

# Analysis

## Sammlung gegliedert nach Modul

Fabian Suter, 21. November 2023

<https://github.com/FabianSuter/Analysis.git>

## 1 Analysis 1a

### 1.1 Reelle Zahlen

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$	ganze Zahlen inkl. 0
$\mathbb{Z}$	$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3\} \cup \{0\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Q}$	$\{\frac{p}{q}   p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$		ergänzt $\mathbb{Q}$ durch irr. Zahlen wie $\sqrt{2}$ , reelle Zahlen
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$		Irrationale Zahlen

#### 1.1.1 Supremum und Infimum

$\sup(X)$	kleinste obere Schranke Maximum ist immer auch Supremum
$\inf(X)$	grösste untere Schranke Minimum ist immer auch Infimum

#### 1.1.2 Binomischer Satz / Binomialkoeffizient

Pascal-Dreieck berechnen:	$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$
$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$	$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = 0$ wenn $k < 0$ oder $k > n$
$\binom{n}{0} = 1$	$\binom{n}{n} = 1$

#### 1.1.3 Umgebung

Jedes offene Intervall, dass die Zahl  $a$  enthält, heisst eine Umgebung von  $a$   $U(a)$

Es sei  $\epsilon > 0$ . Unter der  $\epsilon$ -Umgebung von  $a$  versteht man das offene Intervall  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$   $U_\epsilon(a)$

Eine  $\epsilon$ -Umgebung von  $a$  ohne die Zahl  $a$  selbst wird punktierte  $\epsilon$ -Umgebung von  $a$  genannt  $\dot{U}_\epsilon(a) = U_\epsilon(a) \setminus a$

#### 1.1.4 Spezielle endliche Reihen

arithmetisch:  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

geometrisch:  $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

#### 1.1.5 Mittelwerte

Harmonisches Mittel (HM):  $\frac{1}{\frac{1}{n}(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n})}$

Geometrisches Mittel (GM):  $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

Arithmetisches Mittel (AM):  $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

#### 1.1.6 Spezielle Ungleichungen

Bernoulli-Ungleichung:  $(1+a)^n > 1 + n \cdot a$   
für  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a \in \mathbb{R}, a > -1, a \neq 0$

Binomische Ungleichung:  $|a \cdot b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

Mittelungleichung:  $HM \leq GM \leq AM$

Gleichheit:  $HM = GM = AM$   
für  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

Dreiecksungleichungen:  $|a+b| \leq |a| + |b|$   
 $|a-b| \leq |a| + |b|$   
 $|a-b| \geq ||a| - |b||$

#### 1.1.7 Vollständige Induktion

Verankerung VA: Beweise Formel für  $a_0$

Vererbung VE: (1) Annahme: Formel gilt für  $a_n$   
↓  
(2) Schritt: Formel gilt auch für  $a_{n+1}$

Mittels Berechnung soll bewiesen werden, dass (2) ebenso gilt wie (1)

#### Beispiel:

(VA)  $\sum_{i=1}^1 i = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

(VE) (1)  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

(VE) (2)  $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

## 1.2 Funktionen

Schreibweisen:  
 $f: D_f \rightarrow W_f$  mit  $x \mapsto f(x)$   
 $f: x \mapsto f(x)$  mit  $x \in D_f$   
 $y = f(x)$  mit  $x \in D_f$

Monoton wachsend:  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$   
Monoton sinkend:  $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$   
Monoton streng ...: Siehe oben, jedoch immer  $f(x_1) < f(x_2)$  bzw.  $f(x_1) > f(x_2)$   
Beschränktheit: Funktion besitzt obere oder untere Grenze, meist in  $\mathbb{R}$   
Umkehrbarkeit: Streng monotone Funktionen sind umkehrbar, pro  $x$  ein  $y$   
Restriktion: Nur einen Teil von  $D_f$  betrachten  
 $\Rightarrow$  Umkehrbarkeit

#### 1.2.1 Transformationen

1. Streckung um  $\frac{1}{a}$  in x-Richtung  $y = f(a \cdot x)$   
Spiegelung an y-Achse bei  $-a$
2. Verschiebung nach links ( $+b$ ) oder rechts ( $-b$ )  $y = f(x \pm b)$
3. Streckung um  $c$  in y-Richtung  $y = c \cdot f(x)$   
Spiegelung an x-Achse bei  $-c$
4. Verschiebung nach oben ( $+d$ ) oder unten ( $-d$ )  $y = f(x) \pm d$

#### 1.2.2 Spezielle Funktionen

##### Identität:

$f(x) = x$  y-Wert ist gleich dem x-Wert

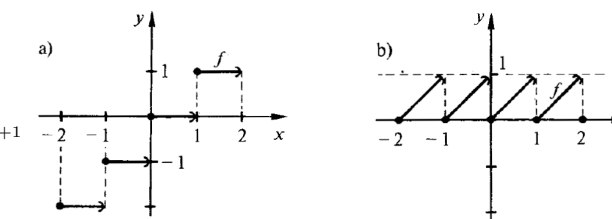
##### Signum-Funktion:

Vorzeichenfunktion  $f(x) = \text{sgn}(x)$

$$y = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

##### Floor-Funktion:

Abrunden auf nächste ganze Zahl



Schreibweise:  $[x]$

Schreibweise:  $x - [x]$

#### 1.2.3 Schwingungen

Sinus-Schwingung:  $y = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$

$A$  Amplitude  $\omega$  Frequenz  $\frac{2\pi}{\text{sec}}$   $\phi$  Phase

##### Superposition von Schwingungen

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \phi) = A_1 + A_2 \cdot \sin(\omega t + \phi_1 + \phi_2)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

### 1.2.4 Verkettung oder mittelbare Funktion

g nach f:  
 $h(x) = g \circ f \Rightarrow h(x) = g(f(x)) \quad W_h = W_g \rightarrow D_h = D_f$

f nach g:  
 $h(x) = f \circ g \Rightarrow h(x) = f(g(x)) \quad W_h = W_f \rightarrow D_h = D_g$

### 1.2.5 Gerade / ungerade Funktionen

gerade:  $f(-x) = f(x)$  symmetrisch zu y-Achse  
 ungerade:  $f(-x) = -f(x)$  punktsymmetrisch  
 periodisch:  $f(x) = f(x \pm p)$  wiederholend mit Periode p

### 1.2.6 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

Aussehen:  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

**Nullstellen bestimmen:**

Quadratische Funktion:  $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Faktorisierung mit Binomen / Horner Schema

Eine Funktion vom Grad n hat höchstens n verschiedene Nullstellen!

