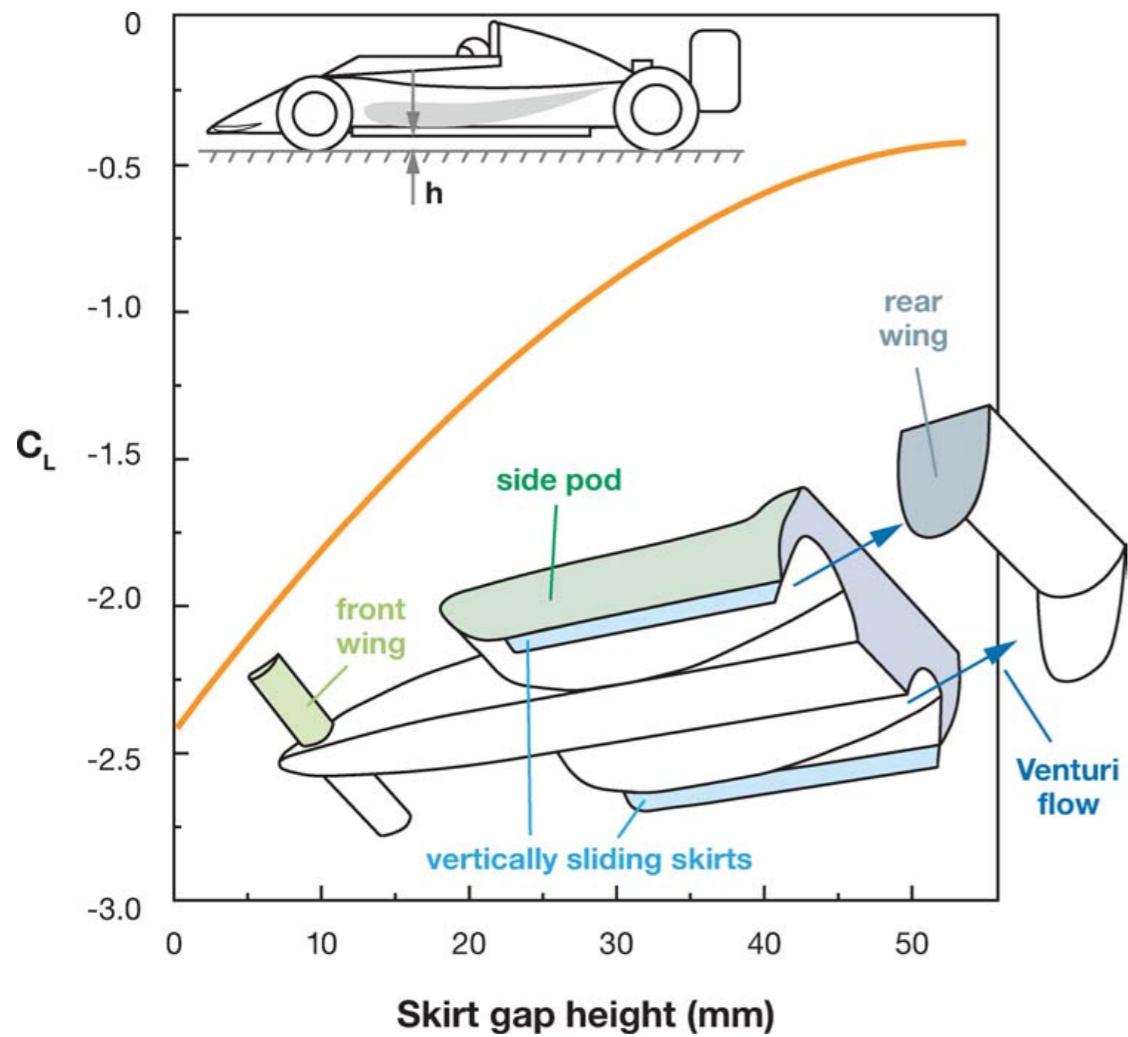
## Beispiel 6

- Turbulenter Freistrahl (DNS,  $Re_D=21000$ )



