

INSTITUTO DE  
FÍSICA



PONTIFICIA  
UNIVERSIDAD  
CATÓLICA DE  
VALPARAÍSO

## **Estimation of $C_n^2$ for the scintillation of extended objects**

*Preparación de Seminario, parte de la actividad de  
Titulación para optar a Licenciado en Física*

***Profesor Guía: Dario Gabriel Pérez***

**Fabián Cornejo Cuevas**

Curauma, diciembre 2023

## RESUMEN

Mediante un arreglo rectangular de puntos, se generaron imágenes centelleantes en un entorno de laboratorio con parámetros controlados. Este experimento se llevó a cabo variando los parámetros de temperatura y velocidad del viento. El propósito de la investigación consiste en analizar cómo dichos parámetros afectan la fuerza de turbulencia  $C_n^2$ , así como también en las escalas externas  $L_0$  e internas  $l_0$  de la teoría de Kolmogorov.

Para esto, presento las bases físicas y estadísticas para entender el proceso y resultados del experimento, luego la teoría necesaria para comprender las fluctuaciones a través de nuestra propagación en la turbulencia, más en específico en nuestra fase, llamada fase perturbada o representación espectral, la cual será necesaria para el resultado y análisis de la constante de estructura  $C_n^2$  de la turbulencia óptica. Finalmente se calcula la constante de estructura a través de los más de 100 datos tomados en laboratorio para hacer una estimación de esta, junto a las escalas internas y externas.

Por lo tanto, este trabajo se estructura en tres partes, cada una enfocada en una fase específica. La primera establece las bases físicas y estadísticas, la segunda se sumerge en la teoría de la turbulencia óptica, y la tercera sintetiza y aplica la teoría en el contexto experimental, dando fin con la interpretación y análisis de las diversas constantes de estructura, con sus respectivas escalas internas y externas bajo el marco de la propagación de ondas en medios turbulentos, a través de método de optimización de librerías en Matlab. Así poder concluir que la constante de estructura junto a sus escalas, aumentan a medida que aumenta la temperatura, bajo una linealidad. También se logra observar que la optimización de las librerías aunque aproximan bastante bien las variables, no son ideales.

**Palabras clave:** Constante de estructura, Turbulencia óptica, Medio turbulento, Fase perturbada, Escala externa, Escala interna

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>Introducción Turbulencia Óptica</b>	<b>1</b>
1.1	Herramientas base de Física y Matemáticas para el Análisis estadístico de Turbulencia óptica . . . . .	2
1.1.1	Modelos de Ondas Ópticas . . . . .	2
1.1.2	Procesos Aleatorios . . . . .	3
1.1.3	Función Estructura . . . . .	4
1.1.4	Campos Aleatorios . . . . .	5
1.2	Efectos Atmosféricos . . . . .	7
1.2.1	Estructura de la atmósfera . . . . .	7
1.3	Turbulencia Óptica . . . . .	8
1.3.1	Teoría de Kolmogorov . . . . .	10
1.3.2	Fluctuación del índice de refracción y su modelo de potencias espectrales . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Teoría Clásica para la propagación a través de un medio estocástico</b>	<b>15</b>
2.1	Ecuación de Helmholtz reducida y su solución para una onda de Haz Gaussiano . . . . .	16
2.2	Perturbación de Rytov . . . . .	21
2.3	Representación espectral a primer orden . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Imágenes de una matriz de puntos a través de una turbulencia caso controlado de laboratorio</b>	<b>31</b>
3.1	Objetivo e hipótesis . . . . .	31
3.2	Análisis de la función espectral bajo las condiciones del experimento y su varianza . . . . .	33
3.3	Resolución de $C_n^2$ . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Resultados y Análisis</b>	<b>49</b>
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>55</b>



# ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Diagrama representativo de la atmósfera con sus diversas capas y temperatura . . . . .	8
1.2	Teoría turbulenta de la Cascada de Kolmogorov . . . . .	11
2.1	Geometría aprox. paraxial para propagación de onda . . . . .	16
3.1	Representación del experimento, donde una haz se propaga a través del torbulador . . . . .	32
3.2	Representación trayectoria y vectores . . . . .	33
3.3	Vista previa animación de las imágenes puntos . . . . .	38
3.4	Referencias eje $x$ e $y$ , para matriz de imagen de puntos . . . . .	41
3.5	Mapeo varianzas V3535dT20 . . . . .	42
3.6	Mapeo varianzas V0808dT30 . . . . .	42
3.7	Varianzas V3535dT20 3D . . . . .	42
3.8	Varianzas V0808dT30 3D . . . . .	42
4.1	$C_n^2$ V1212 coherente, Aleatorio Kp y Q . . . . .	50
4.2	$C_n^2$ V1212 coherente, promediado $kp$ y $q$ . . . . .	50
4.3	Escala interna V1212 coh . . . . .	51
4.4	Escala externa V1212 coh . . . . .	51
4.5	Estimación constante de estructura V1212 . . . . .	51
4.6	Escala interna, coh e incoh V1212 . . . . .	52
4.7	Escala externa, coh e incoh V1212 . . . . .	52
4.8	$C_n^2$ V0808 . . . . .	53
4.9	Escala interna V0808 . . . . .	54
4.10	Escala externa V0808 . . . . .	54

# 1. INTRODUCCIÓN TURBULENCIA ÓPTICA

El primer láser funcional fue introducido en 1960 y a partir de ese momento la comunidad científica se concentró en sus posibles aplicaciones. En particular, se sugirió que los láseres se utilizaran para extender las técnicas de comunicación y radar de radiofrecuencia, a la banda de frecuencia óptica. Otras áreas de interés para las aplicaciones de láser incluyen armamento, medición de distancias, sensores remotos, designación de objetivos, óptica adaptativa, usos médicos, entre otros. Sin embargo, todos los sistemas que utilizan ondas ópticas (visibles) o infrarrojas deben tener en cuenta los efectos generales de propagación asociados con el medio en el que se propagan, además de los efectos asociados con la propia onda. El medio de propagación en muchos casos es la atmósfera turbulenta, en la que las pequeñas fluctuaciones en el índice de refracción a lo largo de la trayectoria de propagación causan una variedad de efectos perjudiciales en la onda.

Las fluctuaciones aleatorias en el índice de refracción de la atmósfera están directamente relacionadas con las fluctuaciones microscópicas de temperatura causadas por la turbulencia del aire debida a los vientos y la convección. Aunque estas fluctuaciones en el índice de refracción son solo unas pocas partes en un millón, una onda óptica que se propaga atraviesa un gran número de inhomogeneidades en el índice de refracción, por lo que su efecto acumulativo en la onda óptica es muy profundo. Por ejemplo, las fluctuaciones en el índice de refracción causan el parpadeo de las estrellas y limitan la capacidad de los astrónomos para resolver objetos pequeños dentro de unos pocos segundos de arco. Este último efecto atmosférico motiva el uso de técnicas de óptica adaptativa y la ubicación de grandes telescopios en el espacio, como el famoso telescopio Hubble.

Las primeras investigaciones sobre la propagación de radiación electromagnética y otras ondas a través de medios aleatorios involucraron la propagación de la luz de las estrellas a través de la atmósfera, la propagación de ondas sonoras a través de la atmósfera y el océano, la propagación de microondas a través de atmósferas planetarias y la propagación de ondas de radio a través de la ionosfera y el espacio interplanetario. Por lo que nuestro trabajo investigativo es un subtema de gran parte de esta investigación temprana.

El concepto de láser en si fue introducido por un hombre que es repetitivo en nuestra historia de la física teórica del sigl XX, Albert Einstein dio la idea de emisión estimulada de radiación. no fue hasta 1958 que el físico estadounidense Arthur Schawlow y el físico

canadiense Charles Townes propusieron el diseño práctico del láser. Más tarde en su carrera, ambos ganarían el premio nobel por separado debido a sus trabajos en la aplicaciones del láser

Así el primer láser funcional fue construido por Theodore Maiman en 1960, utilizando un cristal de rubí. Su invención marcó el inicio de una revolución tecnológica con aplicaciones en campos tan diversos como la medicina, la comunicación y la investigación científica.

Para finalizar esta breve introducción es necesario en concreto a que se debe esta importancia del láser y su creación. El láser o "*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*", es un dispositivo que emite luz coherente mediante un proceso de amplificación óptica, su coherencia (sus diferentes ondas de luz mantienen una fase constante) permite la transmisión de información precisamente, es monocromático (una sola longitud de onda) y se puede colimar, por lo que podemos mantener su intensidad. Esto nos permite lo señalado anteriormente, útil para diversidad áreas científicas, desde la medicina hasta investigaciones científicas, como aplicaremos ahora en nuestra breve investigación.

## 1.1 Herramientas base de Física y Matemáticas para el Análisis estadístico de Turbulencia óptica

Antes de partir con la teoría, y posterior explicación y análisis experimental, debo desarrollar y aclarar conocimiento básico en óptica y en procesos y campos aleatorios, necesarios para el estudio. En este apartado, aunque no necesario para todo público, detallaré y explicaré conceptos de conocimiento general que son fundamentales para tener una visión amplia para el posterior análisis tanto teórico como experimental.

### 1.1.1 Modelos de Ondas Ópticas

Hay geometría conocida para describir diferentes modelos de onda. Asumiendo la propagación en el eje  $z$ , tenemos

- **Onda plana**

Amplitud  $A_0$  y fase constante  $\varphi_0$

$$U_0(x, y, 0) = A_0 e^{i\varphi_0} \quad (1.1)$$

El modelo de onda plana se utiliza para describir las propiedades de la luz de las estrellas y otras fuentes exoatmosféricas en un receptor terrestre.

- **Onda esférica**

Una onda ilimitada asociada con una fuente puntual, descrita en el plano del transmisor  $z = 0$

$$U_0(x, y, 0) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{e^{ikR}}{4\pi R}, \quad (1.2)$$

El modelo de onda esférica se utiliza a veces para una fuente de apertura pequeña o una fuente con un ángulo de divergencia grande.

- **Onda de haz**

Una onda de extensión finita con capacidades de enfoque. La onda de haz gaussiano tiene un perfil de amplitud y fase descrito en el plano de la apertura de salida del transmisor  $z = 0$

$$U_0(x, y, 0) = a_0 \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{W_0^2} - \frac{ik}{2F_0} (x^2 + y^2) \right] \quad (1.3)$$

donde  $a_0$  es la amplitud en el eje principal,  $W_0$  es el radio del punto de haz (definido por el punto  $1/e$  de la amplitud del campo), y  $F_0$  es su radio de curvatura del frente de fase. Este modelo se utiliza con mayor frecuencia en análisis de ondas de haz. Un gran rango de fenómenos fundamentales concierne la propagación de ondas ópticas en un medio aleatorio, tales como Difracción, Atenuación Atmosférica, Turbulencia Atmosférica, Turbulencia Térmica.

### 1.1.2 Procesos Aleatorios

También llamado proceso estocástico, es una colección de funciones temporales y una probabilidad asociada. La colección completa de estas funciones es llamada ensamble. Somos conscientes de que trabajaremos solamente con procesos aleatorios continuos. Entonces, una función del ensamble, la cual es dependiente del tiempo, la podemos describir como  $x_1 = x(t_1)$ , la cual es interpretado como una variable aleatoria. Hay muchos enfoques que se limitan al proceso aleatorio de tiempo  $t$ , por eso es necesario extender la idea a campos aleatorios, que en general son funciones dependientes de  $t$  y el espacio  $\mathbf{R} = (x, y, z)$ . La velocidad del viento atmosférico, la temperatura y las fluctuaciones del índice de refracción son ejemplos de un campo aleatorio, importante para la propagación



de ondas ópticas.

Para describir la probabilidad de un proceso aleatorio, primero, imaginemos un proceso aleatorio  $x(t)$  a infinitas veces tiempo  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , entonces obtenemos  $x_k = x(t_k)$ , tal que  $k = 1, 2, 3 \dots n$ . La probabilidad asociada a este proceso aleatorio se describe por la función de densidad probabilística conjunta (PDF, joint probability density function) en orden  $n$ , en otras palabras, describe la probabilidad conjunta de dos o más variables, en este caso  $x$  y  $t$

$$p_x(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$$

Como es de saber, podemos describirla en todos sus órdenes para un proceso aleatorio continuo, sin embargo, en general es un ejercicio imposible, por lo que se suele usar las distribuciones a primer y segundo orden.

La cantidad definida por la función de probabilidad

$$F_x(x, t) = Pr[x(t) \leq x]$$

Esto es llamado la función de distribución a primer orden de un proceso aleatorio  $x(t)$ . Mientras que su correspondiente primer orden PDF es

$$p_x(x, t) = \frac{d}{dx} F_x(x, t)$$

Conviene señalar que, el promedio de un proceso aleatorio  $x(t)$ , o la media, como

$$\langle x(t) \rangle = m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x, t) dx$$

Estamos generalizando que el valor medio depende del tiempo  $t$ . Similarmente, la varianza la podemos definir como

$$\sigma_x^2(t) = \langle x^2(t) \rangle - m^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m(t)]^2 p_x(x, t) dx$$

### 1.1.3 Función Estructura

Los procesos aleatorios en la práctica suelen aproximarse mediante funciones aleatorias estacionarias, pero existen casos en los que esto no es aplicable. Por ejemplo, los parámetros atmosféricos, como las fluctuaciones de la velocidad del viento y las fluctua-

ciones de temperatura, no son estrictamente estacionarios, ya que sus valores medios son constantes solo durante períodos de tiempo cortos. Esta dificultad a menudo se puede resolver, más fácilmente, si el proceso aleatorio tiene incrementos estacionarios, es decir, en lugar de trabajar directamente con el proceso aleatorio  $x(t)$  en sí, nos enfocamos en la función  $x(t + \tau) - x(t)$ , la cual se comporta de manera muy similar a un proceso estacionario, incluso si  $x(t)$  no lo es.

Estas funciones tienen lo que consideramos una media que varía lentamente y se pueden describir de manera más conveniente en términos de funciones de estructura en lugar de funciones de covarianza. Entonces, para el estudio de la turbulencia vamos a describir un proceso aleatorio como la suma del promedio y su parte fluctuante,  $m(t)$  y  $x_1(t)$  respectivamente

$$x(t) = m(t) + x_1(t)$$

Donde además  $x_1(t)$  satisface,  $\langle x_1(t) \rangle = 0$ . La función de estructura asociada a este proceso aleatorio, será

$$\begin{aligned} D_x(t_1, t_2) &= \langle [x(t_1) - x(t_2)]^2 \rangle \\ &= \langle [m(t_1) - m(t_2)]^2 \rangle + 2\langle [m(t_1) - m(t_2)][x_1(t_1) - x_1(t_2)] \rangle - \langle [x_1(t_1) - x_1(t_2)]^2 \rangle \\ &= [m(t_1) - m(t_2)]^2 + \langle [x_1(t_1) - x_1(t_2)]^2 \rangle. \end{aligned}$$

Donde  $\langle a + b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$ , por lo que nuestro término de covarianza entre el promedio y la fluctuación se hará 0, debido a la fluctuación media. Finalmente, aquí podemos observar la utilidad de la función de estructura, ya que si el valor medio varía lentamente, la diferencia será cercana a 0, por lo que la función de estructura se verá reducida a la variación solamente de las fluctuaciones.

### 1.1.4 Campos Aleatorios

Volviendo a la idea de extender los procesos aleatorios a campos aleatorios, donde una función aleatoria de un vector espacial  $R = (x, y, z)$  a tiempo  $t$ . Donde recordamos que, para obtener una descripción total de este campo, es necesario encontrar PDF en todas sus órdenes, ejercicio imposible generalmente, por lo que solo se trata con sus primeras órdenes.

La función de covarianza espacial es la variación espacial en el campo complejo aleato-

rio. Necesitamos el promedio del campo aleatorio  $u(R)$ , debido a que  $\langle u(R) \rangle = m(R)$ , la función de covariancia

$$B_u(R_1, R_2) = \langle [u(R_1) - m(R_1)][u^*(R_2) - m^*(R_2)] \rangle$$

Para hacer nuestras medidas es de saber que teóricamente se necesita la potencia espectral espacial en tres dimensiones asociada a nuestro campo aleatorio, la cual es una medida para comprender cómo se distribuye la energía espacialmente, o de su posición. Así que, asumimos  $u(R)$  es un campo aleatorio complejo estadísticamente homogéneo, su representación

$$u(\mathbf{R}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} dv(\mathbf{K}),$$

donde  $K = (k_x, k_y, k_z)$  el vector de onda, y  $dv(k)$  amplitud del campo  $u(R)$ . Usando esta representación nuestra función de covarianza

$$B_u(R) = \langle u(R_1)u^*(R_2) \rangle$$

Satisfaciendo la condición de estadísticamente homogénea

$$\langle dv(K)dv^*(K') \rangle = \delta(K - K')\Phi_u(K)d^3kd^3k' \quad (1.4)$$

rápidamente reducimos nuestra función a

$$B_u(\mathbf{R}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}\Phi_u(\mathbf{K})d^3\mathbf{K} \quad (1.5)$$

$\Phi_u(\mathbf{K})$  la **potencia espectral espacial** en tres dimensiones del campo aleatorio  $u(R)$

Con esto llegamos al final del apartado y es importante señalar que a través de esta sección podemos notar la relación entre la función de estructura Ec. (1.4) y la potencia espectral. Primero debemos comprender que el tratamiento teórico de las fluctuaciones espaciales de un campo aleatorio en términos de la función de covariancia y la densidad de potencia espectral depende de la estadística homogénea. Así que, para un campo aleatorio  $u(R)$  no se caracteriza por su covariancia, sino por su función de estructura. Cabe señalar que, si la función de estructura depende de los valores medios del campo aleatorio, al igual que nuestra función de covariancia, podemos obtener relaciones entre nuestra función de estructura y la potencia espectral espacial, que definiremos más adelante.

