Fonctions de plusieurs variables réelles-Différentiabilité

0.1 Dérivées partielles

0.1.1 Fonctions à valeurs réelles

Définition 1 *On considère Ω un ouvert de IR^p et une application à valeurs réelles $f : \Omega \to IR$.*

1- Pour $a = (a_1, .., a_p)$ fixé dans Ω, on considère l'application suivante :
$f_{a,i} \ : t \in IR \longmapsto f_{a,i}(t) = f(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_p)$
C'est une fonction d'une seule variable obtenue en fixant toutes les variables sauf la ième.

On dit que f admet une dérivée partielle en a par rapport à la ième variable si l'application $f_{a,i}$ est dérivable au point a_i.

On note dans ce cas :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f_{a,i}(a_i+h)-f_{a,i}(a_i)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,...,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},...,a_p)-f(a)}{h}\end{aligned}$$

C'est la dérivée partielle de f par rapport à la ième variable au point a.

2- Si pour tout a de Ω, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe , on définit l'application dérivée partielle par rapport à la ième variable :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i} : \ \Omega \ &\longrightarrow \mathbb{R}\\ a \ &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\end{aligned}$$

Remarque 2 *Remarquons que si on note* $(e_1, ..., e_p)$ *la base canonique de* IR^p *alors* $f_{a,i}(t) = f(a + (t - a_i)e_i)$

et $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h\ e_i) - f(a)}{h}$

Exemple On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sur $IR^2 \setminus \{(0,0)\}$, f admet des dérivées partielles données par les express-sions suivantes :

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x^4 y + 3x^2 y^3}{(x^2+y^2)^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^5 - x^3 y^2}{(x^2+y^2)^2}$

D'autre part,

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h\ ,0) - f(0,0)}{h} = 0 \implies \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0 \implies \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Conclusion : f admet deux fonctions dérivées partielles définies sur IR^2 par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} : \quad & IR^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y + 3x^2 y^3}{(x^2+y^2)^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} : \quad & IR^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - x^3 y^2}{(x^2+y^2)^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque 3 *L'existence des dérivées partielles de* f *en un point* a *n'entraine pas la continuité de la fonction* f *au point* a.

On peut par exemple considérer la fonction numérique f définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

On a $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h\ ,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$
Donc f admet des dérivées partielles au point $(0,0)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

Pourtant f n'est pas continue en $(0,0)$.
En effet $\lim\limits_{x\to 0}f(x,x)=\dfrac{1}{2}\neq f(0,0)$

0.1.2 Fonctions à valeurs vectorielles

Définition 4 *On considère Ω un ouvert de IR^p et une application à valeurs vectorielles*

$$\begin{array}{lll} f: & \Omega & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & x=(x_1,...,x_p) & \longmapsto f(x)=(f_1(x),...,f_n(x)) \end{array}$$

Les n applications , $f_1,\ldots,f_n$ sont appelées **applications coordonnées** associées à f.

Elles sont définies sur Ω à valeurs dans IR.

1- On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la ième variable en un point $a\in\Omega$ si

pour tout $j\in\{1,2,...,n\}$, $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$ existe et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a),\frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a),.........,\frac{\partial f_n}{\partial x_i}(a))$$

2- Pour $i\in\{1,2,...,p\}$, si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existent pour tout $a\in\Omega$, on définit l'application vectorielle

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=(\frac{\partial f_1}{\partial x_i},\frac{\partial f_2}{\partial x_i},......,\frac{\partial f_n}{\partial x_i}):$$

$$x\longmapsto\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x),\frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x),.....,\frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x)$$

Exemple : On considère l'application f définie par :

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (x^2 - z^2 \ , \ y \sin x) \end{array}$$

Les deux applications coordonnées f_1 et f_2 admettent des dérivées partielles par rapport aux trois variables x, y et z en tout point de $\mathbb{R}^3$.

Par suite f admet trois dérivées partielles définies sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial f}{\partial x}: & (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = (2x, y\cos x) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}: & (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = (0, \sin x) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}: & (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = (-2z, 0) \end{array}$$

Remarquons que, par analogie à f, les trois fonctions dérivées partielles associées à f sont des fonctions à trois variables à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

0.1.3 Fonctions de classe C^1- Fonctions de classe C^k

Définition 5 *On considère Ω un ouvert de IR^p et une application à valeurs réelles $f : \Omega \to IR^n$.*

on dit que f est de classe C^1 si toutes les dérivées partielles de f sont définies et continues sur Ω.

Proposition 6 *f est de classe C^1sur Ω $\iff$ $f_1, \ldots, f_n$ les applications coordonnées associées à f sont de classe C^1sur Ω.*

Proposition 7 *Si f est de classe C^1sur Ω alors f est continue sur Ω.*

Remarque 8 *Si f et g sont deux fonctions C^1 sur leur domainede définition, alors les fonctions $\lambda f + \beta g$, $f \times g$, $\dfrac{f}{g}$, $f \circ g$ lorsqu'elles existent, sont aussi de classe C^1sur leur domaine de définition.*

Définition 9 *Soit* $f : \Omega \subset IR^p \to IR$

1- Si f admet une dérivée partielle par rapport à x_i définie sur Ω alors celle-ci peut elle même à son tour admettre des dérivées partielles
$\frac{\partial}{\partial xj}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$ qui sera notée $(\frac{\partial^2 f}{\partial xj\, \partial x_i})$
et $\frac{\partial}{\partial xi}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$ qui sera notée $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2})$
Ce sont les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

2- On peut définir les dérivées partielles d'ordre k de f notées $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} ......\, \partial x_{i_k}}$.

3- On dit que f est de classe C^ksur Ω si toutes les dérivées partielles d'ordre k sont définies et continues sur Ω.