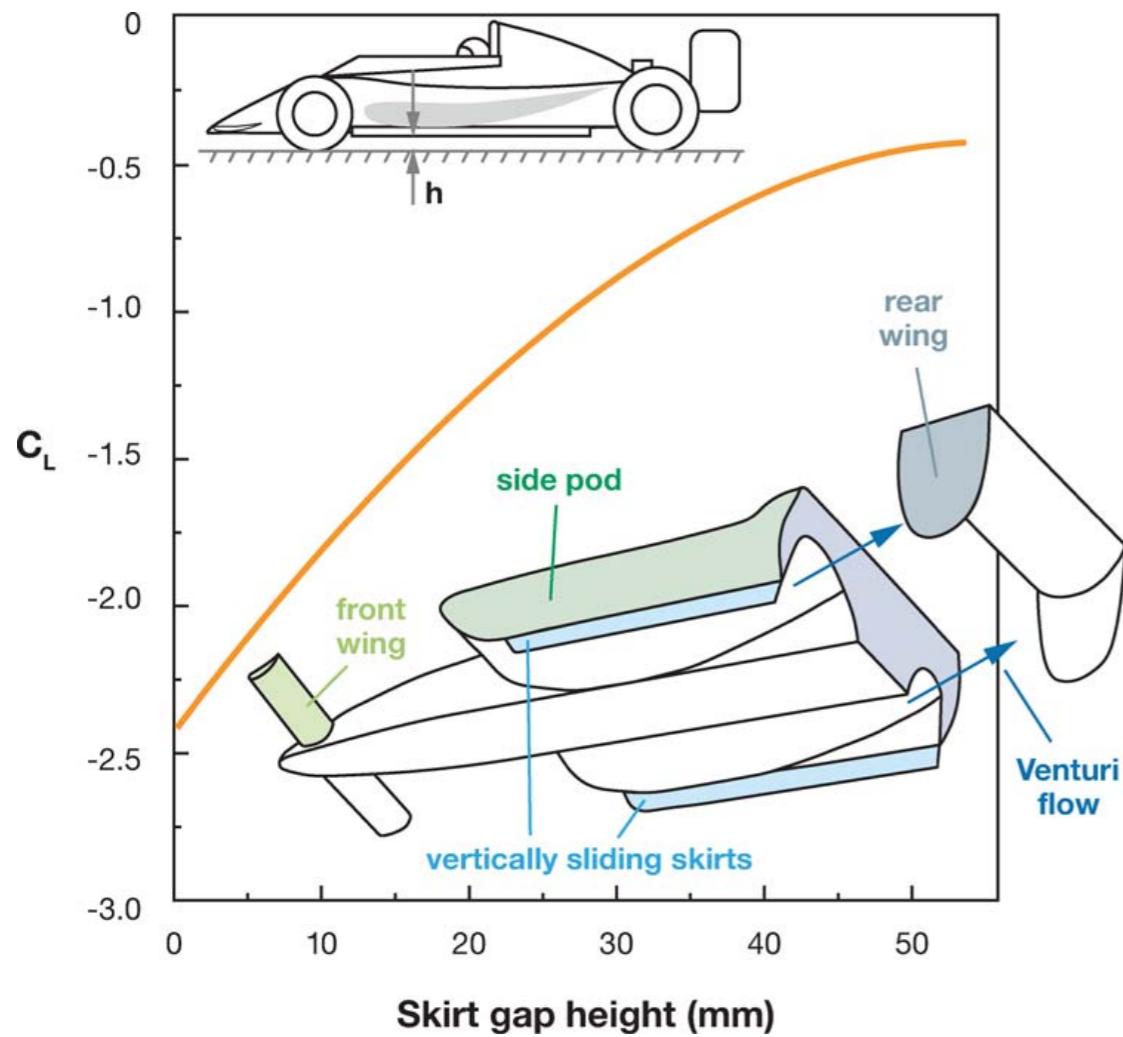
## Beispiel 6

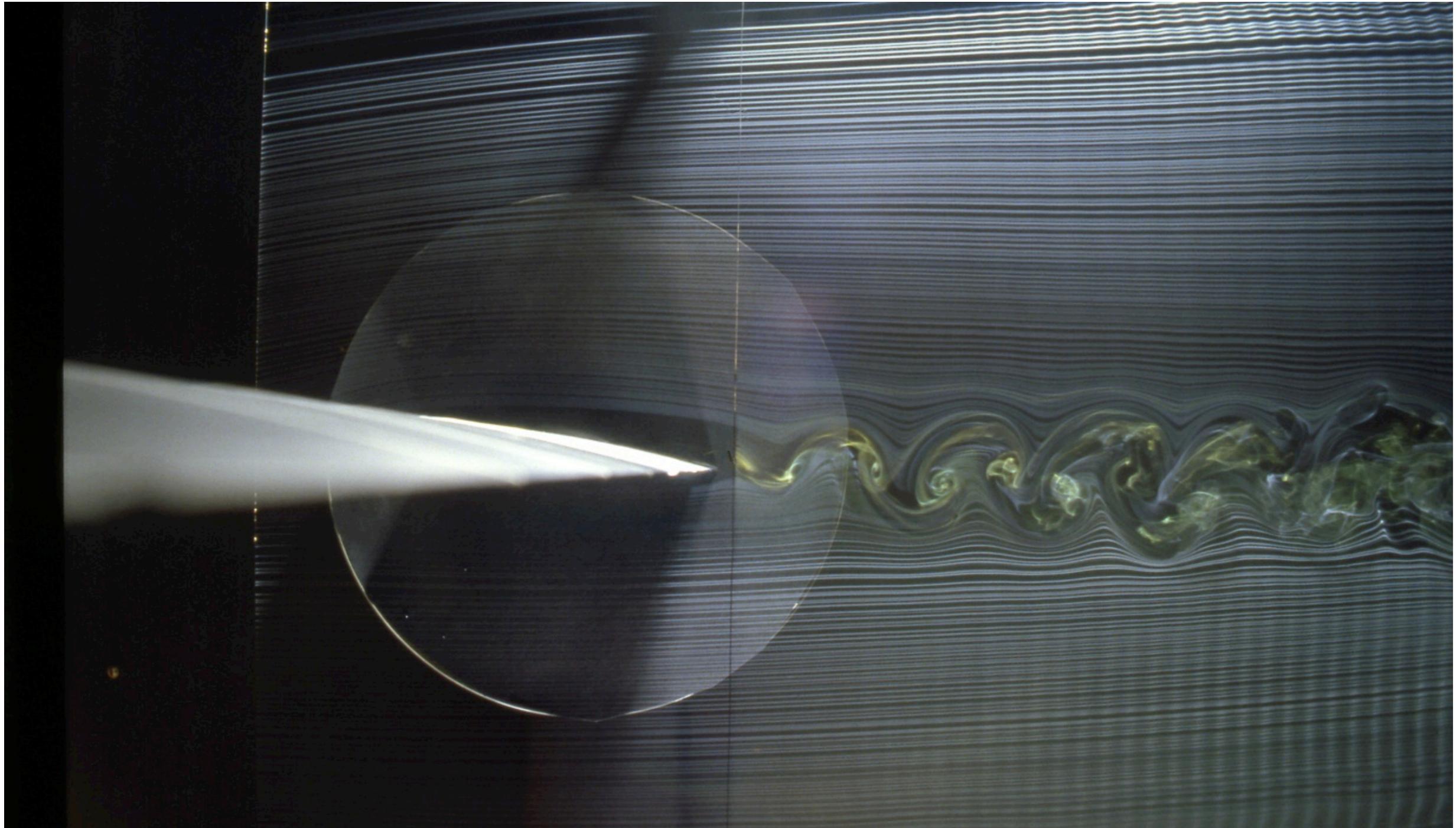
### ■ Sport

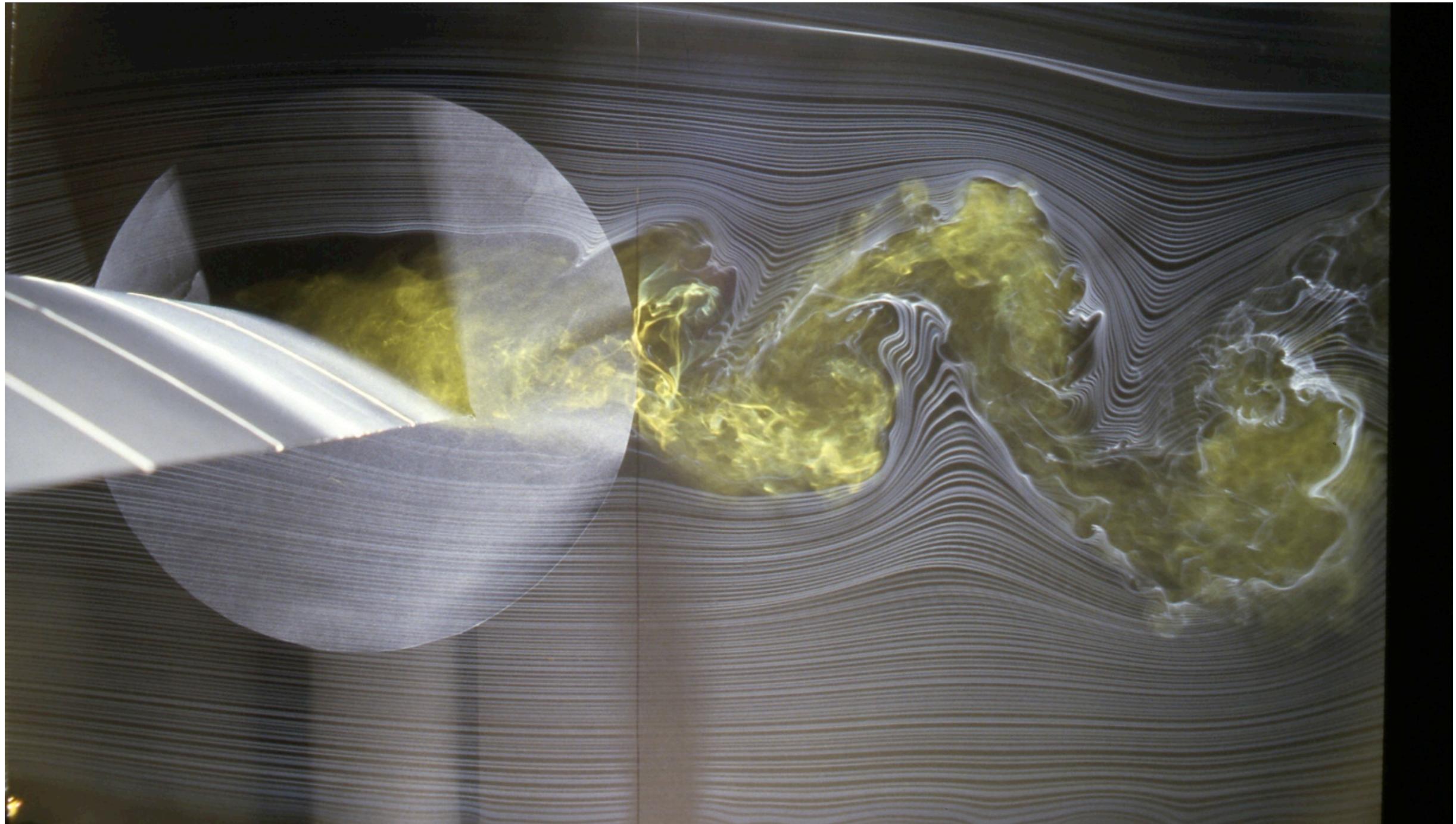


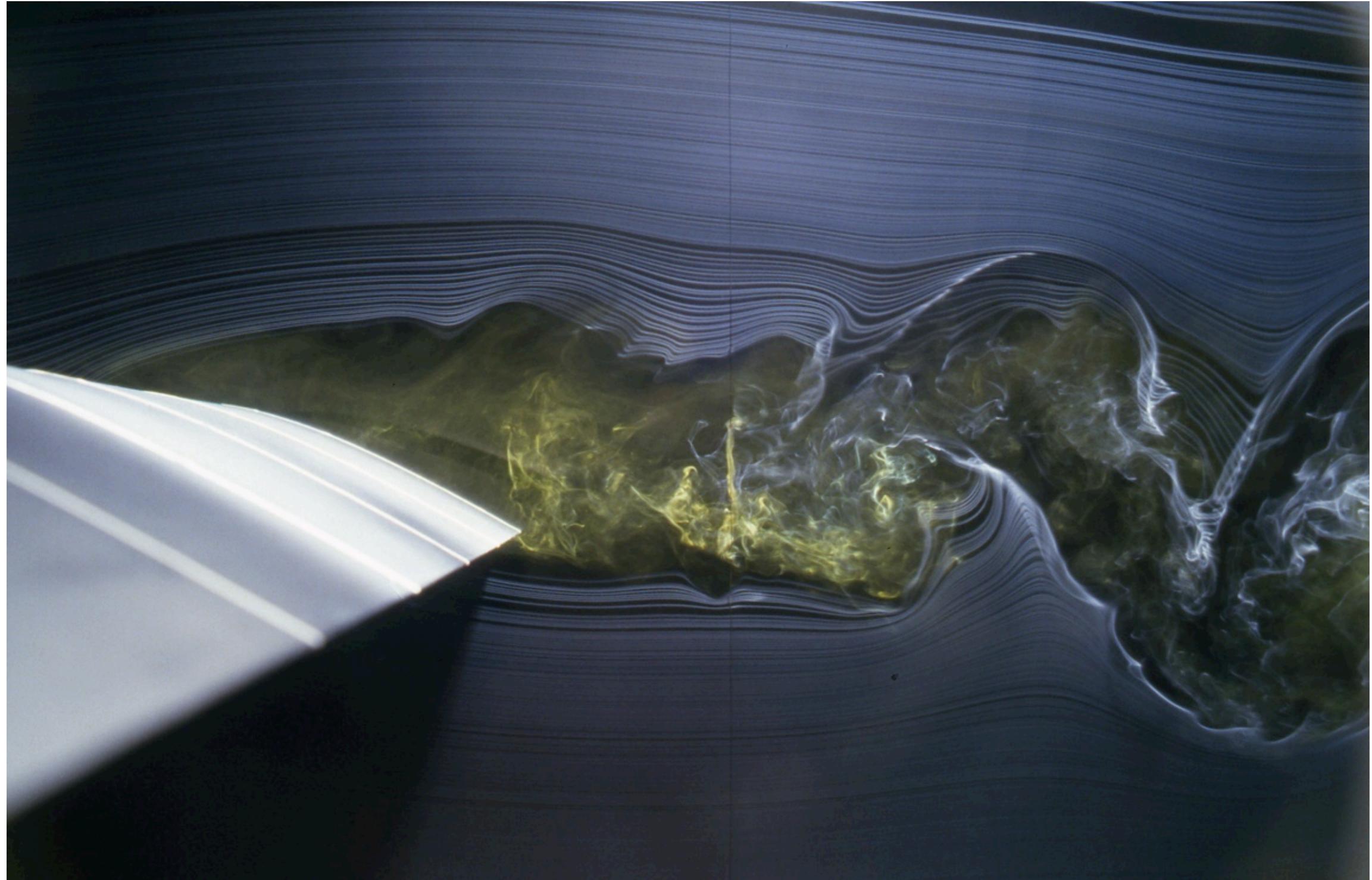
## Beispiel 6

### ■ Sport









# Gliederung

Physik der  
Fluide

Was sind Fluide?

Statik+  
Kinematik

Wie beschreibt man  
ein Fluid und dessen  
Bewegung?