## **1.2 Efectos Atmosféricos**

Es una experiencia común notar la posición cambiante de objetos distantes o de la línea del horizonte de una ciudad de un día a otro a medida que varían las condiciones atmosféricas. Estas condiciones cambiantes son causadas por factores como la lluvia, la nieve, la aguanieve, la niebla, la bruma, la contaminación, etc. Que pueden limitar en gran medida nuestra capacidad para ver objetos distantes. Estos mismos factores también afectan la transmisión de radiación electromagnética a través de la atmósfera, en particular las ondas ópticas.

Los tres fenómenos atmosféricos principales que afectan la propagación de ondas ópticas son la absorción, la dispersión y las fluctuaciones en el índice de refracción, es decir, la turbulencia óptica. La absorción y la dispersión por los gases constituyentes, y las partículas de la atmósfera dependen de la longitud de onda y dan lugar principalmente a la atenuación de una onda óptica.

Fluctuaciones en el índice de refracción llevan a fluctuaciones de irradiancia, difusión del haz, y la pérdida de coherencia espacial de la onda óptica, entre otros efectos. Desafortunadamente, estos efectos perjudiciales tienen consecuencias de gran alcance en la imagen astronómica, las comunicaciones ópticas de espacio libre, la detección remota, el radar láser y otras aplicaciones que requieren la transmisión de ondas ópticas a través de la atmósfera.

### **1.2.1 Estructura de la atmósfera**

La atmósfera es un volumen gaseoso que rodea la Tierra y se extiende a varios cientos de kilómetros por encima de la superficie, compuesta un 98% por nitrógeno y oxígeno. Principalmente, basándose en las variaciones de temperatura, la atmósfera de la Tierra se divide en cuatro capas principales.

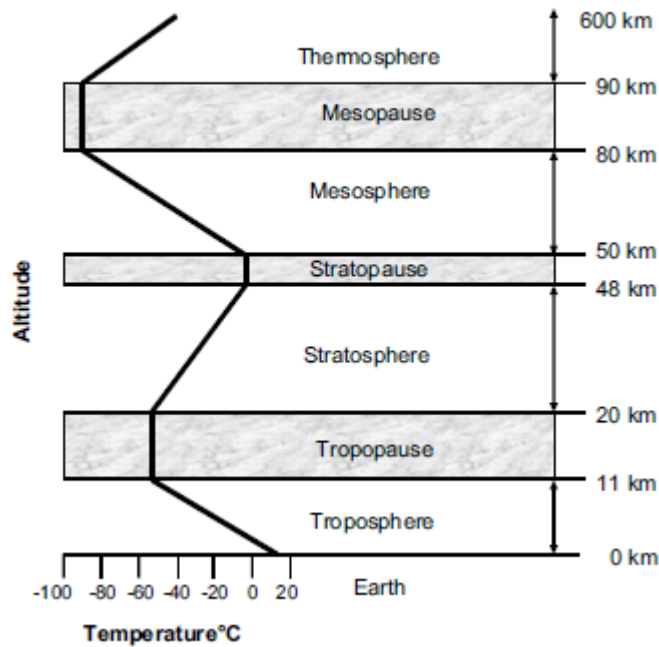


Figura 1.1: Diagrama representativo de la atmósfera con sus diversas capas y temperatura

Podemos notar en la figura 1.1, las 4 capas principales; **Troposfera**, es la capa en la que ocurren la mayoría de los fenómenos meteorológicos y donde la temperatura generalmente disminuye con la altitud. La troposfera es esencial para la vida en la Tierra y contiene la mayor parte del oxígeno y del vapor de agua de la atmósfera. **Estratosfera**, es relevante para la investigación científica y la observación astronómica debido a su menor turbulencia atmosférica en comparación con la troposfera. **Mesosfera**, la mesosfera es conocida por ser la capa en la que ocurren fenómenos atmosféricos como las auroras y las nubes noctilucientes. **Termosfera**, a pesar de las altas temperaturas en la termosfera, la densidad del aire es extremadamente baja, por lo que no se sentiría caliente si estuvieras allí debido a la falta de moléculas para transferir calor. Esta capa es importante para la absorción de radiación solar ultravioleta y es donde se encuentran la mayoría de los satélites en órbita terrestre baja.

### 1.3 Turbulencia Óptica

Las distorsiones del frente de onda inducidas por la turbulencia atmosférica resultan en la expansión del haz, variaciones aleatorias de la posición del centroide (punto donde se considera concentrada el área total de una figura, donde se supone está ubicado el centro

geométrico del cuerpo plano y homogéneo) del haz llamado "desplazamiento del haz" y una redistribución aleatoria de la energía del haz dentro de una sección transversal del haz que conduce a fluctuaciones de irradiancia. Probablemente el efecto más conocido de la turbulencia atmosférica es el parpadeo de las estrellas, que es un cambio irregular en el brillo de la imagen. Además, la turbulencia atmosférica destruye gradualmente la coherencia espacial del haz a medida que se propaga a través de la atmósfera. Esta pérdida de coherencia espacial limita la medida en que los haces pueden ser colimados o enfocados, lo que resulta en reducciones significativas en los niveles de potencia en sistemas de comunicación óptica y radar.

El viento que sopla sobre una región de manera aerodinámica rugosa de la superficie terrestre en presencia de un gradiente de temperatura crea fluctuaciones en el índice de refracción de la atmósfera esto se conoce como turbulencia óptica. El comportamiento de una subsección de la turbulencia óptica puede describirse de manera estadística, y esto forma la base de la mayoría de las teorías de propagación. En consecuencia, la propagación de una onda óptica a través de la turbulencia óptica también puede describirse mediante cantidades estadísticas. Inherentemente en los métodos de análisis, los estudios teóricos sobre la propagación de ondas ópticas a través de la turbulencia óptica generalmente se clasifican en una de dos categorías generales: fluctuaciones débiles o fluctuaciones fuertes. La teoría de las fluctuaciones débiles suele basarse en la aproximación de perturbación de Rytov, que produce modelos matemáticos para varias cantidades estadísticas básicas que involucran el campo de ondas.

La turbulencia óptica es importante en diversas áreas de la ciencia y la tecnología debido a sus efectos significativos en la propagación de la luz a través de la atmósfera y otros medios turbulentos. Es esencial en varias disciplinas, ya que permite abordar los desafíos que presenta la propagación de la luz a través de medios turbulentos y desarrollar soluciones para mejorar la calidad de las imágenes, la comunicación y las mediciones en condiciones adversas. Algunas aplicaciones a este estudio ayudan áreas como la astronomía, sistemas comunicacionales, armamento (teledetección), reconocimiento de objetos etc.

El movimiento turbulento de la atmósfera en presencia de gradientes de temperatura da lugar a perturbaciones en el índice de refracción de la atmósfera en forma de células llamadas turbulencias ópticas. Estudios tempranos realizados por Kolmogorov sugieren que una subclase de todas las turbulencias ópticas tiene un grado de consistencia estadística que permite un tratamiento teórico significativo. Definimos la **turbulencia óptica** como las fluctuaciones en el índice de refracción resultantes de pequeñas fluctuaciones de tem-

peratura. La redistribución aleatoria espacio-temporal del índice de refracción provoca una variedad de efectos en una onda óptica relacionados con sus fluctuaciones temporales de irradiancia (escintilación) y las fluctuaciones de fase.

Un enfoque estadístico ha sido clave a lo largo de los años para describir tanto la turbulencia atmosférica como sus diversos efectos en sistemas ópticos. Con el fin de simplificar matemáticamente, a menudo es necesario en tales enfoques estadísticos asumir que las separaciones de puntos dentro de ciertas escalas exhiben las características importantes de homogeneidad e isotropía estadísticas. En general, la homogeneidad estadística del campo aleatorio implica que el valor medio del campo es constante y que las correlaciones entre las fluctuaciones aleatorias en el campo de punto a punto son independientes de los puntos de observación elegidos, dependiendo solo de su separación vectorial. Además, si las fluctuaciones aleatorias también son estadísticamente isotrópicas, entonces las correlaciones de punto a punto dependen solo de la magnitud de la separación vectorial entre los puntos de observación.

### 1.3.1 Teoría de Kolmogorov

Considerando la atmósfera como un fluido viscoso, la experiencia ha dictado que tiene dos estados de movimiento distintos: laminar y turbulento. La distinción entre estos estados radica en el hecho de que en el flujo laminar no se produce mezcla, para el cual las características del flujo de velocidad son uniformes o cambian de manera regular. En el flujo turbulento, el campo de velocidad pierde sus características uniformes debido a la mezcla dinámica y adquiere subflujos aleatorios llamados vórtices turbulentos. La turbulencia es fundamentalmente un proceso no lineal, como se describe en las ecuaciones de Navier-Stokes. Debido a las dificultades matemáticas para resolver estas ecuaciones, Kolmogorov desarrolló una teoría estadística de la turbulencia que se basa en gran medida en el análisis dimensional, simplificaciones y aproximaciones.

Ahora bien, Reynolds utilizó la teoría de similitud para definir una cantidad adimensional  $Re = Vl/\nu$ , llamada número de Reynolds. Aquí,  $V$  y  $l$  son la velocidad característica (velocidad) y la dimensión del flujo (en unidades de m/s y m), respectivamente. Y  $\nu$  es la viscosidad cinemática (en unidades de  $m^2/s$ ).

La transición del flujo laminar al movimiento turbulento tiene lugar en un número crítico de Reynolds, por encima del cual se considera que el movimiento es turbulento. Cerca del suelo, el tamaño característico es  $l \sim 2m$ , la velocidad del viento característica es de  $1 \sim 5 m/s$  y  $\nu \sim 0.15 \times 10^{-6} m^2/s$ , lo que lleva a números de Reynolds grandes del

orden de  $Re \sim 10^5$ . En tales casos, el movimiento se considera altamente turbulento.

Para entender la estructura de la turbulencia atmosférica, podemos adoptar una herramienta de visualización llamada teoría de la cascada de energía de la turbulencia. La fuente de energía en escalas grandes es la cizalladura del viento o la convección.

Bajo la teoría de la cascada, la velocidad del viento aumenta hasta que alcanza un punto en el que se supera el número de Reynolds crítico. Esta acción crea masas de aire locales inestables (conceptualizadas como "vórtices") con dimensiones características ligeramente más pequeñas que el flujo principal. Bajo la influencia de las fuerzas inerciales, los vórtices más grandes se descomponen en vórtices más pequeños para formar una gama continua de tamaños de vórtices para la transferencia de energía desde una macroescala  $L_0$ , llamada la escala exterior de la turbulencia, hasta una microescala  $l_0$ , llamada la escala interior de la turbulencia. La familia de vórtices está limitada por la escala exterior  $L_0$  y por la escala interior  $l_0$ , formando la subescala inercial. Los tamaños de escala más pequeños que la escala interior  $l_0$  pertenecen a la gama de disipación viscosa. En este último régimen, los vórtices turbulentos desaparecen y la energía restante en el movimiento del fluido se disipa como calor, ver figura 1.2.

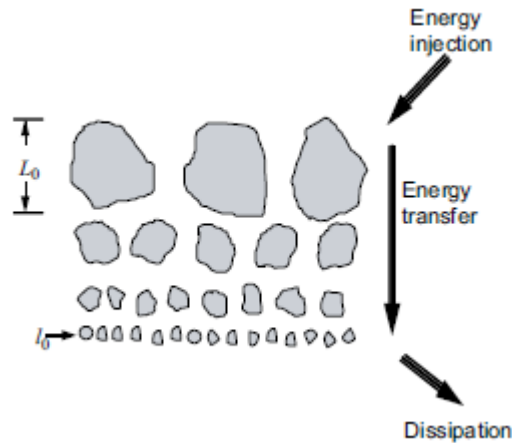


Figura 1.2: Teoría turbulenta de la Cascada de Kolmogorov

La escala exterior  $L_0$  denota el tamaño de escala por debajo del cual las propiedades de la turbulencia son independientes del flujo principal. En la capa superficial, hasta aproximadamente 100 m, se asume generalmente que la escala exterior  $L_0$  crece linealmente con la altura sobre el suelo del punto de observación. Se supone que los vórtices de tamaños de escala más pequeños que  $L_0$  son estadísticamente homogéneos e isotrópicos, mientras que aquellos iguales o más grandes que  $L_0$  generalmente no son isotrópicos y su estructura



no está bien definida.

Por encima de los 100 m, la dimensión horizontal de  $L_0$  suele ser mucho mayor que su dimensión vertical debido a la estratificación. A medida que los vórtices turbulentos se hacen más pequeños, la cantidad relativa de energía disipada por fuerzas viscosas aumenta hasta que la energía disipada coincide con la suministrada por la energía cinética del flujo principal. Cuando esto ocurre, el número de Reynolds se reduce al orden de la unidad y el tamaño del vórtice asociado define entonces la escala interna de la turbulencia  $l_0$ . La escala interna suele estar en el orden de 1 a 10 mm cerca del suelo, pero es del orden de centímetros o más en la troposfera y la estratosfera.

Aunque para esta investigación nos importa cómo fluctúa el índice de refracción, mostraré brevemente la fluctuación del viento. Mediante el uso del análisis dimensional, Kolmogorov demostró que la función de estructura longitudinal de la velocidad del viento (paralela al vector  $R$  que conecta dos puntos de observación) en la gama inercial satisface la ley universal de la potencia  $2/3$ .

$$D_{RR}(R) = \langle (V_1 - V_2)^2 \rangle = C_V^2 R^{2/3}$$

Cabe señalar que  $l_0 \ll R \ll L_0$ , mientras que  $V_1$  y  $V_2$  son los componentes de las velocidades de dos puntos separados a distancia  $R$ , y  $C_V^2$  se define como la constante de estructura, la cual es una medida de la energía total en la turbulencia.

### 1.3.2 Fluctuación del índice de refracción y su modelo de potencias espectrales

El índice de refracción es el parámetro más significativo para la propagación de la onda en la atmósfera, ya que es muy sensible a pequeñas variaciones de temperatura. Estas fluctuaciones de temperatura combinadas con esta turbulencia (ej. fluctuaciones en el viento), provoca un comportamiento aleatorio en el campo. En un punto  $R$  y tiempo  $t$  el índice de refracción se puede expresar como

$$n(R, t) = n_0 + n_1(R, t)$$

donde  $n_0 = \langle n(R, t) \rangle \cong 1$ , es el valor promedio del índice de refracción y  $n_1(R, t)$  representa la desviación aleatoria de  $n(R, t)$ , con respecto a su valor promedio, es decir,

$\langle n_1(R, t) \rangle = 0$ . Por esto, podemos expresar la función de covariancia de  $n(R)$

$$B_n(R_1, R_2) \equiv B_n(R_1, R_1 + R) = \langle n_1(R) n_1(R_1 + R) \rangle$$

Si el campo aleatorio es homogéneo e isotrópico, la función de estructura viene dada por

$$D_n(R) = 2[B_n(0) - B_n(R)] = C_n^2 R^{2/3}$$

donde  $l_0 \ll R \ll L_0$ , y  $R = |R_1 - R_2|^2$ .  $C_n^2$  es la **constante de estructura** de índice de refracción, de vital importancia en el estudio de la turbulencia, debido a que es una medida de la fuerza de las fluctuaciones en el índice de refracción, que también suele ser llamado parámetro de estructura.

Esto nos permite relacionarlo con la potencia espectral. La densidad de potencia espectral de las fluctuaciones del índice de refracción se puede relacionar con la función de covariancia en tres dimensiones

$$\Phi_n(k) = \frac{1}{2\pi^2 \kappa} \int_0^\infty B_n(R) \sin(\kappa R) R dR,$$

es notorio el cálculo de la función debido a la ecuación 1.5 al aplicar la transformada inversa de Fourier y luego al integrar en el espacio  $d\Omega$ .

