Differenzialquotient

7. August 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die *Sekante*, die eine Kurve $f(x)$ an zwei vorgegebenen Stellen x_1, x_2 schneidet, ist die Gerade

$$g(x) := f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1). \tag{1}$$

Als *Tangente* an der Stelle x_1 wird diejenige Gerade bezeichnet, die sich als Grenzgerade bei Annäherung von x_2 an x_1 ergibt. Im Rahmen der Einleitung wollen wir uns mit dieser etwas vagen Andeutung und dem folgenden Beispiel zufrieden geben. In Abschnitt 2 gehen wir dann näher darauf ein, wie die Annäherung von x_2 an x_1 gemeint ist.

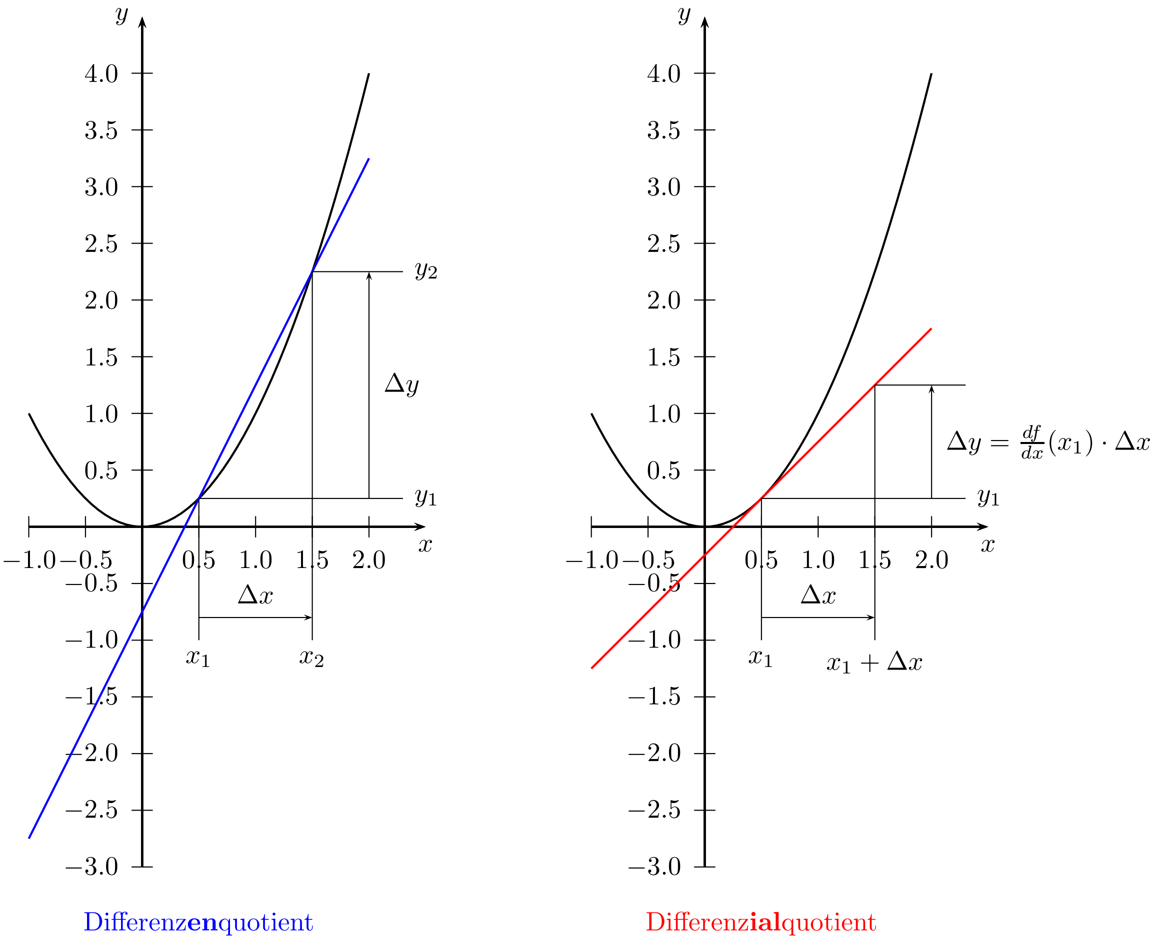


Abbildung 1: Differenzenquotient als Anstieg der Sekanten und Differenzialquotient als Anstieg der Tangenten

In Abbildung 1 ist zweimal die quadratische Funktion

$$y = f(x) := x^2$$

dargestellt. Die Sekante, die den Graph von f an den Stellen $x_1 = 0.5$ und $x_2 = 1.5$ schneidet, ist blau eingezeichnet und rot die Tangente an der Stelle x_1.

Der Anstieg der Sekante ergibt sich aus dem Differenzenquotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Lässt man die Differenz $\Delta x = x_2 - x_1$ betragsmäßig immer kleiner werden, nähert sich der Differenzenquotient immer mehr dem Anstieg der Tangenten, der als *Differenzialquotient* $\frac{df}{dx}(x_1)$ an der Stelle x_1 bezeichnet wird.

Gleichungen mit Differenzialquotienten heißen *Differenzialgleichungen*.

Interpretiert man die x-Achse als Zeit und die y-Achse als Weg, so ist der Differenzenquotient $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall von x_1 bis x_2 und der Differenzialquotient $\frac{df}{dx}(x_1)$ ist die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt x_1.

Fast alle physikalischen Erscheinungen lassen sich durch Differenzialgleichungen beschreiben. In den folgenden Unterabschnitten wollen wir uns einige wenige Beispiele anschauen.

1.1 Mechanik

Mit der Federkonstante k und der entspannten Länge l einer Feder ergibt sich die Federkraft aus der Gleichung

$$F(x) = k(l - x).$$

Die Beschleunigung $a(t)$ eines Körpers mit der Masse m zur Zeit t ergibt sich mit der auf den Körper momentan einwirkenden Kraft $F(t)$ aus der Gleichung

$$m \cdot a(t) = F(t).$$

Die Beschleunigung ist dabei als momentane Änderung der Geschwindigkeit $v(t)$, also als Differenzialquotient

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t)$$

zu interpretieren und die Geschwindigkeit ist die momentane Änderung

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$$

des Ortes $x(t)$. So ergibt sich für die Kombination des Körpers mit der Feder das Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{dv}{dt}(t) &= k(l - x(t)), \\ \frac{dx}{dt}(t) &= v(t). \end{aligned}$$

1.2 Thermodynamik

Wir betrachten eine sehr lange Metallstange die wir mit einer Ortsvariable x koordinatisieren. Um das Beispiel einfach zu halten interessieren wir uns erst einmal nicht für die Enden der Stange und nehmen an, dass x von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft.

Die Stange habe eine von der Koordinate x unabhängige Querschnittsfläche A, eine Dichte ρ und eine Wärmekapazität c.

Wir nehmen an, dass zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ der Temperaturverlauf $T_0(x)$ gegeben ist und interessieren uns zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ für den Temperaturverlauf $T(x, t)$ an allen Stellen x der Stange.

Der *Wärmestrom* $\dot{q}(x, t)$ ist die Wärme, die pro Zeiteinheit durch die Querschnittsfläche A an der Stelle x in positiver x-Richtung strömt.

Die Wärme fließt immer von Punkten höherer Temperatur zu Punkten niedrigerer Temperatur. Je höher die Temperaturdifferenz ist, desto größer ist der Wärmestrom.

