Analysis

Sammlung gegliedert nach Modul

Fabian Suter, 9. Januar 2024

https://github.com/FabianSuter/Analysis.git

1 Analysis 1a

1.1 Reelle Zahlen

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, 4, ...\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$	ganze Zahlen inkl. 0
$\mathbb{Z}$	$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3\} \cup \{0\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Q}$	$\{\frac{p}{q} \vert p \in \mathbb{Z} \land q \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$		ergänzt $\mathbb{Q}$ durch irr. Zahlen wie $\sqrt{2}$, reelle Zahlen
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$		Irrationale Zahlen

1.1.1 Supremum und Infimum

sup(X) kleinste obere Schranke
Maximum ist immer auch Supremum

inf(X) grösste untere Schranke
Minimum ist immer auch Infimum

1.1.2 Binomischer Satz / Binomialkoeffizient S.12

Pascal-Dreieck berechnen: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\qquad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\qquad \binom{n}{k} = 0$ wenn k < 0 oder k > n

$\binom{n}{0} = 1$ $\qquad \binom{n}{n} = 1$

1.1.3 Umgebung

Jedes offene Intervall, dass die Zahl a enthält, heisst eine Umgebung von a — U(a)

Es sei $\epsilon > 0$. Unter der ϵ-Umgebung von a versteht man das offene Intervall $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ — $U_\epsilon(a)$

Eine ϵ-Umgebung von a ohne die Zahl a selbst wird punktierte ϵ-Umgebung von a genannt — $\dot{U}_\epsilon(a) = U_\epsilon(a) \setminus a$

1.1.4 Spezielle endliche Reihen S.20

arithmetisch: $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

geometrisch: $\sum\limits_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

1.1.5 Mittelwerte S.20, 21

Harmonisches Mittel (HM) : $\frac{1}{\frac{1}{n}(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n})}$

Geometrisches Mittel (GM) : $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$

Arithmetisches Mittel (AM) : $\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$

1.1.6 Spezielle Ungleichungen S.31

Bernoulli-Ungleichung: $(1+a)^n > 1 + n \cdot a$
für $n \in N, n \geq 2, a \in R, a > -1, a \neq 0$

Binomische Ungleichung: $|a \cdot b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

Mittelungleichung: $HM \leq GM \leq AM$

Gleichheit: $HM = GM = AM$
für $a_1 = a_2 = ... = a_n$

Dreiecksungleichungen: $|a+b| \leq |a| + |b|$
$|a-b| \leq |a| + |b|$
$|a-b| \geq ||a| - |b||$

1.1.7 Vollständige Induktion

Verankerung VA: Beweise Formel für a_0
Vererbung VE: (1) Annahme: Formel gilt für a_n
$\downarrow$
(2) Schritt: Formel gilt auch für a_{n+1}
Mittels Berechnung soll bewiesen werden, dass (2) ebenso gilt wie (1)

Beispiel:

(VA) $\sum\limits_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

(VE) (1) $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

(VE) (2) $\sum\limits_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

1.2 Funktionen S.49

Schreibweisen:
$f: D_f \rightarrow W_f$ mit $x \mapsto f(x)$
$f: x \mapsto f(x)$ mit $x \in D_f$
$y = f(x)$ mit $x \in D_f$

Monoton wachsend:	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqq f(x_2)$
Monoton sinkend:	$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqq f(x_2)$
Monoton streng ...:	Siehe oben, jedoch immer $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$
Beschränktheit:	Funktion besitzt obere oder untere Grenze, meist inf oder sup
Umkehrbarkeit:	Streng monotone Funktionen sind umkehrbar, pro x ein y und umgekehrt
Restriktion:	Nur einen Teil von D_f betrachten $\Rightarrow$ Umkehrbarkeit

1.2.1 Transformationen

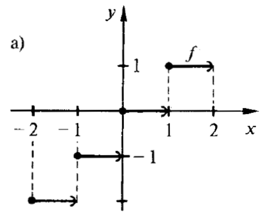
1. Streckung um **1/a** in x-Richtung — $y = f(a \cdot x)$
   Spiegelung an y-Achse bei **-a**
2. Verschiebung nach links (**+b**) oder rechts (**-b**) — $y = f(x \pm b)$
3. Streckung um **c** in y-Richtung — $y = c \cdot f(x)$
   Spiegelung an x-Achse bei **-c**
4. Verschiebung nach oben (**+d**) oder unten (**-d**) — $y = f(x) \pm d$

1.2.2 Spezielle Funktionen

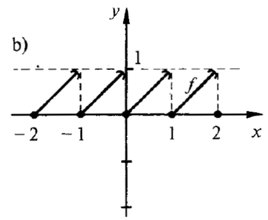
Identität:
$f(x) = x$ y-Wert ist gleich dem x-Wert
Signum-Funktion:
Vorzeichenfunktion $f(x) = sgn(x)$

$$y = \begin{cases} 1, \text{ falls } x > 0 \\ 0, \text{ falls } x = 0 \\ \text{-1, falls } x < 0 \end{cases}$$

Floor-Funktion:
Abrunden auf nächste ganze Zahl



Schreibweise: $[x]$



Schreibweise: $x - [x]$

1.2.3 Schwingungen S.84

Sinus-Schwingung: $y = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$

A Amplitude $\quad \omega$ Frequenz $\frac{2\pi}{\sec}$ $\quad \varphi$ Phase

Superposition von Schwingungen
$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = A_1 + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)$

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$

1.2.4 Verkettung oder mittelbare Funktion

g nach f:
$h(x) = g \circ f \Rightarrow h(x) = g(f(x)) \qquad W_h = W_g \to D_h = D_f$

f nach g:
$h(x) = f \circ g \Rightarrow h(x) = f(g(x)) \qquad W_h = W_f \to D_h = D_g$

1.2.5 Gerade / ungerade Funktionen S. 52

gerade:	$f(-x) = f(x)$	symmetrisch zu y-Achse
ungerade:	$f(-x) = -f(x)$	punktsymmetrisch
periodisch:	$f(x) = f(x \pm p)$	wiederholend mit Periode p

1.2.6 Ganzrationale Funktionen (Polynome) S.62/64

Aussehen: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Nullstellen bestimmen:
Quadratische Funktion: $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Faktorisierung mit Binomen / Hornerschema

Eine Funktion vom Grad n hat höchstens n verschiedene Nullstellen!

