

Advanced Counting Techniques - Übung

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

I.BA_DMATH, Semesterwoche 8

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungsweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durchschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Die mit grossen römischen Zahlen gekennzeichneten Aufgaben **müssen** bearbeitet werden und die Lösungen dieser Aufgaben werden kontrolliert und bewertet. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Referenz: *Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, McGraw-Hill International Edition, 6. Auflage, kurz: KR*

Rekursionen

1. **KR, Abschnitt 7.1, Aufgabe 1a+d:** Bestimmen Sie jeweils die ersten fünf Glieder der folgenden rekursiven Zahlenfolgen:

a) $a_n = 6a_{n-1}, a_0 = 2$

b) $a_n = na_{n-1} + n^2 a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 1$

- I. KR, Abschnitt 7.1, Aufgabe 3c:** Sei $a_n = 2^n + 5 \cdot 3^n$ für $n = 0, 1, 2, \dots$. Zeigen Sie, dass diese Folge die Rekursionsbeziehung $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ für alle $n \geq 2$ erfüllt.

2. **KR, Abschnitt 7.1, Aufgabe 5a-f:** Wir betrachten die rekursive Relation $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$. Welche der folgenden Zahlenfolgen sind Lösungen dieser Relation? Begründen Sie Ihre Aussage.

a) $a_n = 0$

b) $a_n = 1$

c) $a_n = 2^n$

d) $a_n = 4^n$

e) $a_n = n4^n$

f) $a_n = 2 \cdot 4^n + 3n4^n$

3. **KR, Abschnitt 7.1, Aufgabe 11b:** Nehmen wir an, dass sich die Bakterienanzahl in einer Kolonie jede Stunde verdreifacht. Wieviele Bakterien leben nach zehn Stunden in der Kolonie, wenn es am Anfang genau 100 Bakterien gab?
4. **KR, Abschnitt 7.1, Aufgabe 23:** Bestimmen Sie die Rekursionsbeziehung für die Anzahl Bitstrings der Länge n , die (mindestens) ein Paar benachbarter Nullen enthalten. Was ist die Anfangsbedingung? Wieviele solcher Bitstrings der Länge 7 gibt es?
5. **KR, Abschnitt 7.1, Aufgabe 25:** Bestimmen Sie die Rekursionsbeziehung für die Anzahl Bitstrings der Länge n , die kein Tripel benachbarter Nullen enthalten. Was ist die Anfangsbedingung? Wieviele solcher Bitstrings der Länge 7 gibt es?

- II. KR, Abschnitt 7.1, Aufgabe 40:** Bestimmen Sie die Rekursionsbeziehung für die Anzahl Bitstrings der Länge n , die eine gerade Anzahl Nullen enthalten. Wie müssen die Anfangsbedingungen gewählt werden? Überprüfen Sie die gefundenen Formel für $n = 0, 1, 2, 3$ und 4 indem Sie alle Bitstrings dieser Länge (die die obige Eigenschaft erfüllen) auflisten und abzählen.

Lösen von linearen Rekursionsbeziehungen

6. **KR, Abschnitt 7.2, Aufgabe 3a,c,d:** Lösen Sie die folgenden Rekursionsbeziehungen mit den gegebenen Anfangsbedingungen.
- a) $a_n = 2a_{n-1}$ für $n \geq 1$ und $a_0 = 3$;
 - b) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ für $n \geq 2$ und $a_0 = 1, a_1 = 0$;
 - c) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ für $n \geq 2$ und $a_0 = 6, a_1 = 8$.
7. **KR, Abschnitt 7.2, Aufgaben 15 und 19:** Finden Sie die Lösung für
- a) $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ mit $a_0 = 7, a_1 = -4$ und $a_2 = 8$;
 - b) $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ mit $a_0 = 5, a_1 = -9$ und $a_2 = 15$.

