PRINCIPIOS DE PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

RODOLFO ORTEGA ACOSTA

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n}$$ *Es un estadístico*

entonces es $$S_X^2 = \frac{\sum (x - \overline{x})^2}{n - 1}$$

Nota: n es el número de elementos de la muestra al azar (aleatoria)

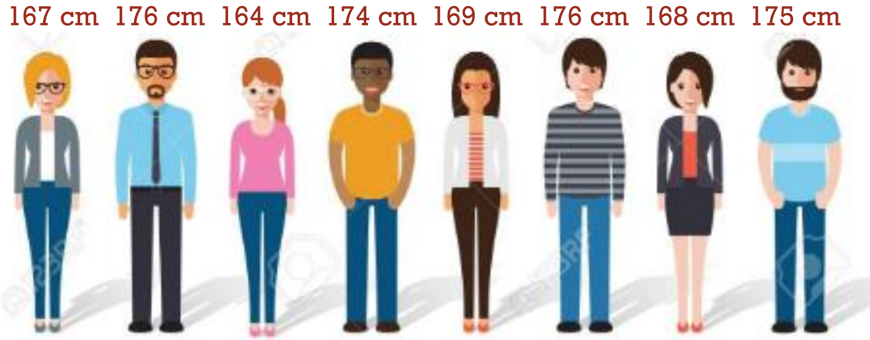
¿QUÉ ES UN ESTADÍSTICO?

- Un Estadístico es una medición de los elementos de una muestra aleatoria.

- Puesto que la única razón para tener una muestra aleatoria es inferir algo acerca de la población de la cual esta proviene, esta claro que cuando calculamos un estadístico dado, sólo hacemos esto para estimar el parámetro correspondiente de la población de donde la muestra fue obtenida.

- Como es indicado por el Teorema del límite central, el promedio de una muestra aleatoria puede ser usado para estimar el promedio de la población de la cual la muestra fue tomada.

PROMEDIO O MEDIA



$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{167\ cm + 176\ cm + 164\ cm + 174\ cm + 169\ cm + 176\ cm + 168\ cm + 175\ cm}{8}$$

$$\bar{x} = 171{,}13\ cm$$

- El promedio es uno de los varios índices de tendencia central que los estadísticos usan para indicar el punto en la escala de medición donde la población se centra.
- El promedio es la media de los resultados de la población. Numéricamente, este es igual a la suma de los resultados dividido por el número de resultados.

MEDIANA

- La mediana de una población es el punto que divide la distribución de los resultados en la mitad.

- Si la cantidad de datos es par, la mediana será el promedio de los dos datos centrales

- Para esto los datos deben ser Ordenados

mediana 171.5 cm

167 cm 176 cm 164 cm 174 cm 169 cm 176 cm 168 cm 175 cm

164	cm
167	cm
168	cm
169	cm
174	cm
175	cm
176	cm
176	cm

167 cm 176 cm 164 cm 174 cm 169 cm 176 cm 168 cm 175 cm

MODA

164cm
167cm
168cm
169cm
174cm
175cm
176cm
176cm

- La moda es el dato más repetido, el valor de la variable con mayor frecuencia absoluta
- Estos son los resultados en la población que ocurren más frecuentemente.
- Si hay dos (o más) resultados diferentes que ocurren con frecuencia igual y esa frecuencia es más alta que la frecuencia de cualquier otro resultado, la población se describe como multi-modal.
- Para esto los datos deben ser Ordenados

Moda 176 cm

FRECUENCIA ESTADÍSTICA

- En estadística la frecuencia es la cantidad de veces que se repite un valor dentro de una serie de datos, por ejemplo si tenemos la tabla anterior de resistencia, la frecuencia del valor 1 001 es de tres (3) ya que aparece tres veces en la tabla.

- De esta manera se puede representar una tabla de datos sin necesidad de escribir todos los datos sino las veces que se repite dicho dato por ejemplo reescribamos la tabla anterior utilizando las frecuencias y los valores en orden ascendente para darle orden:

RANGO ESTADÍSTICO

164	cm
167	cm
168	cm
169	cm
174	cm
175	cm
176	cm
176	cm

- Es el intervalo entre el valor mínimo y el valor máximo (se puede calcular como la resta del valor máximo menos el valor mínimo de una serie de datos). Da una idea de la dispersión de los datos.

RANGO ESTADÍSTICO =

176 cm – 164 cm = 10 cm

VARIANZA

- La varianza es uno de los varios índices de variabilidad que usan los estadísticos para caracterizar la dispersión entre las mediciones de una muestra o de una población dada.

