Formelsammlung

Sammlung gegliedert nach Fach

Fabian Suter, 10. November 2023

`https://github.com/FabianSuter/Formelsammlung.git`

1 Mathematik

1.1 Reelle Zahlen

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, 4, ...\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$	ganze Zahlen inkl. 0
$\mathbb{Z}$	$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3\} \cup \{0\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Q}$	$\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$		ergänzt $\mathbb{Q}$ durch irr. Zahlen wie $\sqrt{2}$, reelle Zahlen
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$		Irrationale Zahlen

1.1.1 Supremum und Infimum

sup(X) kleinste obere Schranke
Maximum ist immer auch Supremum

inf(X) grösste untere Schranke
Minimum ist immer auch Infimum

1.1.2 Binomischer Satz / Binomialkoeffizient

Pascal-Dreieck berechnen: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\binom{n}{k} = 0$ wenn k $<$ 0 oder k $>$ n

$\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$

1.1.3 Umgebung

Jedes offene Intervall, dass die Zahl a enthält, heisst eine Umgebung von a U(a)

Es sei $\epsilon > 0$. Unter der ϵ-Umgebung von a versteht man das offene Intervall $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ $U_\epsilon(a)$

Eine ϵ-Umgebung von a ohne die Zahl a selbst wird punktierte ϵ-Umgebung von a genannt $\dot{U}_\epsilon(a) = U_\epsilon(a) \setminus a$

1.1.4 Spezielle endliche Reihen

arithmetisch: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

geometrisch: $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

1.1.5 Mittelwerte

Harmonisches Mittel (HM) : $\frac{1}{\frac{1}{n}(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n})}$

Geometrisches Mittel (GM) : $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

Arithmetisches Mittel (AM) : $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$

1.1.6 Spezielle Ungleichungen

Bernoulli-Ungleichung: $(1+a)^n > 1 + n \cdot a$
für $n \in N, n \geq 2, a \in R, a > -1, a \neq 0$

Binomische Ungleichung: $|a \cdot b| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

Mittelungleichung: $HM \leq GM \leq AM$

Gleichheit: $HM = GM = AM$
für $a_1 = a_2 = ... = a_n$

Dreiecksungleichungen:
$|a+b| \leq |a| + |b|$
$|a-b| \leq |a| + |b|$
$|a-b| \geq ||a| - |b||$

1.1.7 Vollständige Induktion

Verankerung VA: Beweise Formel für a_0
Vererbung VE: (1) Annahme: Formel gilt für a_n
$\downarrow$
(2) Schritt: Formel gilt auch für a_{n+1}

Mittels Berechnung soll bewiesen werden, dass (2) ebenso gilt wie (1)

Beispiel:

(VA) $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

(VE) (1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

(VE) (2) $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

1.2 Funktionen

Schreibweisen:
$f : D_f \to W_f$ mit $x \mapsto f(x)$
$f : x \mapsto f(x)$ mit $x \in D_f$
$y = f(x)$ mit $x \in D_f$

Monoton wachsend:	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqq f(x_2)$
Monoton sinkend:	$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqq f(x_2)$
Monoton streng ...:	Siehe oben, jedoch immer $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1)$
Beschränktheit:	Funktion besitzt obere oder untere Grenze, meist in
Umkehrbarkeit:	Streng monotone Funktionen sind umkehrbar, pro x
Restriktion:	Nur einen Teil von D_f betrachten $\Rightarrow$ Umkehrbarkeit

1.2.1 Transformationen

1. Streckung um **1/a** in x-Richtung $y = f(a \cdot x)$
   Spiegelung an y-Achse bei **-a**
2. Verschiebung nach links (**+b**) oder rechts (**-b**) $y = f(x \pm b)$
3. Streckung um **c** in y-Richtung $y = c \cdot f(x)$
   Spiegelung an x-Achse bei **-c**
4. Verschiebung nach oben (**+d**) oder unten (**-d**) $y = f(x) \pm d$

1.2.2 Spezielle Funktionen

Identität

$f(x) = x$ y-Wert ist gleich dem x-Wert

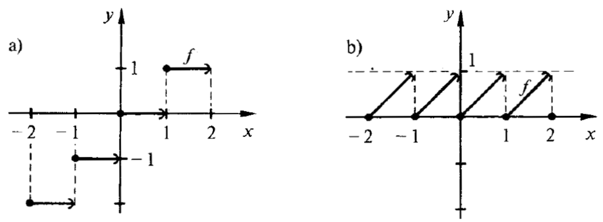
Signum-Funktion

Vorzeichenfunktion $f(x) = sgn(x)$

$$y = \begin{cases} 1, \text{ falls } x > 0 \\ 0, \text{ falls } x = 0 \\ \text{-1, falls } x < 0 \end{cases}$$