Massen- und  
Impulserhaltung

Navier-Stokes -  
Bernoulli

evtl.

Gasdynamik

ISENTROPICHE,  
Laval Düse  
Stossrelationen

# Definitionen

## Fluide

Wir befassen uns in der Strömungsmechanik mit der Statik und Dynamik von Flüssigkeiten und Gasen, die wir unter dem Begriff **Fluide** zusammenfassen.



- Relevante Längenskalen groß im Vergleich zu molekularen Abmessungen → **Kontinuum**
- Mittlere freie Weglänge der Moleküle ist etwa  $5 \times 10^{-8} \text{ m}$
- Manifestation der mittleren molekularen Bewegung

## Druck

Der statistische Mittelwert der durch die Moleküle auf einen Gegenstand ausgeübten Kraft pro Einheitsvolumen wird als **Druck** bezeichnet.



Statistisch gemittelte Bewegung wird mathematisch repräsentiert durch ein Fluidelement ( über  $dV$  und  $dt$ )

### Fluidpartikel – Fluidelement

- Die Fluidpartikel sind groß gegenüber molekularen Skalen, aber klein gegenüber relevanten Strömungsskalen.
- Es besteht eine eindeutige Zuordnung zwischen Fluidpartikeln und Raumpunkten (jedem Raumpunkt ist ein Element zugeordnet).
- Die physikalischen Eigenschaften des Fluids sind damit als Eigenschaften in jedem “Punkt” gegeben, wo sie durch sogenannte *Feldgrößen* erfasst werden.
- **Feldgrößen** sind mathematisch gesehen stetige und differenzierbare Funktionen (mit Ausnahme von Stößen oder Trennflächen), die sich als Ergebnis einer lokalen Mittelung über die dort aufzufindenden Molekülgrößen interpretieren lassen.



# Feldgrößen

Symbol	Feldgröße	Einheit
$\rho$	Dichte	$kg/m^3$
$p$	Druck	$N/m^2, Pa$
$T$	Temperatur	$K$
$\mathbf{u}$	Geschwindigkeitsvektor	$m/s$
$\mu$	dynamische Viskosität	$kg/m/s$
$\nu$	kinematische Viskosität	$m^2/s$
$e$	innere Energie	Joule
$E$	totale Energie	Joule

- Temperatur: Gaskinetik liefert ( $k_B=1.38 \times 10^{-23} J/K$ )

$$\frac{3}{2}k_B T = \left\langle \frac{1}{2}M\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right\rangle$$

# Feldgrößen

Symbol	Feldgröße	Einheit
$\rho$	Dichte	$kg/m^3$
$p$	Druck	$N/m^2, Pa$
$T$	Temperatur	$K$
$\mathbf{u}$	Geschwindigkeitsvektor	$m/s$
$\mu$	dynamische Viskosität	$kg/m/s$
$\nu$	kinematische Viskosität	$m^2/s$
$e$	innere Energie	Joule
$E$	totale Energie	Joule

- Temperatur: Gaskinetik liefert ( $k_B=1.38 \times 10^{-23} J/K$ )

$$\frac{3}{2}k_B T = \left\langle \frac{1}{2} M \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right\rangle \xleftarrow{\text{Mittelwert}}$$

## Wann können wir makroskopisch rechnen?

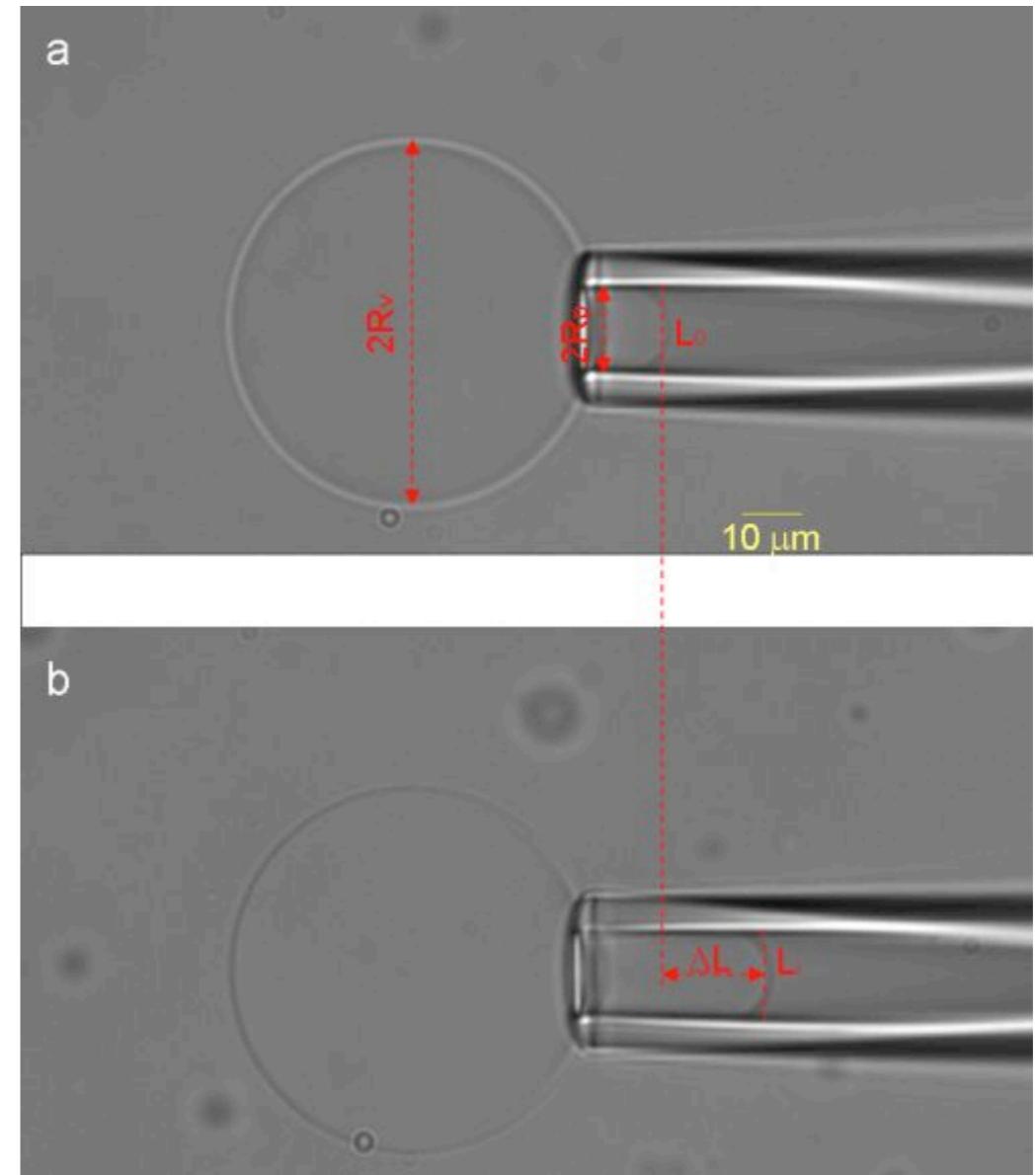
- Das relevante Maß ist das Verhältnis von mittl. freier Weglänge  $\lambda$  und charakteristischer Strömungsgröße  $L$  (Rohrdurchmesser, Spaltbreite, etc.), **KNUDSENZAHL**

$$Kn = \lambda/L$$

- $Kn < 0.01$ : Kontinuum
- $0.01 < Kn < 0.1$ : Gleitströmung
- $0.1 < Kn < 10$ : Übergangsbereich
- $Kn > 10$ : Freie Molekülbewegung

## Beispiel Mikro-Pipette

- $\lambda \sim 10^{-7}\text{m}$
- $D \sim 10^{-5}\text{m}$
- $\text{Kn} = 0.01$
- Damit befinden wir uns im Gleitströmungsgebiet



# Wiederholung

## Vektoren - Matrizen

- **Vektoren** werden geschrieben als  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$

oder

$$\mathbf{q} := \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}(q, a) := \begin{pmatrix} f_1(q, a) \\ f_2(q, a) \\ \vdots \\ f_n(q, a) \end{pmatrix}$$

- I.A. **Großbuchstaben** werden für **Matrizen**, benutzt
- Transponierte  $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

# Komponenten

- Die Komponenten kennzeichnen wir mit einem Index.  $q_i, i = 1, \dots, n$  sind damit die einzelnen Komponenten des Vektors  $\mathbf{q}$ .
- Kartesisches Koordinatensystem, Für Vektor gilt  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$
- Raumrichtung:  $x=x_1, y=x_2, z=x_3$ , oder  $x_i, i=1,2,3$ . *Für Interessierte:*

**Einstein'sche Summationskonvention:** Wir summieren über **gleiche** Indizes von Vektor-, Matrix- oder Tensorkomponenten. Zum Beispiel:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$a_{ij} b_{ij} = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12j} + a_{13j} b_{13} + a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{23} + \\ a_{31} b_{31} + a_{32} b_{32} + a_{33} b_{33}$$

# Tensoren

- Für Tensoren gibt es unterschiedliche Definitionen. Eine definiert sie als multilinear Abbildungen (in jedem Argument linear) in den  $\mathbb{R}$ .  $\Rightarrow$  Tensoren geometrieunabhängig
- Tensoren müssen invariant sein, falls Physik in unterschiedlichen Koordinaten-systemen beschrieben wird, da sich sonst die physikalischen Gesetze ändern
- Ein Tensor ist charakterisiert durch seine **Komponenten**: verschieden in unterschiedlichen Systemen (die Richtung und der Betrag einer Kraft bleiben aber gleich, unabhängig vom Koordinatensystem in dem diese beschrieben wird)
- Wir wollen uns hier auf **kartesische** Koordinatensysteme beschränken, so dass wir keine Unterscheidung bzgl. kovarianter oder kontravarianter Koordinaten benötigen.