- Calcular la varianza, es necesariamente calcular primero el promedio de los resultados, luego midiendo la cantidad de cada desviación de cada resultado al promedio y luego elevando al cuadrado la desviación (multiplicándolo por sí misma).
- Se puede determinar la varianza de una población o la varianza de una muestra tomada de dicha población, la diferencia radica en que si se realiza el cálculo con toda la población la ecuación utilizada es una y si solo se toma una muestra tal como ocurre en medición en donde la población no puede ser limitada (tiende a infinito).

5.3.3.2.1 Varianza de una población σ_n^2:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

Donde:

n: cantidad de datos de la población
Xi: cada uno de los datos
X barra: el promedio de los datos

5.3.3.2.2 Varianza de una Muestra:

$$\sigma_{n\text{-}1}^2 = \frac{1}{n\text{-}1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

Donde:

n: cantidad de datos de la muestra
Xi: cada uno de los datos
X barra: el promedio de los datos

$$\sigma_{n-1}^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(167-171.13)^2 + (176-171.13)^2 + (164-171.13)^2 + (174-171.13)^2 + (169-171.13)^2 + (176-171.13)^2 + (168-171.13)^2 + (175\ -171.13)^2}{8-1}$$

$$\sigma_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

$$\sigma_{n-1}^2 = 21.84\ cm^2$$

164	cm
167	cm
168	cm
169	cm
174	cm
175	cm
176	cm
176	cm

VARIANZA

DESVIACIÓN ESTÁNDAR

- Al igual que la varianza se puede determinar la desviación estándar de la población o de la muestra. La desviación estándar viene siendo la raíz cuadrada de la varianza respectiva.
- Para determinar la desviación estándar de una muestra, tal como se usa en metrología se determina la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza de la muestra:

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$\sigma_{n-1} = 4{,}67\ cm$$

164	cm
167	cm
168	cm
169	cm
174	cm
175	cm
176	cm
176	cm

GRADOS DE LIBERTAD

164	cm
167	cm
168	cm
169	cm
174	cm
175	cm
176	cm
176	cm

- Los estadísticos usan el término "grados de libertad" para describir el número de valores en el cálculo final de un estadístico que están libres para variar. Se calcula como el número de observaciones (n) menos uno (en caso de la varianza)

- Por ejemplo: en el caso de un promedio si se dan dos observaciones una de ellas podrá variar respecto a la otra. O si se dan tres observaciones dos de ellas podrán variar respecto a la tercera, y así sucesivamente.

$$\vartheta_{eff} = n - 1 = 7$$

- Promedio
- Mediana
- Moda
- Rango
- Varianza
- Desviación estándar
- Tamaño de la muestra
- Grados de Libertad

Valor Medido	Frecuencia
5.4 g	1
5.5 g	2
5.6 g	1
5.7 g	1

EJERCICIO

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Es una función que asigna a cada suceso definido sobre la variable la probabilidad de que dicho suceso ocurra.

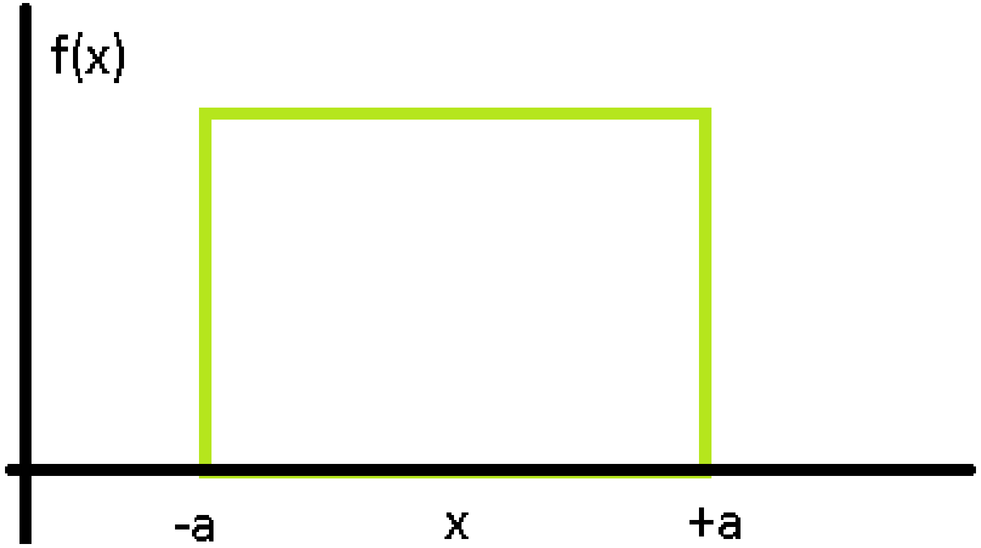
La distribución de probabilidad f(x) se define sobre el conjunto de todos y cada uno de los sucesos en el rango de valores de la variable aleatoria. También puede decirse que tiene una relación estrecha con las distribuciones de frecuencia. De hecho, una distribución de probabilidades puede comprenderse como una frecuencia teórica, ya que describe cómo se espera que varíen los resultados.

