



**UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI BERGAMO**

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA GESTIONALE,
DELL'INFORMAZIONE E DELLA PRODUZIONE

TESI DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA INFORMATICA

**Model Predictive Control con
iperparametri tarati secondo
l'approccio Bayesian Optimization
nel contesto di un forno industriale
per attività di packaging**

LAUREANDO
FABIO FILIPPO MANDALARI

RELATORE
Prof. ANTONIO FERRAMOSCA

CORRELATORI
Prof. DAVIDE PREVITALI
Ing. LEANDRO PITTURELLI

Ai miei genitori, ancora una volta.

Ringraziamenti

Un ringraziamento speciale è rivolto al relatore, il Prof. Antonio Ferramosca, il quale ha costantemente supervisionato il mio percorso durante questi mesi di intenso lavoro e senza i cui insegnamenti non mi sarei mai potuto interessare così tanto alla teoria del controllo.

Un secondo ringraziamento, altrettanto speciale, è rivolto ad entrambi i correlatori, il Prof. Davide Previtali e l'Ing. Leandro Pitturelli. Senza la loro esperienza e senza il loro supporto nei momenti di difficoltà questo progetto di tesi non si sarebbe potuto concludere nel migliore dei modi.

Un ultimo ringraziamento, non meno importante, va a me stesso. Se sei arrivato a questo punto lo devi solo e soltanto all'impegno che ci hai messo. Che questo traguardo raggiunto dopo così tanti anni di sudore, fatica, ansia, gioie e dolori, successi e insuccessi possa fungere da trampolino di lancio per tutto ciò che ti spetta in futuro. Bravo Fabio, continua così.

Abstract

Il Model Predictive Control rappresenta una delle tecniche di controllo avanzato più utilizzate in ambito industriale e accademico grazie alla sua capacità di gestire sistemi multivariabili, eventualmente vincolati. Questa tecnica utilizza un modello per predire il comportamento futuro del sistema sotto controllo e per il quale il modello è sviluppato. Il fine è quello di ottimizzare le azioni di controllo da impartire al sistema reale. L'efficacia delle formulazioni degli algoritmi appartenenti alla famiglia Model Predictive Control dipende in modo critico dalla scelta del valore di specifici iperparametri, quali, ad esempio, l'orizzonte di predizione, il peso con cui valutare le azioni di controllo e il peso con cui valutare il comportamento del sistema una volta che l'azione di controllo gli è stata impartita. La taratura di questi iperparametri è una sfida cruciale, poiché influisce direttamente sull'efficacia del controllo. Considerando che la determinazione manuale del valore di tali iperparametri può essere complessa e dispendiosa in termini di tempo, in questo progetto di tesi è stata impiegata la tecnica di Bayesian Optimization. L'approccio proposto è stato scelto per la sua capacità di esplorare in maniera intelligente lo spazio degli iperparametri e trovare configurazioni ottimali con un numero limitato di valutazioni.

Il sistema per il quale è stato commissionato l'intero progetto di tesi è un forno industriale adibito ad attività di packaging. Il problema posto è un problema di controllo di temperatura. Il controllo della temperatura nei forni industriali presenta diverse problematiche, tra cui, ad esempio, la gestione delle dinamiche termiche non lineari e l'efficienza energetica. I risultati noti in letteratura portano a pensare che un controllo di temperatura effettuato mediante tecnica Model Predictive Control con iperparametri tarati secondo la strategia Bayesian Optimization possa migliorare significativamente le prestazioni del sistema di controllo, rendendolo, di fatto, più robusto e adattabile a diverse condizioni operative.

Indice

Abstract	V
Elenco degli acronimi	IX
Elenco delle notazioni	X
1 INTRODUZIONE	1
1.1 Controllo di temperatura	2
1.2 Controllare i sistemi	4
1.3 Contesto di riferimento e motivazione	6
1.4 Overview del documento	9
2 STATO DELL'ARTE	11
2.1 Optimal Control	12
2.1.1 Formulazione del problema	13
2.1.2 Bellman Optimality Principle	15
2.2 Model Predictive Control	18
2.2.1 Receding Horizon Principle	19
2.2.2 Formulazione del problema	21
2.2.3 Stabilità in anello chiuso	22
2.2.4 Dominio di attrazione	28
2.2.5 Economic Model Predictive Control	29
2.2.6 Offset-free Model Predictive Control	34
2.2.7 Model Predictive Control for Tracking	38
2.2.8 Implementazione per sistemi lineari	49
2.3 Bayesian Optimization	55
2.3.1 Exploration-exploitation dilemma	58
2.3.2 Macro step	58
2.3.3 Surrogate Model	59
2.3.4 Acquisition Function	61

2.4	Case study: controllo di un servomeccanismo	62
2.4.1	Descrizione del problema	62
2.4.2	Modellistica	63
2.4.3	Controllo	69
2.4.4	Simulazione e analisi dei risultati	70
3	MODELLISTICA PER UN FORNO INDUSTRIALE	81
3.1	Panoramica del sistema da controllare	82
3.2	Modello circuitale equivalente	84
3.3	Modellazione per la generazione del calore	86
3.4	Modellazione per la propagazione del calore	89
3.5	Modellazione del disturbo	90
3.6	Modello continuo in variabili di stato	91
3.7	Modello discreto in variabili di stato	92
4	STRATEGIA DI CONTROLLO DEL FORNO INDUSTRIALE	97
4.1	Schema di controllo	98
4.2	Problema di ottimizzazione	99
4.2.1	Analisi della funzione di costo	100
4.2.2	Analisi dei vincoli	101
5	RISULTATI DI SIMULAZIONI E PROVE Sperimentali	103
5.1	Simulazione	104
5.1.1	Analisi	110
5.2	Prova sperimentale	114
5.2.1	Analisi	116
Conclusioni		119
Bibliografia		121

Elenco degli acronimi

OC	Optimal Control
BOP	Bellman Optimality Principle
DP	Dynamic Programming
MPC	Model Predictive Control
RHP	Receding Horizon Principle
CLF	Control Lyapunov Function
CIS	Control Invariant Set
EMPC	Economic Model Predictive Control
OMPC	Offset-free Model Predictive Control
QP	Quadratic Programming
LQR	Linear Quadratic Regulator
BO	Bayesian Optimization
SM	Surrogate Model
GP	Gaussian Process
RBF	Radial Basis Function
AF	Acquisition Function
EI	Expected Improvement
PI	Probability of Improvement
LCB	Lower Confidence Bound
ZOH	Zero-Order Holder
MPCT	Model Predictive Control for Tracking
TSV	Total Square Variation
ITAE	Integral Time Absolute Error
SSR	Solid-State Relay
EMR	ElectroMechanical Relay
PWM	Pulse-Width Modulation
EOMPCT	Economic Offset-free Model Predictive Control for Tracking

Elenco delle notazioni

- \mathbb{N} è il set dei numeri naturali da 0 a ∞ ;
- $\mathbb{N}_{>0}$ è il set dei numeri naturali da 1 a ∞ ;
- Dato $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{N}_n è il set dei numeri naturali da 0 a n ;
- \mathbb{R} è il set dei numeri reali;
- $\mathbb{R}_{>0}$ è il set dei numeri reali maggiori di 0;
- $\mathbb{R}_{\geq 0}$ è il set dei numeri reali maggiori o uguali a 0;
- Dati $m, n, p \in \mathbb{R}$, con $m < n < p$, $[m : n : p]$ denota il range di valori da m a p con passo n .
- Se $f(\cdot)$ è una funzione, allora:
 - $f(x; y|z)$ è una funzione che dipende dalla variabile indipendente x , dalla variabile di ottimizzazione y e dal valore noto z ;
 - $f(x|z)$ è una funzione che dipende dalla variabile indipendente x e dal valore noto z ;
 - $f(\cdot) > 0$ è una funzione definita positiva.
- Dato $m \in \mathbb{N}_{>0}$, $q \in \mathbb{R}^m$ è un vettore composto da m righe;
- Dato $m \in \mathbb{N}$, 0_m è il vettore nullo composto da m righe;
- Dati $m \in \mathbb{N}_{>0}$ e $q \in \mathbb{R}^m$, $\|q\|_\infty$ denota la norma ∞ di q ;
- Dato $m \in \mathbb{N}_{>0}$, $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ è una matrice quadrata di ordine m ;
- Dati $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è una matrice rettangolare composta da m righe ed n colonne;
- Dato $m \in \mathbb{N}$, I_m è la matrice identità di ordine m ;

- Se A è una matrice, A^T è la sua trasposta;
- Dati $m \in \mathbb{N}_{>0}$ e $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$, se:
 - $\forall q \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_m\}$ si ottiene $q^T M q > 0$, allora M è definita positiva;
 - $\forall q \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_m\}$ si ottiene $q^T M q < 0$, allora M è definita negativa;
 - $\forall q \in \mathbb{R}^m$ si ottiene $q^T M q \geq 0$, allora M è semidefinita positiva;
 - $\forall q \in \mathbb{R}^m$ si ottiene $q^T M q \leq 0$, allora M è semidefinita negativa.
- Dati $m, n \in \mathbb{N}$ e $M, N \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $M \odot N$ è il prodotto di Hadamard tra M e N ;
- $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ è l'indice usato per fare riferimento a segnali nel dominio del tempo.
Si assume che l'unità di misura siano i secondi [s];
- $k \in \mathbb{N}$ è l'indice usato per fare riferimento a segnali nel dominio discreto;
- Dati $n, m, p \in \mathbb{N}$, allora:
 - $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ è la matrice che descrive la dinamica degli stati;
 - $B \in \mathbb{R}^{(n,m)}$ è la matrice che descrive l'impatto degli ingressi sugli stati;
 - $C \in \mathbb{R}^{(p,n)}$ è la matrice che descrive l'impatto degli stati sulle uscite;
 - $D \in \mathbb{R}^{(p,m)}$ è la matrice che descrive l'impatto degli ingressi sulle uscite.

- Se

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

denota il modello continuo di un sistema,

$$\begin{cases} x(k+1; \tau_s) &= \tilde{A}x(k; \tau_s) + \tilde{B}u(k; \tau_s) \\ y(k; \tau_s) &= \tilde{C}x(k; \tau_s) + \tilde{D}u(k; \tau_s) \end{cases}$$

denota il corrispondente modello discreto ottenuto campionando da quello continuo sfruttando il tempo di campionamento $\tau_s \in \mathbb{R}_{>0}$ [s].

Per evitare ridondanza verrà usata la notazione:

$$\begin{cases} x(k+1) &= \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k) \\ y(k) &= \tilde{C}x(k) + \tilde{D}u(k) \end{cases}$$

$$\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)} \quad \tilde{B} \in \mathbb{R}^{(n,m)} \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}^{(p,n)} \quad \tilde{D} \in \mathbb{R}^{(p,m)}$$

- I pedici $_{sp}$ e $_{ref}$ verranno utilizzati indistintamente con lo stesso significato.

Capitolo 1

INTRODUZIONE

1.1 Controllo di temperatura

Il controllo della temperatura è un aspetto cruciale in molti processi industriali e domestici. La capacità di mantenere costante una temperatura desiderata è fondamentale per garantire la qualità del prodotto, la sicurezza, la durata dei componenti, le prestazioni delle installazioni e l'efficienza energetica.

I sistemi di controllo automatico della temperatura sono progettati per monitorare e regolare la temperatura di un ambiente o di un processo senza un continuo intervento umano; tra questi, si annoverano gli elettrodomestici (forni, frigoriferi e condizionatori), il campo dell'automotive, gli HVAC (Heating, Ventilation, and Air Conditioning; si tratta di sistemi che si occupano di mantenere il comfort termico negli edifici), gli impianti a pannelli solari, gli scambiatori di calore, ecc.

«*Per controllare la temperatura si rende necessario controllare la potenza termica che causa il riscaldamento o il raffreddamento di un ambiente, di un impianto, di una macchina o di un dispositivo. Questa potenza termica può essere ottenuta mediante dei resistori, i quali trasformano l'energia elettrica in una rete di energia termica o anche mediante passaggio di calore da un corpo ad un altro*» [14].

«*A seconda dell'applicazione, il controllo della temperatura può essere svolto da PLC con schede dedicate, valvole, irradiatori, essiccatore, termometri, sensori intelligenti, resistenze e cavi riscaldanti*» [14]. I PLC (Programmable Logic Controller) sono dispositivi progettati per monitorare e regolare macchine e processi di produzione in ambienti industriali.

«*Dal punto di vista del controllo automatico i termoregolatori sono i dispositivi più usati per il controllo della temperatura. [...] Un termoregolatore permette all'utilizzatore di impostare il valore di temperatura desiderato (setpoint) e agisce in modo da mantenere costante quel valore. Il controllo è ottenuto comandando l'azionamento degli elementi riscaldanti o raffreddanti e misurando, tramite un sensore, la temperatura ottenuta*» [14]. Sensori comuni sono gli RTD (Resistance Temperature Detectors). Si tratta di una classe di sensori che forniscono una misura di temperatura dell'ambiente circostante in cui sono posizionati basandosi sulla variazione della resistenza di un filo metallico situato al loro interno.

«*La regolazione sfrutta il principio della retroazione: il valore della temperatura rilevato dal sensore viene confrontato con il valore scelto dall'utilizzatore. Sulla base del risultato di questo confronto il termoregolatore inserisce o disinserisce gli elementi che generano o assorbono il calore, rilevando, sempre tramite il sensore, gli effetti di questa sua azione. La qualità di un termoregolatore consiste principalmente nella sua capacità di mantenere costante la temperatura impostata*» [14].

Un'applicazione particolarmente critica riguardante il controllo della temperatura si trova nei forni industriali, dove la precisione e l'uniformità della temperatura sono essenziali per il successo del processo produttivo. Il controllo della temperatura in questo contesto presenta diverse sfide:

- **Uniformità della temperatura.** Mantenere una distribuzione uniforme del calore all'interno del forno è cruciale per evitare difetti nei prodotti;
- **Inerzia termica.** I forni industriali hanno una grande capacità termica, il che significa che possono impiegare molto tempo per riscaldarsi e raffreddarsi;
- **Efficienza energetica.** Ottimizzare il consumo energetico è essenziale per ridurre i costi operativi e l'impatto ambientale;
- **Affidabilità della strumentazione.** Sensori e controllori devono essere precisi e affidabili per garantire un controllo accurato della temperatura.

Il controllo PID (Proporzionale Integrale Derivativo) è ampiamente utilizzato per il controllo della temperatura nei forni industriali grazie alla sua capacità di fornire una risposta rapida e precisa. Altri utilizzi tipici del controllo PID sono relativi ai sopraccitati sistemi HVAC e ai processi chimici [11]; nei sistemi HVAC regolano la temperatura per mantenere un ambiente confortevole; nei processi chimici mantengono la temperatura dei reattori entro limiti specifici per garantire reazioni sicure ed efficienti. I PID presentano delle limitazioni nel momento in cui si trovano a dover controllare sistemi non lineari o, in generale, dalla dinamica complessa. Nel campo dei trattamenti termici e del controllo della temperatura la letteratura a disposizione individua varie soluzioni alternative. Tra queste, la soluzione che si riscontra più frequentemente è il controllore MPC (Model Predictive Control). Le sue principali applicazioni riguardano il settore dell'industria chimica, nonché un settore in cui gli impianti sono enormi, le dinamiche molto lente e vi è un grande numero sia di ingressi sia di uscite da manipolare [3]. Nonostante tale tecnica sia ormai molto diffusa, inizialmente l'uso era limitato dalla necessità di usare potenti calcolatori. Grazie però ai passi fatti in avanti nel campo dei microprocessori si sono raggiunte ormai prestazioni tali da permetterne l'implementazione anche in dispositivi molto più economici e miniaturizzati [3]. Il motivo della necessità di tale potenza di calcolo deriva dal fatto che alla base del controllore MPC vi è la soluzione di un problema di ottimizzazione vincolato.

1.2 Controllare i sistemi

Nel Paragrafo 1.1 è stato discusso il tema del controllo della temperatura dando per assodato il senso che sta dietro al controllo dei sistemi. Il presente Paragrafo si pone come obiettivo quello di fornire una risposta che sia il più possibile esaustiva alla domanda: «cosa vuol dire controllare un sistema?».

I problemi di controllo consistono nell'imporre un funzionamento desiderato ad un processo. Con il termine *processo*, o *sistema sotto controllo*, o, più semplicemente, *sistema*, si fa riferimento all'oggetto sul quale il problema di controllo è posto.

Il funzionamento desiderato è espresso dalla richiesta che l'andamento nel tempo delle variabili che caratterizzano il processo coincida con quello di altre variabili preassegnate. Le prime rappresentano le grandezze di interesse e, nell'insieme, costituiscono la *variabile controllata*; le seconde costituiscono l'andamento desiderato della variabile controllata, detto altrimenti *segnaletico di riferimento*.

Pertanto, l'obiettivo ideale di un problema di controllo si può sintetizzare in:

$$\text{variabile controllata} = \text{segnaletico di riferimento}.$$

L'obiettivo espresso dalla precedente relazione prevede una perfetta identità. Esso, di fatto, è un andamento ideale e, in quanto tale, realmente irraggiungibile. Nella pratica applicativa, tuttavia, si può ritenere che un problema di controllo sia stato convenientemente risolto anche se la relazione è soddisfatta in via approssimativa:

$$\text{variabile controllata} \approx \text{segnaletico di riferimento}.$$

Tale relazione viene tradotta nell'imporre che l'errore, definito come

$$\text{errore} = \text{segnaletico di riferimento} - \text{variabile controllata},$$

soddisfi un insieme di *requisiti*, o *specifiche*, che esprimono la necessità che esso risulti “sufficientemente piccolo” in tutte le condizioni di funzionamento di interesse del sistema. Per perseguire questo obiettivo occorre avere la possibilità di condizionare la variabile controllata. A tale scopo, si suppone di poter agire sul processo manipolando altre variabili, chiamate, nell'insieme, *variabile di controllo*, i cui andamenti temporali possono essere scelti a piacimento. Queste variabili sono quindi assegnabili, in maniera relativamente arbitraria, da chi effettua il controllo.

All’obiettivo di rendere piccolo l’errore si aggiunge di solito una richiesta di moderazione del controllo, che è motivata sia dalla tipica presenza di vincoli sul valore massimo, o minimo, che può assumere la variabile di controllo sia dall’ovvia necessità di evitare che il processo riceva sollecitazioni eccessive. Pertanto, anche per le variabili di controllo possono essere definite opportune specifiche. La determinazione dell’andamento della variabile di controllo viene compiuta da un organo detto *controllore*, o *regolatore*.

Il complesso costituito dal sistema sotto controllo e dal controllore è denominato *sistema di controllo*.

Nella realtà le variabili controllate non dipendono solamente dalle variabili di controllo: esistono altre grandezze che non sono manipolabili e che, tuttavia, hanno un’influenza sul comportamento del processo. L’esistenza di queste variabili, raccolte sotto il nome comune di *disturbo*, complica i problemi di controllo.

I termini *disturbo* e *rumore* spesso vengono impropriamente usati come sinonimi, ma, a rigore, vi è una differenza tra i due:

- Un disturbo è un input indesiderato al sistema che ne devia il comportamento desiderato. I disturbi in genere provengono dall’ambiente esterno con il quale il sistema sotto controllo interagisce. Seppur si abbia conoscenza in merito alla loro presenza, non sono esplicitamente controbilanciabili a causa della loro natura aleatoria;
- Un rumore è un segnale indesiderato che si sovrappone al segnale utile. I rumori in genere sono imprevedibili e possono avere numerose fonti.

La Figura 1.A ritrae un generico sistema di controllo in anello chiuso in cui sono evidenziati tutti i protagonisti citati nello sviluppo del corrente Paragrafo 1.2:

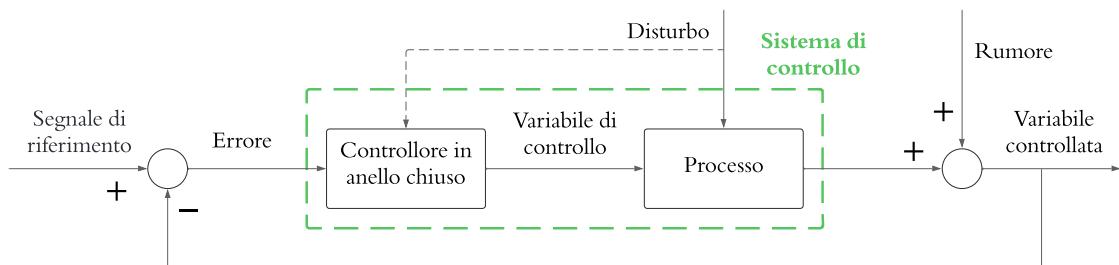


Figura 1.A: Sistema di controllo in anello chiuso.

1.3 Contesto di riferimento e motivazione

Il sistema oggetto di studio è un forno industriale adibito ad attività di packaging collocato al termine di una linea di produzione così strutturata:

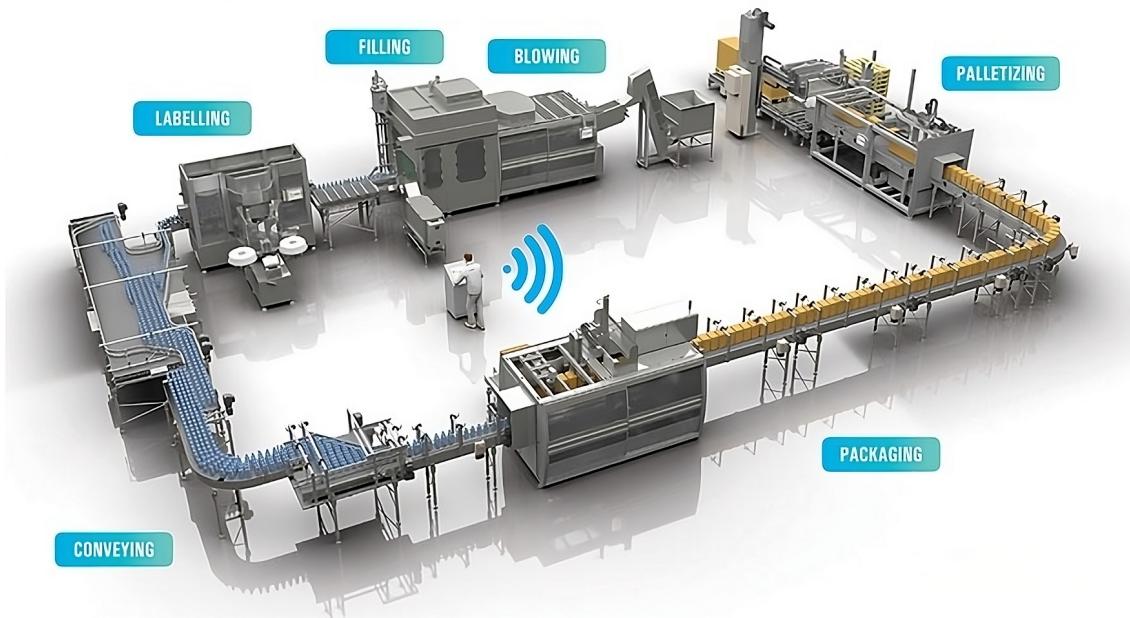


Figura 1.B: Linea di produzione.

Come riportato in Figura 1.B, la linea è composta dai seguenti macchinari:

- Il macchinario per il blowing è utilizzato per immettere aria compressa all'interno di una preforma posizionata all'interno di uno stampo cavo in modo tale che, gonfiandola, la preforma assuma la forma delle pareti dello stampo;
- Il macchinario per il filling è utilizzato per riempire la preforma gonfiata ad aria compressa in uscita dal macchinario per il blowing con il prodotto finale;
- Il macchinario per il labelling è utilizzato per applicare etichette ai prodotti in uscita dal macchinario per il filling. Le etichette contengono informazioni utili sul prodotto finale come, ad esempio, gli ingredienti e la data di scadenza;
- Il macchinario per il conveying è utilizzato per movimentare i prodotti da una fase all'altra del processo produttivo;
- Il macchinario per il packaging è utilizzato per imballare i prodotti in uscita dal macchinario per il labelling;
- Il macchinario per il palletizing è utilizzato per il posizionamento del prodotto imballato su di un pallet col fine di facilitarne il successivo trasporto nella grande distribuzione.

Poiché non è di interesse l'intera linea di produzione, ma il solo macchinario per il packaging, per poterne testare il funzionamento si è dovuto costruire un circuito attorno al macchinario stesso che simulasse l'arrivo del prodotto da trattare dai macchinari precedenti sulla linea:

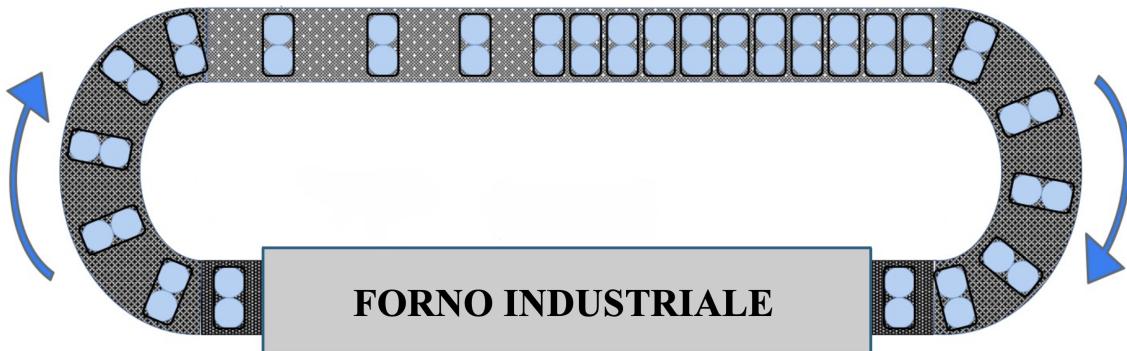


Figura 1.C: Circuito costruito attorno al forno industriale.

Il circuito mostrato in Figura 1.C è composto da otto macchinari per il conveying che collegano l'uscita del forno al suo ingresso per garantire un riciclo continuativo del prodotto da trattare. Il prodotto da trattare è costituito da pacchi di bottiglie di plastica avvolte da un film plastico termoretraibile, come ritratto in Figura 1.D:



Figura 1.D: Bottiglie di plastica avvolte dal film termoretraibile.

Il PLC attualmente installato sulla macchina monta un controllore PID, il quale, tuttavia, non fornisce prestazioni soddisfacenti. Questo accade perché il sistema in questione presenta varie sfide per quel che riguarda il controllo della temperatura:

- La sua dinamica è non lineare;
- Le sue prestazioni sono tempo varianti;
- È soggetto a disturbi che variano nel tempo;
- Il setpoint di riferimento cambia nell'arco dell'intera giornata lavorativa.

I sensori adibiti al controllo della temperatura sono delle termocoppie PT100. Le prestazioni del controllore PID sono insoddisfacenti in quanto fortemente vincolate dalla mancanza di informazione derivante dal ridotto numero di termocoppie installate nel forno. Infatti, al suo interno ve ne sono solamente due.

Il presente progetto di tesi nasce con la motivazione di migliorare la condizione appena illustrata. L'obiettivo principale, dunque, è il raggiungimento di una distribuzione di temperatura che sia il più possibile uniforme lungo l'intero tunnel di trattamento del forno. Non solo questo; infatti, se l'obiettivo principale è stato appena descritto, quello secondario prevede che si ottimizzi l'intero processo produttivo. Per perseguire entrambi gli obiettivi sono state utilizzate congiuntamente le tecniche MPC (Model Predictive Control) e BO (Bayesian Optimization). A tal fine, sono state aggiunte dodici termocoppie alle due preesistenti. Il controllo della temperatura illustrato nei successivi capitoli di questo documento si avvale delle misurazioni ottenute per mezzo di queste dodici termocoppie, ignorando il contributo portato dalle due preesistenti.

Model Predictive Control è una tecnica avanzata di controllo dei processi che ha avuto origine alla fine degli anni '70. Negli anni '80 ha iniziato ad essere utilizzata ampiamente nelle industrie di processo, come le raffinerie di petrolio e gli impianti chimici. La caratteristica principale è la sua capacità di prevedere il comportamento futuro del sistema e di ottimizzare le variabili di controllo per soddisfare una serie di vincoli, eventualmente contrastanti tra loro.

Bayesian Optimization è strategia per l'ottimizzazione globale di funzioni cosiddette *black-box* sviluppata a cavallo tra gli anni '70 e '80. Tale tecnica utilizza un modello probabilistico per modellare la funzione obiettivo che descrive il processo in esame. Viene utilizzata in tutti quegli scenari in cui è estremamente oneroso ottenere una forma analitica precisa della funzione obiettivo.

1.4 Overview del documento

Si presenta al lettore, senza pretesa di completezza alcuna, una overview di carattere generale in merito agli argomenti affrontati nei successivi capitoli del documento.

Capitolo 2

Il primo Paragrafo è dedicato al *Optimal Control (OC)*. Tale tema, non ulteriormente approfondito nel proseguo, serve da incipit per il successivo.

Il secondo Paragrafo è dedicato al *Model Predictive Control (MPC)*. Tale tema costituisce il cuore dell'intero documento. Nel Paragrafo dedicatogli, oltre a fornire una contestualizzazione storica e pratica della tecnica, si pone particolare attenzione sia al *Receding Horizon Principle (RHP)*, nonché il principio che sta alla base del controllo predittivo e che gli permette di essere così performante, sia alla stabilità del sistema in anello chiuso. Si forniscono, inoltre, tre varianti del tradizionale controllo predittivo: *Economic Model Predictive Control (EMPC)*, *Offset-free Model Predictive Control (OMPC)* e *Model Predictive Control for Tracking (MPCT)*. Tali varianti trovano applicazione nei più disparati settori, ma è d'obbligo fornire una panoramica sulle stesse in virtù del fatto che la formulazione del controllore elaborata nel Capitolo 4 prevede una loro fusione. La Sezione conclusiva, invece, fornisce una guida pratica per l'implementazione di MPC nel caso del controllo di sistemi lineari.

Il terzo Paragrafo è dedicato alla *Bayesian Optimization (BO)*. Le formulazioni del MPC constano di iperparametri. Per una corretta taratura sono state elaborate negli anni numerose tecniche di ottimizzazione. In questo progetto di tesi si è deciso di sfruttare la tecnica BO. Come per ogni tecnica di ottimizzazione, il suo compito è quello di analizzare in maniera efficace ed efficiente lo spazio delle soluzioni in cui si pensa che risiedano i valori ottimi degli iperparametri. Dopo aver fornito una descrizione più specifica del problema da risolvere, si analizzano il exploration-exploitation dilemma, i macro step da seguire per poter applicare la tecnica BO e i due strumenti su cui si basa tale tecnica: *Surrogate Model (SM)* e *Acquisition Function (AF)*.

Il quarto Paragrafo è dedicato all'utilizzo congiunto delle tecniche MPC e BO su un esempio di più semplice analisi rispetto al sistema reale per il quale è stato commissionato l'intero progetto di tesi. È presente uno studio che parte dalla fase di modellazione del sistema da controllare, si articola andando a toccare i temi di linearizzazione e discretizzazione, e si conclude con una Sezione dedicata alla fase di simulazione con annessa analisi dei risultati ottenuti. Il fine dell'intero Paragrafo è presto detto: introdurre degli strumenti più operativi che verranno riutilizzati, previo adattamento, per il controllo del sistema reale.

Capitolo 3

Per poter riuscire a controllare efficacemente qualunque sistema è necessario disporre di un suo modello. Un modello rappresenta una possibile visione (semplificata) del sistema reale per il quale viene sviluppato. Per mezzo dei modelli è possibile studiare le proprietà dei rispettivi sistemi reali. In quest'ottica, il Capitolo 3 si pone come obiettivo quello di fornire una rappresentazione in variabili di stato di un forno industriale adibito ad attività di packaging. Dapprima, si presenta una panoramica al principio del suo funzionamento; successivamente, si passa alla vera e propria fase di modellazione. Il risultato finale è un modello da utilizzare come proxy del sistema reale; tale modello deriva dalla rappresentazione per mezzo di equazioni matematiche di quegli aspetti che caratterizzano il funzionamento del sistema reale. Una precisazione è doverosa: la definizione del modello non è da considerarsi parte integrante di questo progetto di tesi, ma si ritiene che una sua conoscenza, seppur non approfondita, possa facilitare la successiva fase di analisi e che sia una buona base di partenza per successivi miglioramenti.

Capitolo 4

Una volta definito il modello del sistema reale, è necessario definirne una opportuna strategia di controllo. La strategia di controllo adottata prevede una formulazione che effettui un controllo economico, che sia orientato alla reiezione dei disturbi e che sia in grado di adattarsi a cambiamenti improvvisi del setpoint da seguire. Tale formulazione è indicata per mezzo della notazione *Economic Offset-free Model Predictive Control for Tracking* (**EOMPCT**).

Una precisazione è doverosa: al pari della fase di modellistica, anche l'elaborazione della strategia di controllo non è da considerarsi parte integrante di questo progetto di tesi; la motivazione che ha spinto ad includere tale trattazione è la stessa di quella esposta per il capitolo 3.

Capitolo 5

Definiti sia il modello del sistema reale sia la strategia di controllo, rimane da testare il funzionamento in anello chiuso sia del modello sia del sistema reale quando a controllarli è un controllore **EOMPCT** con iperparametri tarati secondo l'approccio **B0**. Nel primo Paragrafo si forniscono i risultati ottenuti in simulazione, ovvero in quella fase in cui si testa il funzionamento del controllore sul modello; nel secondo Paragrafo, invece, si forniscono i risultati ottenuti in via sperimentale, ovvero in quella fase in cui si testa in funzionamento del controllore sul sistema reale.

Capitolo 2

STATO DELL'ARTE

2.1 Optimal Control

Un controllo è *ottimo* se soddisfa un criterio di ottimalità. Un possibile criterio di ottimalità contempla i due seguenti obiettivi:

- **Velocità di tracking.** Tipicamente si vorrebbe un tracking veloce per fare in modo che il sistema giunga a convergenza il prima possibile. Il soddisfacimento di questo obiettivo implica una elevata aggressività del controllo e, dunque, maggiori costi legati al controllo e maggiori costi economici;
- **Aggressività del controllo.** Tipicamente si vorrebbe spendere il meno possibile sia in termini di costi legati al controllo sia in termini economici. Il soddisfacimento di questo obiettivo, seppur determini minori costi, implica una maggiore lentezza nel tracking.

I due obiettivi sono in contrasto tra loro. Lo scopo del *Optimal Control* (OC) è quello di progettare controllori che siano in grado di generare delle azioni di controllo che guidino il sistema trovando il giusto compromesso tra velocità di tracking e aggressività del controllo, eventualmente nel rispetto di particolari vincoli. I problemi di controllo ottimo si basano sulla risoluzione di un problema di ottimizzazione di una funzione di costo. La funzione di costo rappresenta gli obiettivi del controllo, dunque viene scelta dal progettista in base alle specifiche di progetto. Le prestazioni del sistema, quindi, non sono ottime in assoluto, ma lo sono rispetto alla particolare funzione di costo scelta.

2.1.1 Formulazione del problema

Si consideri il seguente sistema discreto, sia esso lineare o non lineare:

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = h(x(k), u(k)) \end{cases}$$

Ipotesi:

- ✓ $x(k) \in \mathbb{R}^n, u(k) \in \mathbb{R}^m, y(k) \in \mathbb{R}^p$
- ✓ $f(x(k), u(k))$ differenziabile rispetto ai propri argomenti
- ✓ Stato completamente accessibile¹

L'obiettivo del OC è quello di cercare la sequenza di N azioni di controllo ottime $u^0(k), k \in [0, N - 1]$, che riesce a condurre il sistema dal suo stato iniziale $x(0)$ a quello terminale $x(N)$ attraverso la minimizzazione di una funzione di costo:

$$J(x(0); u(\cdot)) = \sum_{j=0}^{N-1} l(x(j), u(j)) + V_{co}(x(N)),$$

in cui:

- $l(\cdot)$ identifica il cosiddetto *stage cost*, ovvero il costo che occorre pagare per muovere il sistema da uno stato al successivo;
- $V_{co}(\cdot)$ quantifica il costo che occorre pagare per mantenere il sistema nello stato terminale $x(N)$.

Si richiede che entrambe le funzioni $l(\cdot)$ e $V_{co}(\cdot)$ siano differenziabili rispetto ai relativi argomenti. Per illustrare una scelta tipica riguardo la loro struttura si consideri un problema di regolazione all'origine. In tal caso, una scelta ragionevole è:

$$l(x(j), u(j)) = \|x(j)\|_Q^2 + \|u(j)\|_R^2 \quad V_{co}(x(N)) = \|x(N)\|_S^2,$$

dove:

- Q pesa l'importanza relativa allo stato;
- R pesa l'importanza relativa all'ingresso;
- S pesa il costo da pagare per mantenere il sistema nello stato terminale $x(N)$.

¹Supporre lo stato completamente accessibile implica la possibilità di misurare tutti gli stati in cui si può venire a trovare il sistema. Per misurare gli stati è necessario un sensore per ogni variabile di stato. Tale ipotesi è molto forte e nella realtà non è sempre valida. Quando uno stato non è completamente accessibile, per soppiare alla mancanza di una diretta misurazione si aggiunge nel loop di controllo un osservatore dello stato.

Non esiste una legge scritta per la corretta taratura di Q , R ed S , dunque la loro struttura viene scelta dal progettista in base al particolare problema di controllo affrontato, tipicamente procedendo per tentativi. Una specifica da rispettare per una corretta taratura è:

$$Q = Q^T \geq 0,$$

$$R = R^T > 0,$$

$$S = S^T \geq 0.$$

Associato a questi parametri vi è un significato economico/fisico:

- Se $Q \gg R$ viene priorizzata la minimizzazione dello stato, il che implica un controllo aggressivo, dunque minori tempi di risposta, ma maggiori costi legati al controllo ed economici;
- Se $R \gg Q$ viene priorizzata la minimizzazione dell'azione di controllo, il che implica un controllo mite, dunque lunghi tempi di risposta, ma minori costi legati al controllo ed economici.

La funzione di costo deve essere minimizzata tenendo in considerazione sia i vincoli imposti dalla dinamica del sistema $x(k+1)$ sia gli opzionali vincoli imposti su stato, ingresso e/o uscita. Nella fattispecie, in presenza di vincoli occorre apportare delle modifiche alla prima ipotesi: $x(k) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, $y(k) \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$. Per il proseguo del Paragrafo 2.1 si assume che per il sistema descritto nella Sezione 2.1.1 non siano definiti vincoli.

