Lucerne University of
Applied Sciences and Arts

HOCHSCHULE
LUZERN

Informatik
FH Zentralschweiz

Discrete Probability I - Übung

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

I.BA_DMATH, Semesterwoche 6

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Die mit grossen römischen Zahlen gekennzeichneten Aufgaben **müssen** bearbeitet werden und die Lösungen dieser Aufgaben werden kontolliert und bewertet. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Referenz: *Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, McGraw-Hill International Edition, 6. Auflage,* ***kurz: KR***

Wahrscheinlichkeitstheorie

1. **KR, Abschnitt 6.1, Aufgabe 5:** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme von zwei geworfenen Würfeln gerade ist.

2. **KR, Abschnitt 6.1, Aufgabe 7:** Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Münze bei 6 Würfen auch sechsmal „Kopf" zeigt?

3. **KR, Abschnitt 6.1, Aufgabe 21:** Ein Würfel wird sechsmal geworfen. Wie gross ist die Warscheinlichkeit, dass dabei nie eine gerade Zahl erscheint?

4. **KR, Abschnitt 6.1, Aufgabe 23:** Aus den ersten 100 natürlichen Zahlen (inklusive 100) wird zufällig eine Zahl ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Zahl durch 5 oder 7 teilbar?

5. **KR, Abschnitt 6.1, Aufgabe 25b:** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, beim Lotto „6 aus 52" sechs Richtige zu wählen.

I. **KR, Abschnitt 6.1, Aufgabe 37:** Auf welches der beiden Ereignisse sollte man eher wetten (welches Ereignis ist wahrscheinlicher): Augensumme 9 beim Werfen von 2 Würfeln oder Augensumme 9 beim Werfen von 3 Würfeln?

6. **KR, Abschnitt 6.2, Aufgabe 3:** Ein gezinkter Würfel hat die Eigenschaft, dass das Ereignis „werfen einer 2 oder einer 4" dreimal so häufig auftritt, wie das Ereignis „werfen einer 1, 3, 5 oder 6". Wir gehen weiterhin davon aus, dass „2" und „4" mit gleicher Wahrscheinlichkeit und dass „1", „3", „5" und „6" mit gleicher (aber wohl anderer) Wahrscheinlichkeit fallen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse.

7. **KR, Abschnitt 6.2, Aufgabe 5:** Wir betrachten ein Paar gezinkter Würfel. Die Wahrscheinlichkeit für eine „4" beim ersten Würfel ist $2/7$ und die Wahrscheinlichkeit für eine „3" beim zweiten Würfel ist $2/7$. Alle anderen Elementarereignisse beider Würfel treten jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $1/7$ auf. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme 7 auftritt.

8. **KR, Abschnitt 6.2, Aufgabe 11:** Seien E und F Ereignisse mit $p(E) = 0.7$ und $p(F) = 0.5$. Beweisen Sie die beiden Ungleichungen $p(E \cup F) \geq 0.7$ und $p(E \cap F) \geq 0.2$.

9. **KR, Abschnitt 6.2, Aufgabe 21:** Finden Sie die kleinste Anzahl von Leuten, so dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei von ihnen
   - am 1. April Geburtstag feiern, grösser als $1/2$ ist und
   - am selben Tag Geburtstag feiern, grösser als $1/2$ ist.

II. Eine Kiste enthält 30 rote, 30 weisse und 30 blaue Kugeln. Nun werden zufällig 10 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Farbe bei dieser Wahl nicht vorkommt?

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

10. **KR, Abschnitt 6.2, Aufgabe 23:** Eine faire Münze wird fünfmal geworfen. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei genau viermal „Kopf" erscheint, falls beim ersten Wurf „Kopf" gefallen ist.

11. **KR, Abschnitt 6.2, Aufgabe 27b:** Eine Familie habe 4 Kinder und wir betrachten die beiden Ereignisse $E =$„die Familie hat Kinder beider Geschlechter" und $F =$„die Familie hat höchstens einen Jungen". Sind die beiden Ereignisse unabhängig?

