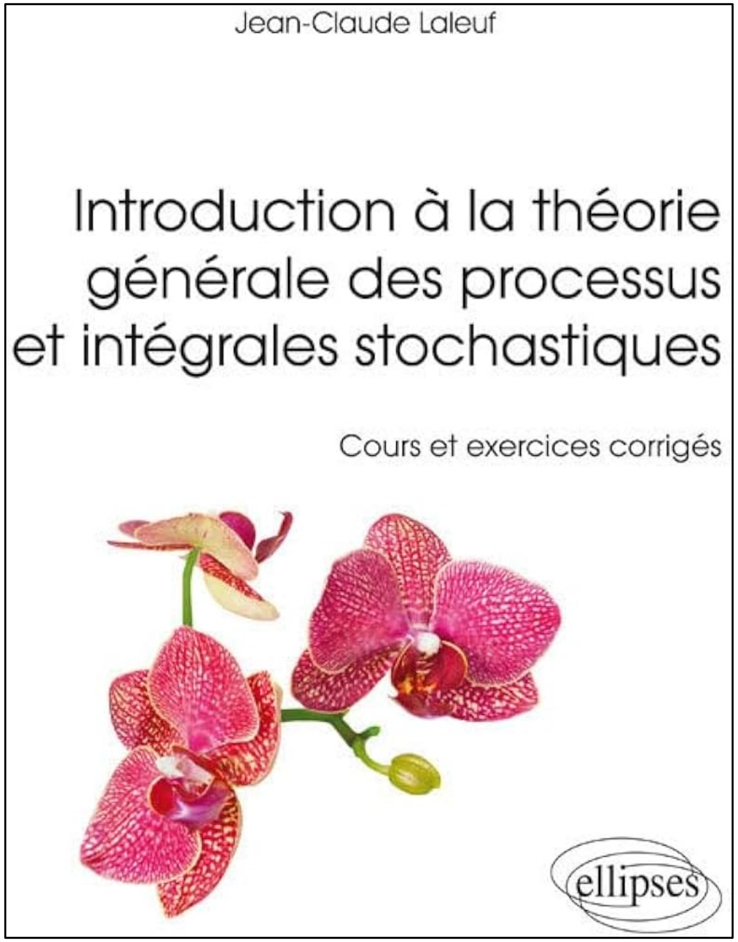
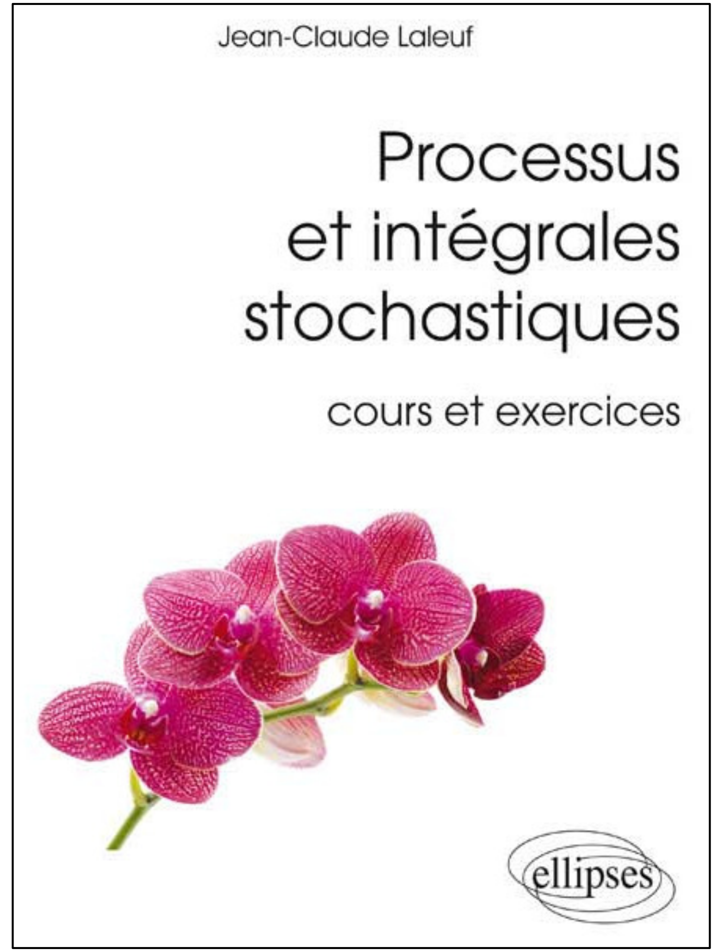
IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

INTÉGRALE STOCHASTIQUE

FAVRE THOMAS

BIBLIOGRAPHIE





SOMMAIRE

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1. Différentes intégrales
2. Exemple d'utilisation
3. Notation

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

Intégrale stochastique

$$\int_0^t H(s,\omega)\,dX(s,\omega)$$

avec $H \in b\mathcal{P}_{loc}$ et X une semi-martingale

Lebesgue-Stieltjes

$$\int_0^t H(s,\omega)\,dA(s,\omega)$$

H **mesurable**
A **càdlàg variation finie**

Wiener

$$\int_0^t f(s)\,dB(s,\omega)$$

f **carré intégrable**
B **mouvement brownien**

Itô

$$\int_0^t H(s,\omega)\,dB(s,\omega)$$

H **carré intégrable**
B **mouvement brownien**

S&P 500 entre 2010 et 2024

Source: ProRealTime

calcul du bénéfice entre 0 et t

$$\int_0^t P(s,\omega)\, dY(s,\omega)$$

avec P le **nombre d'actif** et Y la **prix** de l'actif financier.

