## HOCHSCHULE LUZERN

**Informatik** FH Zentralschweiz

# **Counting - Übung**

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

I.BA DMATH, Semesterwoche 5

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Die mit grossen römischen Zahlen gekennzeichneten Aufgaben **müssen** bearbeitet werden und die Lösungen dieser Aufgaben werden kontolliert und bewertet. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Referenz: Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, McGraw-Hill International Edition, 6.

Auflage, kurz: KR

### Grundlagen des Zählens

- 1. **KR**, **Abschnitt 5.1**, **Aufgabe 7:** Wieviele Monogramme (oder Benutzernamen) mit 3 Buchstaben gibt es?
- I. KR, Abschnitt 5.1, Aufgabe 15: Wieviele Worte mit höchstens 4 Buchstaben gibt es?
- 2. **KR**, **Abschnitt 5.1**, **Aufgabe 21a-d:** Wieviele ganze Zahlen zwischen 100 und 999 (beide Zahlen inklusive) gibt es,
  - a) die durch 7 teilbar sind?
  - b) die ungerade sind?
  - c) deren drei Dezimalstellen gleich sind?
  - d) die nicht durch 4 teilbar sind?
- 3. **KR**, **Abschnitt 5.1**, **Aufgabe 23a:** Wieviele Zahlen mit 3 Dezimalstellen gibt es, die keine Ziffer dreimal enthalten?
- 4. **KR**, **Abschnitt 5.1**, **Aufgabe 3**: Eine Multiple-Choice Prüfung enthält 10 Fragen und jeweils 4 mögliche Antworten.
  - a) Wieviele Möglichkeiten hat ein Student, diese Prüfung zu "lösen", wenn er jede Frage beantwortet?
  - b) Wieviele Möglichkeiten hat ein Student, diese Prüfung zu "lösen", wenn er auch Antworten auslassen kann?

#### Schubfachprinzip

- II. **KR**, **Abschnitt 5.2**, **Aufgabe 5**: Zeigen Sie, dass sich in jeder Menge von 5 ganzen Zahlen (mindestens) zwei befinden, die bei Division durch 4 gleichen Rest haben.
- 5. **KR**, **Abschnitt 5.2**, **Aufgabe 13a:** Beweisen Sie: Wählt man 5 natürliche Zahlen aus den ersten 8 natürlichen Zahlen aus, so gibt es ein Paar (von diesen Zahlen) mit der Summe 9.

#### Permutationen und Kombinationen

- 6. **KR**, **Abschnitt 5.3**, **Aufgabe 1:** Listen Sie alle Permutationen von  $\{a,b,c\}$  auf.
- 7. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 3:** Wieviele Permutationen von  $\{a, b, c, d, e, f, g\}$  enden auf a?
- 8. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgaben 5a-c und 6a-c:** Berechnen Sie: P(6,3), P(6,5) und P(8,1) sowie C(5,1), C(5,3) und C(8,4).
- 9. KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 11a+b: Wieviele binäre Strings der Länge 10 enthalten
  - a) genau viermal die 1?
  - b) höchstens viermal die 1?
- 10. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 17:** Wieviele Teilmengen mit mehr als 2 Elementen hat eine Menge mit 100 Elementen?
- 11. **KR**, **Abschnitt 5.3**, **Aufgabe 19a+b:** Eine Münze wird zehnmal geworfen.
  - a) Wieviele mögliche Ausgänge hat dieses Experiment?
  - b) Wieviele mögliche Ausgänge, die genau dreimal Kopf enthalten, hat dieses Experiment?
- 12. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 25a-d:** Einhundert Lose, durchnumeriert von 1 bis 100, werden an 100 verschiedene Leute verkauft. Es sollen vier verschiedene Preise verlost werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Priese zu verteilen,
  - a) falls man keine Einschränkung macht?
  - b) falls die Person mit Los 47 den Hauptpreis gewinnen soll?
  - c) falls die Person mit Los 47 einen der Preise gewinnen soll?
  - d) falls die Person mit Los 47 keinen Preis gewinnen soll?
- 13. KR, Abschnitt 5.4, Aufgabe 3: Berechnen Sie  $(x+y)^6$ .
- 14. **KR, Abschnitt 5.4, Aufgabe 9:** Bestimmen Sie den Koeffizienten von  $x^{101}y^{99}$  in  $(2x 3y)^{200}$ .
- III. **KR, Abschnitt 5.4, Aufgabe 23:** Zeigen Sie, dass für alle positiven ganzen Zahlen *n* und *k* die folgende Relation gilt:

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{k} \binom{n}{k-1}.$$

Nutzen Sie diese Identität, um eine rekursive Definition der Binomialkoeffizienten zu konstruieren.

15. **KR**, **Abschnitt 5.5**, **Aufgabe 1**: Auf wieviele Arten können 5 Elemente aus einer Menge von 3 Elementen ausgewählt werden, wenn die Reihenfolge berücksichtigt wird und Wiederholungen erlaubt sind?

- 16. **KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 7:** Auf wieviele Arten können 3 Elemente aus einer Menge von 5 Elementen ausgewählt werden, wenn die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird und Wiederholungen erlaubt sind?
- 17. **KR**, **Abschnitt 5.5**, **Aufgabe 13**: Ein Buchhändler hat 3000 Kopien eines Buches. Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Bücher in seinen drei Filialen zu lagern, wenn die einzelnen Bücher nicht unterscheidbar sind?
- 18. KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 15a-c: Wieviele Lösungen hat die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$$

wobei  $x_i$  für i = 1, 2, 3, 4, 5 eine nichtnegative ganze Zahl ist, mit

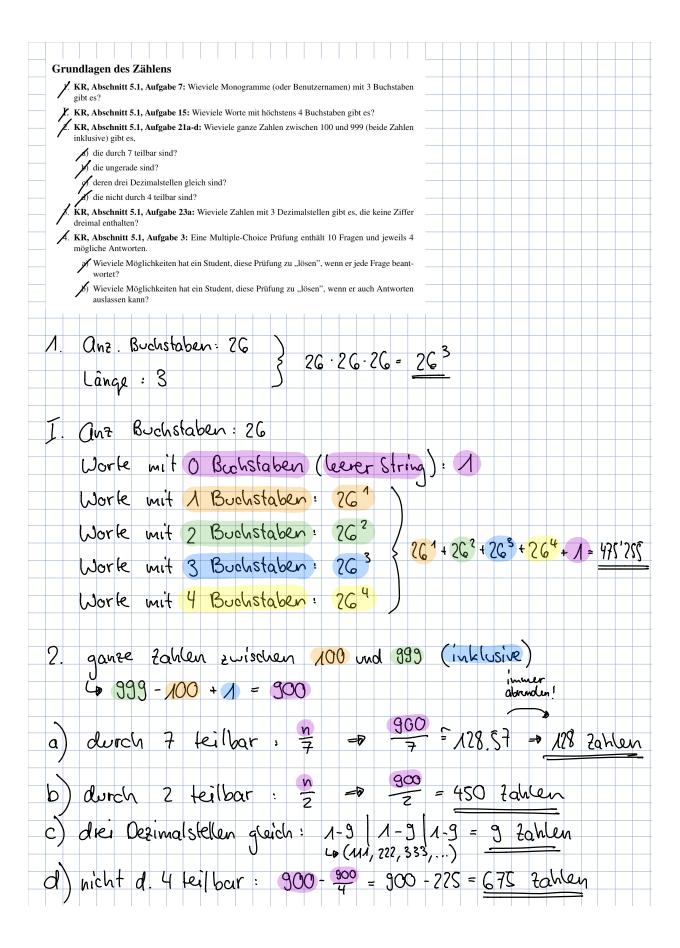
- a)  $x_1 \ge 1$ ?
- b)  $x_i \ge 2$  für i = 1, 2, 3, 4, 5?
- c)  $0 \le x_1 \le 10$ ?
- IV. KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 29: Wieviele verschiedene binäre Strings können gebildet werden, wenn ein String stets mit einer 1 beginnen muss, ausserdem stets genau drei weitere 1 Bits enthalten muss, stets genau zwölf 0 Bits enthalten muss und jedem 1 Bit mindestens zwei 0 Bits folgen müssen?
  - 19 **KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 51:** Wieviele Möglichkeiten gibt es, 6 unterscheidbare Objekte in 4 ununterscheidbare Fächer zu verteilen, so dass jedes der Fächer mindestens ein Objekt enthält?