## Tensoren

- Anschaulich, aber mathematisch unpräzise, kann man sich den Tensor (bzw. deren Komponenten) als eine mehrdimensionale Matrix vorstellen:
  - Eine Zahl ist ein Tensor 0-ter Stufe.
  - Ein (Spalten-) Vektor ist ein Tensor erster Stufe
  - Eine Matrix ist ein Tensor zweiter Stufe
  - Das Levi-Civita-Symbol  $\varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_n}$  ist ein Beispiel für einen Tensor n-ter Stufe.

⇒ Kennzeichnung der Tensoren durch fettgedruckte Buchstaben oder durch deren Komponenten, z.B.  $A_{ijk\dots n}$  für einen Tensor in  $\mathbb{R}^n$

- Wir versuchen die Indexschreibweise hier zu vermeiden

## Definitionen

- Symmetrisch:  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$
- Schiefsymmetrisch:  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$
- Inverse Matrix:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$
- Konjugiert Transponiert:  $\mathbf{A}^H, \mathbf{A}^+$  (transponiert und konjugiert)
- Hermitesch (selbstdoppeljungiert):  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+$
- Unitär (komplexe Matrizen):  $\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^H = \mathbf{I}$

# Definitionen

## ■ Regeln:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(\alpha \cdot \mathbf{A})^T = \alpha \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$$

## Weitere Definitionen

### ■ Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i$$

### ■ Flächenvektor

$$d\mathbf{A} = \mathbf{n} dA \quad (\text{A.6})$$

Orientierung Flächenvektor

Wir legen fest: der Normalenvektor und Flächenvektor zeigt aus dem umschlossenen Volumen heraus.

## Operatoren

■ **Nabla**-Operator:  $\nabla$ , Vektorableitungsoperator

■ **Gradient**: angewandt auf Funktion, etc.

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } f = \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T$$

■ **Richtungsableitung**: Skalarprodukt mit Richtungsvektor  $\mathbf{n}$

$$\nabla f \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial x_i} n_i =: \frac{\partial f}{\partial n}$$

Beispiel: die Ableitung von  $f = x_1^2 x_2$  in Richtung von  $\mathbf{a} = (2, -10)^T$  ist  $\nabla f \cdot \mathbf{a} = (\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2) \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix} = (2x_1 x_2, x_1^2) \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix} = 4x_1 x_2 - 10x_1^2$ .

## ■ Vollständiges Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \nabla f \cdot d\mathbf{x}, \quad \text{mit} \quad d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

## ■ Divergenz

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

## ■ Laplace-Operator

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

Angewandt auf eine vektorwertige Funktion  $\mathbf{g}$  erhält man:

$$\Delta \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_n^2} \\ \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_n^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 g_n}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_n}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 g_n}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Der Laplace-Operator lässt sich auch schreiben als die Divergenz des Gradienten einer Größe, z.B.

$$\Delta \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi).$$

## Taylorreihenentwicklung

$$\begin{aligned}
 f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\
 & + \frac{f^{(p-1)}(x_0)}{(p-1)!}(x - x_0)^{(p-1)} + \underbrace{\frac{f^{(p)}(\gamma)}{p!}(x - x_0)^p}_{\text{Rest}}. \quad (\text{A.7})
 \end{aligned}$$

- Oft ist man nur an einer linearen Approximation interessiert, die durch Beibehaltung der ersten zwei Glieder erhalten wird

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Im Mehrdimensionalen ist die Entwicklung ähnlich, eine quadratische Approximation wäre bspw.

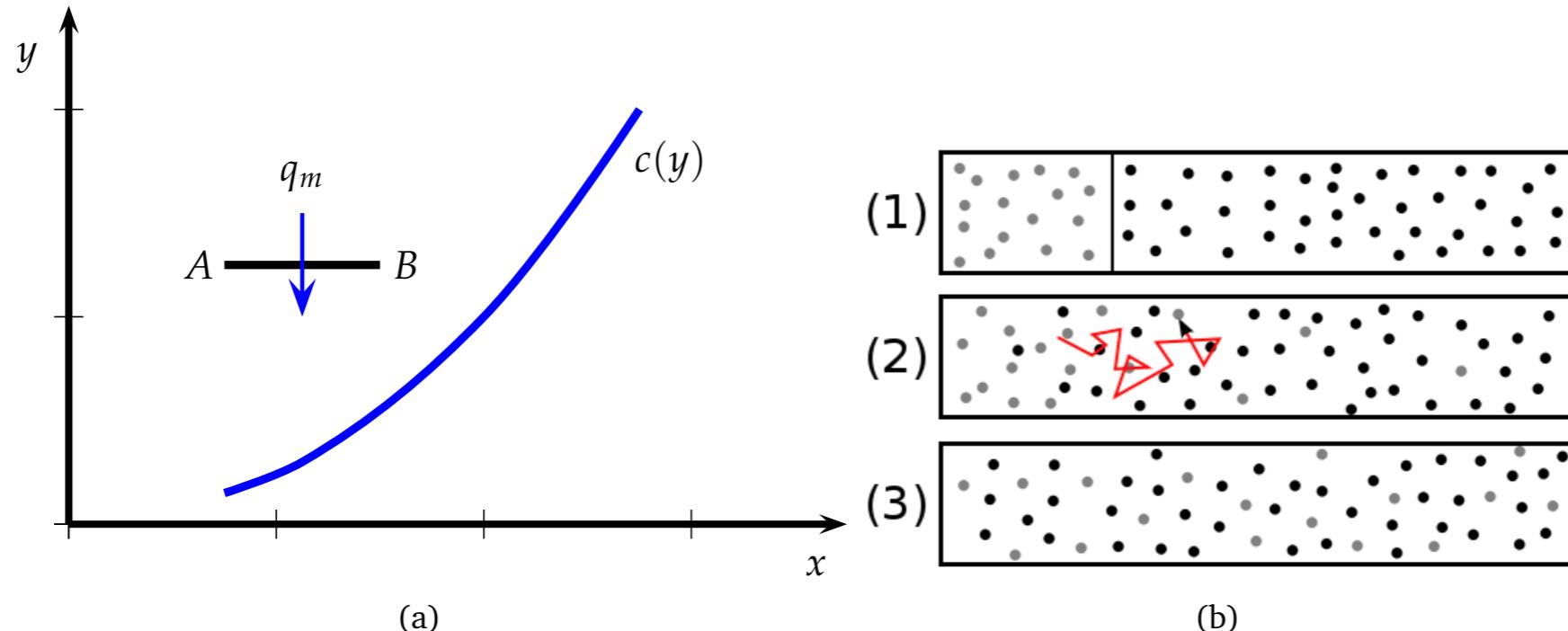
$$\begin{aligned}
 f(\boldsymbol{x}) \approx & f(\boldsymbol{x}_0) + \nabla f(\boldsymbol{x}_0)^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \\
 & + \mathcal{O}(|(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)|^3). \quad (\text{A.8})
 \end{aligned}$$

Hier wurde ausserdem angenommen, dass der Gradient einen Spaltenvektor ergibt.

# Transporteigenschaften

# Transport

- Stickstoff variiert über AB  $\Rightarrow$  Konzentrationsausgleich/Fluss
- Ausgleich von hoher zu niedriger Konzentration

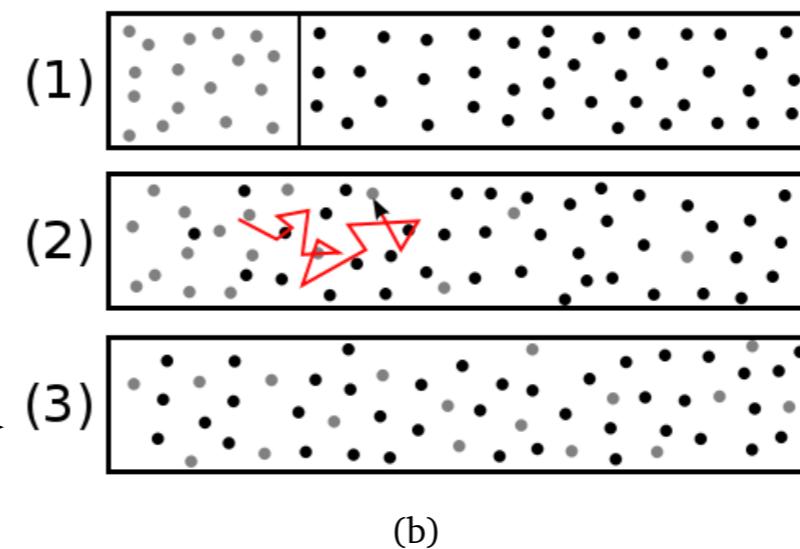
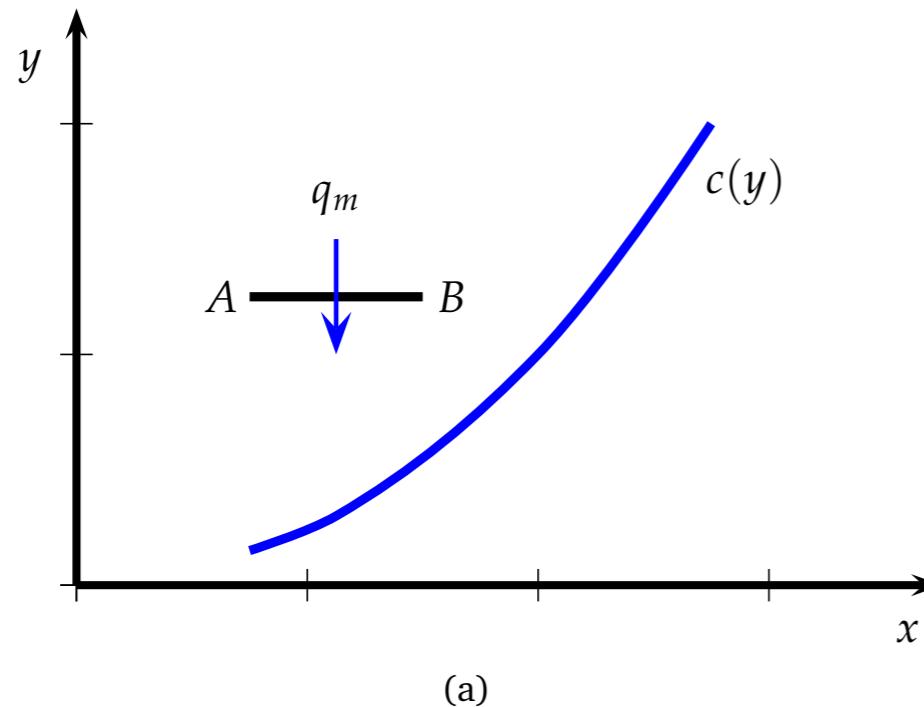