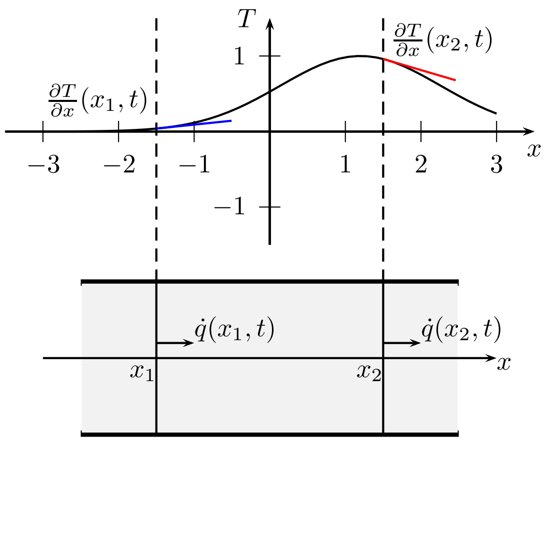


Abbildung 2: Wärmeleitung in einer unendlich langen Metallstange; Unten: Ausschnitt der Metallstange; Oben: Temperaturverlauf entlang des Ausschnitts zusammen mit Tangentenausschnitten für den Temperaturanstieg $\frac{\partial T}{\partial x}(x, t)$ an den Stellen $x = x_1$ und $x = x_2$

Physikalische Messungen zeigen, dass der Wärmestrom direkt proportional zum Temperaturgefälle $-\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)$ ist. Der Differenzialquotient mit dem geschwungenen ∂ heißt *partielle Ableitung* und bedeutet, dass alle Größen, nach denen nicht differenziert wird, während des Differenzierens konstant zu halten sind. Die Proportionalitätskonstante k ist nur vom Material und von der Querschnittsfläche abhängig. Wir erhalten also für den Wärmefluss die Gleichung

$$\dot{q}(x,t) = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(x,t). \tag{2}$$

Betrachten wir ein kurzes Stück der Stange, das von x_1 bis x_2 geht (mit $x_1 < x_2$, siehe Abbildung 2). Die Länge dieses Stücks ist $\Delta x := x_2 - x_1$.

Für eine Erhöhung der Temperatur $\bar{T}(x_1, x_2, t)$ des Stückchens um $\Delta\bar{T}$ wird die Wärmemenge

$$\Delta Q = \underbrace{A \cdot \Delta x}_{\text{Volumen}} \cdot \rho \cdot c \cdot \Delta\bar{T}(x_1, x_2, t)$$

benötigt. Wie in Abbildung 2 ersichtlich ist, fließt der Wärmestrom $\dot{q}(x_1,t)$ in den Abschnitt $[x_1, x_2]$ hinein, während $\dot{q}(x_2,t)$ aus dem Abschnitt herausfließt. Für eine über das Stückchen gemittelte momentane Temperaturänderung $\frac{\partial\bar{T}}{\partial t}(x_1,x_2,t)$ ist ein Wärmestrom

$$\dot{q}(x_1,t) - \dot{q}(x_2,t) = A \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot c \cdot \frac{\partial\bar{T}}{\partial t}(x_1,x_2,t)$$

erforderlich. Division durch Δx und Berücksichtigung von $x_2 = x_1 + \Delta x$ liefert

$$-\frac{\dot{q}(x_1+\Delta x,t) - \dot{q}(x_1,t)}{\Delta x} = A \cdot \rho \cdot c \cdot \frac{\partial\bar{T}}{\partial t}(x_1,x_2,t).$$

Auf der linken Seite taucht der Differenzenquotient des Wärmeflusses bzgl. x auf. Lassen wir noch Δx gegen null streben, so erhalten wir

$$-\frac{\partial\dot{q}}{\partial x}(x_1,t) = A \cdot \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t}(x_1,t). \tag{3}$$

Dabei haben wir berücksichtigt, dass die über das Intervall $[x_1, x_2]$ gemittelte Temperatur $\bar{T}(x_1,x_2,t)$ gegen die Temperatur $T(x_1,t)$ an der Stelle x_1 strebt, wenn x_2 gegen x_1 strebt.

Da wir in der Formel nicht mehr zwischen den zwei Koordinaten x_1, x_2 unterscheiden müssen (x_2 strebt ja gegen x_1), können wir auch einfach wieder x schreiben und die zwei Gleichungen (2) und (3) zum folgenden System zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \dot{q}(x,t) &= -k\frac{\partial T}{\partial x}(x,t), \\ -\frac{\partial\dot{q}}{\partial x}(x,t) &= A \cdot \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t}(x,t). \end{aligned}$$

Dieses (partielle) Differenzialgleichungssystem beschreibt die Wärmeleitung in der Metallstange. Um dir noch einen Anfasser für eine eventuelle Literaturrecherche zu geben sei hier ohne weitere Erläuterung erwähnt, dass die zwei partiellen Differenzialgleichungen oft zur *Wärmeleitungsgleichung* $a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial T}{\partial t}(x,t)$ mit $a = \frac{k}{A\rho c}$ zusammengefasst werden.

1.3 Elektrotechnik

Die Spannung U über einem Kondensator ist proportional zu der auf ihm gespeicherten Ladung Q. Der Proportionalitätsfaktor ist die Kapazität C und die Gleichung für die Spannung am Kondensator lautet

$$C \cdot U = Q \tag{4}$$

Die momentane Erhöhung der Ladung $\frac{dQ}{dt}(t)$ auf dem Kondensator ist gleich dem Ladungsträgerzufluss, also dem Strom $I(t)$, der am positiven Anschluss in den Kondensator hineinfließt:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}(t) \tag{5}$$

In Abschnitt 3.5 sehen wir, dass konstante Linearfaktoren bei der Differenzation einfach herausgezogen werden können. So wird aus (4) die Gleichung

$$C \cdot \frac{dU}{dt}(t) = \frac{dQ}{dt}(t)$$

und mit (5)

$$C \cdot \frac{dU}{dt}(t) = I(t). \tag{6}$$

Betrachten wir nun den Stromkreis in Abbildung 3 mit einer Spannungsquelle B mit Quellspannung U_B, z.B. einer Batterie, einemWiderstand mit Widerstandswert R und einem Kondensator mit Kapazität C.

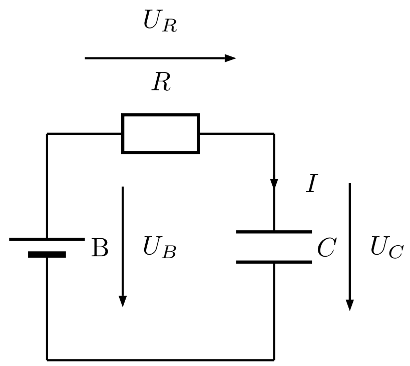


Abbildung 3: Stromkreis aus Spannungsquelle, Widerstand und Kondensator

Das Kirchhoffsche Stromgesetz gibt vor, dass durch alle drei Bauelemente der gleiche Strom, nämlich I fließt. Aus dem Kirchhoffschen Spannungsgesetz folgt die Maschengleichung

$$0 = -U_B + U_R(t) + U_C(t)$$

Mit dem Ohmschen Gesetz $U_R = R \cdot I$ für den Widerstand erhält man daraus die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= -U_B + R \cdot I(t) + U_C(t) \\ I(t) &= \frac{U_B - U_C(t)}{R} \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Gleichung in die Strom-Spannungsrelation (6) für den Kondensator liefert

$$\begin{aligned} C\frac{dU_C}{dt}(t) &= \frac{U_B - U_C(t)}{R} \\ \tau\frac{dU_C}{dt}(t) &= U_B - U_C(t) \end{aligned} \tag{7}$$

mit der *Zeitkonstante* $\tau := RC$. Die letzte Gleichung ist eine Differenzialgleichung für $U_C(t)$. Bei ihr hängt der Anstieg $\frac{dU_C}{dt}(t)$ vom Momentanwert $U_C(t)$ ab. Je weiter sich $U_C(t)$ dem Endwert U_B nähert, desto kleiner wird der Anstieg (siehe Abbildung 4).