Para la propagación de ondas ópticas, las fluctuaciones del índice de refracción son causadas exclusivamente por pequeñas fluctuaciones en la temperatura. Es decir, por lo general se pueden despreciar las variaciones en la humedad y la presión. Por lo tanto, generalmente se acepta que la forma funcional del espectro de potencia espacial de las fluctuaciones del índice de refracción es la misma que la de la temperatura y, además, que las fluctuaciones de temperatura siguen las mismas leyes espectrales que las fluctuaciones de velocidad. Basándose en la expresión de la ley de potencia 2/3 en la región inercial en para la función de estructura, se puede deducir que la densidad espectral de potencia asociada a las fluctuaciones del índice de refracción, se define por

$$\Phi_n(k) = 0.033 C_n^2 k^{-11/3}$$

es conocido como espectro de ley de potencia de Kolmogorov, teóricamente válido solo en el subrango inercial de  $\frac{1}{L_0} \ll k \ll \frac{1}{l_0}$ . Debido a su forma matemática relativamente simple, se utiliza ampliamente en cálculos teóricos. Aunque cabe señalar que hay diferentes espectros teóricos, como el de Tatarskii, von Kármán, von Kármán generalizado, etc. Para

finalizar introducimos el espectro de von Kármán generalizado

$$\Phi_n(\kappa) = C_n^2(H) \frac{\Gamma(2H+2)}{4\pi^2} \sin(\pi H) \frac{\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2)}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{H+\frac{3}{2}}} \quad (1.6)$$

con el cual trabajaremos debido a su subrango inercial  $0 \leq k < \infty$ . Donde  $H$  es el exponente *Hurst*, es un parámetro que cuantifica la rugosidad o la escala de las fluctuaciones, en la fase de la onda óptica perturbada, que para nuestro caso, tiene un valor de  $\frac{1}{3}$  de manera generalizada,  $k_0 = \frac{2\pi}{L_o}$  y  $k_m = \frac{2\pi}{l_0}$  de las escalas externas e internas.

En algunas situaciones de interés, la intensidad de la turbulencia, tal como se predice mediante el parámetro de estructura del índice de refracción  $C_n^2$ , variará en función de la distancia de propagación, es decir  $C_n^2(z)$ .

## 2. TEORÍA CLÁSICA PARA LA PROPAGACIÓN A TRAVÉS DE UN MEDIO ESTOCÁSTICO

Antes de desglosar el trabajo investigativo con su respectivo análisis es necesario comprender teóricamente la propagación de la onda y las diferentes variables que afectan su trayectoria debido a la turbulencia.

Introducimos las características básicas de una onda de haz gaussiano en el plano del transmisor y en el plano del receptor. Nuestra principal área de estudio involucra el modo de orden más bajo y soluciones de la ecuación de onda paraxial. Una ventaja al trabajar con el modelo de onda de haz gaussiano es que también incluye los casos clásicos límite de una onda plana infinita y una onda esférica.

La descripción matemática de una onda en propagación implica la noción de un campo. Básicamente, un campo  $u(R, t)$  es una función del espacio  $R = (x, y, z)$  y del tiempo  $t$  que satisface una ecuación diferencial parcial. En el caso de la radiación electromagnética, el campo puede ser una onda electromagnética transversal (TEM). La ecuación gobernante en la mayoría de los casos es la *ecuación de onda*

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

$c$  representa la velocidad de propagación, *nabla* ( $\nabla$ ) el operador Laplaciano en coordenadas cartesianas. Para ondas electromagnéticas  $c$  toma el valor de la velocidad de la luz. Si las variaciones temporales en el campo son sinusoidales (una onda monocromática), entonces buscamos soluciones de la ecuación 2.1 con la separación de variables, de la forma  $u(R, t) = U_0(R)e^{-i\omega t}$ , donde  $\omega$  es la frecuencia angular y  $U_0(R)$  es la amplitud compleja de la onda. La sustitución de esta forma en la solución de la ecuación 2.1 conduce a la ecuación de onda reducida independiente del tiempo, la ecuación de Helmholtz.

$$\nabla^2 U_0 + k^2 U_0 = 0 \quad (2.2)$$

$k$  el número de onda,  $\lambda$  longitud de onda óptica correspondiente, relacionadas como  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

## 2.1 Ecuación de Helmholtz reducida y su solución para una onda de Haz Gaussiano

Para la propagación de una onda la ecuación 2.2 se puede reducir aún más con la conocida aproximación paraxial. Para esto asumimos que el haz inicia en  $z = 0$  y se propaga positivamente el eje  $z$ . También asumimos que el campo óptico en espacio libre en cualquier punto a lo largo de la trayectoria de propagación es simétrico de forma rotacional, entonces se puede expresar como una función de  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $z$ . Así, la ecuación de onda 2.2, ahora reducida, en coordenadas cilíndricas se puede escribir como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U_0}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} + k^2 U_0 = 0,$$

hasta el momento hemos cambiado  $\nabla$  a las coordenadas cilíndricas, pero además para poder simplificar el proceso de esta solución es conveniente primero hacer la siguiente substitución

$$U_0(r, z) = V(r, z)e^{ikz},$$

obtenemos

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad (2.3)$$

finalmente para simplificar aún más esta ecuación 2.3 podemos hacer el uso de la aproximación paraxial, y una vez reducida encontrar la solución a  $U_0(r, z)$ .

Debemos recordar que la aproximación paraxial se basa en la idea de que la distancia de propagación de una onda óptica a lo largo del eje  $z$  es mucho mayor que la propagación transversal de la onda. Por lo tanto, si  $R = (r, z)$  y  $S = (s, 0)$  representan dos puntos en el espacio con  $r$  y  $s$  son la propagación transversal (o perpendicular) al eje de propagación

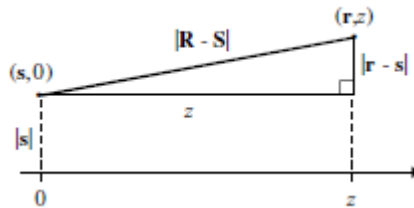


Figura 2.1: Geometría aprox. paraxial para propagación de onda

viendo 2.1 obtenemos

$$|\mathbf{R} - \mathbf{S}| = (z^2 + |\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2)^{1/2} = z \left( 1 + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2}{z^2} \right)^{1/2}$$

se observa que podemos hacer una aproximación binomial asumiendo que la distancia transversal es mucho más pequeña que la longitud de propagación,

$$(1 + x)^n = 1 + nx + n \frac{(n-1)}{2!} x^2 + \dots$$

entonces,

$$|\mathbf{R} - \mathbf{s}| = z \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2}{z^2} + \dots \right)$$

$$|\mathbf{R} - \mathbf{s}| = z + \frac{1}{2z} |\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2 \quad r \ll z$$

esta es la conocida aproximación paraxial, debido a esta aproximación podemos sacar una conclusión.  $V(r, z)$  cambia lentamente respecto al eje de propagación  $z$ , en otras palabras

$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2k \frac{\partial V}{\partial z} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right|,$$

esto nos permite aproximar el hecho  $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ , entonces ahora si, eq. 2.3 es nuestra ecuación de onda paraxial

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + 2ik \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \quad (2.4)$$

La mayoría de los tratamientos teóricos de la propagación de ondas ópticas se han centrado en modelos de campo simples, como una onda plana ilimitada o una onda esférica, esta última a menudo tomada como una fuente puntual. Sin embargo, en muchas aplicaciones, las aproximaciones de onda plana y onda esférica no son suficientes para caracterizar las propiedades de propagación de la onda, especialmente cuando las características de enfoque y divergencia son importantes. En tales casos, suele introducirse el modelo de onda de haz gaussiano de orden inferior, formas limitadas de las cuales llevan a los modelos de onda plana y onda esférica. Se introduce ya que tiene la capacidad de enfoque y un perfil de amplitud y fase descrito por el plano de apertura de salida del transmisor, en otras palabras, es ideal para controlar su amplitud y fase, enfocado hacia lo deseado.

Consideramos la propagación en espacio libre de una onda de haz gaussiano electro-

magnético transversal de orden inferior. La apertura de transmisión se encuentra en el plano  $z = 0$  y la distribución de amplitud en este plano es gaussiana, donde los parámetros fueron definidos en la sección herramientas base, donde hay un radio efectivo del haz  $W_0[m]$ , denota el radio en el que la amplitud del campo cae a  $1/e$  de la del eje del haz. Además, el frente de fase es parabólico con un radio de curvatura  $F_0[m]$ . Cabe señalar, los casos particulares  $F_0 = 1$ ,  $F_0 < 0$  y  $F_0 > 0$  corresponden a haz colimadas, convergentes y divergentes, respectivamente. Si el campo de la onda en  $z = 0$  tiene una amplitud  $a_0 [(W/m^2)^{1/2}]$  en el eje óptico ( $r = 0$ ), se describe como 1.3 :

$$U_0(r, 0) = a_0 e^{-\frac{1}{2}\alpha_0 k r^2}, \quad (2.5)$$

tal que,

$$\alpha_0 = \frac{2}{kW_0^2} + \frac{i}{F_0} \quad [m^{-1}].$$

Podemos identificar la amplitud y fase de un haz gaussiano

$$A_0 = a_0 \exp\left(-\frac{r^2}{W_0^2}\right),$$

$$\varphi_0 = -\frac{kr^2}{2F_0}$$

respectivamente, la amplitud se comporta como una gaussiana con radio  $W_0$ , o diámetro  $2W_0$ . Tanto la amplitud como la fase dependen de la distancia  $r$ , el signo negativo de la fase es la convención para definir el frente de fase con curvatura  $F_0$ .

Para resolver la ecuación paraxial, veremos la función gaussiana como solución, de la forma general

$$V(r, z) = A(z) \exp\left[-\frac{1}{p(z)} \left(\frac{\alpha_0 k r^2}{2}\right)\right] \quad (2.6)$$

definimos

$A(z)$ : Amplitud compleja en el eje de la onda

$P(z)$ : Parámetro de propagación, relacionado con el radio de curvatura.

Vemos en Ec. 2.5 que estos parámetros deben satisfacer las condiciones iniciales de nuestro haz gaussiano,  $p(0) = 1$  y  $A(0) = a_0 = 1$ ; tal que por conveniencia matemática

$a_0 = 1$ . Sustituimos Ec. 2.6 en nuestra ecuación de onda paraxial (Ec. 2.4)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( A(z) e^{-\frac{1}{p(z)} \left( \frac{\alpha_0 k r^2}{2} \right)} \right) + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \left( A(z) e^{-\frac{1}{p(z)} \left( \frac{\alpha_0 k r^2}{2} \right)} \right) = 0$$

Para la parte izquierda de nuestra ecuación, ignoramos  $A(z)$  por el momento

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} e^{-\frac{1}{p(z)} \left( \frac{\alpha_0 k r^2}{2} \right)} \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \frac{\alpha_0 k 2r}{2} \cdot \frac{-1}{p(z)} \right) \right) e^{-\frac{1}{p(z)} \left( \frac{\alpha_0 k r^2}{2} \right)} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{r^2 \alpha_0 k}{p(z)} e^{-(\dots)} \right) \\ &= \frac{1}{r} \left( -2r \frac{\alpha_0 k}{p(z)} e^{-(\dots)} - \frac{r^2 \alpha_0 k}{p(z)} \left( -\frac{1}{p(z)} \frac{\alpha_0 k 2r}{2} \right) e^{-(\dots)} \right) \\ &= \left[ -\frac{2\alpha_0 k}{p(z)} e^{-(\dots)} + \frac{r^2 \alpha_0^2 k^2}{p^2(z)} e^{-(\dots)} \right] A(z) \end{aligned}$$

reinsertaremos  $A(z)$  en nuestra solución y ahora obtenemos la parte derecha de la ecuación derivando respecto a  $z$

$$A'(z) e^{(\cdot)} + A(z) e^{(\cdot)} \left[ \frac{-\alpha_0 k r^2}{2p(z)} \right]' = A'(z) e^{(\cdot)} + A(z) e^{(\cdot)} \left( \frac{-\alpha_0 k r^2}{2} \right) \left( -\frac{1}{p^2(z)} p'(z) \right)$$

reemplazando ambas partes

$$-\frac{2\alpha_0 k}{p(z)} e^{(\cdot)} A(z) + \frac{r^2 \alpha_0^2 k^2}{p^2(z)} e^{(\cdot)} A(z) + 2ik \left( A'(z) e^{(\cdot)} + A(z) \left( \frac{\alpha_0 k r^2}{2p^2(z)} \right) e^{(\cdot)} p'(z) \right) = 0$$

podemos simplificar cada exponencial, despejando y reordenando, obtenemos

$$\alpha_0^2 k^2 r^2 A(z) + i\alpha_0 k^2 r^2 A(z) p'(z) - 2\alpha_0 k A(z) p(z) + 2ik A'(z) p^2(z) = 0$$

más aún

$$r^2 \left( \alpha_0^2 k^2 A(z) + i\alpha_0 k^2 A(z) p'(z) \right) + r^0 \left( -2\alpha_0 k A(z) p(z) + 2ik A'(z) p^2(z) \right) = 0$$



Así podemos obtener la solución a nuestros parámetros con nuestra condiciones iniciales

$$r^2 : p'(z) = \frac{-\alpha_0^2 k^2 A(z)}{i\alpha_0 k^2 A(z)} = i\alpha_0$$

$$r^0 : A'(z) = \frac{2\alpha_0 k A(z) p(z)}{2ik p^2(z)} = -\frac{i\alpha_0 A(z)}{p(z)} = \frac{-p'(z)}{p(z)} A(z)$$

resolviendo ambas

$$\int p'(z) dz = \int i\alpha_0 dz$$

$$P(z) = i\alpha_0 z + C, \quad P(0) = 1$$

entonces  $c = 1$ , por lo tanto nuestro parámetro de propagación es

$$P(z) = 1 + i\alpha_0 z. \quad (2.7)$$

Para  $A(z)$

$$\frac{\partial A}{\partial z} \cdot \frac{1}{A(z)} = \frac{-i\alpha_0}{1 + i\alpha_0 z}$$

$$\int \frac{1}{A(z)} dA = \int \frac{-i\alpha_0}{1 + i\alpha_0 z} dz$$

con el cambio de variable  $u = 1 + i\alpha_0 z$

$$\ln A = -id_0 \int \frac{\partial u}{u} \cdot \frac{1}{id_0}$$

$$A(z) = e^B (1 + i\alpha_0 z)^{-1}$$

$$A(0) = 1 = e^B \quad \therefore \quad B = 0$$

$$A(z) = \frac{1}{p(z)} \quad (2.8)$$

nuestra amplitud compleja, con estos parámetros complejos en resumen podemos escribir nuestra onda de haz Gaussiano como

$$U_0(r, z) = V(r, z) e^{ikz} = \frac{1}{1 + i\alpha_0 z} \exp \left[ ikz - \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_0 k}{1 + i\alpha_0 z} \right) r^2 \right] \quad (2.9)$$

definición de propagación de una haz Gaussiano en el espacio libre a una distancia  $z$  de la fuente. En la siguiente sección estudiaremos esta onda perturbada en el espacio (turbulencia) de la mano con la aproximación de Rytov.

## 2.2 Perturbación de Rytov

Cuando una onda óptica se propaga a través de un medio arbitrario como la turbulencia atmosférica, tanto la amplitud como la fase del campo eléctrico experimentan fluctuaciones causadas por pequeños cambios aleatorios en el índice de refracción. En el estudio de la turbulencia se han desarrollado varios enfoques teóricos diferentes para describir estas fluctuaciones aleatorias de amplitud y fase, basados en la resolución de la ecuación de onda para el campo eléctrico de la onda o para los diversos momentos del campo. Desafortunadamente, estos enfoques matemáticamente rigurosos en la mayoría de los casos solo han conducido a resultados analíticamente tratables respaldados por datos experimentales que están en ciertos regímenes asintóticos.

El problema clásico de la propagación de ondas ópticas en un medio continuo no acotado, con un índice de refracción estocástico de variación, tiene una ecuación diferencial principal con coeficientes aleatorios. En particular, al asumir una variación sinusoidal en el tiempo en el campo eléctrico, podemos desarrollar las ecuaciones de Maxwell para la amplitud vectorial  $E(R, T)$  de una onda electromagnética en propagación. Asumiendo  $E(R, T) = E(R)e^{i\omega t}$  y  $B(R, T) = B(R)e^{i\omega t}$ , donde  $R$  representa nuestras coordenadas espaciales,  $\omega$  la frecuencia angular. De la tercera y cuarta ley de Maxwell obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{R}) &= -i\omega \mathbf{B}(\mathbf{R}) \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{R}) &= \mu_0 \epsilon_0 i\omega \mathbf{E}(\mathbf{R})\end{aligned}$$

donde la densidad de corriente claramente es 0. Además utilizando la identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{R})) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R})) - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{R})$$

reemplazando

$$-i\omega \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{R}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R})) - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{R})$$

podemos sustituir el campo magnético por el campo eléctrico debido a la cuarta ley de Maxwell, también de la primera ley  $\nabla \cdot \mathbf{E}(r) = 0$  (no tenemos cargas presentes en el medio). Despejando todo aquello

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{R}) = 0$$

reemplazando las variables  $\omega^2 = k^2 c^2$ ,  $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ , e incluimos el índice de refracción no

uniforme

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{R}) + k^2 n^2(\mathbf{R}) \mathbf{E}(\mathbf{R}) = 0 \quad (2.10)$$

Si dejamos que  $U(R)$  denote una de las componentes escalares que es transversal a la dirección de propagación a lo largo del eje  $z$  positivo, entonces Ec. (2.10) puede ser reemplazada por la ecuación escalar estocástica de Helmholtz, análoga a la obtenida en un inicio Ec. (2.2)

$$\nabla^2 U + k^2 n^2(\mathbf{R}) U = 0 \quad (2.11)$$

Esta es la ecuación gobernante estocástica a resolver. Los enfoques clásicos más conocidos para resolver esta ecuación son los métodos de perturbación de Born y Rytov. La diferencia entre estos dos métodos es que la aproximación de Born se basa en la adición de términos de perturbación al campo no perturbado, mientras que la aproximación de Rytov implica la multiplicación de términos de perturbación.