Les classes de processus :

L^1 Espace de Banach $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$

L^2 Espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$\mathcal{M}$ la classe des martingales

$\mathcal{M}^2$ la classe des martingales de carré intégrables $(sup_t E(M_t^2) < +\infty)$ et bornée dans L^2

$\mathcal{V}$ la classe des processus à variation finie, càdlàg

$\mathcal{C}$ la classe des processus croissants

$\mathcal{AI}$ la classe A des processus intégrables et bornés dans L^1

$\mathcal{AUI}$ la classe A des processus est uniformément intégrable $(\lim_{M \to +\infty} \sup\limits_{X \in A} E(|X|, |X| > M) = 0$

$\mathcal{A}_0$ la classe A des processus nuls en 0

$b\mathcal{A}$ la classe A des processus bornés

$c\mathcal{A}$ la classe A des processus continues

$a \wedge b =: min(a, b)$ $\qquad X_t = X(t)$

$a \vee b =: max(a, b)$

CHAPITRE 2

CONTEXTE ET RAPPELS

1. Contexte
2. Rappels

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

Notre espace de travail sera $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ et vérifiera les *conditions usuelles*.

- $\mathcal{N}(\Omega, \mathcal{F}, P) \subset \mathcal{F}$ (Partie négligeable)

- $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sera une filtration complète et continue à droite

  - $\mathcal{N}(\Omega, \mathcal{F}, P) \subset \mathcal{F}_0$
  - $\forall t \in \mathbb{R}^+, \mathcal{F}_{t^+} =: \bigcup_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$

Toutes les martingales seront considérées *càdlàg* d'après le théorème de régularisation des martingales. En effet il suffit que $t \to E(M_t)$ soit càd ce qui est le cas pour les martingales.

A *càdlag* (continue à droite, limite à gauche)

A *variation finie* et nul en 0

$$\forall \omega \in \Omega, \forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad \sup_{\Delta \in E} \sum_{k=0}^{n} (A(t_{k+1}) - A(t_k)) < \infty$$

Avec E l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[0, t]$.

H *mesurable*

H est *localement intégrable* par rapport à A

$$\int_0^t H(s, \omega)\, dA(s, \omega)$$

H peut être *progressif* càd

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, la restriction de X à $[0, t] \times \Omega$ est mesurable de $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t$ dans $(E, \mathcal{B})$

Toute martingale continue à variation finie est **constante**.

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux tribus, on note la tribu produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$

Un temps d'arrêt (TA) est une variable aléatoire T telle que $\forall t \in \overline{\mathbb{R}^+}, (t \leq T) \in \mathcal{F}_t$

Soit X un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)$ et T TA quelconque, on note $X_T = X(T(\omega), \omega)$ la *variable d'arrêt*

Soit X un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)$ et T TA fini, on note $X^T = X(T(\omega) \wedge t, \omega)$ $(x \wedge y = \min(x, y))$ le *processus arrêté*

On pose $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_t \mathcal{F}_t)$

Soit T un TA:

$\mathcal{F}_T =: \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall t, A \cap (T \leq t) \in \mathcal{F}_t\}$

$\mathcal{F}_{T-} =: \sigma(\mathcal{F}_0 \cup \{A \cap (T > s), s \in \mathbb{R}^+, A \in \mathcal{F}_s\})$

$\mathcal{F}_{T+} =: \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall t \in \mathbb{R}^+, A \cup (T < t) \in \mathcal{F}_t\}$

Comme on considère que $(\mathcal{F}_t)$ est continue à droite, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T+}$

La notion d'*intervalle stochastique* permet d'étendre la notion d'intervalle sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$

Soit T, S deux TA

$$[S, T] = \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, S(\omega) \leq t \leq T(\omega)\}$$

$$[S, T[= \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, S(\omega) \leq t < T(\omega)\}$$

$$[T] = \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, t = T(\omega)\}$$

On définit également l'indicatrice d'un intervalle stochastique :

$1_{[0,T]}(t, \omega) = 1$ si $0 \leq t \leq T(\omega)$ 0 sinon

L'ensemble A est *évanescent* si

$$A \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}, P(\Pi_\Omega(A)) = 0 \text{ avec } \Pi_\Omega \text{ la projection sur } \Omega$$

Soit $p \geq 2$

Inégalité de Doob dans L^P

Soit $M \in L^p$ une sous-martingale positive , on pose $M^* = sup_t M_t \in L^p$. On a l'inégalité suivante :

$$E(M^{*p}) \leq (\frac{p}{p-1})^p E(M_t^p)$$

Convergence des martingales

Soit $M \in L^p$ une martingale bornée dans L^P càd $sup_t E(M_t^p) < +\infty$ alors M convergence simple et dans L^P vers M_∞ qui ferme à droite X.

$$\forall t, E(M_\infty | \mathcal{F}_t) = M_t$$

Martingale défini par projection

Soit Z une variable aléatoire intégrable, alors $E(Z, \mathcal{F}_t)$ est une martingale uniformément intégrable.