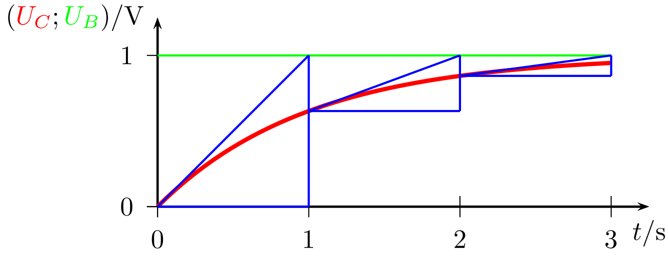


Abbildung 4: Zeitverlauf von $U_C(t)$ (bei $\tau = 1\mathrm{s}$ und $U_B = 1\mathrm{V}$); In jedem Punkt von U_C ist der Anstieg der Kurve so groß wie der Abstand des Momentanwertes vom Endwert U_B. Zur Verdeutlichung sind drei Anstiegsdreiecke blau eingezeichnet.

2 Grenzwerte

2.1 Differenzialquotient als Grenzwert von Differenzenquotienten

Aus (1) kennen wir bereits die Gleichung für die Sekante, die an den Stellen x_1 und x_2 eine Kurve $f(x)$ schneidet. Der Anstieg der Sekante ist

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{8}$$

Außerdem wurde in Abschnitt 1 erwähnt, dass die Tangente die Grenzgerade bei Annäherung von x_2 an x_1 ist.

Den Anstieg $\frac{df}{dx}(x)$ der Tangente an der Stelle x_1 können wir jedoch nicht direkt aus Gleichung (8) berechnen, da für $x_2 = x_1$ der Nenner null wird.

Finden wir stattdessen eine Zahl $\frac{df}{dx}(x_1)$, der sich der Sekantenanstieg (8) annähert, wenn x_2 an x_1 heranrückt? Wie ist dabei „annähern“ zu verstehen?

Wir können den Differenzenquotienten (8) nur an Stellen x_2 ungleich x_1 auswerten und müssen deshalb bei jeder konkreten Auswertung von $\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2)$ eine absolute Abweichung $|\frac{df}{dx}(x_1) - \frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2)|$ größer Null zulassen.

Definition 1 *Wir definieren eine Zahl* $\frac{df}{dx}(x_1)$ *als* Grenzwert *von* $\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2)$ *bei Annäherung von* x_2 *an* x_1*, falls für jede (beliebig knapp über Null liegende) Fehlertoleranz* $\varepsilon > 0$ *die Abweichung* $|\frac{df}{dx}(x_1) - \frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2)|$ *nicht größer als* ε *wird, wenn wir uns auf Stellen* x_2 *ungleich* x_1 *beschränken, die einen (von* ε *abhängigen) Maximalabstand* δ *von* x_1 *haben.*

Als Beispiel ermitteln wir die Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x = x_1 := 0.5$.

Für $x_2 \neq x_1$ gilt

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 \tag{9}$$

Im Zähler kam die binomische Formel $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$ zum Einsatz. Bei der Rechnung hebt sich danach der Nenner $x_2 - x_1$ heraus. Die rechte Seite ist frei von Divisionen, problemlos an der Stelle $x_2 = x_1$ auswertbar und man erhält für sie an dieser Stelle $2x_1$.

Wir vermuten also, dass

$$\frac{df}{dx}(x_1) = 2x_1 \tag{10}$$

die Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x = x_1$ ist.

Wir prüfen ob $\frac{df}{dx}(x_1) = 2x_1$ der obigen Definition für den Grenzwert von $\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2)$ bei Annäherung von x_2 an x_1 standhält.

Wir geben uns eine beliebig knapp über Null liegende Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ vor und schauen, ob wir einen Maximalabstand $\delta > 0$ finden, so dass für alle x_2, die keinen größeren Abstand von x_1 haben, die also $|x_2 - x_1| \le \delta$ erfüllen, die Relation

$$\left| \frac{df}{dx}(x_1) - \frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2) \right| \le \varepsilon$$

erfüllt ist. Einsetzen von (9) und (10) liefert die Ungleichung

$$| \underbrace{2x_1}_{\frac{df}{dx}(x_1)} - \underbrace{(x_2 + x_1)}_{\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2)} | \le \varepsilon,$$

die nach Vereinfachung in die folgende Relation übergeht:

$$|x_1 - x_2| \le \varepsilon$$

Wie wir an dieser Ungleichung sehen, können wir im Beispiel $f(x) = x^2$ einfach den Maximalabstand $\delta = \varepsilon$ nutzen. Somit ist die Voraussetzung aus obiger Definition erfüllt und $\frac{df}{dx}(x_1) = 2x_1$ ist der Grenzwert von $\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2)$ bei Annäherung von x_2 an x_1.

In Abbildung 5 sind zur Veranschaulichung bei $f(x) = x^2$ die Grenzsekanten für die Fehlertoleranz $\varepsilon = 0.5$ eingetragen. Bei dieser Fehlertoleranz ergibt sich ein möglicher Maximalabstand $|x_2 - x_1| = 0.5$ und x_2 kann im Intervall von $x_2 = 0$ bis $x_2 = 1$ gewählt werden.

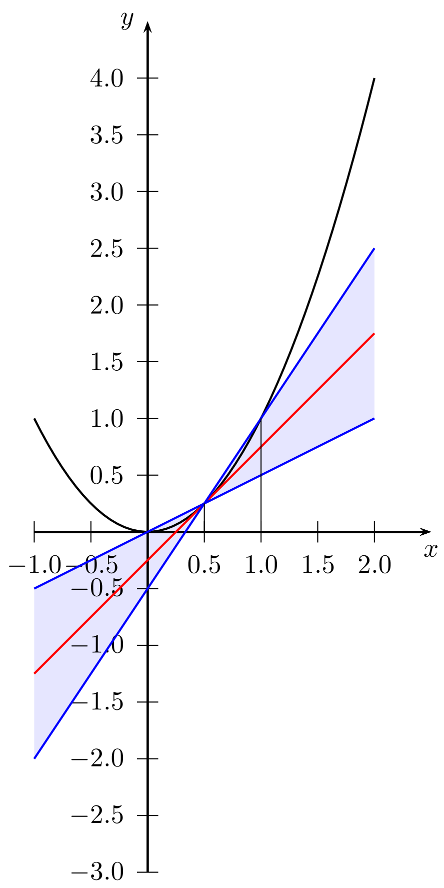


Abbildung 5: Rot: Tangente für $f(x_1) = x_1^2$ im Punkt $x_1 = 0.5$; Blau: Bereich der Sekanten mit einer Fehlertoleranz von $\varepsilon = 0.5$ für die Abweichung des Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2)$ von der Tangente $\frac{df}{dx}(x_1)$; Der Maximalabstand $|x_2 - x_1| = 0.5$ erlaubt Sekanten mit x_2 im Intervall von $x_2 = 0$ bis $x_2 = 1$.

2.2 Allgemeinerer Grenzwertbegriff

Der Grenzwertbegriff ist nicht nur auf Differenzialquotienten anwendbar, sondern auf beliebige reelle Funktionen $f(x)$.

Definition 2 *Eine reelle Funktion $f(x)$ mit einem reellen Argument x strebt bei Annäherung von x an eine Stelle X gegen einen Grenzwert F, falls es für jede positive Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ einen Maximalabstand $\delta > 0$ gibt, so dass für alle von X verschiedene Argumente x, die nicht weiter als δ von X entfernt sind, die Abweichung des Funktionswertes $f(x)$ vom Grenzwert F nicht größer als die vorgegebene Fehlerschranke ε ist, d.h., $|f(x) - F| \leq \varepsilon$ gilt.*

Als erstes Beispiel schauen wir uns den Grenzwert von $f(x) := x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ bei Annäherung von x an 0 an. Aufgrund der Division durch x ist $f(x)$ nicht an der Stelle $x = 0$ auswertbar.

