Filtro complementario

Fabián Inostroza

7 de abril de 2015

1. Aproximación discreta de función de transferencia continua

Se usará integración numérica, específicamente el método de Euler. La función de transferencia continua de un integrador es

$$H(s) = \frac{1}{s}.$$

En el método de Euler se aproxima la integral con la siguiente ecuación

$$y(k) = y(k-1) + u(k) \cdot T_0$$

donde $y(k)$ es el valor de integral al paso k, u_k es la variable a integrar y T_0 es el paso de integración (tiempo de muestreo). Aplicando la transformada Z a la ecuación anterior se obtiene la siguiente función de transferencia

$$H(z) = \frac{T_0}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{\frac{1-z^{-1}}{T_0}}$$

Comparando la función de transferencia continua con la discreta se ve que se puede aproximar la función de transferencia continua haciendo el siguiente reemplazo

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T_0} \tag{1}$$

(no muy formal que digamos).

2. Filtro pasa bajos

La versión circuital de un filtro pasa bajos se muestra en la Figura 1.

La función de transferencia de este filtro es

$$H(s) = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

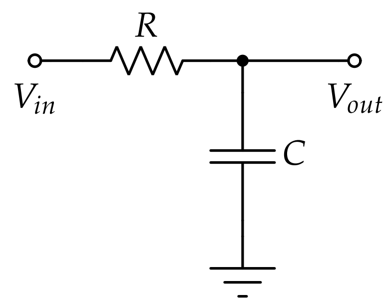

Figura 1: Filtro pasa bajos análogo.

Usando (1) se obtiene

$$H(z) = \frac{\omega_c}{(1 - z^{-1})/T_0 + \omega_c}$$

Aplicando transformada Z inversa se obtiene

$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{1/T_0}{1/T_0 + \omega_c} y(k-1) + \frac{\omega_c}{1/T_0 + \omega_c} u(k) \\ &= (1-\alpha) y(k-1) + \alpha u(k) \end{aligned}$$

donde

$$\alpha = \frac{\omega_c}{1/T_0 + \omega_c}$$

3. Filtro pasa altos

La versión circuital de un filtro pasa altos se muestra en la Figura 2.

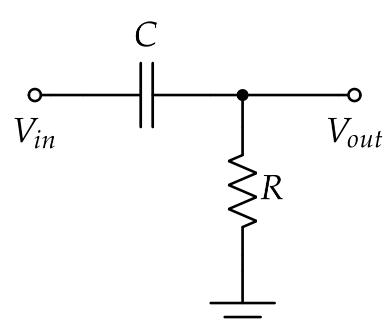

Figura 2: Filtro pasa altos análogo.

La función de transferencia de este filtro es

$$H(s) = \frac{RCs}{RCs + 1} = \frac{s}{s + \omega_c}$$

Usando (1) se obtiene

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1})/T_0}{(1 - z^{-1})/T_0 + \omega_c}$$

Aplicando transformada Z inversa se obtiene

$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{1/T_0}{1/T_0 + \omega_c} y(k-1) + \frac{1/T_0}{1/T_0 + \omega_c} [u(k) - u(k-1)] \\ &= \beta y(k-1) + \beta[u(k) - u(k-1)] \end{aligned}$$

donde

$$\beta = \frac{1/T_0}{1/T_0 + \omega_c}$$

4. Filtro complementario

El diagrama de bloques de este filtro se muestra en la Figura 3.

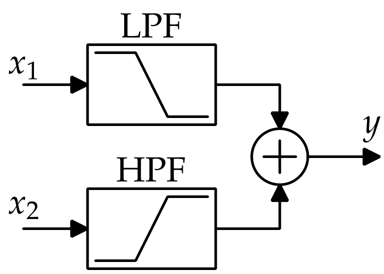

Figura 3: Filtro complementario.

El filtro pasa bajo y el filtro pasa altos tienen la misma frecuencia de corte ω_c.

Para utilizar el filtro complementario en la medición del ángulo de inclinación se utiliza el esquema de la Figura 4.

