

ANÁLISIS NUMÉRICO

CURVAS DE BEZIER E INTERPOLACIÓN
MORTERO VALENCIANO

FABIÁN ALEXIS PALLARES JAIMES
LUIS SANTIAGO JARAMILLO ESPINOSA
JUAN SEBASTIÁN VALDERRAMA URQUIJO

PROFESORA: EDDY HERRERA DAZA



INGENIERÍA DE SISTEMAS
FACULTAD DE INGENIERÍA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
BOGOTÁ DC

1. Introducción

En este documento se presentará el proceso de desarrollo de la figura llamada “mortero valenciano” en la cual se puede evidenciar el uso de varias técnicas y métodos numéricos que ayudaron a la realización de este. También se mostrará la figura modelada en 3D, así como su equivalente físico realizado en porcelanacrón. Se tendrá en cuenta el margen de error presente de la figura resultante con respecto a los puntos obtenidos de la original.

Recomendaciones

Para poder utilizar Wolfram Mathematica, en lo que respecta a hardware se necesita como mínimo:

- ✳ Procesador Intel Pentium Dual-Core
- ✳ 14 GB de disco duro
- ✳ 2GB de RAM
- ✳ Acceso a internet para obtener datos de Wolfram Knowledgebase
- ✳ Sistema operativo Windows 7 en adelante

2. Mortero base

El mortero valenciano es un utensilio de cocina hecho en cerámica generalmente usado para machacar o majar cualquier condimento, especias entre otros. Lo que lo caracteriza de los demás morteros es que tiene unas 4 protuberancias en forma de aletas distribuidas por toda la circunferencia de la parte abierta del mortero.

Mortero en porcelanacrón

Este modelo que se muestra a continuación es un intento de mortero valenciano hecho en porcelanacrón con el propósito de compararlo con el realizado digitalmente para poder sacar un error absoluto entre los dos.



*Ilustración 1. Mortero valenciano en porcelanacrón
(vista frontal)*



*Ilustración 2. Mortero valenciano en porcelanacrón
(vista inferior)*



Ilustración 3. Mortero valenciano en porcelanacrón (vista en perspectiva inferior)

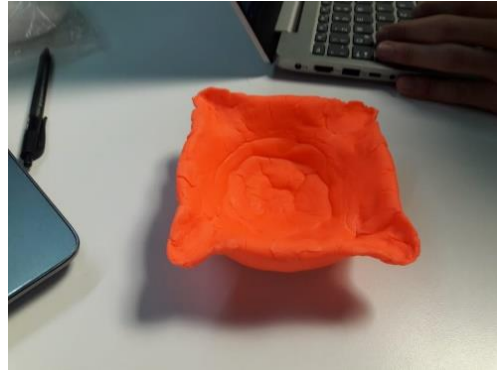


Ilustración 4. Mortero valenciano en porcelanacrón (vista en perspectiva superior)

Digitalización del mortero

Para poder realizar las operaciones de comparación entre el mortero hallado con curvas de Bezier y el mortero valenciano base en porcelanacrón, usamos la herramienta GeoGebra con el objetivo de digitalizar este último, obteniendo así un contorno de puntos, de los cuales usaríamos algunos que puedan dar forma a las figuras.

Gracias a la herramienta de imagen de GeoGebra, pudimos insertar las fotografías del mortero valenciano en porcelanacrón tomadas desde las vistas superior e inferior, las cuales consideramos que son las principales para dar forma al mortero. La herramienta nos brinda la opción de definir segmentos de recta, con los cuales podemos recorrer el contorno de la figura, habiendo anteriormente acomodado esta al plano cartesiano de modo que quedara a la misma escala del mortero hallado con Bezier que veremos más tarde.

Al lado izquierdo de las imágenes presentadas a continuación, se encuentran los segmentos y puntos utilizados para estos, con los cuales podremos hacer los cálculos correspondientes a la comparación de morteros.

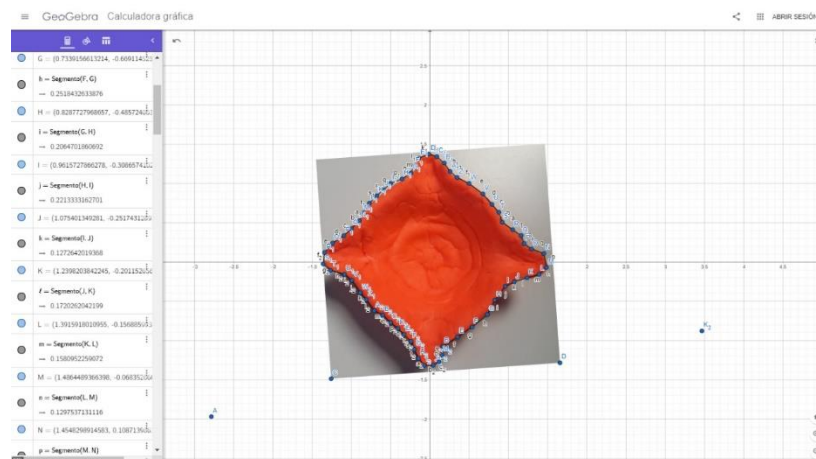


Ilustración 5. Digitalización del mortero desde su vista superior.

