UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Diego Lemus - 21469
Fabián Juárez - 21440

Laboratorio 7

Modelación y Simulación

Repositorio: https://github.com/FabianJuarez182/MS-LAB7.git

Ejercicio 1

Muestre que si X y Y tiene la misma distribución, entonces:

$$VAR(\frac{X+Y}{2}) \leq VAR(X)$$

y concluya que el uso de las variables antitéticas nunca puede incrementar la varianza (Desigualdad Cauchy-Schwarz $E(XY) \leq E(X^2)E(Y^2) \Rightarrow |E(XY)| \leq E(X^2)$

Demostración:

Usamos la propiedad de la varianza la cual si multiplicamos esa variable aleatoria por una constante, la varianza se multiplica por el cuadrado de la constante.

$$VAR(\frac{X+Y}{2}) = \frac{1}{4}VAR(X + Y)$$

Expandimos Var(X+Y):

$$\frac{1}{4}VAR(X + Y) = \frac{1}{4}(VAR(X) + VAR(Y) + 2Cov(X,Y))$$

Dado que X y Y tienen la misma distribución la varianza es igual, por lo que:

$$\frac{1}{4}VAR(X + Y) = \frac{1}{4}(2\,VAR(X) + 2Cov(X,Y))$$

Simplificando:

$$VAR(\frac{X+Y}{2}) = \frac{1}{2}VAR(X) + \frac{1}{2}Cov(X,Y)$$

Usaremos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, esta establece que:

$$|Cov(X,Y)| \leq \sqrt{Var(X)Var(Y)}$$

Dado que X y Y tienen la misma distribución, esto se puede reducir a:

$$|Cov(X,Y)| \leq Var(X)$$

Por lo tanto, podemos concluir que $Cov(X, Y) \leq Var(X)$. Sustituyendo esto en la ecuación anterior:

$$VAR(\frac{X+Y}{2}) \leq VAR(X)$$

En el caso de las **variables antitéticas**, se tiene que $Y = - X$, La covarianza entre X y -X es:

$$Cov(X, Y) = Cov(X, - X) = - Var(X)$$

Sustituyendo en la fórmula de la varianza:

$$Var(\frac{X+(-X)}{2}) = \frac{1}{2}Var(X) + \frac{1}{2}(- Var(X)) = 0$$

Esto demuestra que el uso de variables antitéticas reduce la varianza a 0.

Se llega a concluir que si X y Y tienen la misma distribución entonces $VAR(\frac{X+Y}{2}) \leq VAR(X)$ se cumple. También que el uso de las variables antitéticas reduce la varianza a 0.

Ejercicio 2

Muestre que:

$$VAR(\alpha X + (1 - \alpha)W)$$

Se minimiza con α igual al valor dado en la ecuación

$$\alpha = \frac{VAR(W)-Cov(X,W)}{VAR(X)+VAR(W)-2Cov(X,W)}$$

y determine la varianza resultante

Demostración:

Expandimos la Varianza de la combinación lineal:

$$VAR(\alpha X + (1 - \alpha)W) = \alpha^2 VAR(X) + (1 - \alpha)^2 VAR(W) + 2\alpha(1 - \alpha)Cov(X, W)$$

Derivamos con respecto a α para minimizar la varianza y encontrar el valor de α que anula esta derivada. La función a derivar es:

$$f(\alpha) = \alpha^2 VAR(X) + (1 - \alpha)^2 VAR(W) + 2\alpha(1 - \alpha)Cov(X, W)$$

Derivamos con respecto a α**:**

$$\frac{d}{d\alpha}f(\alpha) = 2\alpha\, VAR(X) - 2(1 - \alpha)VAR(W) + 2(1 - 2\alpha)Cov(X, W)$$

Simplificamos:

$$2\alpha\, VAR(X) - 2\, VAR(W) + 2\alpha\, VAR(W) + 2Cov(X, W) - 4\alpha Cov(X, W) = 0$$

Agrupamos términos de α:

$$\alpha(2VAR(X) + 2VAR(W) - 4Cov(X, W) = 2VAR(W) - 2Cov(X, W)$$

Dividimos ambos lados entre 2:

$$\alpha(VAR(X) + VAR(W) - 2Cov(X, W) = VAR(W) - Cov(X, W)$$

Finalmente, despejamos α:

$$\alpha = \frac{VAR(W)-Cov(X,W)}{VAR(X)+VAR(W)-2Cov(X,W)}$$

Varianza Resultante:

Ahora que tenemos α, podemos sustituir este valor en la expresión para la varianza resultante:

$$VAR(\alpha X + (1 - \alpha)W)$$

$$VAR = \frac{VAR(X)*VAR(W)-Cov(X,W)^2}{VAR(X)+VAR(W)-2Cov(X,W)}$$

La varianza resultante es: $VAR = \frac{VAR(X)*VAR(W)-Cov(X,W)^2}{VAR(X)+VAR(W)-2Cov(X,W)}$

Ejercicio 4

Sean X y Y variables aleatorias exponenciales independientes, donde X tiene media 1 y Y tiene media 2, y supóngase que se quiere utilizar simulación para estimar P(X + Y > 4). Si se utiliza la esperanza condicional para reducir la varianza del estimador, ¿Condicionaría sobre X o sobre Y? Explique (o demuestre) su razonamiento.

Datos:

X ~ Exp(1)
Y ~ Exp(1/2)
Estar probabilidad de P(X+Y>4)

Demostración:

Teorema de la varianza total:

$$Var(Z) = E[Var(Z|W)] + Var(E[Z|W])$$

Donde:

- Z: Es la variable que estamos estimando (X+Y>4)
- W es la variable sobre cual estamos condicionando (X o Y)

Para disminuir la varianza de un estimador basándonos en la simulación vamos a condicionar la variable tal que la varianza de la esperanza condicional sea pequeña. Esta variable se toma basándose en la que genera mayor variabilidad y así se disminuye la varianza global.

Compararemos las distribuciones:

X ~ Exp(1) por lo que tiene una media de 1 y una varianza de 1
Y ~ Exp(1/2) por lo que tiene una media de 2 y una varianza de 4

Al visualizar que Y tiene mayor varianza se identifica que Y es más dispersa que X, lo que nos indica que la variabilidad de Y es mayor que la de X. Por ende, condicionamos sobre y para reducir más la varianza, ya que eliminamos la mayor fuente de incertidumbre.

Esperanza condicional sobre Y:

Al condicionar Y estamos considerando la probabilidad de P(X + Y > 4 | Y). Al saber que ambas son independientes se da que:

$$P(X + Y > 4 \,|\, Y) = P(X > 4 - Y)$$

Dado que X ~ Exp(1), la distribución acumulada de X es:

$$P(X > t) = e^{-t}$$

Por lo tanto, la probabilidad condicional es:

$$P(X + Y > 4 \,|\, Y) = P(X > 4 - Y) = e^{-(4-Y)} = e^{Y-4}$$

Esto nos permite estimar P(X + Y > 4) como:

$$P(X + Y > 4) = E[e^{Y-4}]$$

Ya que Y ~ Exp(1/2), podemos calcular esta esperanza explícitamente y reducir la varianza.

Esperanza condicional sobre X:

Si ahora condicionamos X, consideramos la probabilidad de P(X + Y > 4 | X). Al saber que ambas son independientes obtenemos:

$$P(X + Y > 4 \mid X) = P(Y > 4 - X)$$

Dado que Y ~ Exp(1/2), la función de distribución acumulada de Y es:

$$P(Y > t) = e^{-\frac{t}{2}}$$

Por lo tanto la probabilidad condicional es de:

$$P(X + Y > 4 \mid X) = P(Y > 4 - X) = e^{-\frac{(4-X)}{2}} = e^{\frac{(X-4)}{2}}$$

Entonces, al condicionar sobre X, la estimación de P(X + Y > 4) sería:

$$P(X + Y > 4) = E[e^{\frac{(X-4)}{2}}]$$

Conclusión

Dado que la varianza de Y es mucho mayor que la de X (la varianza de Y es 4 mientras que la de X es 1), condicionar sobre Y debería reducir más la varianza del estimador. Esto es porque al condicionar sobre Y, estamos eliminando la mayor fuente de incertidumbre y haciendo que la varianza de la esperanza condicional sea más pequeña.

Por lo tanto, se debería condicionar sobre Y para reducir la varianza del estimador cuando se utiliza la esperanza condicional para estimar P(X+Y>4).

Ejercicio 5
Vea el siguiente video del minuto 3:12 a 19:00
https://youtu.be/PMFWQigpgZA?t=192
También vea el siguiente video del minuto 0:00 al 13:57
https://youtu.be/yQ5rSbTXADc

Y responda las siguientes preguntas

- ¿Cómo definiría, usando sus propias palabras, el campo de la inteligencia artificial?

