Lucerne University of
Applied Sciences and Arts

HOCHSCHULE
LUZERN

Informatik
FH Zentralschweiz

Counting - Übung

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

I.BA_DMATH, Semesterwoche 5

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Die mit grossen römischen Zahlen gekennzeichneten Aufgaben **müssen** bearbeitet werden und die Lösungen dieser Aufgaben werden kontolliert und bewertet. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Referenz: *Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, McGraw-Hill International Edition, 6. Auflage,* **kurz: KR**

Grundlagen des Zählens

1. **KR, Abschnitt 5.1, Aufgabe 7:** Wieviele Monogramme (oder Benutzernamen) mit 3 Buchstaben gibt es?

I. **KR, Abschnitt 5.1, Aufgabe 15:** Wieviele Worte mit höchstens 4 Buchstaben gibt es?

2. **KR, Abschnitt 5.1, Aufgabe 21a-d:** Wieviele ganze Zahlen zwischen 100 und 999 (beide Zahlen inklusive) gibt es,
   a) die durch 7 teilbar sind?
   b) die ungerade sind?
   c) deren drei Dezimalstellen gleich sind?
   d) die nicht durch 4 teilbar sind?

3. **KR, Abschnitt 5.1, Aufgabe 23a:** Wieviele Zahlen mit 3 Dezimalstellen gibt es, die keine Ziffer dreimal enthalten?

4. **KR, Abschnitt 5.1, Aufgabe 3:** Eine Multiple-Choice Prüfung enthält 10 Fragen und jeweils 4 mögliche Antworten.
   a) Wieviele Möglichkeiten hat ein Student, diese Prüfung zu „lösen”, wenn er jede Frage beantwortet?
   b) Wieviele Möglichkeiten hat ein Student, diese Prüfung zu „lösen”, wenn er auch Antworten auslassen kann?

Schubfachprinzip

II. **KR, Abschnitt 5.2, Aufgabe 5:** Zeigen Sie, dass sich in jeder Menge von 5 ganzen Zahlen (mindestens) zwei befinden, die bei Division durch 4 gleichen Rest haben.

5. **KR, Abschnitt 5.2, Aufgabe 13a:** Beweisen Sie: Wählt man 5 natürliche Zahlen aus den ersten 8 natürlichen Zahlen aus, so gibt es ein Paar (von diesen Zahlen) mit der Summe 9.

Permutationen und Kombinationen

6. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 1:** Listen Sie alle Permutationen von $\{a,b,c\}$ auf.
7. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 3:** Wieviele Permutationen von $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ enden auf a?
8. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgaben 5a-c und 6a-c:** Berechnen Sie: $P(6,3)$, $P(6,5)$ und $P(8,1)$ sowie $C(5,1)$, $C(5,3)$ und $C(8,4)$.
9. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 11a+b:** Wieviele binäre Strings der Länge 10 enthalten
   a) genau viermal die 1?
   b) höchstens viermal die 1?
10. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 17:** Wieviele Teilmengen mit mehr als 2 Elementen hat eine Menge mit 100 Elementen?
11. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 19a+b:** Eine Münze wird zehnmal geworfen.
    a) Wieviele mögliche Ausgänge hat dieses Experiment?
    b) Wieviele mögliche Ausgänge, die genau dreimal Kopf enthalten, hat dieses Experiment?
12. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 25a-d:** Einhundert Lose, durchnumeriert von 1 bis 100, werden an 100 verschiedene Leute verkauft. Es sollen vier verschiedene Preise verlost werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Priese zu verteilen,
    a) falls man keine Einschränkung macht?
    b) falls die Person mit Los 47 den Hauptpreis gewinnen soll?
    c) falls die Person mit Los 47 einen der Preise gewinnen soll?
    d) falls die Person mit Los 47 keinen Preis gewinnen soll?
13. **KR, Abschnitt 5.4, Aufgabe 3:** Berechnen Sie $(x+y)^6$.
14. **KR, Abschnitt 5.4, Aufgabe 9:** Bestimmen Sie den Koeffizienten von $x^{101}y^{99}$ in $(2x-3y)^{200}$.

III. **KR, Abschnitt 5.4, Aufgabe 23:** Zeigen Sie, dass für alle positiven ganzen Zahlen n und k die folgende Relation gilt:

$$\binom{n+1}{k} \quad = \quad \frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1}.$$

Nutzen Sie diese Identität, um eine rekursive Definition der Binomialkoeffizienten zu konstruieren.