- Experiment: proportional zum Gradienten: Massenfluss  $\mathbf{q}_m$  ( $kg\ m^{-2}s^{-1}$ )

**Fick'sches Gesetz**  $\mathbf{q}_m = -k_m \begin{pmatrix} \partial C / \partial x \\ \partial C / \partial y \\ \partial C / \partial z \end{pmatrix} = -k_m \nabla C$

# Transport

- Stickstoff variiert über AB  $\Rightarrow$  Konzentrationsausgleich/Fluss

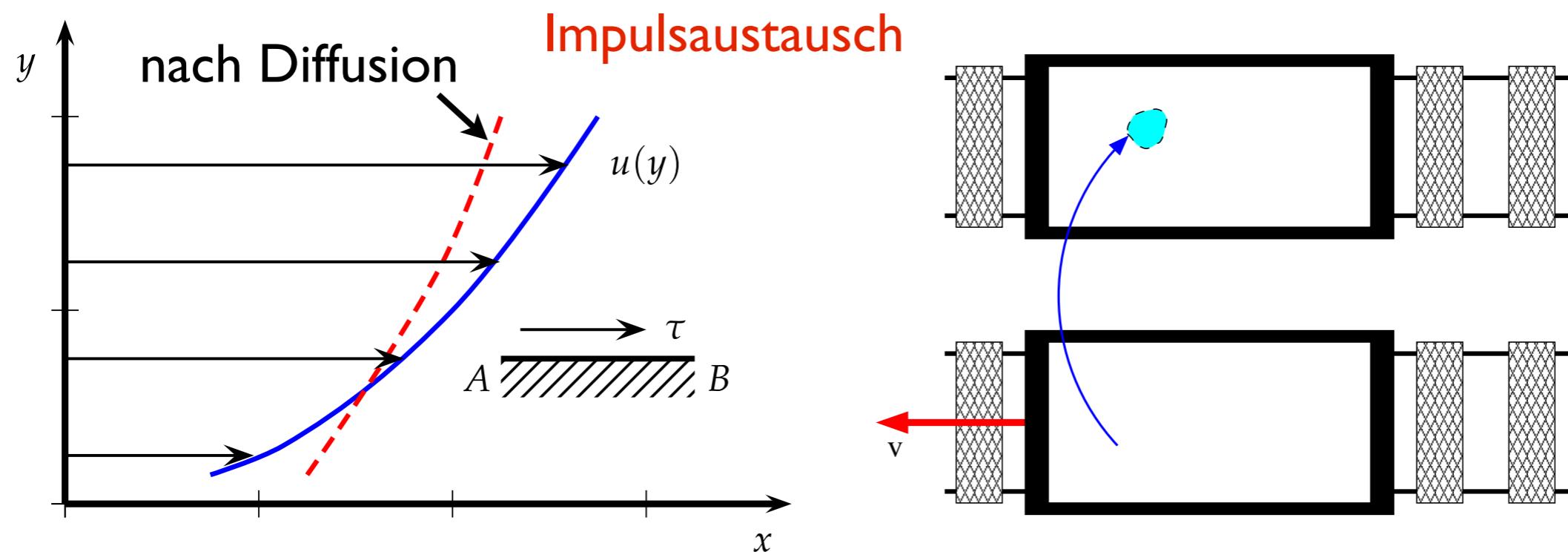


- Auch für Wärmefluss  $\mathbf{q}$  ( $J \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$ ) mit Wärmeleitfähigkeit  $k$ :

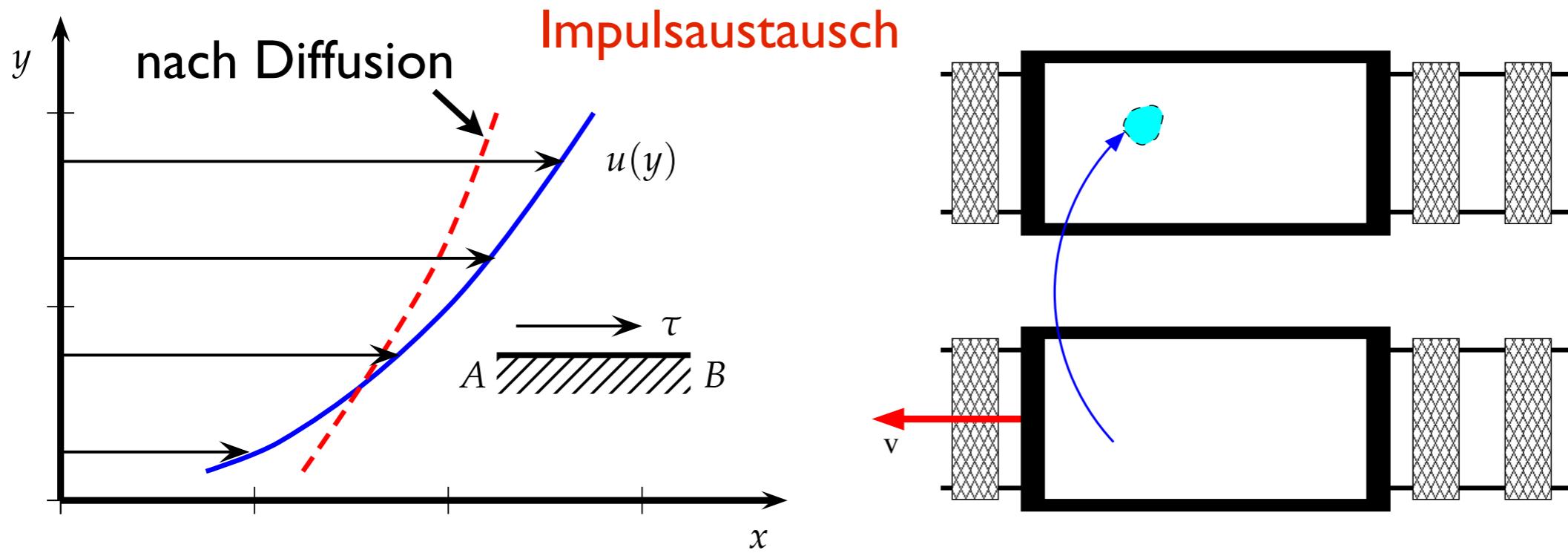
Fouriersches Gesetz

$$\mathbf{q} = -k \nabla T$$

# Newton'sches Reibungsgesetz



# Newton'sches Reibungsgesetz

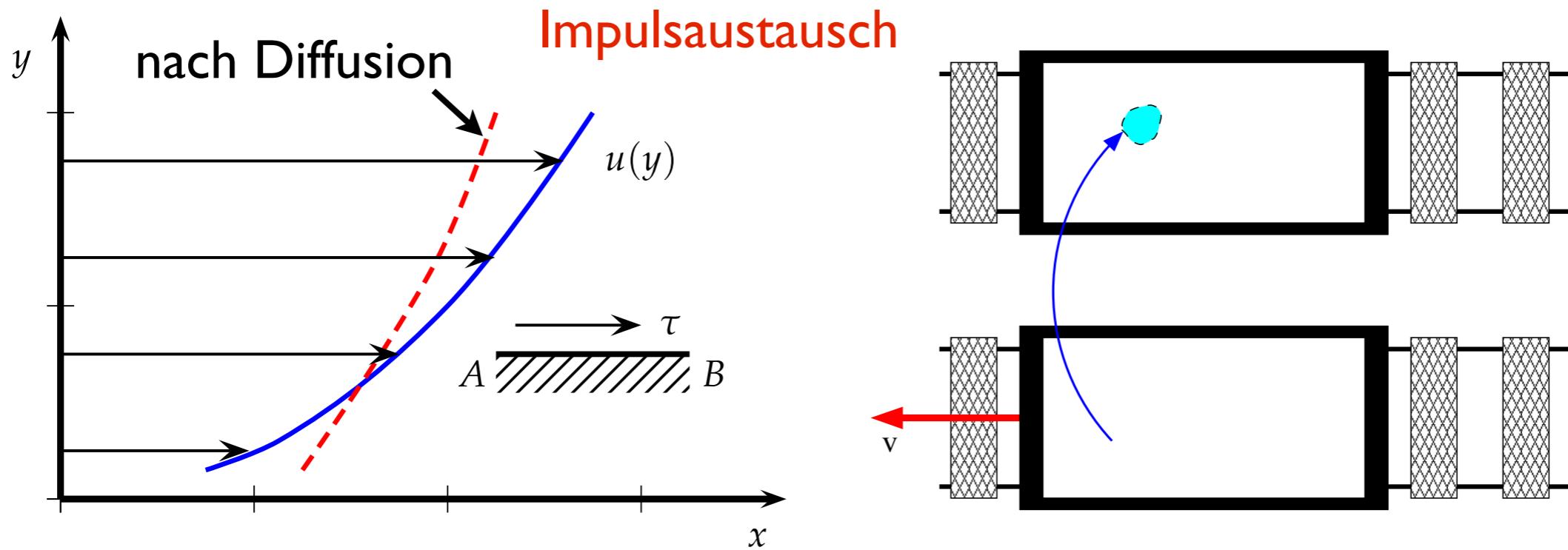


## ■ Newton'sches Reibungsgesetz

- Schubspannung  $\tau$
- Deformationsrate  $du/dy$
- Dynamische Viskosität  $\mu$  (kg/m/s)

