Lucerne University of
Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE
LUZERN
Informatik
FH Zentralschweiz

Fundamentals - Übung 1

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

I.BA_DMATH, Semesterwoche 3

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Die mit grossen römischen Zahlen gekennzeichneten Aufgaben **müssen** bearbeitet werden und die Lösungen dieser Aufgaben werden kontolliert und bewertet. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Referenz: *Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, McGraw-Hill International Edition, 6. Auflage,* **kurz: KR**

Selbststudium

1. Generell geht es beim Suchproblem darum ein Element x in einer Liste unterschiedlicher Elemente $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ zu finden (das Suchresultat ist dann gleich dem Index i für den gilt: $a_i = x$) oder festzustellen, dass es nicht in der Liste vorkommt (das Suchresultat ist dann -1). Je nach verwendeter Programmiersprache kann dies auch anders definiert werden!

   Bei der **linearen Suche** in einer Liste beginnt man mit dem ersten Element a_0 und vergleicht es mit dem gegebenen Element x. Bei einer Übereinstimmung ist man fertig und gibt 0 aus. Ansonsten fährt man weiter, bis eine Übereinstimmung ($a_k = x$) gefunden wird (dann gibt man k aus) oder bis man alle Elemente der Liste überprüft hat (in diesem Fall gibt man -1 aus).

   Die **binäre Suche** kann man verwenden, wenn die Glieder der Liste $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ sortiert sind, d.h. es gilt $a_i < a_{i+1},\ i = 0, 1, \ldots, n-2$. Dann vergleicht man das gesuchte Element x mit dem mittleren Element a_m (wobei $m = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$) und entscheidet, ob es in der rechten Hälfte $(a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{n-1})$ liegt (nämlich dann, wenn $a_m < x$) oder ob es in der linken Hälfte $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ liegt (nämlich dann, wenn $x \leq a_m$). Danach sucht man entweder in der rechten oder linken Hälfte nach x. In beiden Fällen wurde das Suchproblem auf die Hälfte seiner Grösse reduziert. Diese Prozedur führt man so lange durch, bis die Liste nur noch ein Element enthält: entweder ist dieses gleich x (dann hat man x gefunden und kennt auch den Index dieses Elements) oder es ist verschieden von x (dann kommt x nicht in der Liste vor).

   Führen sie sowohl die lineare, wie auch die binäre Suche schrittweise für die Liste $(1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11)$ durch. Bestimmen sie die Komplexität des Problems!

gross-$\mathcal{O}$

2. **KR, Abschnitt 3.2, Aufgaben 1b, 1c:** Welche der beiden Funktionen $f(x) = 3x + 7$, bzw. $f(x) = x^2 + x + 1$ ist $\mathcal{O}(x)$? Geben sie allenfalls auch C und k an!

3. **KR, Abschnitt 3.2, Aufgaben 19c:** Geben sie eine möglichst gute gross-$\mathcal{O}$ Abschätzung für $(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2 + 1))$. Wie lauten C und k?

1. **KR, Abschnitt 3.2, Aufgaben 21:** Geben sie möglichst gute gross-$\mathcal{O}$ Abschätzungen für die folgenden Funktionen an:

   - $n \log(n^2 + 1) + n^2 \log n$,
   - $(n \log n + 1)^2 + (\log n + 1)(n^2 + 1)$ und
   - $n^{2^n} + n^{n^2}$

   Gehen Sie bei den Abschätzungen Schritt für Schritt vor und begründen Sie jede Umformung. Geben Sie insbesondere auch an, für welche natürlichen Zahlen n jede Abschätzung stimmt, und bestimmen Sie für jede Funktion die entsprechenden Zeugen C und k.

Zahlen und Divisionen

4. **KR, Abschnitt 3.4, Aufgabe 5:** Zeigen sie, dass gilt: $\forall a, b \in \mathbb{Z}\,(a|b \wedge b|a \rightarrow a = b \vee a = -b)$

5. **KR, Abschnitt 3.4, Aufgabe 17:** Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

   a) 13 **mod** 3, b) -97 **mod** 11, c)155 **mod** 19 d) -221 **mod** 23

6. **KR, Abschnitt 3.5, Aufgabe 3f:** Gesucht ist die Primfaktorisierung von $909'090$ (von Hand ausrechnen und mit dem Maple-Kommando `ifactor()` kontrollieren).

7. **KR, Abschnitt 3.5, Aufgabe 13c:** Bestimmen sie ob die Zahlen 12, 17, 31, 37 paarweise prim (teilerfremd) sind.

8. **KR, Abschnitt 3.5, Aufgabe 21a:** Was ist das ggT von $3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3$ und $2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^9$?

9. **KR, Abschnitt 3.5, Aufgabe 23a:** Was ist das kgV von $3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3$ und $2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^9$?

10. **KR, Abschnitt 3.6, Aufgabe 3d:** Konvertiere die Binärzahl $110'1001'0001'0000$ in eine Dezimalzahl.

11. **KR, Abschnitt 3.6, Aufgabe 5b:** Konvertiere die Hexadezimalzahl $135AB$ in eine Binärzahl.