15. **KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 1:** Auf wieviele Arten können 5 Elemente aus einer Menge von 3 Elementen ausgewählt werden, wenn die Reihenfolge berücksichtigt wird und Wiederholungen erlaubt sind?

16. **KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 7:** Auf wieviele Arten können 3 Elemente aus einer Menge von 5 Elementen ausgewählt werden, wenn die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird und Wiederholungen erlaubt sind?

17. **KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 13:** Ein Buchhändler hat 3000 Kopien eines Buches. Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Bücher in seinen drei Filialen zu lagern, wenn die einzelnen Bücher nicht unterscheidbar sind?

18. **KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 15a-c:** Wieviele Lösungen hat die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \quad = \quad 21$$

wobei x_i für $i = 1, 2, 3, 4, 5$ eine nichtnegative ganze Zahl ist, mit

a) $x_1 \geq 1$?

b) $x_i \geq 2$ für $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

c) $0 \leq x_1 \leq 10$?

IV. **KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 29:** Wieviele verschiedene binäre Strings können gebildet werden, wenn ein String stets mit einer 1 beginnen muss, ausserdem stets genau drei weitere 1 Bits enthalten muss, stets genau zwölf 0 Bits enthalten muss **und** jedem 1 Bit mindestens zwei 0 Bits folgen müssen?

19 **KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 51:** Wieviele Möglichkeiten gibt es, 6 unterscheidbare Objekte in 4 ununterscheidbare Fächer zu verteilen, so dass jedes der Fächer mindestens ein Objekt enthält?

Lösungen

1. 26^3

I. $475'255$ (leeren String nicht vergessen)

2. $a)$ 128, $b)$ 450, $c)$ 9, $d)$ 675
3. 990
4. $a)$ 4^{10} und $b)$ 5^{10}

II. Geben Sie eine „hieb- und stichfeste“ Begründung!

5. Bilden Sie 2-elementige Teilmengen der ersten 8 natürlichen Zahlen, so dass die Summe der Elemente jeweils 9 ist. Wieviele gibt es davon? Nutzen Sie das Schubfachprinzip.
6. abc, acb, bac, bca, cab, cba
7. 720
8. 120, 720, 8, 5, 10, 70
9. $a)$ 210, $b)$ 386
10. $2^{100} - 5051$
11. $a)$ 1024, $b)$ 120
12. $a)$ $94'109'400$, $b)$ $941'094$, $c)$ $3'764'376$, $d)$ $90'345'024$
13. $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$
14. $-2^{101}3^{99}\binom{200}{99}$

III. Führen Sie die fehlenden Rechenschritte aus! Nutzen Sie die Definition der Fakultät (und deren Rekursion).

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \ldots\ldots = \frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1}$$

15. 243
16. 35
17. $4'504'501$
18. $a)$ $10'626$, $b)$ $1'365$, $c)$ $11'649$

IV. 35

19. $20 + 45 = 65$

Grundlagen des Zählens

1. **KR, Abschnitt 5.1, Aufgabe 7:** Wieviele Monogramme (oder Benutzernamen) mit 3 Buchstaben gibt es?
1. **KR, Abschnitt 5.1, Aufgabe 15:** Wieviele Worte mit höchstens 4 Buchstaben gibt es?
2. **KR, Abschnitt 5.1, Aufgabe 21a-d:** Wieviele ganze Zahlen zwischen 100 und 999 (beide Zahlen inklusive) gibt es,
   a) die durch 7 teilbar sind?
   b) die ungerade sind?
   c) deren drei Dezimalstellen gleich sind?
   d) die nicht durch 4 teilbar sind?
3. **KR, Abschnitt 5.1, Aufgabe 23a:** Wieviele Zahlen mit 3 Dezimalstellen gibt es, die keine Ziffer dreimal enthalten?
4. **KR, Abschnitt 5.1, Aufgabe 3:** Eine Multiple-Choice Prüfung enthält 10 Fragen und jeweils 4 mögliche Antworten.
   a) Wieviele Möglichkeiten hat ein Student, diese Prüfung zu „lösen", wenn er jede Frage beantwortet?
   b) Wieviele Möglichkeiten hat ein Student, diese Prüfung zu „lösen", wenn er auch Antworten auslassen kann?