Uniforme intégrabilité

Soit Z_t un procesus aléatoire , on dit que Z est *uniformement intégrable* si

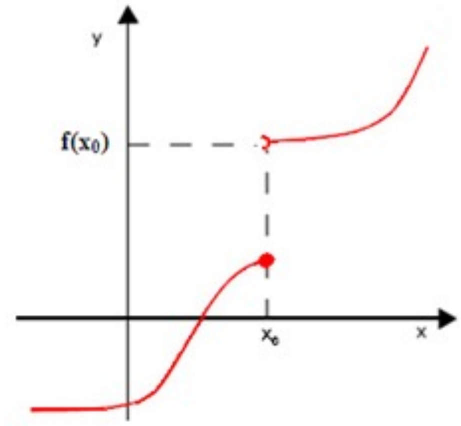
$$\lim_{M \to +\infty} \sup_t E(|X_t|, |X_t| > M) \to 0$$

CHAPITRE 3
PRÉVISIBILITÉ

1. Tribu, processus et temps d’arrêt prévisible
2. Projection prévisible

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

La notion de prévisibilité est la notion de base et la classe de processus que l'on utilisera pour construire l'intégrale stochastique.



Définition

On définit la tribu *prévisible* $\mathcal{P}$ par:

$\mathcal{P} =: \sigma(\text{X processus , X càg})$

De manière équivalente la tribu prévisible est engendrée par les intervalles stochastiques fermés à droite et également par:

$$\mathcal{E} = \{]s,t] \times A, A \in \mathcal{F}_s\} \cup \{\{0\} \times A, A \in \mathcal{F}_0\}$$

$$\mathcal{P} = \sigma(]S,T], \text{S et T TA}) = \sigma(\mathcal{E})$$

On définit également les *processus prévisibles*

Définition

Un proccesus *prévisible* est un processus $\mathcal{P}$-mesurable, on note encore $\mathcal{P}$ la classe des processus prévisibles.

Exemple

Pour un processus à temps discret (X_n) adapté à une filtration discrète $\mathcal{F}_n$

$$X \in \mathcal{P} \iff \forall n, X_{n+1} \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable}$$

On définit maintenant la notion de temps d'arrêt *prévisible* :

Définition

Un temps d'arrêt T est prévisible si $[T] \in \mathcal{P}$

Cela veut dire que le graphe de T est prévisible.

On peut également prendre comme définition :

$[T, +\infty[\in \mathcal{P}$ ou $[0, T[\in \mathcal{P}$ (car $]T, \infty[\in \mathcal{P}$)

Rappel

$[T] = \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, t = T(\omega)\}$

On définit une nouvelle classe de processus, les processus *fortement intégrables*.

Définition

Un processus $X \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$ est fortement intégrable si $\forall T, TA$, X_T est intégrable (avec la convention $X_T = 0$ si T $= +\infty$)

Exemples

Les processus bornés, mesurables sont *fortement intégrables*.
Les martingales uniformément intégrables sont *fortement intégrables*.

On définit maintenant la notion de *projection prévisible*

Définition

Pour tout processus *fortement intégrable*, il existe un unique processus prévisible ${}^pX \in \mathcal{P}$ tel que $\forall T$, TA prévisible, $({}^pX)_T = E(X_T | \mathcal{F}_{T-})$
Ce processus est appelé projection prévisible de X.

De plus on la caractérisation suivante :

$$E({}^pX_T) = E(X_T), \forall T \text{ TA } \textit{prévisible}$$

Rappel

$$\mathcal{F}_{T_-} =: \sigma(\mathcal{F}_0 \cup \{A \cap (T > s), s \in \mathbb{R}^+, A \in \mathcal{F}_s\})$$

CHAPITRE 4
MESURE ET THÉORÈME DE DOLÉANS

1. Mesure et théorème de Doléans
2. Compensateur prévisible

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

On qualifie de *brut* un processus non **nécessairement** adapté.

Définition

$\forall A \in \mathcal{CI}_0, brut$, on appelle mesure de Doléans la mesure μ_A sur $(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{F})$ définie par :

$$\forall C \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}, \mu_A(C) = E(\int_{\mathbb{R}^+} 1_C(t) dA_t)$$

où $\int_{\mathbb{R}^+} 1_C(t) dA_t)$ est l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes de 1_C par rapport à A

Exemple

Si $C = [u, v] \times F$, $\mu_A(C) = E(1_F \int_{[u,v]} dA_t) = E(A_v - A_{u-}, F)$

Extension de la définition

On peut étendre μ_A sur les processus bornés :

$$\forall X \in b(\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}) \text{ (bornés mesurables dans } \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}) \mu_A(X) = E(\int_{\mathbb{R}^+} X_t dA_t)$$

On retrouve la définition de μ_A sur $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$ en posant

$$\forall C \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}, \mu_A(C) = \mu_A(1_C) = E(\int_{\mathbb{R}^+} 1_C(t) dA_t)$$

Théorème de Doléans

$\forall A \in \mathcal{CI}_0$, *brut* :

$$A \in \mathcal{P} \iff \forall X \in b(\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}),\ \mu_A(X) = \mu_A({}^pX)$$

Caractérisation de la mesure de Doléans

Une mesure positive bornée μ sur ($\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$), nulle à l'origine ($\mu([0] \times \Omega) = 0$) est de la forme $\mu = \mu_A$ avec $A \in \mathcal{CI}_O$, *brut*
$\iff$ la mesure est nulle sur les ensembles évanescents :

$$\forall C \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}, P(\Pi_\Omega(C)) = 0, \mu(C) = 0$$

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

Démonstration (sens $\Leftarrow$)

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, on définit μ_t sur $\mathcal{F}$ par $\mu_t(F) = \mu([0,t] \times F)$
comme μ est *nulle sur les ensembles évanescents*, on a $P(F) = 0 \implies \mu_t(F) = 0$
donc μ_t est *absolument continue* par rapport à F.

