Lucerne University of
Applied Sciences and Arts

**HOCHSCHULE LUZERN**

**Informatik**
FH Zentralschweiz

# Mathematical Reasoning - Übung

Prof. Dr. Josef F. Bürgler und Thomas Zehrt

I.BA_DMATH, Semesterwoche 4

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Die mit grossen römischen Zahlen gekennzeichneten Aufgaben **müssen** bearbeitet werden und die Lösungen dieser Aufgaben werden kontolliert und bewertet. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Referenz: *Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, McGraw-Hill International Edition, 6. Auflage,* **kurz: KR**

## Vollständige Induktion

1. **KR, Abschnitt 4.1, Example 5** Verwenden Sie mathematische Induktion um zu zeigen, dass $\forall n \in \mathbb{N}\,(n < 2^n)$.
2. **KR, Abschnitt 4.1, Example 6** Verwenden Sie mathematische Induktion um zu zeigen, dass $2^n < n!$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

inductive proof

I. **KR, Abschnitt 4.1, Example 7** Zeigen Sie mittels mathematische Induktion, dass für die **harmonischen Zahlen**

$$H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{j}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

folgende Ungleichung gilt:

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$H_{2^0} = 1$

$H_{2^1} = 1 + \frac{1}{2}$

$H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$H_{2^2} = H_4 = \underbrace{1 + \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}}$

## Nochmals vollständige Induktion

3. Für jede positive ganze Zahl $n$ sei $P(n)$ die Aussage

$$2^2 + 4^2 + 6^2 \cdots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

a) Formulieren Sie die Aussage $P(1)$ und überprüfen Sie den Wahrheitsgehalt dieser Aussage. (Induktionsanfang)

$H_{2^3} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{H_{2^2} \geq 1 + \frac{2}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}}$

b) Formulieren Sie die Induktionsvoraussetzung.

c) Führen Sie den Induktionsschritt aus.

d) Erklären Sie in eigenen Worten warum Induktionsanfang und Induktionsschritt beweisen, dass $P(n)$ für jede positive ganze Zahl $n$ wahr ist.

II. **KR, Abschnitt 4.1, Aufgabe 5:** Beweisen Sie die folgende Aussage: Für jede nichtnegative ganze Zahl $n$ gilt

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2 \;=\; \sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.$$

## Rekursiv definierte Funktionen

4. **KR, Abschnitt 4.3, Aufgaben 1b, 3a:** Bestimmmen Sie $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ und $f(5)$ falls
   a) $f(0) = 1$ und $f(n+1) = 3f(n)$
   b) $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ und $f(n+1) = f(n) + 3f(n-1)$.
5. **KR, Abschnitt 4.3, Aufgabe 7b:** Geben Sie die rekursive Definition der Zahlenfolge $\{a_n\}$ an, falls $a_n = 2n+1$ für alle $n = 1,2,3,\ldots$

III. **KR, Abschnitt 4.3, Aufgaben 12, 13:** Zeigen Sie, dass die Fibonacci-Zahlen $f_k$ folgende Eigenschaften haben:

a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad (f_1^2+f_2^2+\cdots+f_n^2 \;=\; f_n f_{n+1})$

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad (f_1+f_3+\cdots+f_{2n-1} \;=\; f_{2n})$

## Rekursive Algorithmen

6. **KR, Abschnitt 4.4, Aufgabe 9:** Beschreiben Sie einen rekursiven Algorithmus, der die Summe der ersten $n$ ungeraden natürlichen Zahlen berechnet.
7. **KR, Abschnitt 4.4, Aufgabe 13:** Beschreiben Sie einen rekursiven Algorithmus, der für jeweils zwei beliebige natürliche Zahlen $n$ und $m$ den Ausdruck $n!$ **mod** $m$ berechnet.
8. **KR, Abschnitt 4.4, Aufgabe 15:** Für alle nichtnegativen ganzen Zahlen $a$ und $b$ (mit $a < b$) gilt $ggT(a,b) = ggT(a,b-a)$. Nutzen Sie diese Tatsache, um einen rekursiven Algorithmus zu konstruieren, der den grössten gemeinsamen Teiler von zwei nichtnegativen ganzen Zahlen bestimmt.