Floor-Funktion

Abrunden auf nächste ganze Zahl



Schreibweise: $[x]$ Schreibweise: $x - [x]$

1.2.3 Schwingungen

Sinus-Schwingung: $y = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$

A Amplitude ω Frequenz $\frac{2\pi}{\text{sec}}$ φ Phase

Superposition von Schwingungen

$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = A_1 + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)$

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$

1.2.4 Verkettung oder mittelbare Funktion

g nach f:
$h(x) = g \circ f \Rightarrow h(x) = g(f(x)) \qquad W_h = W_g \rightarrow D_h = D_f$

f nach g:
$h(x) = f \circ g \Rightarrow h(x) = f(g(x)) \qquad W_h = W_f \rightarrow D_h = D_g$

1.2.5 Gerade / ungerade Funktionen

gerade:	$f(-x) = f(x)$	symmetrisch zu y-Achse
ungerade:	$f(-x) = -f(x)$	punktsymmetrisch
periodisch:	$f(x) = f(x \pm p)$	wiederholend mit Periode p

1.2.6 Ganzrationale Funtkionen (Polynome)

Aussehen: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Nullstellen bestimmen:
Quadratische Funktion: $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Faktorisierung mit Binomen / Hornerschema

Eine Funktion vom Grad n hat höchstens n verschiedene Nullstellen!

1.2.7 Gebrochenrationale Funktionen

Aussehen: $f(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$

m	Zählergrad
n	Nennergrad
$m < n$	echt gebrochen
$m = n$	gleichgradig
$m > n$	unecht gebrochen

Jede unecht gebrochene Funktion lässt sich als Summe einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenen Funktion schreiben.
$\Rightarrow$ Polynomdivision

1.2.8 Hornerschema

Zerlegt eine ganzrationale Funktion vom Grad n in einen Linearfaktor (Nullstelle) und ein Polynom vom Grad n-1

1. Nullstelle x_0 raten
2. Von oben nach unten summieren
3. Diagonal nach rechts mit x_0 multiplizieren

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
x_1		$b_{n-1}x_1$	$b_{n-2}x_1$	$\cdots$	$b_1 x_1$	$b_0 x_1$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	$f(x_1)$

Beispiel:

	1	0	-67	-126
$x_1 = -2$		-2	4	$+126$
	1	-2	-63	$0 = f(-2)$
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
	b_2	b_1	b_0	

$f(x) = x^3 - 67x - 126$
$\Rightarrow f(x) = (x - x_1)(b_2 x^2 + b_1 x + b_0) = (x + 2)(x^2 - 2x - 63)$

1.2.9 Polynomdivision

Liefert Summe aus ganzrationaler Funktion und echt gebrochener Funktion

Beispiel:

$$\begin{array}{l} \left(-2x^2 \;\; -x-1\right) \div (x-1) = -2x-3+\dfrac{-4}{x-1} \\ \underline{\;\;2x^2-2x\;\;} \\ \qquad -3x-1 \\ \qquad \underline{\;\;3x-3\;\;} \\ \qquad\quad -4 \end{array}$$

1.2.10 Partialbruchzerlegung

(1)	echt gebrochen ($m < n$)	
	Ja: $\rightarrow$ (2)	Nein: $\rightarrow$ Polynomdivision
(2)	Nenner faktorisieren	
	pro Faktor ein Teilbruch	
(3)	Berechnung Zählerkonstanten	
(3.1)	Gleichnahmig machen (kgV)	
(3.2)	Zählergleichung	
(3.3)	Einsetzen von "guten"x-Werten	

Beispiel PBZ

(1) $f(x) = \frac{1}{a^2 - x^2}$

(2) $a^2 - x^2 = (a + x)(a - x)$

(3) $\frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x} = \frac{1}{a^2 - x^2}$

(3.1) $\frac{A(a-x) + B(a+x)}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a^2 - x^2}$

