El Problema del Flujo de Potencia resuelto mediante el método de Newthon Raphson para solución de ecuaciones no lineales.

José Sánchez Schnitzler 2018142388, Jéssica Espinoza Quesada 2018135811, Tomás Segura Monge 2018099729
Ingeniería en Computadores
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Cartago, 30101, Costa Rica
{jose.david.san, jessicaesp, tsm}@estudiantec.cr

***Resumen*—El presente documento presentará un método iterativo para resolver ecuaciones no lineales, el cual será explicado en detalle, y se resolverá matemáticamente un problema en el área de la ingeniería, cuya solución se obtiene utilizando el método en cuestión. Inicialmente, el documento presentará el método de Newton-Raphson para resolver ecuaciones no lineales usando varias iteraciones. La siguiente sección detallará la formulación matemática de este método se explicará en detalle en la siguiente sección.**

I. Introducción y Justificación

En los apartados que se encuentran a lo largo de este documento se explica a fondo cómo se puede implementar el método de Newton Raphson, el cual se puede utilizar para aproximar las soluciones complejas de una ecuación polinomial y de esta manera resolver problemas aplicados a la ingeniería. En este caso se va a efectuar la solución a un problema de flujo de potencia en el área eléctrica.

Para resolver este tipo de problema se van a utilizar métodos matemáticos como los son Newton Raphson el cual es un método iterativo cuyo objetivo es encontrar un solución aproximando resultados tomando en cuenta cierto margen de error llamado tolerancia.

Para empezar, el problema que se desea resolver es obtener una solución para ecuaciones no lineales que se presentan de la forma que se aprecia en la ecuación 1.

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

El problema de flujo de potencia específicamente consiste en determinar la magnitud y el ángulo de la tensión en cada una de las barras en una red de potencia, de esta manera se puede saber la cantidad de potencia activa y reactiva que se está generando. De esta manera no se toma en cuenta la potencia aparente como un valor absoluto para hacer cálculos de gastos en el suministro de energía [1]. Recordar que la potencia deseable es la llamada activa, mientras que la potencia reactiva no aporta nada al sistema ni es útil. Dicho sistema de red de potencia se puede observar en la figura 1.

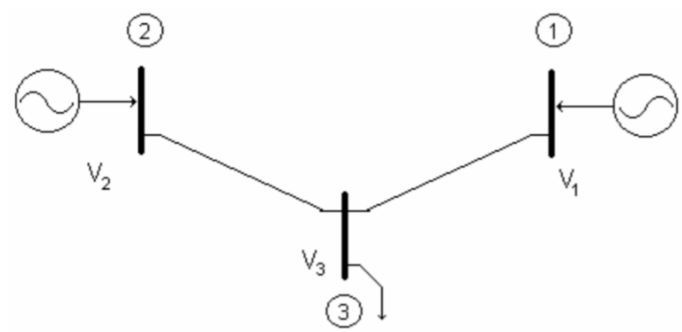

Figura 1. Sistema formado por tres barras

II. Objetivos

II-A. *Objetivo General*

Presentar la variante del método de Newton-Raphson que puede resolver sistemas de ecuaciones no lineales como lo es el problema de flujo de potencia .

II-B. *Objetivos Específicos*

1. Explicar mediante prosa el problema de Flujo de Potencia y proponer un ejemplo numérico.
2. Resolver el Problema de Flujo de Potencia al obtener el ángulo y magnitud del voltaje en cada barra de una red de potencia.
3. Proponer una método computacional en la forma de pseudocódigo, basado en el método de Newthon, para resolver el problema propuesto del Flujo de Potencia.