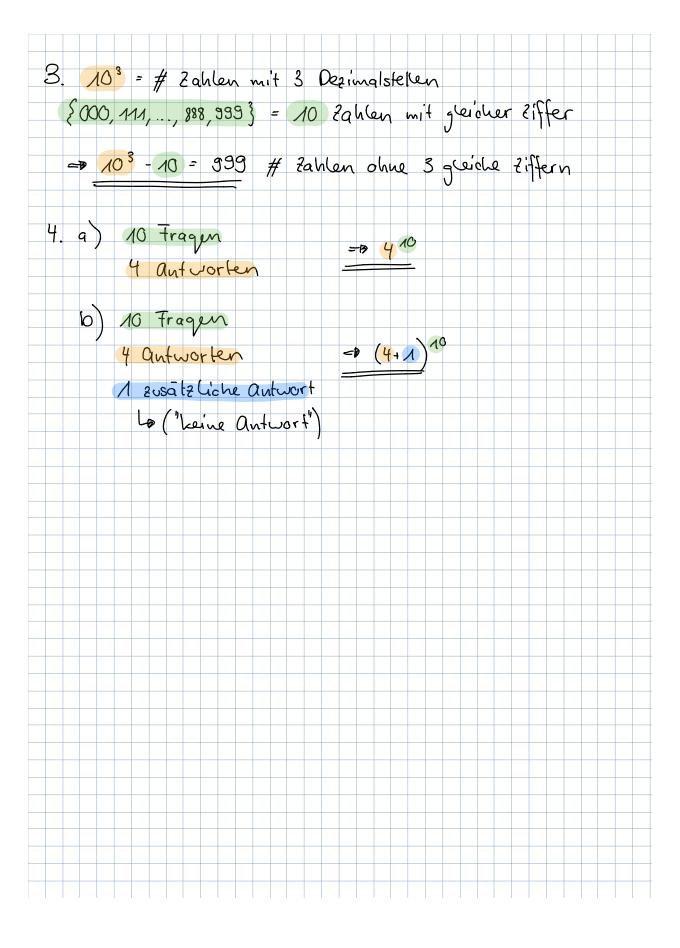
## Lösungen

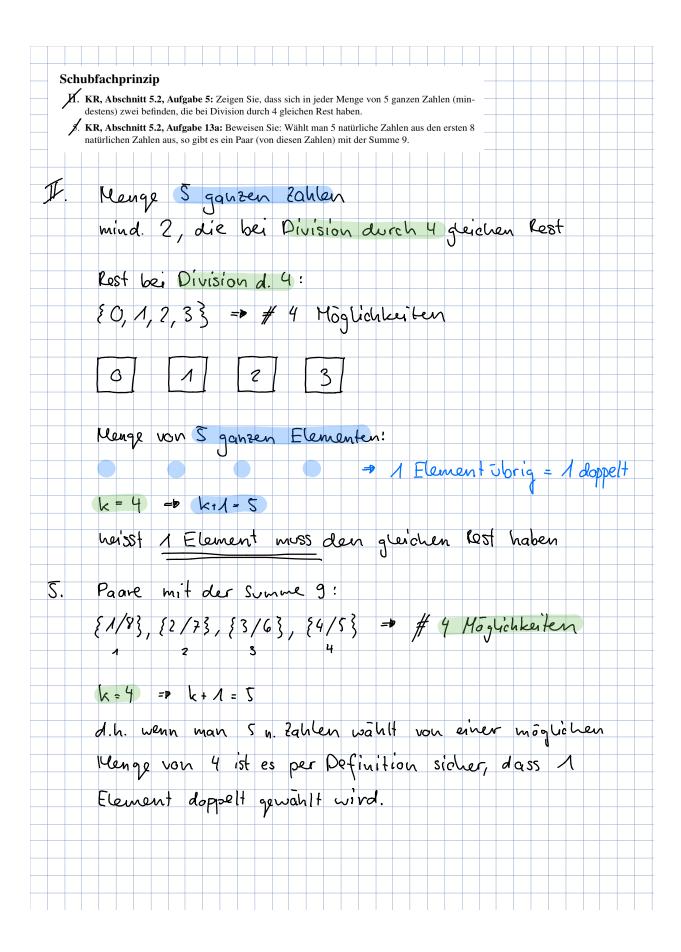
- 1.  $26^3$
- I. 475′255 (leeren String nicht vergessen)
- 2. *a*) 128, *b*) 450, *c*) 9, *d*) 675
- 3. 990
- 4.  $a) 4^{10}$  und  $b) 5^{10}$
- II. Geben Sie eine "hieb- und stichfeste" Begründung!
- 5. Bilden Sie 2-elementige Teilmengen der ersten 8 natürlichen Zahlen, so dass die Summe der Elemente jeweils 9 ist. Wieviele gibt es davon? Nutzen Sie das Schubfachprinzip.
- 6. abc, acb, bac, bca, cab, cba
- 7. 720