(3.2) $A(a - x) + B(a + x) = 1$

(3.3) $x = a \Rightarrow B(2a) = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2a}$
$x = -a \Rightarrow A(2a) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2a}$

Spezielle Ansätze PBZ

$$f(x) = \frac{5x^2 - 37x + 54}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx}{x(x-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{1{,}5x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} = \frac{A(x-2)^2 + B(x-2) + C}{(x-2)^3}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - 2x - 12} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4x + 6} = \frac{A(x^2 + 4x + 6) + (Bx + C)(x-2)}{(x-2)(x^2 + 4x + 6)}$$

1.2.11 Trigonometrie, Arcus

$\sin(x)$:	$D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\rightarrow$	$W_f = [-1, 1]$
$\cos(x)$:	$D_f = [0, \pi]$	$\rightarrow$	$W_f = [-1, 1]$
$\tan(x)$:	$D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\rightarrow$	$W_f = \mathbb{R}$
$\cot(x)$:	$D_f = (0, \pi)$	$\rightarrow$	$W_f = \mathbb{R}$
$\arcsin(x)$:	$D_f = [-1, 1]$	$\rightarrow$	$W_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos(x)$:	$D_f = [-1, 1]$	$\rightarrow$	$W_f = [0, \pi]$
$\arctan(x)$:	$D_f = \mathbb{R}$	$\rightarrow$	$W_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\text{arccot}(x)$:	$D_f = [-1, 1]$	$\rightarrow$	$W_f = (0, \pi)$

Umwandlung

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x) \qquad \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$

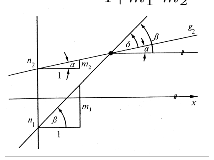
Symmetrien

Sinus
Punkt $(0|0) \rightarrow \sin(-x) = -\sin(x)$
Scheitelsymm. $\rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$
Punkt $\rightarrow \sin(\pi - x) = \sin(x)$

Cosinus
y-Achse $\rightarrow \cos(-x) = \cos(x)$
Scheitel $\rightarrow \cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$

1.2.12 Winkel zwischen beliebigen Geraden

Zwischenwinkel: $\tan(\alpha) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \to$ Winkel geg. Uhrzeiger



Senkr. Geraden: $m_1 \cdot m_2 = -1$

1.3 Folgen und Reihen

1.3.1 Spezielle Folgen und Reihen

Arithmetische Folge: $a_{n+1} = a_n + d$ $\quad d = a_{n+1} - a_n$

Geometrische Folge: $a_{n+1} = q \cdot a_n$ $\quad q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Konstante Folge: $a_{n+1} = a_n$

1.3.2 Beschränktheit / Monotonie

Beschränktheit

$W_f \subset [a;b]$ und a, b $\in \mathbb{R}$

Monotonie

$f(x_1) \leq f(x_2)$	$x_1 < x_2$	monoton wachsend	$\uparrow$
$f(x_1) < f(x_2)$	$x_1 < x_2$	streng monoton wachsend	$\Uparrow$
$f(x_1) \geq f(x_2)$	$x_1 > x_2$	monoton fallend	$\downarrow$
$f(x_1) > f(x_2)$	$x_1 > x_2$	streng monoton fallend	$\Downarrow$

1.3.3 Konvergenz, Divergenz

Konvergenz

Es existiert ein Grenzwert g $\in \mathbb{R}$

Toleranzungleichung: $|a_n - g| < \epsilon$ mit $\epsilon > 0$

Gesucht ist ein n_0, ab welchem alle Werte von $n \geq n_0$ in $U_\epsilon(g)$ liegen

Bestimmt divergent gegen $+\infty$

Ungleichung: $f_n > K$ wenn $n \geq n_0$ für $K > 0$

Bestimmt divergent gegen $-\infty$

Ungleichung: $f_n < k$ wenn $n \geq n_0$ für $k < 0$

Unbestimmt divergent

Alles, was nicht konvergent oder bestimmt divergent ist

1.3.4 Grenzwerte gegen Unendlich

Vorgehen beim lösen von Grenzwerten

1. Naiven Ansatz ausprobieren $\to$ limit direkt bilden
2. Falls unbestimmte Form entsteht:
   Umformen gemäss folgenden Ansätzen

Arithmetik:	$+, -, *, :, \sqrt{...}, \lvert ... \rvert$
Erweiterung:	erweitern mit $\frac{1}{x^n}$ n = höchste (Nenner-)Potenz
Erweiterung:	erweitern mit Gegentherm (3. Binom bilden)
Tabelle:	Bei Brüchen Tabelle aus Abschnitt 4.8 anschauen!