1.2.7 Gebrochenrationale Funktionen S.63/67

Aussehen: $f(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$

m	Zählergrad
n	Nennergrad
$m < n$	echt gebrochen
$m = n$	gleichgradig
$m > n$	unecht gebrochen

Jede unecht gebrochene Funktion lässt sich als Summe einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenen Funktion schreiben.
$\Rightarrow$ Polynomdivision

1.2.8 Hornerschema S.966

Zerlegt eine ganzrationale Funktion vom Grad n in einen Linearfaktor (Nullstelle) und ein Polynom vom Grad n-1

1. Nullstelle x_0 raten
2. Von oben nach unten summieren
3. Diagonal nach rechts mit x_0 multiplizieren

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
x_1		$b_{n-1}x_1$	$b_{n-2}x_1$	$\cdots$	$b_1 x_1$	$b_0 x_1$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	$f(x_1)$

Beispiel:

	1	0	−67	−126	
$x_1 = -2$		−2	4	+126	
	1	−2	−63		$0 = f(-2)$
	↑ b_2	↑ b_1	↑ b_0		

$f(x) = x^3 - 67x - 126$
$\Rightarrow f(x) = (x - x_1)(b_2 x^2 + b_1 x + b_0) = (x+2)(x^2 - 2x - 63)$

1.2.9 Polynomdivision S.15

Liefert Summe aus ganzrationaler Funktion und echt gebrochener Funktion

Beispiel:

$$
\begin{array}{l}
\left(-2x^2 \quad -x-1\right) \div (x-1) = -2x - 3 + \dfrac{-4}{x-1} \\
\underline{\;2x^2 - 2x\;} \\
\qquad -3x - 1 \\
\qquad \underline{\;3x - 3\;} \\
\qquad\quad -4
\end{array}
$$

1.2.10 Partialbruchzerlegung S.15

(1)	echt gebrochen (Zähler ¡ Nenner)
	Ja: $\to$ (2)
	Nein: $\to$ Polynomdivision
(2)	Nenner faktorisieren
	pro Faktor ein Teilbruch
(3)	Berechnung Zählerkonstanten
(3.1)	Gleichnamig machen (kgV)
(3.2)	Zählergleichung
(3.3)	Einsetzen von "guten" x-Werten

Beispiel PBZ

(1) $f(x) = \frac{1}{a^2 - x^2}$

(2) $a^2 - x^2 = (a+x)(a-x)$

(3) $\frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x} = \frac{1}{a^2-x^2}$

(3.1) $\frac{A(a-x)+B(a+x)}{a^2-x^2} = \frac{1}{a^2-x^2}$

(3.2) $A(a-x) + B(a+x) = 1$

(3.3) $x = a \Rightarrow B(2a) = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2a}$
$x = -a \Rightarrow A(2a) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2a}$

Spezielle Ansätze PBZ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{5x^2-37x+54}{x^3-6x^2+9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} \\
&= \frac{A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx}{x(x-3)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1{,}5x}{x^3-6x^2+12x-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} \\
&= \frac{A(x-2)^2 + B(x-2) + C}{(x-2)^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2-1}{x^3+2x^2-2x-12} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+6} \\
&= \frac{A(x^2+4x+6) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+4x+6)}
\end{aligned}
$$

1.2.11 Trigonometrie S.77ff, Arcus S.86

$\sin(x)$:	$D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\to$	$W_f = [-1, 1]$
$\cos(x)$:	$D_f = [0, \pi]$	$\to$	$W_f = [-1, 1]$
$\tan(x)$:	$D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\to$	$W_f = \mathbb{R}$
$\cot(x)$:	$D_f = (0, \pi)$	$\to$	$W_f = \mathbb{R}$
$\arcsin(x)$:	$D_f = [-1, 1]$	$\to$	$W_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos(x)$:	$D_f = [-1, 1]$	$\to$	$W_f = [0, \pi]$
$\arctan(x)$:	$D_f = \mathbb{R}$	$\to$	$W_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\text{arccot}(x)$:	$D_f = [-1, 1]$	$\to$	$W_f = (0, \pi)$

Umwandlung $\quad \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x) \qquad \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$

Pythagoras $\quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = \quad 1$

2 Winkel
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

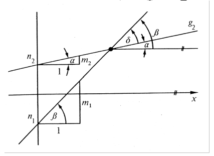
Summenformel $\quad \sin\alpha + \sin\beta \quad = 2 \cdot \cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \cdot \sin(\frac{\alpha+\beta}{2})$

Symmetrien

Sinus	Punkt (0|0)	$\to \sin(-x) = -\sin(x)$
	Scheitelsymm.	$\to \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$
	Punkt	$\to \sin(\pi - x) = \sin(x)$
Cosinus	y-Achse	$\to \cos(-x) = \cos(x)$
	Scheitel	$\to \cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$

1.2.12 Winkel zwischen beliebigen Geraden

Zwischenwinkel: $\quad \tan(\alpha) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \to$ Winkel geg. Uhrzeiger



Senkr. Geraden: $\quad m_1 \cdot m_2 = -1$

1.3 Folgen und Reihen S.19/470

1.3.1 Spezielle Folgen und Reihen S.20

Arithmetische Folge: $a_{n+1} = a_n + d$ $\quad d = a_{n+1} - a_n$

Geometrische Folge: $a_{n+1} = q \cdot a_n$ $\quad q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Konstante Folge: $a_{n+1} = a_n$

1.3.2 Beschränktheit S.51/470 / Monotonie

Beschränktheit $W_f \subset [a;b]$ und a, b $\in \mathbb{R}$

Monotonie:

$f(x_1) \leq f(x_2)$	$x_1 < x_2$	monoton wachsend	$\uparrow$
$f(x_1) < f(x_2)$	$x_1 < x_2$	streng monoton wachsend	$\Uparrow$
$f(x_1) \geq f(x_2)$	$x_1 > x_2$	monoton fallend	$\downarrow$
$f(x_1) > f(x_2)$	$x_1 > x_2$	streng monoton fallend	$\Downarrow$