Antes de desarrollar la perturbación de Rytov es importante calcular la aproximación de Born, ya que nos ayudara con el futuro desarrollo de esta primera. Para resolver la **aproximación de Born**, debemos escribir el índice de refracción no uniforme

$$n^2(\mathbf{R}) = [n_0 + n_1(\mathbf{R})]^2 \cong 1 + 2n_1(\mathbf{R}),$$

donde asumimos que el valor medio satisface  $n_0 = \langle n(\mathbf{R}) \rangle \cong 1$  y  $n_1(\mathbf{R})$  es una cantidad aleatoria con valor medio de cero, así que la cantidad  $n_1^2(\mathbf{R})$  se puede despreciar. Sabemos que la onda óptica se esta propagando por el eje  $z$ , imaginando que el campo óptico en  $z = L$  se puede expresar como una suma de términos de la forma

$$U(\mathbf{R}) = U_0(\mathbf{R}) + U_1(\mathbf{R}) + U_2(\mathbf{R}) + \dots$$

bien sabemos que  $U_0(\mathbf{R})$  es una parte del campo sin perturbar, es decir en ausencia de turbulencia, y los demás términos son la perturbación a primer orden, a segundo orden... etc. Generalmente se asume que las perturbaciones de mayor orden tienen mucha menor magnitud que la anterior. Estas son condiciones que nos permite hablar y desarrollar sobre las fluctuaciones débiles, de las cuales estamos trabajando. Reemplazando en Ec. (2.11) nuestro índice de refracción y nuestro campo óptico como suma de términos

$$\nabla^2 U_0 + \nabla^2 U_1 + \dots + k^2 U_0 + k^2 U_1 + \dots = -2k^2 n_1 U_0 - 2k^2 n_1 U_1 - \dots,$$

igualamos los términos al mismo orden

$$\begin{aligned}\nabla^2 U_0 + k^2 U_0 &= 0 \\ \nabla^2 U_1 + k^2 U_1 &= -2k^2 n_1(\mathbf{R}) U_0(\mathbf{R})\end{aligned}$$

y así se puede seguir para ordenes superiores.

Para el primer orden de perturbación  $U_1(\mathbf{R})$ , se puede expresar dado  $U_0(\mathbf{R})$  como

$$\begin{aligned}U_1(\mathbf{R}) &= \iiint_V G(\mathbf{S}, \mathbf{R}) [2k^2 n_1(\mathbf{S}) U_0(\mathbf{S})] d^3 S \\ &= 2k^2 \iiint_V G(\mathbf{S}, \mathbf{R}) n_1(\mathbf{S}) U_0(\mathbf{S}) d^3 S,\end{aligned}$$

Se puede interpretar que el campo perturbado es una suma de ondas esféricas generadas en un punto  $\mathbf{S}$  a través de la dispersión de un volumen  $V$ , donde la fuerza de cada onda sera proporcional a nuestro campo no perturbado ( $U_0(\mathbf{R})$ ) y su índice de refracción perturbado al punto  $\mathbf{S}$  ( $n_1(\mathbf{S})$ ). Así podemos introducir la representación de las coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{R} = (\mathbf{r}, L), \quad \mathbf{S} = (\mathbf{s}, z)$$

$G(\mathbf{S}, \mathbf{R}) \equiv G(\mathbf{R}, \mathbf{S})$  es la función de green en el espacio libre, se define como

$$G(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{R} - \mathbf{S}|} \exp(ik|\mathbf{R} - \mathbf{S}|)$$

usando la aproximación paraxial vista en la sección (2.1), podemos aproximar la función de Green a

$$G(\mathbf{s}, \mathbf{r}; z) = \frac{e^{ik|\mathbf{R} - \mathbf{S}|}}{4\pi|\mathbf{R} - \mathbf{S}|} \cong \frac{1}{4\pi z} \exp \left[ ikz + \frac{ik}{2z} |\mathbf{s} - \mathbf{r}|^2 \right]$$

por lo tanto,

$$G(\mathbf{S}, \mathbf{R}) \cong G(\mathbf{s}, \mathbf{r}; z, L) = \frac{1}{4\pi(L-z)} \exp \left[ ik(L-z) + \frac{ik}{2(L-z)} |\mathbf{s} - \mathbf{r}|^2 \right] \quad (2.12)$$

finalmente, reemplazando nuestra función de green, obtenemos la expresión para la perturbación a primer orden, tomando la forma específica

$$U_1(\mathbf{r}, L) = \frac{k^2}{2\pi} \int_0^L dz \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 s \exp \left[ ik(L-z) + \frac{ik}{2(L-z)} |\mathbf{s} - \mathbf{r}|^2 \right] U_0(\mathbf{s}, z) \frac{n_1(\mathbf{s}, z)}{L-z} \quad (2.13)$$

Cabe señalar que por definición  $\langle n_1(\mathbf{s}, z) \rangle = 0$ , por lo tanto, como es de esperar, para la

aproximación de Born la perturbación media a primer orden se desvanece  $\langle U_1(\mathbf{r}, L) \rangle = 0$ . Estos resultados y definiciones nos facilitara el desarrollo de la aproximación/perturbación de Rytov a fluctuaciones débiles.

La **aproximación de Rytov** fue aplicada por primera vez a un problema de propagación de ondas en medios aleatorios por Obukhov. Posteriormente, el método de Rytov se utilizó en los trabajos de Tatarskii.

Limitado a condiciones de fluctuación débil, el método de Rytov consiste en expresar el campo de la onda electromagnética como

$$U(\mathbf{R}) \equiv U(\mathbf{r}, L) = U_0(\mathbf{r}, L) \exp[\psi(\mathbf{r}, L)]$$

donde nuestro  $U_0(r, L)$  se infiere de nuestra Ec. (2.9),  $\psi$  es nuestra fase perturbada debido a la turbulencia, también conocida como **representación espectral**, y toma la forma

$$\psi(\mathbf{r}, L) = \psi_1(\mathbf{r}, L) + \psi_2(\mathbf{r}, L) + \dots \quad (2.14)$$

En la literatura de la turbulencia nos referimos a  $\psi_1$  y  $\psi_2$  como las fases perturbadas de primer orden y segundo orden, respectivamente. Es notoria que la "adición" de las fases perturbadas en el argumento de la función exponencial es equivalente a la multiplicación de estas funciones exponenciales. Así se desarrolla la perturbación a primer orden. Es conveniente introducir la perturbación de Born normalizada

$$\Phi_m(\mathbf{r}, L) = \frac{U_m(\mathbf{r}, L)}{U_0(\mathbf{r}, L)} \quad (2.15)$$

donde  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Si igualamos nuestra aproximación de Rytov a primer orden, con la aproximación de Born a primer orden, entonces

$$U_0(\mathbf{r}, L) \exp[\psi_1(\mathbf{r}, L)] = U_0(\mathbf{r}, L) + U_1(\mathbf{r}, L)$$

también a primer orden en la perturbación normalizada tenemos la relación

$$\Phi_1(\mathbf{r}, L) U_0(\mathbf{r}, L) = U_1(\mathbf{r}, L)$$

utilizando estos hechos

$$U_0(\mathbf{r}, L) \exp[\psi_1(\mathbf{r}, L)] = U_0(\mathbf{r}, L) [1 + \Phi_1(\mathbf{r}, L)]$$

$$\psi_1(\mathbf{r}, L) = \ln[1 + \Phi_1(\mathbf{r}, L)]$$

como  $|\Phi_1(\mathbf{r}, L)| \ll 1$ , podemos aproximar el logaritmo natural

$$\begin{aligned}\psi_1(\mathbf{r}, L) &= \Phi_1(\mathbf{r}, L) \\ &= \frac{U_1(\mathbf{r}, L)}{U_0(\mathbf{r}, L)}\end{aligned}$$

de la Ec. (2.13)

$$\psi_1(\mathbf{r}, L) = \frac{k^2}{2\pi} \int_0^L dz \iint_{-\infty}^{\infty} d^2s \exp \left[ ik(L-z) + \frac{ik|\mathbf{s} - \mathbf{r}|^2}{2(L-z)} \right] \frac{U_0(\mathbf{s}, z)}{U_0(\mathbf{r}, L)} \frac{n_1(\mathbf{s}, z)}{(L-z)} \quad (2.16)$$

La mayoría de los trabajos basados en la teoría de Rytov utilizan solo la perturbación de primer orden  $\psi_1$ . Debido a que está directamente relacionada con la primera aproximación de Born, también se denomina aproximación de dispersión única. La perturbación de primer orden es suficiente para calcular varias cantidades estadísticas de interés, como la varianza del logaritmo de la amplitud, la varianza de fase, las funciones de correlación de intensidad y fase, y la función de estructura de onda. Sin embargo, para obtener cualquiera de los momentos estadísticos del campo óptico a partir de la teoría de Rytov, incluido el valor medio  $\langle U(\mathbf{r}, L) \rangle$ , es necesario incorporar la perturbación de segundo orden  $\psi_2$  además de la perturbación de primer orden  $\psi_1$ . He aquí la principal razón por la cual nuestro trabajo llega hasta la primera aproximación de Rytov, ya que nuestro interés está en la constante de estructura encontrada en la función de estructura, buscando también la relación con las varianzas, etc.

Desarrollaré  $\psi_1$  de manera análoga a *Sistemas lineales*, para esto debo introducir la función respuesta de impulso, luego la función transferencia de sistema (ambas de sistemas lineales), sin antes primero escribir la fluctuación del índice de refracción en integrales de Riemann- Stieltjes en dos dimensiones

$$n_1(\mathbf{s}, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{s}) dv(\mathbf{K}, z) \quad (2.17)$$

donde  $dv(\mathbf{K}, z)$  es amplitud aleatoria de la fluctuación del índice de refracción y  $\mathbf{K} = (k_x, k_y, 0)$ , el vector de onda tridimensional. Mencionada anteriormente, expresamos  $\psi_1$  análogamente a la función de la respuesta de impulso, por la que podríamos nombrar como función de respuesta espectral

$$\psi_1(r, L) = \int_0^L dz \iint_{-\infty}^{\infty} d^2s h(s, r; z, L) n_1(s, z) \quad (2.18)$$

la función respuesta espectral

$$h(s, r; z, L) = 2k^2 G(S, r; z, L) \frac{U_0(S, z)}{U_0(r, L)}$$

procedo a mostrar el desarrollo de la función respuesta espectral, nuestros campos sin perturbar son

$$U_0(s, z) = \frac{1}{p(z)} e^{ikz - \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_0}{p(z)} \right) s^2}$$

$$U_0(r, L) = \frac{1}{p(L)} e^{ikz - \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_0}{p(L)} \right) r^2}$$

se obtiene reemplazando, con la función de green ya definida

$$h(s, r; z, L) = \frac{2k^2}{4\pi(L-z)} e^{ik(L-z)} \cdot e^{ik \frac{|\mathbf{s}-\mathbf{r}|^2}{2(L-z)}} \cdot \frac{p(L)}{p(z)} \cdot e^{ik(z-L)} \cdot e^{-\frac{\alpha_0 k s^2}{2p(z)} + \frac{\alpha_0 k r^2}{2p(L)}},$$

desarrollando el valor absoluto

$$|\mathbf{s}-\mathbf{r}|^2 = (\mathbf{s}-\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{s}-\mathbf{r}) = |\mathbf{s}|^2 - 2\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} + |\mathbf{r}|^2$$

entonces

$$h(s, r; z, L) = \frac{k^2}{2\pi(L-z)\gamma} e^{\frac{ik}{2(L-z)}(s^2 - 2\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} + r^2)} \cdot e^{-\frac{\alpha_0 k s^2}{2p(z)}} \cdot e^{\frac{\alpha_0 k r^2}{2p(L)}} \quad (2.19)$$

donde  $\gamma = P(z)/P(L)$ , por lo tanto

$$h(s, r; z, L) = \frac{k^2}{2\pi\gamma(L-z)} e^{\frac{ks^2}{2} \left( \frac{-\alpha_0}{p(z)} + \frac{i}{(L-z)} \right)} \cdot e^{\frac{kr^2}{2} \left( \frac{\alpha_0}{p(L)} + \frac{i}{(L-z)} \right)} \cdot e^{-\frac{iks \cdot \mathbf{r}}{(L-z)}} \quad (2.20)$$

podemos reordenar para  $p(z)$  de la forma

$$\frac{-\alpha_0}{p(z)} + \frac{i}{(L-z)} = \frac{-\alpha_0 L + \alpha_0 z + i - \alpha_0 z}{p(z)(L-z)}$$

$$\frac{ip(L)}{p(z)(L-z)} = \frac{i}{\gamma(L-z)}$$

para  $p(L)$

$$\frac{\alpha_0}{p(L)} + \frac{i}{(L-z)} = \frac{\alpha_0 L - \alpha_0 z + i - \alpha_0 L}{p(L)(L-z)}$$

si,  $ip(z) = i - \alpha_0 z$

$$= \frac{ip(z)}{p(L)(L-z)} = \frac{i\gamma}{(L-z)}$$

obtenemos

$$h(s, r; z, L) = \frac{k^2}{2\pi\gamma(L-z)} e^{\frac{iks^2}{2\gamma(L-z)}} \cdot e^{\frac{ik\gamma r^2}{2(L-z)}} \cdot e^{\frac{-iks \cdot \mathbf{r}}{(L-z)}} \quad (2.21)$$

reemplazamos la fluctuación índice de refracción Ec. (2.17) y nuestra función respuesta espectral para obtener la siguiente expresión de  $\psi_1$

$$\psi_1(r, L) = \int_0^L dz \iint_{-\infty}^{\infty} d^2s h(s, r; z, L) \iint_{-\infty}^{\infty} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{s}) dv(\mathbf{K}, z)$$

conveniente definir ahora

$$H(\mathbf{K}, \mathbf{r}; z, L) = \iint_{-\infty}^{\infty} d^2s \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{s}) h(\mathbf{s}, \mathbf{r}; z, L)$$

análogamente a la función de transferencia de sistema, para nuestro caso la podemos definir como ***función de transferencia espectral***.

Obtenemos  $\psi_1$

$$\psi_1(\mathbf{r}, L) = \int_0^L dz \iint_{-\infty}^{\infty} dv(\mathbf{K}, z) H(\mathbf{K}, \mathbf{r}; z, L) \quad (2.22)$$

Por el momento, hemos visto las definiciones y expresiones varias para la perturbación que hay a través del camino óptico a lo largo del eje  $z$ , Es necesario seguir desarrollando esta perturbación para encontrar los ángulos de arribo (aoa) y consecuentemente luego encontrar una expresión para la varianzas de estos ángulos. Aunque puede parecer confuso por el momento, al final de las cuentas se despejaran las dudas, ya que no debemos olvidar que el trabajo se proyecta en el cálculo de la constante de estructura, por lo que debemos encontrar una expresión para esta.

## 2.3 Representación espectral a primer orden

En esta sección habrá mucho cálculo de por medio, ya que es necesario desarrollar las integrales de nuestra función de transferencia espectral  $H(\mathbf{K}, \mathbf{r}; z, L)$ , y así obtener una expresión más amena para la fase perturbada a primer orden  $\psi_1$  (representación espectral a primer orden).