Beispiel Grenzwert n gegen Unendlich

$f(n) = \frac{-2n^2+4n-5}{8n^2-3n+7}$ $(n \to \infty)$

"Naiv": $\frac{-\infty+\infty+5}{\infty-\infty+7} \to \frac{-\infty+\infty}{\infty-\infty} \to \frac{?}{?}$

Algebra, Erweitern mit $\frac{1}{n^2}$: $f(n) = \frac{-2+\frac{4}{n}-\frac{5}{n^2}}{8-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}} (n \to \infty) = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$

1.3.5 Rechnen mit Unendlich

Bestimmte Formen

$\infty + \infty = \infty$ $\quad -\infty - \infty = -\infty$ $\quad 0 \cdot [a,b] = 0 \cdot$ beschränkt $= 0$

$g + \infty = \infty$ $\quad g - \infty = -\infty$ $\quad (g \in \mathbb{R})$

$\infty \cdot \infty = \infty$ $\quad -\infty \cdot (\infty) = -\infty$ $\quad g \cdot \infty = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases}$

$\frac{1}{\infty} = 0$ $\quad \frac{g}{\infty} = 0$ $\quad g \in \mathbb{R}$

$\frac{\infty}{0+} = \infty$ $\quad \frac{\infty}{0-} = -\infty$ $\quad \frac{\infty}{g} = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases}$

$\frac{1}{0+} = \infty$ $\quad \frac{1}{0-} = -\infty$ $\quad g \in \mathbb{R} - 0$

$\frac{g}{0+} = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases}$ $\quad \frac{g}{0-} = \begin{cases} -\infty & g > 0 \\ \infty & g < 0 \end{cases}$

Unbestimmte Formen

$\frac{0}{0} =?$ $\quad \frac{\infty}{\infty} =?$ $\quad \infty \cdot 0 =?$

$0 \cdot \infty =?$ $\quad \infty - \infty =?$ $\quad 0^0 =?$

$\infty^0 =?$ $\quad 1^\infty =?$

Ausser 1 ist eine Konstante, dann gilt $1^\infty = 1$

1.3.6 Einschliessung

Es existieren drei Folgen : O_n, f_n und U_n
Es gilt: $O_n \geq f_n \geq U_n$

WENN O_n gegen Grenzwert g konverviert UND U_n ebenfalls gegen g konvergiert, DANN konvergiert auch f_n gegen g

1.3.7 Wachstumsvergleich

(1) $\frac{n^k}{q^n} (n \to \infty) = 0$ $(k \in \mathbb{N}; q > 1)$ $\quad \frac{\text{Potenz}}{\text{Exponentiell}} \to 0$

(2) $\frac{q^n}{n!} (n \to \infty) = 0$ $(k \in \mathbb{N}; q > 1)$ $\quad \frac{\text{Exponentiell}}{\text{Fakultät}} \to 0$

(2) $\frac{ln(n)}{n^k} (n \to \infty) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ $\quad \frac{\text{Logarithmisch}}{\text{Potenz}} \to 0$

1.3.8 Bolzano-Prinzip

Jede beschränkte, monotone Zahlenfolge ist konvergent!

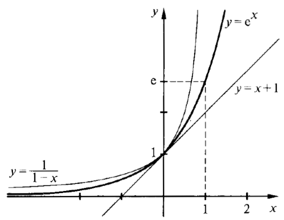
1. Monotonie beweisen
2. Beschränktheit vermuten und möglichen Grenzwert g mittels Grenzwertgleichung finden
3. Beschränktheit beweisen

3.1 a_1 ist obere/untere Schranke

3.2 Vermutete untere/obere Schranke mit voll. Induktion beweisen z.B. $a_{n+1} \leq a_n$ wobei a_{n+1} und a_n mit vermutetem Grenzwert ersetzt werden

1.3.9 Exponentialfunktion

$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$



Definitions- / Wertebereich:

$D_f = \mathbb{R} \to W_f = \mathbb{R}^+$

Einschliessung:

$\mathrm{e}^x \geq 1 + x$ $\quad$ für x $\in \mathbb{R}$

$\mathrm{e}^x \leq \frac{1}{1-x}$ $\quad$ für $x < 1$

1.3.10 Hyperbolische Funktionen

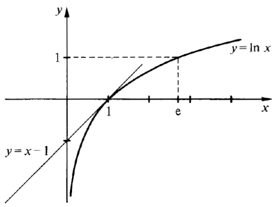
$\mathrm{e}^x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = \sinh(x) + \cosh(x)$

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\cosh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ $\quad \mathbb{R} \to [1; \infty)$
$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})}$ $\quad \mathbb{R} \to (-1; 1)$
$|\sinh(x)| < \cosh(x)$

Area-Funktionen (Umkehrung Hyperbolische. F.)