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

# Newton'sches Reibungsgesetz



- Fluide mit linearer Beziehung zwischen Schubspannung und Deformationsrate:

## Newton'sche Fluide

- Nichtnewtonsch: Zementleim, Treibsand, Ketchup, Polymerschmelzen, Schmiermittel, Pudding

## Warum keine 2ten Ableitungen?

- Die Krümmung wird durch die 2ten Ableitungen beschrieben
- Transport aufgrund molekularer Prozesse
- Längenskalen zu klein, um die Krümmung des Konzentrations-, Geschwindigkeits- oder Temperaturprofils zu sehen

# Beschreibungen wir dadurch allgemeinere Situationen?

## ■ Stokes postulierte:

- Drehimpulserhaltung am Fluidelement → Symmetrie des Spannungstensors
- Isotrope Fluideigenschaften → keine Vorzugsrichtung
- Fluid in Ruhe, bzw. unter Starrkörperrotation:  $\sigma = -p\mathbf{I}$   
⇒ Schubspannungen und Normalspannungen verschwinden

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left( \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}^T \right) + \left\{ \left( \mu_b - \frac{2}{3}\mu \right) \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} \right\} \mathbf{I}. \quad (1.3)$$

## Beschreibungen wir dadurch allgemeinere Situationen?

### ■ Stokes postulierte:

- Drehimpulserhaltung am Fluidelement → Symmetrie des Spannungstensors
- Isotrope Fluideigenschaften → keine Vorzugsrichtung
- Fluid in Ruhe, bzw. unter Starrkörperrotation:  $\sigma = -p\mathbf{I}$   
⇒ Schubspannungen und Normalspannungen verschwinden

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left( \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}^T \right) + \left\{ \left( \mu_b - \frac{2}{3}\mu \right) \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} \right\} \mathbf{I}. \quad (1.3)$$

- $\mu_b$  Volumenviskosität od. Druckzähigkeit - misst Widerstand gegen Kompression

# Gesamter Spannungstensor

- Der Druck wird oft dazugenommen:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \tau = \begin{pmatrix} -p + \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & -p + \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & -p + \tau_{33} \end{pmatrix}$$

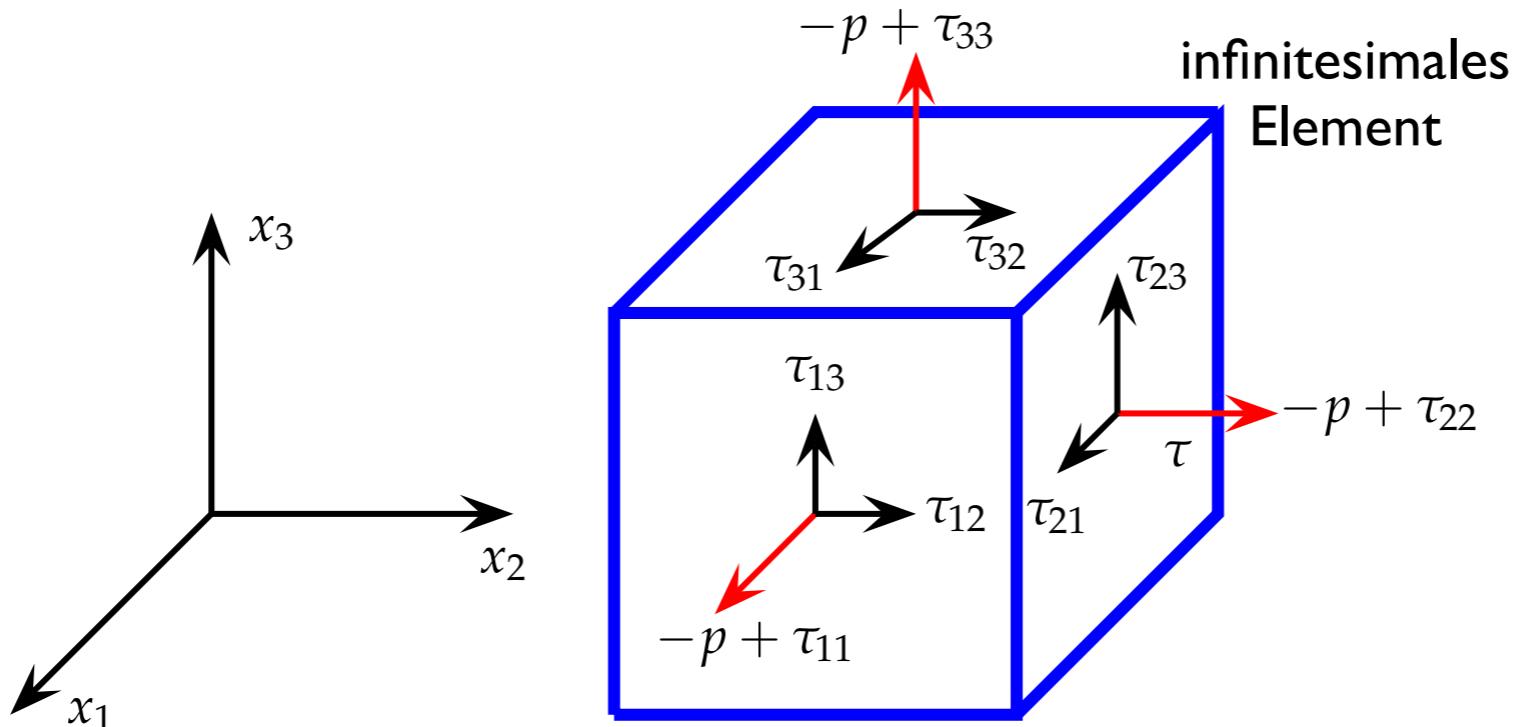
- Drehimpulserhaltung (Beweis in Kundu)

$$\sigma = \sigma^T \quad \text{oder} \quad \tau = \tau^T. \quad (1.4)$$

- Einheit: Kraft/Einheitsfläche
- Was bedeuten die Komponenten?

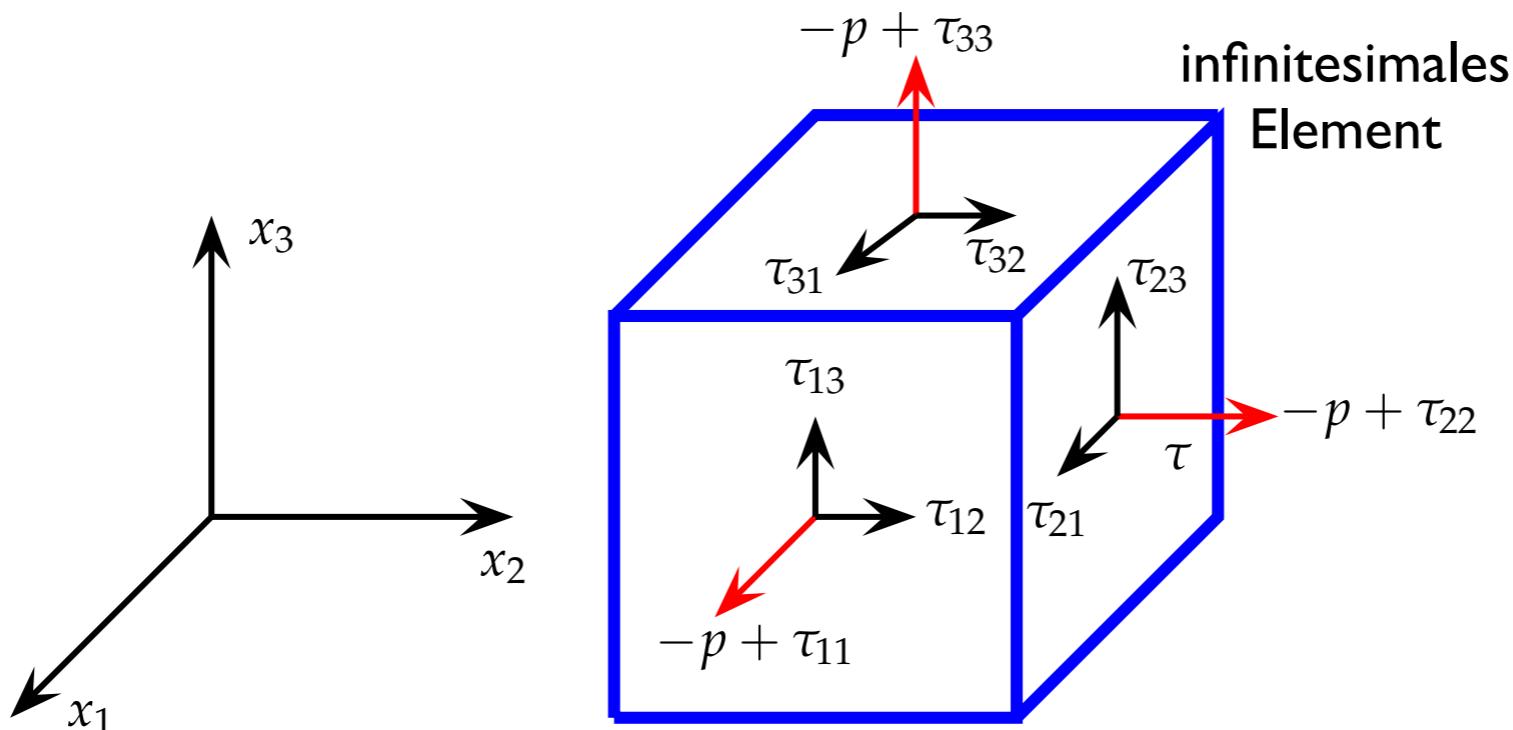
# Spannungstensor

- Diagonalkomponenten: **Normalspannungen**
- Nebendiagonalelemente: **Scherspannungen**