2.1.2 Bellman Optimality Principle

La soluzione al problema 2.1.1 si basa sul *Bellman Optimality Principle* (BOP).

Definizione: Bellman Optimality Principle

Dato il controllo ottimo

$$u^0(k) = \{u^0(0), \dots, u^0(N-1)\}, k \in [0, N-1]$$

e la corrispondente traiettoria ottima

$$x^0(k) = \{x^0(0), \dots, x^0(N-1), x^0(N)\},$$

una sotto-sequenza del controllo ottimo

$$u^0(k) = \{u^0(k_1), \dots, u^0(N-1)\}, k \in [k_1, N-1], 0 < k_1 < N-1$$

è ottima per il problema su orizzonte $[k_1, N-1]$

$$x^0(k) = \{x^0(k_1), \dots, x^0(N-1), x^0(N)\}.$$

Sia $J^0(x(k))$ il valore del costo ottimo al passo $k \in [0, N-1]$:

$$\begin{aligned} J^0(x(k)) &= \min_{u \in [k, N-1]} J(x(k); u(\cdot)) \\ &= \min_{u \in [k, N-1]} \left(\sum_{j=k}^{N-1} l(x(j), u(j)) + V_{co}(x(N)) \right). \end{aligned}$$

Applicando il principio di ottimalità di Bellman:

$$\begin{aligned} J^0(x(k)) &= \min_{u \in [k, k_1-1]} \left(\min_{u \in [k_1, N-1]} \left(\sum_{j=k}^{k_1-1} l(x(j), u(j)) + \sum_{j=k_1}^{N-1} l(x(j), u(j)) + V_{co}(x(N)) \right) \right) \\ &= \min_{u \in [k, k_1-1]} \left(\sum_{j=k}^{k_1-1} l(x(j), u(j)) + \min_{u \in [k_1, N-1]} \left(\sum_{j=k_1}^{N-1} l(x(j), u(j)) + V_{co}(x(N)) \right) \right) \\ &= \min_{u \in [k, k_1-1]} \left(\sum_{j=k}^{k_1-1} l(x(j), u(j)) + J^0(x(k_1)) \right). \end{aligned}$$

Ciò che l'ultima espressione vuole mettere in evidenza è che il costo ottimo per spostare il sistema da $x(k)$ a $x(N)$ è ottenuto minimizzando il costo ottimo per spostarlo da $x(k)$ a $x(k_1)$ più quello per spostarlo da $x(k_1)$ a $x(N)$. Il passo k_1 è un passo generico in $[0, N-1]$, ma se si assume che valga esattamente $k_1 = k+1$, ovvero che k_1 sia il passo successivo al passo k , si ottiene:

$$J^0(x(k)) = \min_{u(k)} (l(x(k), u(k)) + J^0(x(k+1))).$$

Per calcolare $J^0(x(k))$, ovvero il costo ottimo in $x(k)$, è necessario aver calcolato $J^0(x(k+1))$, ovvero il costo ottimo in $k+1$:

$$J^0(x(k+1)) = \min_{u(k+1)} (l(x(k+1), u(k+1)) + J^0(x(k+2))).$$

Per calcolare $J^0(x(k+1))$, ovvero il costo ottimo in $x(k+1)$, è necessario aver calcolato $J^0(x(k+2))$, ovvero il costo ottimo in $k+2$:

$$J^0(x(k+2)) = \min_{u(k+1)} (l(x(k+2), u(k+2)) + J^0(x(k+3))).$$

La procedura, come si può ben notare, è iterativa. In particolare, le iterazioni vengono effettuate partendo dalla fine, ovvero dallo stato terminale $x(N)$, fino a giungere allo stato di partenza, ovvero $x(0)$:

- Il costo ottimo quando $k = N$ è:

$$J^0(x(N)) = V_{co}(x(N));$$

- Il costo ottimo quando $k = N - 1$ è:

$$J^0(x(N-1)) = \min_{u(N-1)} (l(x(N-1), u(N-1)) + J^0(x(N))).$$

L'azione di controllo ottima che genera il costo ottimo $J^0(x(N-1))$ è:

$$u^0(N-1) = \arg(J^0(x(N-1)));$$

- Il costo ottimo al generico passo k è:

$$J^0(x(k)) = \min_{u(k)} (l(x(k), u(k)) + J^0(x(k+1))).$$

L'azione di controllo ottima che genera il costo ottimo $J^0(x(k))$ è:

$$u^0(k) = \arg(J^0(x(k))).$$

Si ottiene così la sequenza ottima $u^0(k)$ composta da N azioni di controllo ottime

$$u^0(k) = \{u^0(0), u^0(1), \dots, u^0(k), \dots, u^0(N-1)\}$$

che riescono a guidare il sistema dal suo stato iniziale $x(0)$ all'origine attraverso la minimizzazione della funzione di costo

$$J(x(0); u(\cdot)) = \sum_{j=0}^{N-1} l(x(j), u(j)) + V_{co}(x(N)).$$

Questa strategia risolutiva è nota col nome di *Dynamic Programming* (DP). L’idea alla base della DP è quella di scomporre un problema di ottimizzazione complesso in tanti sotto-problemi di ottimizzazione di più semplice risoluzione. Tale approccio è possibile in virtù del BOP.

A titolo di esempio, si consideri il caso in cui un sistema debba essere spostato dallo stato iniziale $x(0)$ a quello terminale $x(N)$ in $N = 5$ passi:

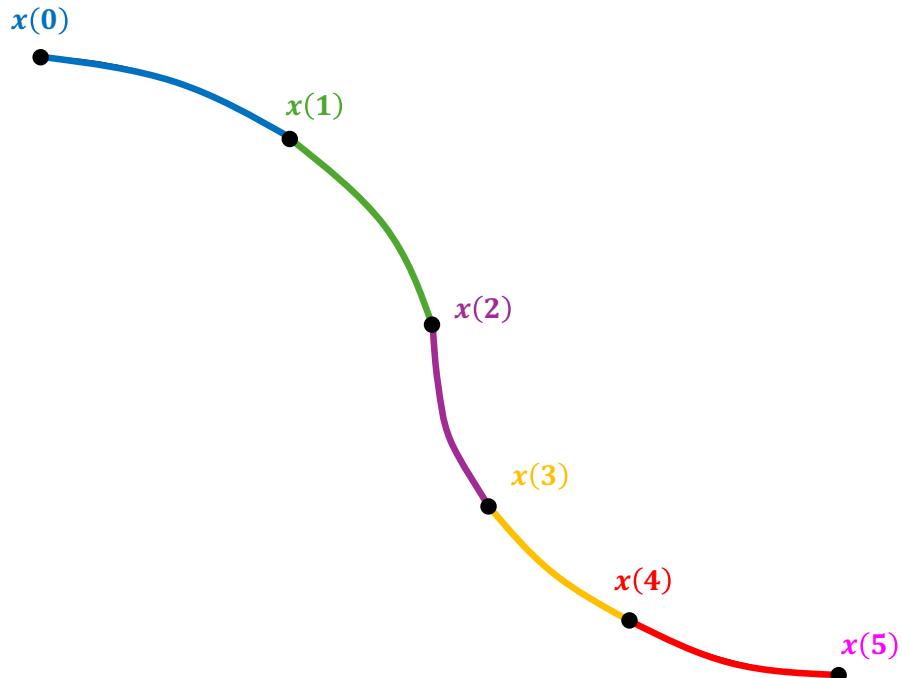


Figura 2.A: Rappresentazione esemplificativa del funzionamento di OC e BOP.

Analizzando la Figura 2.A:

- Per spostare il sistema da $x(0)$ a $x(1)$ si applica $u^0(0)$;
- Per spostare il sistema da $x(1)$ a $x(2)$ si applica $u^0(1)$;
- Per spostare il sistema da $x(2)$ a $x(3)$ si applica $u^0(2)$;
- Per spostare il sistema da $x(3)$ a $x(4)$ si applica $u^0(3)$;
- Per spostare il sistema da $x(4)$ a $x(5)$ si applica $u^0(4)$.

2.2 Model Predictive Control

Model Predictive Control (MPC) fa riferimento ad una famiglia di algoritmi che, a partire dagli anni '80, ha avuto un enorme successo in ambito industriale. Si può affermare che il controllo predittivo sia la metodologia di controllo avanzato più comunemente impiegata per la regolazione degli impianti industriali in ambito chimico, petrolchimico e in molti altri contesti. In generale, il controllo predittivo è sub-ottimo rispetto al controllo ottimo, ma, tra i due, quello che viene applicato nella realtà è il predittivo per via della possibilità che lascia al progettista di gestire la complessità del problema. Le caratteristiche principali che lo rendono particolarmente flessibile e adatto a svariate applicazioni sono:

- Possibilità di formulare il problema di controllo come un problema di ottimizzazione in cui includere diversi obiettivi, eventualmente tra loro contrastanti;
- Possibilità di includere esplicitamente nel problema di controllo vincoli sulle variabili di stato e di controllo. Tipicamente i vincoli sullo stato sono legati alla sicurezza del sistema (si può voler imporre che la temperatura all'interno di un forno non superi una certa soglia per evitare che i suoi componenti collassino), mentre quelli sull'ingresso sono legati a limiti fisici del sistema (una valvola non può essere aperta più del 100% e non può essere chiusa meno dello 0%);
- Possibilità di completare il progetto del regolatore a partire da modelli del processo ricavati empiricamente mediante semplici prove d'impianto, quali risposte allo scalino o all'impulso.

MPC, dunque, è una tecnica di controllo model-based che utilizza un modello matematico del sistema da controllare per prevedere il suo probabile comportamento futuro. Tali predizioni vengono utilizzate dal controllore per determinare la migliore sequenza di azioni di controllo da impartire al sistema. La caratteristica distintiva di questa tipologia di controllo è che, anziché generare una sequenza di azioni di controllo basata solo sullo stato attuale del sistema, cerca di ottimizzare online una funzione di costo considerando anche il probabile comportamento futuro del sistema stesso.

2.2.1 Receding Horizon Principle

Per raggiungere il suo scopo, MPC sfrutta il *Receding Horizon Principle* (RHP).

Definizione: Receding Horizon Principle

A ogni passo k si risolve il problema di ottimizzazione su orizzonte $[k, k+N-1]$ col fine di determinare la sequenza di N azioni di controllo ottime:

$$u^0(k) = \{u^0(k), \dots, u^0(k+N-1)\}.$$

Delle N azioni di controllo computate, solamente la prima, $u^0(k)$, viene applicata al sistema sotto controllo. Al successivo istante si ripete l'ottimizzazione con riferimento all'orizzonte $[k+1, (k+1)+N-1]$ avendo a disposizione le informazioni aggiornate date dalla nuova misura dello stato $x(k+1)$:

$$u^0(k+1) = \{u^0(k+1), \dots, u^0((k+1)+N-1)\}.$$

In Figura 2.B è mostrato il funzionamento del RHP:

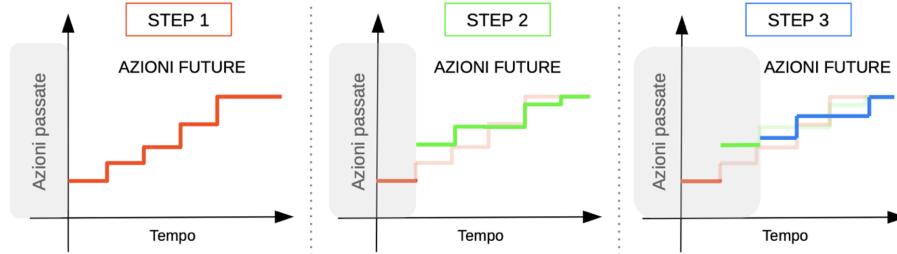


Figura 2.B: Receding Horizon Principle in azione.

- **Step 1.** All'istante $k = 0$ viene risolto il problema di ottimizzazione su orizzonte finito $[0, N]$ col fine di determinare la sequenza di N azioni di controllo ottime;
- **Step 2.** Delle N azioni di controllo computate nello step 1, solamente la prima, ovvero $u^0(0)$, viene applicata al sistema sotto controllo. Successivamente viene risolto un nuovo problema di ottimizzazione sul medesimo orizzonte finito $[0, N]$ col medesimo fine del passo precedente, ovvero la determinazione della sequenza di N azioni di controllo ottime. Bisogna porre attenzione al seguente aspetto: sebbene i due problemi vengano risolti su uno stesso intervallo N e, sebbene la funzione di costo da ottimizzare sia la stessa, i due problemi di ottimizzazione sono diversi perché tra il primo e il secondo cambia la condizione iniziale che viene sfruttata per il computo delle azioni di controllo;
- **Step 3.** Lettura del tutto analogo a quella dello step 2.

A titolo di esempio, si consideri il caso in cui un sistema debba essere spostato dallo stato iniziale $x(0)$ a quello terminale x_{ref} sfruttando $N = 5$ (orizzonte di predizione):

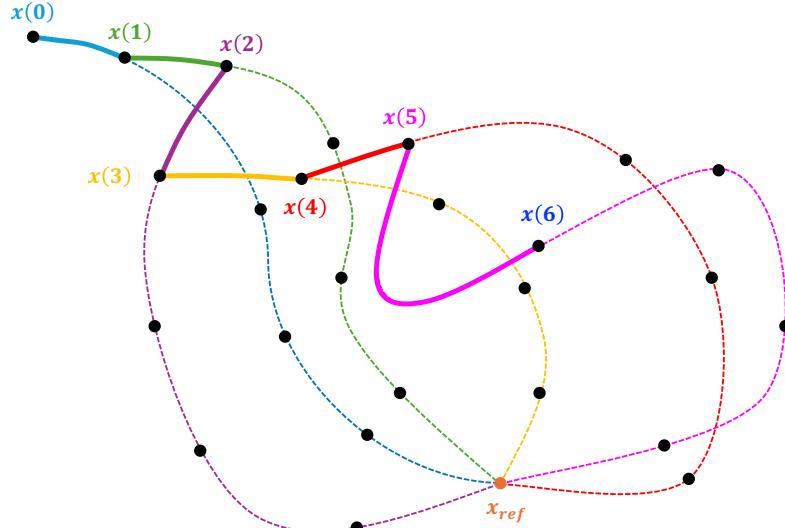


Figura 2.C: Rappresentazione esemplificativa del funzionamento di MPC e RHP.

Analizzando la Figura 2.C:

- Per spostare il sistema da $x(0)$ a $x(1)$ si applica $u^0(0)$, ovvero la prima delle $N = 5$ azioni di controllo elaborate al passo $k = 0$;
- Per spostare il sistema da $x(1)$ a $x(2)$ si applica $u^0(0)$, ovvero la prima delle $N = 5$ azioni di controllo elaborate al passo $k = 1$;
- Per spostare il sistema da $x(2)$ a $x(3)$ si applica $u^0(0)$, ovvero la prima delle $N = 5$ azioni di controllo elaborate al passo $k = 2$;
- Per spostare il sistema da $x(3)$ a $x(4)$ si applica $u^0(0)$, ovvero la prima delle $N = 5$ azioni di controllo elaborate al passo $k = 3$;
- Per spostare il sistema da $x(4)$ a $x(5)$ si applica $u^0(0)$, ovvero la prima delle $N = 5$ azioni di controllo elaborate al passo $k = 4$;
- Per spostare il sistema da $x(5)$ a $x(6)$ si applica $u^0(0)$, ovvero la prima delle $N = 5$ azioni di controllo elaborate al passo $k = 5$;
- Il procedimento è iterativo e si ripete fino a che il sistema non giunge in x_{eq} o fino a che non si verifica qualche condizione che decreta l'interruzione del controllo, come ad esempio l'esaurimento del tempo di simulazione, l'esaurimento delle risorse computazionali o l'irrisolvibilità del problema di ottimizzazione qualora quest'ultimo non fosse ben posto.

2.2.2 Formulazione del problema

Si consideri il seguente sistema discreto, sia esso lineare o non lineare:

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = h(x(k), u(k)) \end{cases}$$

Ipotesi:

- ✓ $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$
- ✓ Stato e ingresso vincolati: $x(k) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$
- ✓ \mathcal{X} e \mathcal{U} compatti contenenti l'origine
- ✓ $f(x(k), u(k))$ differenziabile rispetto ai propri argomenti
- ✓ $f(0,0) = 0$
- ✓ Stato completamente accessibile

I problemi di controllo possono essere suddivisi in due macro categorie:

- **Regolazione all'origine.** In questa tipologia di problemi il sistema si trova in una condizione iniziale non nota e l'obiettivo è condurlo all'origine. In tal caso, la funzione di costo rispetto alla quale ottimizzare è:

$$J(x(k); u(\cdot)) = \sum_{j=0}^{N-1} l(x(j), u(j)) + V_{cp}(x(N));$$

- **Setpoint tracking.** In questa tipologia di problemi l'obiettivo è fare in modo che il sistema inseguia un certo setpoint non nullo. In tal caso, la funzione di costo rispetto alla quale ottimizzare è:

$$J(x(k); u(\cdot)|x_{ref}, u_{ref}) = \sum_{j=0}^{N-1} l(x(j), u(j)|x_{ref}, u_{ref}) + V_{cp}(x(N)|x_{ref}).$$

Il significato attribuito a $l(\cdot)$ e $V_{cp}(\cdot)$ è lo stesso di quello illustrato nel contesto OC:

- $l(\cdot)$ identifica il cosiddetto *stage cost*, ovvero il costo che occorre pagare per muovere il sistema da uno stato al successivo;
- $V_{cp}(\cdot)$ quantifica il costo che occorre pagare per mantenere il sistema nello stato terminale $x(N)$.

Senza ledere di generalità, nella Sezione 2.2.3 si farà riferimento al problema di regolazione del sistema all'origine.

2.2.3 Stabilità in anello chiuso

Come per ogni strategia di controllo, si desidera che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile. Per dimostrare l'asintotica stabilità in anello chiuso di un sistema controllato per mezzo di un controllore MPC si ricorre al *teorema di Lyapunov*.

Teorema: stabilità di un sistema secondo Lyapunov

Si consideri un sistema non lineare autonomo:

$$x(k+1) = f(x(k)). \quad (2.1)$$

Si assume che $f(\cdot)$ sia continua e che $x(k) = \bar{x}$ sia un punto di equilibrio del sistema (2.1).

Se esiste una funzione continua $V(x(k))$ definita positiva in $x(k) = \bar{x}$, ovvero

$$V(\bar{x}) > 0,$$

e tale per cui la variazione $\Delta V(x(k))$ rispetto alla traiettoria del sistema è semidefinita negativa in $x(k) = \bar{x}$, ovvero

$$\Delta V(\bar{x}) = V(f(\bar{x})) - V(\bar{x}) \leq 0,$$

allora $x(k) = \bar{x}$ è un punto di equilibrio stabile.

Se $V(\bar{x}) > 0$, ma la sua variazione $\Delta V(x(k))$ rispetto alla traiettoria del sistema è definita negativa in $x(k) = \bar{x}$, ovvero

$$\Delta V(\bar{x}) = V(f(\bar{x})) - V(\bar{x}) < 0,$$

allora $x(k) = \bar{x}$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

In altre parole, voler sfruttare il *teorema di Lyapunov* si traduce nel dimostrare che esiste una *funzione di Lyapunov* dello stato, ovvero una funzione $V(x(k))$ che soddisfi entrambe le condizioni previste dall'omologo teorema:

- È definita positiva:

$$V(x(k)) > 0;$$

- La sua variazione rispetto alla traiettoria del sistema è definita negativa:

$$\Delta V(x(k)) < 0.$$

Il problema di ottimizzazione che viene risolto ad ogni passo k è:

Problema di ottimizzazione

$$\begin{aligned} J^0(x(k)) &= \min_{u(\cdot)} J(x(k); u(\cdot)) \\ x(0) &= x(k) \\ x(j+1) &= f(x(j), u(j)) \\ x(j) &\in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \\ u(j) &\in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \\ x(N) &\in \mathbb{X}_f \subseteq \mathcal{X} \end{aligned}$$

Peculiarità del problema di ottimizzazione:

- La condizione $x(0) = x(k)$ indica che lo stato attuale $x(k)$ diventa la condizione iniziale $x(0)$ per la risoluzione del successivo problema di ottimizzazione (feedback di stato);
- Le condizioni $x(j) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ e $u(j) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ indicano che lo stato e l'ingresso trovati ad ogni iterazione del problema di ottimizzazione devono appartenere ai relativi set \mathcal{X} e \mathcal{U} individuati dai vincoli su stato e ingresso, rispettivamente;
- Si rimanda al proseguo per l'interpretazione del vincolo $x(N) \in \mathbb{X}_f \subseteq \mathcal{X}$.

Notazione per il proseguo: $x \equiv x(k)$, $x^+ \equiv x(k+1)$, $u \equiv u(k)$, $u^+ \equiv u(k+1)$.

Verifica della prima proprietà del teorema di Lyapunov

Il rispetto della prima proprietà che deve possedere una funzione per essere una funzione di Lyapunov è garantito scegliendo:

- $l(x(j), u(j)) > 0$ e tale che $l(0,0) = 0$;
- $V_{cp}(x(N)) > 0$ e tale che $V_{cp}(0) = 0$.

Una scelta tipicamente adottata in letteratura per la struttura dello stage cost è:

$$l(x(j), u(j)) = \|x(j)\|_Q^2 + \|u(j)\|_R^2.$$

Si rimanda al proseguo per la definizione della struttura di $V_{cp}(x(N))$.

Verifica della seconda proprietà del teorema di Lyapunov

Si suppone che al passo k sia stato risolto il problema di ottimizzazione, il cui output è una sequenza di azioni di controllo ottime:

$$u^0(k) = \{u^0(0; x), u^0(1; x), \dots, u^0(N - 1; x)\}.$$

La sequenza $u^0(k)$ contiene una serie di azioni di controllo ottime in anello aperto che producono una sequenza ottima di movimenti dello stato in anello aperto $x^0(k)$ sulla base della legge $x(j + 1) = f(x(j), u(j))$:

$$x^0(k) = \{x^0(0; x), x^0(1; x), \dots, x^0(N - 1; x), x^0(N; x)\}.$$

All'interno della sequenza $x^0(k)$ vanno riconosciuti due elementi fondamentali:

- $x^0(0; x) = x(k) =$ feedback di stato. Si tratta di un valore noto in quanto condizione iniziale della k -esima iterazione;
- $x^0(1; x) = x(k + 1) =$ predizione dello stato derivante dall'applicazione di $u^0(0; x)$, nonché la prima della sequenza di azioni di controllo ottime.

Per procedere è necessario chiarire il seguente aspetto: la traiettoria ottima $x^0(k)$ è generata grazie all'applicazione dell'intera sequenza ottima di azioni di controllo $u^0(k)$, ma la traiettoria reale seguita dal sistema non è la traiettoria ottima. Questo accade perché il funzionamento del MPC è basato sul RHP: la traiettoria reale dipende solo dall'applicazione della prima delle N azioni di controllo calcolate al passo k , come spiegato nella Sezione 2.2.1.

Le due sequenze ottime $u^0(k)$ e $x^0(k)$ producono un costo ottimo al passo k :

$$\begin{aligned} J^0(x, u^0(x)) &= \sum_{j=0}^{N-1} l(x^0(j; x), u^0(j; x)) + V_{cp}(x^0(N; x)) \\ &= l(x^0(0; x), u^0(0; x)) + \sum_{j=1}^{N-1} l(x^0(j; x), u^0(j; x)) + V_{cp}(x^0(N; x)). \end{aligned}$$

L’obiettivo è quello di dimostrare $\Delta J^0(x) = J^0(f(x, u)) - J^0(x, u^0(x)) \leq 0$, ovvero che il costo decresce di iterazione in iterazione. Per poterlo dimostrare servirebbe disporre, oltre che di $J^0(x, u^0(x))$, anche di $J^0(f(x, u))$, ovvero il costo ottimo al passo $k + 1$. Vi è un problema: al passo k non è possibile conoscere il costo ottimo del passo $k + 1$. Per ovviare a questo inconveniente si sfrutta un approccio differente: anziché considerare il costo ottimo del passo $k + 1$, il quale sarebbe generato dalla sequenza ottima di azioni di controllo $u^0(x^+)$, si considera un costo fattibile per il problema di ottimizzazione, anche se non ottimo. Per mettere in pratica questa strategia si costruisce una sequenza fattibile di azioni di controllo:

$$\tilde{u}(x^+) = \{u^0(1; x), u^0(2; x), \dots, u^0(N - 1; x), v\}.$$

Il procedimento per la costruzione di $\tilde{u}(x^+)$ prevede che si parta dalla sequenza $u^0(x)$, si scarti il primo elemento $u^0(0; x)$ (in quanto già stato applicato al sistema) e se ne aggiunga uno, denotato per mezzo di v , in coda. Tale sequenza è fattibile nel senso che tutti gli elementi al suo interno, ivi v compresa, rispettano i vincoli posti sugli ingressi.

La sequenza $\tilde{u}(x^+)$ contiene una serie di azioni di controllo in anello aperto che producono una sequenza fattibile di movimenti dello stato in anello aperto $\tilde{x}(x^+)$ sulla base della legge $x(j + 1) = f(x(j), u(j))$:

$$\tilde{x}(x^+) = \{x^0(1; x), x^0(2; x), \dots, x^0(N - 1; x), x^0(N; x), f(x^0(N; x), v)\}.$$

Le sequenze fattibili $\tilde{u}(x^+)$ e $\tilde{x}(x^+)$ producono un costo fattibile al passo $k + 1$:

$$\tilde{J}(x^+, \tilde{u}(x^+)) = \sum_{j=1}^{N-1} l(x^0(j; x), u^0(j; x)) + l(x^0(N; x), v) + V_{cp}(f(x^0(N; x), v)).$$

Dato che $\tilde{u}(x^+)$ è fattibile, ma non ottima, si verifica:

$$J^0(x^+, u^0(x^+)) \leq \tilde{J}(x^+, \tilde{u}(x^+)).$$

Le espressioni per il calcolo di $\tilde{J}(x^+, \tilde{u}(x^+))$ e $J^0(x, u^0(x))$ sono simili. La differenza tra i due costi vale:

$$\begin{aligned}\Delta J(x) &= \tilde{J}(x^+, \tilde{u}(x^+)) - J^0(x, u^0(x)) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{N-1} l(x^0(j; x), u^0(j; x)) + l(x^0(N; x), v) + V_{cp}(f(x^0(N; x), v)) \right) + \\ &\quad - \left(l(x^0(0; x), u^0(0; x)) + \sum_{j=1}^{N-1} l(x^0(j; x), u^0(j; x)) + V_{cp}(x^0(N; x)) \right) \\ &= l(x^0(N; x), v) + V_{cp}(f(x^0(N; x), v)) - l(x^0(0; x), u^0(0; x)) + \\ &\quad - V_{cp}(x^0(N; x)).\end{aligned}$$

Affinché risulti $\Delta J(x) \leq 0$ ci si deve assicurare che i termini che compongono $\Delta J(x)$ siano tali da far sì che risulti $\Delta J(x) \leq 0$. La quantità $-l(x^0(0; x), u^0(0; x))$ è certamente minore, o al più uguale, a 0 in quanto, per costruzione, $l(x, u)$ deve essere scelta definita positiva e tale che $l(0,0) = 0$. Rimane da verificare che:

$$V_{cp}(f(x^0(N; x), v)) - V_{cp}(x^0(N; x)) \leq -l(x^0(N; x), v).$$

Ciò che l'ultima diseguaglianza afferma è che è necessaria una funzione $V_{cp}(\cdot)$ tale per cui la differenza tra il suo valore assunto in $f(x^0(N; x), v)$ e il suo valore assunto in $x^0(N; x)$ sia minore, o al più uguale, dell'opposto del costo che occorre pagare per spostare il sistema da $x^0(N; x)$ a $f(x^0(N; x), v)$ data l'azione di controllo v . Dato che $-l(x^0(N; x), v) \leq 0$ per costruzione, allora $V_{cp}(\cdot)$ è una funzione di Lyapunov. Nella fattispecie, $V_{cp}(\cdot)$ è una *Control Lyapunov Function* (CLF).

Una CLF *globale* è una funzione che restituisce valori in punti qualsiasi dell'intero spazio di stato. Nella formulazione del problema in esame, tuttavia, si è assunta la presenza dei vincoli $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$. Data la presenza di questi vincoli, non è fattibile cercare una CLF globale dato che, a priori, non è possibile stabilire se i valori restituiti dalla stessa appartengano o meno all'iperpiano individuato dall'intersezione di tutti i vincoli. In questi casi occorre cercare una funzione $V_{cp}(\cdot)$ che sia una CLF *locale*, ovvero una CLF che restituisce valori che appartengono ad una regione \mathbb{X}_f ben definita dello spazio di stato \mathcal{X} :

$$\mathbb{X}_f \subseteq \mathcal{X}.$$

Dato che la CLF $V_{cp}(\cdot)$ è valutata solo sullo stato terminale $x(N)$, è necessario imporre che tale stato appartenga alla regione \mathbb{X}_f :

$$x(N) \in \mathbb{X}_f \subseteq \mathcal{X}.$$

Queste ultime due considerazioni formano la cosiddetta *ipotesi base di stabilità*. Stando a tale ipotesi, esiste una legge di controllo $v = \kappa_f(x) \in \mathcal{U}$ tale che:

- $f(x, \kappa_f(x)) \in \mathbb{X}_f, \forall x \in \mathbb{X}_f$. La prima condizione indica che se uno stato x è dentro la regione \mathbb{X}_f , allora anche lo stato successivo, raggiunto dal sistema applicando la legge di controllo $v = \kappa_f(x)$, è dentro la regione \mathbb{X}_f . In altre parole, la regione \mathbb{X}_f è una regione *invariante* dello spazio di stato: una volta che lo stato del sistema viene spostato al suo interno, non ne esce più. Per questo motivo, si dice che \mathbb{X}_f è un *Control Invariant Set (CIS)* (set invariante di controllo perché esiste una legge di controllo che fa sì che \mathbb{X}_f sia invariante);
- $V_{cp}(f(x, \kappa_f(x))) - V_{cp}(x) \leq -l(x, \kappa_f(x))$. La seconda condizione indica che è possibile definire una CLF locale all'interno dell'invariant set \mathbb{X}_f : valutando $V_{cp}(\cdot)$ sia in $f(x, \kappa_f(x))$ sia in x ed eseguendo la differenza tra i due valori si ottiene un numero che è minore, o al più uguale, all'opposto del costo che occorre pagare per muovere il sistema da $x(k)$ a $f(x, \kappa_f(x))$ applicando la legge di controllo $\kappa_f(x)$.

La difficoltà sta tutta nell'identificazione di quella legge di controllo $v = \kappa_f(x) \in \mathcal{U}$ che faccia sì che risultino verificate entrambe le condizioni previste dall'ipotesi base di stabilità, ovvero quella legge che faccia sì che $V_{cp}(\cdot)$ sia una CLF locale e che \mathbb{X}_f sia un CIS. Se la si riesce a trovare, allora il teorema di Lyapunov garantisce che il sistema in anello chiuso controllato per mezzo di un MPC è asintoticamente stabile.

2.2.4 Dominio di attrazione

In generale, un problema di ottimizzazione ammette soluzione quando i vincoli sul problema stesso sono rispettati. Il controllo predittivo si basa sulla risoluzione ad ogni passo di un problema di ottimizzazione. Come si fa ad essere sicuri che, ad ogni passo, il problema sia risolvibile? Bisogna garantire la proprietà di *recursive feasibility*:

- Il fatto che esista una soluzione al problema di ottimizzazione fa sì che il problema sia fattibile;
- Il fatto che esista una soluzione al problema di ottimizzazione ad ogni passo fa sì che il problema sia fattibile ricorsivamente.

Il dominio di attrazione \mathbb{X}_N è il set di tutti gli stati iniziali per i quali il problema di ottimizzazione ha soluzione. Riuscire ad identificare il dominio di attrazione, quindi, permette di identificare il set di tutti gli stati dai quali il sistema può partire e per i quali si è certi che il problema di ottimizzazione ammetta almeno una soluzione:

$$\mathbb{X}_N = \{x \in \mathcal{X} \mid x(j) \in \mathcal{X}, u(j) \in \mathcal{U}, j \in \mathbb{N}_{N-1}, x(N) \in \mathbb{X}_f\}. \quad (2.2)$$

Interpretazione: «Il dominio di attrazione \mathbb{X}_N è il set di tutti gli stati del sistema tali per cui esiste una sequenza fattibile di N azioni di controllo che riesce a spostare il sistema dallo stato iniziale $x(0)$ verso lo stato terminale $x(N)$ appartenente al terminal invariant set \mathbb{X}_f ».

2.2.5 Economic Model Predictive Control

Il controllo predittivo, come già accennato, nasce nel mondo dell’industria e, tra le caratteristiche che lo contraddistinguono, prevede la possibilità di formulare il problema di controllo come un problema di ottimizzazione in cui includere diversi obiettivi, eventualmente anche tra loro contrastanti [7]. È chiaro il motivo per cui è nata questa tipologia di controllo: massimizzare il profitto dell’industria minimizzandone le spese. Questa informazione, di natura puramente economica, è rappresentata dal punto di equilibrio (x_{ref}, u_{ref}) verso il quale si vuole che il sistema sotto controllo converga. In generale, i sistemi si trovano ad elaborare in condizioni diverse da quelle specificate dalla coppia (x_{ref}, u_{ref}) , dunque vi devono essere condotti. Per affrontare questa tipologia di problemi è nata una formulazione economica del controllo predittivo denominata *Economic Model Predictive Control* (EMPC). Per capire più da vicino il contesto in cui si colloca il controllo predittivo economico bisogna fare riferimento alla tipologia di problema che si è affrontato nei paragrafi precedenti con lo sviluppo del tradizionale controllo predittivo: la regolazione all’origine. La regolazione all’origine prevede lo sviluppo di un controllore che riesca a condurre asintoticamente il sistema sotto controllo dalla sua condizione iniziale verso l’origine dello spazio di stato. Gli unici parametri di progetto contemplati fino ad ora sono stati l’orizzonte di predizione N e le matrici di predizione Q ed R . In particolare, la scelta di Q ed R influenza la velocità di convergenza del sistema:

- Se $Q \gg R$, il sistema arriva «velocemente» al setpoint, ma a fronte di una spesa di controllo elevata derivante da una azione di controllo aggressiva;
- Se $Q \ll R$, il sistema arriva «lentamente» al setpoint, ma a fronte di una spesa di controllo contenuta derivante da una azione di controllo cauta.

Nei paragrafi precedenti, dunque, si è contemplato il solo obiettivo della regolazione all’origine trascurando totalmente il comportamento del sistema durante il transitorio. Il controllo predittivo economico si pone come ulteriore obiettivo quello di pesare il comportamento del sistema durante il transitorio, a prescindere dalla sua velocità di convergenza. Lo scopo di ciò è fare in modo che il sistema non solo raggiunga il punto economicamente ottimo, ma anche che il processo che gli permette di raggiungerlo sia economicamente ottimo.

Formulazione del problema

Si consideri il seguente sistema discreto, sia esso lineare o non lineare:

$$\begin{cases} x(k+1) &= f(x(k), u(k)) \\ y(k) &= h(x(k), u(k)) \end{cases}$$

Ipotesi:

- ✓ $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$
- ✓ Stato e ingresso vincolati: $x(k) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$
- ✓ \mathcal{X} e \mathcal{U} compatti contenenti l'origine
- ✓ $f(x(k), u(k))$ differenziabile rispetto ai propri argomenti
- ✓ $f(0,0) = 0$
- ✓ Stato completamente accessibile

Problema di ottimizzazione

$$\begin{aligned} J^0(x(k)) &= \min_{u(\cdot)} J(x(k); u(\cdot)) = \min_{u(\cdot)} \left(\sum_{j=0}^{N-1} l_{eco}(x(j), u(j)) \right) \\ x(0) &= x(k) \\ x(j+1) &= f(x(j), u(j)) \\ x(j) &\in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \\ u(j) &\in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \\ x(N) &= x_{ref} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Peculiarità del problema di ottimizzazione:

- La funzione $l_{eco}(x, u)$ usata per il calcolo dello stage cost è il criterio di ottimalità economica; è una funzione dalla struttura analitica non nota. Naturalmente:

$$(x_{ref}, u_{ref}) = \arg \min_{(x,u)} l_{eco}(x, u);$$

- Vi è il vincolo terminale di uguaglianza $x(N) = x_{ref}$. Questo impone al **EMPC** che deve controllare il sistema per condurlo verso un esatto punto x_{ref} del **CIS** \mathbb{X}_f e non verso un qualunque punto al suo interno. Si può dire che il **CIS** \mathbb{X}_f sia costituito dal solo punto x_{ref} : $\mathbb{X}_f = \{x_{ref}\}$.

Nel contesto del EMPC vi è un importante problema a cui bisogna porre rimedio: la funzione per il calcolo dello stage cost deve essere scelta continua a definita positiva affinché il teorema di Lyapunov garantisca che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile. Per come è stato impostato il problema di ottimizzazione 2.3, $l_{eco}(x, u)$ è una funzione senza una struttura definita. Il fatto che $l_{eco}(x, u)$ possa non essere definita positiva implica la possibilità che si verifichi:

$$l_{eco}(x_{ref}, u_{ref}) > l_{eco}(x, u),$$

ovvero che il costo generato in corrispondenza del punto economicamente ottimo (x_{ref}, u_{ref}) sia maggiore del costo generato da un qualunque altro punto presente nella traiettoria seguita dal sistema durante il transitorio. La conseguenza è che, nel dimostrare la stabilità del sistema in anello chiuso usando il teorema di Lyapunov, non è possibile dimostrare la decrescita monotona del costo, nonché la seconda proprietà che una funzione deve rispettare affinché possa essere considerata una funzione di Lyapunov. Per risolvere questo problema si ricorre al concetto di *dissipatività*.

Definizione: dissipatività

Un sistema $f(x, u)$ è *dissipativo* rispetto ad un supply rate

$$s(x, u) : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

se esiste una funzione $\lambda(x) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$\lambda(f(x, u)) \leq \lambda(x) + s(x, u), \forall (x, u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}.$$

Inoltre, se esiste una funzione definita positiva $\rho(x) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ e tale che:

$$\lambda(f(x, u)) - \lambda(x) \leq -\rho(x) + s(x, u), \forall (x, u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U},$$

allora il sistema è *strettamente dissipativo*.

