Filtros

Fabián Inostroza

25 de enero de 2015

1. Aproximación discreta de función de transferencia continua

Se usará integración numérica, el método de Euler. La función de transferencia continua de un integrador es

$$H(s) = \frac{1}{s}.$$

En el método de Euler se aproxima la integral con la siguiente ecuación

$$y_k = y_{k-1} + u_k \cdot T_0$$

donde y_k es el valor de integral al paso k, u_k es la variable a integrar y T_0 es el tiempo de muestreo. Aplicando la transformada Z a la ecuación anterior se obtiene la siguiente función de transferencia

$$H(z) = \frac{T_0}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{\frac{1-z^{-1}}{T_0}}$$

Comparando la función de transferencia continua con la discreta se ve que se puede aproximar la función de transferencia continua haciendo el reemplazo

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T_0} \tag{1}$$

.

2. Filtro pasa bajos

La versión circuital de un filtro pasa bajos se muestra en la Figura 1.

La función de transferencia de este filtro es

$$H(s) = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

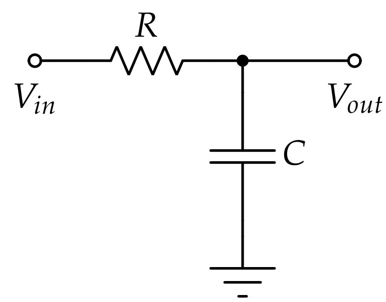

Figura 1: Filtro pasa bajos análogo.

Usando (1) se obtiene

$$H(z) = \frac{\omega_c}{(1 - z^{-1})/T_0 + \omega_c}$$

Aplicando transformada Z inversa se obtiene

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{1}{T_0(1/T_0 + \omega_c)} y_{k-1} + \frac{\omega_c}{1/T_0 + \omega_c} u_k \\ &= (1 - \alpha) y_{k-1} + \alpha u_k \end{aligned}$$

donde

$$\alpha = \frac{\omega_c}{1/T_0 + \omega_c}$$

3. Filtro pasa altos

La versión circuital de un filtro pasa altos se muestra en la Figura 2.

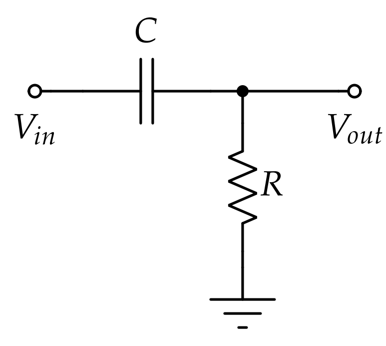

Figura 2: Filtro pasa altos análogo.

La función de transferencia de este filtro es

$$H(s) = \frac{RCs}{RCs + 1} = \frac{s}{s + \omega_c}$$

Usando (1) se obtiene

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1})/T_0}{(1 - z^{-1})/T_0 + \omega_c}$$

Aplicando transformada Z inversa se obtiene

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{1/T_0}{1/T_0 + \omega_c} y_{k-1} + \frac{1/T_0}{1/T_0 + \omega_c}(u_k - u_{k-1}) \\ &= \beta y_{k-1} + \beta(u_k - u_{k-1}) \end{aligned}$$

donde

$$\beta = \frac{1/T_0}{1/T_0 + \omega_c}$$

4. Filtro complementario

El diagrama de bloques de este filtro se muestra en la Figura 3.

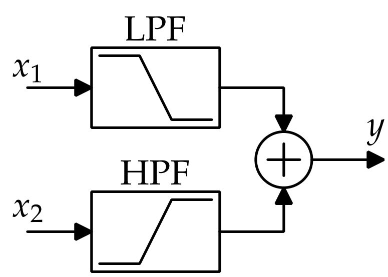

Figura 3: Filtro complementario.

El filtro pasa bajo y el filtro pasa altos tienen la misma frecuencia de corte ω_c.

Para utilizar el filtro complementario en la medición del ángulo de inclinación se utiliza el esquema de la Figura 4.

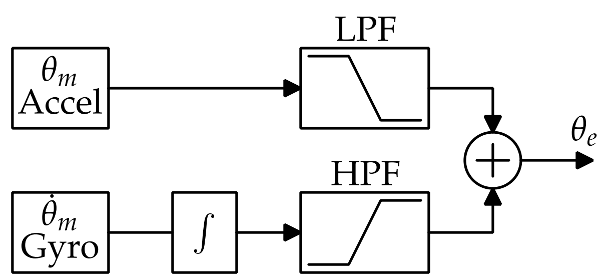

Figura 4: Filtro complementario.

Mezclando las funciones de transferencia obtenidas anteriormente se llega la siguiente función de transferencia para el filtro

$$\theta_e(z) = \frac{\omega_c}{(1-z^{-1})/T_0 + \omega_c}\theta_m(z) + \frac{T_0}{1-z^{-1}}\frac{(1-z^{-1})/T_0}{(1-z^{-1})/T_0 + \omega_c}\dot{\theta}_m(z)$$

Simplificando esta función de transferencia se llega a

$$\theta_e(z) = \frac{\omega_c}{(1-z^{-1})/T_0 + \omega_c}\theta_m(z) + \frac{1}{(1-z^{-1})/T_0 + \omega_c}\dot{\theta}_m(z)$$

Reordenando

$$\theta_e(z)\left[(1-z^{-1})/T_0 + \omega_c\right] = \omega_c\theta_m(z) + \dot{\theta}_m(z)$$

Aplicando transformada Z inversa

$$\begin{aligned}
\theta_e(k)(1/T_0 + \omega_c) &= \theta_e(k-1)/T_0 + \omega_c\theta_m(k) + \dot{\theta}_m(k) \\
\theta_e(k) &= \frac{1/T_0}{1/T_0 + \omega_c}\theta_e(k-1) + \frac{1}{1/T_0 + \omega_c}\dot{\theta}_m(k) + \frac{\omega_c}{1/T_0 + \omega_c}\theta_m(k) \\
&= \frac{1/T_0}{1/T_0 + \omega_c}[\theta_e(k-1) + T_0\dot{\theta}_m(k)] + \frac{\omega_c}{1/T_0 + \omega_c}\theta_m(k) \\
&= (1-\alpha)[\theta_e(k-1) + T_0\dot{\theta}_m(k)] + \alpha\theta_m(k)
\end{aligned}$$