- Distribución Rectangular: denominada también distribución uniforme continua en donde para cada miembro de la familia en un intervalo son igualmente probables. El dominio está definido por dos parámetros,

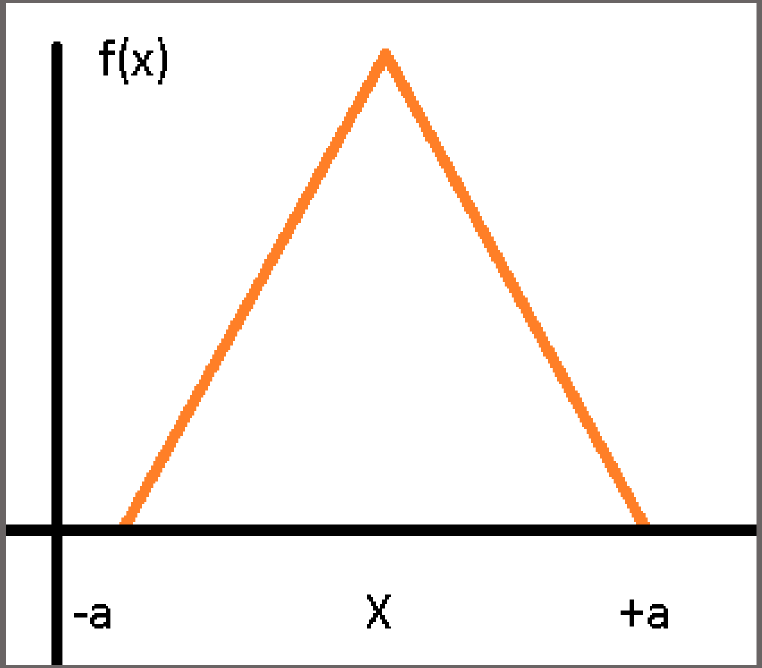
  -a y +a,

  que son sus valores mínimo y máximo.

Se representa mediante la gráfica de densidad de probabilidad:

