Lucerne University of
Applied Sciences and Arts

HOCHSCHULE
LUZERN

**Informatik**
FH Zentralschweiz

# Basic Structures - Übung 1

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

I.BA_DMATH, Semesterwoche 2

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Die mit grossen römischen Zahlen gekennzeichneten Aufgaben **müssen** bearbeitet werden und die Lösungen dieser Aufgaben werden kontolliert und bewertet. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Referenz: *Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, McGraw-Hill International Edition, 6. Auflage,* **kurz: KR**

## Mengen

1. **KR, Abschnitt 2.1, Aufgabe 19b:** Wie lautet die Potenzmenge von $\{a, b\}$?
2. **KR, Abschnitt 2.2, Aufgabe 3:** Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{0, 3, 6\}$. Bestimmen sie dann (a) $A \cup B$, (b) $A \cap B$, (c) $A \setminus B$ und (d) $B \setminus A$.
3. **KR, Abschnitt 2.2, Aufgabe 15:** Zeigen sie, dass für zwei Mengen $A$ und $B$ gilt: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
4. **KR, Abschnitt 2.2, Aufgabe 50:** Die Universalmenge sei $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Drücken sie jede der folgenden Mengen mit einem Bitstring der Länge 10 (denn $U$ hat genau 10 Elemente) aus, wobei das $i$-te Bit 1 ist, falls das $i$ in der Menge ist (und Null sonst): (a) $\{3, 4, 5\}$, (b) $\{1, 3, 6, 10\}$ und (c) $\{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$.
5. **KR, Abschnitt 2.2, Aufgabe 51:** Welche Mengen stellen die folgenden Bitstrings dar, wenn man die Universalmenge aus der letzten Aufgabe verwendet: (a) 11 1100 1111, (b) 01 0111 1000 und (c) 10 0000 0001.

# Funktionen

I. **KR, Abschnitt 2.3, Aufgabe 5b:** Gesucht ist der Definitions- und Wertebereich der Funktion $f$, die jedem Bitstring das doppelte der Anzahl Nullen im Bitstring zuordnet (z.B. gilt $f(101000) = 2 \cdot 4 = 8$, $f(111) = 2 \cdot 0 = 0$ und $f(00) = 2 \cdot 2 = 4$).

6. **KR, Abschnitt 2.3, Aufgaben 8a bis 9c:** Gesucht sind die folgenden Werte: (a) $\lceil \frac{3}{4} \rceil$, (b) $\lceil 1.1 \rceil$ und (c) $\lfloor -0.1 \rfloor$. Hier haben wir die *ceiling*- und *floor*-Funktionen verwendet:

$$\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} | x \leq n\}$$
$$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$$

Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen auf: Sie werden sehen, dass es sich um äusserst nützliche Funktionen handelt! Man sieht sofort, dass gilt:

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1.$$

7. **KR, Abschnitt 2.3, Aufgabe 11:** Welche Funktionen von $\{a, b, c, d\}$ auf sich selbst sind bijektiv: (a) $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = c$, $f(d) = d$, (b) $f(a) = b$, $f(b) = b$, $f(c) = d$, $f(d) = c$, und (c) $f(a) = d$, $f(b) = b$, $f(c) = c$, $f(d) = d$?

8. **KR, Abschnitt 2.3, Aufgaben 19a, 19b:** Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ bijektiv sind: (a) $f(x) = 2x + 1$ und (b) $f(x) = x^2 + 1$.

9. **KR, Abschnitt 2.3, Aufgaben 26:** Sei $S = \{-1, 0, 2, 4, 7\}$. Gesucht ist $f(S)$ falls (a) $f(x) = \lceil x/5 \rceil$, (b) $f(x) = \lfloor (x^2 + 1)/3 \rfloor$.