## Schlussregeln (Inferenzregeln)

9. **KR, Abschnitt 1.5, Example 9:** Zeigen Sie, dass die Hypothesen $(p \wedge q) \vee r$ und $r \to s$ die Konklusion $p \vee s$ implizieren.

IV. **KR, Abschnitt 1.5, Übung 9a:** Für die folgenden Prämissen schreibe man die relevanten Konklusionen auf, die daraus folgen. Dabei sollen jeweils die Schlussregeln angegeben werden die verwendet wurden, um Konklusion aus den Prämissen zu erhalten:

- “*Wenn ich einen Tag frei mache, dann regnet oder schneit es*”
- “*Ich machte Dienstag oder Donnerstag frei*”

- "*Am Dienstag war es sonnig*"
- "*Es schneite nicht am Donnerstag*"

## Korrekte Programme

10. **KR, Abschnitt 4.5, Aufgabe 1:** Beweisen Sie, dass das Programmsegment

$$y := 1$$
$$z := x + y$$

bezüglich der Anfangsbedingung $x = 0$ und der Endbedingung $z = 1$ (teilweise) korrekt ist.

V. **KR, Abschnitt 4.5, Aufgabe 1:** Beweisen Sie, dass das Programmsegment

$$x := 2$$
$$z := x + y$$
$$\textbf{if } y > 0 \textbf{ then } z := z + 1 \textbf{ else } z := 0$$

bezüglich der Anfangsbedingung $y = 3$ und der Endbedingung $z = 6$ (teilweise) korrekt ist.

## Lösungen

1. -
2. -

I. -

3. a) $(2\cdot 1)^2 = \frac{(2\cdot 1)(1+1)(2\cdot 1+1)}{3}$ ist wahr, denn beide Seiten sind gleich.

   b) $2^2+4^2+\cdots+(2k)^2 = (2k)(k+1)(2k+1)/3$

   c) Wir müssen zeigen, dass für jedes $k \geq 1$ aus der Annahme(!) das $P(k)$ wahr ist auch stets die Wahrheit der Aussage $P(k+1)$ folgt. Das bedeutet hier, dass aus der angenommenen Richtigkeit der Gleichung $2^2+4^2+\cdots+(2k)^2 = (2k)(k+1)(2k+1)/3$ die Richtigkeit der Aussage $2^2+4^2+\cdots+(2k)^2+(2(k+1))^2 = (2(k+1))(k+2)(2(k+1)+1)/3$ abgeleitet werden muss:

$$\begin{aligned}
2^2+4^2+\cdots+(2k)^2+(2(k+1))^2 &= (2^2+4^2+\cdots+(2k)^2)+(2(k+1))^2 \\
&= \frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}+(2(k+1))^2 \\
&= \frac{2k(k+1)(2k+1)+3\cdot(2(k+1))^2}{3} \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

   d) -

II. -

4. a) $f(2)=9$, $f(3)=27$, $f(4)=81$, $f(5)=243$

   b) $f(2)=-1$, $f(3)=5$, $f(4)=2$, $f(5)=17$

5. $a_{n+1} = a_n+2$, $a_1 = 3$

III. -

6. **procedure** SummeUngeraderZahlen(n:positive integer)

   **if** n=1 **then** SummeUngeraderZahlen(n) := 1

   **else** SummeUngeraderZahlen(n) := SummeUngeraderZahlen(n-1) + 2n -1

7. **procedure** ModFakultaet(n,m:positive integers)

   **if** n=1 **then** ModFakultaet(n,m) := 1

   **else** ModFakultaet(n,m) := ( n · ModFakultaet(n-1,m) ) **mod** m

8. **procedure** ggT(a, b: nonnegative integers mit $a < b$)

   **if** a=0 **then** ggT(a, b) := b

   **else if** a = b - a **then** ggT(a, b) := a

   **else if** a $<$ b - a **then** ggT(a, b) := ggT(a, b- a)

   **else** ggT(a, b) := ggT(b - a, a)

   Warum sind alle Fallunterscheidungen nötig?