Jedoch wird der Betrag von $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht größer als 1. Damit ist der Betrag von $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ durch $|x|$ beschränkt. Da $|x|$ bei Annäherung von x an 0 den Grenzwert 0 hat, erwarten wir dass bei $|f(x)|$ auch der Fall ist. Geben wir uns eine beliebig knapp über 0 liegende Fehlerschranke ε vor und untersuchen, für welchen Maximalabstand δ wir absichern können, dass die Abweichung $|f(x)|$ nicht größer als ε wird.

$$\begin{aligned}
|f(x) - F| &= \left| x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \right| \\
&\leq |x| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \\
&\leq |x|
\end{aligned}$$

Wir können also die maximale Abweichung δ für $|x|$ gleich der vorgegebenen Fehlerschranke ε wählen, damit diese nicht von $\left|x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ überschritten wird. Im linken Teil der Abbildung 6 ist als Beispiel die Fehlerschranke $\varepsilon = 0.5$ vorgegeben und gezeigt, dass diese Fehlerschranke für x-Werte im Intervall von -0.5 bis 0.5 nicht überschritten wird.

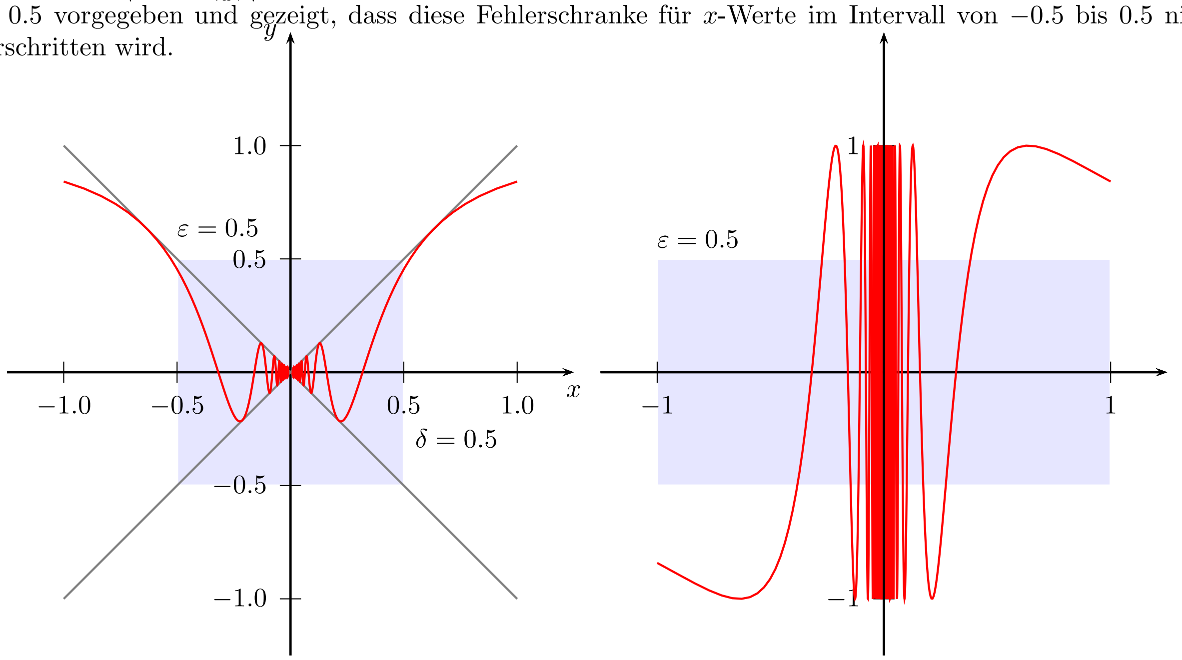


Abbildung 6: Links: Graph von $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; Rechts: Graph von $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Als zweites Beispiel schauen wir uns die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ an, die ebenfalls bei 0 nicht auswertbar ist.

Egal wie knapp über Null wir die maximale Abweichung δ wählen, in dem Intervall von 0 bis δ liegen immer noch unendlich viele Minimalstellen $\check{x}$ mit $\sin(1/\check{x}) = -1$ und unendlich viele Maximalstellen $\hat{x}$ mit $\sin(1/\hat{x})$. Zur Konstruktion jeweils einer dieser Stellen wählt einfach eine hinreichend große natürliche Zahl n mit $\frac{1}{2\pi n} \leq \delta$ und nutzt $\check{x} := \frac{1}{2\pi n + 3\pi/4}$ beziehungsweise $\hat{x} := \frac{1}{2\pi n + \pi/4}$. Alle größeren natürlichen Zahlen $m > n$ liefern mit der selben Konstruktion weitere Minimalstellen und Maximalstellen für $\sin(1/x)$ mit Abstand von Null, der kleiner als der vorgegebene Abstand δ ist.

Jeder Versuch einen Grenzwert F für f bei Annäherung von x an 0 zu konstruieren scheitert, denn diese Zahl F hätte entweder bei einem lokalen Minimum oder bei einem lokalen Maximum einen Abstand von mindestens 0.5.

2.3 Grenzwertsätze

Seien α und β zwei reelle Konstanten. Konvergieren zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ bei Annäherung von x an eine Stelle X gegen Grenzwerte F beziehungsweise G, so konvergieren auch $f(x) \cdot g(x)$ und $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$ gegen $F \cdot G$ beziehungsweise $\alpha F + \beta G$.

Produkt Konvergieren zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ bei Annäherung von x an eine Stelle X gegen Grenzwerte F beziehungsweise G, so konvergiert auch $f(x) \cdot g(x)$ gegen $F \cdot G$ beziehungsweise $\alpha F + \beta G$.

Wir geben uns zunächst eine Fehlerschranke $\bar{\varepsilon} > 0$ für f und g als Variable vor. In Abhängigkeit von $\bar{\varepsilon}$ finden wir eine Formel für eine Schranke ε der Abweichung des Produkts $f(x)g(x)$ vom Grenzwertprodukt FG. Wir stellen diese Formel dann nach $\bar{\varepsilon}$ um, so dass wir ε vorgeben können, daraus $\bar{\varepsilon}$ berechnen können und mit $\bar{\varepsilon}$ dann den maximalen Abstand δ ermitteln.

Um die Voraussetzungen $|f(x)-F| \leq \bar{\varepsilon}$ und $|g(x)-G| \leq \bar{\varepsilon}$ anwenden zu können, addieren wir in $|f(x)g(x)-FG|$ den Term $f(x)G$ und ziehen ihn gleich wieder ab. Das ändert nichts am Wert unter dem Betragszeichen.

$$|f(x)g(x) - FG| = |f(x)g(x) - f(x)G + f(x)G - FG|$$

Durch Ausklammern von $f(x)$ und G gewinnen wir die Terme $f(x) - F$ und $g(x) - G$:

$$= \big|f(x) \cdot (g(x) - G) + (f(x) - F) \cdot G\big|$$

Jetzt verwenden wir die für Summen allgemeingültige Abschätzung $|a+b| \leq |a|+|b|$ um den Betrag der Summe in eine Summe von Beträgen aufzusplitten.

$$\leq |f(x) \cdot (g(x) - G)| + |(f(x) - F) \cdot G|$$

Bei Beträgen von Produkten ist es egal, ob man zuerst multipliziert oder zuerst die Beträge bildet, d.h., es gilt allgemein $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, was wir auch zur Umformung der letzten Formel ausnutzen.

$$= |f(x)| \cdot |g(x) - G| + |f(x) - F| \cdot |G|$$

Bis auf $|f(x)|$ haben wir durch den bekannten Wert G und die vorgegebenen Fehlertoleranzen für $|g(x) - G|$ und $|f(x) - F|$ für alle Beträge in der letzten Formel Abschätzungen. Um auch $|f(x)|$ abschätzen zu können, fügen wir unter dem Betragszeichen $-F + F$ hinzu. In dem entstehenden Term $|f(x) - F + F|$ können wir $|f(x) - F|$ und $|F|$ abschätzen.

$$\begin{aligned} &= |f(x) - F + F| \cdot |g(x) - G| + |f(x) - F| \cdot |G| \\ &\leq (\bar{\varepsilon} + |F|) \cdot \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}|G| =: \varepsilon. \end{aligned}$$

Letztendlich erhalten wir eine Gleichung mit der wir aus der Fehlertoleranz $\bar{\varepsilon}$ für f und g eine Fehlertoleranz ε für das Produkt $f \cdot g$ berechnen können.