# Folgen, Summationen und Produkte

10. **KR, Abschnitt 2.4, Aufgabe 1:** Gegeben sei die Zahlenfolge $\{a_n\}$ mit $a_n = 2 \cdot (-3)^n + 5^n$. Berechnen Sie **a**) $a_0$ **b**) $a_1$ **c**) $a_4$ **d**) $a_5$

11. **KR, Abschnitt 2.4, Aufgabe 5d:** Bestimmen Sie die ersten 10 Glieder der Zahlenfolge, deren $n$-tes Glied gleich $n! - 2^n$ ist.

12. **KR, Abschnitt 2.4, Aufgabe 9c:** Wir betrachten die folgende (Anfangs)sequenz natürlicher Zahlen: $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, \ldots$ Bestimmen Sie ein allgemeines Bildungsgesetz für diese Zahlenfolge, d.h. eine Vorschrift der Gestalt $a_n = f(n)$, so dass $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, ...

13. **KR, Abschnitt 2.4, Aufgaben 13a, 13d und 17d:** Bestimmen Sie die Werte der folgenden Summen:

$$a) \sum_{k=1}^{5} (k+1) \qquad b) \sum_{j=0}^{8} (2^{j+1} - 2^j) \qquad c) \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{3} ij$$

II. **KR, Abschnitt 2.4, Aufgabe 27:** Bestimmen Sie die Werte der folgenden Produkte [1]

$$a) \prod_{i=0}^{10} i \qquad b) \prod_{i=5}^{8} i \qquad c) \prod_{i=1}^{100} (-1)^i \qquad d) \prod_{i=1}^{10} 2$$

[1] Das Produkt der Zahlen $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ kann mit Hilfe des Produktzeichen wie folgt abgekürzt werden: $\prod_{j=m}^{n} a_j = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$. Beispielsweise ist $\prod_{j=0}^{5} (2j+1) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = 10'395$.

III. **KR, Abschnitt 2.4, Aufg. 15:** Was ist der Wert der folgenden Summen:

$$a)\ \sum_{j=0}^{8} 3\cdot 2^j \qquad b)\ \sum_{k=1}^{8} 2^k \qquad c)\ \sum_{l=2}^{8} (-3)^l \qquad d)\ \sum_{i=0}^{8} 2\cdot(-3)^i$$

IV. **KR, Abschnitt 2.4, Aufg. 24:** Bestimmen Sie die Summe $\sum_{k=99}^{200} k^3$.

V. Was sind die Werte der folgenden Produkte:

$$a)\ \prod_{i=0}^{10} 2^i \qquad b)\ \prod_{i=5}^{8} e^{-i} \qquad c)\ \prod_{i=1}^{100} (-2)^i \qquad d)\ \prod_{i=1}^{10} 2^{-1}$$

VI. **KR, Abschnitt 2.4, Aufg. 29 und 30:** Bestimmen Sie

$$a)\ \sum_{j=0}^{4} j! \qquad b)\ \prod_{j=0}^{4} j!$$

VII. **KR, Abschnitt 2.4, Aufg. 19:** Gegeben die Folge von reellen Zahlen $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Zeigen Sie, dass folgendes gilt

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$$

Schreiben Sie die Summe für kleine $n$ auf. Zwei aufeinander folgende Terme heben sich gegenseitig weg: deshalb nennt man Summen dieser Art **teleskopierende Summen**.

VIII. **KR, Abschnitt 2.4, Aufg. 20:** Man verwende vorige Aufgabe und die Identität

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

um die folgende Summe zu berechnen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

## Lösungen

1. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ (die Elemente dieser Menge sind selbst Mengen!)
2. $(a)$ $\{0,1,2,3,4,5,6\}$, $(b)$ $\{3\}$, $(c)$ $\{1,2,4,5\}$, $(d)$ $\{0,6\}$
3. Wir erstellen eine Tabelle für die Mitgliedschaften in beiden Mengen. Ergänzen Sie die fehlenden Einträge.

| $A$ | $B$ | $A \cup B$ | $\overline{A \cup B}$ | $\overline{A}$ | $\overline{B}$ | $\overline{A} \cap \overline{B}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | |
| 0 | 0 | | | 1 | 1 | 1 |

4.

