Lucerne University of
Applied Sciences and Arts

HOCHSCHULE
LUZERN

Informatik
FH Zentralschweiz

Foundations - Übung

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

I.BA_DMATH, Semesterwoche 1

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Die mit grossen römischen Zahlen gekennzeichneten Aufgaben **müssen** bearbeitet werden und die Lösungen dieser Aufgaben werden kontolliert und bewertet. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Referenz: *Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, McGraw-Hill International Edition, 6. Auflage,* ***kurz: KR***

Logik

1. **KR, Abschnitt 1.2, Aufgabe 5:** Verwenden Sie eine Wahrheitstabelle um zu zeigen, dass das Distributivgesetz $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ gilt.

I. **KR, Abschnitt 1.2, Aufgabe 13a:** Verwenden Sie eine Wahrheitstabelle um zu zeigen, dass das Absorbtionsgesetz $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ gilt.

2. **KR, Abschnitt 1.2, Aufgabe 19:** Zeigen Sie, dass $\neg p \leftrightarrow q$ und $p \leftrightarrow \neg q$ logisch äquivalent sind.

II. **KR, Abschnitt 1.2, Aufgabe 29:** Zeigen Sie unter Verwendung einer Wahrheitstabelle, dass $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ eine Tautologie ist.

III. **KR, Abschnitt 1.2, Aufgabe 29:** Zeigen Sie unter Verwendung der logischen Äquivalenzregeln (**KR**, Seiten 24 und 25), dass $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ eine Tautologie ist.

Hinweis: Die Aufgabe ist nicht leicht zu lösen. Versuchen Sie jeden Umformungsschritt in der Lösung durch die Regeln (**KR**, Seiten 24 und 25) zu begründen. Beachten Sie, dass stets $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$ gilt.

Prädikate und Quantoren

3. **KR, Abschnitt 1.3, Aufgabe 11:** Sei $P(x)$ die Aussage "$x = x^2$" und die Universalmenge $\mathbb{Z}$. Was sind die Wahrheitswerte von
(a) $P(0)$, (b) $P(1)$, (c) $P(2)$, (d) $P(-1)$, (e) $\exists x P(x)$ und (f) $\forall x P(x)$.
Begründen Sie Ihre Aussagen.

IV. **KR, Abschnitt 1.3, Aufgabe 13:** Bestimme die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen, falls die Universalmenge $\mathbb{Z}$ ist:
(a) $\forall n\,(n+1 > n)$, (b) $\exists n\,(2n = 3n)$, (c) $\exists n\,(n = -n)$ und (d) $\forall n\,\left(n^2 \geq n\right)$.
Begründen Sie Ihre Aussagen.

4. **KR, Abschnitt 1.4, Aufgaben 27a, 27g:** Bestimmen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen wobei die Universalmenge die Menge aller ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist. Begründen Sie Ihre Aussagen.
(a) $\forall n \exists m\,\left(n^2 < m\right)$, und (b) $\exists n \exists m\,(n+m = 4 \wedge n-m = 1)$.

5. **KR, Abschnitt 1.4, Aufgabe 45:** Bestimmen Sie den Wahrheitswert von $\forall x \exists y\,(xy = 1)$ falls die Universalmenge (a) $\mathbb{R}-\{0\}$, (b) $\mathbb{Z}-\{0\}$, bzw. (c) $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ ist.

Beweise

6. **KR, Abschnitt 1.6, Aufgabe 1:** Beweisen Sie, dass die Summe zweier ungerader (ganzer) Zahlen gerade ist.

V. **KR, Abschnitt 1.6, Aufgabe 27:** Beweisen Sie, dass für eine positive ganze Zahl n folgendes gilt: n ist genau dann ungerade, wenn $5n+6$ ungerade ist.

   Hinweis: Die Behauptung ist eine Äquivalenzaussage (keine Implikation!), der Beweis sollte also aus zwei Teilen bestehen:

   a) n ungerade $\rightarrow 5n+6$ ungerade

   b) $5n+6$ ungerade $\rightarrow n$ ungerade

Lösungen

1.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

I. -

2. Die Proposition $\neg p \leftrightarrow q$ ist genau dann wahr, wenn $\neg p$ und q den selben Wahrheitswert haben, was bedeutet, dass p und q verschiedene Wahrheitswerte haben müssen. Wann ist der Ausdruck $p \leftrightarrow \neg q$ wahr??

II. -

III.

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r) &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \to (\neg p \vee r) \\
&\equiv \neg[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)] \vee (\neg p \vee r) \\
&\equiv [\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee r)] \vee (\neg p \vee r) \\
&\equiv [(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \vee (\neg p \vee r) \\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r \\
&\equiv [(p \wedge \neg q) \vee \neg p] \vee [(q \wedge \neg r) \vee r] \\
&\equiv [(p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)] \vee [(q \vee r) \wedge (\neg r \vee r)] \\
&\equiv [\mathbf{T} \wedge (\neg q \vee \neg p)] \vee [(q \vee r) \wedge \mathbf{T}] \\
&\equiv (\neg q \vee \neg p) \vee (q \vee r) \\
&\equiv \neg q \vee \neg p \vee q \vee r \\
&\equiv \neg q \vee q \vee \neg p \vee r \;\equiv\; \mathbf{T} \vee (\neg p \vee r) \;\equiv\; \mathbf{T}
\end{aligned}
$$

3. (a) wahr, (b) wahr, (c) falsch, (d) falsch, (e) wahr, (f) falsch. Sicher muss man bei den Aufgabenteilen (a)-(d) nicht lange überlegen. Versuchen Sie aber für die Teile (e) und (f) kurze Begründungen zu formulieren.