1.3.3 Konvergenz, Divergenz

Konvergenz
Es existiert ein Grenzwert g $\in \mathbb{R}$
Toleranzungleichung: $|a_n - g| < \epsilon$ mit $\epsilon > 0$
Gesucht ist ein n_0, ab welchem alle Werte von $n \geq n_0$ in $U_\epsilon(g)$ liegen

Bestimmt divergent gegen $+\infty$
Ungleichung: $f_n > K$ wenn $n \geq n_0$ für $K > 0$

Bestimmt divergent gegen $-\infty$
Ungleichung: $f_n < k$ wenn $n \geq n_0$ für $k < 0$

Unbestimmt divergent
Alles, was nicht konvergent oder bestimmt divergent ist

1.3.4 Grenzwerte gegen Unendlich

Vorgehen beim lösen von Grenzwerten
1. Naiven Ansatz ausprobieren $\rightarrow$ limit direkt bilden
2. Falls unbestimmte Form entsteht:
   Umformen gemäss folgenden Ansätzen

Arithmetik: $+, -, *, :, \sqrt{...}, |...|$
Erweiterung: erweitern mit $\frac{1}{x^n}$ n = höchste (Nenner-)Potenz
Erweiterung: erweitern mit Gegentherm (3. Binom bilden)
Tabelle: Bei Brüchen Tabelle aus Abschnitt 4.8 anschauen!

Beispiel Grenzwert n gegen Unendlich

$f(n) = \frac{-2n^2+4n-5}{8n^2-3n+7}$ $(n \rightarrow \infty)$

"Naiv": $\frac{-\infty+\infty+5}{\infty-\infty+7} \rightarrow \frac{-\infty+\infty}{\infty-\infty} \rightarrow \frac{?}{?}$

Algebra, Erweitern mit $\frac{1}{n^2}$: $f(n) = \frac{-2+\frac{4}{n}-\frac{5}{n^2}}{8-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}} (n \rightarrow \infty) = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$

1.3.5 Rechnen mit Unendlich

Bestimmte Formen

$\infty + \infty = \infty$ $\quad -\infty - \infty = -\infty$ $\quad 0 \cdot [a, b] = 0 \cdot \text{beschränkt} = 0$

$g + \infty = \infty$ $\quad g - \infty = -\infty$ $\quad (g \in \mathbb{R})$

$\infty \cdot \infty = \infty$ $\quad -\infty \cdot (\infty) = -\infty$ $\quad g \cdot \infty = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases}$

$\frac{1}{\infty} = 0$ $\quad \frac{g}{\infty} = 0$ $\quad g \in \mathbb{R}$

$\frac{\infty}{0+} = \infty$ $\quad \frac{\infty}{0-} = -\infty$ $\quad \frac{\infty}{g} = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases}$

$\frac{1}{0+} = \infty$ $\quad \frac{1}{0-} = -\infty$ $\quad g \in \mathbb{R} - 0$

$\frac{g}{0+} = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases}$ $\quad \frac{g}{0-} = \begin{cases} -\infty & g > 0 \\ \infty & g < 0 \end{cases}$

Unbestimmte Formen

$\frac{0}{0} = ?$ $\quad \frac{\infty}{\infty} = ?$ $\quad \infty \cdot 0 = ?$

$0 \cdot \infty = ?$ $\quad \infty - \infty = ?$ $\quad 0^0 = ?$

$\infty^0 = ?$ $\quad 1^\infty = ?$

Ausser 1 ist eine Konstante, dann gilt $1^\infty = 1$

1.3.6 Wachstumsvergleich

(1) $\frac{n^k}{q^n} (n \rightarrow \infty) = 0$ $(k \in \mathbb{N}; q > 1)$ $\quad \frac{\text{Potenz}}{\text{Exponentiell}} \rightarrow 0$

(2) $\frac{q^n}{n!} (n \rightarrow \infty) = 0$ $(k \in \mathbb{N}; q > 1)$ $\quad \frac{\text{Exponentiell}}{\text{Fakultät}} \rightarrow 0$

(2) $\frac{ln(n)}{n^k} (n \rightarrow \infty) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ $\quad \frac{\text{Logarithmisch}}{\text{Potenz}} \rightarrow 0$

1.3.7 Bolzano-Prinzip

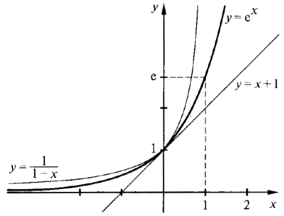
Jede beschränkte, monotone Zahlenfolge ist konvergent!

1. Monotonie beweisen
2. Beschränktheit vermuten und möglichen Grenzwert g mittels Grenzwertgleichung finden
3. Beschränktheit beweisen

3.1 a_1 ist obere/untere Schranke
3.2 Vermutete untere/obere Schranke mit voll. Induktion beweisen z.B. $a_{n+1} \leq a_n$ wobei a_{n+1} und a_n mit vermutetem Grenzwert ersetzt werden

1.3.8 Exponentialfunktion S.73

$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$



Definitions- / Wertebereich:
$D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}^+$

Einschliessung:
$e^x \geq 1 + x$ für x $\in \mathbb{R}$

$e^x \leq \frac{1}{1-x}$ für $x < 1$

1.3.9 log-Rechenregeln

$ln(a \cdot b)$	$= ln(a) + ln(b)$	$ln(\frac{a}{b})$	$= ln(a) - ln(b)$
$e^{ln(a \cdot b)}$	$= e^{ln(a)+ln(b)}$	$ln(x^r)$	$= r \cdot ln(x)$
$a \cdot b$	$= e^{ln(a)} \cdot e^{ln(b)}$		

1.3.10 Hyperbolische Funktionen S.89ff

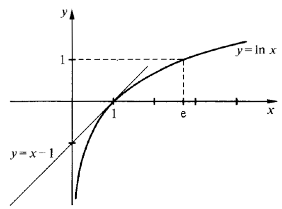
$e^x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sinh(x) + \cosh(x)$

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $\quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $\quad \mathbb{R} \rightarrow [1; \infty)$
$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})}$ $\quad \mathbb{R} \rightarrow (-1; 1)$
$|\sinh(x)| < \cosh(x)$ $\quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Area-Funktionen (Umkehrung Hyperbolische. F.)