| Teilmenge | Bitstring |
|---|---|
| $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ | 1111111111 |
| $\emptyset$ | 0000000000 |
| $\{3,4,5\}$ | 0011100000 |
| $\{1,3,6,10\}$ | 1010010001 |
| $\{2,3,4,7,8,9\}$ | 0111001110 |

5.

| Teilmenge | Bitstring |
|---|---|
| $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ | 1111111111 |
| $\emptyset$ | 0000000000 |
| $\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$ | 1111001111 |
| ? | 0101111000 |
| ? | 1000000001 |

6. (a) 1, (b) 2, (c) 0.
7. (a) bijektiv, (b) weder injektiv noch surjektiv, (c) weder injektiv noch surjektiv.
8. (a) ist bijektiv, (b) ist weder injektiv noch surjektiv und damit auch nicht bijektiv.
9. (a) $f(S) = \{0,0,1,1,2\}$, (b) $f(S) = \{0,0,1,5,16\}$.
10. a) $a_0 = 3$, b) $a_1 = -1$, c) $a_4 = 787$, d) $a_5 = 2639$
11. Falls wir mit $n =$ beginnen, lautet die Folge

$$(a_n) = \big(0,\ -1,\ -2,\ -2,\ 8,\ 88,\ 656,\ 4'912,\ 40'064,\ 362'368\big)$$

12. Man verifiziert durch Einsetzen sofort, dass

$$a_n = 2^{\frac{n}{2}} \frac{1+(-1)^n}{2} \ = \ 2^{\frac{n}{2}-1}\left((-1)^n+1\right)$$

mit $n = 0$ beginnend die Zahlen 1, 0, 2, 0, 4, … liefert.

13. a) 20, b) 511, c) 18.

## Mengen

1. **KR, Abschnitt 2.1, Aufgabe 19b:** Wie lautet die Potenzmenge von $\{a, b\}$?
2. **KR, Abschnitt 2.2, Aufgabe 3:** Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{0, 3, 6\}$. Bestimmen sie dann (a) $A \cup B$, (b) $A \cap B$, (c) $A \setminus B$ und (d) $B \setminus A$.
3. **KR, Abschnitt 2.2, Aufgabe 15:** Zeigen sie, dass für zwei Mengen $A$ und $B$ gilt: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
4. **KR, Abschnitt 2.2, Aufgabe 50:** Die Universalmenge sei $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Drücken sie jede der folgenden Mengen mit einem Bitstring der Länge 10 (denn $U$ hat genau 10 Elemente) aus, wobei das $i$-te Bit 1 ist, falls das $i$ in der Menge ist (und Null sonst): (a) $\{3, 4, 5\}$, (b) $\{1, 3, 6, 10\}$ und (c) $\{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$.
5. **KR, Abschnitt 2.2, Aufgabe 51:** Welche Mengen stellen die folgenden Bitstrings dar, wenn man die Universalmenge aus der letzten Aufgabe verwendet: (a) 11 1100 1111, (b) 01 0111 1000 und (c) 10 0000 0001.

1. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,a\}\}$

2. a) $A \cup B$ (Vereinigung) $\Rightarrow \{0,1,2,3,3,4,5,6\}$

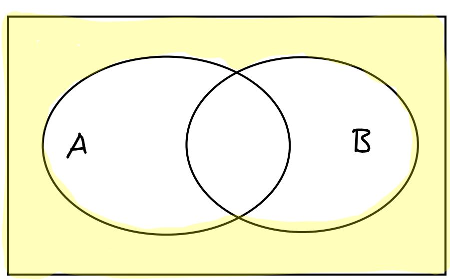
   b) $A \cap B$ (Durchschnitt) $\Rightarrow \{3\}$