4- On dit que f est de classe C^∞sur Ω si f est de classe C^ksur Ω pour tout $k \in IN$.

Remarque

- Les fonctions polynomiales à p variables sont de classe C^∞sur IR^p.
- Les fonctions rationnelles à p variables sont de classe C^∞sur leur domaine de définition.

Proposition 10 *f est de classe C^ksur Ω $\iff$ $f_1, \dots, f_n$ les applications coordonnées associées à f sont de classe C^ksur Ω.*

Exemple et précision :

On considère une application f à deux variables définie par :

$$\begin{array}{rlcl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

A cette fonction, on peut associer deux fonctions dérivées partielles d'ordre 1 à savoir $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Ces deux fonctions peuvent admettre des dérivées partielles qui seront appelées dérivées partielles d'ordre 2 de f.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})\ (x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+h\ ,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h}\ \text{notée}\ (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})\ (x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x\ ,y+h)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h}\ \text{notée}\ (\frac{\partial^2 f}{\partial y\ \partial x})(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})\ (x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+h\ ,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{h}\ \text{notée}\ (\frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y})(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})\ (x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x\ ,y+h)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{h}\ \text{notée}\ (\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})(x,y)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & \nearrow & \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \\
 & & & \nearrow & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & & \\
 & & & & & \searrow & \frac{\partial^3 f}{\partial y\ \partial x^2} \\
 & \nearrow & \frac{\partial f}{\partial x} & & & & \\
 & & & & & \nearrow & \frac{\partial^3 f}{\partial x\ \partial y\ \partial x} \\
 & & & \searrow & \frac{\partial^2 f}{\partial y\ \partial x} & & \\
 & & & & & \searrow & \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\ \partial x} \\
f & & & & & & \\
 & & & & & \nearrow & \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \\
 & & & \nearrow & \frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y} & & \\
 & & & & & \searrow & \frac{\partial^3 f}{\partial y\ \partial x\ \partial y} \\
 & \searrow & \frac{\partial f}{\partial y} & & & & \\
 & & & & & \nearrow & \frac{\partial^3 f}{\partial x\ \partial y^2} \\
 & & & \searrow & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & & \\
 & & & & & \searrow & \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}
\end{array}$$

A partir d'une fonction à deux variables, on peut définir éventuellement : 2 fonctions dérivées partielles d'ordre un , 2^2 dérivées partielles d'ordre deux, 2^3 dérivées partielles d'ordre trois et plus généralement 2^k dérivées partielles d'ordre k .

Théorème 11 ***(Théorème de Schwarz)***

Soit $f : \Omega \subset IR^2 \to IR$ une fonction qui admet des dérivées partielles d'ordre 2 croisées : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$.

Si ces dérivées sont continues en un point a de Ω alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(a).$$

Conséquence 1

Si f est de classe C^2sur Ω alors toutes ses dérivées partielles d'ordre 2 sont continues sur Ω . On peut donc déduire d'après le théorème de Schwarz qu'elles sont égales sur Ω :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

Conséquence 2

Si on s'intéresse à une fonction f de classe C^1sur $\Omega \subset IR^2$ à valeurs dans IR, ayant des dérivées partielles d'ordre 2 et que par exemple pour un certain a de Ω, on constate d'après un calcul que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(a) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(a)$ alors la contraposée du théorème de Schwarz permet d'affirmer que l'une au-moins des deux dérivées partielles secondes croisées n'est pas continue au point a . Cela nous conduit à conclure que la fonction f considérée n'est pas de classe C^2sur Ω.

Exemple : Exercice 3 (Série 2)

Soit $f \; : IR^2 \longrightarrow IR$ l'application définie par

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy\ (x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1- Calculer les dérivées partielles de f et montrer que f est de classe C^1sur IR^2.
2- Montrer que f admet des dérivées secondes en tout point de IR^2.
3- f est-elle de classe C^{2}sur IR^2?

0.2 Différentiabilité

0.2.1 Définition de la différentielle

Définition 12

On considère Ω un ouvert de IR^p , a un élément de Ω et une application $f : \Omega \to IR^n$.

1. On dit que f est différentiable au point a s'il existe une application linéaire continue $L : IR^p \to IR^n$ telle que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0$$

   En d'autres termes, il existe $r > 0$ tel que si $\| h \| < r$ alors
   $f(a+h) = f(a) + L(h) + \| h \| \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0_{IR^p}$
   Dans ce cas L est unique et est appelée la **différentielle** de f au point a. Elle sera notée $L = \mathbf{d}_a\mathbf{f}$.

2. On dit que f est différentiable sur Ω si elle est différentiable en tout point de Ω.

Remarques

1. Cette propriété de différentiabilité signifie que $f(a+h) - f(a)$ est la somme d'une application linéaire de h et d'une application négligeable devant $\|h\|$ .C'est la généralisation à plusieurs variables de la notion de développement limité à l'ordre 1.
2. La différentielle de f en un point a , lorqu'elle existe, c'est aussi une fonction à p varibles à valeurs dans IR^n exactement comme f .
3. La continuité de $L = d_a f$ découle naturellement du fait qu'elle soit linéaire. Cette propriété a été déjà démontrée au chapitre1.
4. Comme toutes les normes sont équivalentes sur IR^n, la définition de la différentielle ne dépend pas du choix de la norme. On choisit en général la norme la plus adaptée à l'expression de la fonction.
5. L'unicité de la différentielle de f en un point a peut être démontrée par l'absurde. En effet, supposons l'existence de deux applications linéaires L_1 et L_2 de $IR^p \to IR^n/$

$$f(a+h) = f(a) + L_1(h) + \parallel h \parallel \varepsilon_1(h) \text{ où } \varepsilon_1(h) \to 0 \text{ quand } h \to 0_{IR^p}$$
$$f(a+h) = f(a) + L_2(h) + \parallel h \parallel \varepsilon_2(h) \text{ où } \varepsilon_2(h) \to 0 \text{ quand } h \to 0_{IR^p}$$