$\text{arsinh}(x):$ $\quad ln(x + \sqrt{x^2+1})$ $\quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$\text{arcosh}(x):$ $\quad ln(x + \sqrt{x^2-1})$ $\quad [1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$
$\text{artanh}(x):$ $\quad \frac{1}{2} ln \frac{1+x}{1-x}$ $\quad |x| < 1 \rightarrow \mathbb{R}$

1.3.11 Logarithmusfunktion S.73



Definitions- / Wertebereich:
$D_f = \mathbb{R}^+ \rightarrow W_f = \mathbb{R}$

Einschliessung:

$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$

1.4 Grenzwerte von Funktionen

1.4.1 Techniken zur Berechnung von Grenzwerten

Arithmetik: $+, -, *, :, \sqrt{...}, |...|$
Erweiterung: erweitern mit $\frac{1}{x^n}$ n = höchste (Nenner-)Potenz
Erweiterung: erweitern mit Gegentherm (3. Binom bilden)
Faktorisierung: Zähler und Nenner faktorisieren und kürzen

1.4.2 Links- / Rechtsseitiger Grenzwert S.55

Eine kritische Stelle x_0 kann von links und rechts angenähert werden.

linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g^-$

rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = g^+$

$\Rightarrow$ Wenn $g^- = g^+ = g \to$ Konvergenz
$\Rightarrow$ Wenn $g^- \neq g^+ \to$ unbestimmte Divergenz

1.4.3 Konvergenz, Divergenz S.472

Konvergenz von f(x)

$x \to \infty$	Toleranzungleichung: $\lvert f(x) - g\rvert < \epsilon$	wenn $x > M(\epsilon)$
$x \to -\infty$	Toleranzungleichung: $\lvert f(x) - g\rvert < \epsilon$	wenn $x < m(\epsilon)$
$x \to x_0$	Toleranzungleichung: $\lvert f(x) - g\rvert < \epsilon$	$x \in \dot{U}_\delta(x_0)$

Bestimmte Divergenz von y = f(x)

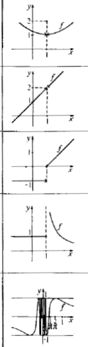
Quadrant	Kriterium	Folgerung
I	$y \to \infty$ $(x \to \infty)$	$y > K$ wenn $x > M(K)$
II	$y \to \infty$ $(x \to -\infty)$	$y > K$ wenn $x < m(K)$
III	$y \to -\infty$ $(x \to -\infty)$	$y < k$ wenn $x < m(k)$
IV	$y \to -\infty$ $(x \to \infty)$	$y < k$ wenn $x > M(k)$
	$f(x) \to \infty$	$y > K > 0$ wenn $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$
	$f(x) \to -\infty$	$y < k < 0$ wenn $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$

1.4.4 Stetigkeit S.59-63/127

Definition Stetigkeit: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Eine Funktion ist stetig, wenn der Funktionsgraph kann gezeichnet werden, ohne dass der Stift abgesetzt werden muss.

Art der Unstetigkeitsstelle	Bedingungen	Beispiel $f: x \mapsto f(x) =$	Graph von f
hebbare Unstetigkeitsstelle	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$ und $g \neq f(x_0)$	$\begin{cases} \frac{1}{4}(x-1)^2+1 & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$	
	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$ und $x_0 \notin D_f$	$\frac{x^2-1}{x-1}$	
Unstetigkeitsstelle 1. Art (Sprungstelle)	g^+ und g^- existieren in x_0, aber $g^+ \neq g^-$	$\begin{cases} x-1 & \text{für } x \geqq 1 \\ -1 & \text{für } x < 1 \end{cases}$	
Unstetigkeitsstelle 2. Art	mindestens g^+ oder g^- existieren in x_0 nicht	$\begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{für } x > 1 \\ 1 & \text{für } x \leqq 1 \end{cases}$	
	f ist für $x \uparrow x_0$ und $x \downarrow x_0$ unbestimmt divergent (Oszillationsstelle)	$\sin\frac{1}{x}$	



1.4.5 Übertragungsprinzip (Folgenprinzip)

f besitzt an der Stelle x_0 Grenzwert g, wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge $< x_n >$ gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) = g$

Beispiel

$f(x) = \frac{|x+2|}{2x+4}$ und $x_0 = -2$

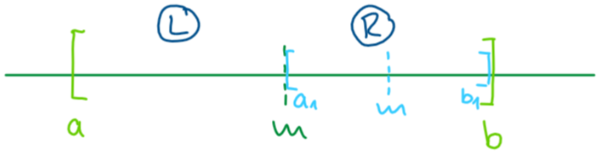
linksseitig: $x_n = x_0 - \frac{1}{n}$ für jedes x in f(x) einsetzen; Grenzwert g^- gegen ∞ bestimmen

rechtsseitig: $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$ für jedes x in f(x) einsetzen; Grenzwert g^+ gegen ∞ bestimmen

1.4.6 Nullstellen bestimmen gemäss Bolzano (Bisektion) S.12

$f(x)$ auf Intervall $[a; b]$ stetig, $f(a)$ und $f(b)$ haben versch. Vorzeichen
$\to$ Es existiert (mindestens) eine Nullstelle ξ
NS mittels Bisektion (Intervallschachtelung) näherungsweise berechnen:

(1) $I_0 = [a; b] = [a_0; b_0]$ gesamtes Intervall
(2) I_0 halbieren $\to m = \frac{a_0+b_0}{2}$
(3) Teil-Intervall mit Vorzeichenwechsel bestimmen:
links: $f(a) \cdot f(m) < 0$; rechts: $f(b) \cdot f(m) > 0$
(4) Teil-Intervall mit Vorzeichenwechsel: $I_1 = [a_1; b_1]$
(5) Schritt (2) - (4) n mal wiederholen: $I_{n+1} \in I_n$
(6) ... $\xi \in (a; b)$ mit $f(\xi) = 0$ (Nullstelle)
(7) $|\text{Error}| \leq \frac{b-a}{2^{nSchritte+1}}$



1.4.7 Spezielle Grenzwerte

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln(a)}$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{1-e^{-x}} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0+} x \cdot \ln(x) = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \frac{(a+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$ $\qquad \lim\limits_{z\to 0+} z^z = 1$