La chiave di lettura prevede che alla funzione $\lambda(x)$ si associa l'energia posseduta dal sistema e al supply rate $s(x, u)$ l'energia che gli viene somministrata: un sistema è dissipativo se, dati il suo stato di energia al passo k , ovvero $\lambda(x)$, e il quantitativo di energia somministratagli al medesimo passo k , ovvero $s(x, u)$, il suo stato di energia al passo successivo, ovvero $\lambda(f(x, u))$, è più basso.

Scegliendo $s(x, u) = l_{eco}(x, u) - l_{eco}(x_{ref}, u_{ref})$:

$$\begin{aligned}\lambda(f(x, u)) &\leq \lambda(x) + s(x, u), \\ \lambda(f(x, u)) &\leq \lambda(x) + l_{eco}(x, u) - l_{eco}(x_{ref}, u_{ref}), \\ l_{eco}(x_{ref}, u_{ref}) &\leq \lambda(x) + l_{eco}(x, u) - \lambda(f(x, u)).\end{aligned}$$

Definendo il *costo rotato* come:

$$L(x, u) = \lambda(x) + l_{eco}(x, u) - \lambda(f(x, u)),$$

si ottiene:

$$L(x, u) \geq l_{eco}(x_{ref}, u_{ref}) = L(x_{ref}, u_{ref}).$$

Infatti:

$$\begin{aligned}L(x_{ref}, u_{ref}) &= \lambda(x_{ref}) + l_{eco}(x_{ref}, u_{ref}) - \lambda(f(x_{ref}, u_{ref})) \\ &= \lambda(x_{ref}) + l_{eco}(x_{ref}, u_{ref}) - \lambda(x_{ref}) \\ &= l_{eco}(x_{ref}, u_{ref}).\end{aligned}$$

Il costo rotato, dunque, è una funzione definita positiva. Sfruttando il costo rotato ha senso definire una *funzione di costo ausiliaria*:

$$V(x(k); u(\cdot)) = \sum_{j=0}^{N-1} L(x(j), u(j)).$$

Avendo definito una funzione di costo per la quale il teorema di Lyapunov è rispettato, ha senso elaborare un nuovo problema di ottimizzazione che, per distinguerlo da 2.3, anche detto «originario», è chiamato «ausiliario»:

Problema di ottimizzazione

$$\begin{aligned}V^0(x(k)) &= \min_{u(\cdot)} V(x(k); u(\cdot)) = \min_{u(\cdot)} \left(\sum_{j=0}^{N-1} L(x(j), u(j)) \right) \\ x(0) &= x(k) \\ x(j+1) &= f(x(j), u(j)) \\ x(j) &\in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \\ u(j) &\in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \\ x(N) &= x_{ref}\end{aligned}\tag{2.4}$$

Rispetto al problema originario 2.3, quello ausiliario 2.4 presenta lo stesso set di vincoli, ma una funzione di costo differente. La differenza tra le due consiste nel fatto che $J(x(k), u(\cdot))$ è una funzione di costo basata su una funzione per il calcolo dello stage cost senza una struttura ben definita, ovvero $l_{eco}(x, u)$, mentre $V(x(k), u(\cdot))$ è una funzione di costo basata su una funzione per il calcolo dello stage cost che è definita positiva, ovvero $L(x, u)$. In generale, se cambia la funzione di costo rispetto alla quale ottimizzare cambia radicalmente il problema di ottimizzazione da risolvere. In questo caso, però, è possibile dimostrare che il problema originario e quello ausiliario producono la stessa soluzione ottima. La dimostrazione prevede che si studi la funzione di costo del problema ausiliario:

$$\begin{aligned}
V(x(k); u(\cdot)) &= \sum_{j=0}^{N-1} L(x(j), u(j)) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} (\lambda(x(j)) + l_{eco}(x(j), u(j)) - \lambda(f(x(j), u(j)))) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} (\lambda(x(j)) + l_{eco}(x(j), u(j)) - \lambda(x(j+1))) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} (\lambda(x(j)) - \lambda(x(j+1)) + l_{eco}(x(j), u(j))) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \lambda(x(j)) - \sum_{j=0}^{N-1} \lambda(x(j+1)) + \sum_{j=0}^{N-1} l_{eco}(x(j), u(j)) \\
&= \lambda(x(0)) - \lambda(x(N)) + \sum_{j=0}^{N-1} l_{eco}(x(j), u(j)) \\
&= \lambda(x(0)) - \lambda(x_{ref}) + J(x(k); u(\cdot)).
\end{aligned}$$

È possibile concludere che i due problemi di ottimizzazione presentano le stesse soluzioni ottime in quanto:

- La differenza tra il costo ausiliario $V(x(k); u(\cdot))$ e quello originario $J(x(k); u(\cdot))$ è data da una costante;
- I due problemi di ottimizzazione 2.3 e 2.4 sono soggetti agli stessi vincoli.

Avendo trovato una funzione definita positiva, la dimostrazione di stabilità in anello chiuso del sistema controllato per mezzo di un EMPC segue di pari passo quella esposta nella Sezione 2.2.3.

2.2.6 Offset-free Model Predictive Control

Se il modello elaborato per la descrizione del sistema sotto controllo è talmente preciso da riuscire a descriverlo nella sua totalità, allora, tramite una strategia di controllo predittivo, è possibile fare in modo che il sistema in anello chiuso inseguia qualsiasi setpoint, purché quest'ultimo sia raggiungibile. La situazione si complica se sul sistema agiscono dei disturbi. In generale, i disturbi sono input indesiderati provenienti dall'ambiente esterno che ne deviano il comportamento desiderato, come già evidenziato nel Paragrafo 1.2. In questi casi la strategia di controllo predittivo precedentemente esposta nelle Sezioni 2.2.2 e 2.2.3 deve essere rivista affinché il sistema sotto controllo possa essere condotto correttamente al setpoint. Per poter muovere sistemi dalla condizione iniziale verso un setpoint nel momento in cui su di essi agiscono dei disturbi, occorre implementare la formulazione del controllo predittivo denominata *Offset-free Model Predictive Control* (OMPC). In letteratura ne esistono diverse formulazioni [16] [17]. Per preparare il terreno ai capitoli successivi, nel proseguo di questo paragrafo si illustrerà il funzionamento della variante che prevede l'estensione del modello mediante l'introduzione di un'azione integrale.

Formulazione del problema

Si consideri il seguente sistema lineare discreto:

$$\begin{cases} x(k+1) &= \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k) + w(k) \\ y(k) &= \tilde{C}x(k) + v(k) \end{cases} \quad (2.5)$$

Ipotesi:

- ✓ $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$
- ✓ Stato e ingresso vincolati: $x(k) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$
- ✓ \mathcal{X} e \mathcal{U} compatti contenenti l'origine
- ✓ $w(k) \in \mathbb{W} \subset \mathbb{R}^n$ è il disturbo agente sullo stato
- ✓ $v(k) \in \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^p$ è il disturbo agente sull'uscita
- ✓ Stato completamente accessibile
- ✓ Come dimostrato in [18]:

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} \tilde{A} - I_n & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} \right) = n + p$$

- ✓ (\tilde{A}, \tilde{B}) raggiungibile

Definizione: raggiungibilità [1]

Uno stato \tilde{x} del sistema 2.5 si dice *raggiungibile* se esistono un istante di tempo finito $\tilde{k} > 0$ e un ingresso \tilde{u} , definito tra 0 e $\tilde{k} - 1$ tali che, detto $\tilde{x}_f(k), 0 \leq k \leq \tilde{k}$, il movimento forzato dello stato generato da \tilde{u} , risulti $\tilde{x}_f(\tilde{k}) = \tilde{x}$. Un sistema i cui stati sono tutti raggiungibili si dice *completamente raggiungibile*.

Teorema: completa raggiungibilità di un sistema [1]

Il sistema 2.5 è completamente raggiungibile, ovvero la coppia (\tilde{A}, \tilde{B}) è completamente raggiungibile, se e solo se il rango della matrice di raggiungibilità M_r è pari a n .

$$M_r = \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \tilde{A}^2\tilde{B} & \dots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times mn}$$

- ✓ (\tilde{A}, \tilde{C}) osservabile

Definizione: osservabilità [1]

Uno stato $\tilde{x} \neq 0$ del sistema 2.5 si dice *non osservabile* se, qualunque sia $\tilde{k} > 0$ finito, detto $\tilde{y}_l(k), k \geq 0$, il movimento libero dell'uscita generato da \tilde{x} , risulta $\tilde{y}_l(k) = 0, 0 \leq k \leq \tilde{k}$. Un sistema privo di stati non osservabili si dice *completamente osservabile*.

Teorema: completa osservabilità di un sistema [1]

Il sistema 2.5 è completamente osservabile, ovvero la coppia (\tilde{A}, \tilde{C}) è completamente osservabile, se e solo se il rango della matrice di osservabilità M_o è pari a n .

$$M_o = \begin{bmatrix} \tilde{C}^T & \tilde{A}^T\tilde{C}^T & \tilde{A}^{T^2}\tilde{C}^T & \dots & \tilde{A}^{T^{n-1}}\tilde{C}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times pn}$$

Il problema di ottimizzazione che viene risolto ad ogni passo k è:

Problema di ottimizzazione

$$\begin{aligned}
 J^0(x(k)) &= \min_{u(\cdot)} J(x(k); u(\cdot)) = \min_{u(\cdot)} \sum_{j=0}^{N-1} l(e(j), \delta u(j)) + V_f(x(N)) \\
 x(0) &= x(k) \\
 x(j+1) &= \tilde{A}x(j) + \tilde{B}u(j) + d_x \\
 x(j) &\in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \\
 u(j) &\in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \\
 y(j) &= \tilde{C}x(j) + d_y \\
 y(j) &\in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p \\
 x(N) &= x_{ref}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Peculiarità del problema di ottimizzazione:

- $e(j) = y(j) - y_{ref}$ è l'errore calcolato durante il tracking;
- $\delta u(j) = u(j) - u(j-1)$ è la variazione sull'azione di controllo;
- $l(e(j), \delta u(j)) = \|e(j)\|_Q^2 + \|\delta u(j)\|_R^2$ è la funzione usata per il calcolo dello stage cost;
- $V_f(x(N)) = \|x(N) - x_{ref}\|_P^2$ è la funzione usata per quantificare il costo da pagare per mantenere il sistema nello stato terminale $x(N)$;
- $d_x \in \mathbb{R}^n$ è il disturbo sulla predizione dello stato;
- $d_y \in \mathbb{R}^p$ è il disturbo sulla predizione dell'uscita.

Estensione del modello mediante l'introduzione di un'azione integrale

Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{cases} x(k+1) &= \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k) + \tilde{B}_d d(k) \\ d(k+1) &= d(k) \\ y(k) &= \tilde{C}x(k) + \tilde{C}_d d(k) \end{cases} \quad (2.7)$$

$$d(k) \in \mathbb{R}^{n_d} \quad \tilde{B}_d \in \mathbb{R}^{n \times n_d} \quad \tilde{C}_d \in \mathbb{R}^{p \times n_d}$$

La strategia risolutiva prevede che si riscriva il sistema 2.7 come:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \Psi(k+1) &= \tilde{A}_a \xi(k) + \tilde{B}_a u(k) \\ y(k) &= \tilde{C}_a \Psi(k) \end{cases} \\ \tilde{A}_a = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}_d \\ 0 & I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+n_d) \times (n+n_d)} \quad \tilde{B}_a = \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+n_d) \times m} \\ \tilde{C}_a = \begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{C}_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times (n+n_d)} \quad \Psi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ d(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+n_d} \quad y(k) \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

La coppia $(\tilde{A}_a, \tilde{C}_a)$ è osservabile se e solo se [18]:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \tilde{A} - I_n & \tilde{B}_d \\ \tilde{C} & \tilde{C}_d \end{bmatrix} = n + n_d. \quad (2.8)$$

(2.8) è verificata se e solo se $n_d \leq p$. Assumendo di disporre di $(\tilde{B}_d, \tilde{C}_d)$ che la soddisfano, allora è possibile progettare un osservatore caratterizzato da:

$$\begin{cases} \Psi(k) &= \tilde{A}_a \Psi(k-1) + \tilde{B}_a u(k-1) + K_a(y(k) - y^*(k)) \\ y^*(k) &= \tilde{C}_a(\tilde{A}_a \Psi(k-1) + \tilde{B}_a u(k-1)) \end{cases},$$

dove K_a è la matrice dei guadagni per stato e disturbo

$$K_a = \begin{bmatrix} K_x \\ K_d \end{bmatrix}.$$

La tecnica OMPC esposta in questo paragrafo si basa sulla risoluzione del problema di ottimizzazione 2.6 imponendo le seguenti trasformazioni:

$$d_x = \tilde{B}_d d(k) \quad d_y = \tilde{C}_d d(k)$$

2.2.7 Model Predictive Control for Tracking

Il presente capitolo trova spunto dal lavoro svolto in [12].

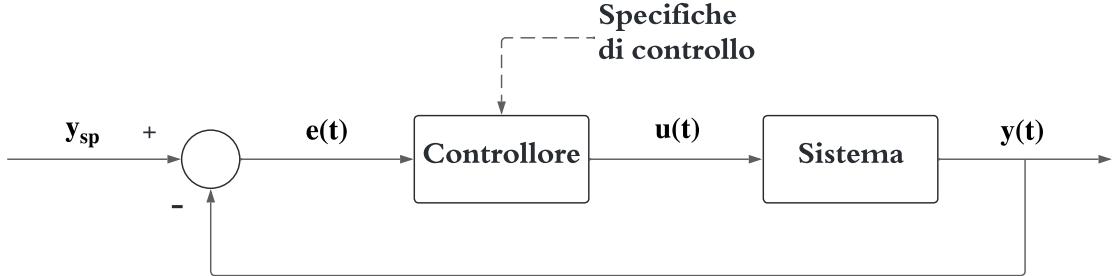


Figura 2.D: Sistema di controllo in anello chiuso.

L'obiettivo dei problemi di controllo è quello di azzerare l'errore di tracking $e(t)$ commesso dal sistema nel rispetto sia della dinamica imposta dal sistema stesso sia dei vincoli imposti su stato e/o ingresso. Idealmente, quindi, stando a quanto rappresentato in Figura 2.D, si vorrebbe che:

$$e(t) = |y_{sp} - y(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Ai fini della presente trattazione, si considerino i due possibili scenari:

- Setpoint y_{sp} costante;
- Setpoint y_{sp} tempo variante.

Tutta la precedente trattazione è incentrata sull'analisi del caso in cui il setpoint, una volta fissato, non cambi mai durante l'arco di funzionamento del sistema sotto controllo. Tipicamente questa situazione si verifica nel contesto dei processi industriali, ovvero in quei casi in cui si dispone di sistemi progettati appositamente per operare in determinate condizioni. Tali condizioni sono quelle che permettono all'industria di massimizzare il profitto minimizzando i costi, come riportato nella Sezione 2.2.5. Nella realtà, tuttavia, il setpoint da dover far raggiungere ad un sistema può variare durante il funzionamento del sistema stesso per una moltitudine di ragioni. In tal caso, uno schema classico di controllo predittivo può non garantire più la stabilità del sistema in anello chiuso e, inoltre, potrebbe venire meno la proprietà di recursive feasibility. Bisogna dunque disporre di una strategia di controllo che, anche nel caso in cui il setpoint cambi, permetta di preservare sia l'asintotica stabilità del sistema in anello chiuso sia la proprietà di recursive feasibility del problema di ottimizzazione. In questi casi si ricorre alla formulazione del controllo predittivo denominata *Model Predictive Control for Tracking* (MPCT).

Formulazione del problema

Si consideri il seguente sistema lineare discreto:

$$\begin{cases} x(k+1) &= \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k) \\ y(k) &= \tilde{C}x(k) + \tilde{D}u(k) \end{cases} \quad (2.9)$$

Ipotesi:

✓ $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$

✓ Stato e ingresso vincolati:

$$(x(k), u(k)) \in \mathcal{Z}, \forall k \geq 0$$

$\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ è un politopo non vuoto tale per cui l'origine degli assi è contenuto al suo interno

✓ Stato completamente accessibile

✓ (\tilde{A}, \tilde{B}) raggiungibile [1]

Nei problemi di setpoint tracking l'obiettivo di controllo che il controllore deve soddisfare è quello di guidare il sistema verso il punto di equilibrio (x_{sp}, u_{sp}) in corrispondenza del quale vi è il setpoint y_{sp} . Il problema considerato, dunque, è il design di un controllore MPC

$$u(k) = \kappa_N(x(k), y_{sp})$$

tale per cui il sistema

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k) \\ &= \tilde{A}x(k) + \tilde{B}\kappa_N(x(k), y_{sp}) \end{aligned}$$

risulta stabile e l'errore di tracking tende a 0:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_{sp} - y(k)\| = 0.$$

Set degli stati raggiungibili

Sia il punto di equilibrio (x_{sp}, u_{sp}) sia il setpoint y_{sp} devono soddisfare sia la dinamica imposta dal modello sia i vincoli presenti su stato e/o ingresso [12]:

- **Presenza di vincoli su stato e/o ingresso.** I vincoli a cui il sistema deve sottostare limitano l'ampiezza del set di punti raggiungibili dal sistema stesso. In particolare, fissato il setpoint y_{sp} , il corrispondente punto di equilibrio (x_{sp}, u_{sp}) deve soddisfare

$$(x_{sp}, u_{sp}) \in \mathcal{Z}; \quad (2.10)$$

- **Dinamica del modello.** Ci si potrebbe chiedere se, fissato il setpoint y_{sp} , è certo che esista il corrispondente punto di equilibrio (x_{sp}, u_{sp}) . Il punto di equilibrio (x_{sp}, u_{sp}) è tale se soddisfa il sistema 2.9:

$$\begin{cases} x_{sp} = \tilde{A}x_{sp} + \tilde{B}u_{sp} \\ y_{sp} = \tilde{C}x_{sp} + \tilde{D}u_{sp} \end{cases} \quad (2.11)$$

Tale punto esiste se e solo se [18]:

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} (\tilde{A} - I_n) & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} \right) = n + p. \quad (2.12)$$

La condizione è verificata se il numero degli input è maggiore, o al più uguale, rispetto al numero degli output, ovvero se $m \geq p$. Se la condizione non è verificata, il controllore può far raggiungere al sistema solo un ristretto numero di setpoint. Riprendendo il sistema 2.11, la coppia (x_{sp}, u_{sp}) è un punto di equilibrio se e solo se:

$$\begin{bmatrix} (\tilde{A} - I_n) & \tilde{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{sp} \\ u_{sp} \end{bmatrix} = 0.$$

Lo spazio nullo di una matrice è composto da tutti quei vettori che, se moltiplicati per la matrice, restituiscono il vettore nullo. Questa condizione implica che la coppia (x_{sp}, u_{sp}) debba essere contenuta nello spazio nullo della matrice

$$\begin{bmatrix} (\tilde{A} - I_n) & \tilde{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}.$$

Dato che si è assunto che (\tilde{A}, \tilde{B}) sia raggiungibile, allora, in accordo con quanto riportato nella Sezione 2.2.6:

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} (\tilde{A} - I_n) & \tilde{B} \end{bmatrix} \right) = n.$$

Dalle proprietà dell’algebra lineare è noto che la dimensione dello spazio nullo di una matrice è uguale al numero delle sue colonne meno il suo rango. Da questa proprietà si deduce che lo spazio nullo ha dimensione m . Lo spazio nullo è dunque il sottospazio generato dalle colonne di una matrice $M_z \in \mathbb{R}^{(n+m) \times m}$ tale per cui:

$$\begin{bmatrix} (\tilde{A} - I_n) & \tilde{B} \end{bmatrix} M_z = 0.$$

Gli output sono ricavabili per mezzo della seguente trasformazione:

$$M_y = \begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} M_z \in \mathbb{R}^{p \times m}.$$

Sulla base del numero di input e output si possono individuare i seguenti casi:

- Se $m = p$ e (2.12) è verificata, allora il controllore può guidare il sistema verso qualunque setpoint y_{sp} . Inoltre, si è certi che per il setpoint y_{sp} esiste un unico punto di equilibrio (x_{sp}, u_{sp}) ;
- Se $m > p$ e (2.12) è verificata, allora il controllore può guidare il sistema verso qualunque setpoint y_{sp} . In questo caso, dato il setpoint y_{sp} , esistono infiniti punti di equilibrio (x_{sp}, u_{sp}) ;
- Se $m < p$ o se (2.12) non è verificata, allora il controllore può guidare il sistema solo verso quei setpoint che fanno parte del sottospazio lineare individuato dalla matrice M_y .

Se entrambe le condizioni sono soddisfatte, allora il setpoint è raggiungibile e il sistema può esservi condotto. Se almeno una delle due condizioni non è soddisfatta, allora il setpoint non è raggiungibile e il problema di controllo fallisce. Ciò che succede è che non è possibile per il controllore guidare il sistema verso il setpoint nel rispetto dei vincoli.

Mettendo insieme le conclusioni a cui si è giunti, il set dei setpoint che soddisfano sia la dinamica del modello sia i vincoli a cui il sistema è soggetto è:

$$\mathcal{Y}_{ref} = \{y_{sp} \mid x_{sp} = \tilde{A}x_{sp} + \tilde{B}u_{sp} \wedge y_{sp} = \tilde{C}x_{sp} + \tilde{D}u_{sp} \wedge (x_{sp}, u_{sp}) \in \mathcal{Z}\}.$$

Dato che \mathcal{Z} è un politopo e i vincoli sono lineari, allora anche \mathcal{Y}_{ref} è un politopo. \mathcal{Y}_{ref} è il set di tutti i punti raggiungibili dal sistema 2.11 soggetto ai vincoli 2.10:

- Se $y_{sp} \in \mathcal{Y}_{ref}$, ovvero se il setpoint y_{sp} è raggiungibile, allora si è certi che esista una legge di controllo che possa guidare il sistema verso quel punto;
- Se $y_{sp} \notin \mathcal{Y}_{ref}$, ovvero se il setpoint y_{sp} non è raggiungibile, allora si è certi che non esista una legge di controllo che possa guidare il sistema verso quel punto nel rispetto di tutti i vincoli imposti. In tal caso, occorre elaborare un'altra strategia di controllo.

La presenza di vincoli può portare ad una perdita di controllabilità del sistema. Alcuni setpoint y_{sp} , infatti, pur essendo raggiungibili, sono tali da far sì che il sistema, una volta che vi viene condotto, non si possa più muovere. Per risolvere questo problema tipicamente si tende a rimuovere dal set \mathcal{Y}_{ref} tali punti. Si fornisce dunque una nuova definizione del set \mathcal{Y}_{ref} che tiene da conto di questo fatto:

$$\mathcal{Y}_{ref} = \{y_{sp} \mid x_{sp} = \tilde{A}x_{sp} + \tilde{B}u_{sp} \wedge y_{sp} = \tilde{C}x_{sp} + \tilde{D}u_{sp} \wedge (x_{sp}, u_{sp}) \in \lambda\mathcal{Z}\},$$

in cui:

$$\lambda \in [0, 1)$$

è un scalare arbitrariamente vicino a 1.

Ne segue che:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{ref} &= \{x_{sp} \mid x_{sp} = \tilde{A}x_{sp} + \tilde{B}u_{sp} \wedge (x_{sp}, u_{sp}) \in \lambda\mathcal{Z}\}, \\ \mathcal{U}_{ref} &= \{u_{sp} \mid x_{sp} = \tilde{A}x_{sp} + \tilde{B}u_{sp} \wedge (x_{sp}, u_{sp}) \in \lambda\mathcal{Z}\}, \\ \mathcal{Z}_{ref} &= \{(x_{sp}, u_{sp}) \mid x_{sp} = \tilde{A}x_{sp} + \tilde{B}u_{sp} \wedge (x_{sp}, u_{sp}) \in \lambda\mathcal{Z}\}. \end{aligned}$$

Variabili artificiali

Come già anticipato nella Sezione 2.2.7, durante la fase di funzionamento di un sistema in anello chiuso è possibile che il setpoint verso cui debba essere condotto possa cambiare. Questo può portare a problemi di stabilità. La strategia che consente di oltrepassare tale problematica verrà illustrata sfruttando un esempio [12].

Si consideri il seguente sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sono presenti i seguenti vincoli su stato e ingresso:

$$\|x\|_\infty \leq 5, \quad \|u\|_\infty \leq 0.5.$$

Il problema di ottimizzazione è caratterizzato da:

$$Q = I_2, \quad R = I_2, \quad N = 3, \quad x(0) = (0.6, 2.3), \quad x(N) = x_{sp}.$$

La Figura 2.E mostra il setup per il proseguo della trattazione:

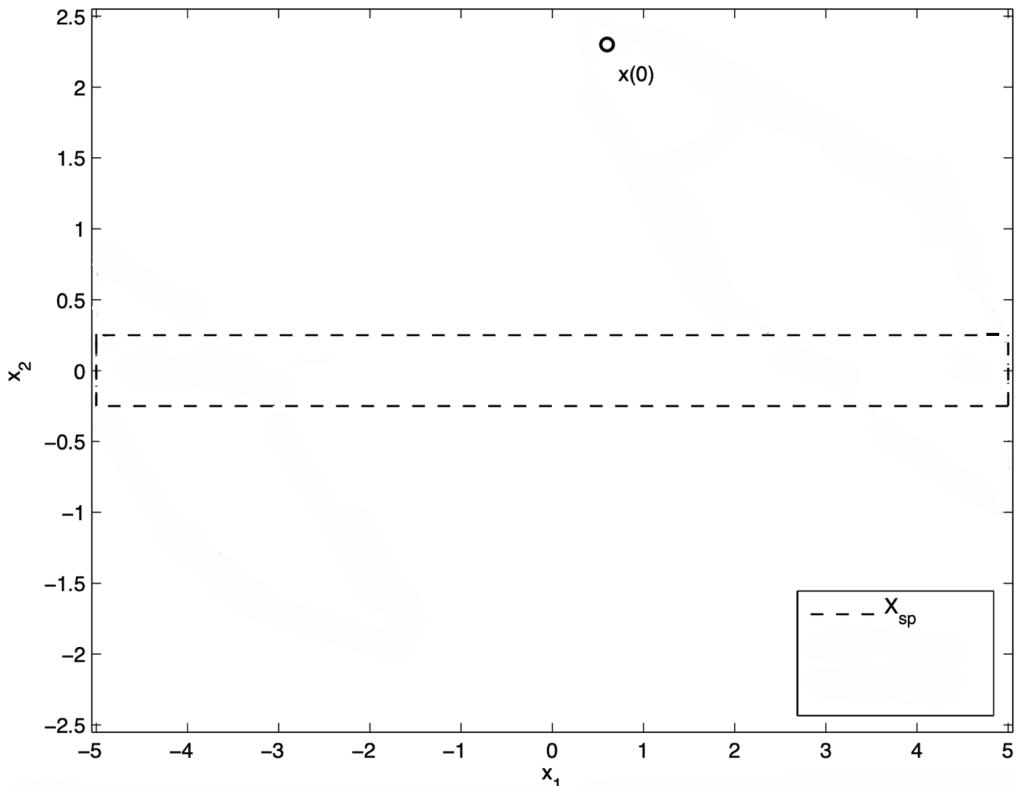


Figura 2.E: Set degli stati raggiungibili \mathcal{X}_{ref} .

Si supponga che il sistema debba essere condotto dalla condizione iniziale $x(0)$ al setpoint $x_{sp1} = (4.9, 0.245)$. La Figura 2.F mostra il contesto di riferimento:

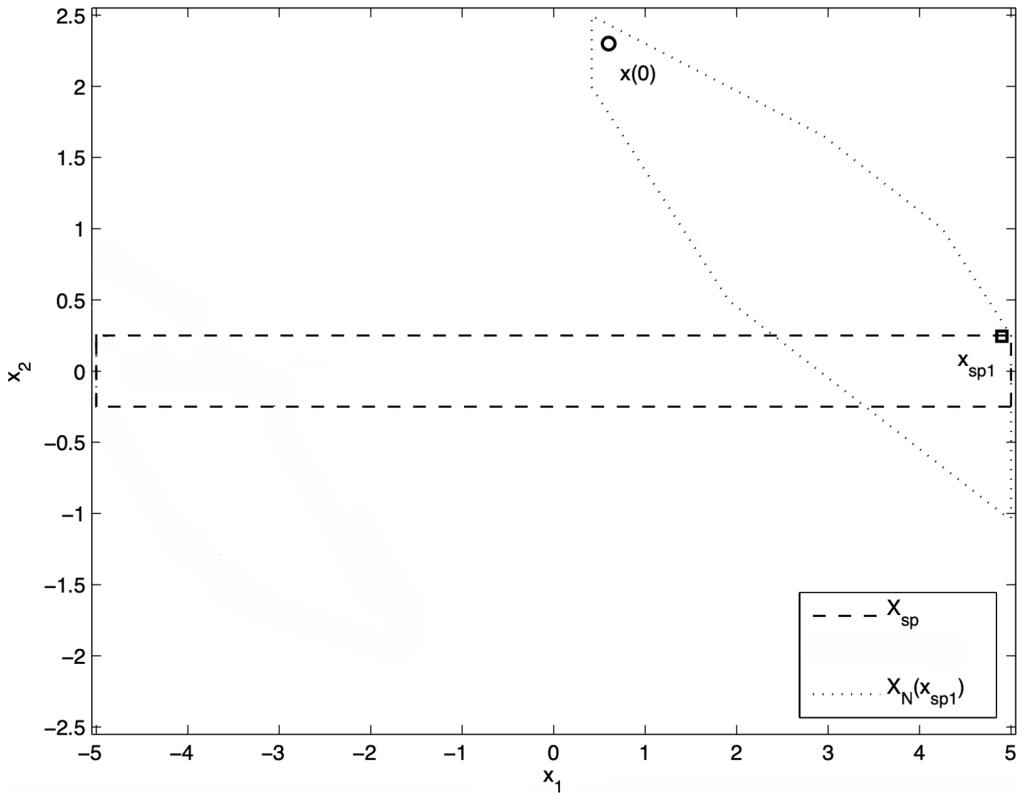


Figura 2.F: Dominio di attrazione $\mathbb{X}_N(x_{sp1})$.

Il vincolo terminale di uguaglianza definito per il problema di ottimizzazione, in questo caso, diventa: $x(N) = x_{sp1}$. Dato che $x(0) \in \mathbb{X}_N(x_{sp1})$, allora il controllore MPC è in grado di guidare il sistema da $x(0)$ a x_{sp1} asintoticamente.

Si supponga ora che, partendo dalla condizione iniziale $x(0)$, il sistema debba essere guidato verso il setpoint $x_{sp2} = (-4.9, 0.2)$ anziché verso $x_{sp1} = (4.9, 0.245)$. La Figura 2.G mostra il contesto di riferimento:

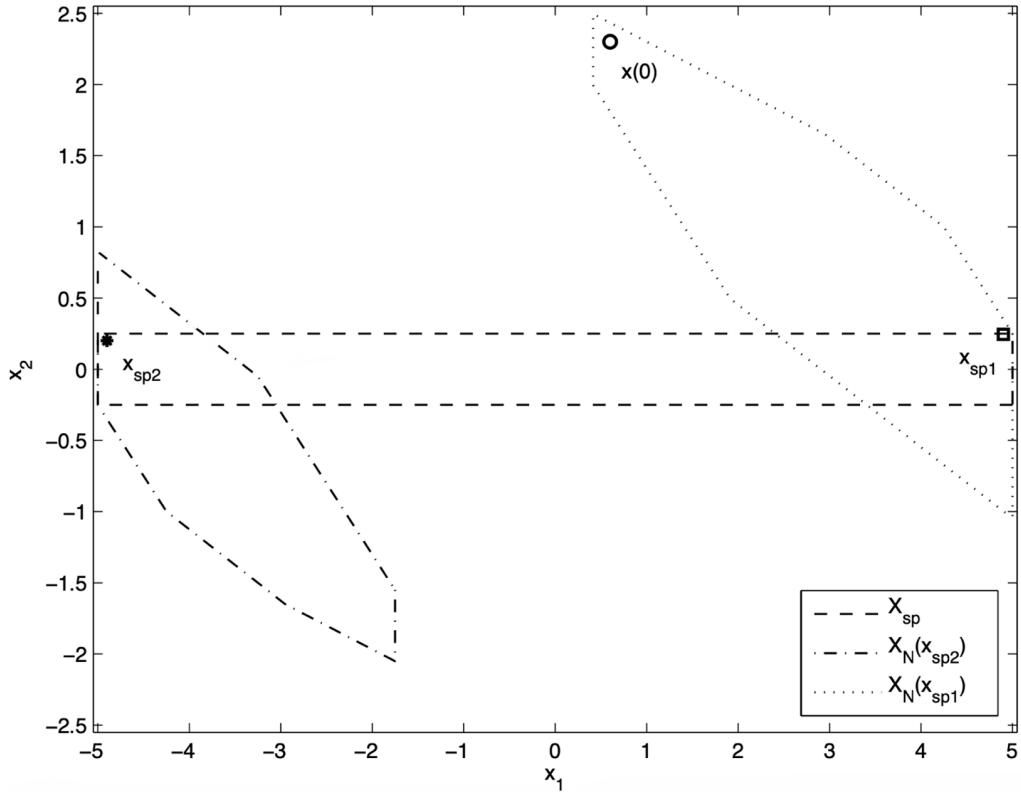


Figura 2.G: Domini di attrazione $\mathbb{X}_N(x_{sp1})$ e $\mathbb{X}_N(x_{sp2})$.

Il vincolo terminale di uguaglianza definito per il problema di ottimizzazione, in questo caso, diventa: $x(N) = x_{sp2}$. Dato che $x(0) \notin \mathbb{X}_N(x_{sp2})$, allora il controllore MPC non è in grado di guidare il sistema da $x(0)$ a x_{sp2} asintoticamente. In altre parole, la presenza del vincolo $x(N) = x_{sp2}$ determina la caduta della proprietà di recursive feasibility del problema di ottimizzazione. Ciò che succede è che il sistema non può essere condotto verso il setpoint x_{sp2} in solamente $N = 3$ passi nel rispetto di tutti i vincoli a cui deve sottostare il sistema.

La recursive feasibility può essere ristabilita se si decide di adottare una strategia più conservativa: anziché imporre al controllore di guidare il sistema dalla condizione iniziale $x(0)$ al setpoint x_{sp2} in $N = 3$ passi, si può rilassare il vincolo $x(N) = x_{sp2}$ forzandolo a $x(N) = x_a$, dove x_a è un setpoint *artificiale*. Il setpoint artificiale è una nuova variabile di ottimizzazione caratterizzata dal fatto che è sempre un punto raggiungibile partendo dalla condizione iniziale $x(0)$. In altre parole:

$$x_a \in \mathcal{X}_{ref}, \forall k \geq 0.$$

L'utilizzo del setpoint artificiale x_a permette di ristabilire la proprietà di recursive feasibility, ma non assicura che il sistema in anello chiuso converga al vero setpoint x_{sp2} . Per fare in modo che il sistema converga al vero setpoint bisogna modificare il problema di ottimizzazione specificando che il setpoint artificiale debba inseguire quello reale. Nella fattispecie, ciò che bisogna fare è aggiungere alla funzione di costo un termine che penalizza la distanza tra i due. Ci si riferisce a questo termine con la notazione $V_O(x_a|x_{sp2})$.

La Figura 2.H mostra il contesto di riferimento:

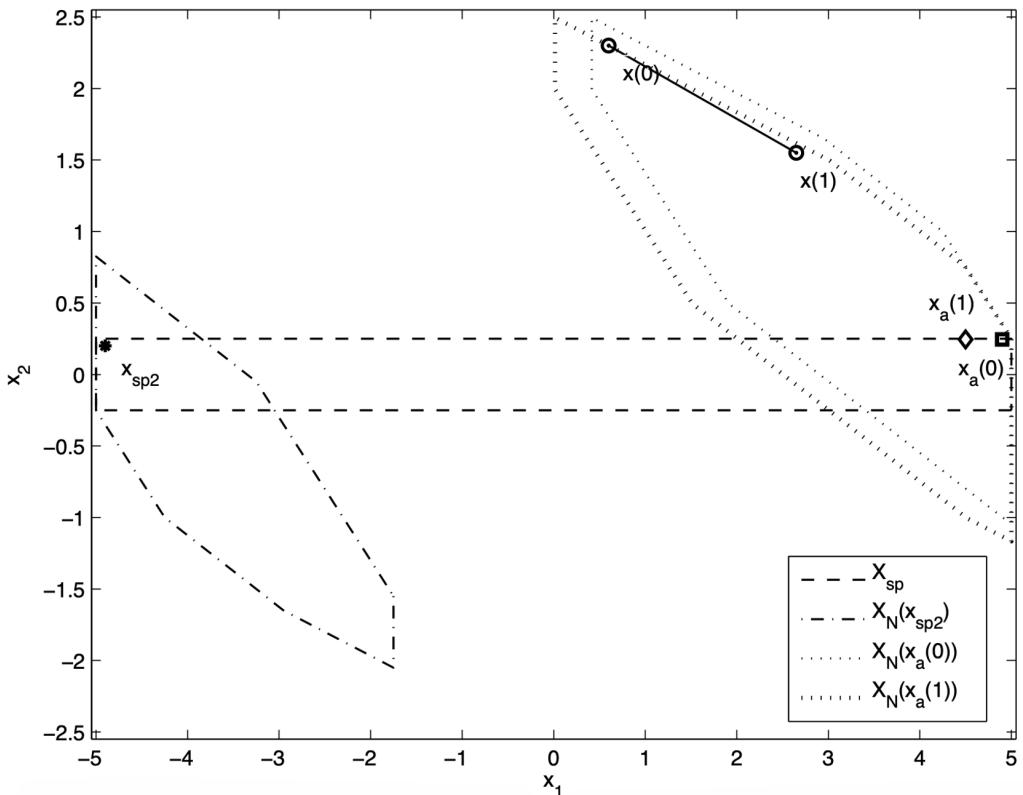


Figura 2.H: Domini di attrazione $\mathbb{X}_N(x_a(0))$, $\mathbb{X}_N(x_a(1))$ e $\mathbb{X}_N(x_{sp2})$.