On aurait dans ce cas

$\dfrac{L_1(h) - L_2(h)}{\parallel h \parallel} = \varepsilon_2(h) - \varepsilon_1(h)$ c'est à dire $\dfrac{(L_1 - L_2)(h)}{\parallel h \parallel} = \varepsilon_2(h) - \varepsilon_1(h)$

Soit u un vecteur quelconque de $IR^p \backslash \{0_{IR^p}\}$ et $h = t.u$ où $t \in IR_+$
quand $t \to 0$ on a $h \to 0_{IR^p}$ et d'où $\varepsilon_2(h) - \varepsilon_1(h) \to 0_{IR^p}$
Or comme L_1 et L_2 sont linéaires, on a

$\dfrac{(L_1 - L_2)(tu)}{\parallel tu \parallel} = \dfrac{t\ (L_1 - L_2)(u)}{t \parallel u \parallel} = \varepsilon_2(tu) - \varepsilon_1(tu) \to 0_{IR^p}$ quand $t \to 0$

d'où nécessairement $(L_1 - L_2)(u) = 0$ pour tout $u \in IR^p \backslash \{0_{IR^p}\}$
De plus on sait que $L_1(0_{IR^p}) = L_2(0_{IR^p}) = 0_{IR^n}$.

conclusion : $L_1 = L_2$

Exemples et cas particuliers

1- On se place dans le cas particulier où $n = p = 1$. On va clarifier à travers l'équivalence suivante la relation qu'il y a entre la notion de dérivabilité et la notion de différentiabilité. Soit $f : IR \to IR$ et soit a un réel donné. On a l'équivalence suivante :

$$f \text{ est différentiable en } a \iff f \text{ est dérivable en } a$$

et la différentielle de f au point a est définie par : $\begin{aligned} d_a f : IR &\to IR \\ h &\mapsto d_a f(h) = f'(a).h \end{aligned}$

preuve :

$\Longrightarrow$ Si f est différentiable en a alors il existe une application linéaire continue unique $d_a f : IR \to IR$ tel que

$f(a+h) - f(a) - (d_a f)(h) = |h|\ \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$ or $d_a f$ est une application linéaire , par suite $d_a f(h) = d_a f\ (h \times 1) = h \times d_a f\ (1)$

d'où $\dfrac{f(a+h) - f(a) - h \times d_a f(1)}{h} = \dfrac{|h|}{h}\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = d_a f(1)$

donc f est dérivable en a et $f'(a) = d_a f\ (1)$.

$\Longleftarrow$ Réciproquement, si f est dérivable en a alors :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - h\ f'(a)}{h} = 0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - h\ f'(a)}{|h|}$$

et donc f est différentiable en a et $\begin{array}{l} d_af : IR \to IR \\ \qquad h \mapsto d_af(h) = \ f'(a).h \end{array}$

2- Toute application linéaire f est différentiable sur son domaine de définition et $d_af = f$ pour tout a.

En effet si $f : IR^p \to IR^n$ est linéaire alors $\dfrac{f(a+h) - f(a) - f(h)}{\|h\|} = \dfrac{0}{\|h\|} = 0 \to 0$ quand $h \to 0_{IR^p}$ pour tout $a \in IR^p$

donc d'après l'unicité de la différentielle, on a nécessairement $d_af = f$ pour tout $a \in IR^p$.

En particulier les applications projections $\begin{array}{rcl} p_i : & IR^p & \to & IR \\ & (x_1, ..., x_p) & \longmapsto & x_i \end{array}$ sont linéaires pour $1 \leq i \leq p$ donc différentiables et $d_ap_i = p_i$ pour tout $a \in IR^p$.

3- L'application constante $\begin{array}{rl} C : & IR^p \to IR \\ & (x_1, ..., x_p) \longmapsto c \end{array}$ est différentiable et $d_aC = \tilde{O}$ l'application nulle.

Proposition 13

Si f est différentiable en un point a, alors f est continue en a.

Preuve :

Si f est différentiable en a alors il existe une application linéaire continue unique d_af tel que

$f(a+h) - f(a) = d_af\ (h) + \parallel h \parallel \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0_{IR^p}$

Comme l'application d_af est linéaire et continue, on déduit que $\lim\limits_{h \to 0} d_af(h) = d_af(0) = 0$ donc $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$ et f est continue au point a.

0.2.2 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

Définition 14

Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable au point $a \in \mathbb{R}^p$.

*On appelle **gradient** de f au point a et on note* $\operatorname{grad} f\,(a)$ *ou* $\nabla f\,(a)$ *le vecteur*

$$\nabla f\,(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\,(a)\,, \cdots\,, \frac{\partial f}{\partial x_p}\,(a) \right)^t$$

Proposition 15

On considère Ω un ouvert de IR^p, $a \in \Omega$ et une application $f : \Omega \to IR$.

Si f est différentiable en un point a alors f admet des dérivées partielles en ce point.

De plus, pour $h = (h_1, \cdots, h_p) \in \mathbb{R}^p$, on a

$$d_a f\,(h) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,(a)\,.$$

Autrement dit, $d_a f\,(h) =< \nabla f\,(a)\,, h >$, où $< .,. >$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^p$.