$\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin(x)} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0+} y^\beta(\ln(y))^\alpha = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}} = 0$ $(a > 1; \alpha, \beta > 0)$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \infty & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \end{cases}$

1.4.8 Asymptotenbestimmung

Asymptote einer gebrochen rationalen Funktion $f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}$ bestimmen gemäss:

	$m > n$	$m = n$	$m < n$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x)$	0	$\frac{a_n}{b_m}$	∞ oder $-\infty$
Asymptote	x-Achse	$\parallel x, g(x) = \frac{a_m}{b_n}$	ganzrat. Teil der Polynomdiv.
Konv./Div.	Konvergenz	Konvergenz	Divergenz

1.4.9 Grenzwerte von rekursiven Folgen

Anwendung des Bolzano-Prinzips! Beispiel: $a_1 = \frac{1}{4}$; $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$

1. Monotonie
beweisen mit Ansatz $a_{n+1} \geq a_n$ bzw. $a_{n+1} \leq a_n$

2. Beschränktheit
erste Schranke = erster Wert der Reihe
Zweite Schranke: Annahme, es gibt Grenzwert g und er ist sup / inf

Grenzwertgleichung: $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$ $(n \to \infty) \Rightarrow g = g^2 + \frac{1}{4}$
Gleichung nach g auflösen
$\Rightarrow$ Wenn es ein sup / inf gibt, dann ist es das berechnete $g \in \mathbb{R}$

3. Beweisen (oder widerlegen), dass g sup / inf ist
Ansatz: $a_n \leq g$ bzw. $a_n \geq g$ mit vollst. Induktion beweisen

2 Analysis 1b

2.1 Differentialrechnung S. 444 ff

Kurvenuntersuchungen S. 261 Taylor-reihe S. 455

2.1.1 Begriff der Ableitung / Differenzialquotient S. 444

Die Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 entspricht der Steigung der Tangente an $f(x)$ im Punkt x_0

Differenzenquotient: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Differenzialquotient: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad (\Delta x = h)$

2.1.2 Tangente / Normale / Zwischenwinkel

Tangente: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$

Normale: $y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + y_0$

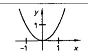
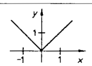
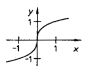
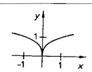
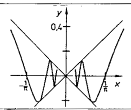
Zwischenwinkel: $tan(\alpha) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$ → Winkel gegen Uhrz.

$tan(\alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$ → Winkel im Uhrzeigersinn

2.1.3 Einseitige Ableitungen S. 445

rechtsseitig: $f'_r(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$ linksseitig: $f'_l(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$

$f'_r(x_0) = f'_l(x_0)$ → Konvergenz
Alle anderen Fälle → unbestimmte Divergenz → keine Ableitung!

	Beispiel	Graph
$f'(x_0)$ existiert	$f: x \mapsto x^2$ $f'(0) = 0$	
$f'_r(x_0)$ existiert $f'_l(x_0)$ existiert $f'_r(x_0) \neq f'_l(x_0)$	$f: x \mapsto \lvert x \rvert$ $f'_l(0) = -1$ $f'_r(0) = 1$	
An der Stelle x_0 existiert die uneigentliche Ableitung	$f: x \mapsto \sqrt[3]{x}$ $f'_l(0) = \infty$ $f'_r(0) = \infty$	
f besitzt die einseitigen uneigentlichen Ableitungen an der Stelle x_0.	$f: x \mapsto \sqrt{\lvert x \rvert}$ $f'_l(0) = -\infty$ $f'_r(0) = \infty$	
Die einseitigen und die einseitigen uneigentlichen Ableitungen existieren nicht	$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ $f'_l(0)$und $f'_r(0)$ existieren nicht	

2.1.4 Generische Muster

Allg. Potenz $(f(x)^\alpha)' = f'(x) \cdot \alpha \cdot f(x)^{\alpha-1}$

Allg. log-Regel $\ln(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Allg. exp-Regel $\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$

2.1.5 Ableitungsregeln S. 445-448

Elementare Regeln

Potenzen: $f(x) = x^3$ $\quad f'(x) = 3\,x^2$
$f(x) = x^\alpha$ $\quad f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Linearität: $f(x) = c \cdot x^2$ $\quad f'(x) = c \cdot 2\,x$

Summe: $(u(x) + v(x) - w(x))' = u'(x) + v'(x) - w'(x)$

Konstanten: c = konst → c' = 0

Produktregel
$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Quotientenregel
$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$ → als Produkt schreiben

$u(x) \cdot \left(\frac{1)}{v(x)}\right)' = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \frac{-v'(x)}{v(x)^2}$

Kettenregel
$g(f(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$

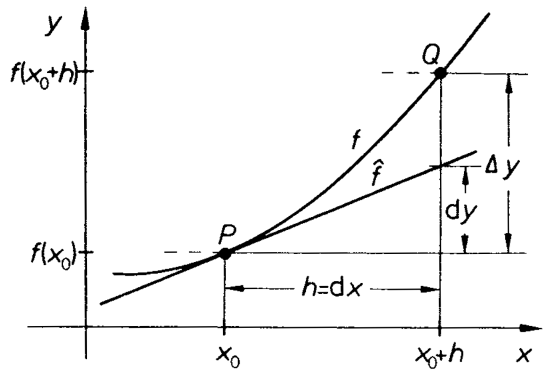
Umkehrfunktion
$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

2.1.6 Allgemeine Logarithmus-Ableitung

$(\log_b(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)}\right)' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot (\ln(x))' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}$

2.1.7 Lineare Approximation / Differenzial dy S. 459

Differenzial = dy = df = "Höhenunterschied der Tangente"
= "Linearzuwachs"
Differenzial $= f'(x_0) \cdot dx = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$



$\Delta y \approx dy$ → Approximation / Fehler
Fehler : $\Delta y - dy \to 0 \quad h \to 0$
Tangentengleichung: $\hat{f}(x) : y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
Die Tangente ist die beste lineare Approximation!