Al passo $k = 0$ viene calcolata la sequenza ottima di azioni di controllo in funzione del setpoint artificiale $x_a(0) = x_{sp1}$. In accordo con quanto stabilito dal RHP, viene applicata solo la prima delle azioni contenute nella sequenza. Il sistema si sposta così dalla condizione iniziale $x(0)$ al nuovo stato $x(1) = (2.65, 1.55)$, il quale diventa la nuova condizione iniziale per il problema di ottimizzazione da risolvere al passo successivo. Al passo $k = 1$ viene calcolata la sequenza ottima di azioni di controllo in funzione del setpoint artificiale $x_a(1) = (4.5, 0.245)$. In virtù del fatto che la funzione di costo consta di un termine che penalizza la distanza dal setpoint reale x_{sp2} , $x_a(1)$ è diverso da $x_a(0)$ ed è più vicino a quello reale rispetto a $x_a(0)$.

MPCT con vincolo terminale di uguaglianza

La formulazione di un problema di controllo predittivo in cui la strategia risolutiva è impostata sfruttando le variabili artificiali e un vincolo terminale di uguaglianza, prevede come variabili di ottimizzazione, oltre la sequenza di azioni di controllo ottime, anche le artificiali x_a e u_a . La funzione di costo assume la seguente forma:

$$J(x(k); u(\cdot), x_a, u_a) = \sum_{j=0}^{N-1} \|x(j) - x_a\|_Q^2 + \|u(j) - u_a\|_R^2 + V_O(y_a | y_{sp})$$

Problema di ottimizzazione

$$\begin{aligned} J^0(x(k)) &= \min_{u(\cdot), x_a, u_a} J(x(k); u(\cdot), x_a, u_a) \\ x(0) &= x(k) \\ x(j+1) &= \tilde{A}x(j) + \tilde{B}u(j) \\ (x(j), u(j)) &\in \mathcal{Z} \\ x_a &= \tilde{A}x_a + \tilde{B}u_a \\ y_a &= \tilde{C}x_a + \tilde{D}u_a \\ (x_a, u_a) &\in \lambda \mathcal{Z} \\ x(N) &= x_a \end{aligned}$$

In Figura 2.I è riportato il funzionamento complessivo del sistema in anello chiuso:

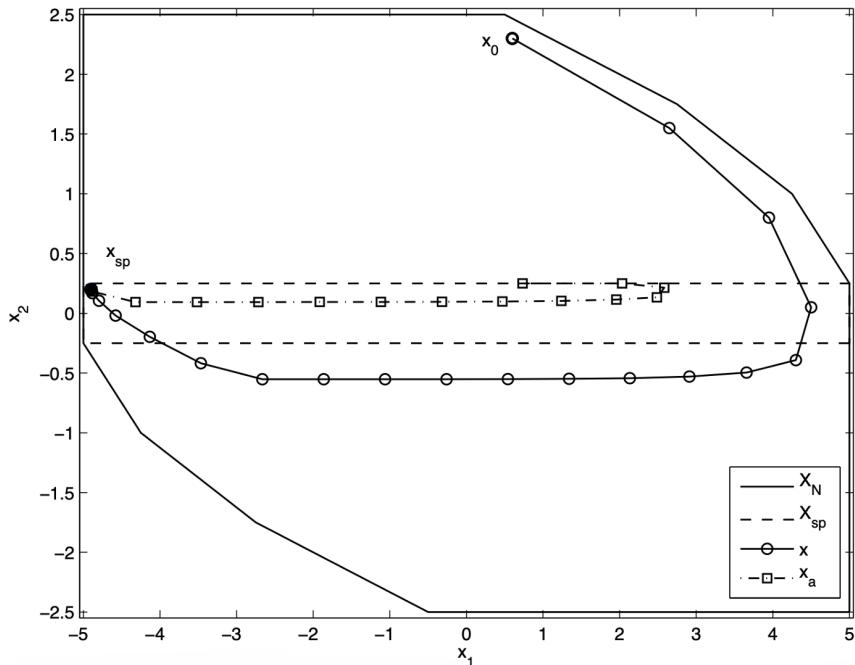


Figura 2.I: Simulazione in anello chiuso con vincolo terminale di uguaglianza.

MPCT con vincolo terminale di disuguaglianza

La formulazione di un problema di controllo predittivo in cui la strategia risolutiva è impostata sfruttando le variabili artificiali e un vincolo terminale di disuguaglianza, prevede come variabili di ottimizzazione, oltre la sequenza di azioni di controllo ottime, anche le artificiali x_a e u_a . La funzione di costo assume la seguente forma:

$$J(x(k); u(\cdot), x_a, u_a) = \sum_{j=0}^{N-1} \left\| x(j) - x_a \right\|_Q^2 + \left\| u(j) - u_a \right\|_R^2 + \left\| x(N) - x_a \right\|_P^2 + V_O(y_a | y_{sp})$$

Problema di ottimizzazione

$$\begin{aligned} J^0(x(k)) &= \min_{u(\cdot), x_a, u_a} J(x(k); u(\cdot), x_a, u_a) \\ x(0) &= x(k) \\ x(j+1) &= \tilde{A}x(j) + \tilde{B}u(j) \\ (x(j), u(j)) &\in \mathcal{Z} \\ y_a &= \tilde{C}x_a + \tilde{D}u_a \\ (x(N), x_a, u_a) &\in \Omega^a \end{aligned}$$

Il termine Ω^a rappresenta il dominio di attrazione del sistema controllato.

In Figura 2.J è riportato il funzionamento complessivo del sistema in anello chiuso:

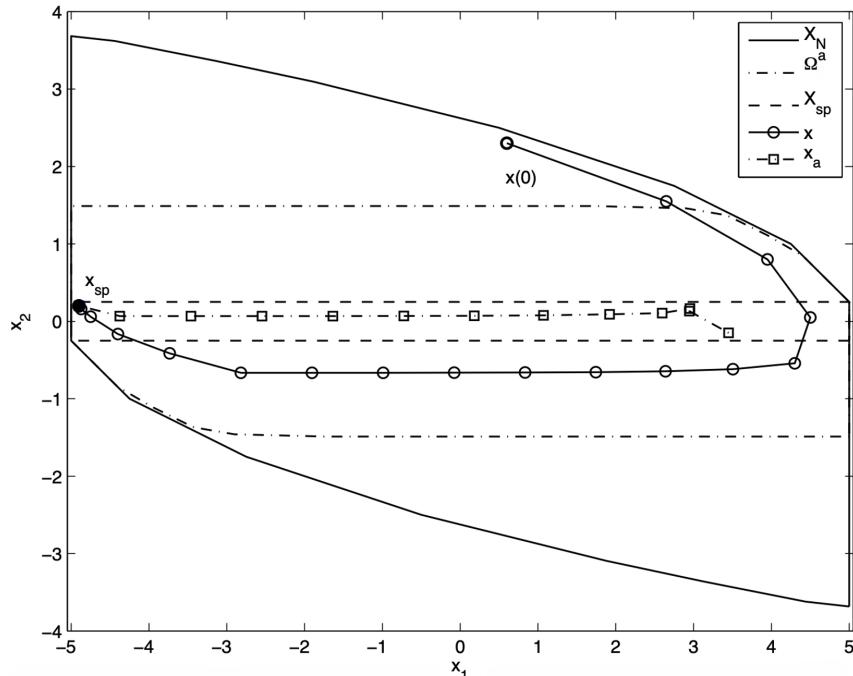


Figura 2.J: Simulazione in anello chiuso con vincolo terminale di disuguaglianza.

2.2.8 Implementazione per sistemi lineari

Si consideri il seguente sistema lineare discreto:

$$\begin{cases} x(k+1) &= \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k) \\ y(k) &= \tilde{C}x(k) + \tilde{D}u(k) \end{cases} \quad (2.13)$$

Ipotesi:

✓ $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$

✓ Stato e ingresso vincolati:

$$x(k) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$u(k) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$$

✓ (\tilde{A}, \tilde{B}) raggiungibile [1]

✓ Problema di setpoint tracking:

$$J(x(k); u(\cdot) | x_{ref}, u_{ref}) = \sum_{j=0}^{N-1} l(x(j), u(j) | x_{ref}, u_{ref}) + V_{cp}(x(N) | x_{ref}).$$

Omettendo, per semplicità, l'esplicita dipendenza da x_{ref} e u_{ref} , tipicamente la funzione di costo viene scelta con la seguente struttura:

$$\begin{aligned} J(x(k); u(\cdot)) &= \sum_{j=0}^{N-1} l(x(j), u(j)) + V_{cp}(x(N)) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\|x(j) - x_{ref}\|_Q^2 + \|u(j) - u_{ref}\|_R^2 \right) + \|x(N) - x_{ref}\|_S^2. \end{aligned}$$

Un problema di setpoint tracking può essere riportato ad uno di regolazione all'origine sfruttando l'uguaglianza:

$$(x_{ref}, u_{ref}) = (0, 0).$$

In tal caso, la funzione di costo diventa:

$$\begin{aligned} J(x(k); u(\cdot)) &= \sum_{j=0}^{N-1} l(x(j), u(j)) + V_{cp}(x(N)) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\|x(j)\|_Q^2 + \|u(j)\|_R^2 \right) + \|x(N)\|_S^2. \end{aligned}$$

Nel proseguo si farà riferimento al problema di setpoint tracking con setpoint costante durante l'arco di tempo di funzionamento del sistema in anello chiuso.

Se la funzione di costo da usare nel contesto della risoluzione del problema di ottimizzazione è quadratica e i vincoli definiti su stato e ingresso sono lineari, si viene a configurare un problema di *Quadratic Programming* (QP). I problemi di programmazione quadratica presentano la seguente struttura:

Problema di ottimizzazione

$$u^0 = \min_u \left(\frac{1}{2} u^T \mathcal{G} u + \mathcal{F}^T u \right)$$

$$\mathcal{L} u \leq \mathcal{M}$$

Si rende necessario progettare singolarmente le componenti \mathcal{G} , \mathcal{F} , \mathcal{L} e \mathcal{M} .

Per procedere occorre puntualizzare un aspetto. Come riportato nella Sezione 2.2.3, affinché il teorema di Lyapunov garantisca che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile, nel caso in cui siano presenti vincoli su stato e ingresso è necessario trovare una legge di controllo $v = \kappa_f(x(k)) \in \mathcal{U}$ che faccia sì che siano verificate entrambe le condizioni previste dall'ipotesi base di stabilità. Nel caso dei sistemi lineari, si sfrutta la legge di controllo *Linear Quadratic Regulator* (LQR):

$$v = \kappa_f(x(k)) = -Kx(k).$$

La legge di controllo LQR è ottima per definizione e garantisce che il sistema in anello chiuso $x(k+1) = (\tilde{A} - \tilde{B}K)x(k)$ sia asintoticamente stabile. In tal caso:

$$S = P,$$

dove P è la soluzione costante dell'equazione stazionaria di Riccati:

$$P = \tilde{A}^T P \tilde{A} + Q - \tilde{A}^T P \tilde{B} (R + \tilde{B}^T P \tilde{B})^{-1} \tilde{B}^T P \tilde{A}.$$

Da ultimo, si fornisce la versione della funzione di costo specifica per i sistemi lineari:

$$J(x(k); u(\cdot)) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\|x(j) - x_{ref}\|_Q^2 + \|u(j) - u_{ref}\|_R^2 \right) + \|x(N) - x_{ref}\|_P^2. \quad (2.14)$$

Progettazione di \mathcal{G} e \mathcal{F}

Per progettare le matrici \mathcal{G} e \mathcal{F} occorre esprimere (2.14) in forma matriciale:

$$(\mathcal{X}(k) - \mathcal{X}_{ref})^T \mathcal{Q} (\mathcal{X}(k) - \mathcal{X}_{ref}) + (\mathcal{U}(k) - \mathcal{U}_{ref})^T \mathcal{R} (\mathcal{U}(k) - \mathcal{U}_{ref}). \quad (2.15)$$

Ad ogni iterazione viene risolto un problema di ottimizzazione basato su N passi di predizione e, dato che l'espressione della funzione di costo contempla anche un costo aggiuntivo basato sullo stato finale in cui si deve venire a trovare il sistema, ovvero $x(N)$, la matrice \mathcal{Q} deve essere costruita come segue:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & Q & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Q & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & P \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1)n \times (N+1)n}.$$

Per spostare il sistema dallo stato iniziale $x(0)$ a quello terminale $x(N)$ occorre fornire N azioni di controllo, dunque la matrice \mathcal{R} deve essere costruita come segue:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & R & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Nm \times Nm}.$$

È necessario esprimere tutti i termini di (2.15) in funzione della variabile di ottimizzazione $\mathcal{U}(k)$. Per far ciò le si applica la trasformazione:

$$\mathcal{X}(k) = \mathcal{A}x(0) + \mathcal{B}\mathcal{U}(k), \quad (2.16)$$

in cui:

- \mathcal{A} contiene i termini necessari per il calcolo del movimento libero del sistema:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \tilde{I}_n \\ \tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{A}^N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1)n \times n};$$

- $x(0)$ è il feedback di stato, ovvero la condizione iniziale usata dal MPC per effettuare le predizioni ad ogni passo del problema di ottimizzazione:

$$x(0) \in \mathbb{R}^n;$$

- \mathcal{B} contiene i termini necessari per il calcolo del movimento forzato del sistema:

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tilde{B} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tilde{A}\tilde{B} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{A}^{N-1}\tilde{B} & \tilde{A}^{N-2}\tilde{B} & \tilde{A}^{N-3}\tilde{B} & \dots & \tilde{A}\tilde{B} & \tilde{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1)n \times Nm}.$$

Unificando (2.15) e (2.16) si ottiene:

$$(\mathcal{A}x(0) + \mathcal{B}\mathcal{U}(k) - x_{ref})^T \mathcal{Q} (\mathcal{A}x(0) + \mathcal{B}\mathcal{U}(k) - x_{ref}) + (\mathcal{U}(k) - \mathcal{U}_{ref})^T \mathcal{R} (\mathcal{U}(k) - \mathcal{U}_{ref}).$$

Sviluppando i calcoli in funzione di $\mathcal{U}(k)$ si giunge alla seguente formulazione:

$$\mathcal{U}(k)^T (\mathcal{R} + \mathcal{B}^T \mathcal{Q} \mathcal{B}) \mathcal{U}(k) + 2(x(0)^T \mathcal{A}^T \mathcal{Q} \mathcal{B} - \mathcal{X}_{ref}^T \mathcal{Q} \mathcal{B} - \mathcal{U}_{ref}^T \mathcal{R}) \mathcal{U}(k). \quad (2.17)$$

Partendo da (2.17) è immediato estrarre le matrici \mathcal{G} e \mathcal{F} :

$$\mathcal{G} = (\mathcal{R} + \mathcal{B}^T \mathcal{Q} \mathcal{B}) \in \mathbb{R}^{Nm \times Nm},$$

$$\mathcal{F} = 2(x(0)^T \mathcal{A}^T \mathcal{Q} \mathcal{B} - \mathcal{X}_{ref}^T \mathcal{Q} \mathcal{B} - \mathcal{U}_{ref}^T \mathcal{R})^T \in \mathbb{R}^{Nm}.$$

Progettazione di \mathcal{L} e \mathcal{M}

Nel progettare un controllore MPC che sia efficace e quanto più possibile efficiente bisogna fare in modo che il sistema rispetti i vincoli di progetto. I vincoli limitano la libertà delle variabili in gioco di assumere qualunque valore e possono essere definiti sia sullo stato sia sull'ingresso: la matrice H_x raccoglie tutte le informazioni relative ai vincoli posti sullo stato, mentre la matrice H_u tutte quelle relative ai vincoli posti sull'ingresso. Tutti i vincoli devono essere espressi nella forma di \leq :

$$H_x x(i) \leq h_x, \forall i \in [0, N] \quad (2.18)$$

$$H_x \in \mathbb{R}^{2n \times n} \quad h_x \in \mathbb{R}^{2n}$$

$$H_u u(i) \leq h_u, \forall i \in [0, N - 1] \quad (2.19)$$

$$H_u \in \mathbb{R}^{2m \times m} \quad h_u \in \mathbb{R}^{2m}$$

Analogamente a (2.14), anche (2.18) e (2.19) vanno espressi in forma matriciale:

$$\mathcal{H}_x \mathcal{X}(k) \leq \mathcal{h}_x \quad (2.20)$$

$$\mathcal{H}_x = \begin{bmatrix} H_x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H_x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2(N+1)n \times (N+1)n}, \quad \mathcal{h}_x = \begin{bmatrix} h_x \\ h_x \\ \vdots \\ h_x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2(N+1)n}.$$

$$\mathcal{H}_u \mathcal{U}(k) \leq \mathcal{h}_u \quad (2.21)$$

$$\mathcal{H}_u = \begin{bmatrix} H_u & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_u & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H_u \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2Nm \times Nm}, \quad \mathcal{h}_u = \begin{bmatrix} h_u \\ h_u \\ \vdots \\ h_u \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2Nm}.$$

Come si evince analizzando gli spazi di appartenenza, in tutte le matrici \mathcal{H}_x , \mathcal{h}_x , \mathcal{H}_u , \mathcal{h}_u , H_x , h_x , H_u e h_u compare nella definizione della prima dimensionalità il 2. Questo accade perché le singole H_x , h_x , H_u e h_u devono essere sviluppate in modo tale che al loro interno siano precisati sia i vincoli relativi agli upper bound sia quelli relativi ai lower bound relativi alle medesime variabili.

Analogamente a (2.15), anche (2.20) e (2.21) vanno espressi in funzione della variabile di ottimizzazione $\mathcal{U}(k)$ sfruttando (2.16):

- Vincolo 2.20:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_x \mathcal{X}(k) &\leq \mathcal{h}_x, \\ \mathcal{H}_x(\mathcal{A}x(0) + \mathcal{B}\mathcal{U}(k)) &\leq \mathcal{h}_x, \\ \mathcal{H}_x \mathcal{B}\mathcal{U}(k) &\leq \mathcal{h}_x - \mathcal{H}_x \mathcal{A}x(0);\end{aligned}$$

- Vincolo 2.21: il problema non sussiste dato che il termine $\mathcal{H}_u \mathcal{U}(k)$ è già espresso in funzione di $\mathcal{U}(k)$.

Unificando le definizioni in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_u \\ \mathcal{H}_x \mathcal{B} \end{bmatrix} \mathcal{U}(k) \leq \begin{bmatrix} \mathcal{h}_u \\ \mathcal{h}_x - \mathcal{H}_x \mathcal{A}x(0) \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Partendo da (2.22) è immediato estrarre le matrici \mathcal{L} e \mathcal{M} :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \begin{bmatrix} \mathcal{H}_u \\ \mathcal{H}_x \mathcal{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2Nm+2(N+1)n) \times Nm}, \\ \mathcal{M} &= \begin{bmatrix} \mathcal{h}_u \\ \mathcal{h}_x - \mathcal{H}_x \mathcal{A}x(0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2Nm+2(N+1)n}.\end{aligned}$$

2.3 Bayesian Optimization

La realtà è intrinsecamente complessa, tanto da far sì che non possa mai essere descritta nella sua totalità. Per ovviare a ciò si ricorre ai modelli. «*In generale, un modello rappresenta un'astrazione selettiva di un sistema reale. In altri termini, un modello viene progettato per analizzare e comprendere da un punto di vista astratto il funzionamento di un sistema concreto, del quale contiene solo gli elementi ritenuti rilevanti ai fini dell'indagine svolta*

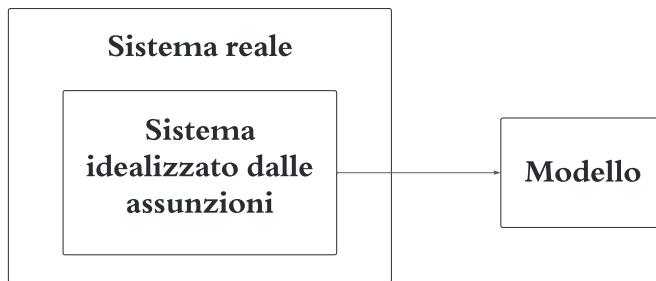


Figura 2.K: Dal sistema reale al modello.

Al contempo, «*l'ottimizzazione è la disciplina che si occupa di formulare modelli utili nelle applicazioni reali e di inventare metodi efficienti per l'identificazione della soluzione ottimale*L'ottimizzazione trova innumerevoli applicazioni in ambito scientifico. Tra queste, l'identificazione dei parametri incogniti nei problemi predittivi di classificazione e stima, l'approssimazione robusta, i problemi geometrici, la ricerca delle soluzioni di equilibrio nella teoria dei giochi. Tuttavia, l'ottimizzazione non può limitarsi solo alla formulazione di modelli potenzialmente utili per le applicazioni, ma deve anche sviluppare metodi in grado di determinare una soluzione ottimale. È importante sottolineare che la risoluzione non può essere confinata ad una trattazione analitica, ma deve essere di natura algoritmica. Infatti, i modelli di ottimizzazione che si presentano nelle applicazioni prevedono in genere un numero molto elevato di variabili e quindi richiedono algoritmi risolutivi molto efficienti. D'altra parte, lo sviluppo di metodi risolutivi sempre più potenti richiede di disporre di teorie approfondite che permettano di descrivere e caratterizzare le principali proprietà dei modelli di ottimizzazione, di collegare tra loro ambiti apparentemente distanti, di trasformare e scomporre problemi complessi in problemi più semplici

La funzione matematica menzionata è la funzione obiettivo, nonché la funzione che modella analiticamente il processo in esame. Tipicamente si assume che tale funzione abbia una determinata struttura analitica, che sia convessa, derivabile in ogni punto e che non sia troppo onerosa da valutare esplicitamente. La realtà, tuttavia, fa cadere queste assunzioni. I problemi reali, infatti, sono talmente complessi che non è in alcun modo possibile sapere con precisione né quale sia la forma della funzione obiettivo né, tantomeno, se goda di proprietà come derivabilità o convessità. Una risoluzione esplicita di tali problemi richiederebbe troppe risorse, sia computazionali sia temporali. In questo scenario si colloca la *Bayesian Optimization* (BO). Nella fattispecie, la BO è una tecnica che trova applicazione in tutti quegli scenari in cui non è possibile conoscere l'espressione analitica della funzione obiettivo, ma in cui si possono ottenere delle osservazioni, eventualmente rumorose, del fenomeno in esame. La potenza di questa tecnica consiste nel riuscire a congiungere la conoscenza «a priori» relativa al fenomeno con le evidenze che si ottengono durante lo studio del fenomeno stesso. Ciò è reso possibile dal fatto che, in fase di computazione, si avvale del teorema di Bayes, secondo il quale, in via del tutto esemplificativa, una volta fornite le evidenze sperimentali E , la probabilità a posteriori di una ipotesi M è proporzionale alla verosimiglianza di E data l'ipotesi M moltiplicata per la probabilità a priori dell'ipotesi stessa [2]:

$$P(M|E) \propto P(E|M)P(M).$$

Secondo la teoria bayesiana:

- La probabilità «a priori» rappresenta tutta la conoscenza sul fenomeno in esame prima che questo inizi ad essere studiato;
- La verosimiglianza è una quantità che modella la percezione che si ha sul fenomeno in esame. Tale quantità serve per rispondere alla domanda: disponendo della conoscenza a priori, quanto sono verosimili/conformi i dati osservati rispetto a ciò che ci si aspetterebbe?
- La probabilità «a posteriori» costituisce un aggiornamento della probabilità a priori sulla base di ciò che si è osservato.

In altre parole, il teorema di Bayes fornisce un metodo per aggiornare la stima della probabilità riguardo la veridicità di una teoria man mano che diventano disponibili ulteriori prove o informazioni.

Si assuma che il fenomeno in esame possa essere descritto nella sua totalità da una funzione obiettivo del tipo:

$$\phi : \Xi \rightarrow \mathbb{R}.$$

Focalizzandosi in un problema di massimizzazione, l'obiettivo dell'ottimizzazione è trovare il punto $\xi^* \in \Xi$ in corrispondenza del quale vi è il massimo globale $\phi(\xi^*) \in \mathbb{R}$ come mostrato nella Figura 2.L:

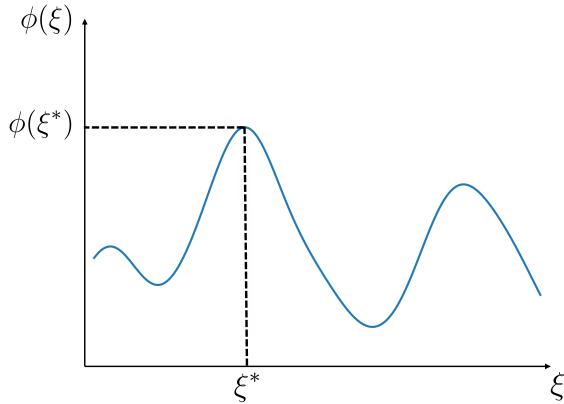


Figura 2.L: Massimo e relativo argomento di una funzione matematica ϕ .

La scelta della tipologia di problema da risolvere è del tutto arbitraria; infatti, è possibile riportare un qualunque problema di massimizzazione in uno di minimizzazione sapendo che:

$$\xi^* = \arg \max_{\xi \in \Xi} \phi(\xi) \equiv \arg \min_{\xi \in \Xi} -\phi(\xi).$$

«Il paradigma logico che sta alla base dei problemi di ottimizzazione richiede di determinare l'alternativa più vantaggiosa rispetto a un criterio di valutazione assegnato, che di norma rappresenta un guadagno da massimizzare o un costo da minimizzare» [20]. Quando si affrontano problemi di ottimizzazione globale si è soliti incorrere in funzioni obiettivo *black-box*, ovvero in funzioni per le quali non è dato sapere l'espressione analitica. L'ottimizzazione di funzioni black-box tipicamente richiede che tutte le dimensioni all'interno delle quali cercare la migliore configurazione dei parametri da cui dipende la funzione stessa abbiano dei bound ben definiti. Supponendo che la funzione obiettivo black-box dipenda da d parametri, si può dire che lo spazio di ricerca sia un iper-rettangolo di dimensione d . In tal caso:

$$\Xi = \{\xi : \text{lb}_{\xi^{(d)}} \leq \xi^{(d)} \leq \text{ub}_{\xi^{(d)}}\} \subseteq \mathbb{R}^d,$$

dove $\xi^{(d)}$ fa riferimento al parametro relativo alla d -esima dimensione.

2.3.1 Exploration-exploitation dilemma

La BO viene applicata ogni volta l'obiettivo del problema da risolvere è la ricerca dell'ottimo globale di una funzione black-box. Quando si affrontano queste tipologie di problemi bisogna avere un occhio di riguardo al *exploration-exploitation dilemma*:

- Con il concetto di *exploration* ci si riferisce alla ricerca di nuove aree nello spazio delle soluzioni che non sono ancora state esplorate. L'obiettivo è scoprire potenziali soluzioni migliori che non sono ancora state valutate. Bisogna notare, tuttavia, che se il trade-off è sbilanciato sull'exploration si corre il rischio di sprecare risorse senza ottenere miglioramenti significativi;
- Con il concetto di *exploitation* ci si riferisce all'utilizzo delle informazioni già raccolte per concentrarsi sulle aree che hanno già dimostrato di essere promettenti. Se il trade-off è sbilanciato sull'exploitation si corre il rischio di rimanere bloccati in soluzioni sub-ottimali.

2.3.2 Macro step

Il processo di BO può essere visto come un algoritmo iterativo di due step [15]:

1. Costruzione di un modello (probabilistico) surrogato $\hat{\phi}_z$ della reale funzione obiettivo ϕ sfruttando tutti i dati a disposizione $\mathcal{D}_{1:z}$:

$$\mathcal{D}_{1:z} = \{(\xi_i, \phi_i), \xi_i \in \Xi, \phi_i = \phi(\xi_i) \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, z\}.$$

Nel proseguo si farà riferimento all'insieme dei punti in corrispondenza dei quali campionare il fenomeno sfruttando la notazione:

$$\xi_{1:z} = \{\xi_i : \xi_i \in \Xi, i = 1, \dots, z\}.$$

Analogamente, si farà riferimento ai campioni estratti sfruttando la notazione:

$$\phi_{1:z} = \{\phi_i : \phi_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, z\}.$$

2. Ottimizzazione di una funzione di acquisizione $\alpha_z(\cdot)$ che permette di ottenere un nuovo punto $\xi_{z+1} \in \Xi$. Il punto $(\xi_{z+1}, \phi(\xi_{z+1})) \in \Xi \times \mathbb{R}$ viene usato per aggiornare il contenuto informativo veicolato dal modello surrogato $\hat{\phi}$:

$$\mathcal{D}_{1:z+1} = \mathcal{D}_{1:z} \cup (\xi_{z+1}, \phi(\xi_{z+1})).$$

Ai due step iterativi se ne aggiunge uno di inizializzazione del processo per mezzo della valutazione di un certo numero di campioni scelti randomicamente [9]. L'obiettivo dell'inizializzazione è quello di gettare le basi per la successiva fase di ottimizzazione.

2.3.3 Surrogate Model

Il *Surrogate Model* (**SM**) viene creato sfruttando lo storico dei dati relativi al comportamento passato del fenomeno e, dunque, viene usato come punto di riferimento per prendere decisioni informate, nonché per fare previsioni su valori non ancora valutati della funzione obiettivo. Naturalmente, un **SM** costituisce un'approssimazione della funzione obiettivo. In letteratura esistono diverse opzioni per la scelta del **SM**; quella più frequentemente utilizzata è il *Gaussian Process* (**GP**).

Gaussian Process

Il processo di BO assume che la funzione obiettivo sia descritta sfruttando un *Gaussian Process* (**GP**) [2]. Un **GP** è un processo stocastico² tale che, prendendo un qualsiasi numero finito di variabili aleatorie, esse hanno una distribuzione di probabilità congiunta normale³. Sapendo che $\xi \in \Xi$ e $\xi' \in \Xi$ sono punti appartenenti allo spazio di ricerca, ogni **GP** è specificato interamente da una funzione di media $m_g(\xi)$ e da una di covarianza $k_g(\xi, \xi')$:

$$\phi(\xi) \sim \mathcal{GP}(m_g(\xi), k_g(\xi, \xi')).$$

Intuitivamente, è possibile accomunare un **GP** con una funzione matematica con la sola eccezione che, mentre una funzione matematica fornisce come output un risultato che dipende sia dalla sua struttura sia dall'input fornito, un **GP** fornisce come output la media e la varianza di una distribuzione normale [2]. Generalmente si tende a considerare la media nulla a causa dell'assenza di informazioni a priori sulla funzione obiettivo. In tal caso:

$$\phi(\xi) \sim \mathcal{GP}(0, k_g(\xi, \xi')).$$

Per una comprensione più approfondita riguardo le modalità seguite da ogni **GP** per la costruzione del relativo modello surrogato è consigliabile fare riferimento a fonti come [2, 9, 10].

²Un processo stocastico è un modello matematico che descrive in modo probabilistico come un certo fenomeno può evolvere nel tempo.

³La distribuzione normale è una distribuzione di probabilità continua che dipende da due parametri: media μ e varianza σ^2 . La distribuzione normale è caratterizzata dalla seguente funzione di densità di probabilità:

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(r-\mu)^2}{2\sigma^2}}, r \in \mathbb{R}.$$

La funzione di covarianza $k_g(\xi, \xi')$, talvolta chiamata *kernel*, descrive la correlazione che sussiste tra i punti ξ e ξ' . Supponendo di disporre dei dati $\mathcal{D}_{1:z}$, la matrice di covarianza assume la seguente struttura:

$$K = k_g(\xi, \xi') = \begin{bmatrix} k_g(\xi_1, \xi_1) & \cdots & k_g(\xi_1, \xi_z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_g(\xi_z, \xi_1) & \cdots & k_g(\xi_z, \xi_z) \end{bmatrix}.$$

Si suppone ora che venga eseguita una iterazione di BO, il cui output è il punto $(\xi_{z+1}, \phi(\xi_{z+1})) \in \Xi \times \mathbb{R}$. Per proprietà dei GP:

$$\begin{bmatrix} \phi_{1:z} \\ \phi_{z+1} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{bmatrix} K & k \\ k^T & k_g(\xi_{z+1}, \xi_{z+1}) \end{bmatrix}\right),$$

dove:

$$k = \begin{bmatrix} k_g(\xi_{z+1}, \xi_1) & k_g(\xi_{z+1}, \xi_2) & \cdots & k_g(\xi_{z+1}, \xi_z) \end{bmatrix}.$$

Sono possibili diverse opzioni per la scelta del kernel, tra cui si annoverano il *Radial Basis Function* (RBF) e il *Matérn*:

- Il kernel RBF misura la somiglianza tra due punti nello spazio di ricerca: coppie di punti vicine hanno una correlazione elevata (valore vicino a 1), mentre coppie di punti distanti hanno una correlazione bassa (valore vicino a 0). Analiticamente:

$$k_g(\xi, \xi') = \exp\left(-\frac{\|\xi - \xi'\|^2}{2\sigma^2}\right);$$

- Il kernel Matérn è una funzione di covarianza che prevede come parametro la distanza che vi è tra due osservazioni:

$$C_\nu(d) = \sigma^2 \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\sqrt{2\nu} \frac{d}{\rho}\right)^\nu K_\nu \left(\sqrt{2\nu} \frac{d}{\rho}\right),$$

in cui:

- Γ è la funzione gamma;
- K_ν è la funzione di Bessel del secondo tipo;
- ρ e ν sono parametri positivi della covarianza.

2.3.4 Acquisition Function

La *Acquisition Function* (AF) viene utilizzata con lo scopo di guidare la ricerca del successivo punto da valutare nella funzione obiettivo. La sua struttura è tale da agevolare la ricerca dell'ottimo $\xi^* \in \Xi$ bilanciando opportunamente il trade-off in Sezione 2.3.1. Se $u(\phi(\xi), \xi)$ è la funzione che quantifica l'utilità portata dalla valutazione di $\phi(\xi) \in \mathbb{R}$, il punto $\xi_{z+1} \in \Xi$ deve essere scelto in modo tale che, sulla base dei dati a disposizione, risulti massimizzata la funzione di acquisizione, nonché il valore atteso della funzione di utilità:

$$\xi_{z+1} = \arg \max_{\xi \in \Xi} \mathbb{E}_{\phi|\mathcal{D}_{1:z}}[u(\phi(\xi), \xi)].$$

Esistono svariate opzioni per la scelta della AF; tra queste:

- *Expected Improvement* (EI);
- *Probability of Improvement* (PI);
- *Lower Confidence Bound* (LCB).

Per una trattazione più approfondita riguardo le funzioni di acquisizione è consigliabile la lettura di opere come [2, 9, 10].

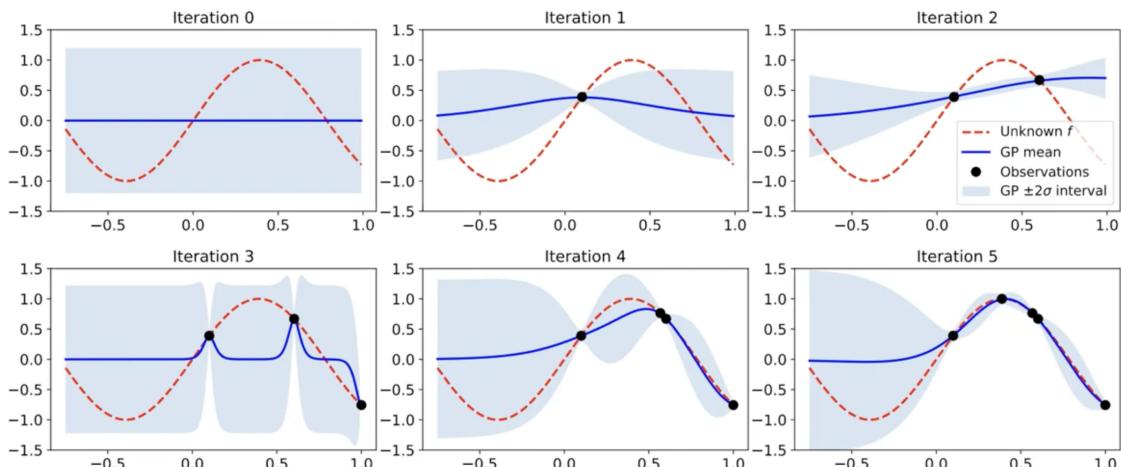


Figura 2.M: Esempio di simulazione di BO.

In Figura 2.M è mostrata una simulazione del processo di BO in cui è possibile osservare come si aggiornano il modello surrogato, la funzione di media $m_g(\xi)$ e quella di covarianza $k_g(\xi, \xi')$ di iterazione in iterazione sulla base dell'output fornito dalla funzione di acquisizione [13].

2.4 Case study: controllo di un servomeccanismo

L'obiettivo di questo paragrafo è l'applicazione della teoria esposta sia riguardo MPC sia riguardo BO ad un esempio di più semplice risoluzione rispetto a ciò che seguirà nei prossimi capitoli.

2.4.1 Descrizione del problema

Un servomeccanismo è un sistema che trasforma potenza elettrica in potenza meccanica. Ai fini della modellistica, si può considerare un servomeccanismo come se fosse composto da tre elementi:

- **Motore.** Il motore, per effetto di una corrente elettrica, genera una coppia meccanica che mette in rotazione l'albero del motore;
- **Trasmissione.** La trasmissione accoppia l'albero del motore all'albero del carico mettendo in rotazione quest'ultimo;
- **Carico.** La rotazione dell'albero del carico mette in rotazione il carico.

Le variabili di stato oggetto di interesse sono:

Variabile	Interpretazione	Unità
$q_m(t)$	Posizione angolare del motore	[rad]
$q_l(t)$	Posizione angolare del carico	[rad]
$\dot{q}_m(t)$	Velocità angolare del motore	[$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$]
$\dot{q}_l(t)$	Velocità angolare del carico	[$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$]

Il sistema dispone di due ingressi:

Variabile	Interpretazione	Unità
$\tau_m(t)$	Coppia generata dal motore	[Nm]
$\tau_l(t)$	Coppia di carico	[Nm]

Obiettivi:

1. Supponendo lo stato completamente accessibile, progettare un controllore MPC che sia in grado di guidare il sistema dalla condizione iniziale $x(0) = (0, 0, 0, 0)$ verso il setpoint $x_{ref} = (425.0286, 1.7, 0, 0)$ nel rispetto dei vincoli posti sia sullo stato sia sull'ingresso;
2. Tarare in maniera ottima operando secondo l'approccio BO gli iperparametri Q ed R da cui dipende il controllore.