Preuve :

Soit $(e_1, e_2, , ..., e_P)$ la base canonique de IR^p, un vecteur h de IR^p s'écrit

$h = \sum\limits_{i=1}^{p} h_i\ e_i$ et comme $d_a f$ est linéaire il s'en suit que

$d_a f(h) = \sum\limits_{i=1}^{p} d_a f(e_i)\ h_i$

Par ailleurs, comme f est différentiable en a alors

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a) - d_a f(h)}{\|h\|} = 0.$

En particulier si $h = t\ e_i = (0, 0, , , ..., t, ..., 0)$ alors $\|h\| = |t|$ et dans ce cas

$\dfrac{f(a+h) - f(a) - d_a f(h)}{\|h\|} = \dfrac{f(a+te_i) - f(a) - t\ d_a f(e_i)}{|t|} \to 0$ quand $t \to 0$

On en déduit que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+te_i) - f(a)}{t} = d_a f(e_i)$.

Or on sait que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+te_i) - f(a)}{t} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ donc

$d_a f(h) = \sum\limits_{i=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ h_i$ pour tout $h = (h_1, ..., h_P)$

Exemples

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

On vérifie facilement que f admet des dérivées partielles nulles au point $(0,0)$.

Si f est différentiable en $(0,0)$, sa différentielle serait donnée par

$$d_{(0,0)}f(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad avec\ h = (h_1, h_{,2}) \in \mathbb{R}^2.$$

En posant

$$\varepsilon(h) = \frac{f((0,0) + (h_1,h_2)) - f(0,0) - \left(h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)}{\|h\|}$$

et en choisissant la norme euclidienne, on déduit que

$$|\varepsilon(h)| = \frac{|h_1^3 h_2|}{\|h\|^3} \leq \|h\| \ \text{ car } \ |h_i| \leq \|h\| \ \text{ pour } i = 1,2.$$

D'où $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \varepsilon(h) = 0$ donc f est différentiable en $(0,0)$ et sa différentielle au point $(0,0)$ est l'application nulle.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

On vérifie que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1.$$

Donc si $d_{(0,0)}f$ existe, son expression en un point $h = (h_1, h_{,2}) \in \mathbb{R}^2$ serait donnée par

$$d_{(0,0)}f(h) = h_1 + h_2.$$

Soit

$$\varepsilon(h) = \frac{f((h_1,h_2)) - f(0,0) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\|h\|}.$$

On a
$$\varepsilon(h) = \frac{-h_1 h_2 (h_1 + h_2)}{\|h\| (h_1^2 + h_2^2)}$$

En considérant la norme euclidienne et la suite $u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, il vient que $\varepsilon(u_n) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc $\varepsilon(h) \nrightarrow 0$ quand $\|h\| \to 0$. On déduit donc que f n'est pas différentiable au point $(0,0)$.

Conséquence

L'existence des dérivées partielles en un point a est une condition nécessaire pour que f soit différentiable en a mais cette condition n'est pas suffisante.

Une fonction peut avoir des dérivées partielles en un point sans qu'elle soit différentiable en ce point. Cependant, cette condition peut être utile dans les deux cas comme le montre l'exemple précédent.

Remarque 16

Dans le cas particulier où $p = 2$,

Si f est différentiable en a alors f possède des dérivées partielles en a et on a $d_a f(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\ h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\ h_2$ pour tout $h = (h_1, h_2)$

On note par abus respectivement "x" et "y" les deux projections

$(x, y) \longmapsto x$ et $(x, y) \longmapsto y$ et leurs différentielles respectives en un point a seront notées $d_a x$ et $d_a y$.

Comme ces deux applications projections sont linéaires, il s'en suit que

$d_a x :\ h = (h_1, h_2) \longmapsto d_a x(h) = h_1$

$d_a y : h = (h_1, h_2) \longmapsto d_a y(h) = h_2$

On écrit alors $d_a f(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\ .\ d_a x(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\ .\ d_a y(h)$

Par abus et pour alléger les écritures, on note

$d_a f = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\ dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\ dy$

Dans certaines références, on écrit même : $df = \frac{\partial f}{\partial x}\ dx + \frac{\partial f}{\partial y}\ dy$

Remarquons aussi que dans IR^2, un point pourrait être également représenté à l'aide de ses coordonnées polaires (r, θ), la formule précédente s'écrit dans ce cas :

$$d_a f = \frac{\partial f}{\partial r}(a)\ dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}(a)\ d\theta$$

Proposition 17

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω alors f est différentiable sur Ω.

Remarque 18

La réciproque est fausse : f peut être différentiable sans être de classe $\mathcal{C}^1$. (Exercice 4- Série 2)

Remarque 19 *La réciproque de la proposition 4 est donc vraie dans le cas où les dérivées partielles sont continues*

0.2.3 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Proposition 20 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in \Omega$ et*

$$\begin{array}{rccl} f: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)) \end{array}$$

f est différentiable en a si et seulement si toutes ses applications coordonnées, $f_1, \ldots, f_n$, le sont.

De plus, $d_a f = (d_a f_1, \ldots, d_a f_n) : h \mapsto d_a f(h) = (d_a f_1(h), \ldots, d_a f_n(h))$

Conséquence

Pour tout $h \in \mathbb{R}^p$ on pose $y = d_a f(h) \in \mathbb{R}^n$

Il s'en suit que $\quad y = (y_1, \cdots, y_n) = (d_a f_1(h), \ldots, d_a f_n(h))$

et par suite $\quad (y_1, \cdots, y_n) = \left(\sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \ldots, \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(a) \right)$

Cela s'écrit matriciellement de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}$$

Définition 21 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable en a.*

1. *On appelle matrice jacobienne de f au point a, et on note $J_a(f)$, la matrice donnée par*
$$J_a(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$
2. *La différentielle de f au point a est donnée par :* $\begin{array}{llll} d_a f : & \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & h & \longmapsto & d_a f(h) = J_a(f) \times h \end{array}$
3. *$J_a(f)$ représente la matrice de l'application linéaire $d_a f$ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.*
4. *Si $n = p$, cette matrice est carrée et son déterminant est appelé jacobien de f au point a.*
Exemple

La fonction
$$\begin{array}{llll} g : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$et sa matrice jacobienne est donnée par :
$$J_{(r,\theta)}(g) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$
La matrice Jacobienne est carrée, son jacobien vaut $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

Cas particuliers

1. Si $n = 1$, $J_a(f) \in \mathbb{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.
La matrice Jacobienne est alors une matrice "ligne" donnée par : $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right)$
2. Si $p = 1$, $J_a(f) \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
La matrice Jacobienne est alors une matrice "colonne" donnée par : $\begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_n'(a) \end{pmatrix}$

3. Si $n = p = 1,\ J_a(f) = f'(a)$

0.2.4 Opérations sur les différentielles

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $a \in U$.