Il existe donc une dérivée de Radon-Nikodym $\alpha_t = \frac{d\mu_t}{dP}$

$\mu_t(F) = \int_F \alpha_t(\omega) P(d\omega)$

A partir de α_t, on construit le processus $A \in \mathcal{CI}_0$ brut

Pour $C = [0,t] \times F$, on aura donc:

$$\mu(C) = \mu_t(F) = E(A_t, F) = E(1_F A_t) = \mu_A(C)$$

Définition de μ_t

Dérivée de R-N

Définition de μ_A

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

Construction du compensateur prévisible

Soit $A \in \mathcal{CI}_0$ et μ la mesure de Doléans associée, on définit, $\forall X \in b\mathcal{B} \otimes \mathcal{F})$, $\mu^p(X) = \mu({}^p X)$

μ^p est une mesure positive, bornée, nul sur les ensembles évanescents, donc d'après *la caractérisation des mesures de Doléans*, il existe un unique $A^p \in \mathcal{CI}_0$, *brut* tq $\mu^p = \mu_{A^p}$ ce qui s'écrit :

$$E(\int_{\mathbb{R}+} {}^p X_t dA_t) = E(\int_{\mathbb{R}+} X_t dA_t^p)$$

De plus, $\mu^p(X) = \mu({}^p X) = \mu({}^{pp} X) = \mu^p({}^p X)$, on a donc $\mu_{A^p}(X) = \mu_{A^p}({}^p X)$ donc d'après le *théorème de Doléans*, $A^p \in \mathcal{P}$

On appelle A^p le compensateur prévisible de A car A - $A^p \in \mathcal{M}_0$

Démonstration A - $A^p \in \mathcal{M}_0$:

Soit $s \leq t$, $F \in \mathcal{F}_s$, on pose $X = 1_{]s,t]}1_F \in \mathcal{P}$, on a d'après la définition de A^p :
$\mu_{A^p}(X) = \mu_A({}^pX)$ donc $E(A_t^p - A_s^p, F) = E(A_t - A_s, F)$ d'où

$E(A_t^p - A_s^p|\mathcal{F}_s) = E(A_t - A_s|\mathcal{F}_s)$ et finalement

$E(A_t - A_t^p|\mathcal{F}_s) = A_s - A_s^p$ (car A et A^p est adapté)

Unicité de A^p:

Soit $A - A_1^p = M$ et $A - A_2^p = N$
donc $A_2^p - A_1^p = N - M$
donc $A_2^p - A_1^p \in \mathcal{VMI}_0 \subset c\mathcal{MV}$
donc $A_2^p = A_1^p$ car toute martingale continue à variation finie est constante.

CHAPITRE 5
LOCALISATION

1. Classes de processus locales
2. Preuve par localisation

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

Définition

Soit $\mathcal{A}$ une classe de processus réels, on définit la classe des processus localisés $\mathcal{A}_{loc}$ par:
$\forall X \in \mathcal{A}_{loc}, \exists (T_n)$ TA, $T_n \uparrow +\infty$ (suite croissante tendant vers l'infini) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, X^{T_n} \in \mathcal{A}$

Exemple

$\mathcal{M}_{0,loc}$, la classe des *martingales locales* nulles en 0 *càd*

$\forall M \in \mathcal{M}_{0,loc}, \exists (T_n)$ TA, $T_n \uparrow +\infty$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, M^{T_n}$ est une martingale nulle en 0

Une preuve par localisation permet d'étendre une fonction de f : $\mathcal{A} \to \mathcal{R}$ à $\mathcal{A}_{loc} \to \mathcal{R}_{loc}$

Il faut que $\mathcal{A}$ soit *stable par TA* càd :
$\forall X \in \mathcal{A}, \forall T$ TA, $X^T \in \mathcal{A}$

Il faut que f *commute avec les TA* càd :
$\forall X \in \mathcal{A}, \forall T$ TA, $f(X^T) = f(X)^T$

Démonstration

$\forall X \in A_{loc}, \forall (t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$, $\exists T$ TA tel que $T(\omega) \geq t$, $X^T \in \mathcal{A}$

On pose $f(X)(t,\omega) = f(X^T)(t,\omega)$ et comme f commute avec T et $X \in A_{loc}$, $\exists (T_n)$ TA, $T_n \uparrow +\infty$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, X^{T_n} \in \mathcal{A}$
or $f(X^{T_n}) = f(X)^{T_n}$ donc $f(X) \in \mathcal{R}_{loc}$

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

CHAPITRE 6
DÉCOMPOSITION DES MARTINGALES

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

Si Z est une sous-martingale telle que $\{\ Z_T\ ,$ T TA *finie* $\}$ est uniformément intégrable alors il existe une unique décomposition Z = M + A
$M \in \mathcal{MUI}_0\ ,\ A \in \mathcal{PCI}_0$

Remarque

Si Z = A + M et que l'on pose pour $S \leq T$ TA
$\mu]S,T] = \mu_A(]S,T]) = E(\int_{\mathbb{R}+} 1_{]S,T]}(t)dA_t)$
$= E(\int_{S(\omega)}^{T(\omega)} dA_t)$
$= E(A_T - A_S)$
$= E(Z_T - Z_S)$ car M est une martingale

