

Analysis

Sammlung gegliedert nach Modul

Fabian Suter, 10. November 2023

<https://github.com/FabianSuter/Analysis.git>

1 Analysis 1a

1.1 Reelle Zahlen

\mathbb{N}	$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$	ganze Zahlen
\mathbb{N}_0	$\{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$	ganze Zahlen inkl. 0
\mathbb{Z}	$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3\} \cup \{0\}$	natürliche Zahlen
\mathbb{Q}	$\{\frac{p}{q} p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$	rationale Zahlen
\mathbb{R}		ergänzt \mathbb{Q} durch irr. Zahlen wie $\sqrt{2}$, reelle Zahlen
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$		Irrationale Zahlen

1.1.1 Supremum und Infimum

$\sup(X)$	kleinste obere Schranke Maximum ist immer auch Supremum
$\inf(X)$	grösste untere Schranke Minimum ist immer auch Infimum

1.1.2 Binomischer Satz / Binomialkoeffizient

Pascal-Dreieck berechnen:	$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$
$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$	$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = 0$ wenn $k < 0$ oder $k > n$
$\binom{n}{0} = 1$	$\binom{n}{n} = 1$

1.1.3 Umgebung

Jedes offene Intervall, dass die Zahl a enthält, heisst eine Umgebung von a $U(a)$

Es sei $\epsilon > 0$. Unter der ϵ -Umgebung von a versteht man das offene Intervall $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ $U_\epsilon(a)$

Eine ϵ -Umgebung von a ohne die Zahl a selbst wird punktierte ϵ -Umgebung von a genannt $\dot{U}_\epsilon(a) = U_\epsilon(a) \setminus a$

1.1.4 Spezielle endliche Reihen

arithmetisch: $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

geometrisch: $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

1.1.5 Mittelwerte

Harmonisches Mittel (HM): $\frac{1}{\frac{1}{n}(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n})}$

Geometrisches Mittel (GM): $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

Arithmetisches Mittel (AM): $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

1.1.6 Spezielle Ungleichungen

Bernoulli-Ungleichung: $(1+a)^n > 1 + n \cdot a$
für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a \in \mathbb{R}, a > -1, a \neq 0$

Binomische Ungleichung: $|a \cdot b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

Mittelungleichung: $HM \leq GM \leq AM$

Gleichheit: $HM = GM = AM$
für $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

Dreiecksungleichungen: $|a+b| \leq |a| + |b|$
 $|a-b| \leq |a| + |b|$
 $|a-b| \geq ||a| - |b||$

1.1.7 Vollständige Induktion

Verankerung VA: Beweise Formel für a_0

Vererbung VE: (1) Annahme: Formel gilt für a_n
↓
(2) Schritt: Formel gilt auch für a_{n+1}

Mittels Berechnung soll bewiesen werden, dass (2) ebenso gilt wie (1)

Beispiel:

(VA) $\sum_{i=1}^1 i = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

(VE) (1) $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

(VE) (2) $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

1.2 Funktionen

Schreibweisen:
 $f: D_f \rightarrow W_f$ mit $x \mapsto f(x)$
 $f: x \mapsto f(x)$ mit $x \in D_f$
 $y = f(x)$ mit $x \in D_f$

Monoton wachsend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
Monoton sinkend: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
Monoton streng ...: Siehe oben, jedoch immer $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$
Beschränktheit: Funktion besitzt obere oder untere Grenze, meist in \mathbb{R}
Umkehrbarkeit: Streng monotone Funktionen sind umkehrbar, pro x ein y
Restriktion: Nur einen Teil von D_f betrachten
 \Rightarrow Umkehrbarkeit

1.2.1 Transformationen

1. Streckung um $\mathbf{1/a}$ in x-Richtung $y = f(a \cdot x)$
Spiegelung an y-Achse bei $-\mathbf{a}$
2. Verschiebung nach links ($+\mathbf{b}$) oder rechts ($-\mathbf{b}$) $y = f(x \pm b)$
3. Streckung um \mathbf{c} in y-Richtung $y = c \cdot f(x)$
Spiegelung an x-Achse bei $-\mathbf{c}$
4. Verschiebung nach oben ($+\mathbf{d}$) oder unten ($-\mathbf{d}$) $y = f(x) \pm d$