$\text{arsinh}(x):$ $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\text{arcosh}(x):$ $\quad [1; \infty) \to \mathbb{R}_0^+$
$\text{artanh}(x):$ $\quad |x| < 1 \to \mathbb{R}$

1.3.11 Logarithmusfunktion



Definitions- / Wertebereich:
$D_f = \mathbb{R}^+ \rightarrow W_f = \mathbb{R}$

Einschliessung:

$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$

1.4 Grenzwerte von Funktionen

Grenzwertsätze S. 56-57

1.4.1 Techniken zur Berechnung von Grenzwerten

Arithmetik:	$+, -, *, :, \sqrt{...}, \lvert ... \rvert$
Erweiterung:	erweitern mit $\frac{1}{x^n}$ n = höchste (Nenner-)Potenz
Erweiterung:	erweitern mit Gegentherm (3. Binom bilden)
Faktorisierung:	Zähler und Nenner faktoriesieren und kürzen
Trigo:	**Bronstein S. 57 1. C beachten**

1.4.2 Links- / Rechtsseitiger Grenzwert

Eine kritische Stelle x_0 kann von links und rechts angenähert werden.

linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g^-$

rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g^+$

⇒ Wenn $g^- = g^+ = g \rightarrow$ Konvergenz
⇒ Wenn $g^- \neq g^+ \rightarrow$ unbestimmte Divergenz

1.4.3 Konvergenz, Divergenz

Konvergenz von f(x)

$x \to \infty$	Toleranzungleichung: $\lvert f(x) - g \rvert < \epsilon$	wenn $x > M(\epsilon)$
$x \to -\infty$	Toleranzungleichung: $\lvert f(x) - g \rvert < \epsilon$	wenn $x < m(\epsilon)$
$x \to x_0$	Toleranzungleichung: $\lvert f(x) - g \rvert < \epsilon$	$x \in \dot{U}_\delta(x_0)$

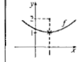
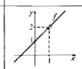
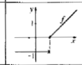
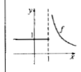
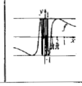
Bestimmte Divergenz von y = f(x)

Quadrant	Kriterium	Folgerung
I	$y \to \infty$ $(x \to \infty)$	$y > K$ wenn $x > M(K)$
II	$y \to \infty$ $(x \to -\infty)$	$y > K$ wenn $x < m(K)$
III	$y \to -\infty$ $(x \to -\infty)$	$y < k$ wenn $x < m(k)$
IV	$y \to -\infty$ $(x \to \infty)$	$y < k$ wenn $x > M(k)$
	$f(x) \to \infty$	$y > K > 0$ wenn $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$
	$f(x) \to -\infty$	$y < k < 0$ wenn $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$

1.4.4 Stetigkeit

Definition Stetigkeit: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Eine Funktion ist stetig, wenn der Funktionsgraph kann gezeichnet werden, ohne dass der Stift abgesetzt werden muss.

Art der Unstetigkeitsstelle	Bedingungen	Beispiel $f: x \mapsto f(x) =$	Graph von f
hebbare Unstetigkeitsstelle	$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$ und $g \neq f(x_0)$	$\begin{cases} \frac{1}{4}(x-1)^2 + 1 & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$	
	$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$ und $x_0 \notin D_f$	$\frac{x^2 - 1}{x - 1}$	
Unstetigkeitsstelle 1. Art (Sprungstelle)	g^+ und g^- existieren in x_0, aber $g^+ \neq g^-$	$\begin{cases} x - 1 & \text{für } x \geq 1 \\ -1 & \text{für } x < 1 \end{cases}$	
Unstetigkeitsstelle 2. Art	mindestens g^+ oder g^- existieren in x_0 nicht	$\begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{für } x > 1 \\ 1 & \text{für } x \leq 1 \end{cases}$	
	f ist für $x \uparrow x_0$ und $x \downarrow x_0$ unbestimmt divergent (Oszillationsstelle)	$\sin \frac{1}{x}$	