### 1.2.7 Gebrochenrationale Funktionen

Aussehen:  $f(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$

m Zählergrad  
 n Nennergrad  
 $m < n$  echt gebrochen  
 $m = n$  gleichgradig  
 $m > n$  unecht gebrochen

Jede unecht gebrochene Funktion lässt sich als Summe einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenen Funktion schreiben.  
 $\Rightarrow$  Polynomdivision

### 1.2.8 Horner Schema

Zerlegt eine ganzrationale Funktion vom Grad n in einen Linearfaktor (Nullstelle) und ein Polynom vom Grad n-1

1. Nullstelle  $x_0$  raten
2. Von oben nach unten summieren
3. Diagonal nach rechts mit  $x_0$  multiplizieren

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ x_1 & & b_{n-1}x_1 & b_{n-2}x_1 & \dots & b_1x_1 & b_0x_1 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 & f(x_1) \end{array}$$

**Beispiel:**

$$\begin{array}{c|cccc} x_1 = -2 & 1 & 0 & -67 & -126 \\ & & -2 & 4 & +126 \\ \hline & 1 & -2 & -63 & 0 = f(-2) \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & b_2 & b_1 & b_0 & \end{array}$$

$$f(x) = x^3 - 67x - 126 \\ \Rightarrow f(x) = (x - x_1)(b_2 x^2 + b_1 x + b_0) = (x + 2)(x^2 - 2x - 63)$$

### 1.2.9 Polynomdivision

Liefert Summe aus ganzrationaler Funktion und echt gebrochener Funktion

**Beispiel:**

$$\begin{array}{r} (-2x^2 - x - 1) : (x - 1) = -2x - 3 + \frac{-4}{x - 1} \\ \underline{2x^2 - 2x} \phantom{- 1} \\ -3x - 1 \\ \underline{3x - 3} \\ -4 \end{array}$$

### 1.2.10 Partialbruchzerlegung

- (1) echt gebrochen (Zähler j Nenner)  
Ja:  $\rightarrow$  (2)  
Nein:  $\rightarrow$  Polynomdivision
- (2) Nenner faktorisieren  
pro Faktor ein Teilbruch
- (3) Berechnung Zählerkonstanten
  - (3.1) Gleichnamig machen (kgV)
  - (3.2) Zählergleichung
  - (3.3) Einsetzen von "guten" x-Werten

**Beispiel PBZ**

- (1)  $f(x) = \frac{1}{a^2 - x^2}$
- (2)  $a^2 - x^2 = (a + x)(a - x)$
- (3)  $\frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x} = \frac{1}{a^2 - x^2}$ 
  - (3.1)  $\frac{A(a-x) + B(a+x)}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a^2 - x^2}$
  - (3.2)  $A(a-x) + B(a+x) = 1$
  - (3.3)  $x = a \Rightarrow B(2a) = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2a}$   
 $x = -a \Rightarrow A(2a) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2a}$

**Spezielle Ansätze PBZ**

$$f(x) = \frac{5x^2 - 37x + 54}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx}{x(x-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{1,5x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}$$

$$= \frac{A(x-2)^2 + B(x-2) + C}{(x-2)^3}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - 2x - 12} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2 + 4x + 6}$$

$$= \frac{A(x^2 + 4x + 6) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2 + 4x + 6)}$$

### 1.2.11 Trigonometrie, Arcus

$$\begin{array}{lll} \sin(x): & D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow W_f = [-1, 1] \\ \cos(x): & D_f = [0, \pi] & \rightarrow W_f = [-1, 1] \\ \tan(x): & D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) & \rightarrow W_f = \mathbb{R} \\ \cot(x): & D_f = (0, \pi) & \rightarrow W_f = \mathbb{R} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \arcsin(x): & D_f = [-1, 1] & \rightarrow W_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \arccos(x): & D_f = [-1, 1] & \rightarrow W_f = [0, \pi] \\ \arctan(x): & D_f = \mathbb{R} & \rightarrow W_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \text{arccot}(x): & D_f = [-1, 1] & \rightarrow W_f = (0, \pi) \end{array}$$

**Umwandlung**  $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x) \quad \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$

**Pythagoras**  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

**2 Winkel**  $\begin{array}{ll} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \end{array}$

**Summenformel**  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \cos(\frac{\alpha - \beta}{2}) \cdot \sin(\frac{\alpha + \beta}{2})$

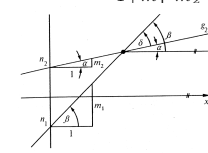
**Sinus** Punkt (0|0)  $\rightarrow \sin(-x) = -\sin(x)$   
 Scheitelsymm.  $\rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$   
 Punkt  $\rightarrow \sin(\pi - x) = \sin(x)$

**Symmetrien**

**Cosinus** y-Achse  $\rightarrow \cos(-x) = \cos(x)$   
 Scheitel  $\rightarrow \cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$

### 1.2.12 Winkel zwischen beliebigen Geraden

Zwischenwinkel:  $\tan(\alpha) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \rightarrow$  Winkel geg. Uhrzeiger



Senkr. Geraden:  $m_1 \cdot m_2 = -1$

## 1.3 Folgen und Reihen

### 1.3.1 Spezielle Folgen und Reihen

Arithmetische Folge:  $a_{n+1} = a_n + d$   $d = a_{n+1} - a_n$

Geometrische Folge:  $a_{n+1} = q \cdot a_n$   $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Konstante Folge:  $a_{n+1} = a_n$

### 1.3.2 Beschränktheit / Monotonie

**Beschränktheit**  $W_f \subset [a; b]$  und  $a, b \in \mathbb{R}$

**Monotonie:**

$f(x_1) \leq f(x_2)$	$x_1 < x_2$	monoton wachsend	$\uparrow$
$f(x_1) < f(x_2)$	$x_1 < x_2$	streng monoton wachsend	$\uparrow\uparrow$
$f(x_1) \geq f(x_2)$	$x_1 > x_2$	monoton fallend	$\downarrow$
$f(x_1) > f(x_2)$	$x_1 > x_2$	streng monoton fallend	$\downarrow\downarrow$

### 1.3.3 Konvergenz, Divergenz

**Konvergenz**

Es existiert ein Grenzwert  $g \in \mathbb{R}$

Toleranzungleichung:  $|a_n - g| < \epsilon$  mit  $\epsilon > 0$

Gesucht ist ein  $n_0$ , ab welchem alle Werte von  $n \geq n_0$  in  $U_\epsilon(g)$  liegen