Wir können auch ε vorgeben und das nötige $\bar{\varepsilon}$ daraus berechnen, wenn wir die Gleichung nach $\bar{\varepsilon}$ auflösen:

$$\bar{\varepsilon}^2 + (|F| + |G|)\,\bar{\varepsilon} - \varepsilon = 0$$

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{|F| + |G|}{2} + \sqrt{\left(\frac{|F| + |G|}{2}\right)^2 + \varepsilon}$$

Es kommt nur die positive Wurzel als Lösung infrage, da die negative Wurzel zu einer negativen Lösung führt, die sich nicht als Fehlertoleranz eignet.

Für $\bar{\varepsilon}$ gibt es Maximalabstände δ_f und δ_g, so dass Toleranzschranken $|f(x) - F| \leq \varepsilon_f$ und $|g(x) - G| \leq \varepsilon_g$ eingehalten werden.

Wir nutzen den kleineren Maximalabstand $\delta := \min(\delta_f, \delta_g)$ um die zugehörige Fehlerschranken für $|f(x) - F| \leq \bar{\varepsilon}$, $|g(x) - G| \leq \bar{\varepsilon}$ und somit auch für $|f(x)g(x) - FG| \leq \varepsilon$ zu erfüllen.

Zusammenfassend gesagt, finden wir also zu einer vorgegebenen Fehlerschranke ε eine Maximalabweichung δ, so dass für alle Argumente x mit $|x - X| \leq \delta$ die Ungleichung $|f(x)g(x) - FG| \leq \varepsilon$ erfüllt ist. Das Produkt $f(x)g(x)$ hat also für die Annäherung von x an X den Grenzwert FG.

Linearkombination Seien α und β zwei reelle Konstanten. Konvergieren zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ bei Annäherung von x an eine Stelle X gegen Grenzwerte F beziehungsweise G, so konvergiert auch $\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)$ gegen den Grenzwert $\alpha \cdot F + \beta \cdot G$.

Für den uninteressanten Fall $\alpha = \beta = 0$ ist klar, dass der Grenzwert von $\alpha f(x) + \beta g(x)$ Null ist. Nehmen wir jetzt also an, dass mindestens eine der Zahlen α und β von Null verschieden ist.

$$\begin{aligned}|\alpha f(x) + \beta g(x) - (\alpha F + \beta G)| &= |\alpha(f(x) - F) + \beta(g(x) - G)| \\ &\leq |\alpha| \cdot |f(x) - F| + |\beta| \cdot |g(x) - G| \\ &\leq (|\alpha| + |\beta|)\bar{\varepsilon} =: \varepsilon\end{aligned}$$

Da wir den Trivialfall $\alpha = \beta = 0$ ausgeschlossen haben, können wir nach $\bar{\varepsilon}$ auflösen:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|}$$

Die Fehlertoleranz ε für die Linearkombination lässt sich also in eine Fehlertoleranz $\bar{\varepsilon}$ für f und g rückrechnen. Damit finden wir Maximalabweichungen δ_f und δ_g, für f beziehungsweise g, bei denen die Fehlertoleranz $\bar{\varepsilon}$ jeweils eingehalten wird. Mit der Maximalabweichung $\delta := \min(\delta_f, \delta_g)$ wird für f und g die Fehlertoleranz $\bar{\varepsilon}$ eingehalten. Die Linearkombination erfüllt nach obiger Rechnung die Fehlertoleranz ε. Der Grenzwert der Linearkombination ist somit die Linearkombination der Grenzwerte F und G.

2.4 Stetigkeit

Für den Differenzenquotient $\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2)$ der quadratischen Funktion $f(x) = x^2$ haben wir in Abschnitt 2.1 die nennerfreie Berechnungsvorschrift $\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2) = x_2 + x_1$ gefunden (siehe Gleichung (9)). Die Auswertung der rechten Seite an der Stelle $x_2 = x_1$ hat uns zur Vermutung geführt, dass für die Ableitung $\frac{df}{dx}(x_1) = 2x_1$ gilt.

In diesem Abschnitt sehen wir, dass $g(x_2) = x_2+x_1$ ein Beispiel für eine an der Stelle x_1 stetige Funktion. Bei diesen Funktionen kann man den Grenzwert an der Stelle $x_2 = x_1$ einfach durch Einsetzen von x_1 berechnen.

Definition 3 *Sei $g(x)$ eine reelle Funktion in Abhängigkeit eines reellen Arguments x. Die Funktion $g(x)$ ist an einer Stelle X* stetig*, wenn der Grenzwert von $g(x)$ bei Annäherung von x an X gleich $g(X)$ ist.*

Ist $g(x)$ an allen Stellen X stetig, so wird $g(x)$ einfach nur als stetig bezeichnet.

Lineare Funktionen

$$f(x) = p_0 + p_1 x$$

sind stetig. Um uns davon zu überzeugen müssen wir nach der Grenzwertdefinition zu jeder Fehlerschranke ε einen Maximalabstand δ mit $|f(x) - f(X)| \leq \varepsilon$ für alle x mit $|x - X| \leq \delta$ finden. Ist p_1 gleich null, so ist der Fehler $|f(x) - f(X)|$ unabhängig von x und X gleich null, der Grenzwert ist also $f(X)$.

Für den Fall $p_1 \neq 0$ nutzen wir $\delta = \frac{\varepsilon}{|p_1|}$ als Maximalabstand für den die Fehlerschranke ε eingehalten wird:

$$|f(x) - f(X)| = |p_0 + p_1 x - (p_0 + p_1 X)| = |p_1| \cdot |x - X| \leq |p_1| \frac{\varepsilon}{|p_1|} = \varepsilon$$

Lineare Funktionen sind also stetig.

Nach Abschnitt 2.3 ist der Grenzwert eines Produkts gleich dem Produkt der Grenzwerte ist und der Grenzwert einer Linearkombination gleich der Linearkombination der Grenzwerte.

Die Stetigkeit der Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ ergibt sich daraus, dass diese als Produkte der linearen Funktion $g(x) = x$ mit sich selber darstellbar sind.

Polynomfunktionen $p(x) = p_0 + p_1 \cdot x + \ldots + p_n x^n$ sind als Linearkombinationen von Potenzfunktionen ebenfalls stetig.

3 Polynome

3.1 Monome und Polynome

Polynome sind wichtige Hilfsmittel in der Mathematik und Physik. Zum Beispiel kann man mit ihnen an Stützstellen vorgegebene Werte glatt interpolieren und Differentialgleichungen der Sorte, die wir im Einleitungsabschnitt kennengelernt haben, numerisch lösen.

Die Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit $n = 1, 2, \ldots$ werden auch als *Monome* bezeichnet. Linearkombination

$$f(x) = p_0 + p_1 \cdot x + p_2 \cdot x^2 + \ldots + p_n \cdot x^n \tag{11}$$

von Monomen sind *Polynome*. Die Koeffizienten p_i mit $i = 0, \ldots, n$ sind dabei vorgegebene Konstanten.

Für Summen, wie in Gleichung (11) nutzen wir im Folgenden auch das Summenzeichen

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \tag{12}$$

Obwohl x^0 an der Stelle $x = 0$ nicht auswertbar ist, wird formal vereinbart, dass bei Variablen wie x der Term x^0 als 1 zu interpretieren ist, um die Kurzschreibweise (12) effizient einsetzen zu können.

Polynome ersten Grades, d.h., mit $n = 1$ kennst du sicher, das sind linearen Funktionen mit Konstantanteil p_0 und Anstieg p_1. Zum Beispiel ergibt sich mit den Koeffizienten $p_0 = 1$ und $p_1 = 2$ das Polynom $p(x) = 1+2x$, das im nächsten Abschnitt als Gleichung (14) auftaucht.

Auch quadratische Polynome, d.h., mit $n = 2$ habt ihr sicher schon in der Schule gehabt. Beispielsweise ist $p(x) = 1 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}x^2$ das im nächsten Abschnitt berechnete Interpolationspolynom (16) mit $p_0 = 1$, $p_1 = \frac{7}{2}$ und $p_2 = -\frac{3}{2}$.