1.4.5 Übertragungsprinzip (Folgenprinzip)

f bestitz an der Stelle x_0 Grenzwert g, wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge $< x_n >$ gilt: $\lim_{x \to \infty} f(x_n) = g$

Beispiel

$f(x) = \frac{|x+2|}{2x+4}$ und $x_0 = -2$

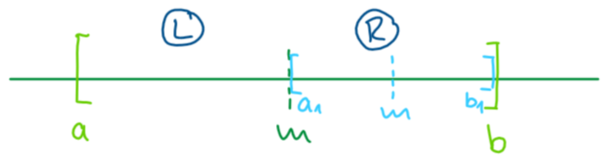
linksseitig: $x_n = x_0 - \frac{1}{n}$ für jedes x in f(x) einsetzen; Grenzwert g^- gegen ∞ bestimmen

rechtsseitig: $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$ für jedes x in f(x) einsetzen; Grenzwert g^+ gegen ∞ bestimmen

1.4.6 Nullstellen bestimmen gemäss Bolzano

$f(x)$ auf Intervall $[a; b]$ stetig und $f(a)$ und $f(b)$ versch. Vorzeichen
→ Es existiert (mindestens) eine Nullstelle ξ
NS mittels Bisektion (Intervallschachtelung) näherungsweise berechnen:

(1) $I_0 = [a; b] = [a_0; b_0]$ gesamtes Intervall
(2) I_0 halbieren $\rightarrow m = \frac{a_0 + b_0}{2}$
(3) Teil-Intervall mit Vorzeichenwechsel bestimmen:
links: $f(a) \cdot f(m) < 0$; rechts: $f(a) \cdot f(m) > 0$
(4) Teil-Intervall mit Vorzeichenwechsel: $I_1 = [a_1; b_1]$
(5) Schritt (2) - (4) n mal wiederholen: $I_{n+1} \in I_n$
(6) ... $\xi \in (a; b)$ mit $f(\xi) = 0$ (Nullstelle)



1.4.7 Spezielle Grenzwerte

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ $\quad \lim_{x \to \infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln(a)}$

$\lim_{x \to 1} \frac{x}{1 - e^{-x}} = 1$ $\quad \lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{x} = 1$ $\quad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = 1$

$\lim_{x \to \infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$ $\quad \lim_{x \to 0+} x \cdot \ln(x) = 0$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{(a+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ $\quad \lim_{x \to 0+} z^z = 1$

$\lim_{x \to 0+} x^{\sin(x)} = 1$ $\quad \lim_{x \to 0+} y^\beta (\ln(y))^\alpha = 0$

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}} = 0 \ (a > 1; \alpha, \beta > 0)$ $\quad \lim_{x \to \infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \infty & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \end{cases}$

1.4.8 Asymptotenbestimmung

Asymptote einer gebrochen rationalen Funktion $f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}$ bestimmen gemäss:

	$m > n$	$m = n$	$m < n$
$\lim_{x \to \pm\infty} r(x)$	0	$\frac{a_n}{b_m}$	∞ ode
Asymptote	x-Achse	Parallel zur x-Achse $y = g(x) = \frac{a_m}{b_n}$	ganzra
Konv./Div.	Konvergenz	Konvergenz	Diverg

1.4.9 Grenzwerte von rekursiven Folgen

Anwendung des Bolzano-Prinzips! Beispiel: $a_1 = \frac{1}{4}$; $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$

1. Monotonie
   beweisen mit Ansatz $a_{n+1} \geq a_n$ bzw. $a_{n+1} \leq a_n$

2. Beschränktheit
   erste Schranke = erster Wert der Reihe
   Zweite Schranke: Annahme, es gibt Grenzwert g und er ist sup / inf

   Grenzwertgleichung: $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$ $(n \to \infty) \Rightarrow g = g^2 + \frac{1}{4}$
   Gleichung nach g auflösen
   ⇒ Wenn es ein sup / inf gibt, dann ist es das berechnete $g \in \mathbb{R}$

3. Beweisen (oder widerlegen), dass g sup / inf ist
   Ansatz: $a_n \leq g$ bzw. $a_n \geq g$ mit vollst. Induktion beweisen