1. Anz. Buchstaben: 26
Länge : 3

$$\left.\begin{array}{l}\text{Anz. Buchstaben: } 26\\ \text{Länge: } 3\end{array}\right\} 26 \cdot 26 \cdot 26 = \underline{\underline{26^3}}$$

I. Anz Buchstaben: 26

Worte mit 0 Buchstaben (leerer String): 1
Worte mit 1 Buchstaben: 26^1
Worte mit 2 Buchstaben: 26^2
Worte mit 3 Buchstaben: 26^3
Worte mit 4 Buchstaben: 26^4

$$26^1 + 26^2 + 26^3 + 26^4 + 1 = \underline{\underline{475'255}}$$

2. ganze Zahlen zwischen 100 und 999 (inklusive)
↳ $999 - 100 + 1 = 900$

a) durch 7 teilbar: $\frac{n}{7} \Rightarrow \frac{900}{7} \approx 128.57 \Rightarrow$ $\underline{\underline{128 \text{ Zahlen}}}$ (immer abrunden!)

b) durch 2 teilbar: $\frac{n}{2} \Rightarrow \frac{900}{2} = \underline{\underline{450 \text{ Zahlen}}}$

c) drei Dezimalstellen gleich: $1\text{-}9 \mid 1\text{-}9 \mid 1\text{-}9 = \underline{\underline{9 \text{ Zahlen}}}$
↳ (111, 222, 333, …)

d) nicht d. 4 teilbar: $900 - \frac{900}{4} = 900 - 225 = \underline{\underline{675 \text{ Zahlen}}}$

3. 10^3 = # Zahlen mit 3 Dezimalstellen

$\{000, 111, \ldots, 888, 999\}$ = 10 Zahlen mit gleicher Ziffer

$\Rightarrow \underline{\underline{10^3 - 10 = 990}}$ # Zahlen ohne 3 gleiche Ziffern

4. a) 10 Fragen

4 Antworten

$\Rightarrow \underline{\underline{4^{10}}}$

b) 10 Fragen

4 Antworten

1 zusätzliche Antwort

↳ ("keine Antwort")

$\Rightarrow \underline{\underline{(4+1)^{10}}}$

Schubfachprinzip

~~4.~~ **KR, Abschnitt 5.2, Aufgabe 5:** Zeigen Sie, dass sich in jeder Menge von 5 ganzen Zahlen (mindestens) zwei befinden, die bei Division durch 4 gleichen Rest haben.

~~5.~~ **KR, Abschnitt 5.2, Aufgabe 13a:** Beweisen Sie: Wählt man 5 natürliche Zahlen aus den ersten 8 natürlichen Zahlen aus, so gibt es ein Paar (von diesen Zahlen) mit der Summe 9.

4. Menge 5 ganzen Zahlen

mind. 2, die bei Division durch 4 gleichen Rest

Rest bei Division d. 4:

$\{0, 1, 2, 3\} \Rightarrow \# \, 4$ Möglichkeiten

$\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

Menge von 5 ganzen Elementen:

$\Rightarrow$ 1 Element übrig = 1 doppelt

$k = 4 \Rightarrow k+1 = 5$

heisst <u>1 Element muss</u> den gleichen Rest haben

5. Paare mit der Summe 9:

$\underset{1}{\{1/8\}}, \underset{2}{\{2/7\}}, \underset{3}{\{3/6\}}, \underset{4}{\{4/5\}} \Rightarrow \# \, 4$ Möglichkeiten

$k = 4 \Rightarrow k + 1 = 5$

d.h. wenn man 5 n. Zahlen wählt von einer möglichen Menge von 4 ist es per Definition sicher, dass 1 Element doppelt gewählt wird.

Permutationen und Kombinationen

6. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 1:** Listen Sie alle Permutationen von $\{a,b,c\}$ auf.
7. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 3:** Wieviele Permutationen von $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ enden auf a?
8. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgaben 5a-c und 6a-c:** Berechnen Sie: $P(6,3)$, $P(6,5)$ und $P(8,1)$ sowie $C(5,1)$, $C(5,3)$ und $C(8,4)$.
9. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 11a+b:** Wieviele binäre Strings der Länge 10 enthalten
   a) genau viermal die 1?
   b) höchstens viermal die 1?
10. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 17:** Wieviele Teilmengen mit mehr als 2 Elementen hat eine Menge mit 100 Elementen?