12. **KR, Abschnitt 3.6, Aufgabe 10:** Konvertiere $(1'1000'0110'0011)_2$ in eine Hexadezimalzahl.

11. **KR, Abschnitt 3.6, Aufgabe 23d:** Berechne mit Hilfe des Euklid'schen Algorithmus die Zahl $\mathrm{ggT}(12345, 54321)$ sowohl von Hand, wie auch mit der Maple-Funktion `igcd(12345,54321)`.

Matrizen

13. **KR, Abschnitt 3.8, Aufgabe 3b:** Gesucht ist $\mathbf{AB}$ falls

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

13. **KR, Abschnitt 3.8, Aufgabe 5:** Gesucht ist eine Matrix $\mathbf{A}$ so, dass

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A} \quad = \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

14. **KR, Abschnitt 3.8, Aufgabe 11:** Was ist über die Grösse der beiden Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ bekannt, falls sowohl $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ wie auch $\mathbf{B}\,\mathbf{A}$ existieren?

15. **KR, Abschnitt 3.8, Aufgabe 19:** Erinnerung: Sei $\mathbf{A}$ eine quadratische Matrix. Eine Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ (der selben Dimension) heisst Inverse von $\mathbf{A}$, falls $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$ gilt.

    Sei $\mathbf{A}$ eine 2×2-Matrix mit

$$\mathbf{A} \quad = \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

    Zeigen sie, dass für $ad - bc \neq 0$ folgt:

$$\mathbf{A}^{-1} \quad = \quad \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

16. **KR, Abschnitt 3.8, Aufgabe 29:** Seien folgende Matrizen gegeben:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

    Berechnen sie (a) $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, (b) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ und (c) $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$.

17. **KR, Abschnitt 3.8, Aufgabe 31:** Gegeben sei die Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

    Berechnen sie (a) $\mathbf{A}^{[2]}$, (b) $\mathbf{A}^{[3]}$ und (c) $\mathbf{A} \vee \mathbf{A}^{[2]} \vee \mathbf{A}^{[3]}$.

Lösungen

1. -
2. $f(x) = 3x+7$ ist $\mathcal{O}(x)$ wobei $k = 1$ (wie bei jedem Polynom) und $C = |3|+|7| = 10$ gewählt werden können.
3. Wir gehen Schrittweise und sehr ausführlich vor.

$$\begin{array}{rll}
 & |(n!+2^n)(n^3+\log(n^2+1))| & \\
= & (n!+2^n)(n^3+\log(n^2+1)) & \text{Funktion ist stets positiv} \\
= & n!\cdot n^3+n!\cdot\log(n^2+1)+2^n\cdot n^3+2^n\cdot\log(n^2+1) & \text{ausmultiplizieren} \\
\leq & n!\cdot n^3+n!\cdot 3\log(n)+2^n\cdot n^3+2^n\cdot 3\log(n) & \text{für alle } n\geq 2 \text{ (Nebenrechnung 1)} \\
\leq & n!\cdot n^3+n!\cdot 3n+2^n\cdot n^3+2^n\cdot 3n & \text{für alle } n\geq 1 \text{ da } \log(n)<n \\
\leq & n!\cdot n^3+n!\cdot 3n^3+2^n\cdot n^3+2^n\cdot 3n^3 & \text{für alle } n\geq 1 \\
= & 4\cdot n!\cdot n^3+4\cdot 2^n\cdot n^3 & \text{zusammenfassen} \\
\leq & 4\cdot n!\cdot n^3+4\cdot n!\cdot n^3 & \text{für alle } n\geq 4 \text{ (Nebenrechnung 2)} \\
= & 8\cdot n!\cdot n^3 &
\end{array}$$

Somit ist die Funktion $\mathcal{O}(n!\cdot n^3)$ und mögliche Zeugen sind $k = 4$ und $C = 8$.

Nebenrechnung 1:

$$\begin{array}{rlll}
\log(n^2+1) & \leq & \log(n^2+n^2) & \text{für alle } n\geq 1 \\
 & = & \log(2n^2) & \\
 & = & \log(2)+\log(n^2) & \text{Rechenregeln für Logarithmen} \\
 & = & \log(2)+2\log(n) & \text{Rechenregeln für Logarithmen} \\
 & \leq & \log(n)+2\log(n) & \text{für alle } n\geq 2 \\
 & \leq & 3\log(n) &
\end{array}$$

Nebenrechnung 2: Falls $n \geq 4$ ist gilt $2^n = 16\cdot 2^{n-4} \leq 24\cdot 5\cdot 6\cdot\cdots\cdot n = n!$.

I. $\mathcal{O}(n^2\log(n))$, $\mathcal{O}(n^2(\log(n))^2)$, $\mathcal{O}(n^{2^n})$

4. -
5. 1, 2, 3, 9
6. $2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 37$
7. Ja
8. $3^5\cdot 5^3$
9. $2^{11}\cdot 3^7\cdot 5^9\cdot 7^3$
10. $26'896$
11. $1'0011'0101'1010'1011$
12. -

II. 3

13. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 9 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

III. $\begin{bmatrix} 9/5 & -6/5 \\ -1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$

14. Zeilenanzahl A = Spaltenanzahl B und Spaltenanzahl A = Zeilenanzahl B

15. Der Beweis ist hier durch eine einfache Probe möglich, d.h. berechnen Sie $A \cdot A^{-1}$. Welches Ergebnis sollten Sie hier erhalten?

16. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

gross-$\mathcal{O}$

~~2.~~ **KR, Abschnitt 3.2, Aufgaben 1b, 1c:** Welche der beiden Funktionen $f(x) = 3x+7$, bzw. $f(x) = x^2+x+1$ ist $\mathcal{O}(x)$? Geben sie allenfalls auch C und k an!

3. **KR, Abschnitt 3.2, Aufgaben 19c:** Geben sie eine möglichst gute gross-$\mathcal{O}$ Abschätzung für $(n!+2^n)(n^3+\log(n^2+1))$. Wie lauten C und k?

I. **KR, Abschnitt 3.2, Aufgaben 21:** Geben sie möglichst gute gross-$\mathcal{O}$ Abschätzungen für die folgenden Funktionen an:

~~a)~~ • $n\log(n^2+1)+n^2\log n$,
~~b)~~ • $(n\log n+1)^2+(\log n+1)(n^2+1)$ und
~~c)~~ • $n^{2^n}+n^{n^2}$

Gehen Sie bei den Abschätzungen Schritt für Schritt vor und begründen Sie jede Umformung. Geben Sie insbesondere auch an, für welche natürlichen Zahlen n jede Abschätzung stimmt, und bestimmen Sie für jede Funktion die entsprechenden Zeugen C und k.

2. a) $f(x) = 3x + 7$

$C = |3| + |7| = 10$

$\forall x > 1 \Rightarrow k = 1$ (jedes Polynom)

$O(x)$

b) $f(x) = x^2 + x + 1$

$C = |1| + |1| + |1| = 3$

$\forall x > 1 \Rightarrow k = 1$

$O(x^2)$

3. $(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2+1)) =$ immer positiv $\Rightarrow$ Betrag weglassen

$= |(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2+1))|$

$= (n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2+1))$

$= n! \cdot n^3 + n! \cdot \log(n^2+1) + 2^n \cdot 3n^3 + 2^n \cdot \log(n^2+1)$

$=$

I. a)

$$n \cdot \log(\underbrace{n^2+1}_{>n}) + n^2 \cdot \log n$$

$\Downarrow$ grösser od. gleich n $(n^2+1 \geq n)$

$$\leq n \cdot \log(n^2+1) + n^2 \cdot \log(n^2+1)$$

grösser gleich als n $(n^2 \geq n)$

$$\leq n^2 \cdot \log(n^2+1) + n^2 \cdot \log(n^2+1)$$

$$= 2 \cdot | n^2 \cdot \log(n^2+1) |$$

$$c \quad , \quad k = 2$$

$$\Rightarrow O(n^2 \cdot \log(n^2+1))$$

$*$ $\log(n) \geq \log(n^2+1)$ (für alle $n \geq 1$)

$$= \log(n^2) + \log(1)$$

$$= \log(n^2)$$

$$= 2 \cdot \log(n)$$ (für alle $n \geq 2$)

b) $(n \cdot \log(n^2+1))^2 + (\log(n+1))(n^2+1)$

$$= n^2 \cdot \log(n^2+1)^2 + n^2 \cdot \log(n+1) + \log(n+1)$$

$$\leq n^2 \cdot \log(n^2+1)^2 + n^2 \cdot \log(n+1)^2 \cdot n^2 \cdot \log(n+1)^2 \quad | \ \forall n \geq 1$$

$$= 3 \cdot | n^2 \cdot \log(n^2+1)^2 |$$

$$c \quad , \quad k = 1$$

$$\Rightarrow O(n^2 \cdot \log(n^2+1)^2)$$

c) $n^{2^n} + n^{n^2} \Rightarrow 2^n \geq n^2$ $(\forall n \geq 4)$

$$\leq n^{2^n} + n^{2^n}$$

$$= 2 \cdot | n^{2^n} |$$

$$c \quad , \quad k = 4$$

$$\Rightarrow O(n^{2^n})$$

II. ggT(12345, 54321)

$$54321 = (4 \cdot 12345) + 4941$$
$$12345 = (2 \cdot 4941) + 2463$$
$$4941 = (2 \cdot 2463) + 15$$
$$2463 = (164 \cdot 15) + 3$$
$$15 = 5 \cdot 3 + 0$$

$$\Rightarrow \text{ggT} = 3$$

III. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot a_1 + 3 \cdot a_3 = 3 \Rightarrow a_1 = 9/5$$
$$2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_4 = 0 \Rightarrow a_2 = -6/5$$
$$1 \cdot a_1 + 4 \cdot a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = -1/5$$
$$1 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 = 2 \Rightarrow a_4 = 4/5$$

$$A = \begin{bmatrix} 9/5 & -6/5 \\ -1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$