III. **KR, Abschnitt 6.2, Aufgabe 28:** Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein neugeborenes Kind ein Junge ist, sei 0.51. Ausserdem wollen wir annehmen, dass Geburten innerhalb einer Familie unabhängige Ereignisse sind. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Familie mit 5 Kindern
   a) genau drei Jungen hat,
   b) mindestens einen Jungen hat,
   c) mindestens ein Mädchen hat,
   d) nur Kinder gleichen Geschlechts hat.

12. **KR, Abschnitt 6.2, Aufgabe 35c:** Ein Bernoulliversuch mit (Einzel)Erfolgswahrscheinlichkeit p wird n-mal durchgeführt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei höchstens ein Misserfolg auftritt.

IV. Verwenden Sie die Multiplikationsregel

$$P(R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4) = P(R_1)P(B_2|R_1)P(R_3|R_1 \cap B_2)P(B_4|R_1 \cap B_2 \cap R_3)$$

um das nachfolgende Problem zu lösen (dabei bedeutet R_j, dass bei der j-ten Ziehung ein roter Ball gezogen wurde; analog bedeutet B_j, dass bei der j-Ziehung ein blauer Ball gezogen wurde).

Problem: Aus einer Kiste mit r ($r \geq 2$) roten und b ($b \geq 2$) blauen Kugeln werden der Reihe nach vier Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Währscheinlichkeit, dass man nacheinander zuerst eine rote, dann eine blaue, dann wieder eine rote und schliesslich noch eine blaue Kugel zieht?

Satz von Bayes

13. Aus drei Urnen U_1, U_2 und U_3 wird zufällig eine Urne ausgewählt, wobei jede Urne dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt, in die Auswahl zu gelangen. Die drei Urnen enthalten weisse und schwarze Kugeln, wobei sich in Urne

    - U_1 : zwei weisse und fünf schwarze
    - U_2 : vier weisse und vier schwarze
    - U_3 : sieben weisse und vier schwarze

    Kugeln befinden. Aus der zufällig gewählten Urne wird nun eine Kugel gezogen.

    a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogenen Kugel weiss ist?

    b) Die gezogene Kugel ist schwarz. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie aus Urne U_2 stammt?

14. Wir betrachten das Zufallsexperiment, das aus der Übertragung eines Bits auf einem binären Kanal besteht. Dabei werden die Zeichen 0 und 1 im Verhältnis $3:4$ gesendet, 0 wird mit der Wahrscheinlichkeit $p_{01} = 0.2$ falsch (d.h. als 1) und 1 wird mit der Wahrscheinlichkeit $p_{10} = 0.3$ falsch (d.h. als 0) übertragen.

    a) Geben Sie einen geeigneten Raum S der möglichen Ausgänge des Experimentes an.

    b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, eine 0 bzw. eine 1 zu empfangen?

    c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine 0 gesendet wurde, falls Sie eine 0 empfangen haben?

    d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine 1 gesendet wurde, falls Sie eine 1 empfangen haben?

V. Die Produktion einer Abteilung wird von zwei Kontrolleuren mit den Anteilen 30% bzw. 70% sortiert. Dabei ist für den ersten bzw. zweiten Kontrolleur die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Fehlentscheidung zu treffen, gleich 0.03 bzw. 0.05. Es wird beim Versand ein fehlsortiertes Teil gefunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde es

    a) vom zweiten Kontrolleur sortiert?

    b) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Teil richtig einsortiert wurde.