Debemos desarrollar  $H(\mathbf{K}, \mathbf{r}; z, L)$ , del cual hay dos formas; la primera, es calcular el producto punto y hacer un cambio de variable en la diferencial de integración a coordenadas cilíndricas, esto nos llevará a soluciones de Bessel que se deberá desarrollar e integrar nuevamente hasta llegar a nuestra solución. La otra manera, la cual abordaremos, es hacerla directamente con cambio de variables en nuestro exponente, primero reemplazaremos nuestra función de respuesta de impulso  $h(s, r; z, L)$

$$H(\mathbf{k}, \mathbf{r}, z, L) = \frac{k^2}{2\pi\gamma(L-z)} e^{\frac{ik\gamma r^2}{2(L-z)}} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{iks^2}{2\gamma(L-z)}} e^{i\left(\mathbf{k} - \frac{k\mathbf{r}}{(L-z)}\right) \cdot \mathbf{s}} d^2s \quad (2.23)$$

usamos cambios de variables

$$\mathbf{b} = \mathbf{k} - \frac{k\mathbf{r}}{(L-z)} \quad j \quad a = \frac{k}{2\gamma(L-z)}$$

resolvemos la integral

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{ias^2 + i\mathbf{b}\mathbf{s}} d^2s$$

podemos reordenar y hacer un cambio en el exponente de la exponencial de la manera

$$a \left( s^2 + 2 \left( \frac{\mathbf{b}}{2a} \right) \mathbf{s} \right)$$

$$\begin{aligned} \left\| s + \frac{\mathbf{b}}{2a} \right\|^2 &= \left( \mathbf{s} + \frac{\mathbf{b}}{2a} \right) \left( \mathbf{s} + \frac{\mathbf{b}}{2a} \right) \\ &= s^2 + 2 \left( \frac{\mathbf{b}}{2a} \right) \mathbf{s} + \frac{b^2}{4a^2} \end{aligned}$$

es notorio entonces que debemos reemplazar lo siguiente

$$s^2 + 2 \left( \frac{\mathbf{b}}{2a} \right) \mathbf{s} = \left\| s + \frac{\mathbf{b}}{2a} \right\|^2 - \frac{b^2}{4a^2},$$

por lo tanto

$$e^{-\frac{ib^2}{4a}} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{ia \left( \left\| s + \frac{\mathbf{b}}{2a} \right\|^2 \right)} d^2s$$

haciendo típico cambio de variable  $u = s + b/2a$  y  $d^2u = d^2s$ , pero además nuestra diferencial de integral la reescribimos en coordenadas cilíndricas de la manera  $d^2u = u du d\theta$ ,

obteniendo

$$H(\mathbf{k}, \mathbf{r}; z, L) = \frac{k^2}{2\pi\gamma(L-z)} e^{\frac{ik\gamma r^2}{2(L-z)} - \frac{ib^2}{4a}} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{iau^2} u du d\theta$$

la integral es divergente por lo que es necesario

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{i(a+i\varepsilon)u^2} u du d\theta = 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{i(a+i\varepsilon)u^2} u du$$

con ayuda de *Mathematica*<sup>1</sup> obtenemos

$$\begin{aligned} 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{i(a+i\varepsilon)u^2} u du &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{ia} \right) \\ &= \frac{i\pi}{k} 2\gamma(L-z). \end{aligned}$$

Así

$$H(\mathbf{k}, \mathbf{r}, z, L) = \frac{k^2}{2\pi\gamma(L-z)} e^{\frac{ik\gamma r^2}{2(L-z)}} e^{i\left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{r}}{(L-z)}\right)^2 \cdot 2\gamma(L-z)} \cdot \left[ \frac{i\pi}{k} 2\gamma(L-z) \right]$$

desarrollando la exponente

$$\left( \mathbf{k} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{r}}{(L-z)} \right)^2 = \left[ k^2 - \frac{2\mathbf{k}\mathbf{r}}{(L-z)} + \frac{k^2 r^2}{(L-z)^2} \right],$$

podemos reducir a

$$H(\mathbf{k}, \mathbf{r}, z, L) = ike^{\frac{ik\gamma r^2}{2(L-z)} - \frac{ik\gamma r^2}{2(L-z)}} e^{-\frac{ik^2\gamma(L-z)}{2k} + i\gamma\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

$$H(\mathbf{k}, \mathbf{r}; z, L) = ike^{i\gamma\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{-\frac{ik^2\gamma(L-z)}{2k}}.$$

Representando nuestra fase perturbada  $\psi_1$  reducida de la forma

$$\psi_1(\mathbf{r}, L) = ik \int_0^L dz \iint_{\mathbb{R}^2} \text{Exp} \left[ i\gamma\mathbf{k}\mathbf{r} - \frac{ik^2}{2k} \gamma(L-z) \right] dv(\mathbf{k}, z) \quad (2.24)$$

es necesario y útil escribir nuestra representación espectral invariante a desplazamientos. Es fácil notar, aunque no obvio, que nuestra función de green Ec. (2.12) en el espacio

---

<sup>1</sup>Lenguaje o Software de programación, dedicado a la resolución de problemas de diferentes áreas científicas

libre es directamente invariante a los desplazamientos, por lo tanto

$$G(s, \mathbf{r}; z, L) = G(s - \mathbf{r}_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0; z, L)$$

para la función de transferencia espectral es invariante bajo  $Exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0]$

$$H(\mathbf{k}, \mathbf{r}; z, L) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} H(\mathbf{k}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0; z, L)$$

$$\begin{aligned} &= ike^{i\gamma\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} e^{-\frac{ik^2\gamma}{2k}(L-z)} \\ &= ike^{i\gamma\mathbf{k}\mathbf{r}-i\gamma\mathbf{k}\mathbf{r}_0+i\mathbf{k}\mathbf{r}_0} \cdot e^{-\frac{ik^2\gamma}{2k}(L-z)} \end{aligned}$$

donde

$$e^{i\gamma\mathbf{k}\mathbf{r}-i\gamma\mathbf{k}\mathbf{r}_0+i\mathbf{k}\mathbf{r}_0+i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

$$i(\mathbf{k}\mathbf{r}_0 - \mathbf{k}\mathbf{r}) - i\gamma(\mathbf{k}\mathbf{r}_0 - \mathbf{k}\mathbf{r}) + i\mathbf{k}\mathbf{r},$$

es así que la función de transferencia espectral invariante a desplazamientos es

$$H(\mathbf{k}, \mathbf{r}; z, L) = ike^{i(1-\gamma)\mathbf{k}(\mathbf{r}_0-\mathbf{r})} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{-\frac{ik^2}{2k}\gamma(L-z)} \quad (2.25)$$

por lo tanto reemplazando Ec. (2.25) en Ec.(2.24), nuestra función espectral invariante a desplazamientos

$$\psi_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; L) = ik \int_0^L dz \iint_{\mathbb{R}^2} dv(\mathbf{k}, z) e^{-i\frac{k^2\gamma(L-z)}{2k}} e^{[i(1-\gamma)\mathbf{k}(\mathbf{r}_0-\mathbf{r})]} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (2.26)$$

Ahora que hemos obtenida nuestra representación espectral o fase perturbada, se procederá a abordar los elementos fundamentales delineados en el marco de esta investigación. En el próximo capítulo, se llevará a cabo una exposición detallada del experimento, proporcionando el contexto necesario para expresar las variables de manera coherente con la teoría recientemente presentada.

### **3. IMÁGENES DE UNA MATRIZ DE PUNTOS A TRAVÉS DE UNA TURBULENCIA CASO CONTROLADO DE LABORATORIO**

Antes de comenzar con la explicación del proyecto, es importante señalar que se llevó a cabo con el grupo disciplinario de sistemas complejos a cargo del profesor guía, en el cual se encuentran miembros como el Dr. Marcos Sepúlveda, Mg. Hishan Farfan y Pablo Scherz. Desde la instalación del Setup hasta la creación de funciones en Matlab para analizar el experimento en sus diversas variables. Ahora bien, de la mano con este trabajo, en específico me dediqué a estudiar una de estas tantas variables, siendo la constante de estructura. Es decir, el trabajo de aquí ha presentar tiene un desarrollo debido a varias personas en general (profesor guía es el principal dueño), por lo que era necesario darles su crédito correspondiente.

#### **3.1 Objetivo e hipótesis**

El experimento consiste en estudiar fuentes de luz a través de un medio turbulento bajo condiciones controladas de laboratorio. En el estudio de estas fuentes se busca dar con valores para la constante de estructura junto a su escala interna y externa bajo funciones de optimización en librerías de Matlab, para así concluir como se comportan estas variables bajo diferentes condiciones de temperatura.

Se comparan dos fuentes, una de haz coherente de  $637nm$  y una luz amplia incoherente de  $660nm$ , la cual es colimada. A través de un DMD<sup>1</sup> se generan una serie de 5 máscaras, siendo estas una matriz de puntos de  $10 \times 10$ , que se observan a través del torbulador, ver Fig. (3.1).

---

<sup>1</sup>Digital Micromirror Device, es un chip óptico que utiliza espejos microscópicos para modular la proyección de luz, facilitando imágenes y proyecciones precisas, utilizado comúnmente en óptica adaptativa.

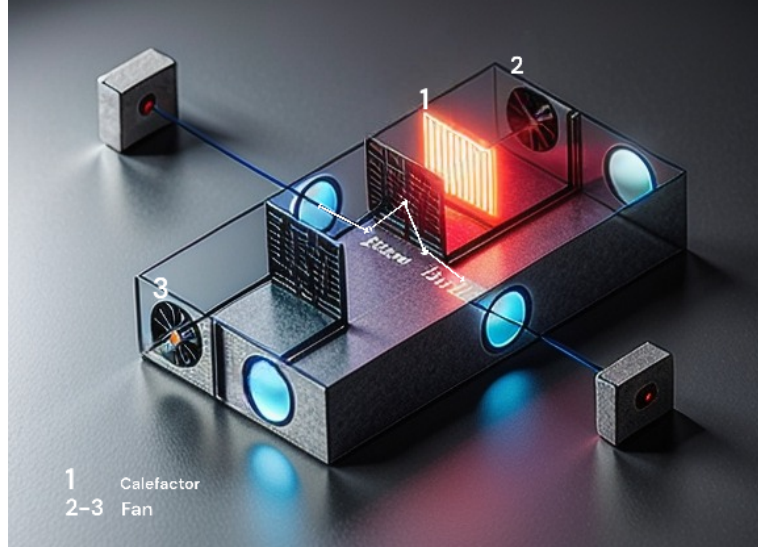


Figura 3.1: Representación del experimento, donde una haz se propaga a través del torbulador

El torbulador consiste en contener dos Fans por las cuales se puede controlar la velocidad del flujo de aire para cada una, y además para una Fan se puede controlar su temperatura a través de un calefactor, así logrando contener un ambiente controlado. Esta observación se realiza con una cámara que graba a  $5000\text{fps}$  (frames per second) con un tamaño de entrada de  $128 \times 128\text{px}$ , esto genera un total de 60.000 ejemplos para cada observación. Estos datos en general son unos de los más importantes para entender el contexto futuro del análisis, pero se deben tener en cuenta muchos datos necesarios que hay detrás, como el tamaño por píxel del DMD, datos para la imagen en el plano, imagen en el sistema, etc. La longitud del torbulador es  $L = 0.37\text{m}$ , hay otras variables que fueron definidas, como  $k_m$  en el capítulo 1. El exponente *hurst* o de Kolmogorov  $H = 1/3$ , que fue estimado con anticipación a este análisis en particular.

Como una primera hipótesis podemos señalar que al estar estudiando el caso a primera fase perturbada deberíamos esperar una razón constante por parte de las variables respecto a la temperatura. Es decir, a medida que incrementa la temperatura, las variables también deben incrementar. De igual forma, se espera que la optimización sea la ideal para las variables de escala.

## 3.2 Análisis de la función espectral bajo las condiciones del experimento y su varianza

Es necesario ahora desarrollar nuestra representación espectral en el contexto del setup de nuestro experimento, ver Fig. (3.2). Para esto debemos integrar sobre la apertura y la fuente, donde la apertura tiene un diámetro de  $D = 2R$ , de la Ec. (2.26) se infiere que la integración será sobre  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}_0$ , según R. Sasiela (1997)

$$\begin{aligned} \psi_S(D; L) = ik \int_0^L dz \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{i\kappa^2 \gamma (L-z)}{2k} \right] & \left\{ \frac{1}{A_D \int S(\mathbf{r}_0) d^2 r_0} \times \right. \\ \times \int_{A_D} d^2 r \int d^2 r_0 S(\mathbf{r}_0) \exp [i(1-\gamma) \kappa \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})] \exp (i\kappa \cdot \mathbf{r}) & \left. \right\} d^2 v(\kappa, z). \end{aligned} \quad (3.1)$$

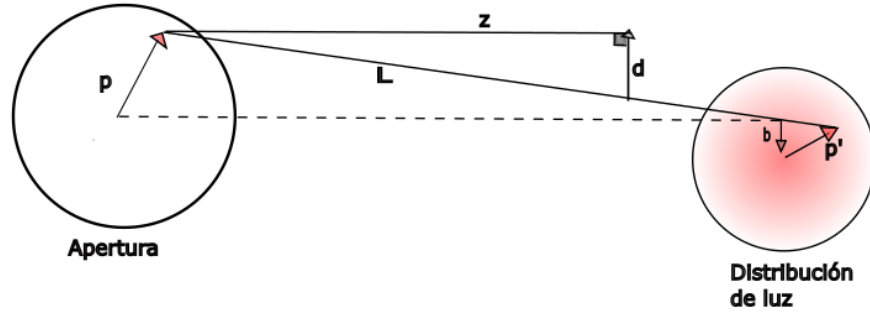


Figura 3.2: Representación trayectoria y vectores

donde  $A_D$  y  $A_S$ , son las áreas de apertura y de la fuente, respectivamente.  $\psi_s$  es la fase en cualquier punto de la apertura,  $S(r_0)$  la intensidad en  $r_0$ . Es decir, tenemos la intensidad total normalizada debido de la fuente. Es notorio que

$$\int S(r_0) d^2 r_0 = A_S$$

arreglo las exponenciales de la Ec. (3.1) manera

$$\begin{aligned} e^{i(1-\gamma)\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} e^{-i(1-\gamma)\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ e^{i(1-\gamma)\mathbf{k} \cdot \vec{r}_0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \cdot e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{i(1-\gamma)\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{aligned}$$

así la integral sobre  $\mathbf{r}$  es

$$\begin{aligned}\frac{1}{A_D} \int_{A_D} d^2 r e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} &= \frac{1}{A_D} \int_{A_D} d^2 r e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \cos \theta}; \quad d^2 r = r dr d\theta \\ &= \frac{1}{A_D} \int_0^{2R} \int_0^{2\pi} r e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \cos \theta} dr d\theta\end{aligned}$$

debido a la integral sobre un  $\cos \theta$  nos darán funciones de Bessel, por lo que con ayuda de Mathematica obtenemos

$$\frac{1}{A_D} \int_{A_D} d^2 r e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 2 \frac{J_1(k\gamma R)}{k\gamma R} \quad (3.2)$$

para  $r_0$ , el cual consideramos una fuente puntual simétrica cilíndrica en  $r_i$  con diámetro  $d_s$ , podemos calcular

$$\frac{1}{A_S} \int_{A_S} d^2 r_0 e^{i(1-\gamma)\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_i)}$$

sacamos  $r_i$  de la integral, tenemos

$$\frac{1}{A_S} \int_{A_S} d^2 r_0 e^{i(1-\gamma)\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_i)} = \frac{2J_1 \left[ k(1-\gamma) \frac{d_s}{2} \right]}{k(1-\gamma) \frac{d_s}{2}} e^{-i(1-\gamma)\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i}$$

aproximamos para  $d_s \rightarrow 0$ , utilizando la regla de l'Hopital, con ayuda de Mathematica para la función de Bessel obtenemos

$$\lim_{d_s \rightarrow 0} \frac{J_1 \left[ k(1-\gamma) \frac{d_s}{2} \right]}{k(1-\gamma) \frac{d_s}{2}} = \frac{1}{2}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{A_S} \int_{A_S} d^2 r_0 e^{i(1-\gamma)\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_i)} = e^{-i(1-\gamma)\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i}. \quad (3.3)$$

Reemplazando los resultados para la integración sobre la fuente Ec. (3.3) y la apertura Ec. (3.2) en nuestra representación espectral Ec. (3.1)

$$\psi_S(D, r_i, L) = 2ik \int_0^L dz \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{ik^2\gamma(L-z)}{2k}} \frac{J_1 \left[ k\gamma \frac{D}{2} \right]}{k\gamma \frac{D}{2}} e^{-i(1-\gamma)\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} d^2 v(\mathbf{k}, z) \quad (3.4)$$

por lo tanto, nuestros ángulos de arribo (aoa) pueden ser descritos

$$\begin{aligned}\theta(D, \mathbf{r}_i; L) &= \frac{1}{A_D} \int_{A_D} d^2r \left( -\frac{1}{k} \right) \nabla_{\perp} \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i; L) \\ &= -2i \int_0^L \gamma dz \iint_{-\infty}^{\infty} \cos \left[ \frac{\kappa^2 \gamma (L-z)}{2k} \right] \frac{J_1(\kappa \gamma D/2)}{\kappa \gamma D/2} \exp[-i(1-\gamma) \kappa \cdot \mathbf{r}_i] \kappa d^2v(\kappa, z)\end{aligned}\quad (3.5)$$