**Bestimmt divergent gegen  $+\infty$**

Ungleichung:  $f_n > K$  wenn  $n \geq n_0$  für  $K > 0$

**Bestimmt divergent gegen  $-\infty$**

Ungleichung:  $f_n < k$  wenn  $n \geq n_0$  für  $k < 0$

**Unbestimmt divergent**

Alles, was nicht konvergent oder bestimmt divergent ist

### 1.3.4 Grenzwerte gegen Unendlich

Vorgehen beim lösen von Grenzwerten

1. Naiven Ansatz ausprobieren  $\rightarrow$  limit direkt bilden
2. Falls unbestimmte Form entsteht:  
Umformen gemäss folgenden Ansätzen

Arithmetik:  $+, -, *, :, \sqrt{\dots}, |\dots|$

Erweiterung: erweitern mit  $\frac{1}{x^n}$   $n =$  höchste (Nenner-)Potenz

Erweiterung: erweitern mit Gegenterm (3. Binom bilden)

Tabelle: Bei Brüchen Tabelle aus Abschnitt 4.8 anschauen!

**Beispiel Grenzwert  $n$  gegen Unendlich**

$$f(n) = \frac{-2n^2 + 4n - 5}{8n^2 - 3n + 7} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{"Naiv": } \frac{-\infty + \infty + 5}{\infty - \infty + 7} \rightarrow \frac{-\infty + \infty}{\infty - \infty} \rightarrow ?$$

$$\text{Algebra, Erweitern mit } \frac{1}{n^2}: f(n) = \frac{-2 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}}{8 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}} \quad (n \rightarrow \infty) = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

### 1.3.5 Rechnen mit Unendlich

**Bestimmte Formen**

$$\infty + \infty = \infty \quad -\infty - \infty = -\infty \quad 0 \cdot [a, b] = 0 \cdot \text{beschränkt} = 0$$

$$g + \infty = \infty \quad g - \infty = -\infty \quad (g \in \mathbb{R})$$

$$\infty \cdot \infty = \infty \quad -\infty \cdot (\infty) = -\infty \quad g \cdot \infty = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\infty} = 0 \quad \frac{g}{\infty} = 0 \quad g \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\infty}{0+} = \infty \quad \frac{\infty}{0-} = -\infty \quad \frac{\infty}{g} = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{0+} = \infty \quad \frac{1}{0-} = -\infty \quad g \in \mathbb{R} - 0$$

$$\frac{g}{0+} = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases} \quad \frac{g}{0-} = \begin{cases} -\infty & g > 0 \\ \infty & g < 0 \end{cases}$$

**Unbestimmte Formen**

$$\frac{0}{0} = ? \quad \frac{\infty}{\infty} = ? \quad \infty \cdot 0 = ?$$

$$0 \cdot \infty = ? \quad \infty - \infty = ? \quad 0^0 = ?$$

$$\infty^0 = ? \quad 1^\infty = ?$$

Ausser 1 ist eine Konstante, dann gilt  $1^\infty = 1$

### 1.3.6 Wachstumsvergleich

$$(1) \quad \frac{n^k}{q^n} (n \rightarrow \infty) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}; q > 1) \quad \frac{\text{Potenz}}{\text{Exponentiell}} \rightarrow 0$$

$$(2) \quad \frac{q^n}{n!} (n \rightarrow \infty) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}; q > 1) \quad \frac{\text{Exponentiell}}{\text{Fakultät}} \rightarrow 0$$

$$(2) \quad \frac{\ln(n)}{n^k} (n \rightarrow \infty) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \frac{\text{Logarithmisch}}{\text{Potenz}} \rightarrow 0$$

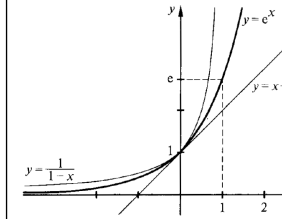
### 1.3.7 Bolzano-Prinzip

**Jede beschränkte, monotone Zahlenfolge ist konvergent!**

1. Monotonie beweisen
2. Beschränktheit vermuten und möglichen Grenzwert  $g$  mittels Grenzwertgleichung finden
3. Beschränktheit beweisen
- 3.1  $a_1$  ist obere/untere Schranke
- 3.2 Vermutete untere/obere Schranke mit voll. Induktion beweisen  
z.B.  $a_{n+1} \leq a_n$  wobei  $a_{n+1}$  und  $a_n$  mit vermutetem Grenzwert ersetzt werden

### 1.3.8 Exponentialfunktion

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$



Definitions- / Wertebereich:  
 $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}^+$

Einschliessung:

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$e^x \leq \frac{1}{1-x} \quad \text{für } x < 1$$

### 1.3.9 log-Rechenregeln

$\ln(a \cdot b)$	$= \ln(a) + \ln(b)$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right)$	$= \ln(a) - \ln(b)$
$e^{\ln(a \cdot b)}$	$= e^{\ln(a) + \ln(b)}$	$\ln(x^r)$	$= r \cdot \ln(x)$
$a \cdot b$	$= e^{\ln(a)} \cdot e^{\ln(b)}$		

### 1.3.10 Hyperbolische Funktionen

$$e^x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sinh(x) + \cosh(x)$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \mathbb{R} \rightarrow [1; \infty)$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})} \quad \mathbb{R} \rightarrow (-1; 1)$$

$$|\sinh(x)| < \cosh(x)$$

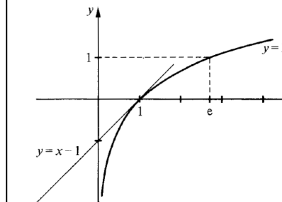
**Area-Funktionen (Umkehrung Hyperbolische. F.)**

$$\operatorname{arsinh}(x) : \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcosh}(x) : \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad [1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$\operatorname{artanh}(x) : \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad |x| < 1 \rightarrow \mathbb{R}$$

### 1.3.11 Logarithmusfunktion



Definitions- / Wertebereich:  
 $D_f = \mathbb{R}^+ \rightarrow W_f = \mathbb{R}$

Einschliessung:

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$

## 1.4 Grenzwerte von Funktionen

### 1.4.1 Techniken zur Berechnung von Grenzwerten

Arithmetik:  $+, -, *, :, \sqrt{\dots}, |\dots|$

Erweiterung: erweitern mit  $\frac{1}{x^n}$   $n =$  höchste (Nenner-)Potenz

Erweiterung: erweitern mit Gegenterm (3. Binom bilden)