Proposition 22 *Linéarité*

Si f et g sont deux fonctions numériques, définies sur U différentiables en a, alors pour $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \beta g$ est aussi différentiable en a et

$$d_a(\lambda f + \beta g) = \lambda\ d_a f + \beta\ d_a g.$$

Ce qui se traduit matriciellement par : $\quad J_a(\lambda f + \beta g) = \lambda J_a(f) + \beta J_a(g)$

preuve :

$$\begin{array}{lll} d_a(\lambda f + \beta g): & \mathbb{R}^p & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & h & \longmapsto d_a(\lambda f + \beta g)(h) = \sum_{i=1}^{p} h_i \dfrac{\partial(\lambda f + \beta g)}{\partial x_i}(a) \end{array}$$

En exploitant la linéarité des dérivées partielles, on déduit que :

$$\begin{array}{lll} d_a(\lambda f + \beta g)(h) & = & \lambda \sum_{i=1}^{p} h_i \dfrac{\partial(f)}{\partial x_i}(a) + \beta \sum_{i=1}^{p} h_i \dfrac{\partial(g)}{\partial x_i}(a) \\ & = & \lambda\ d_a f(h) + \beta\ d_a g(h) \end{array}$$

Proposition 23 *Produit et inverse*

Si f et g sont deux fonctions numériques, définies sur U différentiables en a, alors la fonction produit fg est aussi différentiable en a et on a

$$d_a(fg) = f\ (a)\ d_a g + g(a)\ d_a f.$$

Si de plus g ne s'annule pas en a alors $\dfrac{1}{g}$ est différentiable en a et

$$d_a\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{1}{g^2(a)} d_a g.$$

preuve :

En ce qui concerne le produit, il suffit d'utiliser la linéarité des dérivées *partielles comme dans la preuve de la proposition précédente.*

Pour l'inverse, on applique juste la formule précédente de la différentielle du produit avec $f = \dfrac{1}{g}$ *sachant que* $d_a\left(\dfrac{1}{g} \times g\right) = \tilde{O}$ *l'application nulle.*

Théorème 24 *Composée de fonctions différentiables*

Soit $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction différentiable en* a *et* V *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *tel que* $\varphi(U) \subset V$.
Si $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^q$ *est différentiable en* $g(a)$ *alors* $f \circ g$ *est différentiable en* a *et*

$$d_a(f \circ g) = \left(d_{g(a)} f\right) \circ d_a g.$$

Ce qui se traduit matriciellement par :

$$J_a(f \circ g) = J_{g(a)}(f) \quad \times \quad J_a(g)$$

où $J_{g(a)}(f) \in \mathbb{M}_{q,n}(\mathbb{R})$ *et* $J_a(g) \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

En particulier, pour $q = p = 1$, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 25

Soient $g : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction différentiable en* a *et* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction différentiable en* $g(a)$ *alors* $F = f \circ g$.
est différentiable en a

$$F'(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i}(g(a)) \ \times \ g_i'(a)$$

Preuve :

$$g: \begin{array}{ll} U \subset IR & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto g(x) = (g_1(x), ..., g_n(x)) \end{array} \quad \text{et} \quad f: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ y = (y_1, ..., y_n) & \longmapsto f(y) \end{array}$$

Par suite $F = f \circ g. : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(g(x)) \end{array}$ *et* $J_a(F) = F'(a)$

D'autre part, $J_a(f \circ g) = J_{g(a)}(f) \times J_a(g)$ *où* $J_{g(a)}(f)$ *est une matrice "ligne" donnée par :* $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y_1}(g(a)) \cdots \dfrac{\partial f}{\partial y_n}(g(a))\right)$

et $J_a(g)$ est une matrice "colonne" donnée par : $\begin{pmatrix} g_1'(a) \\ \vdots \\ g_n'(a) \end{pmatrix}$

On conclut donc que $F'(a) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial y_i}(g(a)) \times g_i'(a)$

0.3 Changement de variables

0.3.1 Difféomorphismes

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Définition 26

Une application $f : U \longrightarrow V$ est appelé un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ou difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ si elle vérifie les conditions suivantes.

1. *f réalise une bijection de U sur V.*
2. *f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.*
3. *f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.*

Exemple

On considère la fonction $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$

Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$car ses fonctions coordonnées sont de classe $\mathcal{C}^1$.

D'autre part, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow x = \dfrac{u+v}{2}$ *et* $y = \dfrac{u-v}{2}$.

Donc f est bijective et $\begin{array}{rccl} f^{-1} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right) \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Conclusion : f réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 27

Si f est un difféomorphisme de U sur V alors pour tout $a \in U$, $d_a f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ et on a
$(d_a f)^{-1} = d_{f(a)} f^{-1}$

Preuve : On a $(f^{-1} \circ f) = Id_{\mathbb{R}^n}$ d'où

$$d_a \left(f^{-1} \circ f\right) = d_a \left(Id_{\mathbb{R}^n}\right) = Id_{\mathbb{R}^n} = \left(d_{f(a)} f^{-1}\right) \circ d_a f.$$

On en déduit que $d_a f$ est bijective et $(d_a f)^{-1} = d_{f(a)} f^{-1}$.