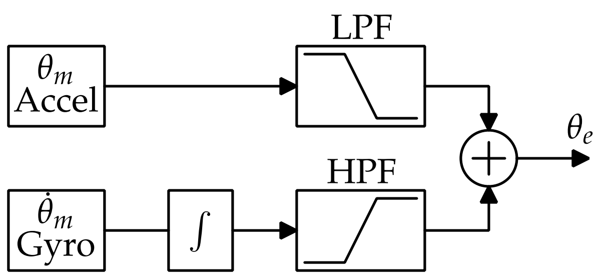

Figura 4: Filtro complementario.

Mezclando las funciones de transferencia obtenidas anteriormente se llega la siguiente función de transferencia para el filtro

$$\theta_e(z) = \frac{\omega_c}{(1-z^{-1})/T_0 + \omega_c}\theta_m(z) + \frac{T_0}{1-z^{-1}}\frac{(1-z^{-1})/T_0}{(1-z^{-1})/T_0 + \omega_c}\dot{\theta}_m(z)$$

Simplificando esta función de transferencia se llega a

$$\theta_e(z) = \frac{\omega_c}{(1-z^{-1})/T_0 + \omega_c}\theta_m(z) + \frac{1}{(1-z^{-1})/T_0 + \omega_c}\dot{\theta}_m(z)$$

Reordenando

$$\theta_e(z)\left[(1-z^{-1})/T_0 + \omega_c\right] = \omega_c\theta_m(z) + \dot{\theta}_m(z)$$

Aplicando transformada Z inversa

$$\begin{aligned}
\theta_e(k)(1/T_0 + \omega_c) &= \theta_e(k-1)/T_0 + \omega_c\theta_m(k) + \dot{\theta}_m(k) \\
\theta_e(k) &= \frac{1/T_0}{1/T_0 + \omega_c}\theta_e(k-1) + \frac{1}{1/T_0 + \omega_c}\dot{\theta}_m(k) + \frac{\omega_c}{1/T_0 + \omega_c}\theta_m(k) \\
&= \frac{1/T_0}{1/T_0 + \omega_c}[\theta_e(k-1) + T_0\dot{\theta}_m(k)] + \frac{\omega_c}{1/T_0 + \omega_c}\theta_m(k) \\
&= (1-\alpha)[\theta_e(k-1) + T_0\dot{\theta}_m(k)] + \alpha\theta_m(k)
\end{aligned}$$

Resultado de aplicar el filtro complementario

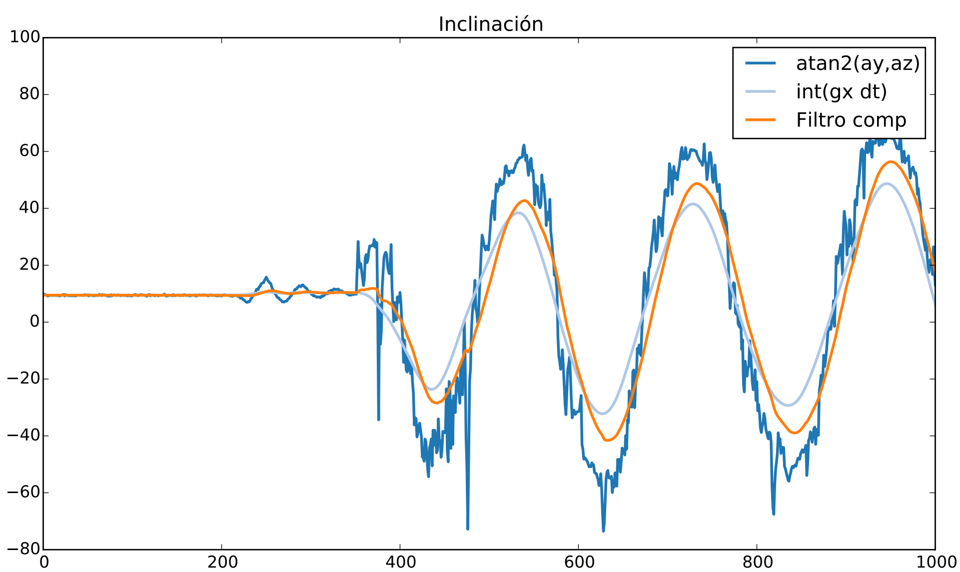

Figura 5: Ángulo de inclinación usando filtro complementario.