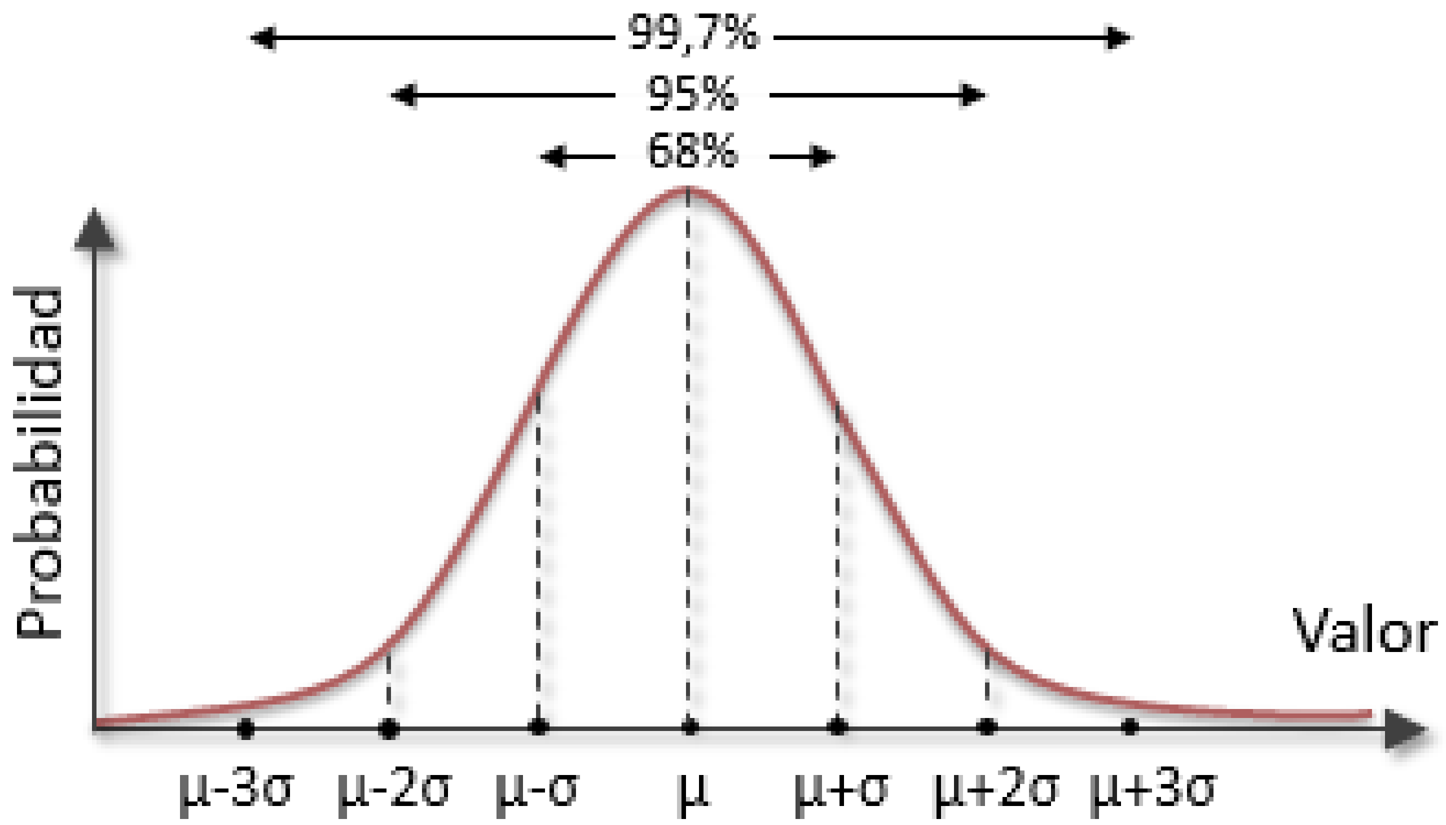


DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD



DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- Distribución Triangular: es la distribución de probabilidad continua que tiene un valor mínimo -a, un valor máximo +a y una moda X, de modo que la función de densidad de probabilidad es cero para los extremos (-a y +a), y afín entre cada extremo y la moda, por lo que su gráfico es un triángulo.