3.2 Polynominterpolation

Zur Erstellung eines Höhenprofils eines Berges wird an einer Reihe von Stellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ in horizontaler Richtung jeweils die Höhe $y_0, y_1, \ldots, y_n$ vermessen. Man hat nur einzelne Stellen und einzelne Höhenwerte, der Höhenverlauf des Berges ist jedoch eigentlich glatt.

Verbindet man die Punkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ durch Geradenstücke, so entstehen an den Verbindungspunkten (x_k, y_k) mit $k = 1, \ldots, n-1$ unerwünschte Knicke (siehe verbindender Polygonzug in Abbildung 7).

Statt der Verbindungsgeraden kann man auch eine glatte Funktion $p(x)$ zur Verbindung der Punkte nutzen. Als Bedingung dafür, dass diese Funktion die Punkte (x_k, y_k) mit $k = 0, \ldots, n$ verbindet, muss $p(x)$ an den Stellen x_k die Werte y_k annehmen:

$$p(x_k) = y_k$$

für $k = 0, \ldots, n$. Hat man die Funktion $p(x)$ konstruiert, kann man sie auch an anderen Stellen als $x = x_0, \ldots, x_n$ auswerten. Die Konstruktion der Funktion $p(x)$ und die Auswertung zwischen den vorgegebenen Stellen bezeichnet man als *Interpolation*.

Am Häufigsten nutzt man Polynome als glatte Funktion $p(x)$ bei der Interpolation.

Wir schauen uns im Folgenden das leicht verständliche und wichtige Neville-Verfahren zur Polynominterpolation an. Dieses Verfahren bildet zum Beispiel auch die Grundlage für die bekanntere Newton-Interpolation, auf die wir hier jedoch nicht eingehen.

Beim Neville-Verfahren baut man das Interpolationspolynom rekursiv auf.

Sei $p(x; x_0, \ldots, x_{n-1})$ ein Polynom mit Höchstgrad $(n-1)$, das die Werte $y_0, \ldots, y_{n-1}$ an den Stellen $x_0, \ldots, x_{n-1}$ interpoliert und analog sei $p(x; x_1, \ldots, x_n)$ ein Polynom mit Höchstgrad $(n-1)$, das die Werte $y_1, \ldots, y_n$ an den Stellen $x_1, \ldots, x_n$ interpoliert.

Wir schauen uns die Eigenschaften des daraus konstruierten Polynoms

$$p(x; x_0, \ldots, x_n) := \frac{p(x; x_0, \ldots, x_{n-1}) \cdot (x_n - x) + p(x; x_1, \ldots, x_n) \cdot (x - x_0)}{x_n - x_0}. \tag{13}$$

an:

- Das konstruierte Polynom hat Höchstgrad n, denn im Zähler kommen die Faktoren $(x_n - x)$ und $(x - x_0)$ hinzu, in denen jeweils einmal x vorkommt. Es kann jedoch sein, dass sich die entstehenden Terme von Grad n gerade aufheben. Deshalb kann man nur eine Aussage für den Höchstgrad treffen und nicht für den Polynomgrad selber.
- Das konstruierte Polynom interpoliert die Werte $y_1, \ldots, y_{n-1}$ an den Stellen $x_1, \ldots, x_{n-1}$:

  Für $k = 1, \ldots, n-1$ haben $p(x_k; x_0, \ldots, x_{n-1})$ und $p(x_k; x_1, \ldots, x_n)$ den gleichen Wert y_k und man kann diesen Faktor ausklammern

  $$p(x_i; x_0, \ldots, x_n) = \frac{y_k \cdot ((x_n - x) + (x - x_0))}{x_n - x_0} = y_k$$

- Zusätzlich interpoliert das konstruierte Polynom den Wert y_0 an der Stelle x_0 und den Wert y_n an der Stelle x_n:

  Bei $x = x_0$ fällt der hintere Term des Zählers mit Faktor $(x - x_0)$ weg. Übrig bleibt

  $$p(x_0; x_0, \ldots, x_n) = \frac{p(x_0, x_0, \ldots, x_{n-1}) \cdot (x_n - x_0)}{x_n - x_0} = p(x_0, x_0, \ldots, x_{n-1}) = y_0$$

  Dabei wurde berücksichtigt, dass $p(x; x_0, \ldots, x_{n-1})$ an der Stelle x_0 den Wert y_0 interpoliert.

  Analog fällt bei $x = x_n$ der vordere Term mit Faktor $(x_n - x)$ weg. Es ergibt sich wie im vorhergehenden Fall $p(x_n; x_0, \ldots, x_n) = p(x_n; x_1, \ldots, x_n) = y_n$.

Als Start für die rekursive Konstruktion der Interpolationspolynome mittels (13) kann man die konstanten Polynome $p(x, x_0) = y_0$ nutzen.

Beispiel Wir konstruieren das Interpolationspolynom 2. Grades mit folgenden Interpolationspunkten:

i	x_i	y_i
0	0	1
1	1	3
2	2	2

Tabelle 1: Stützstellen und Werte für das Interpolationspolynom

Polynome vom Grad 0, die die Daten an jeweils einer Stelle interpolieren:

$$p(x; 0) = 1 \qquad p(x; 1) = 3 \qquad p(x; 2) = 2$$

Polynome vom Grad 1, die die Daten an jeweils zwei Stellen interpolieren:

$$p(x; 0, 1) = \frac{p(x; 0) \cdot (x_1 - x) + p(x; 1) \cdot (x - x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1 \cdot (1 - x) + 3 \cdot (x - 0)}{1 - 0} = 2x + 1 \tag{14}$$

$$p(x; 1, 2) = \frac{p(x; 1) \cdot (x_2 - x) + p(x; 2) \cdot (x - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3 \cdot (2 - x) + 2 \cdot (x - 1)}{2 - 1} = -x + 4 \tag{15}$$

Polynom vom Grad 2, das den gesamten Datensatz interpoliert:

$$\begin{aligned} p(x; 0, 1, 2) &= \frac{p(x; x_0, x_1) \cdot (x_2 - x) + p(x; x_1, x_2) \cdot (x - x_0)}{x_2 - x_0} \\ &= \frac{(2x + 1) \cdot (2 - x) + (-x + 4) \cdot (x - 0)}{2 - 0} \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 1 \end{aligned} \tag{16}$$

Das resultierende Polynom ist in Abbildung 7 dargestellt. Die Interpolationspunkte an den Stellen (x_i, y_i) sind durch kleine blaue Punkte gekennzeichnet.

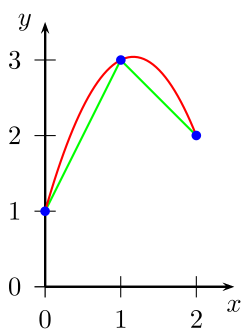


Abbildung 7: Verbindender Polygonzug (grün) und Interpolationspolynom (rot) für die blau dargestellten Punkte $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $(x_1, y_1) = (1, 3)$ und $(x_2, y_2) = (2, 2)$

3.3 Differenzialquotienten von Polynomen

In Abschnitt 3.1 haben wir Polynome

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$$

als Linearkombinationen von Monomen $x^0, x^1, \ldots$ kennengelernt.

3.4 Differenzialquotienten von linearen Funktionen und Monomen

In der Einleitung wurde der Differenzialquotient als Anstieg der Tangenten eingeführt. Lineare Funktionen beschreiben Geraden, bei denen der Anstieg konstant ist.

Alle Sekanten einer linearen Funktion stimmen mit der durch sie beschriebenen Gerade überein und haben den Anstieg dieser Gerade. Als Grenzwert haben auch alle Tangenten diesen Anstieg.

Für den formalen Test beschreiben wir die lineare Funktion mit zwei Konstanten p_0 und p_1 durch die Formel

$$f(x) = p_0 + p_1 x$$

Für beliebige voneinander verschiedene Stellen x_1, x_2 ergibt sich der Sekantenanstieg gemäß

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(p_0 + p_1 x_2) - (p_0 + p_1 x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{p_1(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = p_1. \end{aligned} \tag{17}$$

Der Anstieg aller Sekanten ist also konstant gleich p_1 und damit ist auch der Anstieg als Grenzwert des Sekantenanstiegs gleich p_1.