Erzeugende Funktionen

8. **KR, Abschnitt 7.4, Aufgabe 1:** Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der endlichen Folge 2, 2, 2, 2, 2.
9. **KR, Abschnitt 7.4, Aufgaben 3d+f und 5f:** Bestimmen Sie für die gegebenen Zahlenfolgen jeweils eine erzeugende Funktion in geschlossener Form (im Allgemeinen eine rationale Funktion, in der Darstellung darf keine (unendliche) Summation vorkommen).
- a) 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...
 - b) 2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2, ...
 - c) $a_n = \binom{n+4}{n}$ für alle $n = 0, 1, 2, \dots$
10. **KR, Abschnitt 7.4, Aufgaben 9d und 11b:** Bestimmen Sie den Koeffizienten von x^{10} in der Potenzreihendarstellung der folgenden Funktionen.
- a) $(x^2 + x^4 + x^6 + \dots)(x^3 + x^6 + x^9 + \dots)(x^4 + x^8 + x^{12} + \dots)$
 - b) $\frac{1}{(1+x)^2}$.
11. **KR, Abschnitt 7.4, Aufgabe 21:** Überlegen Sie sich eine kombinatorische Interpretation für den Koeffizienten von x^4 in der Reihendarstellung von $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^3$. Nutzen Sie diese Interpretation um diesen Koeffizienten zu bestimmen.

Erweitertes Ein- und Ausschlussprinzip

12. **KR, Abschnitt 7.5, Aufgabe 5:** Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente in der Vereinigungsmenge $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, falls jede der drei Mengen genau 100 Elemente enthält und
- a) die Mengen paarweise disjunkt sind.
 - b) jedes Paar von Mengen genau 50 gemeinsame Elemente enthält und es kein Element gibt, das in allen drei Mengen enthalten ist.
 - c) jedes Paar von Mengen genau 50 gemeinsame Elemente enthält und 25 Elemente in allen drei Mengen liegen.
13. **KR, Abschnitt 7.5, Aufgabe 11:** Bestimmen Sie die Anzahl aller natürlichen Zahlen ≤ 100 die ungerade oder das Quadrat einer ganzen Zahl sind.
- III. KR, Abschnitt 7.6, Aufgabe 3:** Wieviele Lösungen hat die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 13$, falls x_1, x_2 und x_3 nicht-negative ganze Zahlen kleiner als 6 sein dürfen?
14. **KR, Abschnitt 7.6, Aufgabe 7:** Wieviele nicht-negative ganze Zahlen kleiner als 10'000 sind nicht die Potenz (mindestens die 2.) einer ganzen Zahl?
15. **KR, Abschnitt 7.6, Aufgabe 21:** Für welche positive ganzen Zahlen n ist D_n , die Anzahl von Derangements von n Objekten, eine gerade Zahl?

Lösungen

1. a) 2, 12, 72, 432, 2592 b) 1, 1, 6, 27, 204

I. $5a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5(2^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1}) - 6(2^{n-2} + 5 \cdot 3^{n-2}) = \dots = a_n ???$

2. Ja, Nein, Nein, Ja, Ja, Ja

3. $5'904'900$

4. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$, $a_0 = a_1 = 0$ und $a_7 = 94$

5. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ und $a_7 = 81$

II. $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ $a_1 = 1$

6. a) $a_n = 3 \cdot 2^n$, b) $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$, c) $a_n = 6 \cdot 2^n - 2 \cdot n2^n$

7. a) $a_n = 5 + 3 \cdot (-2)^n - 3^n$, b) $a_n = (n^2 + 3n + 5)(-1)^n$

8. $f(x) = 2(x^6 - 1)/(x - 1)$

9. a) $2/(1 - 2x)$, b) $2/(1 + x)$, c) $1/(1 - x)^5$

10. a) 0, b) 11

11. 15

12. a) 300, b) 150, c) 175

13. 55

III. 6

14. 9875. Begründung: Wir betrachten Zahlen > 1 und dort diejenigen Zahlen $N \leq 9999$, welche die p . Potenz ($p \geq 2$) einer ganzen Zahl x sind, d.h. es gilt $x^p \leq 9999$. Als Potenzen betrachten wir zuerst nur mal die Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11 und 13: denn $2^{17} = 131072 > 9999$ während $2^{13} = 8192 < 9999$.

$p = 2$: Wegen $\lfloor \sqrt{9999} \rfloor = 99$ gibt es $99 - 1 = 98$ Zahlen x , deren zweite Potenz kleiner als 10000 ist, nämlich $2^2, 3^2, 4^2, \dots, 99^2$.

$p = 3$: Wegen $\lfloor \sqrt[3]{9999} \rfloor = 21$ gibt es $21 - 1 = 20$ Zahlen x , deren dritte Potenz kleiner als 10000 ist, nämlich $2^3, 3^3, 4^3, \dots, 21^3$.