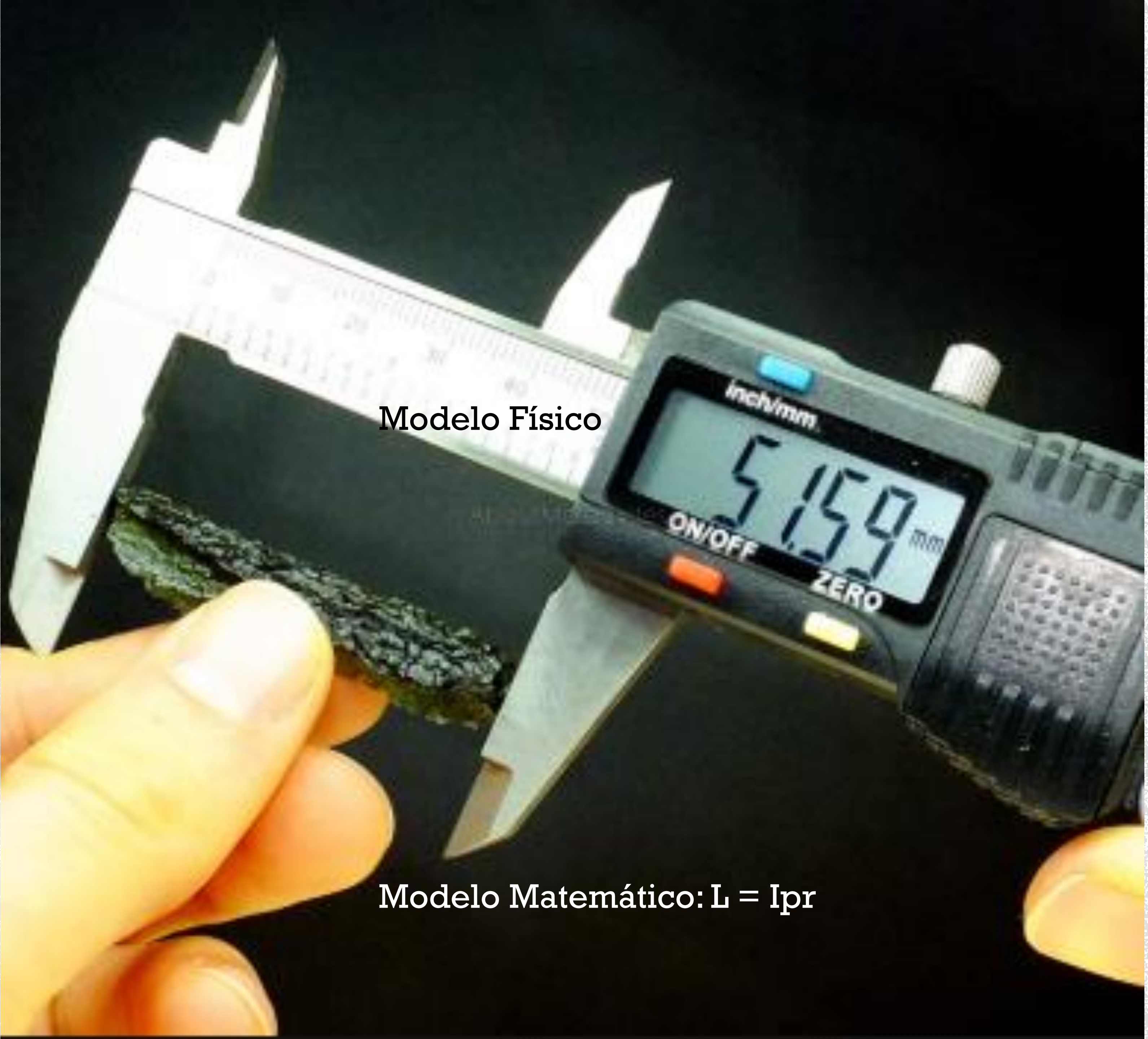


DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- Distribución Normal: es una distribución de probabilidad de variable continua cuya gráfica de su función de densidad tiene una forma acampanada y es simétrica respecto a un determinado parámetro estadístico. Es la distribución mas frecuente en estadística se le llama también distribución gaussiana

PASOS PARA LA EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE

1. Establecer el modelo Físico
2. Establecer el modelo Matemático
3. Identificar componentes de Incertidumbre
4. Robustecer el Modelo Matemático
5. Cuantificar las componentes
6. Estandarizar las Componentes
7. Hallar la incertidumbre estándar combinada
8. Expandir la Incertidumbre



INCERTIDUMBRE DE LA MEDICIÓN

- Modelo Físico: Montaje para realizar las mediciones
- Modelo Matemático: representación mediante una ecuación que relacione el mensurando con la(s) entrada(s)