Unicité

$M_1 + A_1 = M_2 + A_2$
$M_1 - M_2 = A_2 - A_1 \in \mathcal{MUI}_0 \cap \mathcal{PCI}_0$
or martingale prévisible $\implies$ continue donc martingale constante égale à 0
d'où $M_1 = M_1$ et $A_1 = A_2$

Existence $\quad (\,]S,T] = \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, S(\omega) < t \leq T(\omega)\} \,)$

Soit $S \leq T$ TA, on pose $\mu]S,T] = E(Z_T - Z_S)$

μ est une mesure positive bornée sur $\mathcal{P}^*$, trace de la tribu $\mathcal{P}$ sur $]0,+\infty[\times\Omega$

C'est pour cette affirmation que l'on a besoin que $\{Z_T, \text{ T TAF}\}$ soit uniformément intégrale.

On pose $\mu'(X) = \mu({}^pX)$ pour $X \in b(\mathcal{B} \otimes \mathcal{F})$

μ' est une mesure positive bornée, nulle sur les ensembles évanescents et à l'origine donc d'après le théorème de caractérisation des mesures de Doléans, il existe $A \in \mathcal{CI}_0$ tel que $\mu' = \mu_A$.

De plus $\mu'({}^pX) = \mu'(X)$ donc $A \in \mathcal{P}$ d'après le théorème de Doléans.

Pour $T = +\infty$, $E(A_\infty - A_S) = \mu']S,+\infty[= \mu]S,+\infty[= E(Z_\infty - Z_S)$

Pour $S = t_F$, $F \in \mathcal{F}_t$ $(t_F = t1_F)$

on a finalement $E(A_\infty - A_t, F) = E(Z_\infty - Z_t, F)$

d'où $E(A_\infty - Z_\infty, F) = E(A_t - Z_t, F)$

En posant $M = Z - A \in \mathcal{M}_0$ et $M_t = E(M_\infty, \mathcal{F}_t)$ donc $M \in \mathcal{MUI}_0$

Le crochet de Meyer

Le crochet de Meyer est une application direct de la décomposition de Doob-Meyer à $\mathcal{M}_0^2$:

Il faut montrer que si $M \in \mathcal{M}_0^2$ alors $\{M_T^2,$ T TAF$\}$ est uniformément intégrable.

Démonstration

$E(M^{*2}) = E(sup_t M_t^2) \leq 4E(sup_t M_t^2) = 4E(M_\infty^2)$ (Inégalité de Doob)

Donc pour tout TA finie, on a $M_t^2 \leq M^{*2}$ avec M^{*2} qui est uniformément intégrable donc $\{M_T^2,$ T TAF$\}$ est uniformément intégrable.

Crochet de Meyer

D'après la décomposition de Doob-Meyer , il existe un processus $< M >$ tel que $M^2 - < M > \in \mathcal{MUI}$ et $< M > \in \mathcal{PCI}_0$

Remarque

Soit $X \in \mathcal{M}^2$, (t_k) une subdivision de $\mathbb{R}^+$ càd:

$t_0 = 0$, $\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = +\infty$ et (t_k) croissante.

On appelle *variation quadratique* de X la quantité:

$$W(X, \Delta, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (X_{t_{k+1} \wedge t} - X_{t_k \wedge t})^2$$

Si X est continue on a le résultat suivant:

$$\forall t, W(X, \Delta, t) \to < X >_t \text{ en probabilité lorsque } |\Delta| \to 0$$

Toutefois si X n'est pas continue mais càdlàg $< X >$ diffère de la limite de $W(X, \Delta, t)$

On dit qu'une martingale est à *saut α-borné* si la hauteur de chaque saut est borné par α.

Définition

Un processus réel M est une martingale locale s'il existe une suite $T_n \uparrow +\infty$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, M^{T_n} soit une martingale nulle en zéro. On dit que (T_n) localise M. On note $\mathcal{M}_{0,loc}$ cette classe.

De plus, toute martingale locale M peut être localisée en une famille de martingales uniformément intégrables.

Décomposition des martingales locales

Soit $M \in \mathcal{M}_{0,loc}$, $\alpha > 0$, il existe une décomposition (non unique) telle que $M = M_1 + M_2$ avec $M_1 \in \mathcal{V}\mathcal{M}_{0,loc}$ et $M_2 \in \mathcal{M}_{0,loc}$ à saut α-borné.

Démonstration

On commence avec $M \in \mathcal{MUI}_0$ puis on localisera le résultat car $\mathcal{MUI}_{0,loc} = \mathcal{M}_{0,loc}$
$\forall t$, on pose $A_t = \sum_{0<s<t} \Delta M_s 1_{|\Delta M_s|>\alpha/2}$ le processus des sauts de M d'amplitude supérieure à $\alpha/2$

On montre que $A \in \mathcal{VI}_{0,loc}$ donc A admet un compensateur prévisible $A^p \in \mathcal{PVI}_{0,loc}$ tel que A - $A^p \in \mathcal{MV}_{0,loc}$

On pose ensuite $M_1 = A - A^p$ et $M_2 = M - M_1$

Puis on définit f : $\mathcal{MUI}_0 \rightarrow \mathcal{MV}_{0,loc}$ par f(M) $= M_1$
et g : $\mathcal{MUI}_0 \rightarrow \mathcal{M}_{0,loc}$ par g(M) $= M_2$

On vérifie que f et g commutent avec les TA ce qui permet d'appliquer le principe de localisation pour étendre le résultat de $\mathcal{MUI}_0$ à $\mathcal{MUI}_{0,loc}$.