2.1.8 Approximationsfehler

Die Fehler beziehen sich auf den Arbeitspunkt (z.B. x_0)

Absoluter Fehler: $\Delta y - dy = f(x) - \hat{f}(x)$ Einheit y

Relativer Fehler: $\frac{\Delta y - dy}{y_0} = \frac{f(x) - \hat{f}(x)}{x_0}$ Einheitenlos

2.1.9 Fehlerfortpflanzung

Absolut: $\Delta x \to \Delta y$ $\quad \Delta y \approx dy = f'(x_0) \cdot dx$

Relativ: $\Delta x \to \frac{\Delta y}{y_0}$ $\quad \frac{\Delta y}{y_0} \approx \frac{dy}{y_0} = \frac{f'(x_0) \cdot dx}{y_0}$

	$\Delta x = dx$ (abs)	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{dx}{x}$ (rel)
$\Delta y \approx dy$ (abs)	A	B
$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}$ (rel)	C	D

→ Tabelle ist bidirektional (Umkehrfunktionen)

2.1.10 Wichtige Ableitungen S.446

f	D_f	f'	$D_{f'}$	f	D_f	f'	$D_{f'}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^+$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	$\frac{x}{\lvert x \rvert} = \frac{\lvert x \rvert}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\operatorname{arccot} x$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$A^1)$	$\frac{1}{\cos^2 x} =$ $1 + \tan^2 x$	$A^1)$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cosh^2 x} =$ $1 - \tanh^2 x$	$\mathbb{R}$
$\cot x$	$B^2)$	$-\frac{1}{\sin^2 x} =$ $-(1 + \cot^2 x)$	$B^2)$	$\coth x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} =$ $1 - \coth^2 x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$
$a^x,$ $a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$	$\mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arcosh} x$	$[1, \infty)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(1, \infty)$
$\ln\lvert x \rvert$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\operatorname{artanh} x$	$(-1, 1)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-1, 1)$
$\log_a x$ $a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\mathbb{R}^+$	$\operatorname{arcoth} x$	$(-\infty, -1)$ $\cup(1, \infty)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-\infty, -1)$ $\cup(1, \infty)$

2.1.11 Taylor-Reihe (Approximation höherer Ordnung)

n = Ordnung der Approximationsfunktion $p_n(x)$
$h = x - x_0$

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot h^n$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot h^k \; |h = x - x_0$$

Der Approximationsfehler $R_n(x_0, h)$ entspricht $f(x) - p_n(x)$ und wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

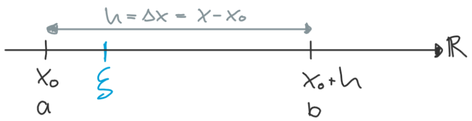
2.1.12 Fehler R_n der Taylor-Reihe

Der Fehler ist nicht klar berechenbar, sondern nur auf einem Intervall "bestimmbar" → Worst Case!
Voraussetzung: f auf Intervall [a;b] mind. (n+1) mal ableitbar

Lagrange: $|R_n| = |\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}|$

Cauchy: $|R_n| = |\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot h^{n+1} \cdot (1-\theta)^n|$

$0 < \theta < 1 \; \xi = x_0 + \theta \cdot h$
θ steuert Lage von ξ auf Intervall



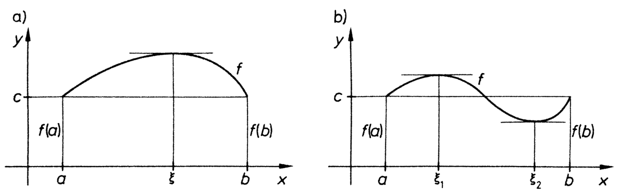
Verhalten von R_n

1)	$n \to \infty$	"Normal"	$R_n \to 0$	$\lvert h\rvert$ fix
2)	$n \to 0^+$	"Normal"	$R_n \to 0$	n fix
		$\lvert f^{n+1}(\tilde{x})\rvert < K^{n+1}$		$(K < 0, n \in \mathbb{N}_0), \tilde{x} \in (a;b)$

2.1.13 Satz von Rolle S. 454

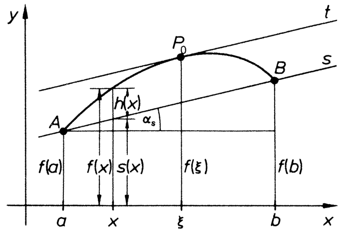
Voraussetzungen: f auf Intervall [a;b] mind. (n+1) mal ableitbar
$f(a) = f(b)$

Auf dem Intervall (a;b) existiert mindestens einmal eine horizontale Tangente : $f'(\xi) = 0$



2.1.14 Mittelwertsatz S. 454

Voraussetzungen: f auf Intervall [a;b] mind. (n+1) mal ableitbar



Sekantensteigung:
$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Tangentensteigung / Durchschnittssteigung:
$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

2.1.15 Extremalstellen S. 455-457

f: [a;b] → $\mathbb{R}$, stetig ⇒ W_f = abgeschlossenes Intervall

Absolut Extremalstelle (Randanalyse durchführen)

Absolutes Maximum: $\max(W_f)$
Absolutes Minimum $\min(W_f)$

Relative Extremalstelle

Lokales Maximum: "Berg"(nicht am Rand der Funktion)
$f(x) \leq f(x_0) \quad x \in U_\delta(x_0)$
Wechsel von ↑ zu ↓

Lokales Minimum: "Tal"(nicht am Rand der Funktion)
$f(x) \geq f(x_0) \quad x \in U_\delta(x_0)$
Wechsel von ↓ zu ↑

Terrasse: $f'(x_0) = 0$ aber kein "Berg/ "Tal"

Prinzip von Fermat S. 453

Wenn x_0 ein relatives Minimum / Maximum ist muss zwingend die Ableitung $f'(x_0) = 0$ sein → **Umkehrung gilt nicht!**
x_0 = kritische Stelle → zu prüfen auf Berg, Tal oder Terrasse

$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	$f^{(n)}(x_0)$	
0	< 0		"Berg"(Achtung auf Randstellen)
0	> 0		"Tal"(Achtung auf Randstellen)
0	0	< 0	wenn n gerade: "Berg"
0	0	> 0	wenn n gerade: "Tal"
0	0	$\neq 0$	wenn n ungerade ; Terrasse

y-Koordinate des Punktes: x_0 in f(x) einsetzen

2.1.16 Monotonie S. 453

$f'(x_0)$	
≥ 0	monoton wachsend
≤ 0	monoton fallend
> 0	streng monoton wachsend
< 0	streng monoton fallend