Lösungen

1. 1/2
2. 1/64
3. 1/64
4. 8/25
5. $1/C(52,6) = 1/20'358'520$

I. Drei Würfel (Begründung!)

6. $p(1) = p(3) = p(5) = p(6) = 1/16$ und $p(2) = p(4) = 3/8$
7. 9/49
8. Natürlich gilt $p(E \cup F) \geq p(E) = 0.7$ und $p(E \cup F) \leq 1$. Nutzen Sie nun die allgemeine Formel $p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F)$ usw.
9. Versuchen Sie zunächst die folgenden beiden Formeln herzuleiten. Bestimmen Sie dann jeweils das kleinste n, so dass die Wahrscheinlichkeit grösser als 1/2 ist.

$$p(\text{„mind. 2 von n Personen am 01.04. Geburtstag''}) = 1 - \frac{365^n + n \cdot 365^{n-1}}{366^n}$$
$$p(\text{„mind. 2 von n Personen am selben Tag Geburtstag''}) = 1 - \frac{366 \cdot 365 \cdots (366 - n + 1)}{366^n}$$

Mehr Informationen zu dieser Aufgabe und Begründung für die Lösung in *Student Solutions Guide for Discrete Mathematics and Its Applications*

II. $\approx 3.95\%$

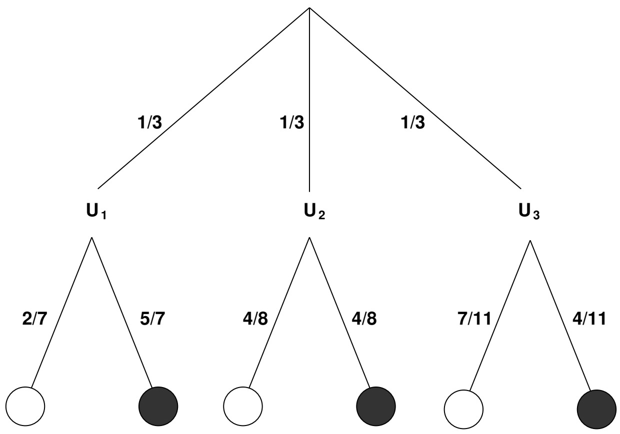
10. 1/4
11. Nicht unabhängig. Begründung!

III. $a)\ \approx 0.3185$, $b)\ \approx 0.9717$, $c)\ \approx 0.9655$, $d)\ \approx 0.0628$

12. $p^n + n \cdot p^{n-1} \cdot (1-p)$

IV. $p = \frac{r}{r+b} \cdot \frac{b}{r+b-1} \cdot \frac{r-1}{r+b-2} \cdot \frac{b-1}{r+b-3}$

13. Mit dem Baumdiagramm in der Abbildung stellen wir die Ziehung nach.



a) Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$P(\text{weiss}) = P(\text{weiss}|U_1)\,P(U_1) + P(\text{weiss}|U_2)\,P(U_2) + P(\text{weiss}|U_3)\,P(U_3)$$

$$= \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{8}\cdot\frac{1}{3} + \frac{7}{11}\cdot\frac{1}{3} \;=\; \frac{73}{154} \;\approx\; 0.474$$

b) Gesucht ist hier die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(U_2|\text{schwarz})$. Nach dem Satz von Bayes gilt:

$$P(U_2|\text{schwarz}) = \frac{P(\text{schwarz}|U_2)\cdot P(U_2)}{P(\text{schwarz})}$$

Wir entnehmen aus der Aufgabe $P(\text{schwarz}|U_2) = 4/8$ und $P(U_2) = 1/3$. Aus dem Ergebnis der ersten Teilaufgabe folgt weiterhin $P(\text{schwarz}) = 1 - P(\text{weiss}) = \frac{81}{154} \approx 0.526$, also folgt insgesamt

$$P(U_2|\text{schwarz}) \;=\; \frac{\frac{4}{8}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{81}{154}} \;\approx\; 0.317.$$

14. Wir kürzen die Ereignisse wie folgt ab und können der Aufgabenstellung die folgenden Wahrscheinlichkeiten bzw. bedingten Wahrscheinlichkeiten entnehmen:

- $S0$: Sende 0 mit $p(S0) \;=\; 3/7$
- $S1 = \overline{S0}$: Sende 1 mit $p(S1) \;=\; 1 - 3/7 = 4/7$
- $E0$: Empfange 0
- $E1 = \overline{E0}$: Empfange 1
- $p(E1|S0) \;=\; 2/10$ (WK dass eine 0 falsch übertragen wird)
- $p(E0|S1) \;=\; 3/10$ (WK dass eine 1 falsch übertragen wird)

Als Raum aller möglichen Ausgänge dieses Experimentes bietet sich die 4-elementige Menge

$$\mathscr{S} \;=\; \{S0\cap E0, S0\cap E1, S1\cap E0, S1\cap E1\}$$

an. Mit dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit gilt zunächst:

$$\begin{aligned} p(E0) &= p(S0)\cdot p(E0|S0) + p(S1)\cdot p(E0|S1) \;=\; \frac{3}{7}\cdot\frac{8}{10} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{10} \;=\; \frac{18}{35} \;\approx\; 0.5143 \\ p(E1) &= 1 - p(E0) \;=\; \frac{17}{35} \;=\; 0.4857 \qquad \text{(Antwort auf Teil 2)} \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Bayes gilt weiterhin

$$\begin{aligned} p(S0|E0) &= \frac{p(S0)\cdot p(E0|S0)}{p(E0)} \;=\; \frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{8}{10}}{\frac{18}{35}} \;=\; \frac{2}{3} \;\approx\; 0.6667 \\ p(S1|E1) &= \frac{p(S1)\cdot p(E1|S1)}{p(E1)} \;=\; \frac{\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{10}}{\frac{17}{35}} \;=\; \frac{14}{17} \;\approx\; 0.8235 \end{aligned}$$

V. $a) \;\approx\; 0.7955$ und $b)$ 0.956

Wahrscheinlichkeitstheorie

1. ~~1.~~ **KR, Abschnitt 6.1, Aufgabe 5:** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme von zwei geworfenen Würfeln gerade ist.
2. ~~2.~~ **KR, Abschnitt 6.1, Aufgabe 7:** Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Münze bei 6 Würfen auch sechsmal „Kopf" zeigt?
3. **KR, Abschnitt 6.1, Aufgabe 21:** Ein Würfel wird sechsmal geworfen. Wie gross ist die Warscheinlichkeit, dass dabei nie eine gerade Zahl erscheint?
4. ~~4.~~ **KR, Abschnitt 6.1, Aufgabe 23:** Aus den ersten 100 natürlichen Zahlen (inklusive 100) wird zufällig eine Zahl ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Zahl durch 5 oder 7 teilbar?
5. ~~5.~~ **KR, Abschnitt 6.1, Aufgabe 25b:** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, beim Lotto „6 aus 52" sechs Richtige zu wählen.
6. ~~1.~~ **KR, Abschnitt 6.1, Aufgabe 37:** Auf welches der beiden Ereignisse sollte man eher wetten (welches Ereignis ist wahrscheinlicher): Augensumme 9 beim Werfen von 2 Würfeln oder Augensumme 9 beim Werfen von 3 Würfeln?
7. 6. **KR, Abschnitt 6.2, Aufgabe 3:** Ein gezinkter Würfel hat die Eigenschaft, dass das Ereignis „werfen einer 2 oder einer 4" dreimal so häufig auftritt, wie das Ereignis „werfen einer 1, 3, 5 oder 6". Wir gehen weiterhin davon aus, dass „2" und „4" mit gleicher Wahrscheinlichkeit und dass „1", „3", „5" und „6" mit gleicher (aber wohl anderer) Wahrscheinlichkeit fallen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse.

1. $|A| = \{2,4,6\} = 3$

$|S| = \{1,2,3,4,5,6\} = 6$

$\frac{|A|}{|S|} = \frac{3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ od. $\frac{|A|}{|S|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

2. $|A| = \{KKKKKK\} = 1$ Fall (K = Kopf / Z = Zahl)

$|S| = 2^6 = 64$

$\frac{|A|}{|S|} = \underline{\frac{1}{64}}$

3. $|A| =$

$|S| = 6^6$?