- 8. 120, 720, 8, 5, 10, 70
- 9. *a*) 210, *b*) 386
- 10.  $2^{100} 5051$
- 11. a) 1024, b) 120
- 12. a) 94'109'400, b) 941'094, c) 3'764'376, d) 90'345'024
- 13.  $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$
- 14.  $-2^{101}3^{99}\binom{200}{99}$
- III. Führen Sie die fehlenden Rechenschritte aus! Nutzen Sie die Definition der Fakultät (und deren Rekursion).

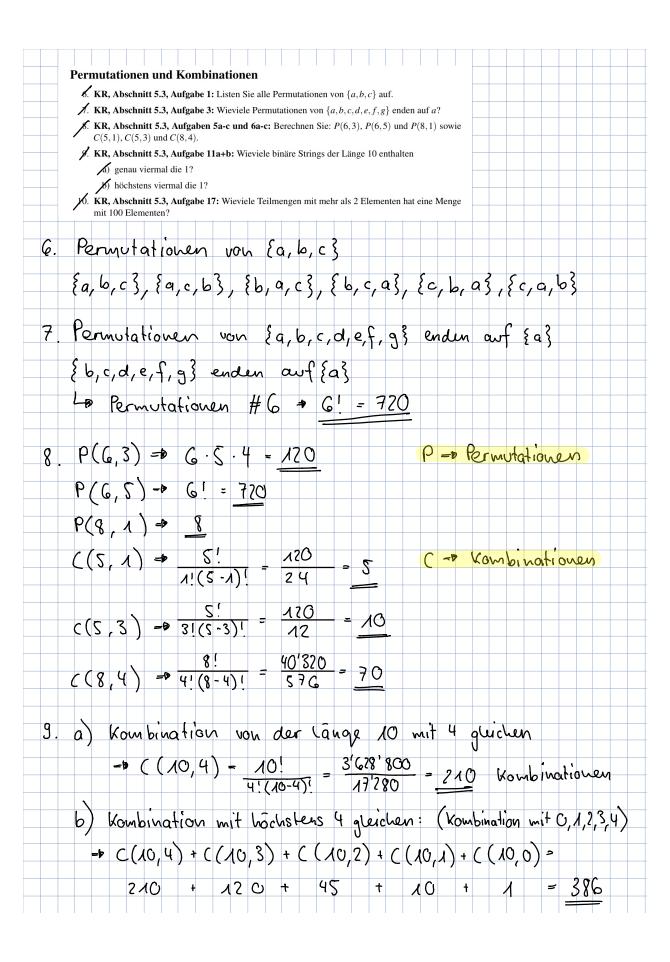
$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \dots = \frac{n+1}{k} \binom{n}{k-1}$$