2.4.2 Modellistica

Per poter implementare un controllore che operi secondo secondo l'approccio previsto dal controllo predittivo è necessario disporre del modello discreto del sistema da controllare. Per arrivare a questa formulazione occorre preventivamente definire il modello continuo, ovvero un modello del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

in cui:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q_m(t) \\ q_l(t) \\ \dot{q}_m(t) \\ \dot{q}_l(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad u(t) = \begin{bmatrix} \tau_m(t) \\ \tau_l(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad y(t) = x(t) \in \mathbb{R}^p$$

$$n = 4$$

$$m = 2$$

$$p = n = 4$$

La definizione delle matrici A , B , C , D che descrivono la dinamica del sistema passa attraverso la modellistica di tutti e tre gli elementi sopra citati, ovvero il motore, la trasmissione e il carico. I tre componenti sono interconnessi tra loro in accordo con quanto illustrato in Figura 2.N:

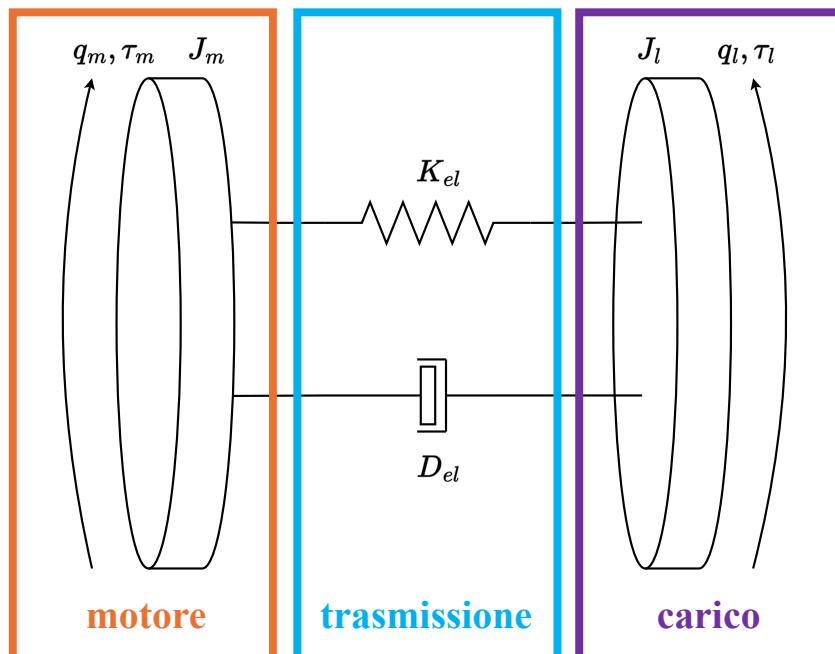


Figura 2.N: Rappresentazione pittografica di un servomeccanismo.

Modello del motore e relativo schema a blocchi

La dinamica del motore è descritta dalla seguente equazione:

$$\begin{aligned} J_m \ddot{q}_m(t) &= \tau_m(t) - \bar{\tau}_f \tanh[\dot{q}_m(t)] - \tau_{tm}(t), \\ s^2 J_m Q_m(s) &= T_m(s) - \bar{\tau}_f \tanh[sQ_m(s)] - T_{tm}(s), \\ Q_m(s) &= \frac{1}{s^2 J_m} [T_m(s) - \bar{\tau}_f \tanh[sQ_m(s)] - T_{tm}(s)]. \end{aligned}$$

La Figura 2.O mostra lo schema a blocchi risultante:

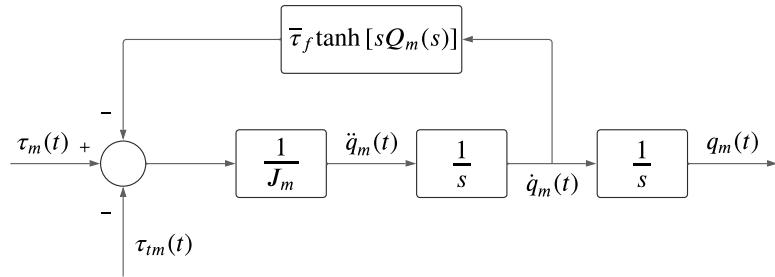


Figura 2.O: Schema a blocchi del motore.

Modello della trasmissione e relativo schema a blocchi

La dinamica della trasmissione è descritta dalla seguente equazione:

$$\begin{aligned} \tau_{tm}(t) &= K_{el}[q_m(t) - kq_l(t)] + D_{el}[\dot{q}_m(t) - k\dot{q}_l(t)], \\ \tau_{tl}(t) &= k\tau_{tm}(t) = k[K_{el}[q_m(t) - kq_l(t)] + D_{el}[\dot{q}_m(t) - k\dot{q}_l(t)]], \\ T_{tl}(s) &= kT_{tm}(s) = k[K_{el}[Q_m(s) - kQ_l(s)] + sD_{el}[Q_m(s) - kQ_l(s)]] \\ &= k[(Q_m(s) - kQ_l(s))(sD_{el} + K_{el})]. \end{aligned}$$

La Figura 2.P mostra lo schema a blocchi risultante:

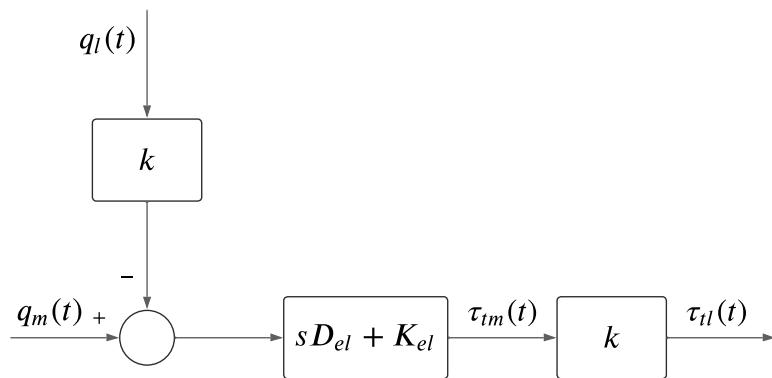


Figura 2.P: Schema a blocchi della trasmissione.

Modello del carico e relativo schema a blocchi

La dinamica del carico è descritta dalla seguente equazione:

$$\begin{aligned} J_l \ddot{q}_l(t) &= \tau_{tl}(t) - \tau_l(t), \\ s^2 J_l Q_l(s) &= T_{tl}(s) - T_l(s), \\ Q_l(s) &= \frac{1}{s^2 J_l} [T_{tl}(s) - T_l(s)]. \end{aligned}$$

La Figura 2.Q mostra lo schema a blocchi risultante:

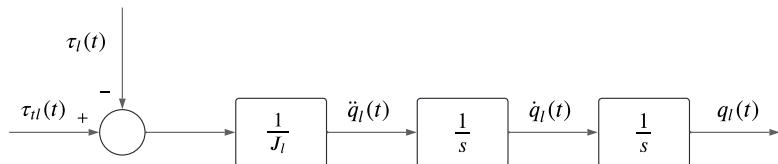


Figura 2.Q: Schema a blocchi del carico.

Schema a blocchi del modello complessivo

Considerando congiuntamente le Figure 2.O, 2.P e 2.Q si ottiene Figura 2.R:

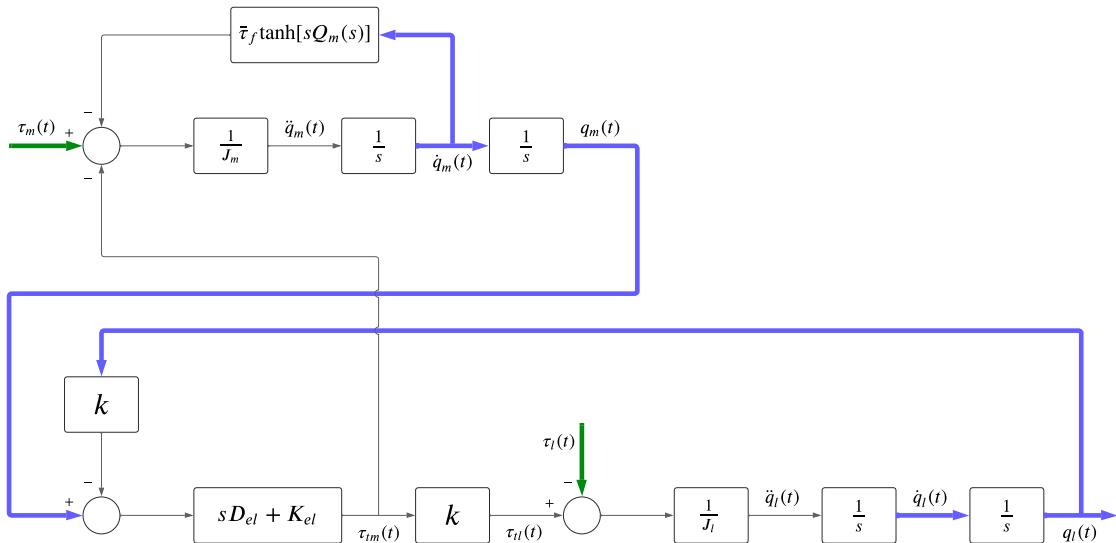


Figura 2.R: Schema a blocchi complessivo.

Parametro	Valore	Unità	Interpretazione
J_m	0.001	kgm^2	Momento di inerzia del motore
J_l	9	kgm^2	Momento di inerzia del carico
K_{el}	0.7	$\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$	Costante elastica della trasmissione
D_{el}	0.03	$\frac{\text{Nms}}{\text{rad}}$	Costante viscosa della trasmissione
$\bar{\tau}_f$	0.2	Nm	Costante numerica
k	250	/	Rapporto di riduzione

Per la derivazione del modello continuo si devono considerare tutte le equazioni riportate nei paragrafi precedenti:

$$\begin{cases} J_m \ddot{q}_m(t) &= \tau_m(t) - \tau_f(t) - \tau_{tm}(t) \\ \tau_{tm}(t) &= K_{el}[q_m(t) - kq_l(t)] + D_{el}[\dot{q}_m(t) - k\dot{q}_l(t)] \\ J_l \ddot{q}_l(t) &= \tau_{tl}(t) - \tau_l(t) \\ \tau_{tl}(t) &= k\tau_{tm}(t) \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} \ddot{q}_m(t) &= -\frac{K_{el}}{J_m}q_m(t) + \frac{kK_{el}}{J_m}q_l(t) - \frac{D_{el}}{J_m}\dot{q}_m(t) - \frac{\bar{\tau}_f}{J_m}\tanh[\dot{q}_m(t)] + \frac{kD_{el}}{J_m}\dot{q}_l(t) + \frac{1}{J_m}\tau_m(t) \\ \ddot{q}_l(t) &= \frac{kK_{el}}{J_l}q_m(t) - \frac{k^2K_{el}}{J_l}q_l(t) + \frac{kD_{el}}{J_l}\dot{q}_m(t) - \frac{k^2D_{el}}{J_l}\dot{q}_l(t) - \frac{1}{J_l}\tau_l(t) \end{cases}$$

Da specifica di progetto è noto che:

$$\tau_l(t) = \bar{\tau}_l = 5.005 \text{ Nm}, \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Cambio di notazione opzionale, ma utile per uniformità con la teoria dell'automatica:

Variabile del sistema	Variabile di stato
$q_m(t)$	$x_1(t)$
$q_l(t)$	$x_2(t)$
$\dot{q}_m(t)$	$x_3(t)$
$\dot{q}_l(t)$	$x_4(t)$
$\tau_m(t)$	$u_1(t)$
$\tau_l(t)$	u_2

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -\frac{K_{el}}{J_m}x_1(t) + \frac{kK_{el}}{J_m}x_2(t) - \frac{D_{el}}{J_m}x_3(t) - \frac{\bar{\tau}_f}{J_m}\tanh[x_3(t)] + \frac{kD_{el}}{J_m}x_4(t) + \frac{1}{J_m}u_1(t) \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{kK_{el}}{J_l}x_1(t) - \frac{k^2K_{el}}{J_l}x_2(t) + \frac{kD_{el}}{J_l}x_3(t) - \frac{k^2D_{el}}{J_l}x_4(t) - \frac{1}{J_l}u_2 \end{cases}$$

Linearizzazione

Cenno teorico La *stabilità* è una proprietà strutturale dei sistemi tale per cui questi, a seguito di una perturbazione, ritornano nella situazione preesistente la perturbazione, nonché in un punto di equilibrio. Per questo motivo, la stabilità è una proprietà locale che si riferisce ai punti di equilibrio di un sistema. I sistemi lineari ammettono infiniti punti di equilibrio calcolabili esplicitamente sfruttando metodi consolidati, mentre per quelli non lineari la situazione è più critica. Questi ultimi, infatti, contrariamente a quelli lineari, non ne ammettono infiniti. La loro natura non lineare rende impossibile l'applicazione su di essi degli stessi metodi di analisi applicabili a quelli lineari. Per ovviare a tale impedimento si ricorre alla *linearizzazione*. Il procedimento di linearizzazione consiste nel descrivere il comportamento di un sistema non lineare attorno ad un suo punto di equilibrio mediante un sistema lineare. Tale sistema costituisce solo un'approssimazione di quello originario, ma è estremamente utile perché ad esso sono applicabili i metodi di analisi disponibili per i sistemi lineari. Nel contesto dei sistemi non lineari si dice che la stabilità è una proprietà relativa al sistema tangente linearizzato nell'intorno di un suo punto di equilibrio.

Applicazione della teoria Il sistema definito nella Sezione 2.4.2 è non lineare a causa della presenza di $\tanh[x_3(t)]$ nell'espressione di $\dot{x}_3(t)$, dunque, per poter ricavare le matrici A e B del corrispondente sistema lineare, deve essere linearizzato. La linearizzazione, effettuata nell'intorno del punto di equilibrio x_{ref} , porta ad ottenere le matrici A_{lin} e B_{lin} :

$$A_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -700 & 175000 & -230 & 7500 \\ \frac{175}{9} & \frac{43750}{9} & \frac{5}{6} & \frac{625}{3} \end{bmatrix} \quad B_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1000 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Valendo l'ipotesi di completa osservabilità dello stato è immediato concludere:

$$C_{lin} = I_p$$

$$D_{lin} = 0_{p \times m}$$

Discretizzazione

Cenno teorico Un sistema dinamico continuo è un modello matematico che descrive l’evoluzione di un sistema nel tempo utilizzando variabili che cambiano in modo continuo:

$$t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Questo tipo di sistemi sono rappresentati per mezzo di equazioni differenziali.

Un sistema dinamico discreto è un modello matematico in cui le variabili del sistema sono funzione di una variabile temporale che assume solo valori interi:

$$k \in \mathbb{N}.$$

Questo tipo di sistema è rappresentato da equazioni alle differenze.

I moderni sistemi di controllo sono ormai tutti basati su elaboratori elettronici. L’elaboratore è la sede dell’algoritmo di controllo il quale, note le specifiche di controllo, genera i segnali di controllo. Poiché gli elaboratori operano in modo discreto, è necessario un meccanismo che permetta di interfacciarsi con essi. La *discretizzazione* è il processo di trasformazione di segnali a tempo continuo nelle controparti discrete. L’operazione matematica che sta alla base del processo di discretizzazione è il *campionamento* e lo strumento che effettua il campionamento è chiamato *campionatore*. Tipicamente i campionatori sono convertitori A/D.

Applicazione della teoria Affinché si possa implementare la tecnica di controllo predittivo è necessario esprimere il modello del sistema da controllare nel dominio discreto. Scegliendo il tempo di campionamento $\tau_s = 0.1$ s, la discretizzazione *Zero-Order Holder* (ZOH) porta ad ottenere le matrici \tilde{A}_{eq} e \tilde{B}_{eq} :

$$\tilde{A}_{eq} = \begin{bmatrix} \frac{1625}{1628} & \frac{487}{1057} & \frac{31}{6198} & \frac{443}{2426} \\ \frac{24}{6539} & \frac{167}{2026} & \frac{3}{147860} & \frac{96}{80929} \\ \frac{131}{2645} & -\frac{8593}{694} & -\frac{7}{164764} & -\frac{191}{2732} \\ \frac{165}{18617} & -\frac{1438}{649} & -\frac{1}{128733} & -\frac{61}{4868} \end{bmatrix} \quad \tilde{B}_{eq} = \begin{bmatrix} \frac{1291}{2739} & -\frac{34}{18135} \\ \frac{34}{18135} & -\frac{4}{140487} \\ \frac{3106}{621} & -\frac{150}{7393} \\ \frac{150}{7393} & -\frac{11}{83458} \end{bmatrix}$$

La discretizzazione non ha alcun effetto sulla struttura delle matrici C_{lin} e D_{lin} :

$$\tilde{C}_{eq} = I_p$$

$$\tilde{D}_{eq} = 0_{p \times m}$$

2.4.3 Controllo

Setpoint

Stando alla prima richiesta del problema, il sistema deve essere guidato dalla condizione iniziale $x(0) = (0, 0, 0, 0)$ verso il setpoint $x_{ref} = (425.0286, 1.7, 0, 0)$. Non essendo specificate altre informazioni riguardo la natura del setpoint, questo può essere assunto costante durante l'intero arco di tempo di funzionamento del sistema in anello chiuso. Da questa osservazione si può concludere che la progettazione di un controllore MPC per il sistema modellato nella Sezione 2.4.2 segue di pari passo la trattazione esposta nella Sezione 2.2.8.

Ingresso di equilibrio

Analizzando la funzione di costo discussa nella Sezione 2.2.8, emerge la necessità di conoscere l'ingresso di equilibrio u_{ref} . Per il suo calcolo si possono seguire dei semplici passaggi:

- In corrispondenza di $u(k) = \bar{u}$ si impone $x(k + 1) = x(k) = \bar{x}$:

$$\bar{x} = A_{lin}\bar{x} + B_{lin}\bar{u};$$

- Sapendo che $x_{ref} = \bar{x}$ e $u_{ref} = \bar{u}$:

$$u_{ref} = B_{lin}^{-1} (I - A_{lin}) x_{ref}.$$

Vincoli

Affinché un controllo risulti efficace è necessario fare in modo che il sistema in anello chiuso rispetti perennemente i vincoli imposti sia sullo stato sia sull'ingresso. Un primo vincolo è quello che riguarda la coppia di carico da assumere costante:

$$\tau_l(t) = \bar{\tau}_l = 5.005 \text{Nm}, \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Altri vincoli definiti da specifica di progetto sono:

$$\begin{aligned} -0.25 \text{Nm} &\leq \tau_m(t) \leq 0.25 \text{Nm}, \\ -0.07 \text{rad} &\leq q_l(t) \leq 1.85 \text{rad}. \end{aligned}$$

Per tutte le variabili per le quali non sono definiti espliciti vincoli progettuali, ovvero $q_m(t)$, $\dot{q}_m(t)$, $\ddot{q}_l(t)$, si assumono arbitrariamente i seguenti range di validità:

$$\begin{aligned} -10^6 \text{rad} &\leq q_m(t) \leq 10^6 \text{rad}, \\ -10^6 \text{rad} &\leq \dot{q}_m(t) \leq 10^6 \text{rad}, \\ -10^6 \text{rad} &\leq \ddot{q}_l(t) \leq 10^6 \text{rad}. \end{aligned}$$

2.4.4 Simulazione e analisi dei risultati

I dati visualizzati nei successivi grafici provengono da simulazioni che condividono le seguenti scelte di design per quanto riguarda sia MPC sia BO:

- MPC

- Tempo di simulazione: $T_{sim} = 250\text{s}$;
- Orizzonte di predizione: $N = 10$;
- Iperparametri da ottimizzare: $Q = qI_n$, $R = rI_m$, con $q, r \in \mathbb{R}$.

- BO

- Modello surrogato: GP;
- Funzione di acquisizione: EI;
- Numero di iterazioni da effettuare per arrivare all'ottimo: 1000;
- Range all'interno del quale cercare il valore ottimo di q : $[10^{-6}, 10^6]$;
- Range all'interno del quale cercare il valore ottimo di r : $[10^{-6}, 10^6]$.

Ad ogni iterazione di BO viene effettuata una simulazione di funzionamento del sistema elaborato nella Sezione 2.4.2. Fornita una parametrizzazione per Q e R del controllore MPC, per valutare la bontà del controllo è necessario definire una funzione di costo rispetto alla quale minimizzare l'errore commesso dal sistema in fase di tracking. La funzione di costo sfruttata in questo contesto prende in considerazione i valori derivanti dall'applicazione di due criteri, il primo per la valutazione dell'aggressività dell'azione di controllo, il secondo per la valutazione della velocità di convergenza al setpoint. Prima di passare alla discussione relativa ai criteri di ottimalità si rende necessario introdurre la notazione adottata:

- $\alpha \in \mathbb{N}_m \setminus \{0\}$ è l'indice usato per fare riferimento al α -esimo ingresso;
- $\text{TSV}(\alpha)$ è il valore del criterio TSV applicato al α -esimo ingresso;
- $u^{(\alpha)}(k)$ è la k -esima azione di controllo relativa al α -esimo ingresso;
- $u^{(\alpha)}(k+1)$ è la $(k+1)$ -esima azione di controllo relativa al α -esimo ingresso;
- $\beta \in \mathbb{N}_n \setminus \{0\}$ è l'indice usato per fare riferimento alla β -esima uscita;
- $\text{ITAE}(\beta)$ è il valore del criterio ITAE applicato alla β -esima uscita;
- $y_{ref}^{(\beta)}$ è il riferimento che la β -esima uscita deve seguire;
- $y^{(\beta)}(k)$ è il k -esimo valore della β -esima uscita.

Total Square Variation

Criterio sfruttato per la valutazione dell'aggressività dell'azione di controllo:

$$\text{TSV}(\alpha) = \frac{1}{\tau_s} \sum_{k=1}^{T_{sim}-1} \left[u^{(\alpha)}(k+1) - u^{(\alpha)}(k) \right]^2 \Rightarrow \text{TSV} \in \mathbb{R}^m.$$

Il criterio *Total Square Variation* (TSV) guarda alla smoothness del segnale di controllo. Nella fattispecie, viene usato per valutare l'efficacia di un controllore nel minimizzare le variazioni del segnale di controllo [6]. Si osservi che in fase di ottimizzazione la moltiplicazione per la costante $1 \div \tau_s$ non produce alcun effetto, dunque verrà ignorata nel proseguo.

Integral Time Absolute Error

Criterio sfruttato per la valutazione della velocità di convergenza al setpoint:

$$\text{ITAE}(\beta) = \sum_{k=1}^{T_{sim}} k \tau_s \left| y_{ref}^{(\beta)} - y^{(\beta)}(k) \right| \Rightarrow \text{ITAE} \in \mathbb{R}^n.$$

Il criterio *Integral Time Absolute Error* (ITAE) pesa gli errori nel tempo per ciascuna uscita del sistema, quindi per tempi elevati i piccoli errori assumono un peso non trascurabile in fase di minimizzazione della funzione di costo [6].

Funzione di costo

Sfruttando il parametro $w \in [0, 1]$ i due criteri TSV e ITAE possono essere messi in relazione per mezzo della seguente funzione di costo:

$$\ell(w|\text{TSV}, \text{ITAE}) = w \frac{1}{m} \sum_{\alpha=1}^m \text{TSV}(\alpha) + (1-w) \frac{1}{n} \sum_{\beta=1}^n \text{ITAE}(\beta).$$

Facendo variare il parametro w all'interno del range $[0, 1]$ è possibile utilizzare tale funzione di costo per la valutazione del trade-off tra TSV e ITAE.

Normalizzazione

Un problema che si è riscontrato in fase di valutazione della funzione di costo è stato relativo alla differenza di scala che sussiste tra i valori di $\text{TSV}(\alpha)$ e $\text{ITAE}(\beta)$. Ciò che si è dovuto fare per rendere i valori confrontabili tra loro, e dunque per rendere sensato il criterio adottato per la valutazione del trade-off, è stato implementare due strategie di normalizzazione, la prima per i valori calcolati secondo il criterio TSV , la seconda per i valori calcolati secondo il criterio ITAE . Per entrambe le normalizzazioni si è seguita la stessa strategia. In particolare, è lecito assumere che, al termine di una prova effettuata con una parametrizzazione, sia $\text{TSV}(\alpha)$ sia $\text{ITAE}(\beta)$ siano compresi tra un valore minimo ed un valore massimo:

$$\text{lb}_{\text{TSV}(\alpha)} \leq \text{TSV}(\alpha) \leq \text{ub}_{\text{TSV}(\alpha)} \quad \text{lb}_{\text{ITAE}(\beta)} \leq \text{ITAE}(\beta) \leq \text{ub}_{\text{ITAE}(\beta)}$$

Per costruzione:

$$\text{lb}_{\text{TSV}(\alpha)} = 0 \quad \text{lb}_{\text{ITAE}(\beta)} = 0$$

Dividendo tutti i termini per il rispettivo upper bound:

$$0 \leq \text{TSV}_{norm}(\alpha) \leq 1 \quad 0 \leq \text{ITAE}_{norm}(\beta) \leq 1$$

$$\text{TSV}_{norm}(\alpha) = \frac{\text{TSV}(\alpha)}{\text{ub}_{\text{TSV}(\alpha)}} \quad \text{ITAE}_{norm}(\beta) = \frac{\text{ITAE}(\beta)}{\text{ub}_{\text{ITAE}(\beta)}}$$

Per identificare sia $\text{ub}_{\text{TSV}(\alpha)}$ sia $\text{ub}_{\text{ITAE}(\beta)}$ è stata sfruttata una maggiorazione individuata con un approccio intelligente: assumere che nell'arco dell'intera prova venga commesso sempre l'errore massimo. Da questa osservazione:

$$\begin{aligned} \text{ub}_{\text{TSV}(\alpha)} &= \sum_{k=1}^{T_{sim}-1} \left[u^{(\alpha)}(k+1) - u^{(\alpha)}(k) \right]^2 = \sum_{k=1}^{T_{sim}-1} \left[e_{max, \text{TSV}(\alpha)} \right]^2 \\ &= e_{max, \text{TSV}(\alpha)}^2 \sum_{k=1}^{T_{sim}-1} 1 = e_{max, \text{TSV}(\alpha)}^2 (T_{sim} - 1). \\ \text{ub}_{\text{ITAE}(\beta)} &= \sum_{k=1}^{T_{sim}} k \tau_s \left| y_{ref}^{(\beta)} - y^{(\beta)}(k) \right| = \sum_{k=1}^{T_{sim}} k \tau_s \left| e_{max, \text{ITAE}(\beta)} \right| \\ &= \tau_s \left| e_{max, \text{ITAE}(\beta)} \right| \sum_{k=1}^{T_{sim}} k = \tau_s \left| e_{max, \text{ITAE}(\beta)} \right| \frac{T_{sim}(T_{sim} + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Si ottiene così la versione aggiornata della funzione di costo:

$$\ell(w | \text{TSV}_{norm}, \text{ITAE}_{norm}) = w \frac{1}{m} \sum_{\alpha=1}^m \text{TSV}_{norm}(\alpha) + (1 - w) \frac{1}{n} \sum_{\beta=1}^n \text{ITAE}_{norm}(\beta).$$

Frontiera di Pareto

La frontiera di Pareto rappresenta l'insieme delle soluzioni ottimali in un problema di ottimizzazione multi-obiettivo. Una soluzione è considerata ottimale in senso paretiano se non è possibile migliorare un obiettivo senza peggiorarne un altro [19]. Imponendo arbitrariamente $w \in [0 : 0.05 : 1]$ è possibile ottenere:

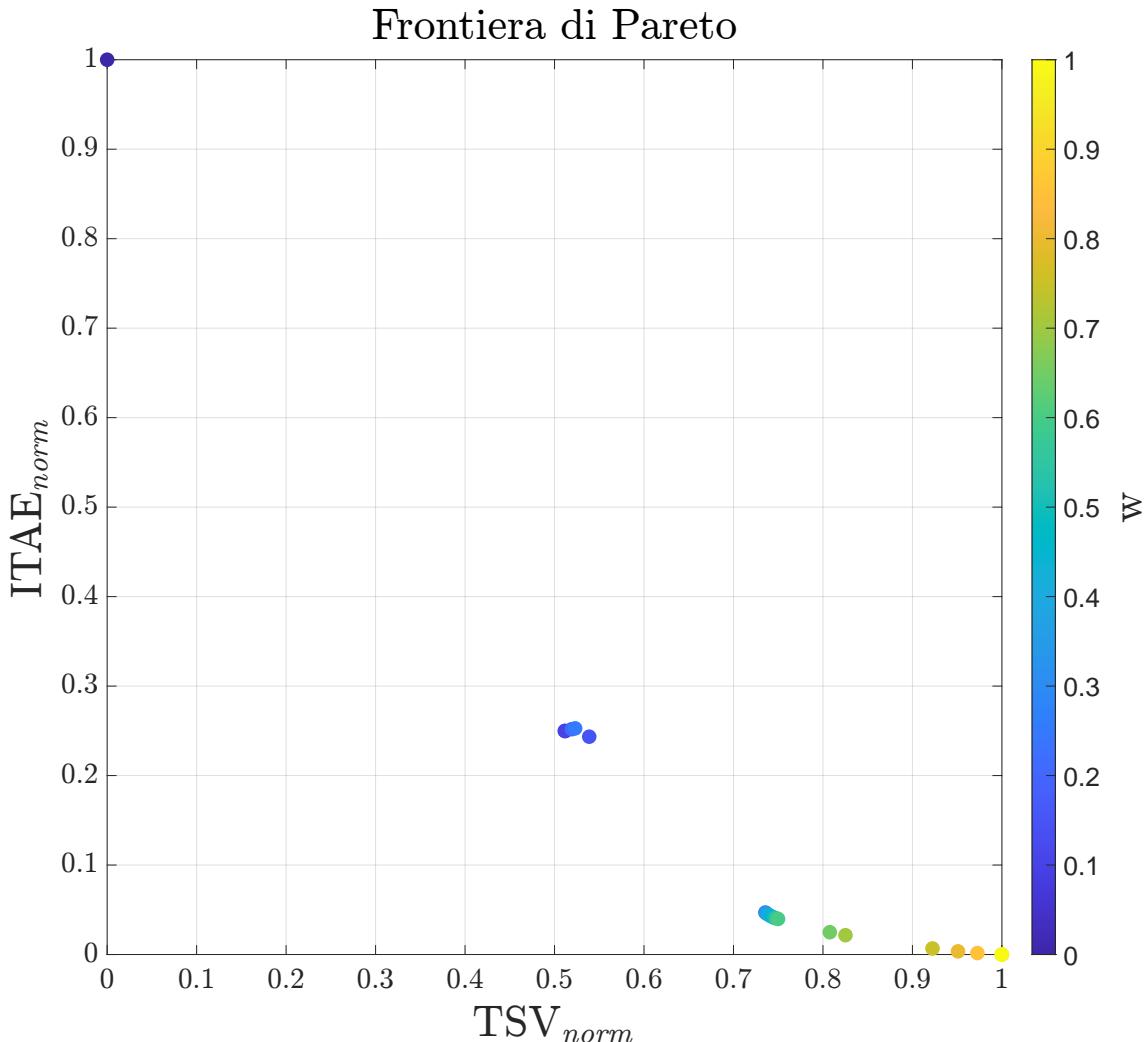


Figura 2.S: Frontiera di Pareto relativa al controllo del servomeccanismo.

I dati visualizzati in Figura 2.S sono soggetti ad una seconda normalizzazione. Quest'ultima, è stata effettuata col solo fine di riportare in un range di valori di più facile analisi tutti i dati contenuti in TSV_{norm} e $ITAE_{norm}$. La frontiera mette in evidenza il trend del controllo:

- Per $w \rightarrow 1$ si tende a dare più importanza al criterio TSV;
- Per $w \rightarrow 0$ si tende a dare più importanza al criterio ITAE.

Valutazione del trade-off

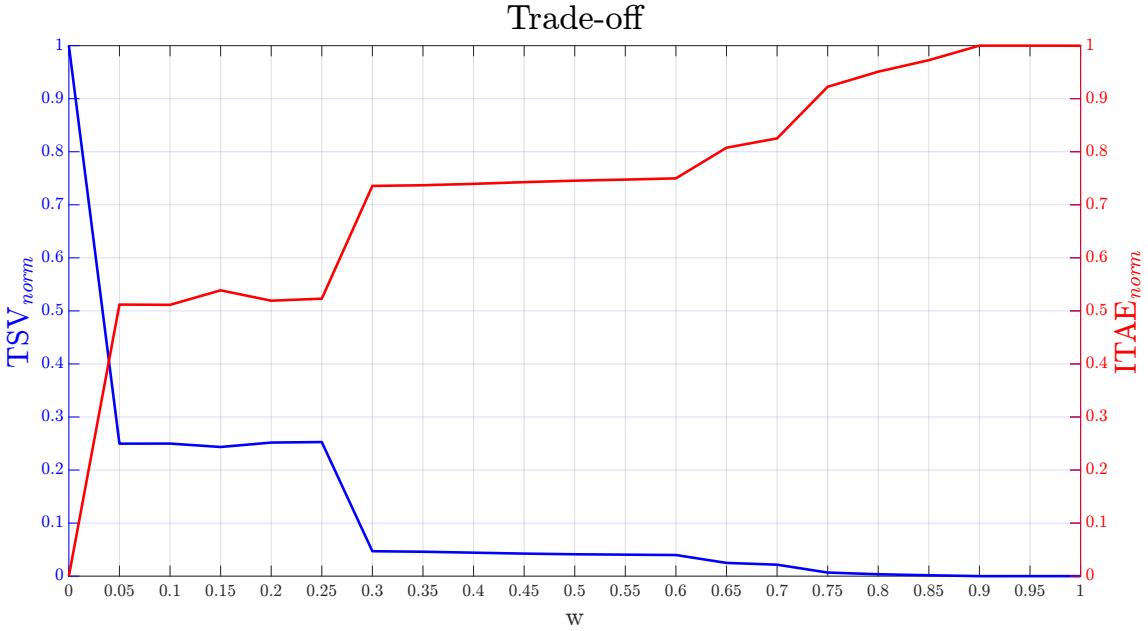


Figura 2.T: Valutazione del trade-off relativa al servomeccanismo.

Alcune considerazioni circoscritte alla Figura 2.T:

- Per $w \rightarrow 0$ è più imponente l'effetto del criterio ITAE rispetto a TSV, dunque per piccoli valori di w si hanno piccoli valori di ITAE;
- Per $w \rightarrow 1$ è più imponente l'effetto del criterio TSV rispetto a ITAE, dunque per grandi valori di w si hanno piccoli valori di TSV;
- Stando al grafico, si dovrebbe considerare come peso ottimo un valore pari a circa $w = 0.0398$ per l'estrazione dei valori ottimi di q e r . Si è deciso di utilizzare $w = 0.05$ in virtù del fatto che l'intersezione tra i grafici di TSV e ITAE nel punto di ascissa $w = 0.0398$ è dovuto ad una interpolazione elaborata arbitrariamente ad opera di Matlab, dunque non vi è garanzia che in quel punto le performance del sistema siano proprio quelle mostrate.

Parametri ottimi

I parametri ottimi ricavati dal processo di BO sono:

$w = 0$	
q	$3.715351834360240 \times 10^{-6}$
r	1.018311886983718
$w = 0.05$	
q	0.062123151795034
r	$3.910954698608074 \times 10^2$
$w = 1$	
q	0.006747226972872
r	6.139511217632677

Nel seguito sono mostrati i grafici che ritraggono, rispettivamente:

- Controllo sullo stato $x_1(t)$ = posizione angolare del motore;
- Controllo sullo stato $x_2(t)$ = posizione angolare del carico;
- Controllo sullo stato $x_3(t)$ = velocità angolare del motore;
- Controllo sullo stato $x_4(t)$ = velocità angolare del carico;
- Controllo sull'ingresso $u_1(t)$ = coppia generata dal motore;
- Controllo sull'ingresso u_2 = coppia di carico.

Nella fattispecie, tutti i grafici relativi al controllo mostrano il comportamento delle uscite e degli ingressi nei seguenti quattro casi:

- Parametri non ottimizzati imponendo arbitrariamente $q = r = 1$;
- Parametri ottimizzati sfruttando $w = 0$, nonché il peso per cui si guarda solo ed esclusivamente alla minimizzazione del tempo di convergenza al setpoint;
- Parametri ottimizzati sfruttando $w = 0.05$, nonché il peso per cui vi è un equilibrio tra l'aggressività dell'azione di controllo e la velocità di convergenza al setpoint;
- Parametri ottimizzati sfruttando $w = 1$, nonché il peso per cui si guarda solo ed esclusivamente alla minimizzazione dell'aggressività dell'azione di controllo.

Controllo sullo stato

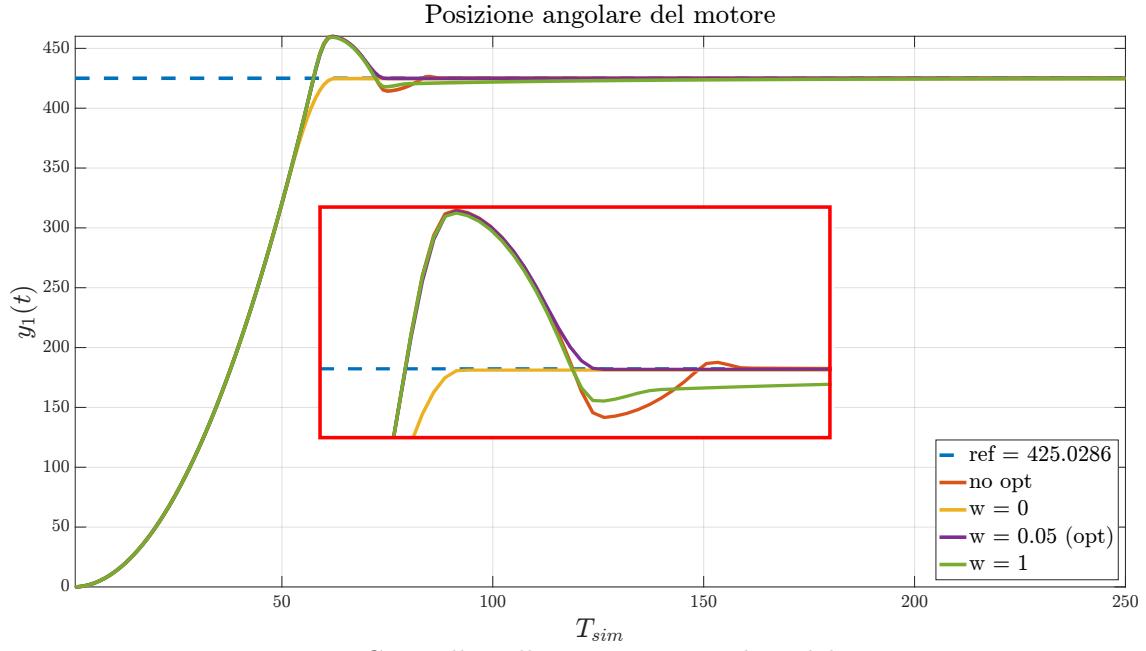


Figura 2.U: Controllo sulla posizione angolare del motore.