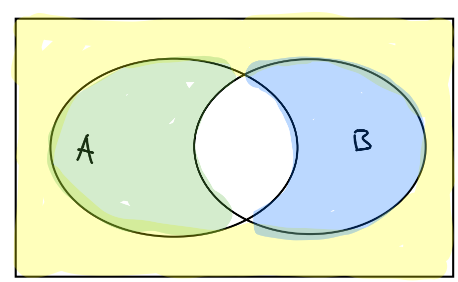
   c) $A \setminus B$ (Differenz) $\Rightarrow \{1,2,4,5\}$

   d) $B \setminus A$ (Differenz) $\Rightarrow \{0,6\}$

3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A}$ $\overline{B}$




| $A$ | $B$ | $A \cup B$ | $\overline{A \cup B}$ | $\overline{A}$ | $\overline{B}$ | $\overline{A} \cap \overline{B}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

4.

| | Teilmenge | Bitstring |
|---|---|---|
| a) | $\{3,4,5\}$ | 0011100000 |
| b) | $\{1,3,6,10\}$ | 1010010001 |
| c) | $\{2,3,4,7,8,9\}$ | 0111001110 |

5.

| | Teilmenge | Bitstring |
|---|---|---|
| a) | $\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$ | 1111001111 |
| b) | $\{2,4,5,6,7\}$ | 0101111000 |
| c) | $\{1, 10\}$ | 1000000001 |

## Funktionen

5. **KR, Abschnitt 2.3, Aufgabe 5b:** Gesucht ist der Definitions- und Wertebereich der Funktion $f$, die jedem Bitstring das doppelte der Anzahl Nullen im Bitstring zuordnet (z.B. gilt $f(101000) = 2 \cdot 4 = 8$, $f(111) = 2 \cdot 0 = 0$ und $f(00) = 2 \cdot 2 = 4$).

6. **KR, Abschnitt 2.3, Aufgaben 8a bis 9c:** Gesucht sind die folgenden Werte: (a) $\lceil \frac{3}{4} \rceil$, (b) $\lceil 1.1 \rceil$ und (c) $\lfloor -0.1 \rfloor$. Hier haben wir die *ceiling*- und *floor*-Funktionen verwendet:

?

$$\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} | x \leq n\}$$
$$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$$

Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen auf: Sie werden sehen, dass es sich um äusserst nützliche Funktionen handelt! Man sieht sofort, dass gilt:

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1.$$

7. **KR, Abschnitt 2.3, Aufgabe 11:** Welche Funktionen von $\{a, b, c, d\}$ auf sich selbst sind bijektiv: (a) $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = c$, $f(d) = d$, (b) $f(a) = b$, $f(b) = b$, $f(c) = d$, $f(d) = c$, und (c) $f(a) = d$, $f(b) = b$, $f(c) = c$, $f(d) = d$?

8. **KR, Abschnitt 2.3, Aufgaben 19a, 19b:** Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ bijektiv sind: (a) $f(x) = 2x + 1$ und (b) $f(x) = x^2 + 1$.

9. **KR, Abschnitt 2.3, Aufgaben 26:** Sei $S = \{-1, 0, 2, 4, 7\}$. Gesucht ist $f(S)$ falls (a) $f(x) = \lceil x/5 \rceil$, (b) $f(x) = \lfloor (x^2 + 1)/3 \rfloor$. ?

5. $\mathbb{D} = \{0, 10, 100, 1000, 00001\}$

$\mathbb{W} = \{2, 2, 4, 6, 8\}$

6. ?

7. a) $\{a, b, c, d\}$

$f(a) = b$

$f(b) = a$

$f(c) = c$

$f(d) = d$

$\Rightarrow$ bijektiv
jedes Element genau 1

b) $\{a, b, c, d\}$

$f(a) = b$

$f(b) = b$

$f(c) = d$

$f(d) = c$

$\Rightarrow$ keines von allen,
da auf "a" niemand zeigt

c) $\{a, b, c, d\}$

$f(a) = d$

$f(b) = b$

$f(c) = c$

$f(d) = d$

$\Rightarrow$ keines von allen,
da auf "a" niemand zeigt

8. a) $f(x) = 2x + 1$

$\mathbb{D} = \{0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, ...\} \Rightarrow \mathbb{W} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

$\Rightarrow$ Funktion ist bijektiv, weil jedes Element <u>genau</u> 1 mal vorkommt

b) $f(x) = x^2 + 1$

$\mathbb{D} = \{0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, ...\} \Rightarrow \{0, 1\frac{1}{4}, 2, 3\frac{1}{4}, 5, ...\}$

$\Rightarrow$ keins von allen, weil nicht alles abgebildet werden kann

9. ?