FUENTES DE INCERTIDUMBRE

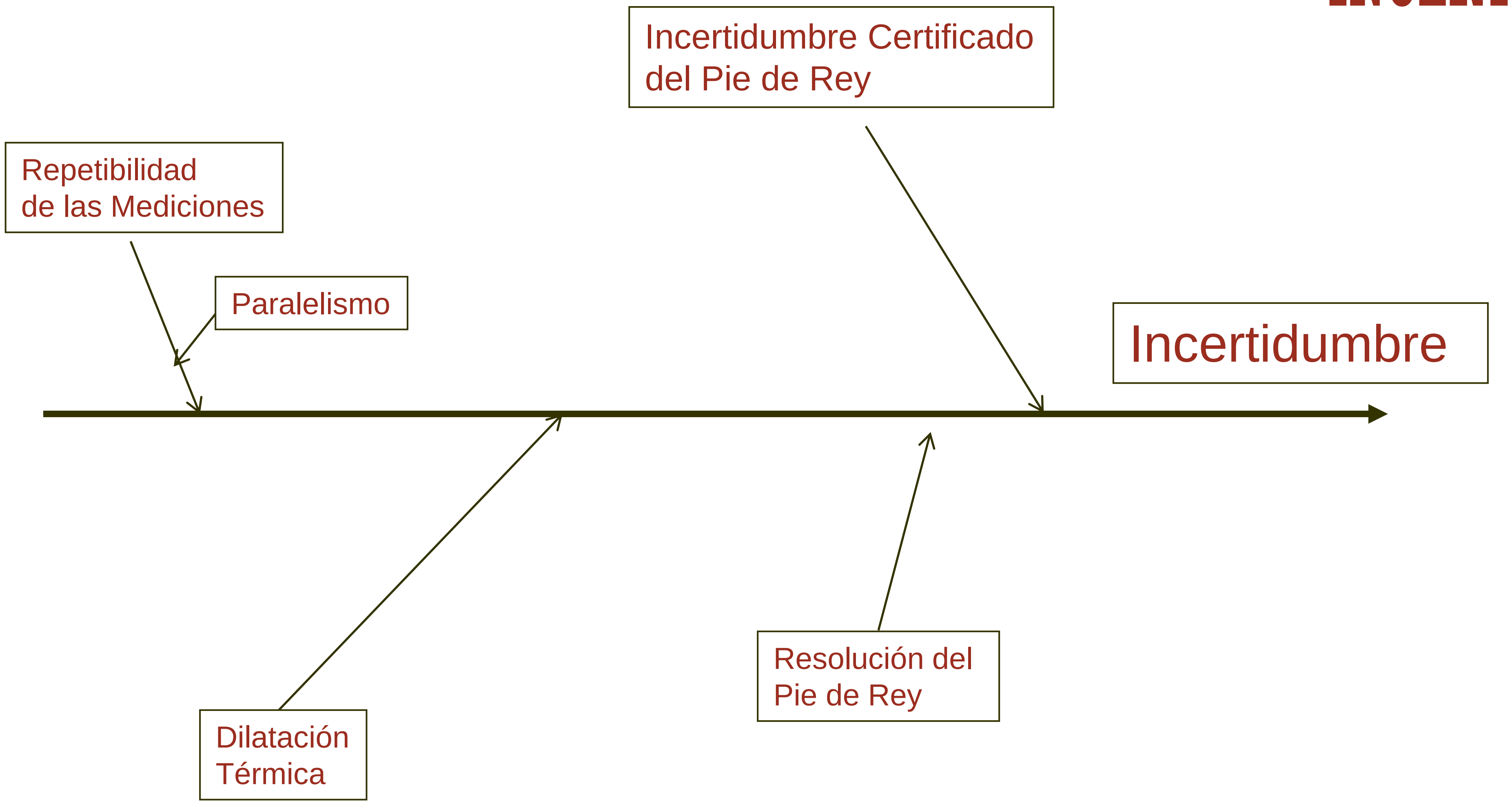


DIAGRAMA DE ISHIKAWA

INCERTIDUMBRE DE LA MEDICIÓN

Modelo Matemático: L = Ipr

Modelo Matemático robustecido

$$L = I_{pr} + C_{cpr} + C_{\Delta\alpha} + C_{pr}$$

Con:

I_{pr} : Indicación del Pie de Rey

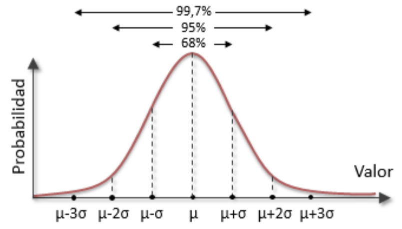
C_{cpr} : Corrección por certificado del pie de rey

$C_{\Delta\alpha}$: Corrección por Dilatación térmica del objeto

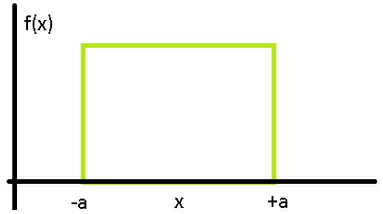
C_{pr} : Corrección por paralelismo de la pieza

- Modelo Matemático Robustecido: Modelo matemático incluyendo los factores que afectan esa medición y pueden ser cuantificados.