  La inteligencia artificial no es una sola cosa sino que está compuesta de varias partes en las cuales hay un complemento. Esta nos permite imitar la capacidad humana de aprender, razonar, resolver problemas y tomar decisiones basándose en un aprendizaje reforzado en las distintas áreas que trata el campo.

- ¿Cómo definiría, usando sus propias palabras, el campo de “simulation modeling”?

  El modelado de simulación es una forma de crear representaciones de sistemas reales para poder estudiar su comportamiento con distintas condiciones y ahorrando tiempo y costos. En este campo, se construyen modelos, tanto matemáticos como computacionales, que buscan imitar el funcionamiento de un sistema para luego ejecutar varias simulaciones y llevar a cabo un análisis de los distintos escenarios y poder obtener el comportamiento de las variables dándonos resultados que nos brindan el futuro de dichas simulaciones y poder llevar a cabo una mejor toma de decisiones sin necesidad de utilizar el sistema real para hacer dichas pruebas.

- ¿Cuál es la diferencia entre Inteligencia Artificial y Simulation Modeling?

  Simulation Modeling proviene de la capacidad de predecir en base a las reglas que se le brindan al modelo en los que primero se debe identificar los componentes principales que el sistema quiere modelar y luego tratar de comprender cómo se comportan estos componentes en el sistema real. Para lograrlo el modelador de la simulación se relaciona y trabaja de manera estrecha con los expertos para descubrir todas las reglas basándose en su experiencia y conocimiento del sistema real por lo que su objetivo principal es encontrar todas las reglas relevantes.

  Por otro lado, la inteligencia artificial se basa en la información almacenada en datos pasados para construir el modelo de aprendizaje en el que se centra únicamente el científico de datos para descubrir los patrones y correlaciones en los datos. En diferencia también es que en la IA no es necesario descubrir las reglas ocultas ya que estas están presentes en los datos, también que podemos obtener modelos predictivos de manera rápida y confiable y tambien que permite automatizar muchas de las tareas tediosas que eran necesarias para tener una aplicación exitosa de la simulación, como la toma de datos.

La inteligencia artificial (IA) se centra en la creación de máquinas que puedan realizar tareas de manera autónoma y "aprender" o mejorar con el tiempo, mientras que el simulation modeling se enfoca en construir modelos de sistemas o procesos para simular su comportamiento. La IA trata de emular la inteligencia o el pensamiento humano, buscando resolver problemas de manera autónoma, mientras que el modelado de simulación no necesariamente involucra aprendizaje o toma de decisiones, sino la replicación de un sistema para analizar sus dinámicas bajo diferentes escenarios.

- ¿Cómo se pueden combinar la inteligencia artificial y el simulation modeling?

  Se pueden combinar para implementar el aprendizaje por refuerzo profundo. En este enfoque, el modelado de simulación genera los datos y escenarios necesarios para que la inteligencia artificial entrene y aprenda a tomar mejores decisiones. La simulación crea un entorno controlado en el que la IA puede explorar diferentes acciones, identificar patrones o tendencias que serían difíciles de detectar manualmente, y descubrir múltiples soluciones al problema. Esto permite que el sistema mejore significativamente sus decisiones sin requerir tanto tiempo, logrando optimizaciones rápidas y eficientes en situaciones complejas.

- ¿Qué aplicaciones conjuntas pueden tener estos dos campos? ¿Cómo?

  - Simulaciones de tráfico y transporte: Los modelos de simulación pueden llegar a representar el flujo de tráfico en una ciudad, mientras que la inteligencia artificial puede ajustar los semáforos o proponer nuevas rutas basadas en patrones de tráfico en tiempo real para optimizar la afluencia vehicular.
  - Medicina: Simulaciones de tratamientos médicos pueden ayudar a prever la respuesta de un paciente, la inteligencia artificial puede analizar los resultados para personalizar la terapia basada en el historial del paciente y su genética. También podría ser con pandemias y la efectividad y reacción de las vacunas ante dicha enfermedad.
  - Finanzas: La simulación puede replicar como se da el mercado bajo diferentes condiciones y la inteligencia artificial optimizar estrategias de inversión y aprendería los patrones del mercado para hacer predicciones más acertadas y asegurar de manera más efectiva el dinero del usuario.