Faktorisierung: Zähler und Nenner faktorisieren und kürzen

### 1.4.2 Links- / Rechtsseitiger Grenzwert

Eine kritische Stelle  $x_0$  kann von links und rechts angenähert werden.

linksseitiger Grenzwert:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g^-$

rechtsseitiger Grenzwert:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g^+$

$\Rightarrow$  Wenn  $g^- = g^+ = g \rightarrow$  Konvergenz

$\Rightarrow$  Wenn  $g^- \neq g^+ \rightarrow$  unbestimmte Divergenz

#### 1.4.3 Konvergenz, Divergenz

##### Konvergenz von $f(x)$

$x \rightarrow \infty$  Toleranzungleichung:  $|f(x) - g| < \epsilon$  wenn  $x > M(\epsilon)$   
 $x \rightarrow -\infty$  Toleranzungleichung:  $|f(x) - g| < \epsilon$  wenn  $x < m(\epsilon)$

$x \rightarrow x_0$  Toleranzungleichung:  $|f(x) - g| < \epsilon$   $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$

##### Bestimmte Divergenz von $y = f(x)$

Quadrant	Kriterium	Folgerung
I	$y \rightarrow \infty$ ( $x \rightarrow \infty$ )	$y > K$ wenn $x > M(K)$
II	$y \rightarrow \infty$ ( $x \rightarrow -\infty$ )	$y > K$ wenn $x < m(K)$
III	$y \rightarrow -\infty$ ( $x \rightarrow -\infty$ )	$y < k$ wenn $x < m(k)$
IV	$y \rightarrow -\infty$ ( $x \rightarrow \infty$ )	$y < k$ wenn $x > M(k)$
	$f(x) \rightarrow \infty$	$y > K > 0$ wenn $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$
	$f(x) \rightarrow -\infty$	$y < k < 0$ wenn $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$

#### 1.4.4 Stetigkeit

Definition Stetigkeit:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Eine Funktion ist stetig, wenn der Funktionsgraph kann gezeichnet werden, ohne dass der Stift abgesetzt werden muss.

Art der Unstetigkeitsstelle	Bedingungen	Beispiel $f: x \mapsto f(x) =$	Graph von $f$
hebbare Unstetigkeitsstelle	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ und $g \neq f(x_0)$	$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1 & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$	
	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ und $x_0 \notin D_f$	$\frac{x^2 - 1}{x - 1}$	
Unstetigkeitsstelle 1. Art (Sprungstelle)	$g^+$ und $g^-$ existieren in $x_0$ , aber $g^+ \neq g^-$	$\begin{cases} x - 1 & \text{für } x \geq 1 \\ -1 & \text{für } x < 1 \end{cases}$	
Unstetigkeitsstelle 2. Art	mindestens $g^+$ oder $g^-$ existieren in $x_0$ nicht	$\begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{für } x > 1 \\ 1 & \text{für } x \leq 1 \end{cases}$	
	$f$ ist für $x \uparrow x_0$ und $x \downarrow x_0$ unbestimmt divergent (Oszillationsstelle)	$\sin \frac{1}{x}$	

#### 1.4.5 Übertragungsprinzip (Folgenprinzip)

$f$  besitzt an der Stelle  $x_0$  Grenzwert  $g$ , wenn für jede gegen  $x_0$  konvergente Folge  $\langle x_n \rangle$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$

##### Beispiel

$f(x) = \frac{|x+2|}{2x+4}$  und  $x_0 = -2$

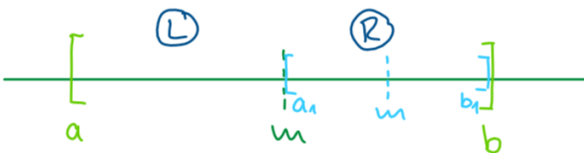
linksseitig:  $x_n = x_0 - \frac{1}{n}$  für jedes  $x$  in  $f(x)$  einsetzen; Grenzwert  $g^-$  gegen  $\infty$  bestimmen

rechtsseitig:  $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$  für jedes  $x$  in  $f(x)$  einsetzen; Grenzwert  $g^+$  gegen  $\infty$  bestimmen

#### 1.4.6 Nullstellen bestimmen gemäss Bolzano (Bisektion)

$f(x)$  auf Intervall  $[a; b]$  stetig,  $f(a)$  und  $f(b)$  haben versch. Vorzeichen  
 $\rightarrow$  Es existiert (mindestens) eine Nullstelle  $\xi$   
 NS mittels Bisektion (Intervallschachtelung) näherungsweise berechnen:

- (1)  $I_0 = [a; b] = [a_0; b_0]$  gesamtes Intervall
- (2)  $I_0$  halbieren  $\rightarrow m = \frac{a_0 + b_0}{2}$
- (3) Teil-Intervall mit Vorzeichenwechsel bestimmen:  
links:  $f(a) \cdot f(m) < 0$ ; rechts:  $f(b) \cdot f(m) > 0$
- (4) Teil-Intervall mit Vorzeichenwechsel:  $I_1 = [a_1; b_1]$
- (5) Schritt (2) - (4) n mal wiederholen:  $I_{n+1} \in I_n$
- (6) ...  $\xi \in (a; b)$  mit  $f(\xi) = 0$  (Nullstelle)
- (7)  $|\text{Error}| \leq \frac{b-a}{2^n \text{Schritte} + 1}$



#### 1.4.7 Spezielle Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} &= 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x &= e^a & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} &= \frac{1}{\ln(a)} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-e^{-x}} &= 1 & \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} &= 0 & \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) &= 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln(a) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^\alpha - 1}{x} &= \alpha & \lim_{x \rightarrow 0^+} x^z &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin(x)} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0^+} y^{\beta(\ln(y))^\alpha} &= 0 & & \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}} &= 0 \quad (a > 1; \alpha, \beta > 0) & \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k &= \begin{cases} \infty & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

#### 1.4.8 Asymptotenbestimmung

Asymptote einer gebrochen rationalen Funktion  $f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$  bestimmen gemäss:

	$m > n$	$m = n$	$m < n$
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} r(x)$	0	$\frac{a_n}{b_m}$	$\infty$ oder $-\infty$
Asymptote	x-Achse	$\parallel x, g(x) = \frac{a_m}{b_n}$	ganzzat. Teil der Polynomdiv.
Konv./Div.	Konvergenz	Konvergenz	Divergenz