Proposition 28

Si f est un difféomorphisme de U sur V alors pour tout $a \in U$, la matrice jacobienne de f au point a est inversible et
$(J_a f)^{-1} = J_{f(a)} f^{-1}$**.**

Preuve : On a $\left(d_{f(a)} f^{-1}\right) \circ d_a f. = Id_{\mathbb{R}^n}$ d'où $\left(J_{f(a)} f^{-1}\right) \times J_a f = J_a \left(Id_{\mathbb{R}^n}\right) = I_n$ la matrice unité. Par suite la matrice jacobienne de f au point a est inversible et $(J_a f)^{-1} = J_{f(a)} f^{-1}$

Ce résultat permet de calculer la matrice jacobienne de la bijection réciproque d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sans connaitre explicitement l'expression de cette bijection.

Théorème 29 *Soit $a \in U$ et f une application de U dans $\mathbb{R}^n$ injective et de classe $\mathcal{C}^1$sur U. On a l'équivalence suivante :*

$$\begin{array}{c} f(U) \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^n \text{ et} \\ f \text{ est un } C^1 \text{ difféomorphisme de } U \text{ sur } f(U) \end{array} \iff \begin{array}{c} \text{Le jacobien de } f \text{ ne s'annule} \\ \text{en aucun point de } U \\ (\ \forall a \in U, \quad \det\left(J_a f\right) \neq 0\ ) \end{array}$$

Exemple

On considère la fonction

$$\begin{array}{llll} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

Il est clair que g n'est pas injective, en effet
$g(r, \theta) = g(-r, \theta + \pi)$ ou encore $g(r, \theta) = g(r, \theta + 2\pi)$.
D'autre part, g est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$\det J_{(r,\theta)}(g) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Le jacobien de g s'annule en tout point (r, θ) tel que $r = 0$.
L'application g n'est pas C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$sur $\mathbb{R}^2$.

0.3.2 Difféomophisme : changement de variable en coordonnées polaires

Soit g la fonction défine précédemment.
On considère alors la fonction ϕ restriction de g à $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$

$$\begin{array}{llll} \phi : & \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[& \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\ /\ x \leq 0\} \\ & (r,\theta) & \longmapsto \phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

On a

1. $U = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. $\phi(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\ /\ x \leq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$.
4. ϕ est injective sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$.
5. Pour tout $(r,\theta) \in U$, $\det\left(J_{(r,\theta)}\ \phi\right) = r \neq 0$.

D'où ϕ définit un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme de U sur $\phi(U)$.

Proposition 30 *Soit ϕ le $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme défini sur $U = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$ par*

$$\begin{array}{llll} \phi : & \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[& \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\ /\ x \leq 0\} \\ & (r,\theta) & \longmapsto \phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

1. La matrice jacobienne de ϕ^{-1}est donnée par :
$$J_{(x,y)}\ \phi^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$
2. ϕ^{-1} s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{array}{llll} \phi^{-1} : & \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\ /\ x \leq 0\} & \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[\\ & (x,y) & \longmapsto \phi^{-1}(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2},\ 2\arctan \dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}) \end{array}$$

Remarque 31 *1. La fonction réciproque de ϕ, n'est autre que le passage aux coordonnées polaires qui constitue un changement de variable souvent utilisé : il consiste à remplacer les coordonnées cartésiennes (x, y) par les coordonnées polaires (r, θ) avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.*

2. Nous avons, comme annoncé précédemment, calculé la matrice jacobienne de ϕ^{-1} avant de déterminer l'expression de cette fonction.

Preuve :

On sait que la matrice jacobienne de ϕ^{-1} n'est autre que l'inverse de la matrice $J_{(r,\theta)}\phi$:

$$J_{(r\cos\theta,\ r\sin\theta)}\,\phi^{-1} = \left(J_{(r,\theta)}\phi\right)^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^t = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Puisque $\phi^{-1}(x, y) = (r, \theta)$, on obtient :

$$J_{(x,y)}\phi^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc calculé la matrice jacobienne de ϕ^{-1} sans déterminer explicitement cette fonction.

Par ailleurs, comme ϕ est un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)\ /\ x \leq 0\}$ $\exists!\,(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & r\cos\theta \\ y = & r\sin\theta \end{array}\right. \quad \text{d'où} \left\{\begin{array}{rl} r = & \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = & \frac{y}{x} \end{array}\right.$$

Or la fonction $\tan\theta$ est bijective sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, exprimons $\tan\dfrac{\theta}{2}$ en fonction de x et y

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})} = \frac{\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2})} = \frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)} = \frac{r\sin(\theta)}{r + r\cos(\theta)} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$$

On en déduit que :

$\theta = 2 \arctan \dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$

conclusion : $\phi^{-1}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}\,, 2 \arctan \dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}})$

Remarque 32 *L'expression précédente de ϕ^{-1} permet de retrouver la matrice jacobienne de ϕ^{-1} .*

Puisque $\phi^{-1}(x, y) = (r, \theta)$, on notera (abus de notation) ∂r au lieu de $\partial(\phi^{-1})_1$ et $\partial\theta$ au lieu de $\partial(\phi^{-1})_2$ et on obtient donc

$$J_{(x,y)}\phi^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \\ -\dfrac{y}{x^2 + y^2} & \dfrac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

0.3.3 Effet d'un changement de variables en coordonnées polaires

On considère une fonction f :$(x, y) \longmapsto f(x, y)$ définie, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x, 0) \ / \ x \leq 0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Faire le changement de variables

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

revient à composer f par ϕ le $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme défini sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$par :

$$\begin{array}{lll} \phi : & \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[& \longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, 0) \ / \ x \leq 0\} \\ & (r, \theta) & \longmapsto \phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{array}$$

On obtient ainsi une nouvelle fonction $F = f \circ \phi$ de classe $\mathcal{C}^1$sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ à valeurs dans IR.