# Spannungstensor

- Diagonalkomponenten: **Normalspannungen**
- Nebendiagonalelemente: **Scherspannungen**

 $\tau_{ij}$ 

**Index 1:** Richtung der Flächennormalen

**Index 2:** Richtung in der die Spannung wirkt

## Normalspannungen

- Der Spannungstensor war

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left( \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}^T \right) + \left\{ \left( \mu_b - \frac{2}{3}\mu \right) \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} \right\} \mathbf{I}. \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}\tau_{11} &= 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left( \mu_B - \frac{2}{3}\mu \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\ \tau_{22} &= 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \left( \mu_B - \frac{2}{3}\mu \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\ \tau_{33} &= 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \left( \mu_B - \frac{2}{3}\mu \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)\end{aligned}$$

## Scherspannungen

- Der Spannungstensor war

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left( \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^T \right) + \left\{ \left( \mu_b - \frac{2}{3}\mu \right) \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} \right\} \mathbf{I}. \quad (1.3)$$

$$\tau_{12} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

$$\tau_{13} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)$$

$$\tau_{23} = \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)$$

- Beschreibt **Scherung** eines Fluidelements

# Spannungstensor

- **Mittlere Normalspannung:** arithmetisches Mittel der Diagonalkomponenten

$$\tau_{11} = 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left( \mu_B - \frac{2}{3}\mu \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

$$\tau_{22} = 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \left( \mu_B - \frac{2}{3}\mu \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

$$\tau_{33} = 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \left( \mu_B - \frac{2}{3}\mu \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

- Isotrope Volumenänderung: Arbeit auch gegen Reibungsspannungen, falls  $\mu_B \neq 0$

# Spannungstensor

- **Mittlere Normalspannung:** arithmetisches Mittel der Diagonalkomponenten

$$\tau_{11} = 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left( \mu_B - \frac{2}{3}\mu \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

$$\tau_{22} = 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \left( \mu_B - \frac{2}{3}\mu \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

$$\tau_{33} = 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \left( \mu_B - \frac{2}{3}\mu \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} + \left( \mu_B - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u}$$

- Isotrope Volumenänderung: Arbeit auch gegen Reibungsspannungen, falls  $\mu_B \neq 0$

# Spannungstensor

- **Mittlere Normalspannung:** arithmetisches Mittel der Diagonalkomponenten

$$\tau_{11} = 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left( \mu_B - \frac{2}{3}\mu \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

$$\tau_{22} = 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \left( \mu_B - \frac{2}{3}\mu \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

$$\tau_{33} = 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \left( \mu_B - \frac{2}{3}\mu \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

$$\bar{\sigma} = -p + \frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) = -p + \mu_B \nabla \cdot \mathbf{u}$$

- Isotrope Volumenänderung: Arbeit auch gegen Reibungsspannungen, falls  $\mu_B \neq 0$

# Spannungstensor

- **Mittlere Normalspannung:** arithmetisches Mittel der Diagonalkomponenten

$$\tau_{11} = 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left( \mu_B - \frac{2}{3}\mu \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

$$\tau_{22} = 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \left( \mu_B - \frac{2}{3}\mu \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

$$\tau_{33} = 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \left( \mu_B - \frac{2}{3}\mu \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

$$\bar{\sigma} = -p + \frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) = -p + \mu_B \nabla \cdot \mathbf{u}$$

- Isotrope Volumenänderung: Arbeit auch gegen Reibungsspannungen, falls  $\mu_B \neq 0$

# Stokes Hypothese

- Müssen wir  $\mu_B$  berücksichtigen?
  - kinetische Gastheorie:  $\mu_B=0$  für kugelförmige und starre Moleküle
  - mehratomige Gase:  $\mu_B \neq 0$ , aber klein

## Stoke'sche Hypothese

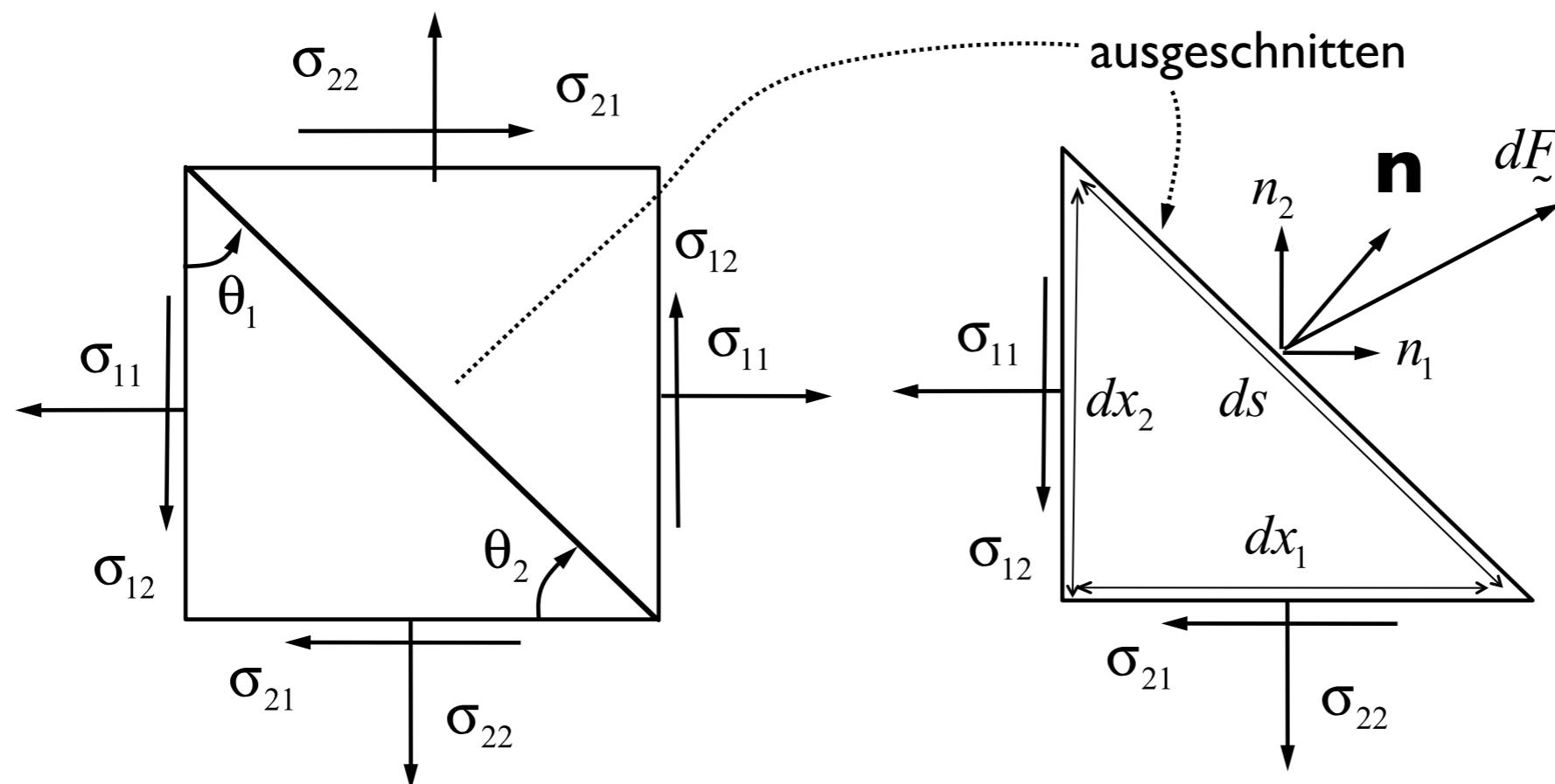
Die sogenannte **Stokes'sche Hypothese** nimmt an, dass

$$\mu_B = 0. \quad (1.5)$$



- Wir vernachlässigen die Druckzähigkeit. Wie berechnen wir nun die Viskosität?