Es así como para dos continuos ángulos de arribo, la varianza será

$$\sigma_j^2 = \left\langle \left| \theta_j(D, \mathbf{r}_i; L) - \theta_j(D, \mathbf{r}'_i; L) \right|^2 \right\rangle \quad (3.6)$$

como vimos en un inicio, la varianza depende del valor medio de la variable, esto es beneficioso ya que podemos utilizar

$$\langle dv(\mathbf{K}, z) dv^*(\mathbf{K}', z') \rangle = F_n(\mathbf{K}, |z - z'|) \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}') d^2\kappa d^2\kappa'$$

y así obtener la función de estructura, en la cual al mismo tiempo obtenemos nuestra constante de estructura, ya que

$$\Phi_n(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(\kappa_x, \kappa_y, 0, |z|) \cos(z\kappa_z) dz,$$

para un  $\kappa_z = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_n(\mathbf{K}, z) dz = 2\pi \Phi_n(\mathbf{K})$$

por lo que al entrar a la integral solo nos quedaría la función de estructura, definida en el capitulo inicial

$$\begin{aligned}\sigma_j^2 &= 4 \int_0^L \gamma^2 dz \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \kappa_j^2 \kappa \Phi_n(\kappa) d\kappa \times \\ &\times \cos^2 \left[ \frac{\kappa^2 \gamma (L-z)}{2k} \right] \frac{J_1^2(\kappa \gamma D/2)}{(\kappa \gamma D/2)^2} \left| 1 - \exp[i(1-\gamma) \kappa \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i)] \right|^2.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Ahora es necesario evaluar primero nuestra parte angular, donde utilizaremos el hecho que  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i = d$ , también

$$\left\| 1 - \exp[i(1-\gamma) \kappa \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i)] \right\|^2 = 2\{1 - \cos[(1-\gamma) \kappa \cdot \mathbf{d}]\}$$

así una vez más obtendremos funciones de Bessel, integrando



$$\int_0^{2\pi} \kappa_{\parallel, \perp}^2 |1 - \exp[i(1 - \gamma)\kappa \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i)]|^2$$

$$= 4\pi\kappa^2 \left\{ \frac{1}{2} - \left\{ \frac{\cos^2 \theta_d}{\sin^2 \theta_d} \right\} J_0[(1 - \gamma)\kappa d] + \left\{ \frac{1 - 2\sin^2 \theta_d}{2\sin^2 \theta_d - 1} \right\} \frac{J_1[(1 - \gamma)\kappa d]}{(1 - \gamma)\kappa d} \right\} \quad (3.8)$$

donde  $\parallel$  y  $\perp$  corresponde para los valores paralelos y perpendiculares o  $j = 1, 2$ , respectivamente.  $\theta_d = 0$ , ya que se buscan correlaciones entre dos puntos en el plano de la pupila. También, redefiniremos  $F_T(z) = 1 - J_0(z)$  y  $F_1(z) = 1/2 - J_1(z)/z$ , por lo tanto, podemos reescribirlo de la siguiente manera

$$\sigma_j^2(D, \mathbf{d}; \gamma, L) = 16\pi \int_0^L \gamma^2 dz \int_0^\infty d\kappa \kappa^3 \Phi_n(\kappa) \cos^2 \left[ \frac{\kappa^2 \gamma (L - z)}{2k} \right] \frac{J_1^2(\kappa \gamma D/2)}{(\kappa \gamma D/2)^2} \times$$

$$\times \left[ \left( \frac{1 + e^{i\pi j}}{2} \right) F_T[(1 - \gamma)\kappa d] - e^{i\pi j} F_1[(1 - \gamma)\kappa d] - e^{i\pi j} \sin^2 \theta_d \{F_T[(1 - \gamma)\kappa d] - 2F_1[(1 - \gamma)\kappa d]\} \right] \quad (3.9)$$

Hasta este punto ya es claro de dónde podremos obtener valores para nuestra constante de estructura  $C_n^2(z)$ , deberemos despejarla de este entramado, y luego resolver todo lo demás. Despejaremos las integrales, las separaremos en dos en un comienzo, y todos los demás valores ya los hemos dado ( $L, \kappa, d$ ). Antes de separar las integrales, se hace el cambio de variable  $\kappa = \kappa_m u$  y nuestro parámetro de distancia  $\zeta = z/L$ , también recordamos

$$k_m = \frac{2\pi}{l_0}$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{L_0}$$

reemplazando en la función de estructura

$$\Phi_n(k) \propto \frac{e^{-\frac{k^2}{k_m^2}}}{(k^2 + k_0^2)^{H+3/2}} = \frac{e^{-u^2}}{\left(k_m^2 u^2 + \frac{4\pi^2}{L_0^2}\right)^{H+3/2}}$$

$$= \frac{e^{-u^2}}{\left[k_m^2 \left(u^2 + \frac{4\pi^2}{4\pi^2 L_0^2}\right)\right]^{H+3/2}},$$

$$= \frac{e^{-u^2}}{(k_m^2)^{H+3/2} (u^2 + q^2)^{H+3/2}} \quad ; q = \frac{l_0}{L_0}$$

$$\sigma^2 \propto 16\pi A^2(H) \int_0^L \gamma^2 dz \int_0^\infty \frac{e^{-u^2} k_m^3 u^3 k_m du}{(u^2 + q^2)^{H+3/2} k_m^{2H+3}} \frac{J_1[k_m u \gamma D/2]}{k_m^2 u^2 \gamma^2 \frac{D^2}{4}} \dots$$

con  $Ld\zeta = dz$ , el cambio de variable  $F_m = \kappa_m^2 L / (2k)$ , número de fresnel relacionado a la escala interna.  $R_m = \kappa_m D / 2$  radio de la pupila de entrada que es adimensional.  $\delta_m = \kappa_m d$  la separación entre las imágenes de puntos. Reemplazando y desarrollando, obtenemos

$$\sigma_j^2(D, \mathbf{d}; \gamma, L) = \frac{16\pi \kappa_m^{3-2H} A^2(H) L}{R_m^2} \int_0^1 d\zeta \int_0^\infty \frac{u \exp(-u^2) du}{(q^2 + u^2)^{H+3/2}} \cos^2 [F_m \gamma (1 - \zeta) u^2] J_1^2(R_m \gamma u) \times$$

$$\times \left[ \left( \frac{1 + e^{i\pi j}}{2} \right) F_T [(1 - \gamma) \delta_m u] + e^{i\pi j} F_1 [(1 - \gamma) \delta_m u] - e^{i\pi j} \sin^2 \theta_d \{ F_T [(1 - \gamma) \delta_m u] - 2F_1 [(1 - \gamma) \delta_m u] \} \right] \quad (3.10)$$

es evidente que tenemos la suma de dos integrales, reduciendo cada  $F_T$  y  $F_1$  nos quedan solo sus constantes de proporcionalidad, por lo que

$$I_T(F_m, R_m, \delta_m; H, q) = \int_0^1 d\zeta \int_0^\infty \frac{u \exp(-u^2) du}{(q^2 + u^2)^{H+3/2}} \cos^2 [F_m \gamma (1 - \zeta) u^2] J_1^2(R_m \gamma u) F_T [(1 - \gamma) \delta_m u] \quad (3.11)$$

$$I_1(F_m, R_m, \delta_m; H, q) = \int_0^1 d\zeta \int_0^\infty \frac{u \exp(-u^2) du}{(q^2 + u^2)^{H+3/2}} \cos^2 [F_m \gamma (1 - \zeta) u^2] J_1^2(R_m \gamma u) F_1 [(1 - \gamma) \delta_m u] \quad (3.12)$$

Ahora si  $q \ll 1$  entonces es necesario hacer el cambio de variable  $u = qv$

$$I_T = \frac{1}{q^{2H+1}} \int_0^1 d\zeta \int_0^\infty \frac{v \exp(-q^2 v^2) dv}{(1 + v^2)^{H+3/2}} \cos^2 [(q^2 F_m) \gamma (1 - \zeta) v^2] J_1^2[(q R_m) \gamma v] F_T [(1 - \gamma) (q \delta_m) v]$$

$$I_1 = \frac{1}{q^{2H+1}} \int_0^1 d\zeta \int_0^\infty \frac{v \exp(-q^2 v^2) dv}{(1 + v^2)^{H+3/2}} \cos^2 [(q^2 F_m) \gamma (1 - \zeta) v^2] J_1^2[(q R_m) \gamma v] F_1 [(1 - \gamma) (q \delta_m) v]$$

Con la introducción del cambio de variable  $u$ , todas las expresiones se encuentran ahora en función de la escala externa  $L_0$ , donde  $F_0 = q^2 F_m = \kappa_0^2 L / (2k)$ ,  $R_0 = q R_m = \kappa_0 D / 2$ , y  $\delta_0 = q \delta_m = \kappa_0 d$ . Este fenómeno se generaliza para experimentos realizados en el interior, donde la escala interna es mayor o igual a la separación entre nuestros puntos

imágenes, es decir,  $d \leq l_0$ .

### 3.3 Resolución de $C_n^2$

Concluida la fase investigativa necesaria para representar nuestro experimento mediante una formulación matemática, es imperativo proceder a su resolución con el fin de obtener resultados. Es crucial destacar que nuestra constante de estructura surgirá como función de las integrales, la varianza  $\sigma^2$ , y  $q$ .

Con el respaldo de Matlab<sup>2</sup>, avanzaremos en el resto del trabajo. Antes de adentrarnos en el desarrollo, es necesario señalar que los videos fueron procesados previamente para facilitar su análisis. Estos fueron convertidos al formato ".mat", que contiene los datos necesarios en una matriz de dimensiones  $60000 \times 100 \times 2$ .

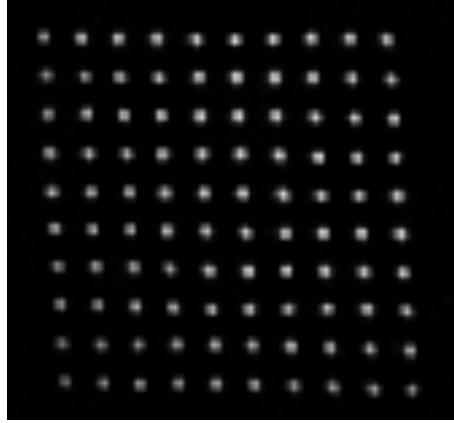


Figura 3.3: Vista previa animación de las imágenes puntos

Primero, nos enfocaremos en el desarrollo de las varianzas; el código presenta una función denominada "wandering struct", visible en el código que se muestra a continuación. Dicha función calcula las varianzas correspondientes entre un punto y otro, y fue desarrollada por un miembro del grupo de óptica de la universidad, mencionado anteriormente. Para optimizar el proceso, inicié creando un bucle "for" que no solo calcula la varianza entre un punto y otro, sino que también computa la varianza de cada punto con respecto a todos los demás. Este procedimiento se repite para cada punto imagen necesario, generando así una matriz de imágenes de tamaño  $10 \times 10$ . Nombro las variables  $i$  y  $j$  para referirme a cada columna y fila, respectivamente.

---

<sup>2</sup>Un lenguaje de programación utilizado para cálculos numéricos, manipulación matricial y simulaciones

Durante la implementación de este código, observé una deficiencia significativa: el programa re-dimensionaba repetidamente la matriz de cálculo de varianzas mientras realizaba los cálculos. Esto provocaba un aumento innecesario en la complejidad computacional, ya que

```

load('ruta\C2048_V0808dT20_coh'); %reemplazar nombre en a
%%
a = 'var_V0808dT20_coh'; %cambiar el nombre al cambiar el archivo

a_ = 'varianzas_V0808dT20_coh'; a_ = strrep(a_, '-', '■'); a_ = char(a_);

% calculo de varianzas en arreglos de 10x10 --> cada {i,j}
% 10x10 para todas las varianza de cada dot
centroidmat = TMs;

M = 10; % numero de dots
var_datah = cell(M,M);
var_datav = cell(M,M);
tic
for i=1:10
    for j=1:10
        var_datah{i, j} = wandering_struct(centroidmat,[i j],1);
        var_datav{i, j} = wandering_struct(centroidmat,[i j],2);
    end
end
toc
% guardando itvar, varianza total h + v para cada dot {i,j}
itvar = cell(M, M);
for i=1:10
    for j=1:10
        itvar{i,j} = var_datah{i,j} + var_datav{i,j};
    end
end
%
nombreh = [a '_horizontal'];
nombrev = [a '_vertical'];

eval([nombreh '■=■var_datah;']);
eval([nombrev '■=■var_datav;']);

```

no conocía de antemano cuáles eran sus dimensiones. En otras palabras, durante el cálculo del primer término, la matriz era de dimensiones 1x1, luego 2x1, y así sucesivamente. Con el objetivo de optimizar aún más esta pérdida de tiempo, asigné un valor predefinido a `var_datah = cell(M,M)`. Con esta modificación, ya no era necesario perder tiempo calculando la dimensión en cada iteración, ya que conocía su dimensión desde el principio. Ahora solo debía llenar cada espacio de la matriz. El resto del código consiste, principalmente, en cambios de nombres para facilitar la llamada a los archivos y garantizar una relación adecuada entre los datos a analizar y los nombres de cada archivo.

Para visualizar y analizar estas varianzas, implementé un mapeo que permite una mejor comprensión visual. Antes de esto, es necesario obtener las referencias en los ejes  $x$  e  $y$  de las imágenes de puntos del archivo que estamos analizando.

```
centroid_mean = squeeze(mean(centroidmat,1));
ref_1 = reshape(centroid_mean',[],10, 10);
hor_refx = ref_1(1,1:10:end); hor_refy=ref_1(2,1:10:end);
ver_refx = ref_1(1,1:10); ver_refy = ref_1(2,1:10);
hor = polyfit(hor_refx,hor_refy,1);
ver = polyfit(ver_refx,ver_refy,1);

% angulos # especificar si es co o in
angleh = atan(hor(1)); anglev=atan(ver(1)); %atan vuelve la tangente inversa
% Referencia x e y
REFX = squeeze(ref_1(1, :, :)) ; REFY =squeeze(ref_1(2, :, :));
```

En el código, "centroidmat" calcula los centroides de cada punto, es decir, toma el valor medio de las diez matrices, para cada centroide de cada imagen punto. Luego te obtienen las referencias tanto horizontales como verticales para los ejes  $x$  e  $y$  de la matriz imágenes de puntos, así al visualizarlas con la herramienta "plot" de Matlab, obtenemos

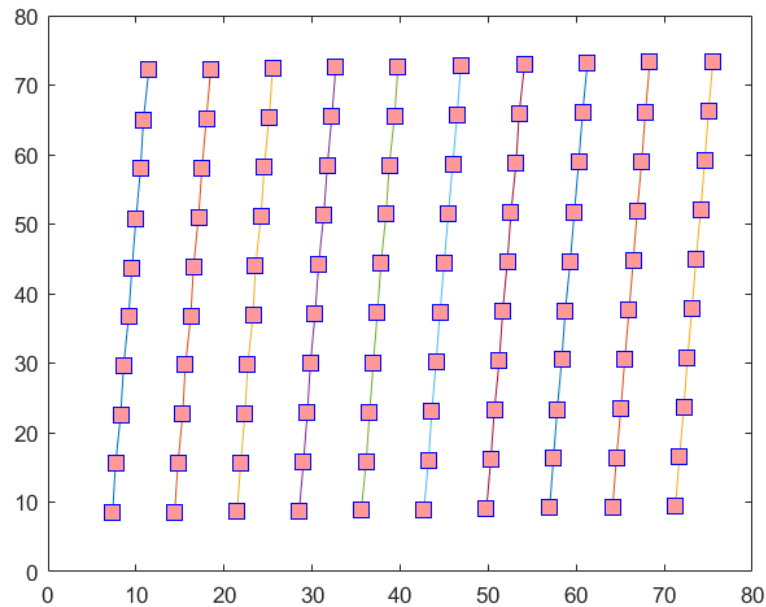


Figura 3.4: Referencias eje  $x$  e  $y$ , para matriz de imagen de puntos

Esta referencia de imagen, tanto  $REFX$  y  $REFY$  podremos mapear nuestras varianzas para una imagen punto en específico, por ejemplo, si queremos ver el comportamiento de la imagen punto central, es decir  $[i, j] = [5, 5]$ , tendremos el siguiente código. Donde  $itvar\{5, 5\}$  llama la matriz de varianzas para el punto imagen de la columna y fila  $\{5, 5\}$

```
itvar40 = itvar{5,5};
figure; contourf(REFX,REFY,itvar40,'ShowText','on')
title(a_)
```

la función `contourf` especifica las coordenadas  $x$  e  $y$  para los valores de cada varianza en su correspondiente posición. Daré dos ejemplos para poder mostrar las diferencias y una explicación más acorde. Observamos de la figura que la varianza para este caso en particular es bastante inhomogéneo Fig.(3.5), es de esperar que entre más lejos estén los puntos del centro, mayor sea la varianza.