CUANTIFICACIÓN DE LAS COMPONENTES



Incertidumbre dada en certificados ó EMP especificados y previamente verificados



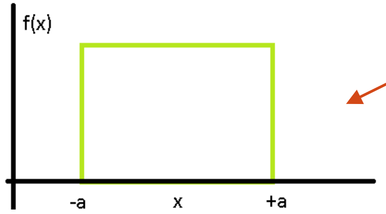
Cuantificación

Desviación Estándar de mediciones repetidas

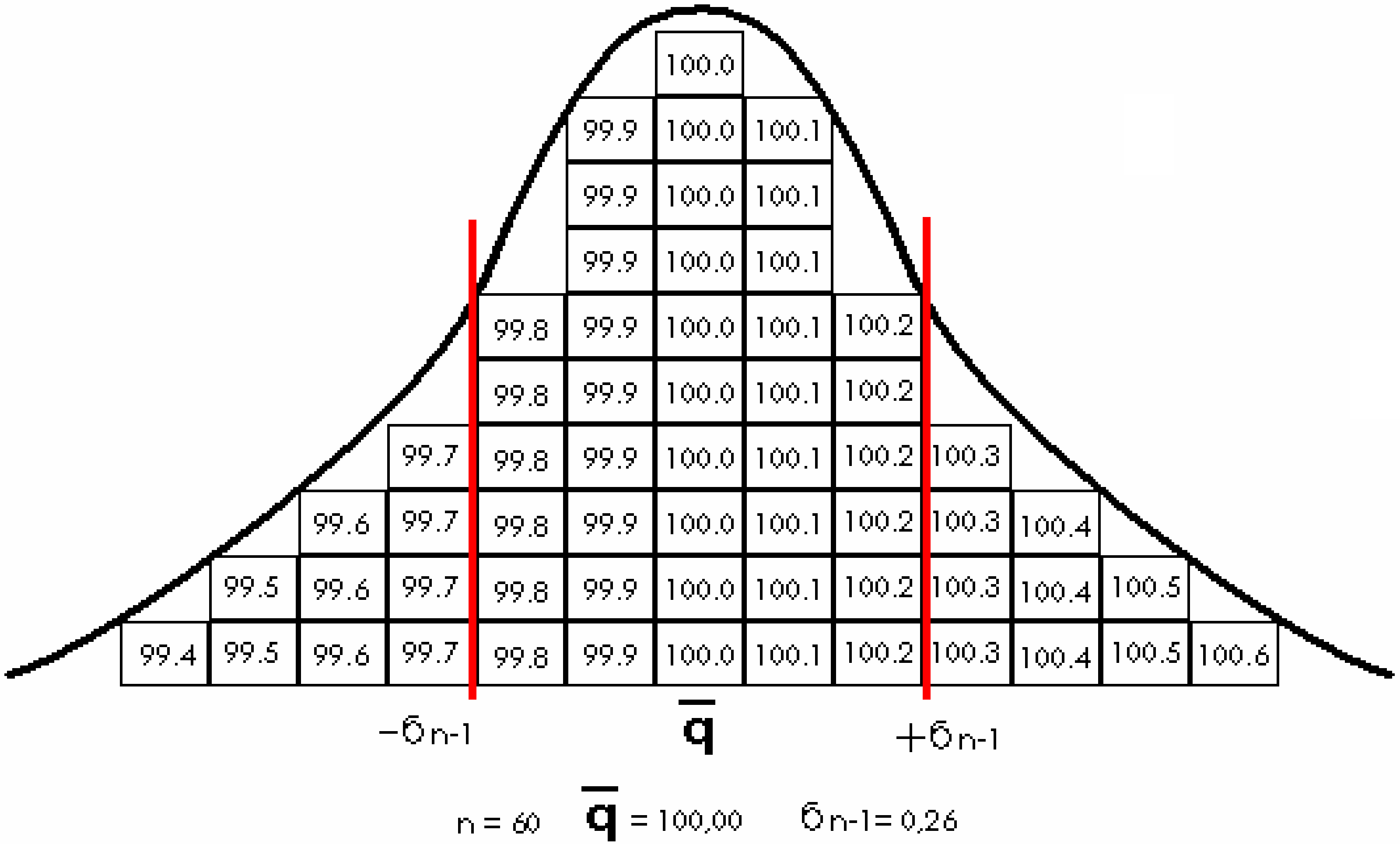
Resolución de la instrumentación involucrada

$$\sigma_{n-1} = s(q) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{j=1}^{n}(q_j-\overline{q})^2}$$

Otros especificados por el método



REPETICIÓN DE MEDICIONES



ESTANDARIZAR LAS COMPONENTE

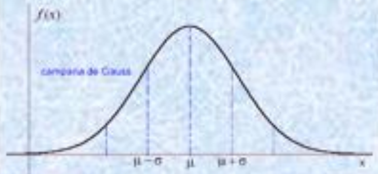
$$u(x_i) = \frac{U}{k}$$

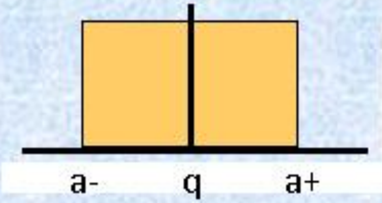
Debido a que los valores de las contribuciones de la incertidumbre cubren un grupo de valores probables dentro de un intervalo, se requiere que cada componente sea evaluado de manera probabilística

Tipos de Distribución mas usados

Distribución Normal

Distribución Rectangular

TIPO DE DISTRIBUCION	ESTIMACION DE LA MEDIA	INCERTIDUMBRE ESTANDAR
	$\frac{\sum x_i}{n}$	$\frac{s}{\sqrt{n}}$

TIPO DE DISTRIBUCION	ESTIMACION DE LA MEDIA	INCERTIDUMBRE ESTANDAR
	$q=\frac{a^- + a^+}{2}$	$\frac{a^+ - a^-}{2\sqrt{3}}$

7.6 EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE DE MEDICIÓN (TIPOS DE INCERTIDUMBRE)

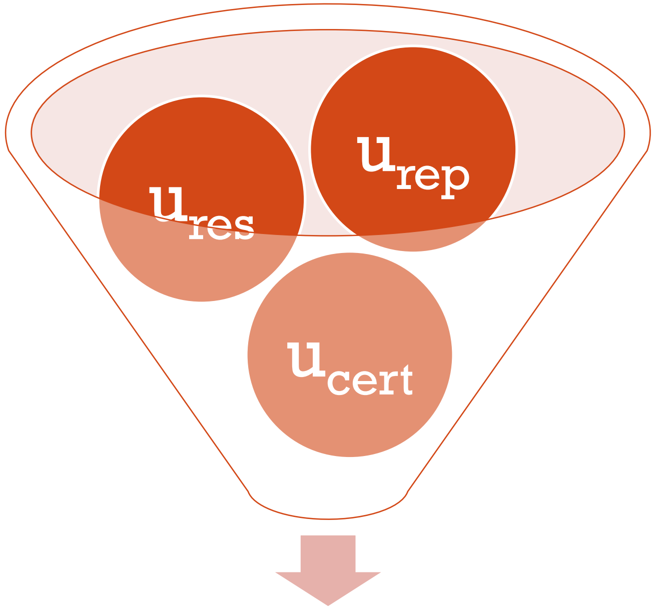
Incertidumbre Tipo A

- Es la incertidumbre obtenida exclusivamente por medios estadísticos, la mejor estimación es la desviación estándar.