1.2.2 Spezielle Funktionen

Identität:

$f(x) = x$ y-Wert ist gleich dem x-Wert

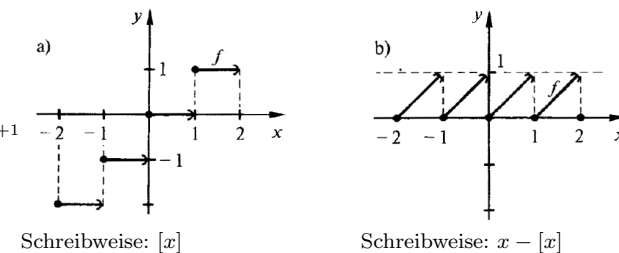
Signum-Funktion:

Vorzeichenfunktion $f(x) = \text{sgn}(x)$

$$y = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Floor-Funktion:

Abrunden auf nächste ganze Zahl



1.2.3 Schwingungen

Sinus-Schwingung: $y = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$

A Amplitude ω Frequenz $\frac{2\pi}{\text{sec}}$ ϕ Phase

Superposition von Schwingungen

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = A_1 + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

1.2.4 Verkettung oder mittelbare Funktion

g nach f:
 $h(x) = g \circ f \Rightarrow h(x) = g(f(x)) \quad W_h = W_g \rightarrow D_h = D_f$

f nach g:
 $h(x) = f \circ g \Rightarrow h(x) = f(g(x)) \quad W_h = W_f \rightarrow D_h = D_g$

1.2.5 Gerade / ungerade Funktionen

gerade: $f(-x) = f(x)$ symmetrisch zu y-Achse
 ungerade: $f(-x) = -f(x)$ punktsymmetrisch
 periodisch: $f(x) = f(x \pm p)$ wiederholend mit Periode p

1.2.6 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

Aussehen: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Nullstellen bestimmen:

Quadratische Funktion: $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Faktorisierung mit Binomen / Horner Schema

Eine Funktion vom Grad n hat höchstens n verschiedene Nullstellen!

1.2.7 Gebrochenrationale Funktionen

Aussehen: $f(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$

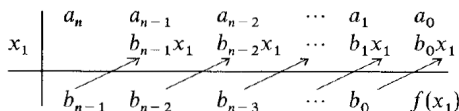
m Zählergrad
 n Nennergrad
 $m < n$ echt gebrochen
 $m = n$ gleichgradig
 $m > n$ unecht gebrochen

Jede unecht gebrochene Funktion lässt sich als Summe einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenen Funktion schreiben.
 \Rightarrow Polynomdivision

1.2.8 Horner Schema

Zerlegt eine ganzrationale Funktion vom Grad n in einen Linearfaktor (Nullstelle) und ein Polynom vom Grad n-1

1. Nullstelle x_0 raten
2. Von oben nach unten summieren
3. Diagonal nach rechts mit x_0 multiplizieren



Beispiel:

$$\begin{array}{r|rrrr} x_1 = -2 & 1 & 0 & -67 & -126 \\ & & -2 & 4 & +126 \\ \hline & 1 & -2 & -63 & 0 = f(-2) \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & b_2 & b_1 & b_0 & \end{array}$$

$$f(x) = x^3 - 67x - 126 \\ \Rightarrow f(x) = (x - x_1)(b_2 x^2 + b_1 x + b_0) = (x + 2)(x^2 - 2x - 63)$$

1.2.9 Polynomdivision

Liefert Summe aus ganzrationaler Funktion und echt gebrochener Funktion

Beispiel:

$$\begin{array}{r} (-2x^2 - x - 1) : (x - 1) = -2x - 3 + \frac{-4}{x - 1} \\ \underline{2x^2 - 2x} \\ -3x - 1 \\ \underline{3x - 3} \\ -4 \end{array}$$

1.2.10 Partialbruchzerlegung

- (1) echt gebrochen ($m < n$)
 Ja: \rightarrow (2)
 Nein: \rightarrow Polynomdivision
- (2) Nenner faktorisieren
 pro Faktor ein Teilbruch
- (3) Berechnung Zählerkonstanten
 - (3.1) Gleichnamig machen (kgV)
 - (3.2) Zählergleichung
 - (3.3) Einsetzen von "guten" x-Werten