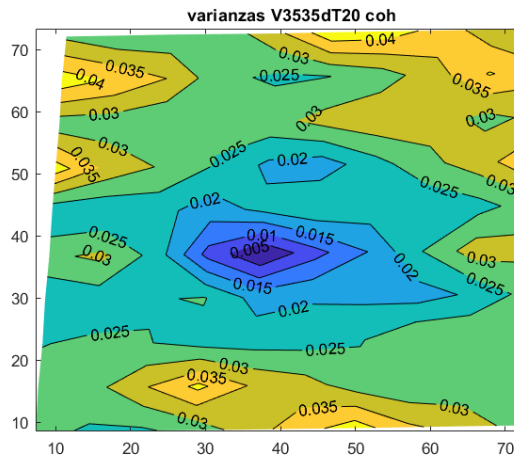


Figura 3.5: Mapeo varianzas V3535dT20

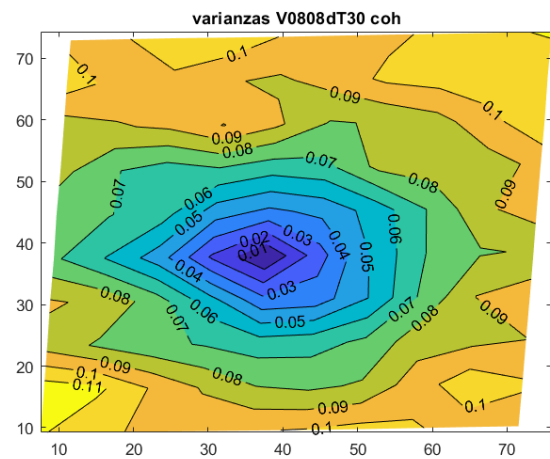


Figura 3.6: Mapeo varianzas V0808dT30

El contexto de la Fig.(3.6), se observa que la homogeneidad es más prominente en comparación con el primer caso Fig.(3.5). Esta observación inicial sugiere la presencia de una mayor intensidad de turbulencia en el primer escenario en comparación con el segundo. En busca de dejar un poco más esclarecedor, de lo que ya es, se hace el mismo mapa de varianzas pero en 3D con el fin de que en el eje  $z$  se muestre claramente la magnitud de cada varianza, y como se comporta la imagen punto buscada respecto a las demás, entonces con la función "surf"

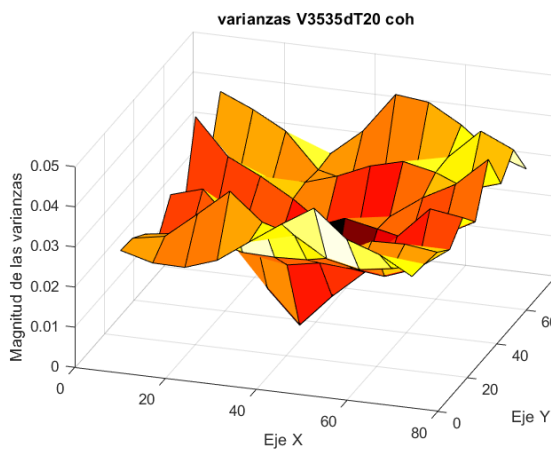


Figura 3.7: Varianzas V3535dT20 3D

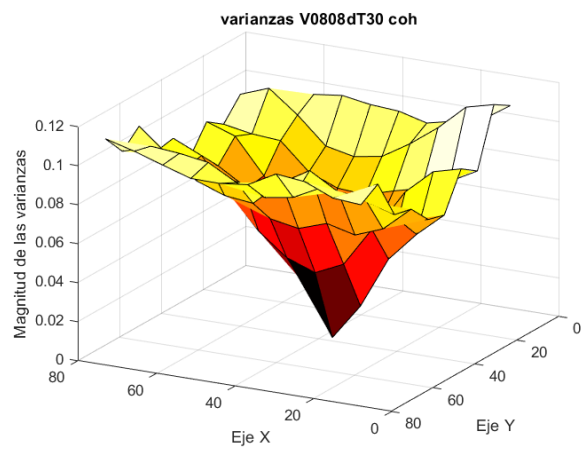


Figura 3.8: Varianzas V0808dT30 3D

Se observa de manera más evidente la inhomogeneidad en V3535, donde la magnitud experimenta un incremento a lo largo de los ejes  $x$  e  $y$ . Se puede interpretar esta observación como si la turbulencia estuviera ejerciendo una especie de "empuje" sobre nuestra

matriz de imágenes de puntos, dirigiéndola hacia esa esquina en particular. En contraste, para V0808, se aprecia que las variaciones cambian de manera más homogénea, indicando que la turbulencia no afecta tan significativamente a nuestra matriz de imágenes de puntos.

En el contexto del proceso de ajuste (fitteo) para determinar los valores de la constante de estructura, es necesario considerar tres variables fundamentales: las varianzas (previamente calculadas en los dos casos mencionados), las integrales y los valores para  $q$ . En consecuencia, para llevar a cabo el ajuste, se incorporan las referencias en los ejes  $x$  e  $y$ , las varianzas, y se procede al cálculo de las demás variables. Se adjuntan las variables del experimento que serán fundamentales para el cálculo de las funciones necesarias en etapas posteriores.

```
%% Parametros del experimento
% En el DMD
% Parametros en el plano del objeto
px_size = 20; %um, at the CMOS
px_dmd = 13.67; % um

size_E = 471; %max de ancho en px, cada posicion es 12x12
% y el espacio interior es 39 px.
d_spot = 51; % separacion entre los centros de los puntos
N      = 10; % numero de puntos

% En el plano imagen, y lo observado por la camara
MA      = 3.884; % magnificacion inversa del telescopio
esize_E = size_E*px_size*MA; % 2.5 cm en el plano
d_eff   = d_spot*px_size*MA; % 2.71mm en el plano

% Especificacion de la imagen en el sistema
pL = 84; %cm distancia entre la camara y el plano de imagen
% del telescopio invertido

f = 85; %mm la focal para la camara
D = f/1.8; %47.22 mm especificacion segun la camara
pixel_scale = 20e-6/1.085; % En radianes. aoa (angulos de arribo)
%es pixel_size/f.
```



```

sampling_freq = 1000;%Hz

% parametros supondidos de la turbulencia
lambda_incoh= 660e-9; %m luz incoherente
lambda_coh   = 637e-9; %m luz coherente
H            = 1/3;    % Exponente de kolmogorov
10           = 0.008; %m iescala interna
L0           = 0.13;   %m escala externa

% Para usar en las funciones definidas para estimar las varianzas
%entre los Leds

Fm_incoh = pi*L*lambda_incoh/10^2; %
Fm_co    = pi*L*lambda_coh/10^2;   % numero de fresnel

delta_m = 2*pi/10*d_eff; %2.12, delta min.
Delta_m = 2*pi/10*esize_E;%19.63 delta max

%% comparando

Deltax0= REFX(:,end)-REFX(:,1); Deltay0 = REFY(:,end)-REFY(:,1);
Deltax1= REFX(end,:) -REFX(1,:); Deltay1 = REFY(end,:) -REFY(1,:);
size_targeth = mean(sqrt(Deltax0.^2+Deltay0.^2),"all");
size_targetv = mean(sqrt(Deltax1.^2+Deltay1.^2),"all");
deltax0 = REFX(:,2:end)-REFX(:,1:end-1);deltay0 = REFY(:,2:end)-REFY(:,1:end-1);
deltax1 = REFX(2:end,:)-REFX(1:end-1,:);deltay1 = REFY(2:end,:)-REFY(1:end-1,:);

delta_targeth_co = mean(sqrt(deltax0.^2+deltay0.^2),"all")/2+size_targeth/18;
delta_targetv_co = mean(sqrt(deltax1.^2+deltay1.^2),"all")/2+size_targetv/18;
% solo por comparar y0=REFY(1,1);x0=REFX(1,1);
clear Delta* deltax* deltay1

heta_co = anglev-angleh;
delta_targetm2 = (delta_targetv_co^2+delta_targeth_co^2)/2;
a_co = 9*sqrt(delta_targetm2+sqrt(delta_targetm2^2-
delta_targetv_co^2*delta_targeth_co^2*sin(theta_co)^2));

clear delta_targetv_m2 angleh anglev

% Magnificacion correcta para el zoom
%ma = (px_size*MA/a_in+px_size*MA/a_co)*9*51/40;

```

```
ma = .1/(504.1676*20*10^(-6)); %magnificacion
```

```
% Valores para calcular DA4
```

```
%deltamh_in=2*pi*delta_targeth_in*ma*px_size*10^(-6)/10; %deltam horizontal
%deltamv_in=2*pi*delta_targetv_in*ma*px_size*10^(-6)/10; %deltam vertical
```

```
deltamh_co= 2*pi*delta_targeth_co*ma*px_size*10^(-6)/10; %deltam horizontal
deltamv_co=2*pi*delta_targetv_co*ma*px_size*10^(-6)/10; %deltam vertical
```

```
qlab = 10/L0;
D = 0.04722;
Rmlab = pi*D/10; %47.22
kmlab = 2*pi/10;
```

para hacer un fitteo de  $c_n^2$  primero se crean una serie de conjuntos de datos de referencia utilizando la función Sinv. Sinv calcula la varianza normaliza, es decir se obtienen valores para una matriz de 2x100, para luego utilizarlas en la estimaciones de  $c_n^2$

$$\frac{\sigma_{\text{tot}}^2(D, \mathbf{d}; \gamma, L)}{\beta_0^2} = S(D, \mathbf{d}; \gamma) \quad (3.13)$$

por lo que obtenemos 2 matrices para una serie de valores de estos, tanto paralelos y perpendicular, xydatav y xydatah; tenemos

```
% Set de datos para estimar una medida dada
```

```
% nvar=['*V' mlist(7,:) mlist(7,:) 'dT*_co*']; %cambiar segun mi workspace
rwvar = 'rwvar';
nvar = [rwvar a];
xydatah_co = cell(2,M*M);
xydatav_co = cell(2,M*M);
for k=1:100
    i = floor((k - 1) / M) + 1;
    j = mod(k - 1, M) + 1;
    [est,~,~] = Sinv(nvar, 5,i,j,1, 10); % calcula S
    [~,col] = find(est==0); % encuentra ceros
    est1 = fliplr(est(:,1:col(1)))); % set straight first part
    est2 = est(:,col(1):end);
```

```

if k==6
disp(k);
end
sz1 = size(est1)-1;sz2 = size(est2)-1;
ref_est1 = (0:sz1(2))*delta_targeth_co;
ref_est2 = (0:sz2(2))*delta_targeth_co;
est_co = [est1(:)' est2(:)'];
ref_est1 = repelem(ref_est1 ,sz1(1)+1,1);
ref_est2 = repelem(ref_est2 ,sz1(1)+1,1);
ref_co = [ref_est1(:)',ref_est2(:)'];
xydatah_co{1,k} = ref_co;
xydatah_co{2,k} = est_co;

[est,~,~] = Sinv(nvar , 5,i,j,2 , 10);
[~,col] = find(est==0); % encuntra ceros
est1 = fliplr(est(:,1:col(1))); %set straight first part
est2 = est(:,col(1):end);
sz1 = size(est1)-1;sz2 = size(est2)-1;
ref_est1 = (0:sz1(2))*delta_targetv_co;
ref_est2 = (0:sz2(2))*delta_targetv_co;
est_co = [est1(:)' est2(:)'];
ref_est1 = repelem(ref_est1 ,sz1(1)+1,1);
ref_est2 = repelem(ref_est2 ,sz1(1)+1,1);
ref_co = [ref_est1(:)',ref_est2(:)'];
xydatav_co{1,k} = ref_co;
xydatav_co{2,k} = est_co;
end

```

rwvar es una estructura calculada con anterior, donde contiene las variables necesarias para el ajuste, las referencias en x e y, las varianzas y aoa, calculamos

```

aoa = aoa_struct(centroidmat,1)+ aoa_struct(centroidmat,2);
namevar = a;
rx = 'REFX'; ry = 'REFY'; wanvar = 'itvar'; aoavar = 'aoa';
eval(['rwvar' namevar '=■struct(rx,■REFX,■ry,■REFY,■wanvar,
itvar,■aoavar,■aoa);']);

```

Finalmente, para realizar el ajuste, se emplearán las funciones de optimización proporcionadas por Matlab con el objetivo de encontrar los valores óptimos tanto para  $q$  como para  $k_p$ . Este proceso implica llevar a cabo el ajuste para distintos valores de  $q$  y  $k_p$ , posteriormente, determinar el valor óptimo. En términos más concretos, se procede a ajustar

los parámetros  $k_p$  y  $q$  de nuestra función  $S_{total}$  a un conjunto de datos observados, denominado xydatah\_co, mediante el proceso de optimización. Este enfoque busca encontrar los valores óptimos de los parámetros que mejor se ajustan a los datos experimentales, optimizando así la concordancia entre el modelo teórico y las observaciones.

```
%% Produce a fit. Definimos parametros a optimizzar

kp = optimvar('kp',1,'LowerBound',0,'UpperBound',100);
q = optimvar('q',1,'LowerBound',0,'UpperBound',1);

l0final = 10./kp; L0final = 10./q;
%%
tpath = 37; %tamano del torbulador
L = 84;
zpath = @(z)[z;( tpath+z)]/L;
%% fitteo de Cn

sols = cell(1,M*M);

for k=1:100
    ydata = xydatah_co{2,k}';
    x = xydatah_co{1,k}';

    eval([ 'fun'=@(kp,q)Stot(x,0,kp,q,1/3,1 ,
    ... ' num2str(Fm_co) ', ' num2str(deltamh_co) ...
    ', ' num2str(Rmlab) ',.0001,[1; zpath(' num2str(47) ')]); ']);
    % Optimizacion del problema
    response_co = fcn2optimexpr(fun,kp,q);
    obj = sum((response_co - ydata).^2);
    lsqproblem = optimproblem("Objective",obj);
    init0.kp = .8; init0.q = .1;
    %
    show(lsqproblem)
%
    tic ,
    [sol,fval] = solve(lsqproblem,init0);
    toc
    sols{k} = sol;
end
```

Es pertinente señalar que los códigos finales utilizados fueron suministrados por el profesor guía y posteriormente estudiados por mi parte. Estos códigos finales tienen como objetivo proporcionar valores de  $c_n^2$  para cada muestra, bajo métodos de optimización no lineal de librerías de Matlab, tal como se ejemplificó anteriormente. Es importante destacar que se contempla un total de 108 muestras para análisis, de las cuales 54 muestras corresponden a casos coherentes y otras 54 para incoherentes, respectivamente. Estos códigos permitirán realizar una evaluación exhaustiva de las propiedades en el conjunto completo de muestras, brindando así una comprensión integral del comportamiento del sistema bajo estudio.

## 4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Estudiaremos el caso V1212. A través del código, podemos calcular sus varianzas, referencias, y sus ángulos de arribo. Luego optimizamos los valores  $kp$  y  $q$ . Es importante señalar que obtenemos 100 estimaciones de valores de  $kp$  y  $q$  a través de la optimización. Esta optimización es hecha por la librería señalada anteriormente, por lo tanto nos dará valores acorde al experimento que deberían tener  $kp$  y  $q$ .

En un intento directo, eligiendo 1 valor aleatorio de los 100 para obtener resultados de la constante de estructura obtuvimos un resultado no ideal, ya que se puede observar de Fig. (4.1) que no tiene resultados esperados. Es decir, hemos obtenido una amplitud de "fuerza" de perturbación más grande para temperaturas más bajas, y menor a mayor temperatura.