9. -

IV. -

10. Falls die Anfangsbedingung $x = 0$ gilt, setzt das Programmsegment $y := 1$ und $z := x + y = 0 + 1 = 1$. Also ist die Endbedingung $z = 1$ war.

V. Falls die Anfangsbedingung $y = 3$ erfüllt ist arbeitetet das Programm wie folgt: $x := 2$ und $z := x + y = 2 + 3 = 5$. Da $y = 3 > 0$ gilt, wird die **then**-Anweisung ausgeführt: $z := z + 1 = 5 + 1 = 6$ und somit ist die gegebene Endbedingung war.

## Viel Spass!

1. $\forall n \in \mathbb{N}(n > 2^n)$

Beweis durch Induktion

Induktionsverankerung:

2. Zu zeigen $\forall n \geq 4 \; (2^n < n!)$
mittels Beweis durch Induktion.

1. Induktionsverankerung: $n = 4$
Es gilt $2^4 = 16 < 4! = 24$

2. Induktionsschritt: sei $2^n < n!$ für ein beliebiges $n \geq 4$

denn $2 < n+1$ für $n \geq 4$

Dann gilt:

$$2^{n+1} = 2^1 \cdot \underline{2^n} < 2^1 \underline{n!} < n!(n+1) = (n+1)!$$

Induktions-
voraussetzung

Also gilt auch $\underbrace{2^{n+1} < (n+1)!}_{P(n+1)}$

Also gilt $2^n < n!$ für $\forall n \geq N, n \geq 4$

I. **KR, Abschnitt 4.1, Example 7** Zeigen Sie mittels mathematische Induktion, dass für die **harmonischen Zahlen**

$$H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{j}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

folgende Ungleichung gilt:

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis mit Induktion:

Induktionsanfang: $n \to 1$ $\qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2}$ ✓

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}}_{\geq 1 + \frac{n}{2}} + \underbrace{\ldots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{\frac{1}{2}} \geq 1 + \frac{n+1}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{2^n} \frac{1}{k}$$

$n=1, \Rightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$

$n=2, \Rightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

$n=3, \Rightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

$$> \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}}} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}}}$$

$$= \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n}}_{\geq 1 + \frac{n}{2}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}}}_{> \frac{1}{2}}$$

$$\to \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{k}{2}$$

II. **KR, Abschnitt 4.1, Aufgabe 5:** Beweisen Sie die folgende Aussage: Für jede nichtnegative ganze Zahl $n$ gilt

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2 = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.$$

Induktionsverankerung: $n \to 1$

$$1^2+3^2 = (2\cdot 0+1)^2+(2\cdot 1+1)^2 = \frac{(1+1)(2\cdot 1+1)(2\cdot 1+3)}{3}$$

$$10 = 10 = 10 \quad \checkmark$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n+1)^2+(2(n+1)+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}+(2(n+1)+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)+(2(n+1)+1)^2\cdot 3}{3}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)+(4(n^2+2n+1)+4n+5)\cdot 3}{3}$$

$$= (4n^3+6n^2+2n^2+3n+4n^2+6n+2n+3+12n^2+24n+12+12n+15)\cdot\frac{1}{3}$$

$$\overset{!}{=} \frac{4n^3+24n^2+47n+30}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{((n+1)+1)(2(n+1)+1)(2(n+1)+3)}{3}$$

$$= \frac{(n+2)(2n+3)(2n+5)}{3}$$

$$= (2n^2+7n+6)(2n+5)\cdot\frac{1}{3}$$

$$= (4n^3+10n^2+14n^2+35n+12n+30)\cdot\frac{1}{3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{4n^3+24n^2+47n+30}{3}}}$$