2.1.17 Wendepunkte (Terrassenpunkte)

Wendepunkt = Krümmungswechsel = Vorzeichenwechsel für $f''(x)$ bei x_0

$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	$f^{(n)}(x_0)$	
	0	< 0	n ungerade: links-rechts Wendestelle
	0	> 0	n ungerade: rechts-links Wendestelle
	0	$\neq 0$	n gerade: Flachpunkt

Ausserdem liegt eine WP vor wenn f'' beim Durchgang durch x_0 das Vorzeichen wechselt, also $f''(x_0) < 0$ für $x < x_0$ und für $f''(x_0) > 0$ für $x > x_0$ bzw. umgekehrt.

y-Koordinate des Punktes: x_0 in f(x) einsetzen

2.1.18 Krümmungsverhalten

Das beschriebene Verhalten gilt global für die ganze Funktion f(x) bzw. auf einem ganzen Intervall, nicht nur an einer Stelle x_0!

Linkskrümmung (konvex)

- $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
  f(x) überall grösser als Tangentensteigung an jedem Punkt
- f' ↑ Tangentialsteigung steigt kontinuierlich
- $f'' \geq 0$

Strenge Krümmung: Logik verstärkt (ausser bei Berührpunkt x_0)

Rechtskrümmung (konkav)

- $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
  f(x) überall kleiner als Tangentensteigung an jedem Punkt
- f' ↓ Tangentialsteigung sinkt kontinuierlich
- $f'' \leq 0$

Strenge Krümmung: Logik verstärkt (ausser bei Berührpunkt x_0)

2.1.19 Bernoulli-Hôpital S. 57-58

B.H. I
$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad (x \to x_0) \quad \frac{0}{0}$

Wenn $\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$ eine bestimmte Form ist, dann ist dies das Resultat von $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

B.H. II
$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad (x \to x_0) \quad \frac{\infty}{\infty}$

Wenn $\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$ eine bestimmte Form ist, dann ist dies das Resultat von $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

Bernoulli-Hôpital darf auch mehrfach nacheinander verwendet werden → immer erst algebraisch verienfachen!

2.1.20 Unbestimmte Formen zu Bernoulli-Formen

$f \cdot g$ vom Typ $(0^+) \cdot \infty$ — $\frac{f}{1/g}$ von Typ $\frac{0}{0}$
$\frac{1/f}{g}$ von Typ $\frac{\infty}{\infty}$

$f - g$ von Typ $\infty - \infty$ — $\frac{1/g - 1/f}{1/fg}$ von Typ $\frac{0}{0}$

f^g als $(0+)^0$; ∞^0; 1^∞ — $f^g = e^{g \cdot \ln(f)}$ wobei $g \cdot \ln(f)$ von Typ $(0+) \cdot \infty$ bzw. $\infty \cdot 0$

Vorzeichen auskl.: $(0-) \cdot \infty = -(0+) \cdot \infty$
$(0+)^{0-} = \frac{1}{(0+)^{0+}}$ oder $1^{-\infty} = \frac{1}{1^\infty}$

2.1.21 Optimierungsprobleme

1. Problem durch eine Funktion f mit ultimativer Varibalen x ausdrücken $\to f(x)$
2. Fermat anwenden: $f'(x) = 0$
3. gefundene kritische Stellen auf Maximum / Minumum prüfen

3.1 Logik Randanalyse: x links und rechts über Rand des Intervalls hinaus gehen lassen (z.B. nach $\pm\infty$) und Berg / Tal durch Logik entscheiden

3.2 Monotoniewechsel bei x_0 ausnützen: Wert $> x_0$ und $< x_0$ einsetzen

3.3 Taylor-Theorie: Vorzeichen der zweiten Ableitung gemäss Abschnitt 1.15.3

2.1.22 Asymptote bestimmen

Asymptotengerade: $y = mx + q$ $\quad$ m und q sind gesucht

Steigung: $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

Achsenabschnitt: $q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$
$\to$ berechnetes m einsetzen!

2.2 Integralrechnung S.493

2.2.1 Obersumme / Untersumme

Die Fläche unter einer Funktion f(x) wird in Intervalle zerlegt.
Voraussetzung: $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ **und** $\mathbb{W}_f$ **beschränkt**

Zerlegung: $Z = \{x_0; x_1; ...; x_n\} = \{x_i \,|i = 0; ...; n\}$ $\quad (n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$

Breite(n) der Intervalle: $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $\quad \Delta x$ kann variieren!

Machsenweite: $\max(\Delta x_i) = d(Z)$

Äquidistante Zerlegung: $Z = \{a + \frac{b-a}{n} \cdot i \,|i = 0; ...; n\}$

Untersumme $\underline{US}$

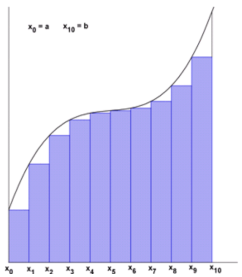
$$\text{US} = \sum_{i=0}^{n-1} \underline{m_i} \cdot \Delta x_i$$

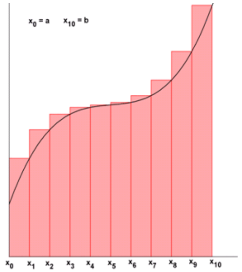
$$\underline{m_i} = \inf\{f(x) \,|x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$$

Obersumme $\overline{OS}$

$$\text{OS} = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{M_i} \cdot \Delta x_i$$

$$\overline{M_i} = \sup\{f(x) \,|x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$$





Unter-Integral

$\underline{I} = \lim_{d(Z)\to 0} \underline{US}$ $\quad \infty \cdot 0$

$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Ober-Integral

$\overline{I} = \lim_{d(Z)\to 0} \overline{OS}$ $\quad \infty \cdot 0$

$\overline{I} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

2.2.2 Riemann-Summe S.506-507

$\text{RS} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi)\Delta x_i \quad d(Z) \to 0 \quad \int_a^b f(x)\,dx$

