

# Filtros

Fabián Inostroza

3 de febrero de 2015

## 1. Aproximación discreta de función de transferencia continua

Se usará integración numérica, el método de Euler. La función de transferencia continua de un integrador es

$$H(s) = \frac{1}{s}.$$

En el método de Euler se aproxima la integral con la siguiente ecuación

$$y(k) = y(k-1) + u(k) \cdot T_0$$

donde  $y(k)$  es el valor de integral al paso  $k$ ,  $u_k$  es la variable a integrar y  $T_0$  es el tiempo de muestreo. Aplicando la transformada Z a la ecuación anterior se obtiene la siguiente función de transferencia

$$H(z) = \frac{T_0}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{\frac{1-z^{-1}}{T_0}}$$

Comparando la función de transferencia continua con la discreta se ve que se puede aproximar la función de transferencia continua haciendo el reemplazo

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T_0} \tag{1}$$

.

## 2. Filtro pasa bajos

La versión circuital de un filtro pasa bajos se muestra en la Figura 1.

La función de transferencia de este filtro es

$$H(s) = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

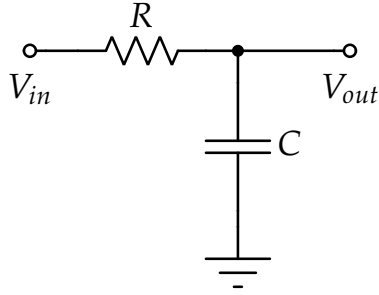


Figura 1: Filtro pasa bajos análogo.

Usando (1) se obtiene

$$H(z) = \frac{\omega_c}{(1 - z^{-1})/T_0 + \omega_c}$$

Aplicando transformada Z inversa se obtiene

$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{1}{T_0(1/T_0 + \omega_c)}y(k-1) + \frac{\omega_c}{1/T_0 + \omega_c}u(k) \\ &= (1 - \alpha)y(k-1) + \alpha u(k) \end{aligned}$$

donde

$$\alpha = \frac{\omega_c}{1/T_0 + \omega_c}$$

### 3. Filtro pasa altos

La versión circuital de un filtro pasa altos se muestra en la Figura 2.

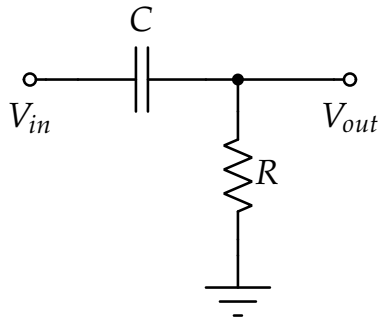


Figura 2: Filtro pasa altos análogo.

La función de transferencia de este filtro es

$$H(s) = \frac{RCs}{RCs + 1} = \frac{s}{s + \omega_c}$$

Usando (1) se obtiene

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1})/T_0}{(1 - z^{-1})/T_0 + \omega_c}$$

Aplicando transformada Z inversa se obtiene

$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{1/T_0}{1/T_0 + \omega_c} y(k-1) + \frac{1/T_0}{1/T_0 + \omega_c} [u(k) - u(k-1)] \\ &= \beta y(k-1) + \beta [u(k) - u(k-1)] \end{aligned}$$

donde

$$\beta = \frac{1/T_0}{1/T_0 + \omega_c}$$

#### 4. Filtro complementario

El diagrama de bloques de este filtro se muestra en la Figura 3.

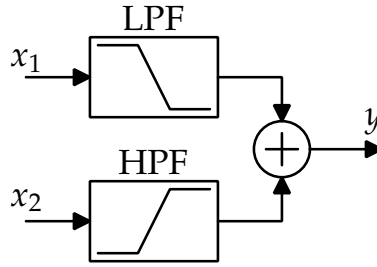


Figura 3: Filtro complementario.

El filtro pasa bajo y el filtro pasa altos tienen la misma frecuencia de corte  $\omega_c$ .

Para utilizar el filtro complementario en la medición del ángulo de inclinación se utiliza el esquema de la Figura 4.