#### 1.4.9 Grenzwerte von rekursiven Folgen

Anwendung des Bolzano-Prinzips! Beispiel:  $a_1 = \frac{1}{4}$ ;  $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$

1. Monotonie  
beweisen mit Ansatz  $a_{n+1} \geq a_n$  bzw.  $a_{n+1} \leq a_n$

2. Beschränktheit  
erste Schranke = erster Wert der Reihe  
Zweite Schranke: Annahme, es gibt Grenzwert  $g$  und er ist sup / inf

Grenzwertgleichung:  $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\Rightarrow g = g^2 + \frac{1}{4}$   
 Gleichung nach  $g$  auflösen

$\Rightarrow$  Wenn es ein sup / inf gibt, dann ist es das berechnete  $g \in \mathbb{R}$

3. Beweisen (oder widerlegen), dass  $g$  sup / inf ist  
Ansatz:  $a_n \leq g$  bzw.  $a_n \geq g$  mit vollst. Induktion beweisen

## 2 Differentialrechnung S. 444 ff

Kurvenuntersuchungen S. 261 Taylor-reihe S. 455

### 2.1 Begriff der Ableitung / Differenzialquotient S. 444

Die Ableitung  $f'(x)$  der Funktion  $f(x)$  im Punkt  $x_0$  entspricht der Steigung der Tangente an  $f(x)$  im Punkt  $x_0$

$$\text{Differenzenquotient: } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\text{Differenzialquotient: } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad (\Delta x = h)$$

### 2.2 Tangente / Normale / Zwischenwinkel

$$\text{Tangente: } y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$$

$$\text{Normale: } y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + y_0$$

$$\text{Zwischenwinkel: } \tan(\alpha) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \rightarrow \text{Winkel gegen Uhrz.}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \rightarrow \text{Winkel im Uhrzeigersinn}$$

### 2.3 Einseitige Ableitungen S. 445

$$\text{rechtsseitig: } f'_r(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \quad \text{linksseitig: } f'_l(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$$

$f'_r(x_0) = f'_l(x_0) \rightarrow$  Konvergenz  
Alle anderen Fälle  $\rightarrow$  unbestimmte Divergenz  $\rightarrow$  keine Ableitung!

	Beispiel	Graph
$f'(x_0)$ existiert	$f: x \mapsto x^2$ $f'(0) = 0$	
$f'_r(x_0)$ existiert $f'_l(x_0)$ existiert $f'_r(x_0) \neq f'_l(x_0)$	$f: x \mapsto  x $ $f'_l(0) = -1$ $f'_r(0) = 1$	
An der Stelle $x_0$ existiert die uneigentliche Ableitung	$f: x \mapsto \sqrt[3]{x}$ $f'_l(0) = \infty$ $f'_r(0) = \infty$	
$f$ besitzt die einseitigen uneigentlichen Ableitungen an der Stelle $x_0$ .	$f: x \mapsto \sqrt{ x }$ $f'_l(0) = -\infty$ $f'_r(0) = \infty$	
Die einseitigen und die einseitigen uneigentlichen Ableitungen existieren nicht	$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ $f'_l(0)$ und $f'_r(0)$ existieren nicht	

### 2.4 Generische Muster

$$\text{Allg. Potenz} \quad (f(x)^\alpha)' = f'(x) \cdot \alpha \cdot f(x)^{\alpha-1}$$

$$\text{Allg. log-Regel} \quad \ln(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\text{Allg. exp-Regel} \quad (e^{f(x)})' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$$

## 2.5 Ableitungsregeln S. 445-448

### 2.5.1 Elementare Regeln

$$\begin{array}{ll} \text{Potenzen:} & f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 \\ & f(x) = x^\alpha \quad f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \end{array}$$

$$\text{Linearität: } f(x) = c \cdot x^2 \quad f'(x) = c \cdot 2x$$

$$\text{Summe: } (u(x) + v(x) - w(x))' = u'(x) + v'(x) - w'(x)$$

$$\text{Konstanten: } c = \text{konst} \rightarrow c' = 0$$

### 2.5.2 Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

### 2.5.3 Quotientenregel

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \rightarrow \text{als Produkt schreiben}$$

$$u(x) \cdot \left(\frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \frac{-v'(x)}{v(x)^2}$$

### 2.5.4 Kettenregel

$$g(f(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

### 2.5.5 Umkehrfunktion

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

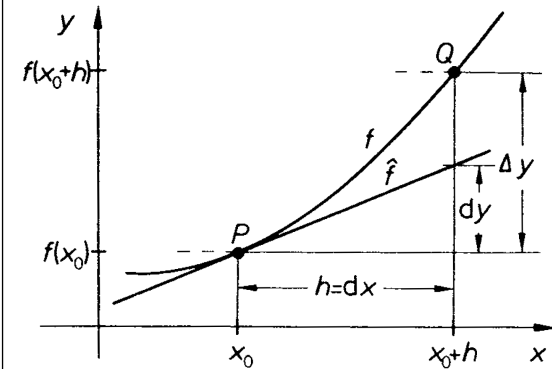
## 2.6 Allgemeine Logarithmus-Ableitung

$$(\log_b(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)}\right)' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot (\ln(x))' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}$$

## 2.7 Lineare Approximation / Differenzial dy S. 459

Differenzial =  $dy = df$  = "Höhenunterschied der Tangente"  
= "Linearzuwachs"

$$\text{Differenzial} = f'(x_0) \cdot dx = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$



$\Delta y \approx dy \rightarrow$  Approximation / Fehler

Fehler:  $\Delta y - dy \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0$

**Die Tangente ist die beste lineare Approximation!**

## 2.8 Approximationsfehler

Die Fehler beziehen sich auf den Arbeitspunkt (z.B.  $x_0$ )

$$\text{Absoluter Fehler: } \Delta y - dy = f(x) - \hat{f}(x) \quad \text{Einheit } y$$

$$\text{Relativer Fehler: } \frac{\Delta y - dy}{y_0} = \frac{f(x) - \hat{f}(x)}{x_0} \quad \text{Einheitenlos}$$

## 2.9 Fehlerfortpflanzung

$$\text{Absolut: } \Delta x \rightarrow \Delta y \quad \Delta y \approx dy = f'(x_0) \cdot dx$$

$$\text{Relativ: } \Delta x \rightarrow \frac{\Delta y}{y_0} \quad \frac{\Delta y}{y_0} \approx \frac{dy}{y_0} = \frac{f'(x_0) \cdot dx}{y_0}$$