4. $|A| = 20 + 14 - 2$ Nummern d. 5 = 100/5 = 20

$|S| = 100$ Nummern d. 7 = 100/7 = 14

$\frac{|A|}{|S|} = \frac{32}{100} = \underline{\underline{0.32}}$ $N5 \cap N7 = \{35; 70\} = 2$

5. $|A| = 1$

$|S| = \binom{52}{6}$

$$\frac{|A|}{|S|} = \frac{1}{\binom{52}{6}} = \underline{\underline{\frac{1}{20'358'520}}}$$

I. a_2 = "Augensumme 9 mit 2 Würfeln"

a_3 = "Augensumme 9 mit 3 Würfeln"

$|a_2| = \{(3;6),(4;5),(5;4),(6;3)\} = \#4$

$|a_3| = \{(1;2;6),(1;3;5),(1;4;4),\ldots,(3;3;3)\} = \#25$

$|S_2| = 6^2 = 36$

$|S_3| = 6^3 = 216$

$$p(A_2) = \frac{|a_2|}{|S_2|} = \frac{4}{36} = 0.\bar{1}$$

$$p(A_3) = \frac{|a_3|}{|S_3|} = \frac{25}{216} = 0.1157$$

$$\underline{\underline{p(A_3) > p(A_2)}}$$

II. A = "Es kommt eine Farbe nicht vor"

$|A| = \binom{60}{10}$

$|S| = \binom{90}{10}$ = "alle Farben"

$$p(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\binom{60}{10}}{\binom{90}{10}} = \underline{\underline{0{,}013179}}$$

III. $p = 0.51$ $\qquad$ $\#\text{ Jungen} = \binom{5}{n} p^{n}$

$1-p = 0.49$ $\qquad$ $\#\text{ Mädchen} = (1-p)^{5-n}$

a) $p(3) = \binom{5}{3} p^{3} (1-p)^{5-3} = \underline{\underline{0{,}31849}}$

b) $p(\min J) = 1-(1-p)^{n} = 1-(1-0.51)^{5} = \underline{\underline{0.9717}}$

c) $p(\min M) = 1-(1-p)^{n} = 1-(1-0.49)^{5} = \underline{\underline{0.965497}}$

d) $(1-0.9717) + (1-0.965497) = \underline{\underline{0{,}06275}}$

IV.

r = rot ; b = blau

$p(R_1) = \frac{r}{r+b}$

$p(B_2 \mid R_1) = \frac{b}{r+b-1}$

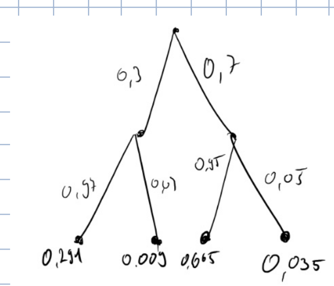
$p(R_3 \mid R_1 \cap B_2) = \frac{r-1}{r+b-2}$

$p(B_4 \mid R_1 \cap B_2 \cap R_3) = \frac{b-1}{r+b-3}$

$p(R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4) = \frac{r \cdot b \cdot (r-1)(b-1)}{(r+b)(r+b-1)(r+b-2)(r+b-3)}$

V. a) 1. Kontrolleure $=$ 30 % / 0.03

2\. Kontrolleure $=$ 70 % / 0.05



A = „falsch sortiert"

B = „vom zweiten Kontrolleur geprüft"

$p(B \mid A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$

$p(B \cap A) = \frac{0{,}035}{0{,}009 + 0{,}035} = \underline{\underline{0{,}7954}}$

b) $p(A) = 0{,}7 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}03 = 0{,}044$

$p(\text{"richtig sortiert"}) = 1 - 0{,}044 = \underline{\underline{0{,}956}}$