IV. (a) *wahr*, (b) *wahr*, (c) *wahr*, (d) *wahr* Jede dieser Aussagen **muss** (kurz) begründet werden.

4. (a) wahr, (b) falsch. Jede dieser Aussagen **muss** (kurz) begründet werden.

5. (a) wahr, (b) falsch, (c) wahr. Jede dieser Aussagen **muss** (kurz) begründet werden.

6. Erinnerung: Sei z eine ganze Zahl. Dann ist z gerade, falls es eine ganze Zahl z_0 gibt, so dass $z = 2z_0$. z ist ungerade, falls es eine ganze Zahl z_0 gibt, so dass $z = 2z_0 + 1$.

   Seien m und n zwei ungerade ganze Zahlen, d.h. beide Zahlen lassen sich wie folgt darstellen: $m = 2k+1$ und $n = 2l+1$. Für die Summe beider Zahlen folgt dann: $m+n \;=\; 2k+1+2l+1 \;=\; 2k+2l+2 \;=\; 2(k+l+1)$ und das ist eine gerade Zahl.

V.

I. $p \overset{\text{oder}}{\vee} (p \overset{\text{und}}{\wedge} q) \equiv p$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	f
f	f	f	f

II. $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$

r	p	q	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	f	w	w
w	f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	w	w	w	w
f	w	w	w	f	f	f	w
f	w	f	f	w	f	f	w
f	f	w	w	f	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Tautologie = alle wahr

III. $(p \to q) \land (q \to r) \to (p \to r)$

$$
\begin{aligned}
&& &\equiv (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r) \to (\neg p \lor r) \\
&& &\equiv \neg[(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r)] \lor (\neg p \lor r) \\
&\text{De Morgan's} && \\
&& &\equiv [\neg(\neg p \lor q) \lor \neg(\neg q \lor r)] \lor (\neg p \lor r) \\
&\text{De Morgan's} && \\
&& &\equiv [(p \land \neg q) \lor (q \land \neg r)] \lor (\neg p \lor r) \\
&\text{Klammern lösen} && \\
&& &\equiv (p \land \neg q) \lor (q \land \neg r) \lor \neg p \lor r \\
?\quad &\text{Kommutativ} && \\
&& &\equiv [(p \land \neg q) \lor \neg p] \lor [(q \land \neg r) \lor r] \\
&\text{Distributiv} && \\
&& &\equiv [(p \lor \neg p) \land (\neg q \lor \neg p)] \lor [(q \lor r) \land (\neg r \lor r)] \\
&\text{Negation} && \\
&& &\equiv [T \land (\neg q \lor \neg p)] \lor [(q \lor r) \land T] \\
&\text{Identität} && \\
&& &\equiv (\neg q \lor \neg p) \lor (q \lor r) \\
&\text{Klammern auflösen} && \\
&& &\equiv \neg q \lor \neg p \lor q \lor r \\
&\text{Kommutativ} && \\
&& &\equiv \neg q \lor q \lor \neg p \lor r \\
&\text{Negation} && \\
&& &\equiv T \lor (\neg p \lor r) \\
&\text{Dominanz} && \\
&& &\equiv \underline{\underline{T}}
\end{aligned}
$$

IV. (a) $\forall n\,(n+1 > n)$: wahr, weil jede Zahl + 1 grösser als die Zahl (n) ist

(b) $\exists n\,(2n = 3n)$: wahr, weil $2 \cdot 0 = 3 \cdot 0 \to 0 = 0$

(c) $\exists n\,(n = -n)$: wahr, weil $0 = -0 \to 0 = 0$

(d) $\forall n\,(n^2 \geq n)$: wahr, weil für jede Zahl die quadrierte Zahl grösser oder gleich der Zahl (n) ist

V. (a) n ungerade → $5n+6$ ungerade

$n \in \mathbb{N}$ ⇒ ungerade (Aufgabenstellung)

1. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \in \mathbb{N}$
2. $n+1$ → gerade, da n ungerade ist
3. $5n+6 \Rightarrow 5n+5+1 \Rightarrow 5(n+1)+1$
4. Da $+1$ am Schluss wird aus gerade immer ungerade

(b) $5n+6$ ungerade → n ungerade

$n \in \mathbb{N}$

1. $5n+6-1 \Rightarrow 5n+5 \Rightarrow$ gerade
2. $5(n+1) \Rightarrow$ gerade
3. Da $+1$ immer wird aus einer ungeraden n, eine gerade