Aus den Differenzenquotienten der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ vom Grad $n = 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{x_2^n - x_1^n}{x_2 - x_1}\end{aligned}$$

erhält man mit der erweiterten binomischen Formel $a^n - b^n = (a - b) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}\right)$ aus Anhang A wieder eine Form

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2) = \frac{(x_2 - x_1) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_2^i x_1^{n-1-i}\right)}{x_2 - x_1},$$

aus der sich der Nenner herauskürzt:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{n-1} x_2^i x_1^{n-1-i}$$

Die rechte Seite in der letzten Darstellung des Differenzenquotienten ist an der Stelle $x_2 = x_1$ stetig. Wir können den Differenzialquotient also durch Auswertung der rechten Seite an der Stelle $x_2 = x_1$ berechnen:

$$\frac{df}{dx}(x_1) = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{x_1^i x_1^{n-1-i}}_{n\text{-mal } x_1^{n-1}} \tag{18}$$

$$\frac{df}{dx}(x) = n x^{n-1} \tag{19}$$

Die letzte Gleichung ist eigentlich nur für $n = 2, 3, \ldots$ anwendbar, da für $x = 0$ in den Fällen $n = 0$ und $n = 1$ auf die nicht definierten Terme $0 \cdot \frac{1}{0}$ beziehungsweise $1 \cdot 0^0$ führt.

Jedoch wird, wie bei der Einführung des Summenzeichens in Abschnitt 3.1 zur Vereinfachung der Schreibweise zumindest im Fall $n = 1$ der Term 0^0 als 1 interpretiert, so dass die Formel $\frac{df}{dx}(x) = nx^{n-1}$ auch in diesem Fall gültig bleibt.

3.5 Linearität von Differenzen- und Differenzialquotienten

Der Differenzialquotient ist als auf Funktionen anzuwendende Operation *linear*. Diese Eigenschaft ist außerordentlich wichtig. Abschnitt 3.6 wird uns einen Eindruck davon vermitteln, wenn wir mit Hilfe der Linearität Differenzialquotienten von Polynomen auf Differenzialquotienten von Monomen zurückführen.

In diesem Abschnitt werden wir uns zuerst anschauen, was die Linearität des Differenzialquotienten bedeutet soll. Danach überzeugen wir uns davon sich, dass Differenzenquotienten ebenfalls linear sind und dass sich diese Eigenschaft durch Grenzwertbildung auf Differenzialquotienten überträgt.

Seien α, β reelle Konstanten und $f(x)$, $g(x)$ reelle Funktionen, die an der Stelle x differenzierbar sind.

Dann ist die Linearkombination

$$f(x) = \alpha g(x) + \beta h(x)$$

der Funktionen ebenfalls differenzierbar und es gilt die Gleichung

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\alpha g(x) + \beta h(x)) = \alpha \frac{dg}{dx}(x) + \beta \frac{dh}{dx}(x),$$

das heißt, der Differenzialquotient ist *linear.*

Analog gelten für Differenzenquotienten der Funktion f mit zwei voneinander verschiedenen Stellen x_1, x_2 die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{\alpha g(x_2) + \beta h(x_2) - (\alpha g(x_1) + \beta h(x_1))}{x_2 - x_1} \\
&= \alpha \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} + \beta \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \\
&= \alpha \frac{\Delta}{\Delta x} g(x_1, x_2) + \beta \frac{\Delta}{\Delta x} h(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

Im Abschnitt 2.3 über Grenzwertsätze haben wir uns schon davon überzeugt, dass der Grenzwert einer Linearkombination gleich der Linearkombination von Grenzwerten ist. Bilden wir auf beiden Seiten der Gleichung

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2) = \alpha \frac{\Delta g}{\Delta x}(x_1, x_2) + \beta \frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2)$$

den Grenzwert für die Annäherung von x_2 an x_1, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{df}{dx}(x_1) = \alpha \frac{dg}{dx}(x_1) + \beta \frac{df}{dx}(x_1).$$

Somit hat sich die Linearität des Differenzialquotienten bestätigt.

3.6 Differenzialquotienten von Polynomen

In Abschnitt 3.1 wurden Monome als Potenzfunktionen x^n mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ eingeführt, wobei $x^0 = 1$ gesetzt wird unabhängig davon dass x auch null werden kann. Polynome sind Linearkombinationen

$$p(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n$$

oder mit Summenschreibweise

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$$

von Monomen mit konstanten Koeffizienten $p_0, p_1, \ldots, p_n$.

Die Ableitungen $\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$ für $n = 1, 2, \ldots$ von Monomen haben wir in Abschnitt 3.6 kennengelernt. Dabei interpretieren wir $\frac{0}{x} = 0$ und $x^0 = 1$ unabhängig davon, dass x auch null werden kann.

In Abschnitt 3.5 haben wir uns davon überzeugt, dass der Differenzenquotient eine lineare Operation darstellt, dass also der Differenzialquotient einer Linearkombination differenzierbarer Funktionen gleich der Linearkombination der Differenzialquotienten der Funktionen ist.

Die Formel für die Ableitung von Polynomen ist jetzt nur noch ein Zusammensetzen all dieser Bausteine.

Da die Monome differenzierbar sind und die Polynome Linearkombination von Monomen, ist die Ableitung von Polynomen gerade die zugehörige Linearkombination der Differenzialquotienten der eingehenden Monome.

Wir gehen von der Summenform eines Polynoms aus.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$$

De Differenzialquotient des Konstantanteils p_0 ist null. Das berücksichtigen wir, indem wir die Summe für den Differenzialquotient des Polynoms erst ab 1 laufen lassen. Die Differenzialquotienten der anderen Monome haben wir uns eben angesehen.

$$\frac{dp}{dx}(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i i x^{i-1}.$$

3.7 Numerische Lösung von Differenzialgleichungen

Zur Lösung von Differenzialgleichungen, wie wir sie im Einleitungsabschnitt kennengelernt haben, gibt es viele numerische Verfahren.

Ein Großteil dieser Verfahren nutzt Polynominterpolation oder Polynomapproximation.

Wir lösen die Differenzialgleichung

$$\frac{dy}{dx}(x) = \alpha y(x) \tag{20}$$

mit einem solchen Verfahren numerisch approximativ für kleine Beträge von x. Die Differenzialgleichung (20) passt zur Gleichung (7) für das elektrische Netzwerk in Abschnitt 1.3, wenn wir $x = t$, $y = U$, $\alpha = -\frac{1}{\tau}$ und $U_B = 0$ setzten. Sie beschreibt dann den Entladevorgang eines RC-Gliedes.

Wir nutzen bei dem numerischen Verfahren aus, dass sich der Betrag von x^n stark verkleinert, wenn der Betrag von x kleiner wird. Nutzen wir zum Beispiel x nur im Bereich von -0.1 bis 0.1, so ändert sich zum Beispiel x^5 nur im Bereich von -0.00001 bis -0.00001.

Davon lassen wir uns leiten und setzen für $y(x)$ in Gleichung (20) den polynomialen Ansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \tag{21}$$

ein. Wir gleichen dann die bisher noch freien Koeffizienten c_k so ab, dass die Gleichung für so viele Potenzen niedrigen Grades erfüllt wird, wie es möglich ist. Den Fehler in den höheren Potenzen von x vernachlässigen wir. Wir wissen ja bereits, dass dieser Fehler sehr klein wird, wenn wir den Betrag von x hinreichend klein wählen.

