Übung (10.–11.5.2022): Keplerproblem

Problemstellung:

Die Bewegungsgleichung für einen Planeten mit der Masse m_e im Gravitationsfeld der Sonne ist gegeben durch:

$$m_e \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -G\ \vec{r}(t) \frac{m_s m_e}{|\vec{r}(t)|^3}.$$

$\vec{r}$ ist ein Vektor in $\mathbb{R}^2$. Die notwendigen Konstanten und Parameter sind gegeben durch:

$$m_s = 1.989 \times 10^{30}\ \text{kg}, \qquad m_e = 5.972 \times 10^{24}\ \text{kg},$$

$$r_e = 1.4959787 \times 10^{11}\ \text{m}, \qquad G = 6.67408 \times 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot s^2}.$$

Aufgaben:

1. Arbeiten Sie mit geeigneten Einheiten. Wechseln Sie von SI (kg, m, s) nach Erdmassen, AU (astronomical units) und Tagen.

$$m_s = \qquad \text{m}_e, \qquad m_e = 1,$$

$$r_e = 1\ \text{AU}, \qquad G = \qquad \frac{\text{r}_e^3}{\text{m}_\text{e} \cdot \text{Days}^2}$$

2. Schreiben Sie die Bewegungsgleichung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung um.
   Schreiben Sie ein Programm, dass das System gekoppelter Differentialgleichungen mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens erster Ordnung integriert. Die Anfangswerte sind gegeben durch:

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{AU}, \qquad \dot{\vec{r}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.017326 \end{pmatrix} \text{AU/Day}.$$

3. Verwenden Sie das explizite Euler-Verfahren um die Bewegungsgleichung über einen Zeitraum von 365 Tagen zu integrieren und erzeugen Sie eine Grafik des Orbits mit `gnuplot`. Verwenden Sie dazu unterschiedliche Zeitschritte mit $\Delta t = 1$ Day und $\Delta t = 0.01$ Day.
4. Implementieren Sie das Runge-Kutta-Verfahren (RK4). Wiederholen Sie 3 mit RK4 anstelle des Euler-Verfahrens.
5. Implementieren Sie das semi-implizite Euler-Verfahren erster Ordnung. Wiederholen Sie 3 mit dem semi-impliziten Verfahren anstelle des expliziten Euler-Verfahrens.
   HINWEIS: Beim semi-impliziten Euler-Verfahren sind die Schrittgleichungen von folgender Form: $\vec{r}_{t+1} = \vec{r}_t + \Delta t \vec{v}_t$ und $\vec{v}_{t+1} = \vec{v}_t + \Delta t \Phi(\vec{r}_{t+1}, \Delta t)$.
6. Die Gesamtenergie des Systems ist gegeben durch

$$E(t_n) = \frac{m_e |\dot{\vec{r}}(t_n)|^2}{2} - \frac{G\ m_s\ m_e}{|\vec{r}(t_n)|}.$$

   Berechnen Sie $E(t_n)$ mit Hilfe der drei oben erwähnten Verfahren ($\Delta t = 0.01$ Day) als Funktion der Zeit. Erzeugen Sie mit `gnuplot` eine Grafik die $E(t_n)$ darstellt. Wie verhält sich die berechnete Gesamtenergie als Funktion der Zeit für die unterschiedlichen Verfahren?

7. Ändern Sie die Anfangsgeschwindigkeit so, daß die Lösung $\vec{r}(t)$ dem Hohmann-Transfer-Orbit zwischen Erde und Mars entspricht. Verwenden Sie dazu ein beliebiges Lösungsverfahren. Nehmen Sie an, dass die Marsumlaufbahn in etwa kreisförmig mit einem Radius von 1.5AU ist. Achten Sie auf die Konvergenz des Transfer-Orbits mit der Schrittweite. Wie lange dauert der Transfer?