6. Permutationen von $\{a,b,c\}$

$\{a,b,c\}, \{a,c,b\}, \{b,a,c\}, \{b,c,a\}, \{c,b,a\}, \{c,a,b\}$

7. Permutationen von $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ enden auf $\{a\}$

$\{b,c,d,e,f,g\}$ enden auf $\{a\}$

$\hookrightarrow$ Permutationen #6 $\Rightarrow$ $\underline{\underline{6! = 720}}$

8. $P(6,3) \Rightarrow 6 \cdot 5 \cdot 4 = \underline{\underline{120}}$ P $\Rightarrow$ Permutationen

$P(6,5) \Rightarrow 6! = \underline{\underline{720}}$

$P(8,1) \Rightarrow \underline{\underline{8}}$

$C(5,1) \Rightarrow \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{120}{24} = \underline{\underline{5}}$ C $\Rightarrow$ Kombinationen

$C(5,3) \Rightarrow \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{12} = \underline{\underline{10}}$

$C(8,4) \Rightarrow \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{40'320}{576} = \underline{\underline{70}}$

9. a) Kombination von der Länge 10 mit 4 gleichen

$\Rightarrow C(10,4) = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{3'628'800}{17'280} = \underline{\underline{210}}$ Kombinationen

b) Kombination mit höchstens 4 gleichen: (Kombination mit 0,1,2,3,4)

$\Rightarrow C(10,4) + C(10,3) + C(10,2) + C(10,1) + C(10,0) =$

$210 + 120 + 45 + 10 + 1 = \underline{\underline{386}}$

10. gesamte Teilmenge $= 2^{100}$

Kombinationen 2 El. $= \binom{100}{2} = 4950$

Kombinationen 1 El. $= \binom{100}{1} = 100$

Kombinationen 0 El. $= \binom{100}{0} = 1$

$$\Rightarrow 2^{100} - \left(\binom{100}{2} + \binom{100}{1} + \binom{100}{0}\right) = 2^{100} - (4950 + 100 + 1) = \underline{\underline{2^{100} - 5051}}$$

11. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 19a+b:** Eine Münze wird zehnmal geworfen.
   a) Wieviele mögliche Ausgänge hat dieses Experiment?
   b) Wieviele mögliche Ausgänge, die genau dreimal Kopf enthalten, hat dieses Experiment?
12. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 25a-d:** Einhundert Lose, durchnumeriert von 1 bis 100, werden an 100 verschiedene Leute verkauft. Es sollen vier verschiedene Preise verlost werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Priese zu verteilen,
   a) falls man keine Einschränkung macht?
   b) falls die Person mit Los 47 den Hauptpreis gewinnen soll?
   c) falls die Person mit Los 47 einen der Preise gewinnen soll?
   d) falls die Person mit Los 47 keinen Preis gewinnen soll?
13. **KR, Abschnitt 5.4, Aufgabe 3:** Berechnen Sie $(x+y)^6$.
14. **KR, Abschnitt 5.4, Aufgabe 9:** Bestimmen Sie den Koeffizienten von $x^{101}y^{99}$ in $(2x-3y)^{200}$.
11. **KR, Abschnitt 5.4, Aufgabe 23:** Zeigen Sie, dass für alle positiven ganzen Zahlen n und k die folgende Relation gilt:

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1}.$$

   Nutzen Sie diese Identität, um eine rekursive Definition der Binomialkoeffizienten zu konstruieren.
15. **KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 1:** Auf wieviele Arten können 5 Elemente aus einer Menge von 3 Elementen ausgewählt werden, wenn die Reihenfolge berücksichtigt wird und Wiederholungen erlaubt sind?

11. a) $2^{10} = \underline{\underline{1024}}$

b) $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{3'628'800}{30'240} = \underline{\underline{120}}$

12. a) $\binom{100}{4} = \underline{\underline{94'109'400}}$ (# Lose / # Preise)

b) $\binom{100-1}{4-1} = \underline{\underline{941'094}}$ (# Lose − 1 vorbestimmt / # Preise − 1 Hauptp.)

c) $4 \cdot P(99,3) = \underline{\underline{3'764'376}}$

d) $\binom{99}{4} = \underline{\underline{90'345'024}}$

13. $(x+y)^6 = \sum_{i=6}^{6} \binom{6}{i} x^{6+i} y^i =$

$$\underline{\underline{= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6}}$$

14. ?

III. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{n+1}{k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}$$

$$\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{k(k-1)!(n+1-k)!}$$

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))}$$

IV. **KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 29:** Wieviele verschiedene binäre Strings können gebildet werden, wenn ein String stets mit einer 1 beginnen muss, ausserdem stets genau drei weitere 1 Bits enthalten muss, stets genau zwölf 0 Bits enthalten muss **und** jedem 1 Bit mindestens zwei 0 Bits folgen müssen?

$\boxed{100}$

1 0 0
1 0 0
1 0 0
1 0 0
1 0 0
0
0
0
0 → 2 verschiedene, 7 mögliche Positionen

$$\frac{7!}{3!\,4!} = \underline{\underline{35}}$$