Proposition 33 *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \, \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \, \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta \, \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \, \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\theta \, \dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) - \dfrac{\sin\theta}{r} \, \dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin\theta \, \dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{\cos\theta}{r} \, \dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) \end{cases}.$$

preuve :

Comme $F = f \circ \phi$, il vient que $J_{(r,\theta)}F = \big(J_{\phi(r,\theta)}f\big) \times \big(J_{(r,\theta)}\phi\big)$ et

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \, \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \, \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta \, \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \, \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$$

Dans ces formules pour alléger l'écriture on note $\dfrac{\partial F}{\partial r}$et $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$ au lieu de respectivement $\dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)$ et on note aussi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ au lieu de respectivement $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

D'autre part, si on note par abus les deux fonctions "x" et "y" suivantes :

"x" : $(r,\theta) \longmapsto x(r,\theta) = r\cos\theta$
"y" : $(r,\theta) \longmapsto y(r,\theta) = r\sin\theta$
Les formules précédentes s'écrivent

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \ \dfrac{\partial x}{\partial r} \ + \dfrac{\partial f}{\partial y} \ \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases}$$

On pourra aussi écrire que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = -y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y). \end{cases}$$

Pour exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de F, on peut procéder de deux manières différentes.

– On peut directement partir du système précédent

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r} = \cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta} = -r\sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

Comme $r \neq 0$, en multipliant les deux équations de ce système par respectivement $\cos\theta$ et $\dfrac{\sin\theta}{r}$et en effectuant la différence on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta \ \dfrac{\partial F}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r} \ \dfrac{\partial F}{\partial \theta}$

On obtient de même $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta \ \dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r} \ \dfrac{\partial F}{\partial \theta}$

– On peut aussi partir de la relation $F = f\circ\phi \Longleftrightarrow f = F\circ\phi^{-1}$, donc $J_{(x,y)}f = \left(J_{\phi^{-1}(x,y)}F\right) \times \left(J_{(x,y)}\phi^{-1}\right)$ et

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial r} & \dfrac{\partial F}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\theta\ \dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) - \dfrac{\sin\theta}{r}\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin\theta\ \dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{\cos\theta}{r}\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) \end{array}\right. .$$

Si on note par abus les deux fonctions "r" et "θ" suivantes :
"r" : $(x,y) \longmapsto r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
"θ" : $(x,y) \longmapsto \theta(x,y) = 2\arctan \dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$
Les formules précédentes s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial r}\ \dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial \theta}\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial r}\ \dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial \theta}\ \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{array}\right.$$

0.3.4 Effet d'un changement de variables : cas général

Pour une meilleure vision, on va se placer dans le cas où la fonction est à valeurs réelles.

On considère un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\begin{array}{llll} \varphi : & \mathbb{R}^p & \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ & u = (u_1, ..., u_p) & \longmapsto \varphi(u) = (\varphi_1(u), ..., \varphi_p(u)) \end{array}$
et $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^p$.

L'application $F = f \circ \varphi$ est aussi de classe $\mathcal{C}^k$sur $\mathbb{R}^p$.

A partir de l'égalité

$$J_u(F) = J_u(f \circ \varphi) = J_{\varphi(u)}(f) \times J_u(\varphi)$$

on peut déduire les dérivées partielles de F en fonction de celles de f :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}(u) ...... \quad \frac{\partial F}{\partial u_p}(u) \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(u)) .... \quad \frac{\partial f}{\partial x_p}(\varphi(u)) \right) \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(u) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_p}(u) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial x_p}(a) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial u_p}(u) \end{pmatrix}$$

Par suite pour tout $i \in \{1, .., p\}$

$$\frac{\partial F}{\partial u_i}(u) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi(u)) \times \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}(u)$$

Par analogie au cas du changement de variable en cordonnées polaires, on peut exprimer les dérivées partielles de f en fonctions de celles de F en tenant compte de l'équivalence

$$F = f \circ \varphi \Longleftrightarrow f = F \circ \varphi^{-1}.$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de déterminer l'expression de φ^{-1}, il suffit juste de caculer la matrice inverse de la matrice jacobienne de φ.

Le difféomorphisme φ précédemment considéré peut être défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. Dans ce cas, la fonction f sera de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\varphi(U)$ et F sera de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

0.3.5 Application : résolution d'équations aux dérivées partielles.

Les équations aux dérivées partielles (EDP) interviennent dans de nombreux problèmes et domaines et constituent des sujets de recherche constamment actifs. Cependant, la résolution de ces équations n'est pas toujours facile. L'utilisation des changements de variables est une méthode classique utilisée pour la résolution de certaines équations. En effet, dans certains cas, un changement de variables adéquat permet de transformer une EDP en une autre beaucoup plus simple à résoudre en diminuant par exemple le nombre d'inconnues.

Exemple :

On se propose de déterminer les fonctions f, de classe $\mathcal{C}^1$ sur IR^2, vérifiant l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0. \tag{E}$$

On va utiliser le difféomorphisme suivant

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u, v) & \longmapsto & \varphi(u, v) = \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2} \right) \end{array}$$

En posant $F = f \circ \varphi$, voir en effectuant le changement de variable $x = \dfrac{u+v}{2}$ et $y = \dfrac{u-v}{2}$, il vient que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \dfrac{1}{2}\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{1}{2}\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \dfrac{1}{2}\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ - \dfrac{1}{2}\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

L'équation (E) s'écrit alors

$$2\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = 0 \text{ pour tout } (u,v) \in IR^2$$

Par suite $F(u,v) = \Psi(v)$ où $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ arbitrairement choisie

On en déduit que $f(x,y) = F \circ \varphi^{-1}(x,y) = F(x+y, x-y) = \Psi(x-y)$ où $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ quelconque.