$=$

III. **KR, Abschnitt 4.3, Aufgaben 12, 13:** Zeigen Sie, dass die Fibonacci-Zahlen $f_k$ folgende Eigenschaften haben:

a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad (f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 \;=\; f_n f_{n+1})$

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad (f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} \;=\; f_{2n})$

a) $f = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$

Induktionsverankerung: $n \to 1$

$1^2 = 1 \cdot 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot 1 = 1$ ✓

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\underbrace{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots + f_n^2}_{= f_{n+1} \cdot f_n} + f_{n+1}^2 = f_{n+1} \cdot f_{n+2}$$

$$f_{n+1} f_n + f_{n+1}^2 = f_{n+1} \cdot f_{n+2} \quad / : f_{n+1}$$

$$\underline{\underline{f_n + f_{n+1} = f_{n+2}}} \quad \Rightarrow \text{Definition der Fibonacci-Folge}$$

b) $f = \{\underset{1}{1}, \underset{2}{1}, \underset{3}{2}, \underset{4}{3}, \underset{5}{5}, \underset{6}{8}, 13, \ldots\}$

Induktionsverankerung: $n \to 1$

$n = 3, \quad f_1 + f_3 + f_5 = 8 \quad \Rightarrow \quad f_{2n} = f_6 = 8$ ✓

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\underbrace{f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1}}_{= f_{2n}} + f_{2(n+1)-1} = f_{2(n+1)}$$

$$\underline{\underline{f_{2n} + f_{2n+1} = f_{2n+2}}} \quad \Rightarrow \text{Definition der Fibonacci-Folge}$$

IV. **KR, Abschnitt 1.5, Übung 9a:** Für die folgenden Prämissen schreibe man die relevanten Konklusionen auf, die daraus folgen. Dabei sollen jeweils die Schlussregeln angegeben werden die verwendet wurden, um Konklusion aus den Prämissen zu erhalten:

- "*Wenn ich einen Tag frei mache, dann regnet oder schneit es*"
- "*Ich machte Dienstag oder Donnerstag frei*"

Aussagen

$p$ = „Ich mache einen Tag frei"

$q$ = „Es regnet"

$r$ = „Es schneit"

$s$ = „Ich mache frei"

$t$ = „Es ist Dienstag"

$u$ = „Es ist Donnerstag"

Prämissen

① $p \rightarrow (q \vee r)$

② $p \rightarrow (t \oplus u)$

③ $t \rightarrow \neg q$

④ $t \rightarrow \neg r$

⑤ $u \rightarrow \neg r$

$p \rightarrow \neg r$ : Hypothetischer Sylogismus aus ② + ④ + ⑤ = ⑥

$p \rightarrow q$ : Hypothetischer Sylogismus aus ⑥ + ① = ⑦

$p \rightarrow u$ : ? $\rightarrow p \rightarrow t \rightarrow \neg q$ wäre ein Wiederspruch

Ich machte am Donnerstag frei, es regnete und es schneite nicht.

V. **KR, Abschnitt 4.5, Aufgabe 1:** Beweisen Sie, dass das Programmsegment

$$x := 2$$
$$z := x + y$$
$$\textbf{if } y > 0 \textbf{ then } z := z + 1 \textbf{ else } z := 0$$

bezüglich der Anfangsbedingung $y = 3$ und der Endbedingung $z = 6$ (teilweise) korrekt ist.

$x = 2$

$y = 3$

$z = x + y = 2 + y = 2 + 3$

$\hookrightarrow y > 0$

$\hookrightarrow z = z + 1 = (2 + 3) + 1 = 6 \Rightarrow \underline{\underline{z = 6}}$ ✓