Définition

On dit qu'un processus X est *localement borné* s'il existe un suite $T_n \uparrow +\infty$ de TA telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, X^{T_n} soit bornée càd qu'il existe une suite réelle (C_n) telle que $\left|X^{T_n}\right| < C_n$

Propriété

En posant $T_n = \inf(t \in \mathbb{R}, |X_t| \geq n)$ on a $\forall n > 1$, $\left|X^{T_n}\right| < n$
Si de plus X est *càdlàg* alors :
$\forall n > 1$, $\left|X^{T_n}\right| < |X_0| \vee n + |\Delta X_{T_n}|$ donc si X_0 est borné et si X est à saut borné, alors X est *localement borné.*

C'est justement les propriété de M_2 dans la *décomposition des martingales locales.*

Définition

Une semi-martingale est un processus adapté càdlàg qui se décompose en la somme d'une martingale locale et d'un processus adapté càdlàg à variation finie.

Soit X $=X_0+$ Y + Z, X_0 la valeur en 0, $Y \in \mathcal{M}_{0,loc}$ et $Z \in \mathcal{V}$

Décomposition d'une semi-martingale

D'après la décomposition des martingales locales:

X $= X_0 + M_1 + M_2 + Z$, avec $M_1 \in \mathcal{V}\mathcal{M}_{0,loc}$ et $M_2 \in \mathcal{M}_{0,loc}$ à saut α-borné.
X $= X_0 +$ M + A avec M $= M_2 \in b\mathcal{M}_{0,loc}$ et A $= M_1 + Z \in \mathcal{V}_0$

CHAPITRE 7
CONSTRUCTION DE L'INTÉGRALE STOCHASTIQUE

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

On veut définir l'intégrale stochastique H.X pour $H \in b\mathcal{P}_{loc}$ et X , une semi-martingale.

Comme X est une semi-martingale, X = X_0 + A + M , avec X_0 la valeur en 0 de X, $A \in \mathcal{V}_0$ et $M \in b\mathcal{M}_{loc,0}$

On a donc H.X = $H.X_0$ + H.A + H.M

H.X_0(t) = H_0X_0
H.A se ramène a une intégrale de Lebesgues-Stieltjes
La difficulté est de donner un sens à H.M

Pour ce faire on commence avec $H \in b\mathcal{E}$ et $X \in \mathcal{M}_0^2$. On montre ensuite que $H \to H.M$ est une isométrie de $b\mathcal{E}$ dans $\mathcal{M}_0^2$ puis on étend cette isométrie à $b\mathcal{P}$ par densité de $b\mathcal{E}$ dans $b\mathcal{P}$.

On conclut par localisation car $b\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_0^2$

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

Un processus en escalier X est tel que :

$X(t,\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} X_k(\omega) 1_{t_k,t_{k+1}}(t)$ avec $X_k \in \mathcal{F}_{t_k}$ et (t_k) une subdivision finie de $\mathbb{R}^+$

On note la classe des processus en escalier $\mathcal{E}$

Soit $H \in \mathcal{E}$ et X un processus quelconque. On définie *l'intégrale stochastique* H.X par :

$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ H.X_t = \sum_{k=0}^{n-1} H_k(X_{t_k \wedge t} - X_{t_{k+1} \wedge t})$

On la note $\int_0^t H_s dX_s$

Définition générale de l'intégrale stochastique

Soit X une semi-martingale, l'application $H \to H.X$ définie sur $\mathcal{E}$ à une extension unique à $b\mathcal{P}_{loc}$ telle que :

1. H.X soit adaptée et *càdlàg*
2. $H \to H.X$ est linéaire
3. Si (H_n) une suite de $b\mathcal{P}_{loc}$ qui converge simplement vers H dans $b\mathcal{P}_{loc}$ et si :

$\forall n \ , |H_n| \leq K \in b\mathcal{P}_{loc}$ alors

$H_n.X_t \to H.X_t$ en probabilité uniformément en t sur tout compact de $\mathbb{R}_+$

Propriétés générales de l'intégrale stochastique

1. $\Delta(H.X) = H.\Delta X$ (formule des sauts)
2. $\forall T$ TA , $(H.X)^T = H.(X^T)$ (formule d'arrêt)
3. H.X est une semi-martingale et K.(H.X) = (KH).X (formule d'associativité)
4. Si $X \in \mathcal{M}_{0,loc}$ alors $H.X \in \mathcal{M}_{0,loc}$

L'intégrale de $\mathcal{BP}_{loc}$ par rapport à $\mathcal{V}_0$

$H \in \mathcal{BP}_{loc}$ donc est borné sur [0,t] donc intégrable par rapport à $A \in \mathcal{V}_0$.
On en déduit que H.A est l'intégrale de Lebesgues-Stieltjes.
Cette intégrale vérifie les propriétés de la définition et les 4 propriétés générales

L'intégrale de $\mathcal{BP}_{loc}$ par rapport à $b\mathcal{M}_{0,loc}$

On commence par $H \in b\mathcal{P}$ et $M \in \mathcal{M}_0^2$.