## Beispiel: Spannung auf Ebene

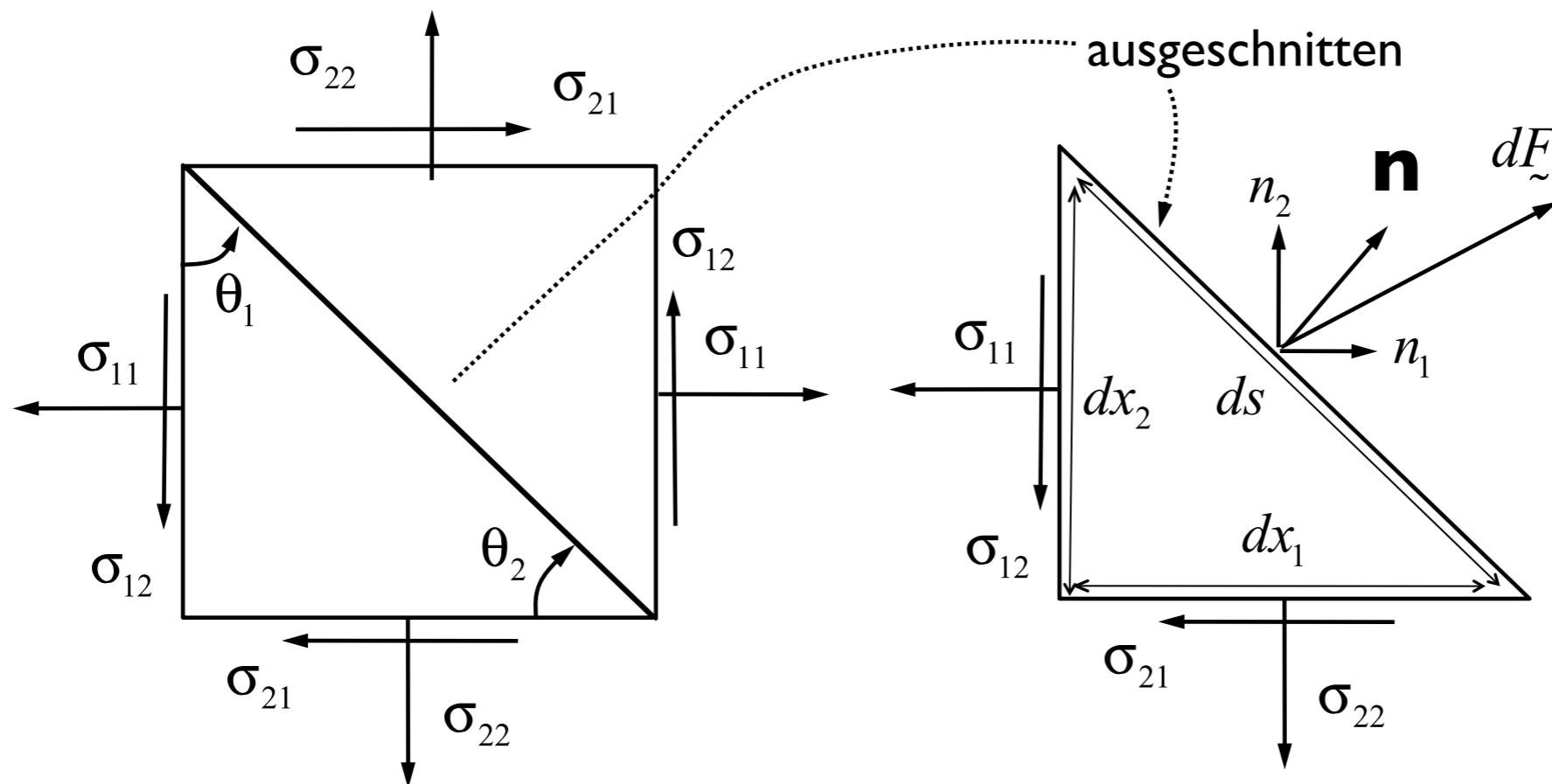


- Oberfläche charakterisiert durch Normalenvektor:

$$dA = \mathbf{n} dA = \mathbf{n} ds$$

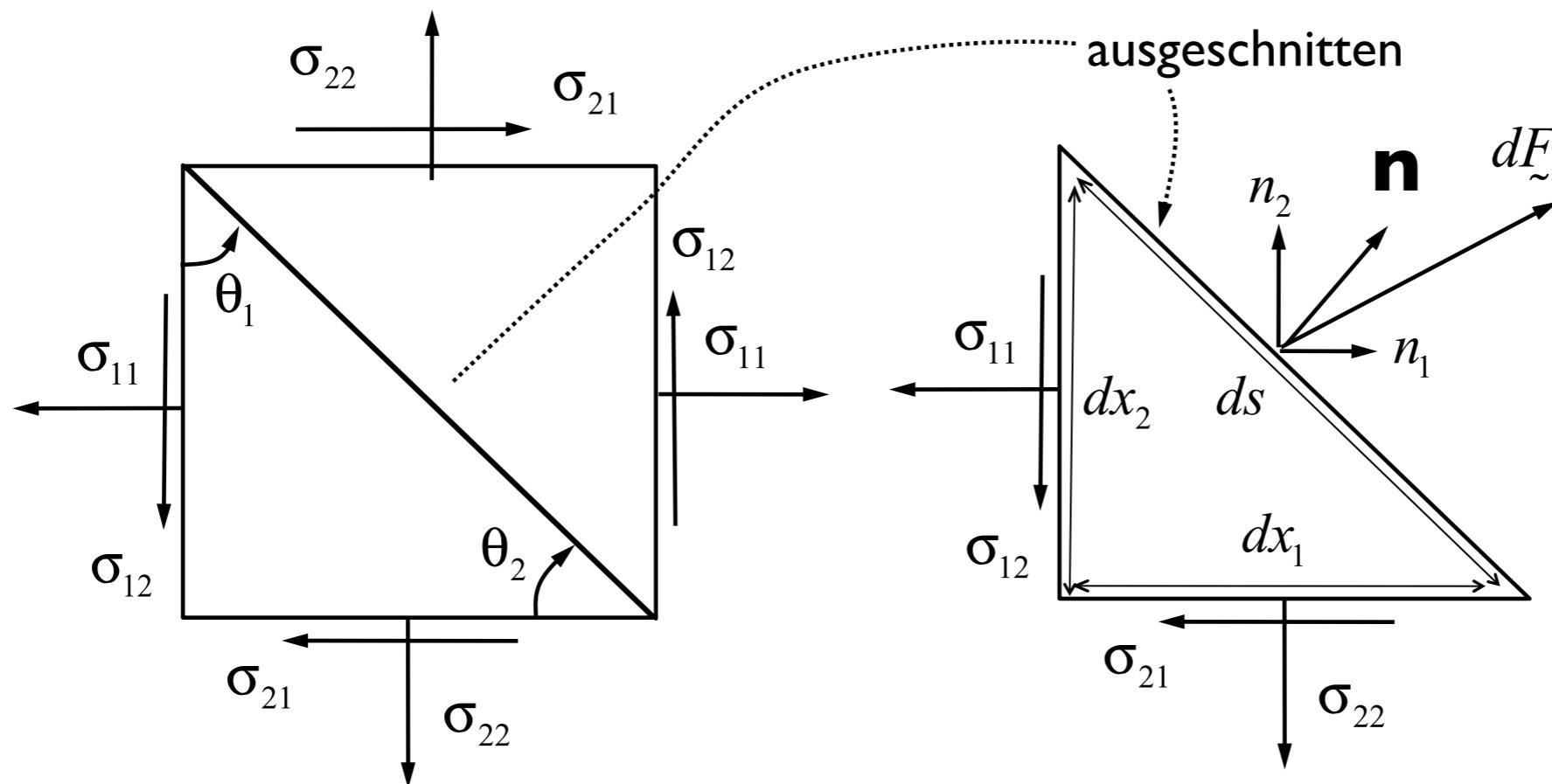
Kraft in 1-Richtung:  $F_1 = \sigma_{11} dx_2 + \sigma_{21} dx_1$

## Beispiel: Spannung auf Ebene



$$\begin{aligned}
 F_1 &= \sigma_{11}dx_2 + \sigma_{21}dx_1 \Rightarrow f_1 := \frac{F_1}{ds} = \sigma_{11}\frac{dx_2}{ds} + \sigma_{21}\frac{dx_1}{ds} \\
 &= \sigma_{11} \cos \theta_1 + \sigma_{21} \cos \theta_2 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2
 \end{aligned}$$

## Beispiel: Spannung auf Ebene



$$\Rightarrow f_i := \sigma_{ji} n_j \text{ oder } \mathbf{f} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \text{ symm.} \Rightarrow \mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

Gesamtkraft auf Oberfläche

$$\mathbf{F} = \int_{\partial S} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dS$$

## Beispiel

- Annahme,  $\mathbf{n}$  zeigt  $30^\circ$  zur  $x_1$ -Achse und der Spannungstensor ist (einfache Kanalströmung)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Kraft auf die Fläche ist dann

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

- mit Betrag  $|a|$  und Richtung  $60^\circ$  zur  $x_1$ -Achse

# Viskosität

- Gaskinetik:  $\frac{3}{2}k_B T = \langle \frac{1}{2}M\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle$ , also ist die thermische Geschwindigkeit  $\propto \sqrt{T}$
  - Dann ist auch der Impulsaustausch und damit  $\mu \propto \sqrt{T}$
  - Genauer: Potenzgesetz
- $$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^n \quad (1.6)$$
- Sutherland's Formel:
- $$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{T_0 + S}{T + S} \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad (1.7)$$
- Luft:  $\mu_0 = 1.72 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m/s}$ ,  $T_0 = 273.15 \text{ K}$ ,  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ ,  $n=0.7$ ,  $S=110.4$

## Kinematische Viskosität

- Definiert als  $\mu/\rho$  ( $m^2/s$ )

	Wasser	Luft
$\mu$	$10^{-3} \text{ kg/m/s}$	$1.8 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m/s}$
$\nu$	$10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	$1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

- Wasser: intermolekulare, kohäsive Kräfte, anstatt thermischer Bewegung

$$\ln \frac{\mu}{\mu_0} = a + b \frac{T_0}{T} + c \left( \frac{T_0}{T} \right)^2$$

$$a = -2.10, b = -4.45, c = 6.55, p_0 = 105 \text{ Pa}, T_0 = 273.15 \text{ K}, \mu_0 = 0.00179 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

## Prandtl-Zahl

- Kinetische Gastheorie: Zusammenhang zwischen Wärmeleitfähigkeit  $k$  und  $\mu$  (spez. Wärmekapazität  $C_p = \text{const}$ )

$$k = \frac{\mu C_p}{Pr}, \quad (1.8)$$

- Nach Eucken gilt

$$Pr = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5}, \quad (\gamma = C_p/C_v = 1.4)$$

## Prandtl-Zahl

- Kinetische Gastheorie: Zusammenhang zwischen Wärmeleitfähigkeit  $k$  und  $\mu$  (spez. Wärmekapazität  $C_p = \text{const}$ )

$$k = \frac{\mu C_p}{Pr}, \quad (1.8)$$

- Nach Eucken gilt

$$Pr = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5}, \quad (\gamma = C_p/C_v = 1.4)$$

### Transportgesetze

- $\mathbf{q}_m = -k_m \nabla C$  (Fick'sches Gesetz)
- $\mathbf{q} = -k \nabla T$  (Fourier'sches Gesetz)
- $\boldsymbol{\tau} = \mu \nabla \mathbf{u}$  (Newton'sches Reibungsgesetz)