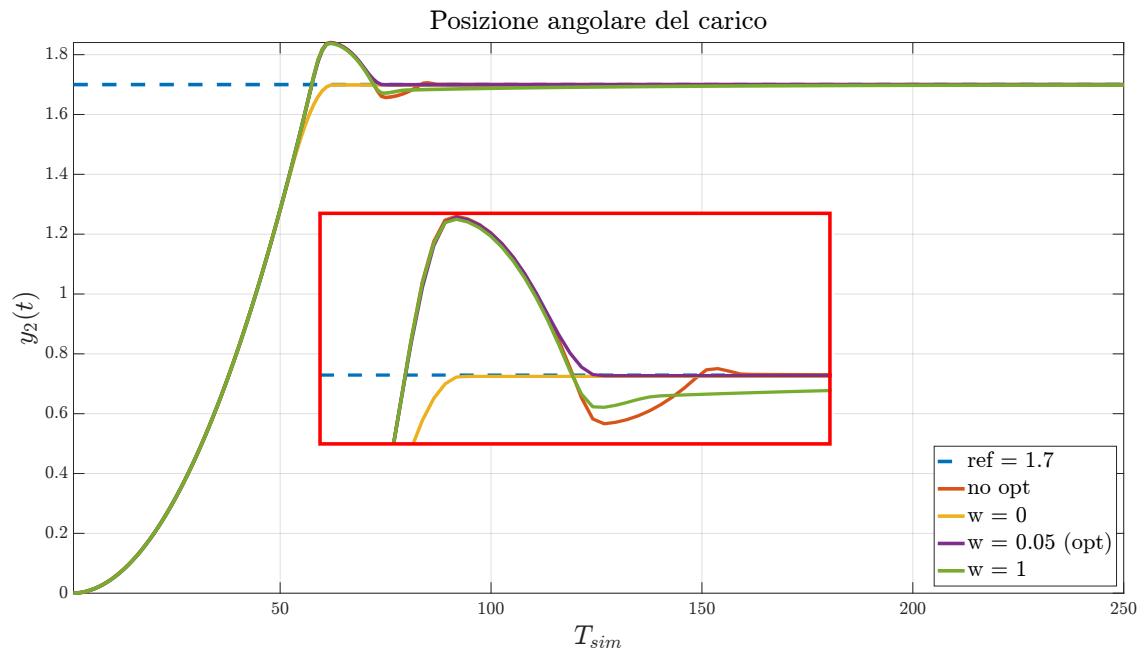


Figura 2.V: Controllo sulla posizione angolare del carico.

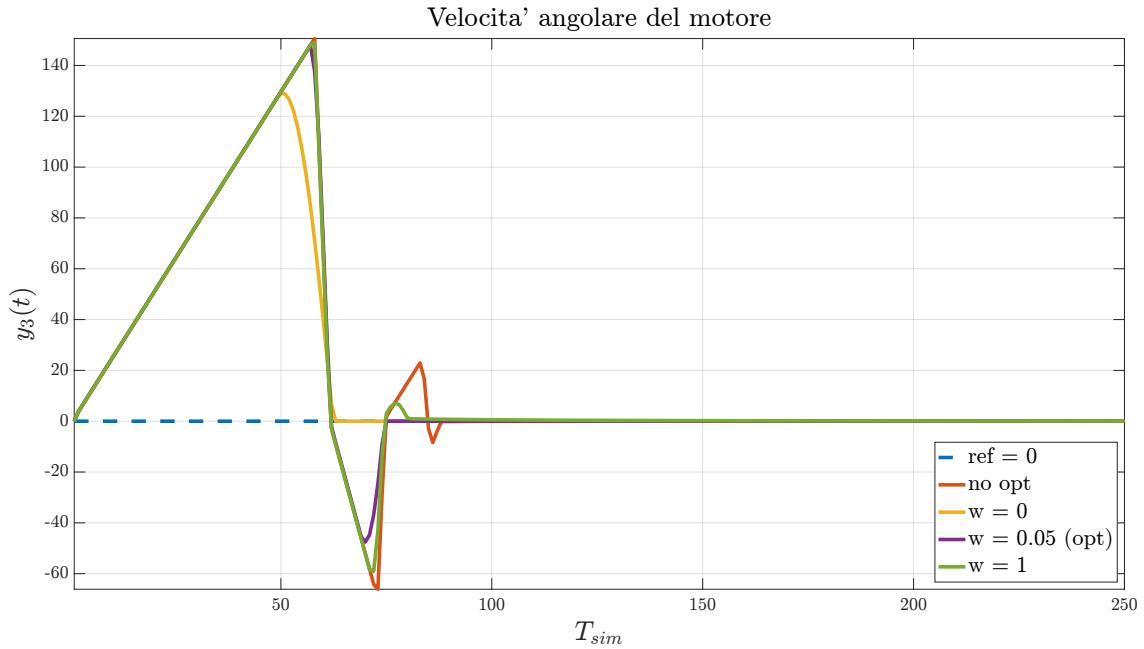


Figura 2.W: Controllo sulla velocità angolare del motore.

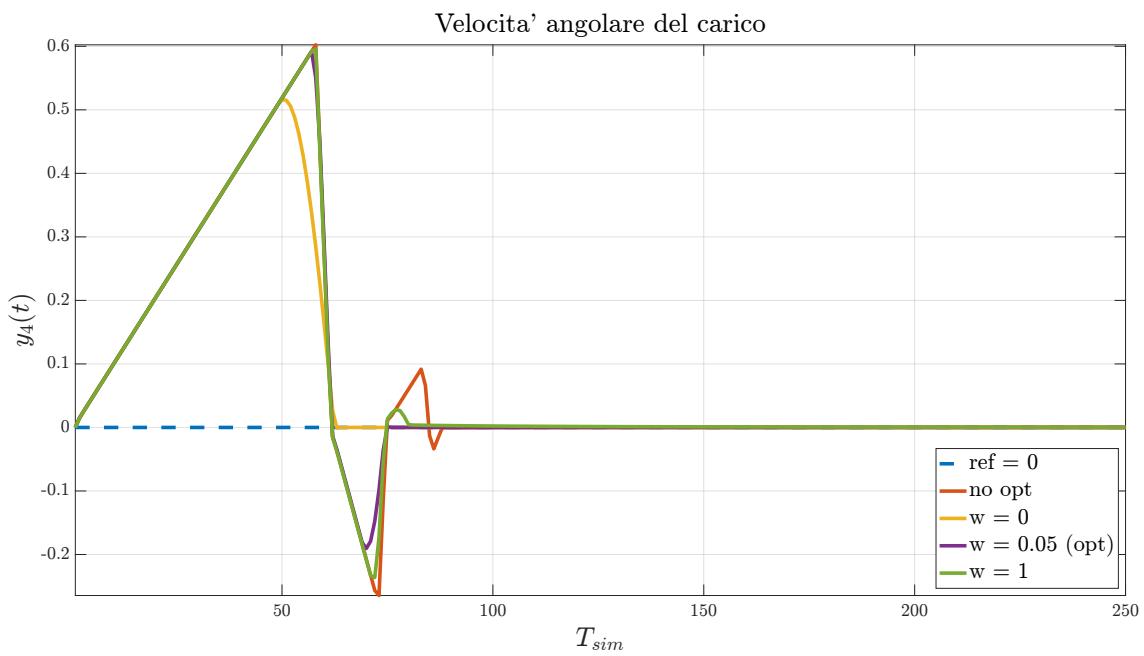


Figura 2.X: Controllo sulla velocità angolare del carico.

Controllo sull'ingresso

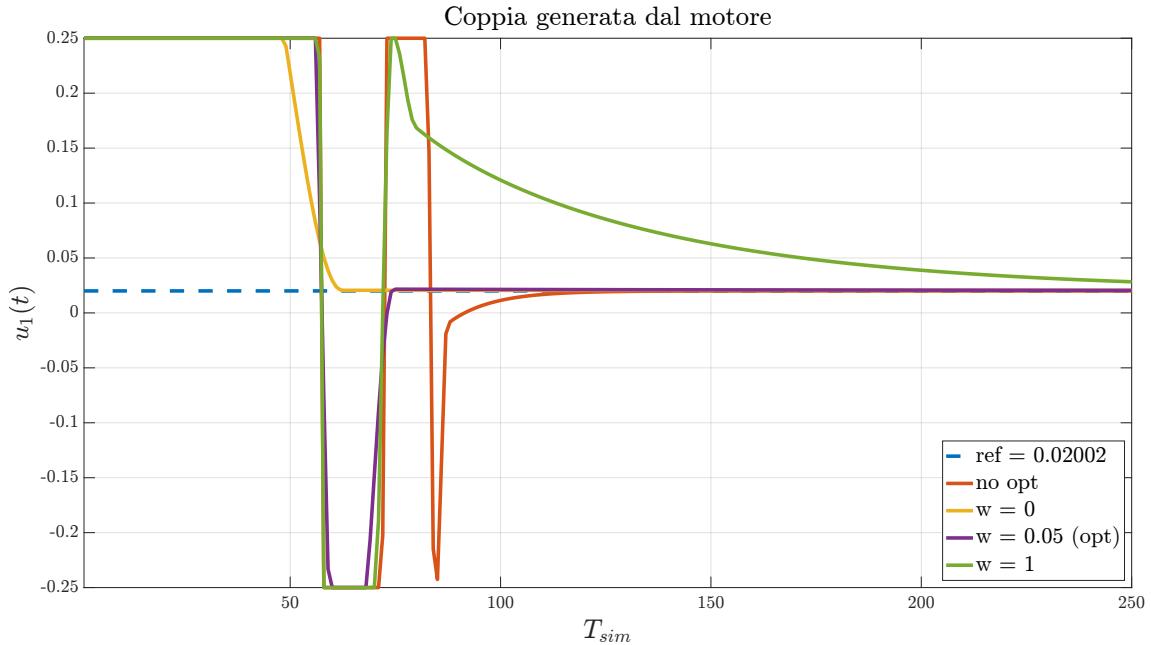


Figura 2.Y: Controllo sulla coppia generata dal motore.

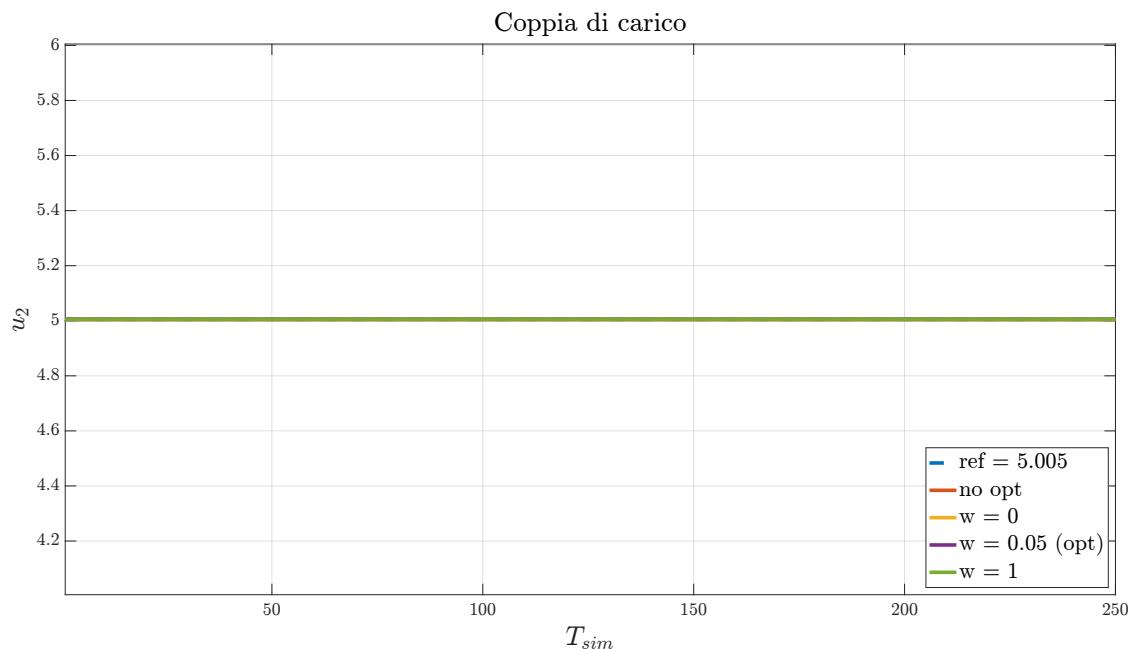


Figura 2.Z: Controllo sulla coppia di carico.

Commento conclusivo

Analizzando sia i grafici relativi agli stati $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sia quelli relativi agli stati $x_3(t)$ e $x_4(t)$ salta all'occhio un aspetto particolare: le forme si ripetono al netto di un fattore di scala. Ciò è dovuto alla natura elastica della trasmissione. Il servomeccanismo sotto esame, infatti, prevede che il motore sia collegato al carico per mezzo di una trasmissione elastica (caso reale). Il fatto che la trasmissione sia elastica implica che il sistema sia soggetto ad una dinamica di scorrimento, la quale, generalmente, viene modellata sfruttando sia una molla torsionale con costante elastica K_{el} sia un ammortizzatore torsionale con coefficiente di smorzamento D_{el} . Se la trasmissione fosse rigida (caso ideale), la coppia $\tau_m(t)$ generata dal motore verrebbe interamente trasmessa al carico e, in tal caso, i grafici, oltre che avere le medesime forme, sarebbero anche perfettamente sovrapponibili dal punto di vista delle scale. La sua elasticità fa sì che $\tau_m(t)$ venga trasmessa al carico diminuita di k volte. Questa è la motivazione relativa alla riduzione di scala che sussiste sia tra i grafici di $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sia tra quelli di $x_3(t)$ e $x_4(t)$. Ad ogni modo, seppur la trasmissione sia elastica, non ha comportamenti anomali: il motore rotea in una direzione per generare la coppia $\tau_m(t)$ e la trasmissione riporta al carico la coppia ridotta facendolo roteare nella stessa direzione. Questa è la motivazione relativa alla ripetizione delle forme dei grafici.

Capitolo 3

MODELLISTICA PER UN FORNO INDUSTRIALE

3.1 Panoramica del sistema da controllare

La trattazione è interamente frutto di una rielaborazione di quanto esposto in [4, 5]. Prima di procedere con la fase modellazione si ritiene utile fornire una panoramica ad alto livello del sistema studiato per capire quali elementi lo compongono.

Vista frontale

La Figura 3.A mostra una rappresentazione pittografica della vista frontale del forno industriale oggetto di studio:

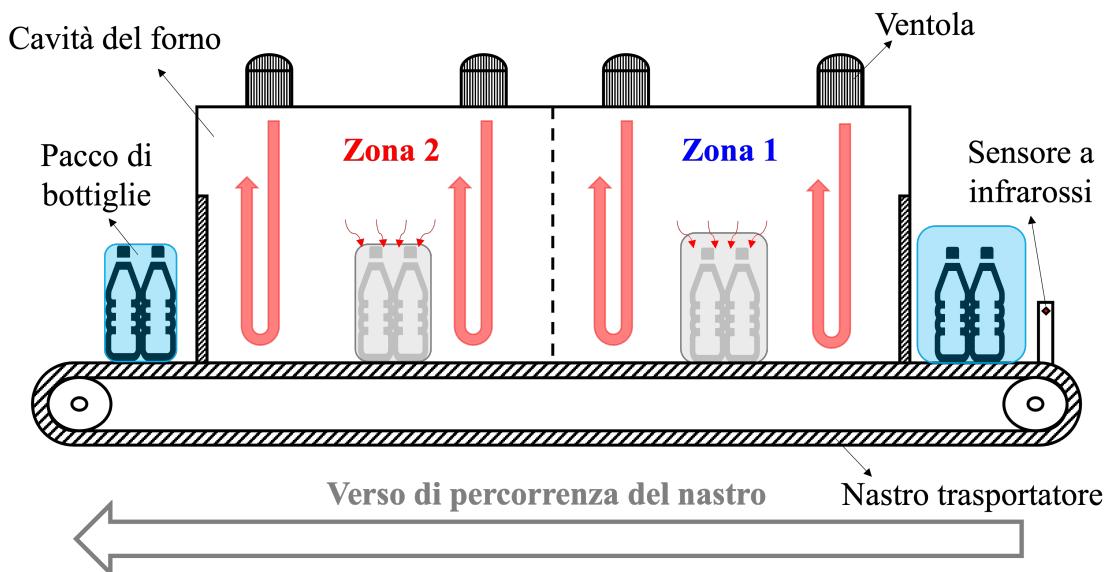


Figura 3.A: Rappresentazione pittografica della vista frontale.

Il forno è lungo 4.10m, alto 2.20m, largo 1.40m e ha un volume di 2.26m³; al suo interno avviene il processo di packaging mediante lo scambio termico tra l'aria calda e il prodotto da trattare. Al suo ingresso i pacchi di bottiglie sono avvolti dal film in maniera grossolana e il passaggio attraverso il forno ha come obiettivo quello di somministrare al film una certa quantità di calore tale da far sì che il prodotto finale risulti imballato. Il nastro trasportatore è lungo 5.70m ed è l'elemento che consente ai pacchi di bottiglie di fluire all'interno della cavità. La sua velocità non è fissa, ma varia sulla base del ritmo di produzione stabilito. Il sensore a infrarossi, posizionato all'entrata del forno, ha come scopo quello di rilevare se stanno entrando nuovi pacchi di bottiglie. Le ventole, posizionate sul tetto del forno, consentono all'aria al suo interno di circolare, permettendo, dunque, il trattamento del prodotto, nonché il restringimento del film plastico termoretraibile.

Vista dall'alto

La Figura 3.B mostra una rappresentazione pittografica della vista dall'alto del forno industriale oggetto di studio:

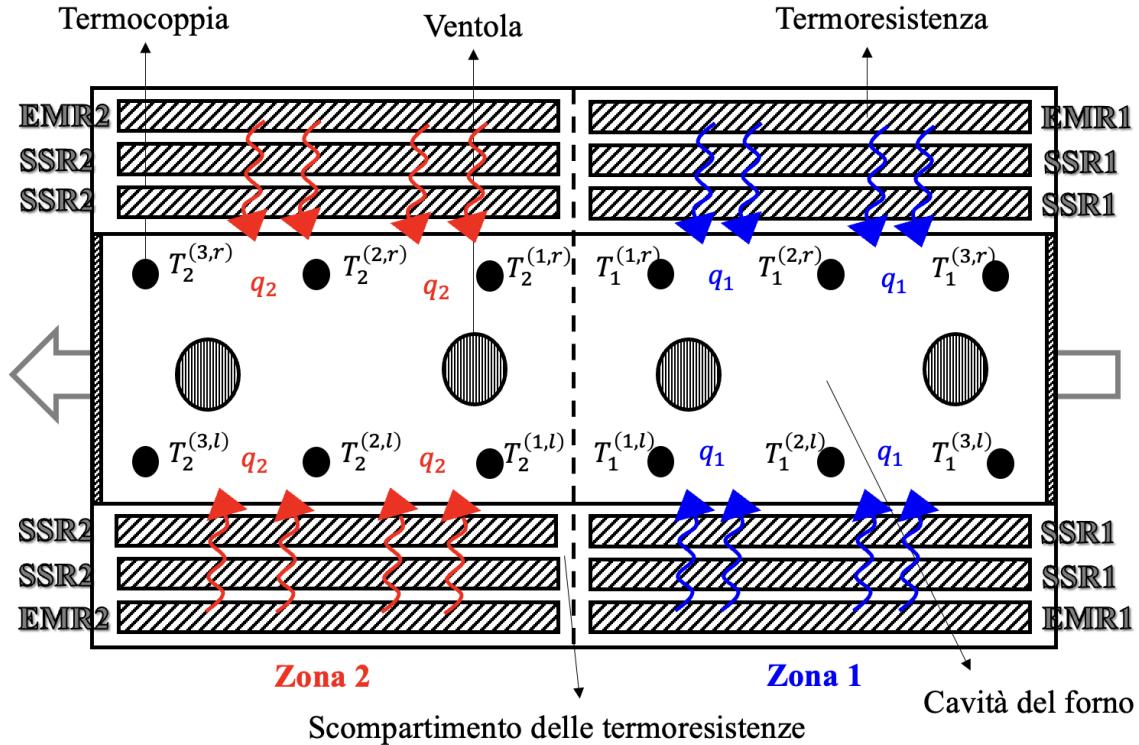


Figura 3.B: Rappresentazione pittografica della vista dall'alto.

Il forno è diviso in due zone indipendenti l'una dall'altra, denominate, rispettivamente, zona 1 e zona 2. Come si evince analizzando la Figura 3.B, le due zone sono simmetriche. Infatti, entrambe sono dotate di sei termocoppie, sei termoresistenze e due ventilatori. Le termocoppie, individuate dai pallini neri, sono sensori che consentono di ottenere una lettura della temperatura. Le termoresistenze, individuate dai rettangoli a strisce bianche e nere, sono gli strumenti adibiti alla generazione del calore. Per svolgere il loro compito, vengono pilotate in tensione a coppie da due tipologie di teleruttori: *Solid-State Relay* (SSR, telerutture statico) e *Electro-Mechanical Relay* (EMR, telerutture meccanico). Il metodo di attuazione usato è il *Pulse-Width Modulation* (PWM). In entrambe le zone, SSR pilota due coppie di termoresistenze, mentre EMR ne pilota una sola (SSR1 e EMR1 sono i teleruttori responsabili della generazione di calore nella zona 1, mentre SSR2 e EMR2 sono i teleruttori responsabili della generazione di calore nella zona 2).

3.2 Modello circuitale equivalente

La prima fase del processo di modellizzazione matematica del sistema reale consiste nel derivarne un circuito termo-elettrico equivalente. All'interno del circuito rappresentato in Figura 3.C si fa riferimento ai seguenti parametri:

- $T_i^{(k,j)}(t) \in \mathbb{R} [^{\circ}\text{C}]$ è la temperatura rilevata dalla termocoppia sita in:
 - $i \in \{1, 2\}$ denota la zona di appartenenza della termocoppia;
 - $k \in \{1, 2, 3\}$ denota la sezione di competenza di ogni termocoppia all'interno della zona i -esima;
 - $j \in \{l, r\}$ denota il lato del forno in cui è posizionata la termocoppia.
- $T_a(t) = \bar{T}_a, \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \bar{T}_a \in \mathbb{R} [^{\circ}\text{C}]$ è la temperatura ambiente assunta costante;
- $q_i(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0} [\frac{\text{J}}{\text{s}}]$ è il flusso di calore prodotto dalle termoresistenze della zona i . Si assume che $q_i(t)$ si diffonda equamente all'interno di tutte le sezioni della medesima zona. Dunque, per ogni sezione: $q_i^{(k,j)} = q_i(t) \div 6$;
- $R_i^{(k,j)} \in \mathbb{R}_{>0} [\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{J}}\text{s}]$ è la resistenza che modella lo scambio termico tra le pareti del forno della zona i , sezione k , lato j e l'ambiente;
- $R_{T_i}^{(k',j)} \in \mathbb{R}_{>0}, k' \in \{1, 2\} [\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{J}}\text{s}]$ è la resistenza che modella lo scambio termico tra due sezioni della stessa zona i e lato j ;
- $R_{T_{12}}^j \in \mathbb{R}_{>0} [\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{J}}\text{s}]$ è la resistenza che modella lo scambio termico che avviene su ogni lato j tra le due zone del forno;
- $R_{T_{rl}} \in \mathbb{R}_{>0} [\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{J}}\text{s}]$ è la resistenza che modella lo scambio termico tra la parte sinistra e la parte destra del forno e viceversa. Per semplicità si assume che tale scambio sia lo stesso in tutte le sezioni del forno;
- $C_z \in \mathbb{R}_{>0} [\frac{\text{J}}{^{\circ}\text{C}}]$ è la capacità termica dell'aria in ogni sezione, nonché la grandezza che indica quanto calore è in grado di immagazzinare ciascuna sezione. Il volume del forno è di $V_{forno} = 2.26\text{m}^3$ e, idealmente, può essere diviso in 12 sezioni (tante sezioni quante sono le termocoppie), ciascuna con un volume di $V_{sezione} = \frac{V_{forno}}{12}$. Sapendo che l'aria ha un calore specifico $c_{aria} = 1000 \frac{\text{J}}{\text{kg}^{\circ}\text{C}}$ e una densità $\rho_{aria} = 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$:

$$C_z = c_{aria} \rho_{aria} V_{sezione} = 1000 \frac{\text{J}}{\text{kg}^{\circ}\text{C}} 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{2.26\text{m}^3}{12} \approx 231 \frac{\text{J}}{^{\circ}\text{C}}.$$

Zona 1

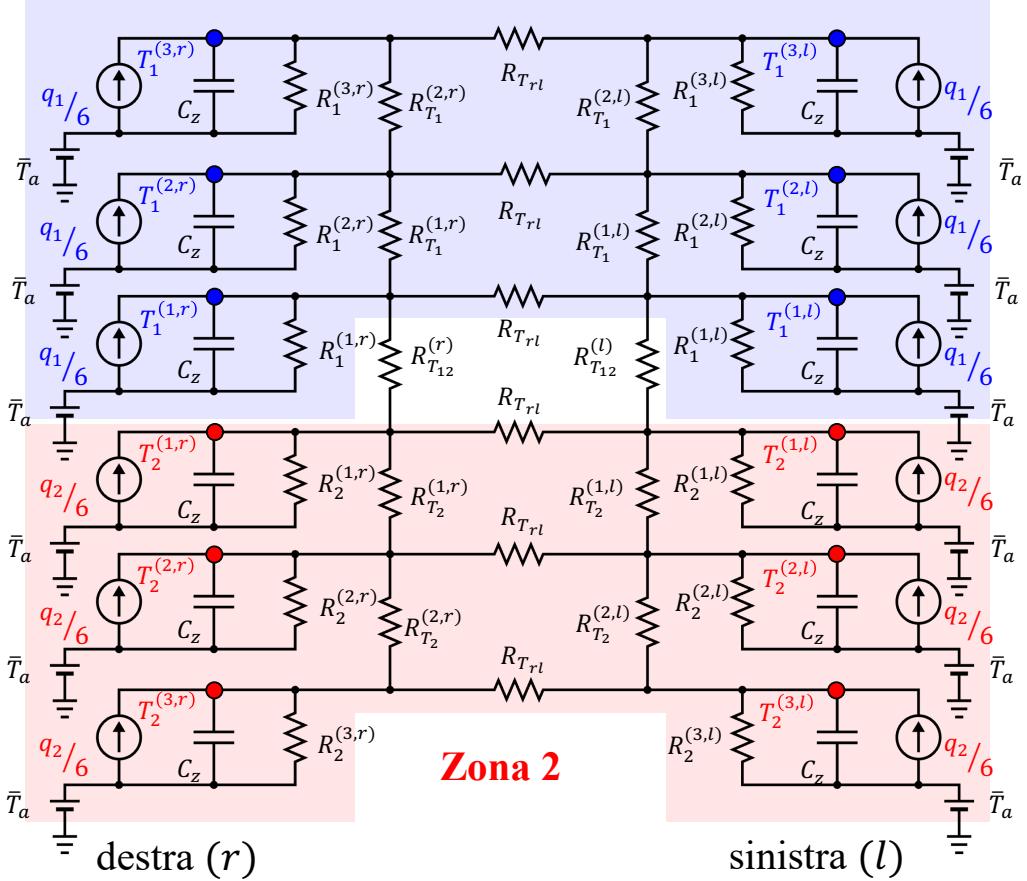


Figura 3.C: Circuito termo-elettrico equivalente.

È possibile dimostrare che il circuito termo-elettrico mostrato in Figura 3.C può essere descritto da:

$$\dot{T}(t) = A_{TT}T(t) + B_q q(t) + b_T T_a(t), \quad (3.1)$$

in cui:

- $T(t)$ contiene le temperature registrate da ogni termocoppia

$$T(t) = [T_1^{(3,r)}(t) \ T_1^{(3,l)}(t) \ \dots \ T_2^{(3,r)}(t) \ T_2^{(3,l)}(t)]^T \in \mathbb{R}^{n_T}, n_T = 12;$$

- $q(t)$ contiene i calori generati dalle termoresistenze in ogni zona

$$q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n_q}, n_q = 2;$$

- $A_{TT} \in \mathbb{R}^{(n_T, n_T)}$ è la matrice che descrive la dinamica delle temperature;
- $B_q \in \mathbb{R}^{(n_T, n_q)}$ è la matrice che descrive la dinamica dei flussi di calore;
- $b_T \in \mathbb{R}^{n_T}$ è il vettore che descrive l'impatto della temperatura ambiente.

3.3 Modellazione per la generazione del calore

Per illustrare il meccanismo che regola la generazione del calore all'interno del forno per mezzo delle termoresistenze si fa riferimento all'architettura 3.D:

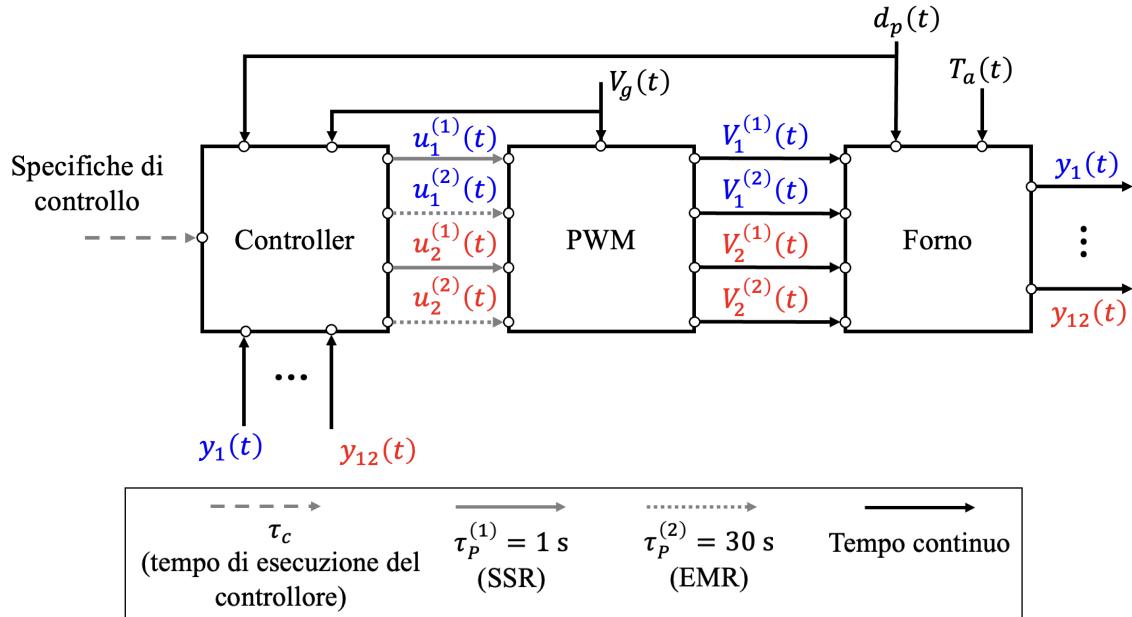


Figura 3.D: Architettura implementata per il controllo di temperatura del forno industriale.

Controller

Il controller è un sistema con:

- Input:
 - Specifiche di controllo;
 - $y_1(t), \dots, y_{12}(t)$ sono i valori delle temperature letti dalle termocoppie;
 - $V_g(t) \in \mathbb{R}_{>0} [\text{V}]$ è il valore della tensione di rete;
 - $d_p(t) \in \{0, 1\}$ indica la presenza ($d_p(t) = 1$) o l'assenza ($d_p(t) = 0$) di pacchi all'ingresso del forno.
- Output:
 - $u_i^{(r)}(t), i \in \{1, 2\}, r \in \{1, 2\}$ sono valori di duty cycle da fornire in input al blocco PWM: $r = 1$ fa riferimento agli SSR, $r = 2$ agli EMR.

PWM

Prima di procedere, si introduce una notazione apposita:

- $s(t) \in \mathbb{R}$ è un generico segnale continuo;
- $s(k; \tau_s) \in \mathbb{R}$ è il segnale discreto ottenuto campionando il segnale $s(t)$ al tempo di campionamento $\tau_s \in \mathbb{R}_{>0}$ [s].

La PWM è un metodo di attuazione che permette di modulare, sfruttando la variazione di un segnale ad onda quadra, la tensione. Le tensioni $V_i^{(r)}(t)$ sono segnali PWM generati in corrispondenza dei duty cycles $u_i^{(r)}(t)$. I duty cycles possono essere visti come segnali a tempo discreto campionati con un tempo di campionamento pari ad un certo periodo PWM e mantenuti costanti durante l'intero periodo PWM mediante uno ZOH.

Sapendo che i teleruttori SSR e EMR operano con diversi periodi:

- $\tau_P^{(1)} \in \mathbb{R}_{>0}$ [s] è il periodo PWM degli SSR. Nel sistema in esame: $\tau_P^{(1)} = 1\text{s}$,
- $\tau_P^{(2)} \in \mathbb{R}_{>0}$ [s] è il periodo PWM degli EMR. Nel sistema in esame: $\tau_P^{(2)} = 30\text{s}$,

è possibile specificare:

$$u_i^{(r)}(t) = u_i^{(r)} \left(k; \tau_P^{(r)} \right), \forall t : k\tau_P^{(r)} \leq t < (k+1)\tau_P^{(r)}.$$

Definendo il tempo di accensione all'indice k come:

$$\tau_{ON_i}^{(r)} \left(k; \tau_P^{(r)} \right) = u_i^{(r)} \left(k; \tau_P^{(r)} \right) \tau_P^{(r)},$$

si può giungere a:

$$\begin{aligned} V_i^{(r)}(t) &= \begin{cases} V_g(t) & \text{se } k\tau_P^{(r)} \leq t < \left[k + u_i^{(r)} \left(k; \tau_P^{(r)} \right) \right] \tau_P^{(r)} \\ 0 & \text{se } \left[k + u_i^{(r)} \left(k; \tau_P^{(r)} \right) \right] \tau_P^{(r)} \leq t < (k+1)\tau_P^{(r)} \end{cases} \\ &= \begin{cases} V_g(t) & \text{se } k\tau_P^{(r)} \leq t < k\tau_P^{(r)} + \tau_{ON_i}^{(r)} \left(k; \tau_P^{(r)} \right) \\ 0 & \text{se } k\tau_P^{(r)} + \tau_{ON_i}^{(r)} \left(k; \tau_P^{(r)} \right) \leq t < (k+1)\tau_P^{(r)} \end{cases}. \end{aligned}$$

Dunque, il blocco PWM gestisce i teleruttori di entrambe le zone i : sulla base del valore assunto dal duty cycle $u_i^{(r)}(t)$, pilota il teleruttore r -esimo per fare in modo che questo imponga la tensione $V_i^{(r)}(t)$ [V] ai capi della/e coppia/e di termoresistenze pilotata/e da quello stesso teleruttore:

- SSR1, in corrispondenza di $u_1^{(1)}(t)$, impone la tensione $V_1^{(1)}(t)$ ai capi di due coppie di termoresistenze;
- EMR1, in corrispondenza di $u_1^{(2)}(t)$, impone la tensione $V_1^{(2)}(t)$ ai capi di una coppia di termoresistenze;
- SSR2, in corrispondenza di $u_2^{(1)}(t)$, impone la tensione $V_2^{(1)}(t)$ ai capi di due coppie di termoresistenze;
- EMR2, in corrispondenza di $u_2^{(2)}(t)$, impone la tensione $V_2^{(2)}(t)$ ai capi di una coppia di termoresistenze.

Il calore immesso nel forno è generato dalle termoresistenze per effetto Joule:

$$q_i(t) = \frac{1}{R_{heat}} \left(2V_i^{(1)}(t)^2 + V_i^{(2)}(t)^2 \right), \quad (3.2)$$

in cui:

- $R_{heat} \in \mathbb{R}_{>0} [\Omega]$ è la resistenza ohmica di una coppia di termoresistenze. Il suo valore è fornito dal costruttore: $R_{heat} = 2.240 \Omega$.

Definendo:

$$V(t) = \begin{bmatrix} V_1^{(1)}(t) \\ V_1^{(2)}(t) \\ V_2^{(1)}(t) \\ V_2^{(2)}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n_V}, n_V = 4 \implies V_{sq}(t) = V(t) \odot V(t) = \begin{bmatrix} V_1^{(1)}(t)^2 \\ V_1^{(2)}(t)^2 \\ V_2^{(1)}(t)^2 \\ V_2^{(2)}(t)^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n_V},$$

diventa possibile riscrivere (3.2) in forma matriciale come:

$$q(t) = B_{V_{sq}} V_{sq}(t),$$

in cui:

$$B_{V_{sq}} = \frac{1}{R_{heat}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_q \times n_V}.$$

3.4 Modellazione per la propagazione del calore

Le termoresistenze sono situate in un apposito compartimento all'interno del forno, perciò, affinché il forno si scaldi, il calore, generato in accordo con (3.2), si deve propagare da tale compartimento verso la cavità in cui avviene il passaggio dei pacchi di bottiglie. La propagazione non è immediata; per modellare tale lentezza si è optato per un filtraggio di (3.2) per mezzo di un filtro del primo ordine:

$$\dot{q}_i^{(f)}(t) = -\frac{1}{\tau_i^{(f)}} q_i^{(f)}(t) + \frac{1}{\tau_i^{(f)}} q_i(t), \quad (3.3)$$

in cui:

- (f) denota il fatto che il calore generato è stato filtrato;
- $\tau_i^{(f)} \in \mathbb{R}_{>0}$ [s] è la costante di tempo del filtro agente nella zona i -esima.