	$\Delta x = dx$ (abs)	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{dx}{x}$ (rel)
$\Delta y \approx dy$ (abs)	A	B
$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}$ (rel)	C	D

$\rightarrow$  Tabelle ist bidirektional (Umkehrfunktionen)



## 2.10 Wichtige Ableitungen S.446

$f$	$D_f$	$f'$	$D_{f'}$	$f$	$D_f$	$f'$	$D_{f'}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^+$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$ x $	$\mathbb{R}$	$\frac{x}{ x } = \frac{ x }{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\operatorname{arccot} x$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$A^1)$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1+\tan^2 x}$	$A^1)$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{1}{1-\tanh^2 x}$	$\mathbb{R}$
$\cot x$	$B^2)$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{1}{1+\cot^2 x}$	$B^2)$	$\coth x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{1-\coth^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$e^x$	$\mathbb{R}$	$e^x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$
$a^x, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arcosh} x$	$[1, \infty)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(1, \infty)$
$\ln x $	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\operatorname{artanh} x$	$(-1, 1)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-1, 1)$
$\log_a x, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\mathbb{R}^+$	$\operatorname{arcoth} x$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

## 2.11 Taylor-Reihe (Approximation höherer Ordnung)

$n$  = Ordnung der Approximationsfunktion  $p_n(x)$   
 $h = x - x_0$

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot h^n$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot h^k \quad |h = x - x_0$$

Der Approximationsfehler  $R_n(x_0, h)$  entspricht  $f(x) - p_n(x)$  und wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

## 2.12 Fehler $R_n$ der Taylor-Reihe

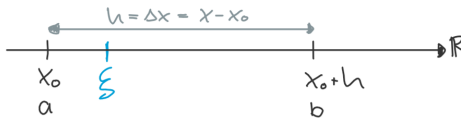
Der Fehler ist nicht klar berechenbar, sondern nur auf einem Intervall "bestimmbar"  $\rightarrow$  Worst Case!

Voraussetzung:  $f$  auf Intervall  $[a; b]$  mind.  $(n+1)$  mal ableitbar

**Lagrange:**  $|R_n| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1} \right|$

**Cauchy:**  $|R_n| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot h^{n+1} \cdot (1-\theta)^n \right|$

$0 < \theta < 1$   $\xi = x_0 + \theta \cdot h$   
 $\theta$  steuert Lage von  $\xi$  auf Intervall



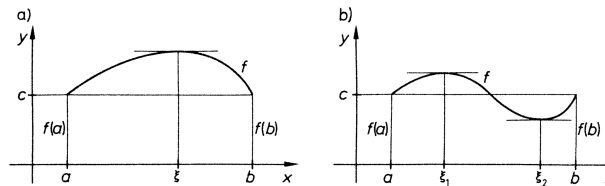
### 2.12.1 Verhalten von $R_n$

- $n \rightarrow \infty$  "Normal"  $R_n \rightarrow 0$   $|h|$  fix
- $n \rightarrow 0^+$  "Normal"  $R_n \rightarrow 0$   $n$  fix  
 $|f^{n+1}(\tilde{x})| < K^{n+1}$  ( $K < 0, n \in \mathbb{N}_0, \tilde{x} \in (a; b)$ )

## 2.13 Satz von Rolle S. 454

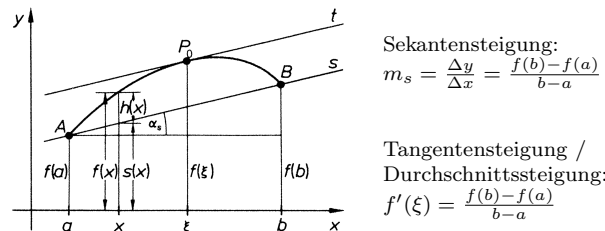
Voraussetzungen:  $f$  auf Intervall  $[a; b]$  mind.  $(n+1)$  mal ableitbar  
 $f(a) = f(b)$

Auf dem Intervall  $(a; b)$  existiert mindestens einmal eine horizontale Tangente:  $f'(\xi) = 0$



## 2.14 Mittelwertsatz S. 454

Voraussetzungen:  $f$  auf Intervall  $[a; b]$  mind.  $(n+1)$  mal ableitbar



## 2.15 Extremalstellen S. 455-457

$f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , stetig  $\Rightarrow W_f =$  abgeschlossenes Intervall

### 2.15.1 Absolut Extremalstelle (Randanalyse durchführen)

Absolutes Maximum:  $\max(W_f)$   
 Absolutes Minimum:  $\min(W_f)$

### 2.15.2 Relative Extremalstelle

Lokales Maximum: "Berg" (nicht am Rand der Funktion)  
 $f(x) \leq f(x_0) \quad x \in U_\delta(x_0)$   
 Wechsel von  $\uparrow$  zu  $\downarrow$

Lokales Minimum: "Tal" (nicht am Rand der Funktion)  
 $f(x) \geq f(x_0) \quad x \in U_\delta(x_0)$   
 Wechsel von  $\downarrow$  zu  $\uparrow$

Terrasse:  $f'(x_0) = 0$  aber kein "Berg" / "Tal"

### 2.15.3 Prinzip von Fermat S. 453

Wenn  $x_0$  ein relatives Minimum / Maximum ist muss zwingend die Ableitung  $f'(x_0) = 0$  sein  $\rightarrow$  **Umkehrung gilt nicht!**  
 $x_0$  = kritische Stelle  $\rightarrow$  zu prüfen auf Berg, Tal oder Terrasse

$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	$f^{(n)}(x_0)$	
0	< 0		"Berg" (Achtung auf Randstellen)
0	> 0		"Tal" (Achtung auf Randstellen)
0	0	< 0	wenn n gerade: "Berg"
0	0	> 0	wenn n gerade: "Tal"
0	0	$\neq 0$	wenn n ungerade; Terrasse

y-Koordinate des Punktes:  $x_0$  in  $f(x)$  einsetzen

## 2.16 Monotonie S. 453

$f'(x_0)$	
$\geq 0$	monoton wachsend
$\leq 0$	monoton fallend
$> 0$	streng monoton wachsend
$< 0$	streng monoton fallend

## 2.17 Wendepunkte (Terrassenpunkte)

Wendepunkt = Krümmungswechsel = Vorzeichenwechsel für  $f''(x)$  bei  $x_0$

$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	$f^{(n)}(x_0)$	
	0	< 0	n ungerade: links-rechts Wendestelle
	0	> 0	n ungerade: rechts-links Wendestelle
	0	$\neq 0$	n gerade: Flachpunkt

Ausserdem liegt eine WP vor wenn  $f''$  beim Durchgang durch  $x_0$  das Vorzeichen wechselt, also  $f''(x_0) < 0$  für  $x < x_0$  und für  $f''(x_0) > 0$  für  $x > x_0$  bzw. umgekehrt.

y-Koordinate des Punktes:  $x_0$  in  $f(x)$  einsetzen

## 2.18 Krümmungsverhalten

Das beschriebene Verhalten gilt global für die ganze Funktion  $f(x)$  bzw. auf einem ganzen Intervall, nicht nur an einer Stelle  $x_0$ !