## Folgen, Summationen und Produkte

~~10~~. **KR, Abschnitt 2.4, Aufgabe 1:** Gegeben sei die Zahlenfolge $\{a_n\}$ mit $a_n = 2\cdot(-3)^n + 5^n$. Berechnen Sie **a**) $a_0$ **b**) $a_1$ **c**) $a_4$ **d**) $a_5$

~~11~~. **KR, Abschnitt 2.4, Aufgabe 5d:** Bestimmen Sie die ersten 10 Glieder der Zahlenfolge, deren $n$-tes Glied gleich $n! - 2^n$ ist.

12. **KR, Abschnitt 2.4, Aufgabe 9c:** Wir betrachten die folgende (Anfangs)sequenz natürlicher Zahlen: $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, \ldots$ Bestimmen Sie ein allgemeines Bildungsgesetz für diese Zahlenfolge, d.h. eine Vorschrift der Gestalt $a_n = f(n)$, so dass $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, ... ?

~~13~~. **KR, Abschnitt 2.4, Aufgaben 13a, 13d und 17d:** Bestimmen Sie die Werte der folgenden Summen:

$$a)\ \sum_{k=1}^{5}(k+1) \qquad b)\ \sum_{j=0}^{8}(2^{j+1}-2^j) \qquad c)\ \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3} ij$$

~~14~~. **KR, Abschnitt 2.4, Aufgabe 27:** Bestimmen Sie die Werte der folgenden Produkte [1]

$$a)\ \prod_{i=0}^{10} i \qquad b)\ \prod_{i=5}^{8} i \qquad c)\ \prod_{i=1}^{100}(-1)^i \qquad d)\ \prod_{i=1}^{10} 2$$

[1] Das Produkt der Zahlen $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ kann mit Hilfe des Produktzeichen wie folgt abgekürzt werden: $\prod_{j=m}^{n} a_j = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$. Beispielsweise ist $\prod_{j=0}^{5}(2j+1) = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11 = 10'395$.

10. $a_n = 2\cdot(-3)^n + 5^n$

a) $a_0 = 2\cdot(-3)^0 + 5^0 = 2\cdot 1 + 1 = 3$

b) $a_1 = 2\cdot(-3)^1 + 5^1 = 2\cdot(-3) + 5 = -1$

c) $a_4 = 2\cdot(-3)^4 + 5^4 = 2\cdot 81 + 625 = 787$

d) $a_5 = 2\cdot(-3)^5 + 5^5 = 2\cdot(-243) + 3'125 = 2639$

11. $n! - 2^n \Rightarrow$ ersten 10 Glieder

$n_0 = 0! - 2^0 = 0$

$n_1 = 1! - 2^1 = -1$

$n_2 = 2! - 2^2 = -2$

$n_3 = 3! - 2^3 = -2$

$n_4 = 4! - 2^4 = 8$

$n_5 = 5! - 2^5 = 88$

$n_6 = 6! - 2^6 = 656$

$n_7 = 7! - 2^7 = 4'912$

$n_8 = 8! - 2^8 = 40'064$

$n_9 = 9! - 2^9 = 362'368$

12. ?