$p = 5$: Wegen $\lfloor \sqrt[5]{9999} \rfloor = 6$ gibt es $6 - 1 = 5$ Zahlen x , deren fünfte Potenz kleiner als 10000 ist, nämlich $2^5, 3^5, 4^5, \dots, 6^5$.

$p = 7$: Wegen $\lfloor \sqrt[7]{9999} \rfloor = 3$ gibt es $3 - 1 = 2$ Zahlen x , deren siebte Potenz kleiner als 10000 ist, nämlich $2^7, 3^7$.

$p = 11$: Wegen $\lfloor \sqrt[11]{9999} \rfloor = 2$ gibt es $2 - 1 = 1$ Zahlen x , deren siebte Potenz kleiner als 10000 ist, nämlich 2^{11} , denn $3^{11} = 177147 > 9999$.

$p = 13$: Wegen $\lfloor \sqrt[13]{9999} \rfloor = 2$ gibt es $2 - 1 = 1$ Zahlen x , deren siebte Potenz kleiner als 10000 ist, nämlich 2^{13} .

Nun haben wir also insgesamt $98 + 20 + 5 + 2 + 1 + 1 = 127$ Zahlen $1 < N < 10000$, die sich als p . Potenzen ($p = 2, 3, 5, 7, 11, 13$) einer Zahl x darstellen lassen. Was ist aber mit den Potenzen $p = 4, 6, 8, 9, 10, 12$? Hier gilt folgendes:

- Die Potenzen $p = 4, 8$ wurden bereits im Fall $p = 2$ mitgezählt; ebenso die Potenz $p = 9$, denn sie wurde bei $p = 3$ mitgezählt..
- Die Potenz $p = 6$ wurde wegen $x^6 = (x^2)^3 = (x^3)^2$ einmal bei $p = 2$ und einmal bei $p = 3$ gezählt, also doppelt. Deshalb müssen wir von der Zahl 127 sicher $\lfloor \sqrt[6]{9999} \rfloor - 1 = 3$ subtrahieren. Damit ist übrigens auch $p = 12$ korrekt verbucht!
- Die Potenz $p = 10$ wurde wegen $x^{10} = (x^2)^5 = (x^5)^2$ einmal bei $p = 2$ und einmal bei $p = 5$ gezählt, also auch doppelt. Deshalb müssen wir von der Zahl 127 sicher auch $\lfloor \sqrt[10]{9999} \rfloor - 1 = 1$ subtrahieren.

Insgesamt hat man also $127 - 3 - 1 = 123$ Zahlen, die Potenzen sind und $9998 - 127 = 9875$ Zahlen, die keine Potenzen sind. Übrigens ist 1 eine Zahl, die als Potenz, z.B. $1^1 3$ geschrieben werden kann.

15. Falls n ungerade ist.

$$\text{I. } a_{n-1} = 2^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1}$$

$$a_{n-2} = 2^{n-2} + 5 \cdot 3^{n-2}$$

$$\begin{aligned} 5a_{n-1} - 6a_{n-2} &= 5(2^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1}) - 6(2^{n-2} + 5 \cdot 3^{n-2}) \\ &= 2^{n-2}(10-6) + 3^{n-2}(75-30) \\ &= 2^{n-2} \cdot 4 + 3^{n-2} \cdot 45 \\ &= 2^n + 3^n \cdot 5 = a_n \end{aligned}$$

$$\text{II. } a_n = 2a_{n-1} \cdot a_1$$

$$n = 0, 1, 2, 3, 4$$

?

$$a_0 = 0 \cdot 1 = 0$$

$$a_1 = 0 \cdot 1 = 0$$

$$a_2 =$$

$$\text{III. } x_1 + x_2 + x_3 = 13$$

$$0 < x_1, x_2, x_3 \leq 6$$

$$C(3+13-1, 13) = C(15, 13) = C(15, 2) = 105$$

$$x_1 \geq 6$$

$$x_1' + x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow x_1 = x_1' + 6 \Rightarrow C(3+7-1, 7) = C(9, 7) = C(9, 2) = 36$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 36 = 108 \text{ korrekte auf.}$$

$$C(3, 2) = 3$$

$$x_1 \geq 6 ; x_2 \geq 6$$

$$x_1' + x_2' + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = x_1' + 6 \Rightarrow x_2 = x_2' + 6$$

$$C(3+1-1, 1) = C(3, 1) = 3 \Rightarrow 3 \cdot 3 = 9$$

$$105 - 108 + 9 = \underline{\underline{6 \text{ Lösungen}}}$$