### 2.18.1 Linkskrümmung (konvex)

- $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$   
 $f(x)$  überall grösser als Tangentensteigung an jedem Punkt
- $f' \uparrow$  Tangentialsteigung steigt kontinuierlich
- $f'' \geq 0$

Strenge Krümmung: Logik verstärkt (ausser bei Berührungspunkt  $x_0$ )

### 2.18.2 Rechtskrümmung (konkav)

- $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$   
 $f(x)$  überall kleiner als Tangentensteigung an jedem Punkt
- $f' \downarrow$  Tangentialsteigung sinkt kontinuierlich
- $f'' \leq 0$

Strenge Krümmung: Logik verstärkt (ausser bei Berührungspunkt  $x_0$ )

## 2.19 Bernoulli-Hôpital S. 57-58

### 2.19.1 B.H. I

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad (x \rightarrow x_0) \quad \frac{0}{0}$$

Wenn  $\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$  eine bestimmte Form ist, dann ist dies das Resultat von  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

### 2.19.2 B.H. II

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad (x \rightarrow x_0) \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Wenn  $\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$  eine bestimmte Form ist, dann ist dies das Resultat von  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

**Bernoulli-Hôpital darf auch mehrfach nacheinander verwendet werden  $\rightarrow$  immer erst algebraisch vereinfachen!**

## 2.20 Unbestimmte Formen zu Bernoulli-Formen

$$f \cdot g \text{ vom Typ } (0^+) \cdot \infty \quad \frac{f}{1/g} \text{ von Typ } \frac{0}{0} \quad \frac{1/f}{g} \text{ von Typ } \frac{\infty}{\infty}$$

$$f - g \text{ vom Typ } \infty - \infty \quad \frac{1/g - 1/f}{1/fg} \text{ von Typ } \frac{0}{0}$$

$$f^g \text{ als } (0^+)^0; \infty^0; 1^\infty \quad f^g = e^{g \cdot \ln(f)} \text{ wobei } g \cdot \ln(f) \text{ von Typ } (0^+) \cdot \infty \text{ bzw. } \infty \cdot 0$$

$$\text{Vorzeichen auskl.:} \quad (0^-) \cdot \infty = -(0^+) \cdot \infty \quad (0^+)^{0^-} = \frac{1}{(0^+)^{0^+}} \text{ oder } 1^{-\infty} = \frac{1}{1^\infty}$$

## 2.21 Optimierungsprobleme

1. Problem durch eine Funktion  $f$  mit ultimativer Variablen  $x$  ausdrücken  $\rightarrow f(x)$
2. Fermat anwenden:  $f'(x) = 0$
3. gefundene kritische Stellen auf Maximum / Minimum prüfen
- 3.1 Logik Randanalyse:  $x$  links und rechts über Rand des Intervalls hinaus gehen lassen (z.B. nach  $\pm\infty$ ) und Berg / Tal durch Logik entscheiden
- 3.2 Monotoniewechsel bei  $x_0$  ausnützen: Wert  $> x_0$  und  $< x_0$  einsetzen
- 3.3 Taylor-Theorie: Vorzeichen der zweiten Ableitung gemäss Abschnitt 1.15.3

## 2.22 Asymptote bestimmen

Asymptotengerade:  $y = mx + q$   $m$  und  $q$  sind gesucht

$$\text{Steigung:} \quad m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\text{Achsenabschnitt:} \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) \rightarrow \text{berechnetes } m \text{ einsetzen!}$$

## 3 Integralrechnung S.493

### 3.1 Obersumme / Untersumme

Die Fläche unter einer Funktion  $f(x)$  wird in Intervalle zerlegt.

**Voraussetzung:**  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mathbb{W}_f$  beschränkt

Zerlegung:  $Z = \{x_0; x_1; \dots; x_n\} = \{x_i \mid i = 0; \dots; n\}$  ( $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$ )

Breite(n) der Intervalle:  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$   $\Delta x$  kann variieren!

Machsenweite:  $\max(\Delta x_i) = d(Z)$

**Äquidistante Zerlegung:**  $Z = \{a + \frac{b-a}{n} \cdot i \mid i = 0; \dots; n\}$

**Untersumme**  $\underline{US}$

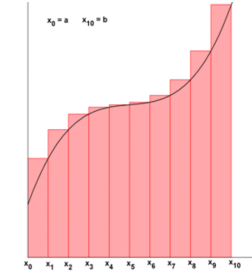
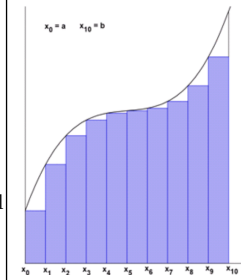
$$US = \sum_{i=0}^{n-1} \underline{m}_i \cdot \Delta x_i$$

$$\underline{m}_i = \inf\{f(x) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$$

**Obersumme**  $\overline{OS}$

$$OS = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{m}_i \cdot \Delta x_i$$

$$\overline{m}_i = \sup\{f(x) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$$