Algo que es contradictorio, ya que esperaríamos que a mayor temperatura mayor fuerza de perturbación, ya que esta incide en aumentar el índice de refracción. Este primer "error" de medición se debe a elegir un valor aleatorio, ya que la optimización entrega un rango de valores para  $kp$  y  $q$  como hemos dicho anteriormente, donde estos valores tienen una variación en cercana. Es decir, el rango de variación para las medidas a 20 celcius, será cercana a la variación de 30 celcius, y así sucesivamente, la variación no es muy notoria. Por lo tanto, al elegir valores aleatorios de estas para hacer las medidas dará un resultado sesgado, ya que podríamos hasta incluso estar eligiendo los mismos valores de  $kp$  y  $q$  para diferentes medidas de temperatura. Por lo tanto, encontré oportuno hacer el promedio de estos 100 valores de  $kp$  y  $q$ . La distinción fue muy notoria como se puede ver en Fig. (4.2)

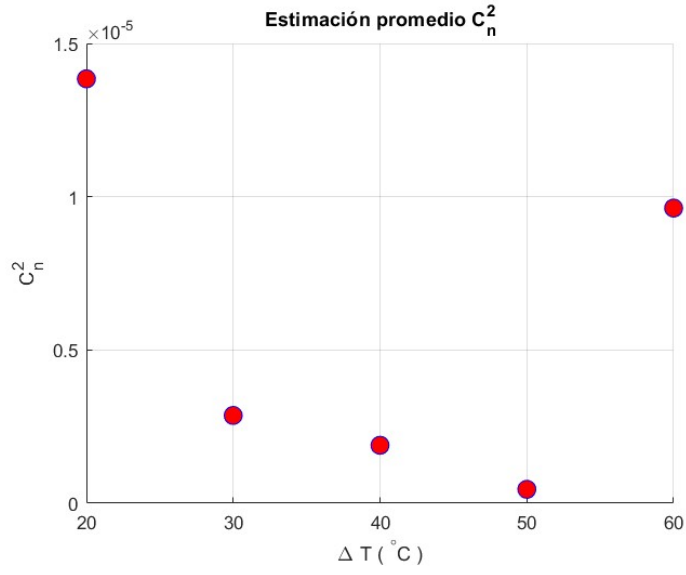


Figura 4.1:  $C_n^2$  V1212 coherente, Aleatorio Kp y Q

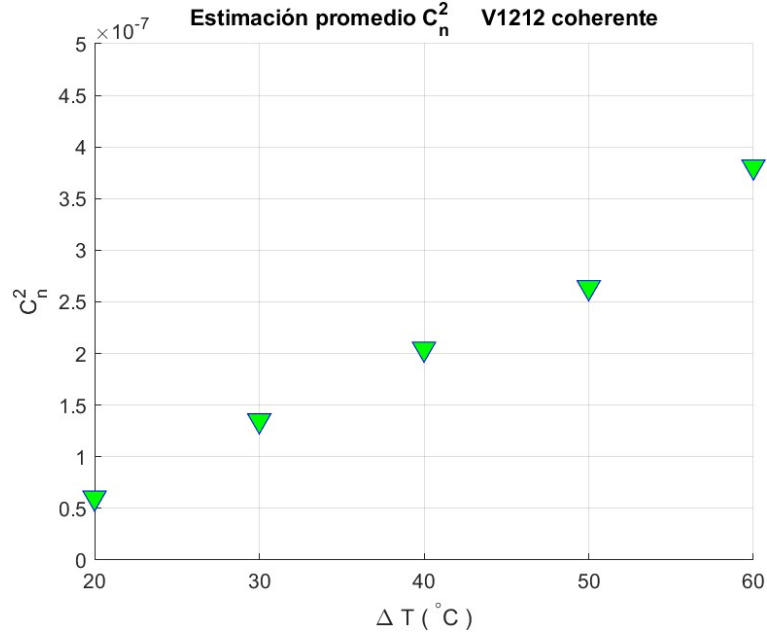


Figura 4.2:  $C_n^2$  V1212 coherente, promediado  $kp$  y  $q$

Este resultado es más oportuno para la teoría de perturbaciones, y obtenemos lo mismo para la teoría de la cascada, podemos ver resultados para la escala interna y externa, en Fig. (4.3) y Fig. (4.4) respectivamente

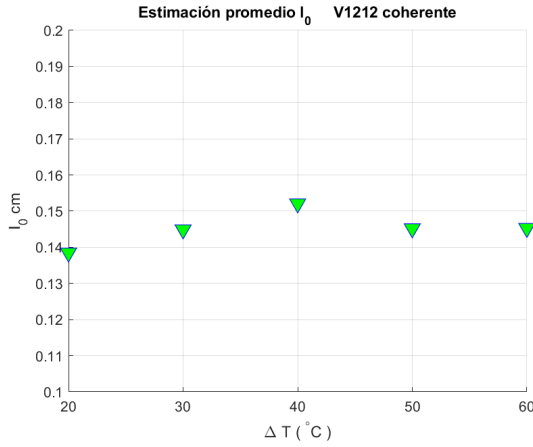


Figura 4.3: Escala interna V1212 coh

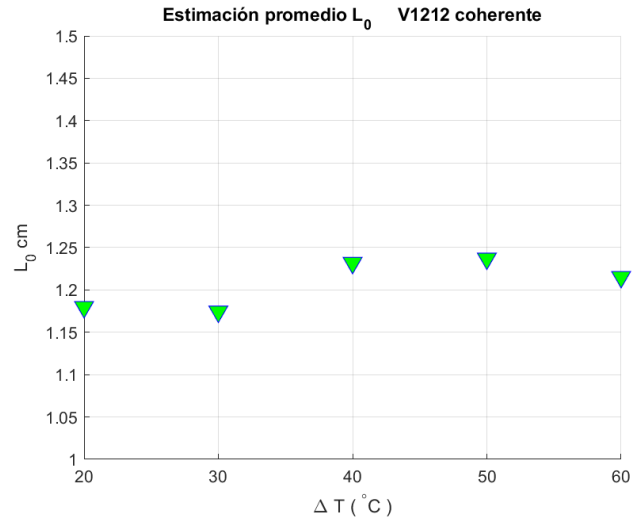


Figura 4.4: Escala externa V1212 coh

Observando todos los resultados para el caso coherente de V1212, es notorio ver una cierta linealidad para la perturbación, recordemos que estamos trabajando a primer orden de perturbación. Esto insinúa que a mayor temperatura mayor fuerza de turbulencia, mayores escalas internas y externas. En otras palabras, la perturbación que afecta a nuestro haz, aumenta linealmente respecto a la temperatura. Ahora bien, es oportuno comparar con el caso incoherente, para V1212 obtenemos

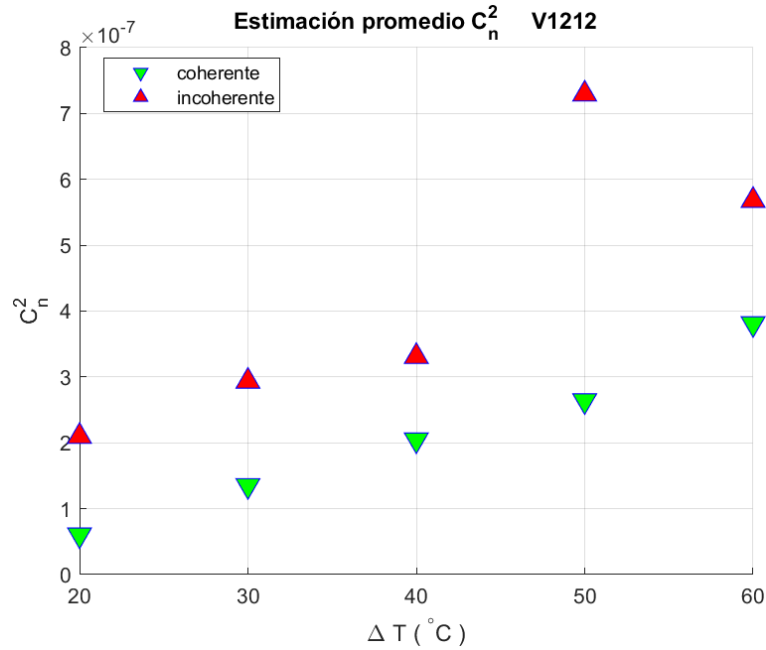


Figura 4.5: Estimación constante de estructura V1212



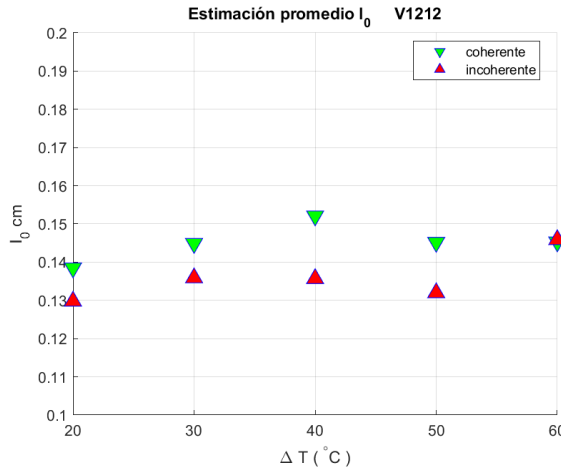


Figura 4.6: Escala interna, coh e incoh V1212

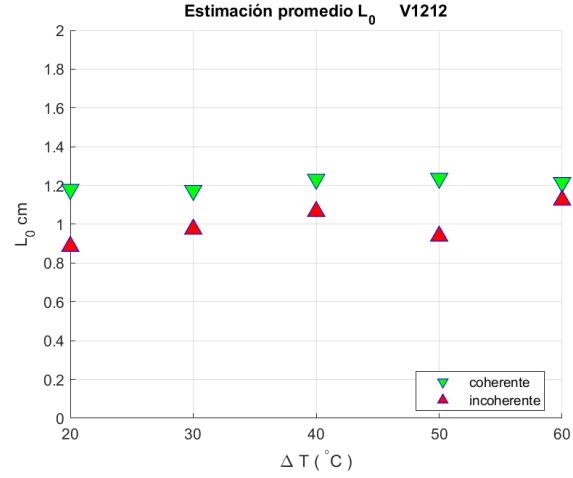


Figura 4.7: Escala externa, coh e incoh V1212

Aunque para el caso de 50 grados celcius podemos ver un un gran error para el caso incoherente podemos observar que en todos los demás resultados obtuvimos buenos resultados. Analizando en detalle la estimación de  $c_n^2$  para el caso incoherente a 50 grados celcius se postula que esto se deba a la estimación de ángulos de arribo (aoa) que ha impactado en este resultado. Podemos observar que los valores de optimización tanto para  $kp$  como  $q$  siguen una linealidad prudente, ya que estos son directamente proporcional a  $l_0$  y  $L_0$  por lo que debería verse afectado de la misma manera nuestra constante de estructura, sin embargo no fue así para este dicho caso en cuestión, En nuestra escala externa podemos observar nuevamente una incongruencia a los 50 grados celcius, sabemos que nuestra escala externa depende tanto de  $kp$  como de  $q$ , pero vemos una linealidad casi perfecta para ambos casos en nuestra escala interna, por lo tanto podemos descartar como error nuestra variable  $kp$ . Solo nos queda en duda la variable  $q$ , la cual claramente tanto en los datos obtenidos como en la gráfica se observa que es incongruente con la linealidad de los datos. Es por esto que en una primera instancia se observa que aunque la optimización sirve bastante bien en general, puede tener errores no menores. Como no podemos confirmar con solo una medición esta suposición procederemos a ver el caso V0808

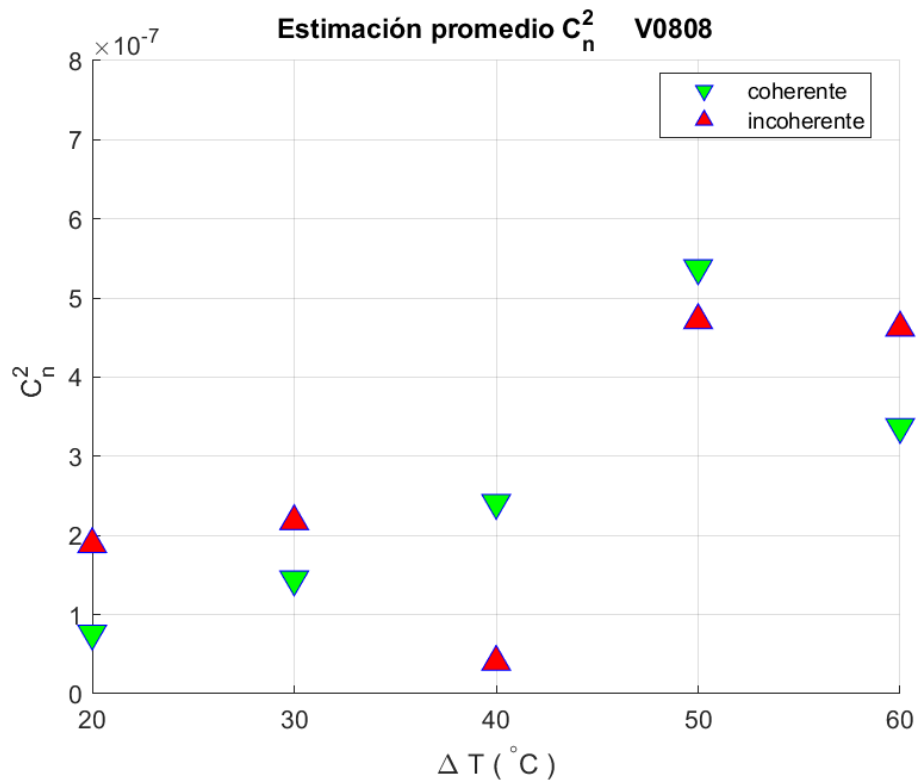


Figura 4.8:  $C_n^2$  V0808

Aunque se ve bastante bien para el caso coherente, podemos observar que se derrumba la linealidad en el caso incoherente debido a la optimización.

Esto se debe a que la optimización dio valores extremadamente grandes para las variables  $kp$  y  $q$ . Cuando en general el promedio rondaban con valores entre 6 y 8 para  $kp$ , entre 0.10 y 0.12 para  $q$ . Para este caso particular a 40 celcius la optimización ha dado un valor promedio de 12 para  $kp$  y 0.02 para  $q$ . Esto aumenta considerablemente el resultado de nuestra constante de estructura. Estos promedios bastante grandes a lo usual por aproximación lo podemos ver como resultado en nuestras escalas externas e internas

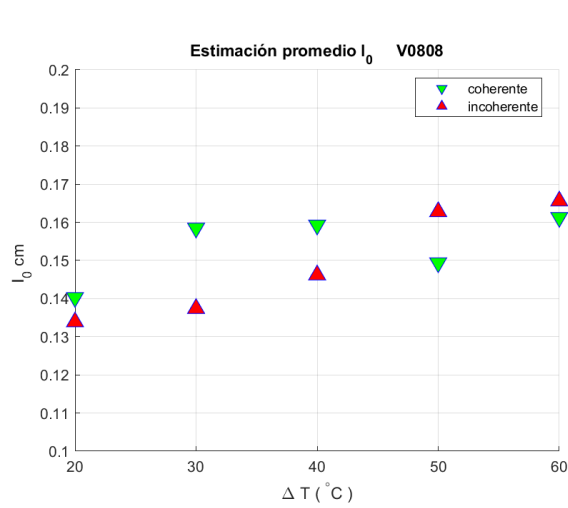


Figura 4.9: Escala interna V0808

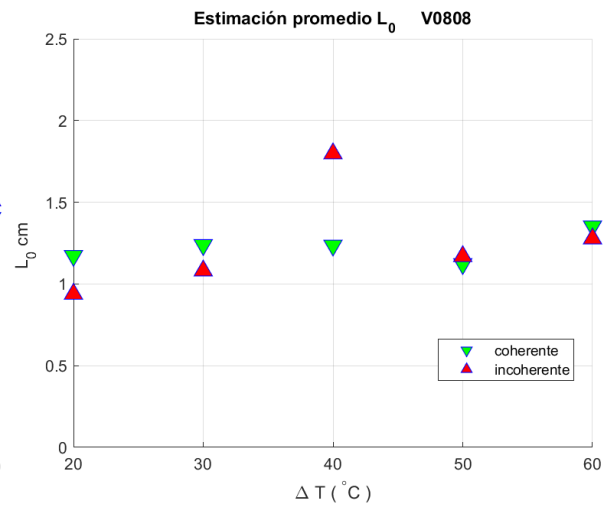


Figura 4.10: Escala externa V0808

Vemos nuevamente como la linealidad perdura a excepción del caso a 40 grados celcius, se hace notar que los valores de  $kp$  y  $q$  son incongruentes respecto a la lógica de aumentar según se aumente la temperatura.

## 5. CONCLUSIONES

En una primera aproximación, es evidente que la constante de estructura experimenta un incremento proporcional a la temperatura, lo que implica que el índice de refracción, al aumentar debido a la temperatura, induce una mayor perturbación en nuestra fase o representación espectral, tal como concluimos en nuestra hipótesis. Este fenómeno nos lleva a la observación de que tanto las escalas internas como externas también experimentan un aumento proporcional con la fuerza de perturbación  $C_n^2$ .

Por otro lado, se hace presente que la optimización de las variables no es óptima, lo contrario a como lo señalamos en nuestra hipótesis, especialmente en los casos de incoherencia. No obstante, es crucial destacar que incluso en el caso coherente, la optimización no resulta completamente satisfactoria, como se puede constatar al examinar las Figuras (4.3) y (4.4), donde algunos valores se sitúan por encima o por debajo de lo esperado.

En consecuencia, afirmamos que las variables asociadas a la constante de estructura y las escalas interna y externa experimentan un aumento acorde a lo esperado. No obstante, es imperativo abordar el desafío pendiente relacionado con la optimización. Como hemos indicado anteriormente, la estrategia actual no es la ideal. Explorar otras bibliotecas o ajustar el enfoque de optimización pueden ser vías para resolver este problema. La búsqueda de soluciones alternativas en términos de librerías o la adaptación del proceso de optimización constituyen posibles líneas de investigación para futuros estudios.

## 6. BIBLIOGRAFIA

1. Andrews, Larry & Phillips, Ronald. *Laser Beam Propagation through Random Media*. SPIE—The International Society for Optical Engineering, 2005.
2. Sasiela, Richard. *Electromagnetic Wave Propagation in Turbulence*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.
3. Gladysz, Szymon & Eisele, Christian & Barros, Rui, et al. *Estimation of turbulence strength, anisotropy, outer scale and spectral slope from an LED array*. Research-Gate, 2015.
4. Pérez, Darío & Nuñez Leandro, et al. *Synthesis of anisotropic optical turbulence at the laboratory*. Optics Letters, 2016.
5. Roggemann, Michael & Welsh, Byron. *Imaging through turbulence*. CRC Press, 1996.