III. Metodología

III-A. *Formulación matemática*

La solución al tipo de ecuaciones no lineales con el método de Newton Raphson consiste en hacer iteraciones mediante una sucesión de valores aproximados los cuales poseen la forma que se aprecia en la ecuación 2 tomando en cuenta que el denominador va a ser la derivada de la función evaluada con el valor de la iteración posterior.

$$x_k = x_{k-1} - \left[\frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}\right] \tag{2}$$

La idea es tomar en cuenta las características de las barras mostradas en la figura 1. Con estas características definidas se procede a generar las ecuaciones para establecer el balance de potencia en cada nodo. Esto se hace con las características de las barras mencionadas anteriormente y con las condiciones presentes en el sistema como la tensión suministrada. Una vez que se tienen las ecuaciones de balance de potencia para el sistema, se procede a calcular la matriz jacobiana como se muestra en la ecuación 3. El objetivo de hacerlo de esta manera es que se tienen varias incógnitas por lo que implementar la solución con la matriz jacobiana hace el cálculo de todas las incógnitas de una manera más rápida implementando el método de Newton Raphson de manera automática e iterativa.

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Seguidamente, cuando se obtiene la matriz jacobiana del sistema de ecuaciones pertinente se procede a calcular de manera iterativa la aproximación de la solución para cada incógnita por medio del método de Newton Raphson. Haciendo esto se obtiene que para cada ciclo de ejecución la aproximación del resultado de cada incógnita va a estar dado por la ecuación 4.

$$x_k = x_{k-1} - [J_f(x_k)]^{-1} \cdot f(x_{k-1}) \tag{4}$$

Se utiliza la ecuación 4 teniendo en cuenta el cálculo de cada elemento de la matriz jacobiana como se presenta en la ecuación 5.

$$[J_f(x_k)]_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \tag{5}$$

Cuando se ejecute el proceso iterativo se puede obtener el término que está siendo substraído de x_{k-1} de la ecuación 4. Esto se puede sustituir por una variable. En este caso se va a hacer como se muestra en la ecuación 6 ya que así es como se vio en el curso de Análisis Numérico para Ingeniería.

$$y = [J_f(x_k)]^{-1} \cdot f(x_k) \tag{6}$$

Teniendo la ecuación 6 en cuenta se precede a despejar y hacer que quede de la forma que se muestra en la ecuación 7. Esto se hace de esta manera para poder calcular indirectamente el valor del jacobiano de cada iteración [2].

$$J_f(x_k) \cdot y = f(x_k) \tag{7}$$

Al momento de hacer los cálculos de la ecuación 7 se procede a sustituir ese resultado en la ecuación 4 se obtiene la ecuación 8

$$x_k = x_{k-1} - y \tag{8}$$

Es de esta manera que se puede encontrar una solución óptima e iterativa implementando el método de Newton-Raphson. En este caso también se tienen que tomar en cuenta factores como lo son el cálculo del error teniendo como referencia una tolerancia preestablecida como se muestra en la siguiente subsección.

III-B. Cálculo del error

El método de Newton-Raphson es un método iterativo, que genera un error muy pequeño. Razón por la cual es uno de los métodos más populares iterativos para aproximar ecuaciones no lineales. Se puede aproximar la solución haciendo uso de muy pocas iteraciones, gracias a la exactitud del mismo. Esta es una de las ventajas de utilizar las derivadas en dicha ecuación. Para calcular el error del método iterativo, se aproxima el valor absoluto de la función evaluando la iteración respectiva como se muestra en la ecuación 9.

$$Error = |\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k}| \tag{9}$$

Ahora bien, el error calculado en la ecuación 9 se utiliza para especificar la condición de parada del método, la cual se calcula exactamente igual que otros métodos iterativos. El método se deberá detener cuando el error sea mayor a la condición de parada, como se detalla en la inecuación 10.

$$Error < Tol \tag{10}$$

III-C. Implementación

A continuación se describe un pseudocódigo sobre la implementación del método numérico:

Algorithm 1 Metodo de Newthon

```
procedure NEWTON RAPHSON
    itera ← 0
    error ← 1
    listaIter ← [ ]
    listaError ← [ ]
    xk ← x0
    valores ← [0,0,... ]
    auxVect ← [ ]
    while (itera < iterMax) do
        Aproximaciones ← xk
        for cont in len(x) do
            for cont2 in len(x) do
                auxVect + = [x[k], Aproximaciones[k]]
            Convertir la funcion a simbolico
            Llenar el vector numerico con f[cont].subs(auxVect)
        auxVect ← [ ]
        Obtener el jacobiano de f y los vectores
        Calcular error
        if error < tol then return Valores deseados
        else
            itera+ = 1
    return Valores deseados
```

IV. Ejemplos Numéricos

El Problema del Flujo de Potencia consiste en determinar la magnitud y el ángulo del voltaje en cada barra de la red potencia, que se muestra en la figura 1, bajo ciertas condiciones iniciales.