$\xi \in [x_i; x_{i+1}]$

2.2.3 Riemann-Integral S.507

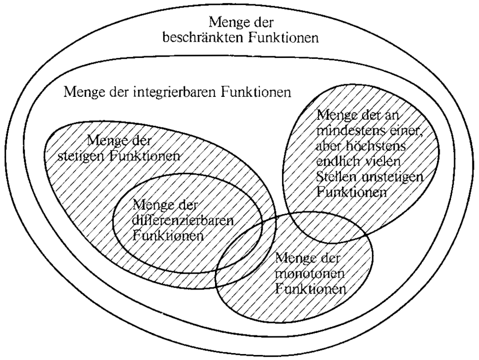
$\text{I} = \underline{I} = \overline{I}$ wenn $\underline{I} = \overline{I}$

Notation: $\int_a^b f(x)\,dx$

a, b	Integrationsgrenzen
$f(x)$	Integrand

2.2.4 Integrierbare Funktionen

Hinreichendes Kriterium: $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ **und** $\mathbb{W}_f$ **beschränkt**



2.2.5 Integrationsregeln S. 494-496

Linearität: $\int_a^b \alpha\, f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

Rechenregeln mit Integralen S. 508-510

Zerlegung: $\int_a^b f_1(x)\,dx + f_2(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$

$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

Grenzen tauschen: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Gleiche Grenzen: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2.2.6 Wichtige Integrale S. 495

$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$ $\qquad$ $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

$\int_a^b 1\,dx = b - a$ (Rechteck)

2.2.7 Flächen unter Integralen

Voraussetzung: $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ **und** $\mathbb{W}_f$ **beschränkt**

Fläche $A = \int_a^b |f(x)|\,dx$

Der Inhalt des Betrags muss auf Vorzeichen untersucht werden!
Negative Vorzeichen müssen über die x-Achse geklappt werden:
$|x^2 - x| = -(x^2 - x)$ falls $x > x^2$

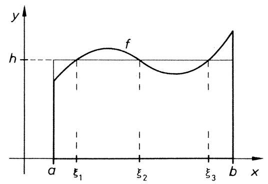
2.2.8 Mittelwert einer Funktion S. 510

Funktion aufgeteilt in n äquidistante Intervalle $\to \Delta x = \frac{b-a}{n}$

Mittelwert: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$

2.2.9 Mittelwertsatz S. 510

Voraussetzung: $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ **und** $\mathbb{W}_f$ **beschränkt und stetig**
Die Fläche unter der Funktion $f(x)$ kann an mind. einem Punkt ξ als Rechteck dargestellt werden.
$\xi \in (a; b)$



Fläche = Mittelwert $\cdot$ Intervall-Länge

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)$

$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) \cdot f(\xi)$

$(b - a) \cdot h = (b - a) \cdot f(\xi)$

2.2.10 Integralfunktion I(x)

Voraussetzung: $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ **und integrierbar**

I(x) besitzt eine feste untere Grenze c = const (Anker) und eine variable obere Grenze x (Hauptvariable) $x \in$[a;b] $c \in$[a;b]

Notation: $I(\tilde{x}) = \int\limits_c^x f(\tilde{x})d\tilde{x}$ $\tilde{x}$ ist die Integrationsvariable

Eigenschaften der Integralfunktion
Die Integralfunktion hat beim Anker c eine Nullstelle:

$$I(c) = \int\limits_c^c f(\tilde{x})\,d\tilde{x} = 0$$

I(x) berührt/schneidet die x-Achse in [a;b] beim Anker
$\to$ I(c) = 0

Das Verschieben des Ankers bewirkt eine Parallelverschiebung von I(x)

I(x) ist immer stetig! (Integration behebt Sprungstellen)
I(x) ist ableitbar, wenn die Originalfunktion f(x) stetig ist

Ableitung $I'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int\limits_c^x f(\tilde{x})\,d\tilde{x}\right) = f(x)$ "Kreislauf"

Integral $I(x)$ $\xrightarrow{\text{differenzieren}}$ $f(x)$

Integral $I(x)$ $\xleftarrow{\text{integrieren}}$ $f(x)$

Beispiel Integralfunktion bestimmen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 0.75 \\ -0.5, & 0.75 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$I(x) = \begin{cases} \int\limits_{c=0}^{x} 1\,d\tilde{x} = x \\ \\ \int\limits_{c=0}^{0.75} 1\,d\tilde{x} + \int\limits_{0.75}^{x} (-0.5)\,d\tilde{x} = 0.75 + (-0.5)(x - 0.75) \end{cases}$$

Wichtig: Bei Funktionen mit Sprungstellen immer beim Anker beginnen, wenn nichts spezielles verlangt ist

2.2.11 Stammfunktion F

Eine Funktion $F(x)$ heisst Stammfunktion von $f(x)$ wenn gilt:
F'(x) = f(x)

$F(x) + C$ sind ebenfalls Stammfunktionen von $f(x)$
$C \in \mathbb{R}$ C ist eine freie Verschiebungszahl

Stammfunktionen F sind Teilmenge der unbestimmten Integrale

$\Rightarrow$ Ableitungstabelle rückwärts lesen für Stammfunktion!

2.2.12 Unbestimmtes Integral

$I(x) + C = \int f(\tilde{x})\,d\tilde{x}$ $C \in \mathbb{R}$

Wenn $f(x)$ stetig ist, dann entspricht das unbestimmte Integral der Stammfunktion

2.2.13 Hauptsatz der Integration S. 507

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b$$

2.2.14 Wachstumsvergleiche

(1)	$\frac{n^k}{q^n}(n \to \infty) = 0$	(k $\in \mathbb{N}; q > 1$)	$\frac{\text{Potenz}}{\text{Exponentiell}} \to 0$
(2)	$\frac{q^n}{n!}(n \to \infty) = 0$	$(q > 1)$	$\frac{\text{Exponentiell}}{\text{Fakultät}} \to 0$
(3)	$\frac{\ln(n)}{n^k}(n \to \infty) = 0$	(k $\in \mathbb{N}$)	$\frac{\text{Logarithmisch}}{\text{Potenz}} \to 0$
(4)	$\frac{\ln(n)}{n}(n \to \infty) = 0$		$\frac{\text{Logarithmisch}}{\text{Linear}} \to 0$