Incertidumbre Tipo B

- Es la incertidumbre obtenida por medios diferentes a los estadísticos, tales como resolución del equipo, certificados de calibración, datos del fabricante, tablas, pruebas anteriores.

7.6 EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE DE MEDICIÓN (COMBINACIÓN Y REPORTE)



Incertidumbre estándar combinada (u_c)

$$u_c^2 = u_{res}^2 + u_{rep}^2 + u_{cert}^2 + \ldots$$

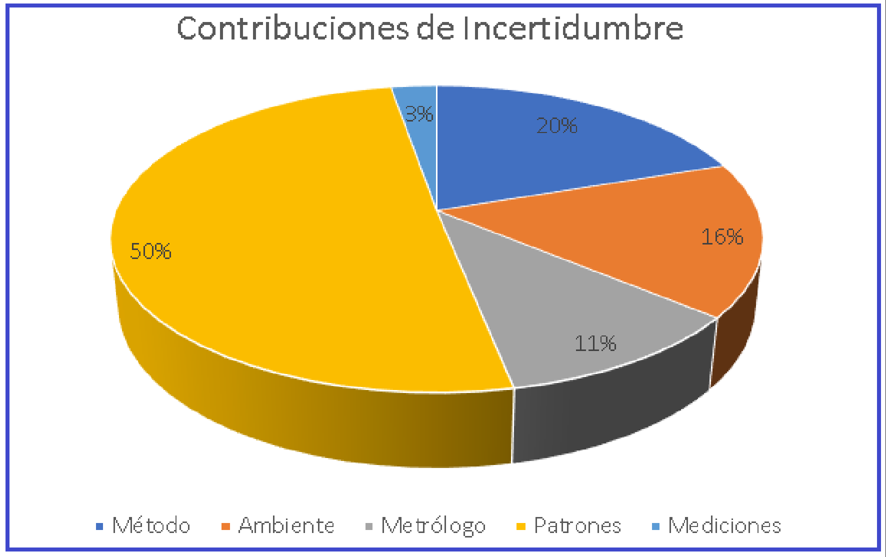
Nota: Cada uno de los componentes de incertidumbre está multiplicado por 1 siendo este el coeficiente de sensibilidad. Dependiendo del modelo matemático este coeficiente puede cambiar.

Finalmente se reporta la incertidumbre expandida (Ue) que es la incertidumbre estándar combinada multiplicada por un factor de cobertura (k) que es un valor igual o cercano a 2,0

$$Ue = u_c * k$$

7.6 EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE DE MEDICIÓN (PESO DE LAS CONTRIBUCIONES)

- Se deben tener en cuenta todas las contribuciones que son significativas, incluidas aquellas que surgen del muestreo, utilizando los métodos apropiados de análisis.



INCERTIDUMBRES ESTÁNDAR COMBINADA

- El resultado de la combinación de las contribuciones de todas las fuentes es la incertidumbre estándar combinada uc(y).

- La contribución ui(y) de cada fuente a la incertidumbre combinada depende de la incertidumbre estándar u(xi) de la propia fuente y del impacto de la fuente sobre el mensurando. Es posible encontrar que una pequeña variación de alguna de las magnitudes de influencia tenga un impacto importante en el mensurando, y viceversa.

$$u_c(y) = \sqrt{u_1{}^2(y) + u_2{}^2(y) + \ldots\ldots + u_n{}^2(y)}$$

INCERTIDUMBRE EXPANDIDA

- La incertidumbre estándar combinada representa un intervalo de cobertura del 68 % aproximadamente, por lo tanto se debe ampliar por un factor que comúnmente es de 2 para lograr un intervalo de cobertura de aproximadamente el 95 %

$$U = k \cdot u_c$$

REPORTE DE RESULTADOS

- Se expresa el resultado de medida que puede ser el error, la corrección o la lectura del instrumento
- Adicionalmente la incertidumbre expandida U
- El factor de cobertura, ejemplo K=2
- Y el intervalo de cobertura ejemplo 95 %