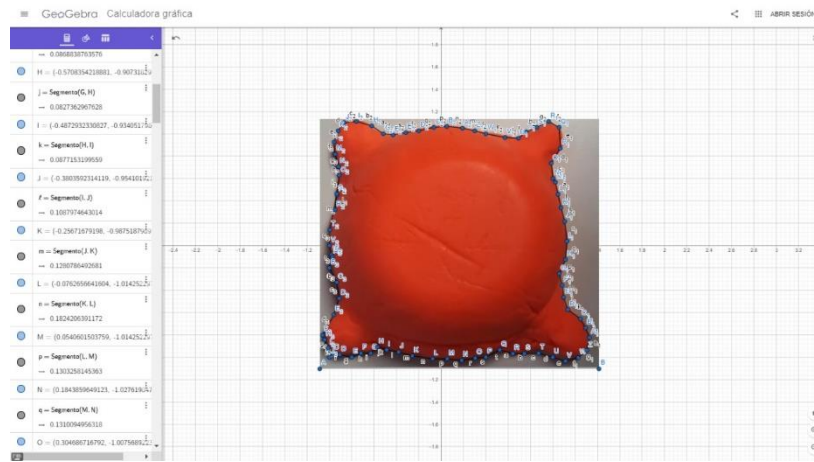


Ilustración 6. Digitalización del mortero desde su vista inferior.

3. Herramienta y funciones utilizadas

La herramienta utilizada para el desarrollo de la figura en 3D fue Wolfram Mathematica el cual es un sistema técnico computacional que se emplea en varias áreas como redes neuronales, machine learning, geometría, ciencias de datos, entre otros. Es desarrollado por Wolfram Research y el lenguaje que se utiliza para programar es el Wolfram Language.

Métodos utilizados:

- ✿ Curvas de Bézier
- ✿ Superficies cuadráticas
- ✿ Planos

Principales funciones de Wolfram Language usadas:

Nota: Todas las funciones usadas se pueden ver en el documento “mortero_bezier.pdf” adjunto o en el URL que se presenta más adelante, correspondientes al notebook de Mathematica

- ✿ ContourPlot3d
Esta función genera una gráfica tri-dimensional de f como un función de x, y y z
- ✿ bezierFunction
Representa una función de Bezier para una curva definida por los puntos de control pt_i .
- ✿ ParametricPlot3d
Genera una curva parametrizada en el espacio tri-dimensional dada por una variable u que va desde u_{min} hasta u_{max}

- ✿ Graphics3D
Representa una imagen gráfica tri-dimensional
- ✿ ClipPlanes
Es una opción de Graphics 3d que especifica una lista de planos que pueden cortar porciones de una figura 3d.
- ✿ InfinitePlane
Representa un plano que pasa a través de los puntos p_1, p_2 y p_3

4. MORTERO CON BEZIER

Primero, se pensó en encontrar una figura base con la cual pudiéramos empezar a moldear la figura, para luego poder usar las curvas de Bezier. Después de analizar un momento las superficies cuadráticas básicas, se llegó a la conclusión de que el paraboloide elíptico era la superficie perfecta para comenzar.

A esta superficie le cortamos la parte de abajo con un plano para luego agregar un plano circular que tapara por completo el agujero creado por el plano cuadrado anterior. Luego se realizó una de las aletas del mortero con ayuda de las curvas de Bezier, utilizadas para dar la forma necesaria con determinados puntos de control, inicio y final dados por nosotros. Posterior a esto, se replicó la utilización de las curvas de Bezier cambiando las coordenadas x y y y usadas para la primera aleta. Finalmente, se unieron todas las gráficas realizadas para representar el mortero de Bezier en su totalidad.

Para ver con detalle la realización y el código del mortero con curvas de Bezier, puede ingresar al pdf anexo "*mortero_bezier.pdf*" o al siguiente link, que corresponde a un *Mathematica notebook*:

<https://www.wolframcloud.com/obj/ee6e276e-2f0e-4f29-97b0-07c28c28f015>

5. Comparación

Para realizar la comparación de los dos morteros, se utilizó la herramienta GeoGebra, con la cual pudimos obtener los puntos de ambos morteros a una misma escala, y así poder obtener las diferencias entre ellos.

A continuación, se presentan los dos morteros desde sus vistas superior e inferior con sus respectivos puntos en GeoGebra.

Vista superior:

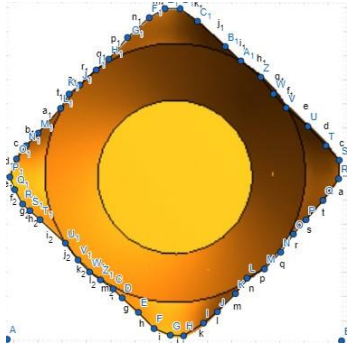


Ilustración 8. Puntos de la vista superior (Bezier).