Quelques rappels sur $\mathcal{M}_0^2$:

$M \in \mathcal{M}_0^2 \iff sup_t(E(M_t^2)) < +\infty$
$\mathcal{M}_0^2$ est un espace de Banach pour la norme $\|M\|_{\mathcal{M}_0^2} = E(M_\infty^2)^{1/2}$

L'espace $L^2(M)$

On définit l'espace $L^2(M) = L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu)$ avec μ la mesure associée à M càd la mesure de Doléans de $< M >$

$$\forall C \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{F},\ \mu(C) = E(\int_{\mathbb{R}^+} 1_C(t) d < M >_t)$$

L'espace $L^2(M)$ est un espace de Banach pour la norme

$\|H\|_{L^2(M)} = E(\int_{\mathbb{R}^+} H_t^2 d < M >_t)^{1/2}$ et un espace de Hilbert pour le produit scalaire $< H, K >_{L^2(M)} = E(\int_{\mathbb{R}^+} H_t K_t d < M >_t)$

Isométrie de $\mathcal{E}$ **dans** $\mathcal{M}_0^2$

Soit $M \in \mathcal{M}_0^2$ et $H \in b\mathcal{E}$ prévisible alors $H \to H.X$ est une isométrie de $b\mathcal{E} \subset L^2(M)$ dans $\mathcal{M}_0^2$ càd

$$\|H\|_{L^2(M)} = \|H.X\|_{\mathcal{M}_0^2}$$

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

(admis car démonstration calculatoire et sans intérêt théorique)

Prolongement de $H \to H.X$ par densité de $b\mathcal{E}$ à $b\mathcal{P}$

Rappels

S est dense dans E $\iff \bar{S} = \mathrm{E} \iff (\bar{S})^\perp = \{0\}$(avec $\bar{S}$ la fermeture de S)

Or on a le résultat suivant $(\bar{S})^\perp = \{0\} \iff S^\perp = \{0\}$

Démonstation

$(\implies)$ $S \subset \bar{S} \implies S^\perp \subset \bar{S}^\perp$ donc $S^\perp = \{0\} \implies (\bar{S})^\perp = \{0\}$

$(\impliedby)$ $S^\perp = \{0\} \iff \forall x \in E, \forall y \in S, xy = 0$

$\implies \forall x \in E, \forall y \in \bar{S}, xy = 0 \iff (\bar{S})^\perp = \{0\}$ (continuité du produit scalaire)

Il faut donc montrer que $(b\mathcal{E})^\perp = \{0\}$ pour la produit scalaire de L^2(M)

Démonstration

Soit $H \in b\mathcal{E}$, $X \in (b\mathcal{E})^{\perp}$, on a $< X, H > = 0$ on veut montrer que X $= 0$

Posons $Y_t = \int_0^t X_s d < M >_s$
Le processus Y est une processus adapté, càdlàg, à varation finie, nul en 0.

Montrons que Y est une martingale ce qui montrera que X $= 0$

Soit $s < t$, pour $H = 1_A 1_{]s,t]} \in b\mathcal{E}, A \in \mathcal{F}_s$ on a:

$< H, X >= E(\int_{\mathbb{R}^+} HXd < M >) = E(1_A \int_s^t Xd < M >)$

$= E(1_A(Y_t - Y_s) = 0$ donc $E(Y_t|\mathcal{F}_s) = E(Y_s|\mathcal{F}_s) = Y_s$

A ce stade, on a défini l'intégrale de H.M pour $H \in b\mathcal{P}$ et $M \in \mathcal{M}_0^2$. Il reste à localiser l'application $H \rightarrow H.X$ pour avoir le résultat voulu.

Localisation :

On pose $f : b\mathcal{P} \times b\mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_0^2$ définie par $f(H, M) = H.M$ $(\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_0^2)$

Soit $M \in b\mathcal{M}_{0,loc}$ et $H \in b\mathcal{P}_{loc}$, $\forall(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, si T est un TA tel que $T(\omega) \geq t$, $M^T \in b\mathcal{M}_0$ et $H1_{[0,T]} \in b\mathcal{P}$.

On définit l'intégrale stochastique $H.X(t,\omega)$ par $H1_{[0,T]}.\ X^T(t,\omega)$

Rappel

$1_{[0,T]}(t,\omega) = 1$ si $0 \leq t \leq T(\omega)$ 0 sinon

Indépendance de T :

Soit S TA tel que $S(\omega) \geq t$, $M^S \in b\mathcal{M}_0$ et $H1_{[0,S]} \in b\mathcal{P}$ alors :

$H1_{[0,T]}.\ X^T(t,\omega) = H1_{[0,T]}.\ X^T(t \wedge S(\omega), \omega)$ car $S(\omega) \geq t$
$(H1_{[0,T]}.\ X^T)^S(t,\omega)$ définition d'un processus arreté
$H1_{[0,T\wedge S]}.\ X^{T\wedge S}(t,\omega)$
$(H1_{[0,S]}.\ X^S)^T(t,\omega)$

Justification de l'existence de T

Soit R est un TA tel que $R(\omega) \geq t$, $M^R \in b\mathcal{M}_0$ et S un TA tel que $S(\omega) \geq t$ et $H1_{[0,S]} \in b\mathcal{P}$.

En posant $T = R \wedge S$, T vérifie les conditions voulues.

