Analiză Matematică - SETUL 1 - Şiruri de numere reale

1. Arătaţi că:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = 1$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt[4]{2!}+\sqrt[9]{3!}+\ldots+\sqrt[n^2]{n!}}{n} = 1$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln 3}+\ldots+\dfrac{1}{\ln n}\right)\dfrac{1}{n-1} = 0.$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 0, n\in\mathbb{N}^*.$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{5\cdot 9\cdot 13\cdot\ldots\cdot(4n+1)} = 0, n\in\mathbb{N}^*.$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{p+1}}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)\ldots(k+p)\right) = \dfrac{1}{p+1}, \forall p\in\mathbb{N}^*.$

2. Să se arate că şirul $x_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$ (şirul lui Lalescu) converge la $\frac{1}{e}$.

3. Să se studieze convergenţa şirurilor:

(a) $x_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n} - \ln \mathrm{n}, n\in\mathbb{N}, n>1;$

(b) $y_n = 1+\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{3^k}+...+\dfrac{1}{n^k}, n\in\mathbb{N}, k\geq 2;$

Indicaţie: (a) Se arată că şirul $x_n\in(0,1)$ şi este monoton descrescător; (b) Se arată că şirul $y_n\in[1,2)$ şi este monoton crescător.

4. **(a)** Să se arate că şirul $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k} - \ln\dfrac{k+1}{k}\right)$ are aceeasi limită cu şirul (x_n), definit la punctul (a) al problemei precedente;

(b) Folosind convergenţa şirului de la problema 3.a) să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}\right) = \ln 2.$

(c) Să se demonstreze identitatea lui Catalan-Botez:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Folosind acest rezultat să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}\right) = \ln 2.$

5. Arătaţi că şirurile $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\sin ka$ şi $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\cos ka$, $a\in\mathbb{R}$, sunt mărginite.

6. **a)** Să se arate că şirul $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx, n \in \mathbb{N}$ verifică relaţia de recurenţă

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$$

b) Să se demonstreze, folosind "Criteriul cleştelui", formula lui Wallis:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

7. Folosind Criteriul general de convergenţă a lui Cauchy, studiaţi convergenţa şirurilor:

(a) $a_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N};$

(b) $b_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N};$

(c) $c_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N};$

(d) $d_n = \dfrac{\cos a}{1^k} + \dfrac{\cos 2a}{2^k} + \dfrac{\cos 3a}{3^k} + \ldots + \dfrac{\cos na}{n^k}, n \in \mathbb{N}, \forall k \geq 2, a \in \mathbb{R};$

(e) $e_n = \dfrac{\sin x_1}{1 \cdot 2} + \dfrac{\sin x_2}{2 \cdot 3} + \dfrac{\sin x_3}{3 \cdot 4} \ldots + \dfrac{\sin x_n}{n \cdot (n+1)}, n \in \mathbb{N}, (x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ şir de numere reale.

Indicaţie: Se arată că şirurile de la punctele (a), (d) şi (e) sunt şiruri fundamentale, iar cele de la punctele (b) şi (c) nu sunt şiruri Cauchy.