Einsetzen des Ansatzes (21) in Gleichung (20) liefert:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right) = \alpha\left(\sum_{k=1}^{n} c_k x^k\right)$$

Auf der linken Seite wenden wir die Differenziation auf das Polynom an:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \alpha c_k x^k$$

Hier sei noch einmal daran erinnert, dass beim Differenzieren der erste Summand $c_0 x^0 = c_0$ von $\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ herausfällt. Deshalb fängt die Summe erst bei Index 1 an. Für einen Vergleich der Koeffizienten zu den Potenzen von x ist es günstiger, wenn links und rechts die selben Potenzen von x stehen. Deshalb ersetzen wir auf der rechten Seite den Exponenten k durch einen neuen Index $\bar{k}-1$. Aus $\bar{k}-1 = k$ ergibt sich $\bar{k} = k+1$.

$$\sum_{k=1}^{n} c_k k x^{k-1} = \sum_{\bar{k}=1}^{n+1} \alpha c_{\bar{k}-1} x^{\bar{k}-1}$$

Die Zählvariable $\bar{k}$ ist der Summationsindex der Summe auf der rechten Seite, für den wir uns den Namen selber aussuchen können, solange er nicht mit bereits in der Summe vorkommenden Variablennamen kollidiert. Wir bezeichnen ihn wieder mit k, damit der Vergleich der in beiden Summen auftretenden Potenzen von x einfacher wird.

Bei der entstehenden Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} c_k k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha c_{k-1} x^{k-1} \tag{22}$$

können wir die Koeffizienten der Potenzen x^{k-1} für $k = 1, \ldots, n$ abgleichen. Die Koeffizienten zu x^{k-1} für $k = 1, \ldots, n$ auf der linken und rechten Seite der Gleichung sind $c_k k$ beziehungsweise αc_{k-1}. Die Gleichungen für deren Abgleich lauten

$$kc_k = \alpha c_{k-1}.$$

Der Koeffizientenabgleich für die höchste Potenz x^n in Gleichung (22) liefert die Gleichung

$$0 = \alpha c_n$$

Damit erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 \cdot c_1 &= \alpha c_0 && (23)\\ 2 \cdot c_2 &= \alpha c_1 && (24)\\ &\vdots && (25)\\ n \cdot c_n &= \alpha c_{n-1} && (26)\\ 0 &= \alpha c_n && (27) \end{aligned}$$

für die Koeffizienten c_k.

Dieses Gleichungssystem ist von unten nach oben lösbar ($c_n = 0 \Rightarrow c_{n-1} = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow c_0 = 0$) und hat nur noch die Triviallösung, dass alle Koeffizienten c_k null sind, also $y(x) = 0$ gilt.

Um nichttriviale Lösungen zu erhalten, vernachlässigen wir den Koeffizientenvergleich für die höchste Potenz.

Das kann man zum Beispiel so interpretieren, dass man statt der Lösung für (20) die exakte Lösung der leicht gestörten Differenzialgleichung

$$\tau \frac{dy}{dx} = \alpha y - \alpha c_n x^n \tag{28}$$

ermittelt. Die Störung der Differenzialgleichung bleibt klein, wenn wir uns nicht zu weit hinaus wagen, das heißt, wenn wir die Differenzialgleichung nur für kleine Werte von x nutzen.

Der Koeffizientenvergleich für den Polynomansatz (21) bei (28) liefert anstelle von (27) die immer erfüllte Gleichung $0 = 0$, die aus dem System gestrichen werden kann.

Es bleiben die Gleichungen

$$kc_k = \alpha c_{k-1}$$

für $k = 1, \ldots, n$, oder umgestellt nach c_k die Gleichungen

$$c_k = \alpha \frac{c_{k-1}}{k}. \tag{29}$$

In der letzten Form kann man die Gleichungen als rekursive Zuweisungskette interpretieren. Der Koeffizient c_k wird aus dem vorhergehenden c_{k-1} berechnet. durch Multiplikation mit α und Division durch k berechnet.

Der Koeffizient c_0 bleibt dabei frei wählbar. Aus (21) erkennt man, dass c_0 gerade der Wert von $y(x)$ für $x = 0$ ist. (Im Beispiel unseres Entladevorgangs ist das die Anfangsspannung des Kondensators.)

Wir können also zusätzlich

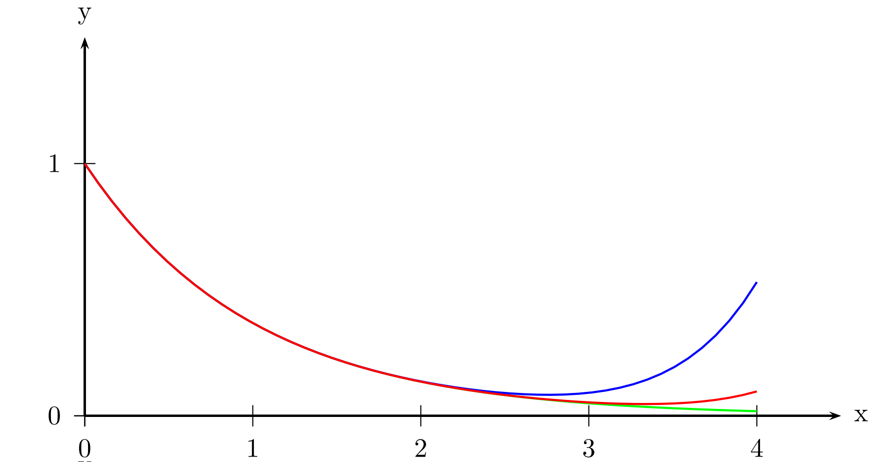
$$c_0 = y(0)$$

schreiben.

Bei jedem Schritt $k = 1, \ldots, n$ des Systems (29) von Zuweisungen kommt ein Faktor α hinzu und es wird durch das aktuelle k dividiert. So erhält man für die Koeffizienten die Berechnungsvorschrift

$$c_k = \frac{\alpha^k y(0)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}.$$

$$y(x) \approx y(0) \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (\alpha x)^k$$



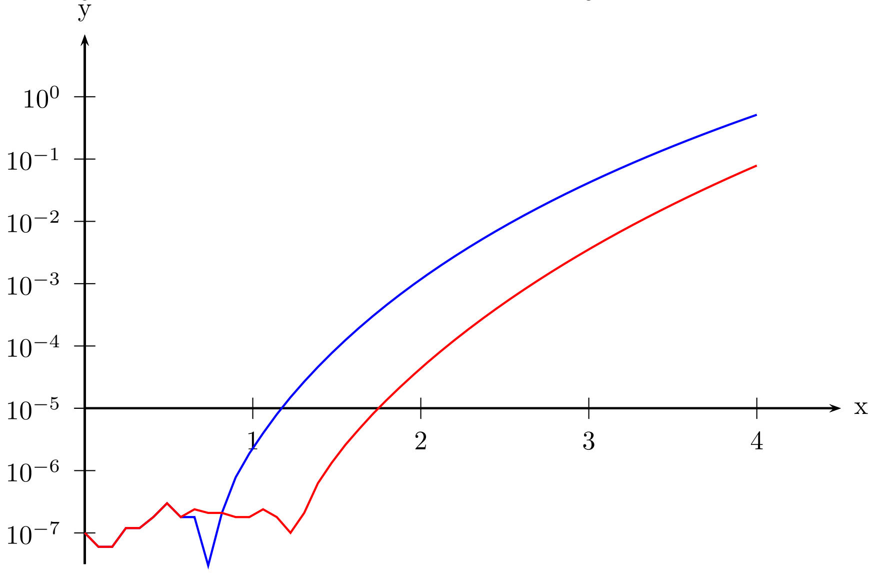


Abbildung 8: Approximation der Differenzialgleichung $\frac{dy}{dt} = -y$

A Erweiterte Binomische Formel

$$(a-b) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} a^{i+1} b^{n-1-i} - \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i}$$

$\bar{i} = i + 1$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\bar{i}=1}^{n} a^{\bar{i}} b^{n-\bar{i}} - \sum_{i=0}^{n-1} a^{i} b^{n-i} \\
&= \underbrace{a^n}_{\bar{i}=n} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} a^{i} b^{n-i} - a^{i} b^{n-i} \right)}_{=0} - \underbrace{b^n}_{i=0} \\
&= a^n - b^n
\end{aligned}
$$