Sostituendo (3.2) in (3.3) e convertendo il tutto in forma matriciale si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{q}^{(f)}(t) &= A_{ff} q^{(f)}(t) + B_q^{(f)} q(t) \\ &= A_{ff} q^{(f)}(t) + B_f V_{sq}(t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

in cui:

- $q^{(f)}(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n_q}$
- $q^{(f)}(t) = \begin{bmatrix} q_1^{(f)}(t) \\ q_2^{(f)}(t) \end{bmatrix};$
- $A_{ff} \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$ è la matrice che descrive la dinamica dei flussi di calore filtrati;
- $B_q^{(f)} \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$ è la matrice che descrive l'impatto dei flussi di calore;
- $B_f \in \mathbb{R}^{n_q \times n_V}$ è la matrice che descrive l'impatto delle tensioni.

Avendo definito (3.4), occorre modificare opportunamente (3.1):

$$\dot{T}(t) = A_{Tf} q^{(f)}(t) + A_{TT} T(t) + b_T T_a(t), \quad (3.5)$$

in cui:

- $A_{Tf} \in \mathbb{R}^{n_T \times n_q}$, $A_{Tf} = B_q$ è la matrice che descrive l'impatto dei calori filtrati.

3.5 Modellazione del disturbo

La transizione dei pacchi di bottiglie all'interno del forno ha un impatto sulla temperatura registrata da ogni termocoppia. Le bottiglie, infatti, entrando nel forno, causano l'uscita di aria calda dalla parte opposta. La conseguenza è che la temperatura globale all'interno del forno diminuisce nel momento in cui la produzione è avviata. Occorre dunque modellare anche la relazione che sussiste tra il disturbo sulle temperature indotto dall'introduzione dei pacchi di bottiglie nel forno e le temperature registrate dalle termocoppe. Analogamente al caso precedente, si procede con un filtro del primo ordine:

$$\delta \dot{T}_{p_i}^{(k,j)}(t) = -\frac{1}{\tau_{p_i}^{(k,j)}} \delta T_{p_i}^{(k,j)}(t) + \frac{\mu_{p_i}^{(k,j)}}{\tau_{p_i}^{(k,j)}} d_p(t), \quad (3.6)$$

in cui:

- $\delta T_{p_i}^{(k,j)}(t) \in \mathbb{R} [\text{°C}]$ è la variazione sulla temperatura $T_i^{(k,j)}(t)$;
- $\mu_{p_i}^{(k,j)} \in \mathbb{R} [\text{°C}]$ è il guadagno del filtro che agisce nella sezione k -esima all'interno della zona i -esima, sul lato j -esimo;
- $\tau_{p_i}^{(k,j)} \in \mathbb{R}_{>0} [\text{s}]$ è la costante di tempo del filtro che agisce nella sezione k -esima all'interno della zona i -esima, sul lato j -esimo.

È immediato esprimere (3.6) in forma vettoriale:

$$\delta \dot{T}_p(t) = A_{pp} \delta T_p(t) + b_p d_p(t), \quad (3.7)$$

in cui:

- $\delta T_p(t) \in \mathbb{R}^{n_T}$ contiene le variazioni di temperatura

$$\delta T_p(t) = \begin{bmatrix} \delta T_{p_1}^{(3,r)}(t) & \delta T_{p_1}^{(3,l)}(t) & \dots & \delta T_{p_2}^{(3,r)}(t) & \delta T_{p_2}^{(3,l)}(t) \end{bmatrix}^T;$$

- $A_{pp} \in \mathbb{R}^{(n_T \times n_T)}$ è la matrice che descrive l'impatto che ha la variazione di temperatura indotta dal passaggio dei pacchi attraverso il forno;
- $b_p \in \mathbb{R}^{n_T}$ è il vettore che descrive l'impatto che ha il passaggio dei pacchi attraverso il forno.

3.6 Modello continuo in variabili di stato

Considerando congiuntamente (3.4), (3.5) e (3.7) e ricordando che l’obiettivo finale è ottenere una lettura delle temperature all’interno del forno, si può definire il seguente sistema non lineare a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{q}^{(f)}(t) &= A_{ff}q^{(f)}(t) + B_f V_{sq}(t) \\ \dot{T}(t) &= A_{Tf}q^{(f)}(t) + A_{TT}T(t) + b_T T_a(t) \\ \dot{\delta T}_p(t) &= A_{pp}\delta T_p(t) + b_p d_p(t) \\ y(t) &= T(t) + \delta T_p(t) \end{cases}. \quad (3.8)$$

È possibile fornire una rappresentazione del sistema 3.8 nella forma tipica prevista dalla teoria dell’automatica, ovvero in variabili di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), d(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}.$$

Si possono individuare i seguenti attori:

- Stati:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q^{(f)}(t) \\ T(t) \\ \delta T_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x}, n_x = n_q + n_T + n_T = n_q + 2n_T = 26;$$

- Ingressi:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1^{(1)}(t) \\ u_1^{(2)}(t) \\ u_2^{(1)}(t) \\ u_2^{(2)}(t) \end{bmatrix} \in [0, 1]^{n_u}, n_u = 4;$$

- Disturbi:

$$d(t) = \begin{bmatrix} V_g(t) \\ T_a(t) \\ d_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \times \{0, 1\};$$

- Uscite:

$$y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}, n_y = n_T = 12;$$

- Effetto degli stati sulle uscite:

$$C = \begin{bmatrix} 0_{n_T \times n_q} & I_{n_T \times n_T} & I_{n_T \times n_T} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}.$$

3.7 Modello discreto in variabili di stato

La successiva fase del processo di modellazione è la discretizzazione del sistema 3.8. Questa fase è essenziale dato che il controllore MPC, affinché funzioni correttamente, necessita del modello a tempo discreto del sistema sotto controllo. Col fine di predisporre tutti gli elementi per la discretizzazione, si definisce una funzione $f_{u \rightarrow V^2} : [0, 1]^{n_u} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^{n_V}$ che permette di evidenziare la dipendenza di $V_{sq}(t)$ dal valore di $u(t)$ e $V_g(t)$:

$$V_{sq}(t) = f_{u \rightarrow V^2}(u(t), V_g(t)). \quad (3.9)$$

Sostituendo (3.9) in (3.4):

$$\dot{q}^{(f)}(t) = A_{ff}q^{(f)}(t) + B_f f_{u \rightarrow V^2}(u(t), V_g(t)). \quad (3.10)$$

Conseguentemente, il sistema 3.8 può essere riscritto come:

$$\begin{cases} \dot{q}^{(f)}(t) &= A_{ff}q^{(f)}(t) + B_f f_{u \rightarrow V^2}(u(t), V_g(t)) \\ \dot{T}(t) &= A_{Tf}q^{(f)}(t) + A_{TT}T(t) + b_T T_a(t) \\ \dot{\delta T_p}(t) &= A_{pp}\delta T_p(t) + b_p d_p(t) \\ y(t) &= T(t) + \delta T_p(t) \end{cases}. \quad (3.11)$$

Il processo di discretizzazione di 3.11 è sfidante per una serie di motivi, tra i quali:

- Il sistema è non lineare;
- Il tempo di campionamento τ_s , il tempo di esecuzione del controller τ_c , il periodo PWM $\tau_P^{(1)}$ degli SSR e il periodo PWM $\tau_P^{(2)}$ degli EMR possono differire l'uno dall'altro.

Per ridurre la complessità del problema, è verosimile assumere che il periodo PWM degli EMR sia un multiplo intero del periodo PWM degli SSR:

$$\tau_P^{(2)} = v\tau_P^{(1)}, v \in \mathbb{N}.$$

Inoltre, con l'obiettivo di ottenere un modello discreto con tempo di campionamento τ_s pari al tempo di esecuzione τ_c del controller per poterlo usare nel MPC, si assume:

$$\tau_c = \tau_s.$$

Infine, per come è stato elaborato il modello, il tempo di esecuzione τ_c del controller deve essere un multiplo intero del periodo PWM degli EMR:

$$\tau_c = m\tau_P^{(2)}, m \in \mathbb{N}.$$

A fronte di queste assunzioni, è possibile dimostrare che il sistema 3.11 può essere discretizzato come segue:

$$\begin{cases} q^{(f)}(k+1) = \tilde{A}_{ff}q^{(f)}(k) + \tilde{B}_f V_g(k)^2 u(k) \\ T(k+1) = \tilde{A}_{Tf}q^{(f)}(k) + \tilde{A}_{TT}T(k) + \tilde{b}_T T_a(k) \\ \delta T_p(k+1) = \tilde{A}_{pp}\delta T_p(k) + \tilde{b}_p d_p(k) \\ y(k) = T(k) + \delta T_p(k) \end{cases}. \quad (3.12)$$

Le matrici del sistema 3.12 sono ricavate dalle corrispondenti del sistema 3.11 e, pertanto, condividono con quest'ultime le dimensioni. Come si può vedere, si tratta di un modello discreto non lineare. Per ottenere un modello semplificato, ma che goda della proprietà di linearità, è possibile assumere che la tensione di rete non vari durante l'arco temporale di funzionamento del forno:

$$V_g(t) = \bar{V}_g, \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Inoltre, si può considerare nullo il termine $T_a(k)$. Ciò che succede è che il forno, prima del suo avviamento, ha una temperatura all'interno della cavità pari a quella ambiente. Le dinamiche di temperatura sono lente, dunque è verosimile assumere che, durante l'arco di funzionamento del forno, la temperatura ambiente, non variando, non influenzi la temperatura complessiva misurata dalle termocoppie. Sarà compito del controllore compensare sia il disturbo derivante dalla reale variabilità del segnale $V_g(t)$ sia il disturbo derivante dall'effettivo valore della temperatura ambiente. Di conseguenza, il sistema 3.12 diventa:

$$\begin{cases} q^{(f)}(k+1) = \tilde{A}_{ff}q^{(f)}(k) + \tilde{B}_{f,\bar{V}_g} u(k) \\ T(k+1) = \tilde{A}_{Tf}q^{(f)}(k) + \tilde{A}_{TT}T(k) \\ \delta T_p(k+1) = \tilde{A}_{pp}\delta T_p(k) + \tilde{b}_p d_p(k) \\ y(k) = T(k) + \delta T_p(k) \end{cases}, \quad (3.13)$$

in cui:

- $\tilde{B}_{f,\bar{V}_g} = \tilde{B}_f \bar{V}_g^2, \tilde{B}_{f,\bar{V}_g} \in \mathbb{R}^{n_q \times n_V}$.

Sfruttando il sistema 3.13 si può procedere con la modellazione in variabili di stato. Per giungere alla formulazione finale, tuttavia, bisogna compiere un ulteriore passo in avanti. La formulazione citata, infatti, consta di due tipologie di termini:

- Termini «controllati», ovvero quei termini che dipendono direttamente dal valore assunto dagli ingressi controllati, cioè i duty cycles;
- Termini «non controllati», ovvero quei termini il cui valore dipende solo ed esclusivamente dal valore assunto dai disturbi, cioè la transizione dei pacchi.

In generale, i disturbi sono input indesiderati del sistema sotto controllo che ne deviano il comportamento desiderato. Provengono tipicamente dall'ambiente esterno con il quale il sistema stesso interagisce. Seppur si abbia conoscenza in merito alla loro presenza, non sono esplicitamente controllabili. Nel seguito si fornisce una rappresentazione volta a mettere in evidenza quali sono i termini **controllati** e quali sono quelli **non controllati**:

$$\begin{cases} q^{(f)}(k+1) &= \tilde{A}_{ff}q^{(f)}(k) + \tilde{B}_{f,\bar{V}_g}u(k) \\ T(k+1) &= \tilde{A}_{Tf}q^{(f)}(k) + \tilde{A}_{TT}T(k) \\ \delta T_p(k+1) &= \tilde{A}_{pp}\delta T_p(k) + \tilde{b}_pd_p(k) \\ y(k) &= T(k) + \delta T_p(k) \end{cases}. \quad (3.14)$$

Partendo da questa considerazione diventa possibile definire:

- La porzione «controllata» dello stato:

$$x_c(k) = \begin{bmatrix} q^{(f)}(k) \\ T(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_{x_c}}, n_{x_c} = n_q + n_T = 14;$$

- La porzione «non controllata» dello stato:

$$x_{nc}(k) = \delta T_p(k) \in \mathbb{R}^{n_{nc}}, n_{x_{nc}} = n_T = 12;$$

- Gli input:

$$u(k) \in [0, 1]^{n_u};$$

- Il disturbo:

$$d_p(k) \in \{0, 1\};$$

- Gli output:

$$y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}.$$

Sistema 3.14 espresso in variabili di stato:

$$\begin{cases} \textcolor{red}{x}_c(k+1) &= \tilde{A}_{c,c}\textcolor{red}{x}_c(k) + \tilde{A}_{c,nc}\textcolor{green}{x}_{nc}(k) + \tilde{B}_{c,c}\textcolor{red}{u}(k) + \tilde{B}_{c,nc}\textcolor{green}{d}_p(k) \\ \textcolor{green}{x}_{nc}(k+1) &= \tilde{A}_{nc,c}\textcolor{red}{x}_c(k) + \tilde{A}_{nc,nc}\textcolor{green}{x}_{nc}(k) + \tilde{B}_{nc,c}\textcolor{red}{u}(k) + \tilde{B}_{nc,nc}\textcolor{green}{d}_p(k), \\ y(k) &= \tilde{C}_c\textcolor{red}{x}_c(k) + \tilde{C}_{nc}\textcolor{green}{x}_{nc}(k) + \tilde{D}_c\textcolor{red}{u}(k) + \tilde{D}_{nc}\textcolor{green}{d}_p(k) \end{cases}, \quad (3.15)$$

nonché:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \textcolor{red}{x}_c(k+1) \\ \textcolor{green}{x}_{nc}(k+1) \end{bmatrix} &= \tilde{A} \begin{bmatrix} \textcolor{red}{x}_c(k) \\ \textcolor{green}{x}_{nc}(k) \end{bmatrix} + \tilde{B} \begin{bmatrix} \textcolor{red}{u}(k) \\ \textcolor{green}{d}_p(k) \end{bmatrix} \\ y(k) &= \tilde{C} \begin{bmatrix} \textcolor{red}{x}_c(k) \\ \textcolor{green}{x}_{nc}(k) \end{bmatrix} + \tilde{D} \begin{bmatrix} \textcolor{red}{u}(k) \\ \textcolor{green}{d}_p(k) \end{bmatrix} \end{cases}, \quad (3.16)$$

in cui:

- $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{c,c} & \tilde{A}_{c,nc} \\ \tilde{A}_{nc,c} & \tilde{A}_{nc,nc} \end{bmatrix};$$

- $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_u + 1)}$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{c,c} & \tilde{B}_{c,nc} \\ \tilde{B}_{nc,c} & \tilde{B}_{nc,nc} \end{bmatrix};$$

- $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_c & \tilde{C}_{nc} \end{bmatrix};$$

- $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{n_y \times (n_u + 1)}$

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_c & \tilde{D}_{nc} \end{bmatrix}.$$

Come si evince, la dinamica degli stati controllati non ha alcuna influenza sulla dinamica di quelli non controllati e viceversa. Le due parti, seppur indipendenti l'una dall'altra, influenzano insieme il valore dell'uscita. Inoltre, gli ingressi non influenzano esplicitamente le uscite. Da queste considerazioni segue:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{c,nc} &= 0_{n_{x_c} \times n_{x_{nc}}} \\ \tilde{A}_{nc,c} &= 0_{n_{x_{nc}} \times n_{x_c}} \\ \tilde{B}_{c,nc} &= 0_{n_{x_c}} \\ \tilde{B}_{nc,c} &= 0_{n_{x_{nc}} \times n_u} \\ \tilde{D}_c &= 0_{n_{x_{nc}} \times n_u} \\ \tilde{D}_{nc} &= 0_{n_{x_{nc}}} \end{aligned}$$

Stando alle ultime osservazioni, si fornisce una versione aggiornata del sistema 3.16:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_c(k+1) \\ x_{nc}(k+1) \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} x_c(k) \\ x_{nc}(k) \end{bmatrix} + \tilde{B} \begin{bmatrix} u(k) \\ d_p(k) \end{bmatrix}, \\ y(k) = \tilde{C} \begin{bmatrix} x_c(k) \\ x_{nc}(k) \end{bmatrix} \end{cases}, \quad (3.17)$$

in cui:

- $\tilde{A}_{c,c} \in \mathbb{R}^{n_{xc} \times n_{xc}}$ è la matrice dei termini relativi alla dinamica degli stati controllati:

$$\tilde{A}_{c,c} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{ff} & 0_{n_q \times n_T} \\ \tilde{A}_{Tf} & \tilde{A}_{TT} \end{bmatrix};$$

- $\tilde{A}_{nc,nc} \in \mathbb{R}^{n_{xnc} \times n_{xnc}}$ è la matrice dei termini relativi alla dinamica degli stati non controllati:

$$\tilde{A}_{nc,nc} = \tilde{A}_{pp};$$

- $\tilde{B}_{c,c} \in \mathbb{R}^{n_{xc} \times n_u}$ è la matrice dei termini che quantificano l'effetto dell'ingresso sugli ingressi controllati:

$$\tilde{B}_{c,c} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{f,\bar{V}_g} \\ 0_{n_T \times n_u} \end{bmatrix};$$

- $\tilde{B}_{nc,nc} \in \mathbb{R}^{n_{xnc}}$ è la matrice dei termini che quantificano l'effetto del disturbo sugli ingressi non controllati:

$$\tilde{B}_{nc,nc} = \tilde{b}_p;$$

- $\tilde{C}_c \in \mathbb{R}^{n_y \times n_{xc}}$ è la matrice dei termini che quantificano l'effetto degli stati controllati sull'output:

$$\tilde{C}_c = \begin{bmatrix} 0_{n_T \times n_q} & I_{n_T \times n_T} \end{bmatrix};$$

- $\tilde{C}_{nc} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_{xnc}}$ è la matrice dei termini che quantificano l'effetto degli stati non controllati sull'output:

$$\tilde{C}_{nc} = I_{n_T \times n_T}.$$

Capitolo 4

STRATEGIA DI CONTROLLO DEL FORNO INDUSTRIALE

4.1 Schema di controllo

La trattazione è interamente frutto di una rielaborazione di quanto esposto in [4, 5]. Il controllore proposto per il controllo sia del modello elaborato nel corso del Capitolo 3 sia del sistema reale è un *Economic Offset-free Model Predictive Control for Tracking* (EOMPCT). Questo tipo di controllore costituisce una specializzazione del tradizionale controllore MPC che riesce a fare in modo che uno stesso controllore sia in grado di perseguire diversi obiettivi:

- ★ Economizzare il controllo, come riportato nella Sezione 2.2.5;
- ★ Reiettare i disturbi che agiscono sul sistema, come riportato nella Sezione 2.2.6;
- ★ Inseguire un setpoint tempo variante, come riportato nella Sezione 2.2.7.

Lo schema di controllo proposto è illustrato in Figura 4.A:

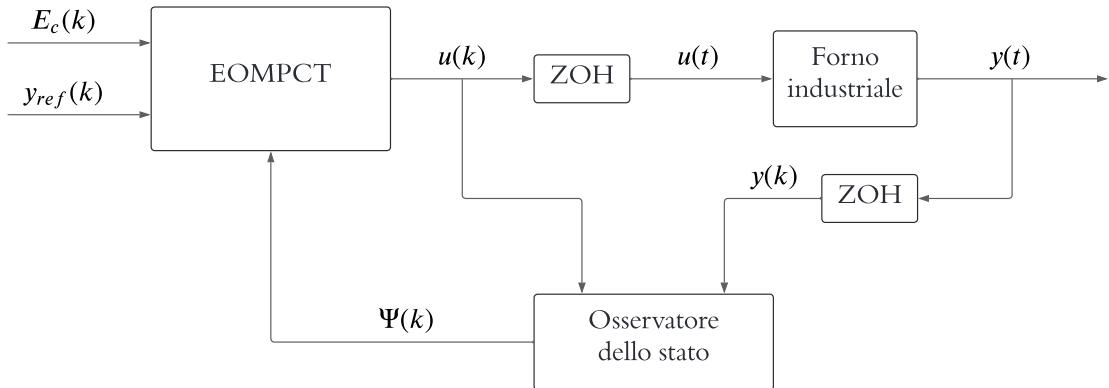


Figura 4.A: Schema di controllo per il forno industriale.

Si può notare la presenza di un osservatore dello stato. La sua presenza è legata al fatto che il controllore EOMPCT è implementato in modo tale che adoperi un controllo offset-free, ovvero che reietti i disturbi. Un osservatore dello stato è un sistema che stima le variabili di stato del sistema di controllo quando lo stato stesso non è direttamente accessibile. Tali stime vengono elaborate sfruttando sia gli ingressi $u(k)$ sia le uscite $y(k)$ del modello/sistema. L'output elaborato dall'osservatore, indicato in Figura 4.A mediante $\Psi(k)$, diventa uno degli input del controllore e viene utilizzato da quest'ultimo per elaborare delle azioni di controllo che si addicano il più possibile allo stato reale del modello/sistema:

$$\Psi(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ d(k) \end{bmatrix} \quad y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_{12}(k) \end{bmatrix} \quad d(k) = \begin{bmatrix} V_g(k) \\ T_a(k) \\ d_p(k) \end{bmatrix}$$

4.2 Problema di ottimizzazione

Focalizzandosi sul blocco EOMPCT della Figura 4.A, quando si ha a che fare con un controllore appartenente alla famiglia MPC, come ormai noto, è necessario impostare il problema di controllo come un problema di ottimizzazione.

Funzione di costo

La funzione di costo rispetto alla quale ottimizzare il controllo EOMPCT è:

$$\begin{aligned} J(x_c(k), x_{nc}(k), y_{ref}(k), \zeta(k); u(\cdot), x_a, u_a, y_{aux}, y_s) = \\ \sum_{j=0}^{N-1} \left(\|y(j) - y_a\|_Q^2 + \|u(j) - u_a\|_R^2 \right) + \|x_c(N) - x_a\|_P^2 \\ + \|y_a + \tilde{C}_\zeta \zeta(k) - y_{aux}\|_T^2 + \|y_s\|_T^2 + \omega \tilde{C}_{tot}(k) \end{aligned}$$

Problema di ottimizzazione

Racchiudendo, per convenienza, all'interno della variabile θ le variabili di ottimizzazione $u(\cdot), x_a, u_a, y_{aux}, y_s$, si può definire il problema di ottimizzazione che il controllore EOMPCT deve risolvere ad ogni passo k :

Problema di ottimizzazione

$$\begin{aligned} J^0(x_c(k), x_{nc}(k), y_{ref}(k), \zeta(k)) = \min_{\theta} J(x_c(k), x_{nc}(k), y_{ref}(k), \zeta(k); \theta) \\ x_c(j+1) = \tilde{A}_{c,c} x_c(j) + \tilde{B}_{c,c} u(j) \quad (4.1) \end{aligned}$$

$$x_{nc}(j+1) = \tilde{A}_{nc,nc} x_{nc}(j) + \tilde{B}_{nc,nc} d_p(k) \quad (4.2)$$

$$y(j) = \tilde{C}_c x_c(j) + \tilde{C}_{nc} x_{nc}(j) + \tilde{C}_\zeta \zeta(k) \quad (4.3)$$

$$\left(\begin{bmatrix} x_c(j) & x_{nc}(j) \end{bmatrix}^T, u(j) \right) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U} \quad (4.4)$$

$$x_c(0) = x_c(k) \quad (4.5)$$

$$x_{nc}(0) = x_{nc}(k) \quad (4.6)$$

$$y_{ref}(k) - y_s \leq y_{aux} \leq y_{ref}(k) + y_s \quad (4.7)$$

$$(x_a, u_a, x_c(N)) \in \mathbb{X}_f \quad (4.8)$$

$$x_a = \tilde{A}_{c,c} x_a + \tilde{B}_{c,c} u_a \quad (4.9)$$

$$y_a = \tilde{C}_c x_a \quad (4.10)$$

4.2.1 Analisi della funzione di costo

Per ottenere un controllore MPC orientato al risparmio energetico occorre derivare il costo dell'energia utilizzata dalla macchina durante il suo funzionamento:

- Potenza generata per ogni coppia di termoresistenze:

$$P_i^{(r)}(t) = \frac{1}{R_{heat}} \left(V_i^{(r)}(t) \right)^2, P_i^{(r)}(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0} [\text{W}];$$

- Potenza totale generata:

$$P_{tot}(t) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^2 \left(2P_i^{(1)}(t) + P_i^{(2)}(t) \right), P_{tot}(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0} [\text{kW}];$$

- Il costo totale dell'energia è definito a partire dal prezzo dell'energia. Una stima veritiera del prezzo dell'energia $E_c(t) \in \mathbb{R}_{>0} [\frac{\epsilon}{\text{kWh}}]$ è:

$$E_c(t) = 0.11 \frac{\epsilon}{\text{kWh}}.$$

Considerando l'intervallo $[t_{start}, t_{end}]$, con $t_{start}, t_{end} \in \mathbb{R}_{\geq 0} [\text{s}]$ e $t_{start} < t_{end}$, il costo totale dell'energia $C_{tot} \in \mathbb{R}_{\geq 0} [\epsilon]$ è:

$$C_{tot} = \int_{t_{start}}^{t_{end}} P_{tot}(t) \frac{E_c(t)}{3600} dt;$$

- Dato il tempo di campionamento $\tau_s \in \mathbb{R}_{>0} [\text{s}]$ e imponendo $t_{start} = (k+j)\tau_s$ e $t_{end} = (k+j+1)\tau_s$, il costo totale dell'energia da utilizzare nell'orizzonte di predizione N è:

$$C_{tot} = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{(k+j)\tau_s}^{(k+j+1)\tau_s} P_{tot}(t) \frac{E_c(t)}{3600} dt;$$

- Assumendo $V_g(t) = V_g(k)$, $E_c(t) = E_c(k)$, $k\tau_s \leq t \leq (k+1)\tau_s$, $\forall t$:

$$\tilde{C}_{tot}(k) = \frac{\tau_s}{3.6 \times 10^6 R_{heat}} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=1}^2 \left(2u_i^{(1)}(k+j) + u_i^{(2)}(k+j) \right) E_c(k).$$

È possibile associare un peso ω da utilizzare nella formulazione economica del OEMPC:

$$\omega \tilde{C}_{tot}(k).$$

Trattandosi di un problema di minimizzazione dei costi, più ω è grande più il controllore è orientato al risparmio energetico.

4.2.2 Analisi dei vincoli

Vincolo (4.1)

Il vincolo contiene l'equazione che descrive la dinamica degli stati controllati.

Vincolo (4.2)

Il vincolo contiene l'equazione che descrive la dinamica degli stati non controllati.

Vincolo (4.3)

Il vincolo contiene l'equazione che descrive la dinamica delle uscite. All'interno del termine $\zeta(k)$ viene memorizzato tutto ciò che il modello non è in grado di apprendere.

Vincolo (4.4)

Il vincolo implica che gli stati controllati, quelli non controllati e gli ingressi devono appartenere ai rispettivi poliedri individuati dalla presenza di vincoli specifici sia sugli stati sia sugli ingressi.

Vincolo (4.5)

Il vincolo specifica la condizione iniziale per gli stati controllati.

Vincolo (4.6)

Il vincolo specifica la condizione iniziale per gli stati non controllati.

Vincolo (4.8)

Il vincolo specifica che gli stati artificiali x_a , gli ingressi artificiali u_a e l' N -esimo stato controllato devono appartenere al CIS.

Vincolo (4.9)

Il vincolo specifica la dinamica che deve seguire la variabile artificiale x_a .

Vincolo (4.10)

Il vincolo specifica la dinamica che deve seguire la variabile artificiale y_a .

Vincolo (4.7)

Il vincolo è incentrato sulla variabile di ottimizzazione $y_{aux} \in \mathbb{R}^{n_y}$, ma per poter giungere alla spiegazione del senso che sta dietro la presenza di tale vincolo occorre introdurre preventivamente l'altra variabile di ottimizzazione, ovvero $y_s \in \mathbb{R}^{n_y}$.

Il sistema, disponendo di 4 ingressi e 12 uscite, è sotto-attuato. Ciò implica che non è fisicamente possibile né fare in modo che le temperature misurate dalle rispettive termocoppie siano uguali ad ogni istante né, tantomeno, fare in modo che convergano esattamente al setpoint. Una strategia di controllo predittivo a zone consente di superare la problematica [8]. Il controllo predittivo a zone si basa sull'idea di suddividere l'area di controllo in un certo numero di zone, ciascuna con i propri obiettivi e vincoli. Concettualmente, è possibile vedere una zona come un set di punti, del tutto equivalenti l'uno con l'altro, verso i quali far tendere il sistema [8].

Per quanto concerne l'implementazione corrente, si è deciso di considerare tante zone all'interno del forno quante sono le termocoppie ivi installate. Come detto poc'anzi, essendo il sistema sotto-attuato non è possibile fare in modo che la temperatura interna al forno si assesti nell'intera cavità al setpoint. Per ovviare a ciò si applica una strategia di controllo predittivo a zona. Secondo tale strategia è necessario aggiungere alla funzione di costo un termine di penalizzazione che tenga conto di quanto debba essere ampia ciascuna zona. Il termine di penalizzazione è proprio il valore della variabile di ottimizzazione y_s . Contestualizzando la trattazione al caso del vincolo in esame:

- y_{aux} è una variabile di ottimizzazione che contiene i setpoint artificiali verso i quali si vuole che tendano tutte le uscite del sistema;
- y_s è una variabile di ottimizzazione che contiene i valori che indicano quanto debbano essere larghi i range di temperatura in ciascuna zona e verso i quali si vuole che tendano tutte le uscite del sistema.

Capitolo 5

RISULTATI DI SIMULAZIONI E PROVE SPERIMENTALI

5.1 Simulazione

I dati visualizzati nei grafici successivi provengono da simulazioni che condividono le seguenti scelte di design per quanto riguarda sia EOMPCT sia BO:

- EOMPCT
 - Tempo di simulazione: $T_{sim} = 5h = 300\text{min} = 18000\text{s}$;
 - Iperparametri da ottimizzare: $Q = qI_{n_T}$, $R = rI_{n_u}$, N , ω , $T = tI_{n_T}$, con $q, \omega, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ e $N \in \mathbb{N}_{>0}$.
- BO
 - Modello surrogato: GP;
 - Funzione di acquisizione: EI;
 - Numero di iterazioni da effettuare per arrivare all'ottimo: 500;
 - Range all'interno del quale cercare il valore ottimo di q : $[1, 10^5]$;
 - Range all'interno del quale cercare il valore ottimo di r : $[1, 10^5]$;
 - Range all'interno del quale cercare il valore ottimo di ω : $[1, 10^5]$;
 - Range all'interno del quale cercare il valore ottimo di t : $[2 \times 10^5, 10^7]$;
 - Range all'interno del quale cercare il valore ottimo di N : $[15, 40]$.

La valutazione della bontà del controllo segue di pari passo l'approccio proposto nella Sezione 2.4.4. In particolare, si utilizzano:

- Criterio TSV per la valutazione dell'aggressività dell'azione di controllo:

$$\text{TSV}(\gamma) = \frac{1}{\tau_s} \sum_{k=1}^{T_{sim}-1} \left[u_i^{(r)}(k+1) - u_i^{(r)}(k) \right]^2, \gamma \in \mathbb{N}_{n_u} \setminus \{0\} \Rightarrow \text{TSV} \in \mathbb{R}^{n_u};$$
- Criterio ITAE per la valutazione della velocità di convergenza al setpoint:

$$\text{ITAE}(\eta) = \sum_{k=1}^{T_{sim}} k\tau_s \left| y_{ref}(k) - y^{(\eta)}(k) \right|, \eta \in \mathbb{N}_{n_T} \setminus \{0\} \Rightarrow \text{ITAE} \in \mathbb{R}^{n_T};$$
- Medesima normalizzazione dei valori contenuti in TSV e ITAE col fine di ottenere $\text{TSV}_{norm} \in \mathbb{R}^{n_u}$ e $\text{ITAE}_{norm} \in \mathbb{R}^{n_T}$;
- Medesima funzione di costo:

$$\ell(w|\text{TSV}_{norm}, \text{ITAE}_{norm}) = w \frac{1}{n_u} \sum_{\gamma=1}^{n_u} \text{TSV}_{norm}(\gamma) + (1-w) \frac{1}{n_T} \sum_{\eta=1}^{n_T} \text{ITAE}_{norm}(\eta).$$

Struttura della simulazione

Come già spiegato nel Paragrafo 1.3, il lavoro di questo progetto di tesi è focalizzato solo sul macchinario per il packaging. Per testarne il funzionamento si è dovuto isolare tale macchinario dall’intera linea di produzione e costruire un circuito di macchinari per il conveying che colleghino l’uscita del forno con il suo ingresso per garantire un ricircolo continuo di confezioni di bottiglie. Nella realtà ciò che succede è che, in una giornata intera, non sempre circolano confezioni di bottiglie al suo interno e, inoltre, sono possibili dei cambi di setpoint. In fase di simulazione del comportamento del sistema reale per mezzo del suo modello si è pensato di creare un test particolarmente stressante. Tale test prevede sia delle variazioni del setpoint da seguire sia dei cambi di velocità di produzione (ppms, packs per minute):

- Per quanto riguarda la variazione del setpoint:

Attività	Minuti	Gradi [°C]
Setpoint tracking	120	180
Spegnimento del forno	20	0
Setpoint tracking	80	160
Spegnimento del forno	20	0
Setpoint tracking	40	170
Spegnimento del forno	20	0

La Figura 5.A fornisce una rappresentazione grafica della variazione del setpoint che il controllore EOMPCT deve far seguire al modello del sistema:

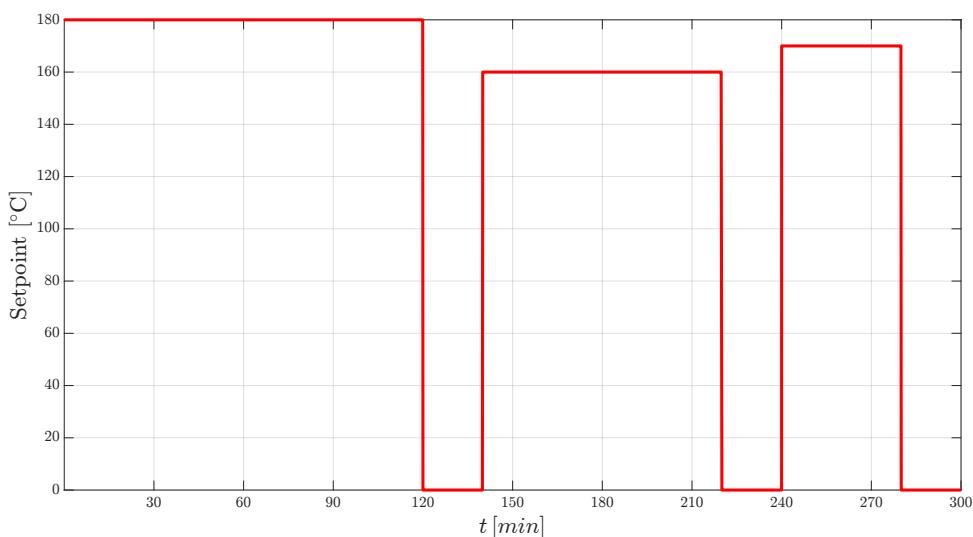


Figura 5.A: Rappresentazione grafica della variazione del setpoint da seguire.

- Per quanto riguarda la variazione del numero di pacchi in fase di produzione:

Attività	Minuti	ppms
Riposo	30	0
Reiezione dei disturbi	30	30
Reiezione dei disturbi	30	90
Reiezione dei disturbi	30	60
Riposo	40	0
Reiezione dei disturbi	30	60
Reiezione dei disturbi	30	30
Riposo	40	0
Reiezione dei disturbi	20	90
Riposo	20	0

La Figura 5.B fornisce una rappresentazione grafica della variazione dei ppms nell'arco dell'intera simulazione:

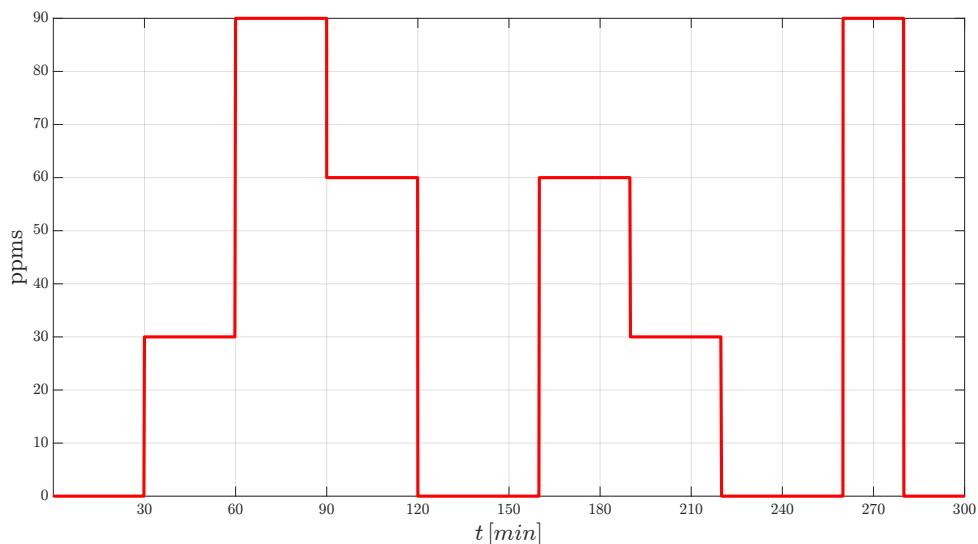


Figura 5.B: Rappresentazione grafica della variazione del numero di pacchi.