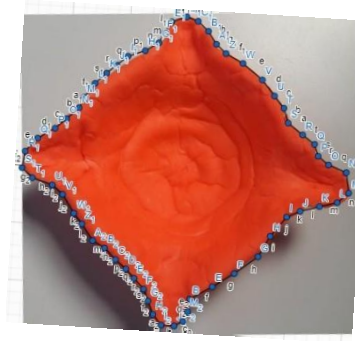


Ilustración 7. Puntos de la vista superior (Representación).

Vista inferior:

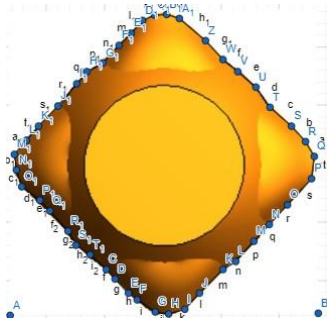


Ilustración 10. Puntos de la vista inferior (Bezier).



Ilustración 9. Puntos de la vista inferior (Representación).

Asimismo, gracias a la herramienta Photoshop, pudimos ver cada una de las vistas en sus dos representaciones a modo de capas, para determinar sus coincidencias

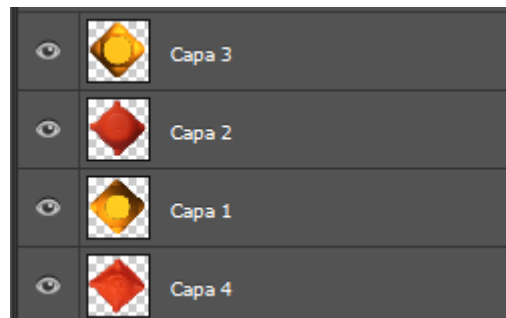


Ilustración 11. Coincidencias mediante capas.

Uno de los puntos que tomamos a consideración para la comparación de ambos morteros fue el punto extremo de las aletas, ya que con este punto (que es igual en sus cuatro aletas para cada par de vistas de ambos morteros) podemos ver qué tanto

error se tuvo a la hora de realizar las aletas mediante curvas de Bezier, factor relevante teniendo en cuenta que el que configura gran parte del trabajo realizado.

Puntos extremos de las aletas en el mortero de Bezier:

(0, 1.32), (1.32, 0), (0, -1.32), (-1.32, 0)

Puntos extremos de las aletas en el mortero base de porcelanacrón:

(0, 1.48), (1.48, 0), (0, -1.48), (-1.48, 0)

Así pues, podemos determinar un error tomando el mortero base como un valor teórico y el mortero hallado gracias a curvas de Bezier como un valor experimental.

Tenemos en cuenta para el cálculo de los errores las siguientes fórmulas:

$$Error\ relativo = |valor\ real - valor\ aproximado|$$

$$Error\ absoluto = \left| \frac{Error\ relativo}{valor\ real} \right| * 100\%$$

Con lo cual obtenemos:

$$Error\ relativo = |1.48 - 1.32| = 0.16$$

$$Error\ absoluto = \left| \frac{0.16}{1.48} \right| * 100\% = 11\%$$

6. Conclusiones

Se puede concluir que con esta pequeña investigación se aprendió mucho más sobre las curvas de Bézier y cómo utilizarlas en el modelado de muchos objetos. También, por supuesto, se puso en práctica un nuevo entorno de programación y un nuevo lenguaje que nos ayudó a realizar el mortero de manera cómoda de forma que se pudo aplicar todo lo aprendido en clase sobre las curvas.

A través del presente proyecto se pudo integrar los conocimientos adquiridos referentes a la interpolación: empleando superficies de Bézier, junto con herramientas de modelación 3D y de representación de puntos como GeoGebra. La cual, a partir de una imagen (.jpg), permite generar un conjunto de puntos escalados en un plano cartesiano. Lo que proporcionó la información para contrastar con el objeto generado a partir de la diferencia presentada entra la distancia de los puntos obtenidos y los empleados en las funciones paramétricas que hicieron posible la generación de las mallas.

7. Referencias

Funciones de Wolfram Language:

- Función InfinitePlane:
<https://reference.wolfram.com/language/ref/InfinitePlane.html>
- Función Circle:
<https://reference.wolfram.com/language/ref/Circle.html>
- Función ParametricPlot3D:
<https://reference.wolfram.com/language/ref/ParametricPlot3D.html>
- Función Graphics3D:
<https://reference.wolfram.com/language/ref/Graphics3D.html>
- Función ContourPlot3D:
<https://reference.wolfram.com/language/ref/ContourPlot3D.html>

Herramienta de digitalización y puntos:

- GeoGebra: <https://www.geogebra.org/graphing?lang=es>

Requerimientos de sistema de la herramienta Wolfram Mathematica:

- System requirements Wolfram Mathematica:
<https://www.wolfram.com/mathematica/system-requirements.html>