Exercice 6 (série 3)

1. Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq 0\}$.

   On se propose de trouver les fonctions f, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, vérifiant l'équation

   $$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad (E)$$

   Pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi, \pi\right[$, on pose

   $$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \text{ et } F = f \circ \phi \Longrightarrow F(r,\theta) = f(x,y)\,.$$

On a déjà montré que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

et on remarque que

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = -y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

donc f est solution de (E) si et seulement si F est solution de l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = 0.$$

On en déduit que

$F(r,\theta) = \Psi(r)$ où $\Psi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ arbitrairement choisie

Par suite $f(x,y) = F\circ\phi^{-1}(x,y) = F(\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}})$

d'où

$$f(x,y) = \Psi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \quad \text{avec } \Psi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^1.$$

2. On se propose de trouver les fonctions f, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, vérifiant l'équation

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (E)$$

En utilisant, comme précédemment un changement de variable en coordonnées polaires, il vient que

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

$$\text{d'où} \qquad r\,\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

L'équation (E) s'écrit alors

$r\,\dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = r$ pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi,\pi\right[$

d'où $\dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = 1$ pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi,\pi\right[$

On en déduit que $F(r,\theta) = r + \Psi(\theta)$ où $\Psi : \left]-\pi,\pi\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ quelconque.

En exploitant la relation $f = F \circ \phi^{-1}$,on conclut que :

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \Psi\left(2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

où $\Psi : \left]-\pi,\pi\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$quelconque

0.4 Annexe : Interprétation géométrique de la différentielle :

1ercas :

Rappelons que si on considère une fonction f dérivable à une seule variable $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ et le graphe associé $G_f = \{(x,y) \in IR^2/\ y = f(x)\}$

alors, la tangente en un point $(x_0, f\ '(x_0))$du graphe a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$ et donc pour équation

$$y = f\prime(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Si $f\ '(x_0) = 0$ alors la tangente au point $(x_0, f\ '(x_0))$est horizontale et a pour équation $y = f(x_0)$

Par ailleurs, l'équation de cette tangente est repérable dans l'écriture du développement en série de Taylor de f à l'ordre 1 au voisinage de x_0 qui est donnée par :

$$f(x) = \mathbf{f\prime(x_0)(x - x_0) + f(x_0)} + (x-x_0)\ \varepsilon(x-x_0) \text{ où } \varepsilon(x-x_0) \to 0 \text{ quand } x \to x_0$$

Par conséquent $f(x) \approx f\prime(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ représente une approximation affine de f au voisinage de x_0.

2ème**cas :**

Si on considère une fonction f défine de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$
$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$ alors S la surface représentative du graphe de f est définie par

$$S = \left\{(x, y, z) \in IR^3 /\ z = f(x, y)\right\} \subset IR^3$$

Soit $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in S$.On vérifie que si f est différentiable en M_0, alors toutes les tangentes en P_0 aux courbes tracées sur S et passant par P_0 sont dans un même plan appelé plan tangent à S en P_0.On rappelle que l'équation d'un plan de IR^3 est de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ et qu'un plan est entièrement déterminée par la donnée de deux droites. Il suffit alors de prouver que le plan tangent contient deux tangentes.

On montre que l'équation de ce plan tangent en $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est la suivante :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \times (y - y_0)$$

On constate donc que l'équation du plan tangent à la surface S au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ s'exprime à l'aide de la différentielle comme suit :

$$z = f(x_0, y_0) + d_{(x_0,y_0)}\ f \quad (x - x_0, y - y_0)$$

Si $d_{(x_0,y_0)}\ f = \tilde{O}$ alors le plan tangent au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est horizontal et a pour équation $z = f(x_0, y_0)$.

Remarquons par ailleurs que comme par hypothèse f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ alors f est différentiable en $X_0 = (x_0, y_0)$ et par suite
$f(X_0+h) = f(X_0)+d_{X_0}f\ (h)+ \parallel h \parallel \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0_{IR^2}$

Si on pose $X = X_0 + h$, l'égalité précédente s'écrit :

$f(X) = f(X_0) + d_{X_0}f\ (X - X_0) + \parallel X - X_0 \parallel \varepsilon(X - X_0)$ où $\varepsilon(X - X_0) \to 0$ quand $X - X_0 \to 0_{IR^2}$

Sachant que $X = (x, y)$ et $X_0 = (x_0, y_0)$, il vient que :

$f(x, y) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \times (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) +$
$\parallel (x, y) - (x_0, y_0) \parallel \varepsilon((x, y) - (x_0, y_0))$ où $\varepsilon((x, y) - (x_0, y_0)) \to 0$ quand $(x, y) \to (x_0, y_0)$

Par conséquent

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \times (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)$$

représente une approximation affine de f au voisinage de (x_0, y_0)obtenue en se plaçant sur le plan tangent en $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ à la surface représentative S de f.

Exemple : Calcul approché de $(1.01)^{0.98}$
On considère la fonction $f(x, y) = x^y = e^{y \ln x}$ définie sur $IR_+^* \times IR$.
f est différentiable au point $(1, 1)$ et $f(1, 1) = 1$
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\ x^{y-1}$ d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1$
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x$ d'où $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 0$
D'après ce qui précède, on a

$$f(1.01\ ,\ 0.98) = f(1+0.01\ ,\ 1-0.02) \approx f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \times (0.01) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \times (-0.02)$$

Donc

$$(1.01)^{0.98} \approx 1.01$$

La valeur obtenue en utilisant la calculatrice est de 1.009799