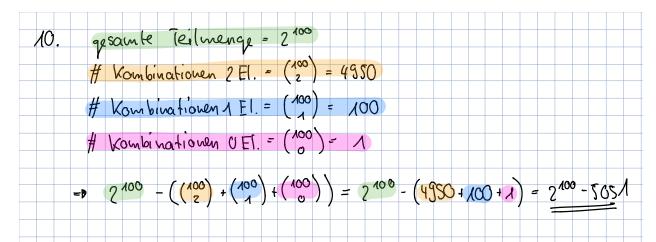
- 15. 243
- 16. 35
- 17. 4'504'501
- 18. *a*) 10'626, *b*) 1'365, *c*) 11'649
- IV. 35
- 19. 20+45=65











- KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 19a+b: Eine Münze wird zehnmal geworfen.
  - Mieviele mögliche Ausgänge hat dieses Experiment?
  - Wieviele mögliche Ausgänge, die genau dreimal Kopf enthalten, hat dieses Experiment?
- KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 25a-d: Einhundert Lose, durchnumeriert von 1 bis 100, werden an 100 verschiedene Leute verkauft. Es sollen vier verschiedene Preise verlost werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Priese zu verteilen,
  - falls man keine Einschränkung macht?
  - falls die Person mit Los 47 den Hauptpreis gewinnen soll?
  - falls die Person mit Los 47 einen der Preise gewinnen soll?
- falls die Person mit Los 47 keinen Preis gewinnen soll?

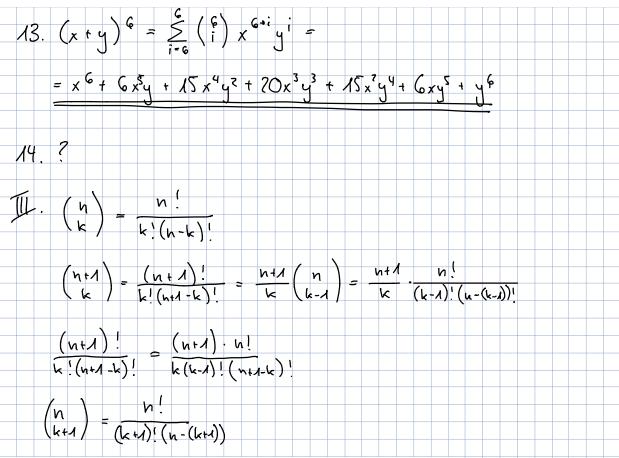
  3. KR, Abschnitt 5.4, Aufgabe 3: Berechnen Sie  $(x+y)^6$ .
- **KR, Abschnitt 5.4, Aufgabe 9:** Bestimmen Sie den Koeffizienten von  $x^{101}y^{99}$  in  $(2x 3y)^{200}$ .
- $\mathbb{M}$ . KR, Abschnitt 5.4, Aufgabe 23: Zeigen Sie, dass für alle positiven ganzen Zahlen n und k die folgende Relation gilt:

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{k} \binom{n}{k-1}.$$

Nutzen Sie diese Identität, um eine rekursive Definition der Binomialkoeffizienten zu konstruieren.

15. KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 1: Auf wieviele Arten können 5 Elemente aus einer Menge von 3 Elementen ausgewählt werden, wenn die Reihenfolge berücksichtigt wird und Wiederholungen erlaubt sind?

11. a) 
$$2^{10} = 1074$$
  
b)  $(3) = \frac{1074}{3!(10-3)!} = \frac{3'(628'800)}{30'2'40} = 120$   
12. a)  $(100) = 94' \times 109' \times 100' = 120$   
b)  $(100-1) = 941'094' = 120$   
c)  $(4) = 99' \times 109' = 120$   
d)  $(99) = 90' \times 100' = 120$   
d)  $(99) = 90' \times 100' = 120$ 



IV. KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 29: Wieviele verschiedene binäre Strings können gebildet werden, wenn ein String stets mit einer 1 beginnen muss, ausserdem stets genau drei weitere 1 Bits enthalten muss, stets genau zwölf 0 Bits enthalten muss und jedem 1 Bit mindestens zwei 0 Bits folgen müssen?