13. a) $\sum_{k=1}^{5} (k+1) = 2+3+4+5+6 = 20$

b) $\sum_{j=0}^{8} (2^{j+1} - 2^{j}) = 511$

c) $\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{3} i j = 0\cdot0 + 0\cdot1 + 0\cdot2 + 0\cdot3 + 1\cdot0 + 1\cdot1 + 1\cdot2 + 1\cdot3$

$+ 2\cdot0 + 2\cdot1 + 2\cdot2 + 2\cdot3 = 0+0+0+0+0+1+2+3$

$+0+2+4+6 = 18$

II. a) $\prod_{i=0}^{10} i = 0\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10 = 0$

b) $\prod_{i=5}^{8} i = 5\cdot6\cdot7\cdot8 = 1'680$

c) $\prod_{i=1}^{100} (-1)^{i} = 1$

d) $\prod_{i=1}^{10} 2 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 1'024$

III. **KR, Abschnitt 2.4, Aufg. 15:** Was ist der Wert der folgenden Summen:

$$a)\ \sum_{j=0}^{8} 3\cdot 2^{j} \qquad b)\ \sum_{k=1}^{8} 2^{k} \qquad c)\ \sum_{l=2}^{8} (-3)^{l} \qquad d)\ \sum_{i=0}^{8} 2\cdot(-3)^{i}$$

IV. **KR, Abschnitt 2.4, Aufg. 24:** Bestimmen Sie die Summe $\sum_{k=99}^{200} k^{3}$.

V. Was sind die Werte der folgenden Produkte:

$$a)\ \prod_{i=0}^{10} 2^{i} \qquad b)\ \prod_{i=5}^{8} e^{-i} \qquad c)\ \prod_{i=1}^{100} (-2)^{i} \qquad d)\ \prod_{i=1}^{10} 2^{-1}$$

VI. **KR, Abschnitt 2.4, Aufg. 29 und 30:** Bestimmen Sie

$$a)\ \sum_{j=0}^{4} j! \qquad b)\ \prod_{j=0}^{4} j!$$

VII. **KR, Abschnitt 2.4, Aufg. 19:** Gegeben die Folge von reellen Zahlen $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Zeigen Sie, dass folgendes gilt

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$$

Schreiben Sie die Summe für kleine $n$ auf. Zwei aufeinander folgende Terme heben sich gegenseitig weg: deshalb nennt man Summen dieser Art **teleskopierende Summen**.

VIII. **KR, Abschnitt 2.4, Aufg. 20:** Man verwende vorige Aufgabe und die Identität

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

um die folgende Summe zu berechnen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

III. a) $\sum_{j=0}^{8} 3 \cdot 2^{j} = 3+6+12+24+48+96+192+384+768 = 1'533$

b) $\sum_{k=1}^{8} 2^{k} = 2+4+8+16+32+64+128+256 = 510$

c) $\sum_{i=2}^{8} (-3)^{i} = 9+(-27)+81+(-243)+729+(-2'187)+6'561 = 4'923$

d) $\sum_{i=0}^{8} 2\cdot(-3)^{i} = 2+(-6)+18+(-54)+162+(-486)+1'458+(-4'374)$
$+ 13'122$
$= 9'842$

IV. $\sum_{k=99}^{200} k^{3} = 380'477'799$

V. a) $\prod_{i=0}^{10} 2^{i} = 36'028'797'018'963'970$

b) $\prod_{i=5}^{8} e^{-i} = e^{-26} = 5.10909\ E\text{-}12$

c) $\prod_{i=1}^{100} (-2)^{i} = \infty$

d) $\prod_{i=1}^{10} 2^{-i} = \frac{1}{1024}$

VI. a) $\sum_{j=0}^{4} j! = 34$

b) $\prod_{j=0}^{4} j! = 288$

VII. $\sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$

z.B. $\sum_{j=1}^{4} (a_j - a_{j-1}) \rightarrow a_4 - a_0 = 4 - 0 = 4 \leftarrow$ beide liefern gleiche Werte

$\sum_{j=1}^{4} (a_j - a_{j-1}) = \underbrace{a_1 - a_0}_{1} + \underbrace{a_2 - a_1}_{1} + \underbrace{a_3 - a_2}_{1} + \underbrace{a_4 - a_3}_{1} = 4$

VII. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$= \sum_{k=1}^{n} k^{-1} - (k+1)^{-1}$

$= 1^{-1} - 1^{-1} + 1 + (n^{-1} - n^{-1} + 1) = \underline{\underline{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}}$