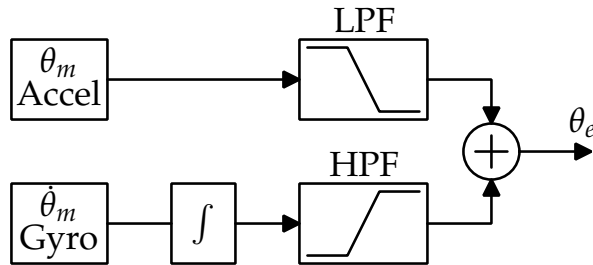


Figura 4: Filtro complementario.

Mezclando las funciones de transferencia obtenidas anteriormente se llega la siguiente función de transferencia para el filtro

$$\theta_e(z) = \frac{\omega_c}{(1 - z^{-1})/T_0 + \omega_c} \theta_m(z) + \frac{T_0}{1 - z^{-1}} \frac{(1 - z^{-1})/T_0}{(1 - z^{-1})/T_0 + \omega_c} \dot{\theta}_m(z)$$

Simplificando esta función de transferencia se llega a

$$\theta_e(z) = \frac{\omega_c}{(1 - z^{-1})/T_0 + \omega_c} \theta_m(z) + \frac{1}{(1 - z^{-1})/T_0 + \omega_c} \dot{\theta}_m(z)$$

Reordenando

$$\theta_e(z) \left[ (1 - z^{-1})/T_0 + \omega_c \right] = \omega_c \theta_m(z) + \dot{\theta}_m(z)$$

Aplicando transformada Z inversa

$$\begin{aligned} \theta_e(k)(1/T_0 + \omega_c) &= \theta_e(k-1)/T_0 + \omega_c \theta_m(k) + \dot{\theta}_m(k) \\ \theta_e(k) &= \frac{1/T_0}{1/T_0 + \omega_c} \theta_e(k-1) + \frac{1}{1/T_0 + \omega_c} \dot{\theta}_m(k) + \frac{\omega_c}{1/T_0 + \omega_c} \theta_m(k) \\ &= \frac{1/T_0}{1/T_0 + \omega_c} [\theta_e(k-1) + T_0 \dot{\theta}_m(k)] + \frac{\omega_c}{1/T_0 + \omega_c} \theta_m(k) \\ &= (1 - \alpha) [\theta_e(k-1) + T_0 \dot{\theta}_m(k)] + \alpha \theta_m(k) \end{aligned}$$

Resultado de aplicar el filtro complementario

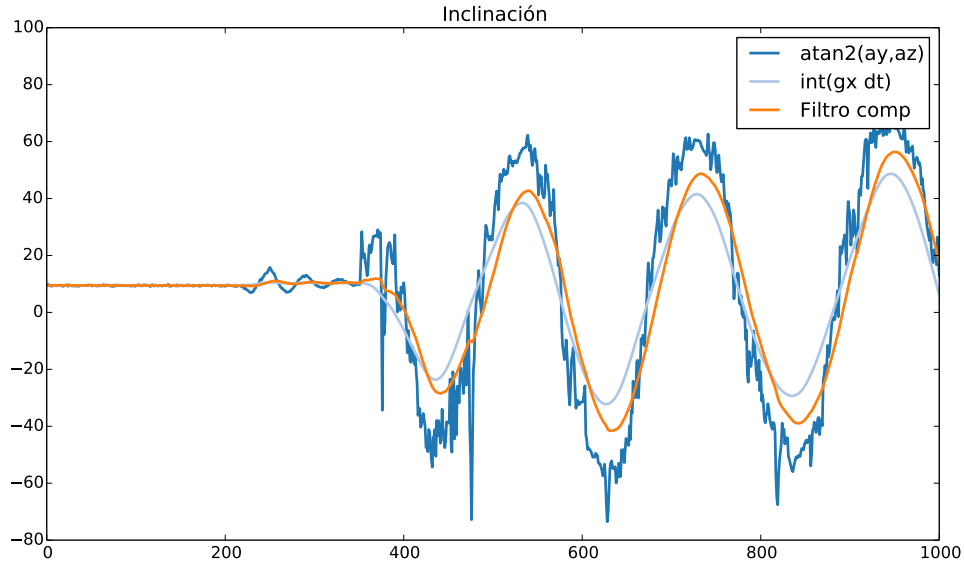


Figura 5: Ángulo de inclinación usando filtro complementario.