Primero, se definen los datos de línea: $Y_{12} = 4 - j5$ pu, $Y_{23} = 4 - j10$ pu, $\theta_1 = 0$, $V_1 = 1{,}0$ pu y $V_2 = 1{,}0$ pu.

Seguidamente se describen las ecuaciones para establecer el balance de potencia nodal como se puede observar a continuación.

$$\Delta P_2 = -2{,}3 + 4V_3 \cos\theta_{23} - 10V_3 \sin\theta_{23} = 0$$

$$\begin{gathered}\Delta P_3 = -2{,}0 - 8V_3^2 + 4V_3 \cos\theta_{32} - 10V_3 \sin\theta_{32} + \\ 4V_3 \cos\theta_{31} - 5V_3 \sin\theta_{31} = 0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\Delta Q_3 = -1{,}0 - 15V_3^2 + 4V_3 \sin\theta_{32} + 10V_3 \cos\theta_{32} + \\ 4V_3 \sin\theta_{31} + 5V_3 \cos\theta_{31} = 0\end{gathered}$$

Con $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$, $r = (\theta_2, \theta_3, V_3)^t$ y

$$F(r) = \begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix}$$

$$J(r) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Delta P_2}{\partial \theta_2} & \dfrac{\partial \Delta P_2}{\partial \theta_3} & \dfrac{\partial \Delta P_2}{\partial V_3} \\ \dfrac{\partial \Delta P_3}{\partial \theta_2} & \dfrac{\partial \Delta P_3}{\partial \theta_3} & \dfrac{\partial \Delta P_3}{\partial V_3} \\ \dfrac{\partial \Delta Q_3}{\partial \theta_2} & \dfrac{\partial \Delta Q_3}{\partial \theta_3} & \dfrac{\partial \Delta Q_3}{\partial V_3} \end{bmatrix}$$

Ya que se tiene el problema planteado además de las condiciones iniciales definidas con anterioridad, se procede a resolver mediante el método de Newton Raphson con $r^{(0)} = (0{,}1, 0{,}1, 1{,}0)^t$ y se obtiene el resultado mostrado a continuación.

$$r^{(5)} = (0{,}1349708, -0{,}00094814, 0{,}88186783)^t$$

Tomando en cuenta los resultados obtenidos con anterioridad se precede a compararlos con los resultados obtenidos al ingresar los el problema descrito anteriormente en una calculador en línea como lo es Wolfram Alpha. Al hacer este proceso, se verifica que el método de Newton-Raphson implementado realmente brinda los datos aproximados a la solución real y teórica.

V. Conclusiones

El método de Newton-Raphson para solución de flujos de potencia de sistemas eléctricos ha sido mejorado mediante el cálculo de los elementos de la matriz Jacobiana.

El método de newton es eficiente en la solución de sistemas de ecuaciones no lineales, con una buena precisión de la solución. Se puede aplicar en problemas aplicados en la ingeniería, así como la industria.

El método a pesar de ser bastante preciso y rápido, tiene restricciones y no es infalible. Existen sistemas que no pueden ser resueltos por el método de Newton-Raphson. Por ejemplo, si se quiere resolver un sistema, el jacobiano del mismo debe ser invertible, pues de no ser así podría convertirse en una matriz singular.

Referencias

[1] ALBERTO J.BOTERO ARBELÁEZ MARCELA BRAVO BOLÍVAR, JUÁN EDUARDOBOTERO ARANGO. El metodo de newton-raphson - la alternativa del ingeniero para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. *Scientia Et Technica*, 2005.

[2] Cabrera G Játiva J., Constante G. Flujo de potencia por newton-raphson con el jacobiano calculado en las ecuaciones de errores de potencia. *REVISTA EPN*, 2014.