Approximation de l'intégrale stochastique

Soit $M \in cb\mathcal{M}^2$ (martingale de carré intégrable continue et bornée)

Soit H un processus prévisible tel que
$H_t^* = sup_{s<t} |H_s|$ est borné dans $L^2(M)$

Pour toute subdivison $\Delta = (t_k)$ de $\mathbb{R}^+$ on pose
$H_\Delta(t,\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} H(t_k,\omega) 1_{]t_k,t_{k+1}]}$

On a le résultat suivant

$H_\Delta.M_t \to H.M_t$ uniformement en t lorsque $|\Delta| \to 0$ et max$\Delta \to +\infty$

Ce résultat est admis.

Calcul d'une intégrale stochastique

Soit $T \in \mathbb{R}^+$, B le mouvement brownien, et $B^T \in cb\mathcal{M}^2$
Montrons que B^* est bornée dans $L^2(B^T)$

$$\|B^*\|_{L^2(B^T)} = E(\int_{\mathbb{R}+} B^{*2} d < B^T >) = E(\int_{\mathbb{R}+} B^{*2} d < B >^T)$$

$$= E(\int_0^T B^{*2} d < B >) = E(\int_0^T B^{*2} dt) \text{ (car } < B_t >= t)$$

$$= \int_0^T E(B^{*2}) dt \leq \int_0^T 4E(B^2) dt \text{ (Inégalité de Doob)}$$

$$= \int_0^T 4t dt = 2T^2 < +\infty$$

Donc $B_\Delta . B_t^T \to B.B_t^T$ lorsque $|\Delta| \to 0$ et $\max\Delta \to +\infty$

Calcul d'une intégrale stochastique

Soit $\Delta = (t_k)$ une subdivison de $\mathbb{R}^+$ On note $B_{t_k} = B_k$ et on a

Soit $t \leq T$ et $t_n = t$

$B_\Delta.B_t^T = \sum_{k=0}^{n-1} B_k(B_{k+1} - B_k)$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} B_{k+1}^2 - B_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(B_{k+1} - B_k)^2$

(car $a(b-a) = \frac{1}{2}b^2 - a^2 - \frac{1}{2}(b-a)^2$)

donc $B_\Delta.B_t^T = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}\mathrm{W}(\mathrm{B},\Delta,\mathrm{t}) \to \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$

lorsque $|\Delta| \to 0$ et $\max\Delta \to +\infty$

finalement $\int_0^t BdB = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t \neq \frac{1}{2}B_t^2$

CHAPITRE 8 : CONSEILS DE LECTURE

1. Introduction
- De l'intégrale de Riemann à l'intégrale stochastique
- Contexte de l'intégrale stochastique
- Les grandes étapes : plan du livre

2. Compléments sur l'intégration
- Espace de probabilité filtré
- Applications mesurables
- Espérance d'une variable aléatoire réelle (VAR)
- Uniforme intégrabilité
- Classes monotones
- Variation des fonctions
- Intégrale de Lebesgue-Stieltjes des fonctions

3. Martingales
- Espérance conditionnelle
- Temps d'arrêt
- Arrêt et échantillonnage des martingales discrètes
- Convergence presque sûre des S-martingales
- Convergence dans L1 des S-martingales discrètes
- Inégalité de Doob dans Lp
- Martingales en temps continu
- Martingale de carré intégrable

4. Topologie
- Espaces topologiques
- Continuité, topologie initiale
- Espace compact
- Filtres et ultrafiltres
- Convergence des filtres et limites des applications
- Adhérence des filtres
- Filtres et topologie initiale
- Théorème de Tychonov
- Compactification
- Espaces métrisables localement compacts

5. Ensembles analytiques et capacités
- Pavage et pavages compacts
- Ensembles analytiques
- Capacités, théorème de Choquet
- Fonction d'ensembles et capacité extérieure
- Fonctions d'ensembles additives
- Probabilité extérieure
- Mesurabilité des débuts et théorème de section

6. Temps d'arrêt, tribus de temps d'arrêt
- Généralités sur les temps d'arrêt
- Propriétés des tribus de temps d'arrêt
- Tribu optionnelle
- Tribu prévisible
- Un exemple d'espace filtré

7. Temps d'arrêt prévisibles
- Temps d'arrêt prévisible
- Temps d'arrêt équitables et annonçables
- Applications du théorème PEA
- Temps d'arrêt accessible et inaccessible

8. Théorèmes de sections et de projections
- Section optionnelle
- Projection optionnelle
- Section prévisible
- Projection prévisible
- Mesure de Doléans associée à un processus
- Théorème de Doléans
- Projection duale prévisible

9. Décomposition des martingales
- Classes de processus
- Localisation
- Martingale locale
- Décomposition de Doob-Meyer
- Extension du crochet de Meyer
- Extension du compensateur prévisible
- Décomposition des martingales

10. Intégrale stochastique : cas général
- Processus localement bornés
- Semi-martingales
- Processus prévisibles simples
- Définition générale de l'intégrale stochastique
- Sommes d'Ito
- Intégrale de $H \in b\mathcal{P}_{loc}$ par rapport à $A \in \mathcal{V}_0$

11. Intégrale stochastique : cas martingale
- Notations et objectifs
- Intégrale stochastique de $H \in b\mathcal{E}$ par $M \in \mathcal{M}^2$
- Espace $\mathcal{M}^2$
- Espace $L^2(M)$
- Prolongement de l'IS de $b\mathcal{E}$ à $b\mathcal{P}$
- Intégrale de $H \in b\mathcal{E}$ par $M \in b\mathcal{M}_{0,loc}$

12. Variation quadratique
- Covariation et variation quadratique
- Partie continue d'une covariation
- Approximation polynomiale
- Formule d'Ito