**Unter-Integral**

$$\underline{I} = \lim_{d(Z) \rightarrow 0} \underline{US} \quad \infty \cdot 0$$

$$\underline{I} = \int_a^b f(x) dx$$

**Ober-Integral**

$$\overline{I} = \lim_{d(Z) \rightarrow 0} \overline{OS} \quad \infty \cdot 0$$

$$\overline{I} = \int_a^b f(x) dx$$

## 3.2 Riemann-Summe S.506-507

$$RS = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \quad d(Z) \rightarrow 0 \quad \int_a^b f(x) dx$$

$$\xi \in [x_i; x_{i+1}]$$

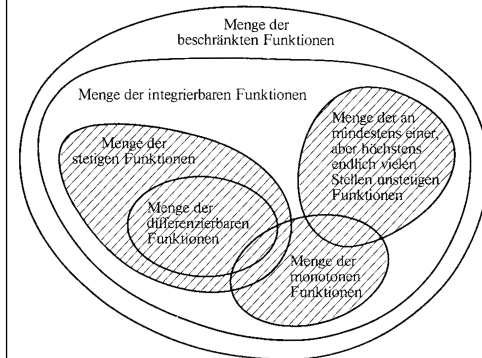
## 3.3 Riemann-Integral S.507

$$I = \underline{I} = \overline{I} \text{ wenn } \underline{I} = \overline{I}$$

$$\text{Notation: } \int_a^b f(x) dx \quad \begin{matrix} a, b & \text{Integrationsgrenzen} \\ f(x) & \text{Integrand} \end{matrix}$$

## 3.4 Integrierbare Funktionen

**Hinreichendes Kriterium:**  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mathbb{W}_f$  beschränkt



### 3.5 Integrationsregeln S. 494-496

Linearität:  $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$

#### 3.5.1 Rechenregeln mit Integralen S. 508-510

Zerlegung:  $\int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Grenzen tauschen:  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

Gleiche Grenzen:  $\int_a^a f(x) dx = 0$

### 3.6 Wichtige Integrale S. 495

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \quad \int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\int_a^b 1 dx = b - a \text{ (Rechteck)}$$

### 3.7 Flächen unter Integralen

**Voraussetzung:**  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mathbb{W}_f$  beschränkt

Fläche  $A = \int_a^b |f(x)| dx$

**Der Inhalt des Betrags muss auf Vorzeichen untersucht werden!**  
Negative Vorzeichen müssen über die x-Achse geklappt werden:  
 $|x^2 - x| = -(x^2 - x)$  falls  $x > x^2$

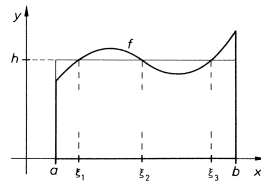
### 3.8 Mittelwert einer Funktion S. 510

Funktion aufgeteilt in n äquidistante Intervalle  $\rightarrow \Delta x = \frac{b-a}{n}$

Mittelwert:  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

### 3.9 Mittelwertsatz S. 510

**Voraussetzung:**  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mathbb{W}_f$  beschränkt und stetig  
Die Fläche unter der Funktion  $f(x)$  kann an mind. einem Punkt  $\xi$  als Rechteck dargestellt werden.  
 $\xi \in (a; b)$



Fläche = Mittelwert · Intervall-Länge

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi)$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f(\xi)$$

$$(b-a) \cdot h = (b-a) \cdot f(\xi)$$

### 3.10 Integralfunktion I(x)

**Voraussetzung:**  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  und integrierbar

$I(x)$  besitzt eine feste untere Grenze  $c = \text{const}$  (Anker) und eine variable obere Grenze  $x$  (Hauptvariable)  $x \in [a; b]$   $c \in [a; b]$

Notation:  $I(\tilde{x}) = \int_c^x f(\tilde{x}) d\tilde{x}$   $\tilde{x}$  ist die Integrationsvariable

#### 3.10.1 Eigenschaften der Integralfunktion

Die Integralfunktion hat beim Anker  $c$  eine Nullstelle:

$$I(c) = \int_c^c f(\tilde{x}) d\tilde{x} = 0$$

$I(x)$  berührt/schneidet die x-Achse in  $[a; b]$  beim Anker  
 $\rightarrow I(c) = 0$

Das Verschieben des Ankers bewirkt eine Parallelverschiebung von  $I(x)$

**$I(x)$  ist immer stetig!** (Integration behebt Sprungstellen)  
 **$I(x)$  ist ableitbar, wenn die Originalfunktion  $f(x)$  stetig ist**

Ableitung  $I'(x) = \frac{d}{dx} \left( \int_c^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} \right) = f(x)$  "Kreislauf"

Integral  $I(x)$   $\xrightarrow{\text{differenzieren}}$   $f(x)$

Integral  $I(x)$   $\xleftarrow{\text{integrieren}}$   $f(x)$

#### 3.10.2 Beispiel Integralfunktion bestimmen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 0.75 \\ -0.5, & 0.75 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$I(x) = \begin{cases} \int_{c=0}^x 1 d\tilde{x} = x & 0 \leq x < 0.75 \\ \int_{c=0}^{0.75} 1 d\tilde{x} + \int_{0.75}^x (-0.5) d\tilde{x} = 0.75 + (-0.5)(x - 0.75) & 0.75 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

**Wichtig: Bei Funktionen mit Sprungstellen immer beim Anker beginnen, wenn nichts spezielles verlangt ist**

### 3.11 Stammfunktion F

Eine Funktion  $F(x)$  heisst Stammfunktion von  $f(x)$  wenn gilt:  
 **$F'(x) = f(x)$**

$F(x) + C$  sind ebenfalls Stammfunktionen von  $f(x)$   
 $C \in \mathbb{R}$   $C$  ist eine freie Verschiebungszahl

Stammfunktionen  $F$  sind Teilmenge der unbestimmten Integrale

$\Rightarrow$  Ableitungstabelle rückwärts lesen für Stammfunktion!

### 3.12 Unbestimmtes Integral

$$I(x) + C = \int f(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad C \in \mathbb{R}$$

**Wenn  $f(x)$  stetig ist, dann entspricht das unbestimmte Integral der Stammfunktion**

### 3.13 Hauptsatz der Integration S. 507

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b$$

### 3.14 Wachstumsvergleiche

- |     |   |                             |   |
|-----|---|-----------------------------|---|
| (1) | $\frac{n^k}{q^n} (n \rightarrow \infty) = 0$    | $(k \in \mathbb{N}; q > 1)$ | $\frac{\text{Potenz}}{\text{Exponentiell}} \rightarrow 0$   |
| (2) | $\frac{q^n}{n!} (n \rightarrow \infty) = 0$     | $(q > 1)$                   | $\frac{\text{Exponentiell}}{\text{Fakultät}} \rightarrow 0$ |
| (3) | $\frac{\ln(n)}{n^k} (n \rightarrow \infty) = 0$ | $(k \in \mathbb{N})$        | $\frac{\text{Logarithmisch}}{\text{Potenz}} \rightarrow 0$  |
| (4) | $\frac{\ln(n)}{n} (n \rightarrow \infty) = 0$   |                             | $\frac{\text{Logarithmisch}}{\text{Linear}} \rightarrow 0$  |