Frontiera di Pareto

Imponendo arbitrariamente $w \in [0 : 0.1 : 1]$ è possibile ottenere:

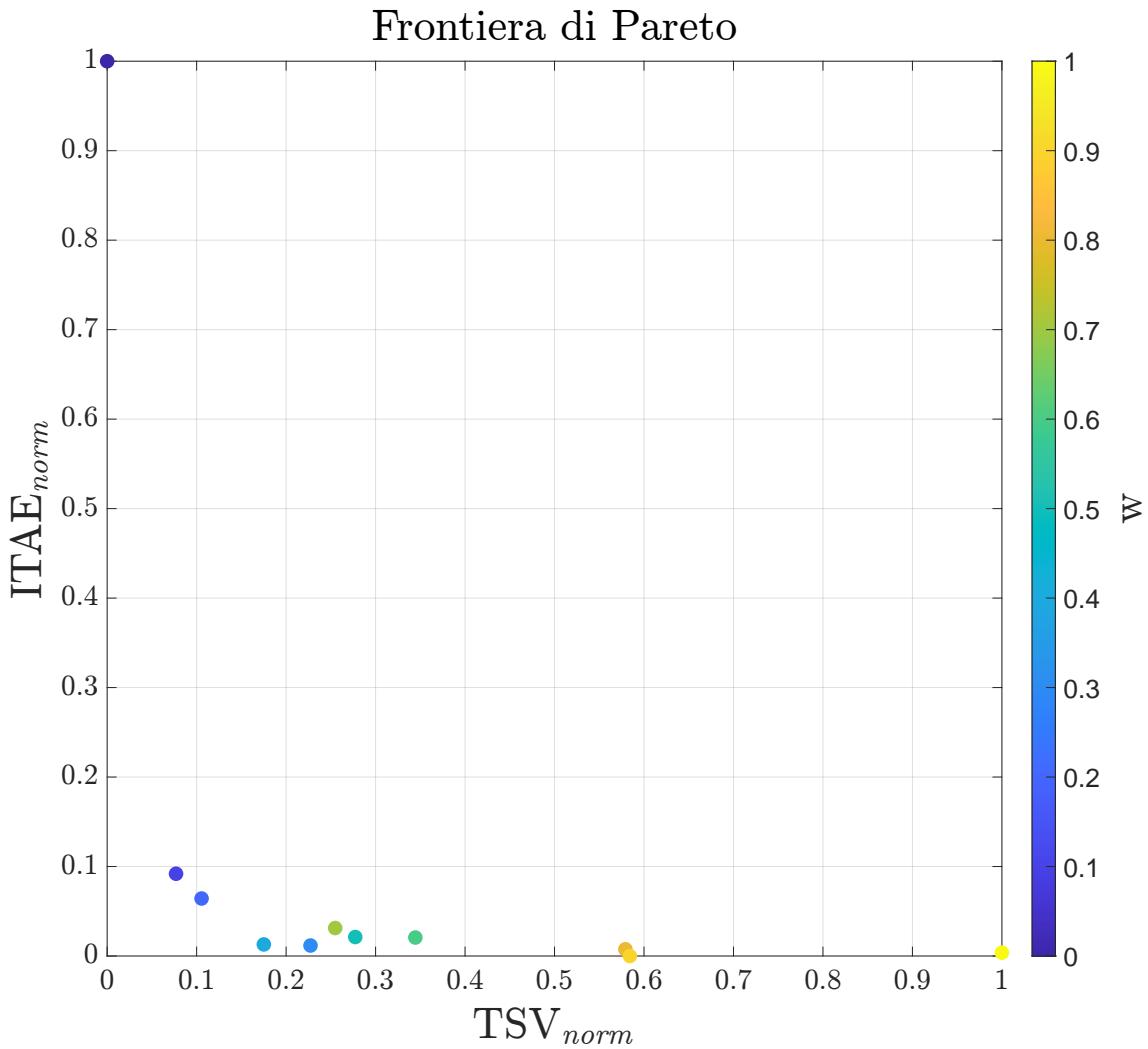


Figura 5.C: Frontiera di Pareto relativa al forno industriale.

Le considerazioni derivanti dall’analisi della Figura 5.C sono del tutto analoghe a quelle esposte nella Sezione 2.4.4.

Valutazione del trade-off



Figura 5.D: Valutazione del trade-off relativa al forno industriale.

Alcune considerazioni circoscritte alla Figura 5.D:

- Per $w \rightarrow 0$ è più imponente l'effetto del criterio ITAE rispetto a TSV, dunque per piccoli valori di w si hanno piccoli valori di ITAE;
- Per $w \rightarrow 1$ è più imponente l'effetto del criterio TSV rispetto a ITAE, dunque per grandi valori di w si hanno piccoli valori di TSV;
- Il punto di intersezione tra i grafici di TSV_{norm} e $ITAE_{norm}$ si trova a cavallo tra $w = 0.1$ e $w = 0.2$, dunque, a rigore, entrambi i valori andrebbero bene per l'estrazione dei valori ottimi per i parametri q , r , N , ω e t . Dato che il senso che sta dietro la formulazione EOMPCT è, tra le tre citate nella Sezione 4.1, quello di fornire un controllo che sia orientato al risparmio energetico, si è deciso di privilegiare $w = 0.2$. Tale scelta fa sì che, nel computo totale della funzione di costo, l'impatto dell'applicazione del criterio ITAE abbia un'influenza del 80%, mentre quello relativo all'applicazione del criterio TSV abbia un'influenza del 20%. Si ha così un occhio di riguardo in più verso l'aspetto economico di quello che si avrebbe qualora venisse scelto come peso ottimo il valore $w = 0.1$.

Parametri ottimi

I parametri ottimi ricavati dal processo di B0 sono:

$w = 0$	
q	1.023903627932383
r	12.503612205230400
ω	$9.494585512871476 \times 10^4$
t	$8.693505252632834 \times 10^6$
N	17
$w = 0.2$	
q	1.061845761081736
r	$5.883776000767280 \times 10^3$
ω	$6.441209164112047 \times 10^4$
t	$3.468204852316659 \times 10^6$
N	17
$w = 1$	
q	1.074148162687269
r	$3.699148609205074 \times 10^4$
ω	$1.508070542637901 \times 10^2$
t	$8.403009402269084 \times 10^6$
N	15

I valori ottimi ricavati per q e r sono sensati in tutte e tre le casistiche. Considerando i due casi estremi, per $w = 0$ il rapporto tra r e q è circa pari a 12, mentre per $w = 1$ il medesimo rapporto è circa pari a 3.4×10^4 . L'aumento spropositato del valore è sintomo del fatto che il controllore risente pesantemente del peso economico associato alle sue azioni di controllo. Lasciano interdetti i valori ottimi ricavati per N e ω . Per quanto riguarda N , più è grande il suo valore, migliori sono le performance del sistema controllato. In questo caso, avendo definito il range $[15, 40]$, a priori ci si aspetterebbe un valore ottimo nell'intorno di 40. Il processo di B0 smentisce tutto ciò, infatti sono stati trovati tre valori ottimi nell'intorno di 15. Per quanto riguarda ω , ci si aspetterebbe che il suo valore aumenti con l'aumentare di w poiché il significato fisico associato a tale parametro è lo stesso di quello associato a r . Il processo di B0 smentisce anche questo aspetto, infatti il valore di ω ricavato per $w = 1$ è inferiore di due ordini di grandezza sia rispetto a quello ricavato per $w = 0$ sia rispetto a quello ricavato per $w = 0.2$.

5.1.1 Analisi

Simulazione con $w = 0$

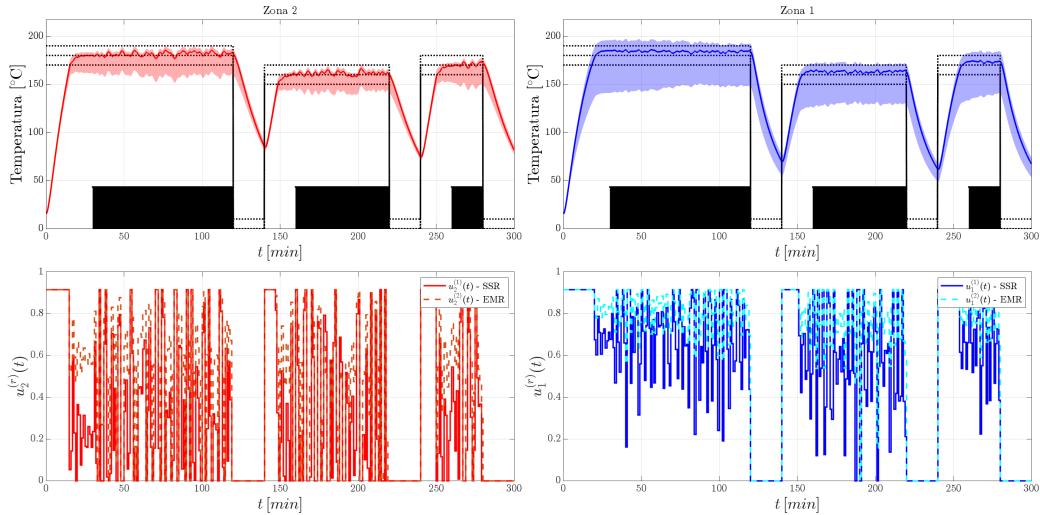


Figura 5.E: Performance in simulazione del sistema in anello chiuso con $w = 0$.

Prima di procedere con l'analisi delle performance illustrate in Figura 5.E è utile definire la chiave di lettura da usare per interpretare i risultati ottenuti:

- Le zone nere rappresentano gli istanti di tempo in cui, in accordo con la Figura 5.B, si è deciso di simulare il passaggio dei pacchi di bottiglie attraverso il forno. Ciò che succede è che il sensore a infrarossi posizionato all'ingresso del forno, rilevando il transito di un pacco, porta a 1 il valore dell'ingresso $d_p(t)$;
- Le temperature registrate dalle 12 termocoppie hanno dei profili i cui andamenti sono tutti inclusi all'interno delle aree evidenziate in rosso e blu. Le aree sono state create sfruttando come upper bound la temperatura più alta e come lower bound quella più bassa. Il fine di questo tipo di visualizzazione è quello di favorire una migliore leggibilità del trend;
- All'interno delle aree menzionate al punto precedente si nota la presenza di una linea dal tratto marcato e dello stesso colore della zona in cui si trova. Tale linea è la mediana delle temperature registrate. La mediana è un indice statistico che divide a metà le misurazioni: il 50% delle misurazioni si trovano al di sopra del valore mediano, mentre il restante 50% al di sotto. La mediana viene utilizzata come benchmark del controllo;

- Analizzando i profili delle temperature nelle due zone si possono notare delle linee orizzontali rappresentate per mezzo di punti neri. In particolare, sono presenti tre linee parallele:
 - La riga di mezzo rappresenta il setpoint che EOMPCT deve far seguire al modello, in accordo con quanto illustrato nella Figura 5.A;
 - La riga in alto costituisce l'upper bound di temperatura entro il quale ritenere che la misurazione di temperatura ottenuta sia soddisfacente. Per il problema in questione è stato assunto:

$$\text{upper bound} = \text{setpoint} + 10^\circ\text{C};$$

- La riga in basso costituisce il lower bound di temperatura entro il quale ritenere che la misurazione di temperatura ottenuta sia soddisfacente. Per il problema in questione è stato assunto:

$$\text{lower bound} = \text{setpoint} - 10^\circ\text{C}.$$

Fatte le dovute premesse (che rimarranno tali sia nel corso del corrente Paragrafo 5.1 sia nel corso del successivo 5.2), si può procedere con l'analisi delle performance in anello chiuso.

Commento Quando $w = 0$ la funzione di costo assume la seguente forma:

$$\ell(\text{ITAE}_{norm}) = \frac{1}{n_T} \sum_{\eta=1}^{n_T} \text{ITAE}_{norm}(\eta)$$

Come si evince analizzando l'andamento della mediana delle misurazioni di temperatura in entrambe le zone, il controllore riesce a mantenere la temperatura all'interno della cavità nell'intorno del setpoint nell'arco dell'intera simulazione.

Come si evince analizzando l'andamento dei duty cycles in entrambe le zone, non appena le termocoppie registrano un calo della temperatura all'interno delle rispettive zone di competenza, il controllore reagisce per riportarla il più possibile vicina al setpoint.

Entrambe le tipologie di grafico mostrano degli andamenti piuttosto ballerini. Questo comportamento è imputare al fatto che è stato scelto $w = 0$. In questa situazione, l'obiettivo che il controllore deve seguire è la pura minimizzazione dello stato. In altre parole, vi è un totale disinteresse verso l'aspetto economico del controllo e, dunque, il suo è un controllo aggressivo il cui unico scopo è quello di mantenere il modello nell'intorno del setpoint.

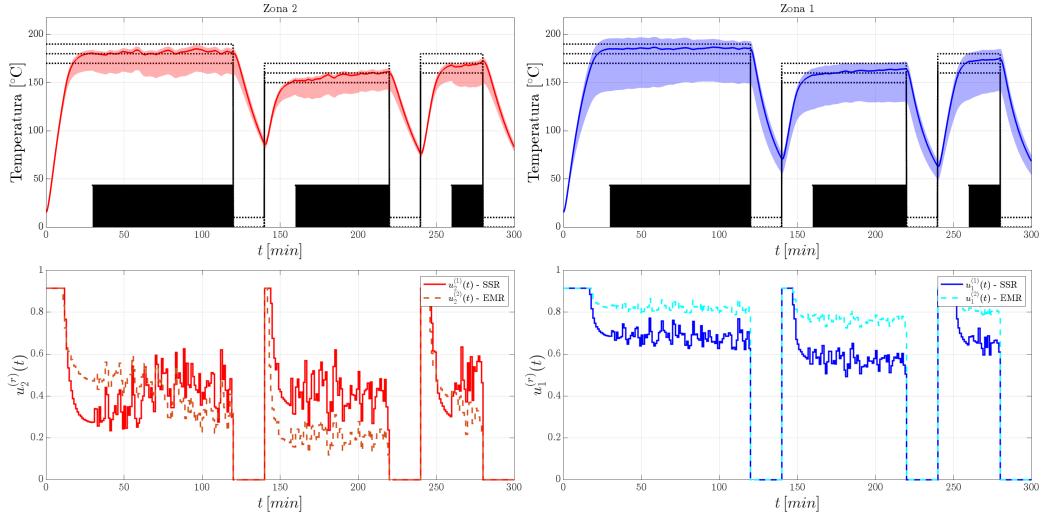
Simulazione con $w = 0.2$


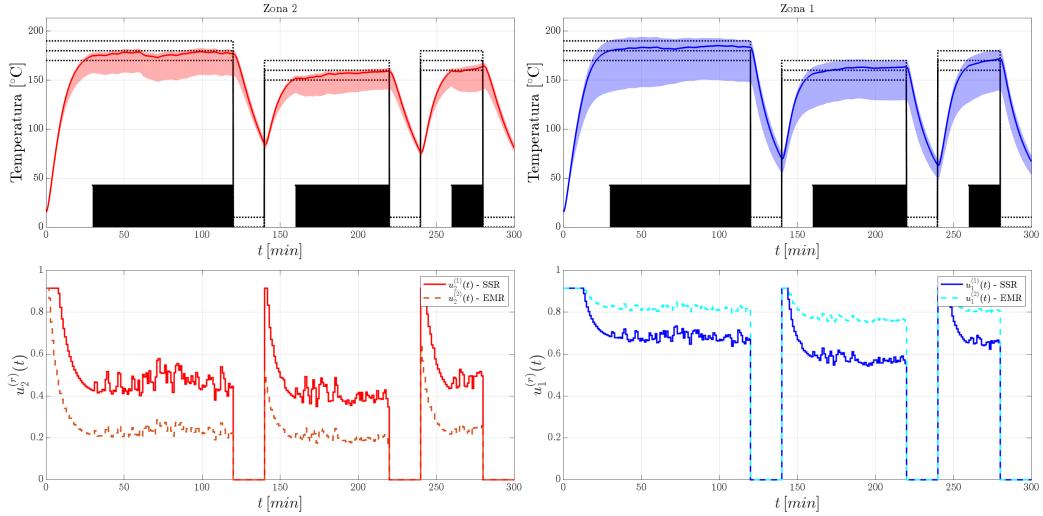
Figura 5.F: Performance in simulazione del sistema in anello chiuso con $w = 0.2$.

Commento Quando $w = 0.2$ la funzione di costo assume la seguente forma:

$$\ell(\text{TSV}_{norm}, \text{ITAE}_{norm}) = 0.2 \frac{1}{n_u} \sum_{\gamma=1}^{n_u} \text{TSV}_{norm}(\gamma) + 0.8 \frac{1}{n_T} \sum_{\eta=1}^{n_T} \text{ITAE}_{norm}(\eta)$$

Analizzando sia i grafici relativi all'andamento della mediana delle misurazioni di temperatura in entrambe le zone sia quelli relativi all'andamento dei duty cycles in entrambe le zone, si possono subito notare degli andamenti più smooth rispetto al caso precedente. Ciò deriva dal fatto che, seppur il valore $w = 0.2$ sia più vicino a 0 piuttosto che a 1, e dunque, in proporzione, sia più improntato verso la minimizzazione dello stato piuttosto che verso l'economicità del controllo, il controllo risente comunque del fattore economico, il quale lo porta ad erogare delle azioni di controllo più conservative.

Focalizzandosi sui grafici relativi all'andamento della mediana e, in particolare, guardando più da vicino la seconda e la terza tranne di passaggio dei pacchi attraverso la cavità del forno, si può osservare come questa non stia in pianta stabile nel range compreso tra il setpoint e il suo upper bound come nel caso di $w = 0$, ma bensì, soprattutto nel caso della zona 2, tra il setpoint e il suo lower bound. Questa fatica del controllore nel mantenere il modello nell'intorno del setpoint è da imputare al fattore economico, il quale, come detto poc'anzi, pur non essendo preponderante in proporzione, fa comunque la sua parte dal punto di vista dell'economicità.

Simulazione con $w = 1$

 Figura 5.G: Performance in simulazione del sistema in anello chiuso con $w = 1$.

Commento Quando $w = 1$ la funzione di costo assume la seguente forma:

$$\ell(\text{TSV}_{norm}) = \frac{1}{n_u} \sum_{\gamma=1}^{n_u} \text{TSV}_{norm}(\gamma)$$

Quella in esame è la casistica opposta rispetto a $w = 0$. Qui, l'obiettivo del controllore è cercare di mantenere il modello nell'intorno del setpoint sapendo che il suo controllo deve essere totalmente improntato al risparmio energetico. Analizzando i grafici relativi all'andamento della mediana delle misurazioni di temperatura in entrambe le zone, si mette a nudo la sua difficoltà nel perseguire lo scopo. Focalizzandosi sulla zona 1 e, in particolare, sulla seconda tranne di transito dei pacchi, il controllore riesce a riportarla al setpoint dopo circa 15 minuti di reiezione dei disturbi. Il discorso è analogo se si guarda alla terza tranne. La situazione è più tragica se si applica lo stesso discorso al caso della zona 2; infatti, durante la seconda tranne di transito dei pacchi la mediana è perennemente circoscritta tra il setpoint e il suo lower bound, mentre durante la terza tranne è perennemente situata in corrispondenza del lower bound.

5.2 Prova sperimentale

La fase di simulazione del sistema in anello chiuso per mezzo del suo modello velocizza la fase di analisi. Si pensi che in una tradizionale giornata lavorativa il forno può rimanere acceso anche per 8 ore consecutive. Il suo modello permette di abbattere questa tempistica: in circa 10 minuti di simulazione si riescono ad ottenere risultati sorprendenti che ben approssimano quelli che si otterrebbero in una giornata lavorativa. È proprio grazie al modello del forno che è stato possibile estrarre i valori ottimi per i parametri q , r , ω , t e N in tempi ragionevoli. La simulazione esposta nel Paragrafo 5.1 ideata per l'estrazione dei parametri è stata concepita per essere particolarmente stressante e ben lontana da ciò che può succedere nella realtà. Il fine è mettere il modello del forno nelle peggiori condizioni operative nella speranza che i parametri ottimi estratti dal processo di BO riescano a gestire efficacemente condizioni operative più ragionevoli. La prova sperimentale ideata prevede che si testi il funzionamento del forno reale quando a controllarlo è un controllore EOMPCT i cui parametri sono tarati sfruttando i valori ottimi estratti in fase di simulazione:

- Per quanto riguarda la variazione del setpoint da seguire:

Attività	Minuti	Gradi [°C]
Setpoint tracking	90	180
Setpoint tracking	70	160
Setpoint tracking	20	170

La Figura 5.H fornisce una rappresentazione grafica della variazione del setpoint che il controllore EOMPCT deve far seguire al sistema reale:

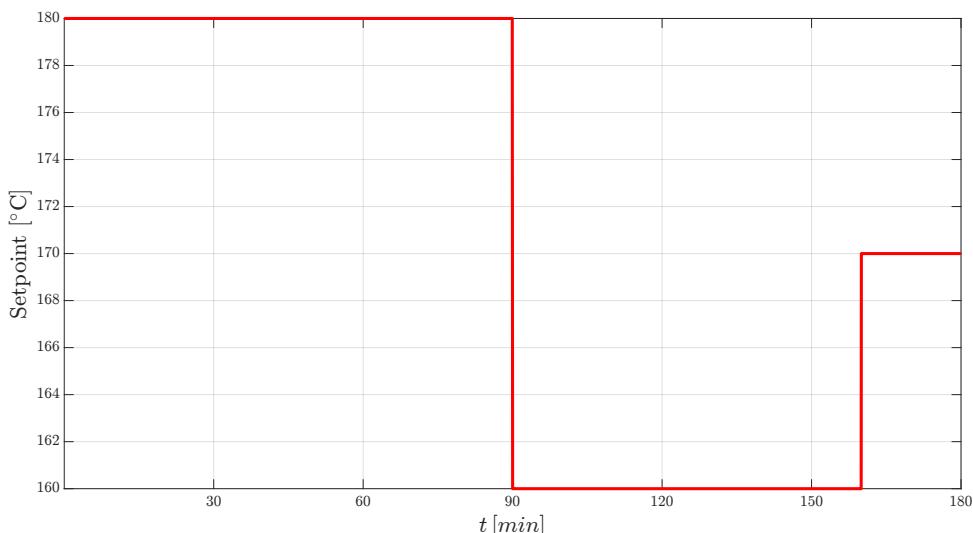


Figura 5.H: Rappresentazione grafica della variazione del setpoint da seguire.

- Per quanto riguarda la variazione del numero di pacchi in fase di produzione:

Attività	Minuti	ppms
Riposo	40	0
Reiezione dei disturbi	30	60
Riposo	40	0
Reiezione dei disturbi	30	60
Riposo	40	0

La Figura 5.I fornisce una rappresentazione grafica della variazione dei ppms nell’arco dell’intera prova sperimentale:

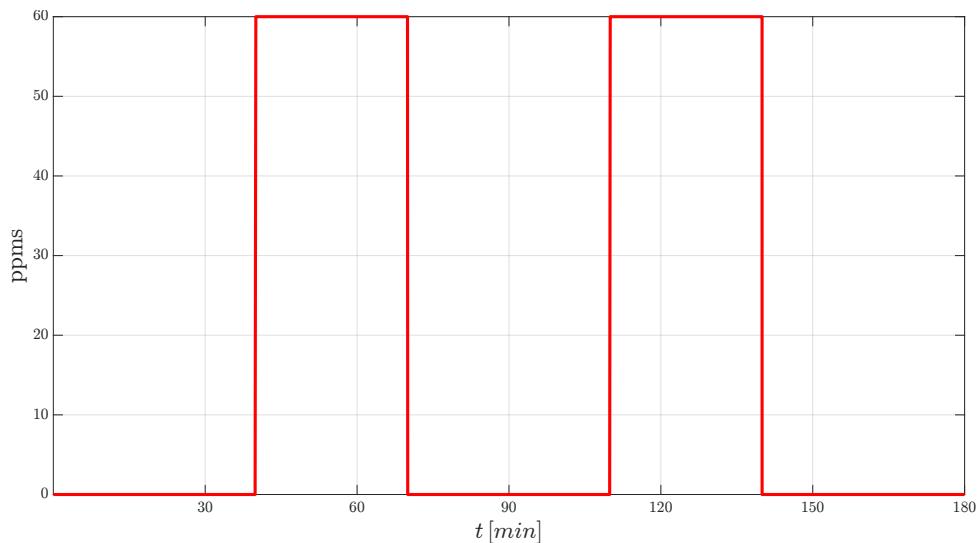


Figura 5.I: Rappresentazione grafica della variazione del numero di pacchi.

Sommmando tutte le tempistiche in prova sperimentale si evince che questa, oltre che differenziarsi dalla simulazione sia in termini di variazione del setpoint sia in termini di variazione del numero di pacchi in fase di produzione, si differenzia anche per la durata; infatti, mentre la simulazione ha una durata di:

$$T_{sim} = 5\text{h} = 300\text{min} = 18000\text{s},$$

la prova sperimentale ne ha una di:

$$T_{ps} = 3\text{h} = 180\text{min} = 10800\text{s}.$$

5.2.1 Analisi

Prova sperimentale con $w = 0$

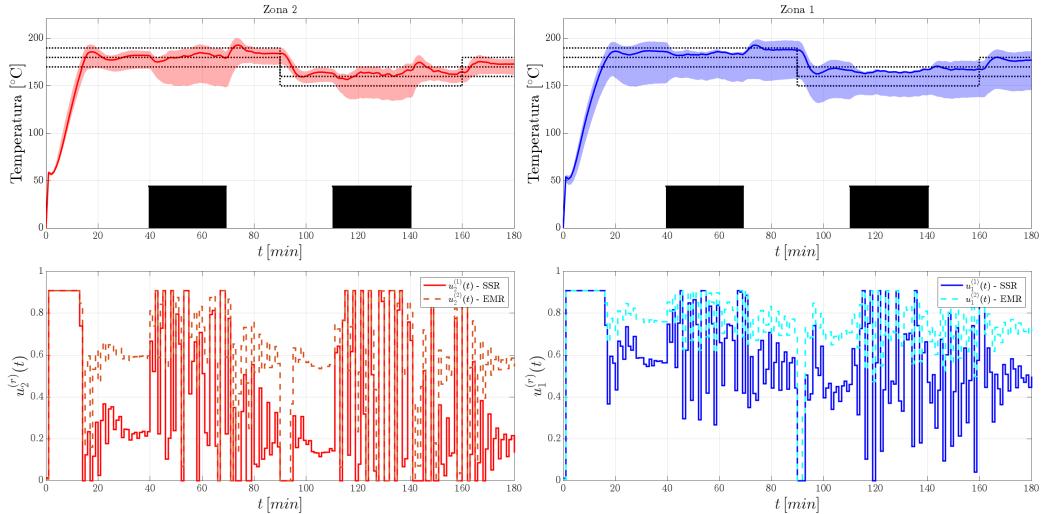


Figura 5.J: Performance in prova sperimentale del sistema in anello chiuso con $w = 0$.

Commento Le performance del sistema reale nel caso in cui il controllore guarda solo ed esclusivamente alla minimizzazione dello stato sono allineate con quelle ottenute nell’analoga simulazione 5.1.1; infatti, il controllore riesce a mantenere la temperatura all’interno della cavità nell’intorno del setpoint pressoché costantemente. Nel caso reale, tuttavia, bisogna notare un aspetto: si registrano dei picchi di temperatura che vanno oltre l’upper bound definito. Tali picchi, analizzando i grafici relativi all’andamento della mediana delle misurazioni di temperatura, si palesano soprattutto in corrispondenza del termine del transito dei pacchi. Questo comportamento è sintomo del fatto che il controllore, non appena si registrano degli abbassamenti di temperatura dovuti al flusso dei pacchi attraverso il forno, reagisce esagerando nell’intensità delle azioni di controllo, ma, non appena la tranche dell’esperienza termina, ovvero non appena si interrompe il flusso dei pacchi, a causa di una inerzia interna non smette immediatamente di fornirle. Questo causa, seppur per un breve lasso di tempo, una salita non controllata delle temperature oltre l’upper bound. La causa di ciò sta, probabilmente, nel manifestarsi di dinamiche interne al forno che non sono state esplicitamente modellate, e dunque libere di sortire il loro effetto senza che il controllore le possa in alcun modo compensare.

Prova sperimentale con $w = 0.2$

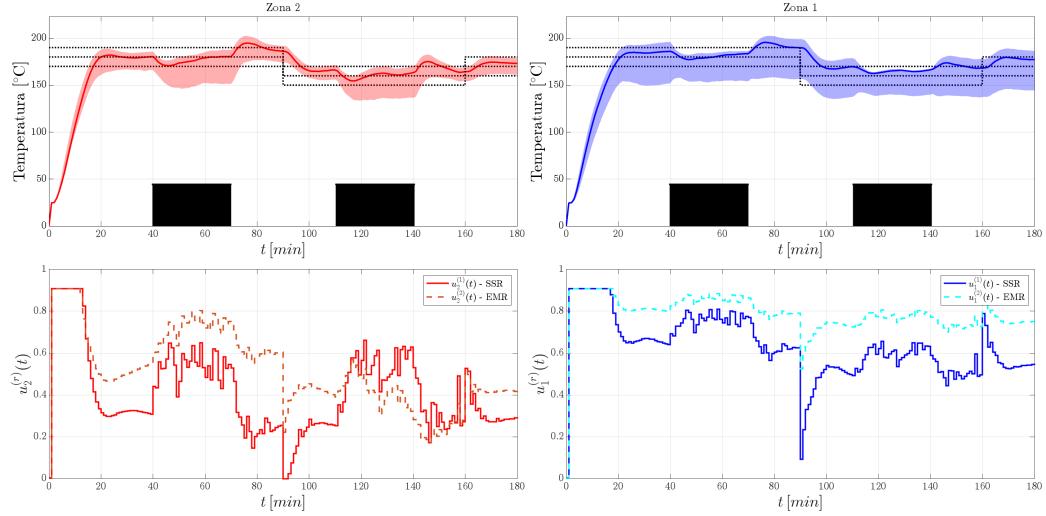


Figura 5.K: Performance in prova sperimentale del sistema in anello chiuso con $w = 0.2$.

Commento Le performance del sistema reale nel caso in cui il controllore debba avere un occhio di riguardo all'economicità del suo controllo sono allineate con quelle ottenute nell'analogia simulazione 5.1.1. Analogamente al caso precedente, si registrano dei picchi di temperatura in entrambe le zone e la spiegazione relativa alla loro presenza è la stessa.

Prova sperimentale con $w = 1$

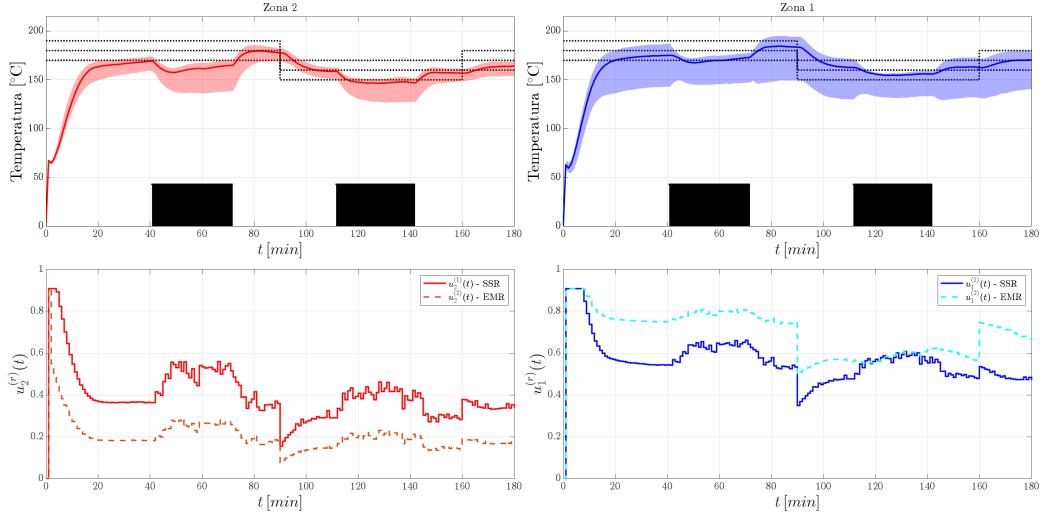


Figura 5.L: Performance in prova sperimentale del sistema in anello chiuso con $w = 1$.

Commento Le performance del sistema reale nel caso in cui il controllore guardi solo ed esclusivamente all'economicità del controllo sono nettamente inferiori rispetto a quelle ottenute dal suo modello in simulazione 5.1.1. Focalizzandosi sui grafici relativi all'andamento della mediana e, in particolare, sulla zona 1, si può osservare come questa abbia un andamento che, per la maggior parte del tempo, è compreso tra il setpoint e il lower bound definito. Il fatto che si trovi tra il setpoint e il lower bound e non tra il setpoint e l'upper bound è sintomo del fatto che il controllore EOMPCT è fortemente influenzato dal fattore economico relativo al suo controllo. La situazione diventa del tutto insostenibile se ci si focalizza sulla zona 2. Qui, la mediana è per la stragrande maggioranza del tempo addirittura al di sotto del lower bound, il che fa di questo controllo un controllo non efficace.

Conclusioni

Il contesto in cui si colloca il progetto di tesi è quello della corretta taratura degli iperparametri di un Economic Offset-free Model Predictive Control for Tracking per mezzo della tecnica Bayesian Optimization. Il fine è quello di rendere quanto più possibile efficace il controllo di temperatura effettuato su di un forno industriale adibito ad attività di packaging. Alla luce dei risultati ottenuti nel corso dei mesi di avanzamento del progetto di tesi, ed esposti in larga parte in corrispondenza del Capitolo 5, è possibile riflettere su alcuni aspetti emersi.

Innanzitutto, la tecnica Model Predictive Control, nella sua formulazione più generale, si avvale di un modello per predire, in un orizzonte temporale fissato, il comportamento futuro del sistema per il quale il modello stesso viene elaborato. All'elaborazione del modello del forno è stato dedicato interamente il Capitolo 3. La strategia di controllo per il modello appena menzionato è stata interamente discussa nel Capitolo 4. Stando ai risultati esposti nelle Sezioni 5.1.1 e 5.2.1 si direbbe che, seppur il modello non descriva nella sua totalità il forno, esso ne approssima egregiamente le specifiche, tant'è vero che la bontà delle performance ottenute sia in simulazione sia in prova sperimentale, da un punto di vista prettamente del controllo, potrebbero essere sovrappponibili.

Un altro spunto di riflessione lo da la struttura ideata per la simulazione, la quale differisce da quella identificata per la prova sperimentale. Teoricamente, per ottenere delle performance paragonabili si sarebbe dovuto effettuare il medesimo esperimento in entrambi i contesti. Così non è stato per una moltitudine di motivazioni; tra queste, la differente temperatura ambiente registrata all'interno del forno a esperimento avviato, l'alta imprevedibilità del valore della tensione di rete che alimenta il forno e la necessità di dover continuamente commutare le velocità dei nastri trasportatori nel circuito creato attorno al forno così da poter fare transitare più, o meno, pacchi di bottiglie al minuto. Potendo scegliere se strutturare un esperimento più pesante in simulazione o in prova sperimentale, è stata scelta la simulazione. Il fine è quello

di mettere il modello nelle peggiori condizioni operative possibili per fare in modo che il processo di ottimizzazione possa estrarre la migliore configurazione degli iperparametri da usare, successivamente, in prova sperimentale. I due esperimenti designati sono stati discussi nei Paragrafi 5.1 e 5.2. Alla luce dei risultati ottenuti e commentati nelle Sezioni 5.1.1 e 5.2.1, la conclusione è che non è possibile dire che l'utilizzo della tecnica Bayesian Optimization abbia migliorato significativamente le performance del controllore rispetto a quelle che si otterrebbero per mezzo di un controllore i cui iperparametri vengono tarati sulla base dell'esperienza di un esperto di dominio. Ad ogni modo, è possibile affermare che i valori ottimi estratti per gli iperparametri da cui dipende il controllore proposto nel Capitolo 4 fanno sì che gli obiettivi di controllo menzionati nella parte introduttiva del Paragrafo 2.1 possano essere pienamente soddisfatti, tanto dal modello elaborato nel Capitolo 3, quanto dal forno reale.

Dal discorso appena concluso prende piede quello che potrebbe essere uno spunto per un ulteriore sviluppo futuro: ricercare un metodo che, partendo da una parametrizzazione (identificata con un qualsivoglia metodo di taratura), possa quantificare, nella maniera più oggettiva possibile, la bontà del controllo risultante.

Bibliografia

- [1] Paolo Bolzern, Riccardo Scattolini e Nicola Schiavoni. *Fondamenti di Controlli Automatici*. McGraw-Hill, 2015.
- [2] Eric Brochu, Vlad M. Cora e Nando de Freitas. *A Tutorial on Bayesian Optimization of Expensive Cost Functions, with Application to Active User Modeling and Hierarchical Reinforcement Learning*. 2010.
- [3] Stefano Di Cairano. «An Industry Perspective on MPC in Large Volumes Applications: Potential Benefits and Open Challenges». In: *IFAC Proceedings Volumes* (2012).
- [4] Antonio Ferramosca Davide Previtali Leandro Pitturelli e Fabio Previdi. *Towards energy-efficient shrink tunnels by means of Economic Model Predictive Control*. 2024.
- [5] Antonio Ferramosca Davide Previtali Leandro Pitturelli e Fabio Previdi. *Temperature control of a shrink tunnel with multiple heating zones*. Chapter submitted. Book not published yet.
- [6] Paweł D. Domański. *Control Performance Assessment: Theoretical Analyses and Industrial Practice*. Springer Cham, 2019.
- [7] Matthew Ellis, Jinfeng Liu e Panagiotis D. Christofides. *Economic Model Predictive Control*. Springer Cham, 2018.
- [8] A. Ferramosca et al. «MPC for tracking zone regions». In: *Journal of Process Control* (2010).
- [9] Peter I. Frazier. *A Tutorial on Bayesian Optimization*. 2018.
- [10] Roman Garnett. *Bayesian Optimization*. Cambridge University Press, 2023.
- [11] Adeel Ahmad Jamil et al. «Fractional-Order PID Controllers for Temperature Control: A Review». In: *Energies* (2022).
- [12] Daniel Limon et al. *Model Predictive Control for setpoint tracking*. 2024.

- [13] Pupusse LINCS. *A tutorial on Bayesian optimization with Gaussian processes*. YouTube. 2021.
- [14] Armando Martin. *Il controllo della temperatura*. 2010.
- [15] Roi Naveiro e Becky Tang. *Simulation Based Bayesian Optimization*. 2024.
- [16] Gabriele Pannocchia. «Offset-free tracking MPC: A tutorial review and comparison of different formulations». In: *2015 European Control Conference (ECC)*. 2015.
- [17] Gabriele Pannocchia, Marco Gabiccini e Alessio Artoni. «Offset-free MPC explained: novelties, subtleties, and applications». In: *IFAC-PapersOnLine* (2015).
- [18] J.B. Rawlings, D.Q. Mayne e M. Diehl. *Model Predictive Control: Theory, Computation, and Design*. Nob Hill Publishing, 2017.
- [19] Gianluca Spina. *La gestione dell'impresa*. Rizzoli, 2012.
- [20] Carlo Vercellis. *Ottimizzazione. Teoria, metodi, applicazioni*. McGraw-Hill Education, 2008.