Beispiel PBZ

- (1) $f(x) = \frac{1}{a^2 - x^2}$
- (2) $a^2 - x^2 = (a + x)(a - x)$
- (3) $\frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x} = \frac{1}{a^2 - x^2}$
 - (3.1) $\frac{A(a-x) + B(a+x)}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a^2 - x^2}$
 - (3.2) $A(a-x) + B(a+x) = 1$
 - (3.3) $x = a \Rightarrow B(2a) = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2a}$
 $x = -a \Rightarrow A(2a) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2a}$

Spezielle Ansätze PBZ

$$f(x) = \frac{5x^2 - 37x + 54}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx}{x(x-3)^2}$$

$$f(x) = \frac{1,5x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}$$

$$= \frac{A(x-2)^2 + B(x-2) + C}{(x-2)^3}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - 2x - 12} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2 + 4x + 6}$$

$$= \frac{A(x^2 + 4x + 6) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2 + 4x + 6)}$$

1.2.11 Trigonometrie, Arcus

$$\begin{array}{lll} \sin(x): & D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow W_f = [-1, 1] \\ \cos(x): & D_f = [0, \pi] & \rightarrow W_f = [-1, 1] \\ \tan(x): & D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) & \rightarrow W_f = \mathbb{R} \\ \cot(x): & D_f = (0, \pi) & \rightarrow W_f = \mathbb{R} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \arcsin(x): & D_f = [-1, 1] & \rightarrow W_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \arccos(x): & D_f = [-1, 1] & \rightarrow W_f = [0, \pi] \\ \arctan(x): & D_f = \mathbb{R} & \rightarrow W_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \text{arccot}(x): & D_f = [-1, 1] & \rightarrow W_f = (0, \pi) \end{array}$$

Umwandlung $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x) \quad \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$

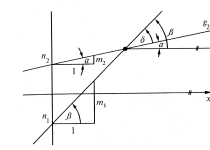
Sinus Punkt (0|0) $\rightarrow \sin(-x) = -\sin(x)$
 Scheitelsymm. $\rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$
 Punkt $\rightarrow \sin(\pi - x) = \sin(x)$

Symmetrien

Cosinus y-Achse $\rightarrow \cos(-x) = \cos(x)$
 Scheitel $\rightarrow \cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$

1.2.12 Winkel zwischen beliebigen Geraden

Zwischenwinkel: $\tan(\alpha) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \rightarrow$ Winkel geg. Uhrzeiger



Senkr. Geraden: $m_1 \cdot m_2 = -1$

1.3 Folgen und Reihen

1.3.1 Spezielle Folgen und Reihen

Arithmetische Folge: $a_{n+1} = a_n + d \quad d = a_{n+1} - a_n$

Geometrische Folge: $a_{n+1} = q \cdot a_n \quad q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Konstante Folge: $a_{n+1} = a_n$

1.3.2 Beschränktheit / Monotonie

Beschränktheit $W_f \subset [a; b]$ und $a, b \in \mathbb{R}$

Monotonie:

$f(x_1) \leq f(x_2)$	$x_1 < x_2$	monoton wachsend	\uparrow
$f(x_1) < f(x_2)$	$x_1 < x_2$	streng monoton wachsend	$\uparrow\uparrow$
$f(x_1) \geq f(x_2)$	$x_1 > x_2$	monoton fallend	\downarrow
$f(x_1) > f(x_2)$	$x_1 > x_2$	streng monoton fallend	$\downarrow\downarrow$

1.3.3 Konvergenz, Divergenz

Konvergenz

Es existiert ein Grenzwert $g \in \mathbb{R}$

Toleranzungleichung: $|a_n - g| < \epsilon$ mit $\epsilon > 0$

Gesucht ist ein n_0 , ab welchem alle Werte von $n \geq n_0$ in $U_\epsilon(g)$ liegen

Bestimmt divergent gegen $+\infty$

Ungleichung: $f_n > K$ wenn $n \geq n_0$ für $K > 0$

Bestimmt divergent gegen $-\infty$

Ungleichung: $f_n < k$ wenn $n \geq n_0$ für $k < 0$

Unbestimmt divergent

Alles, was nicht konvergent oder bestimmt divergent ist

1.3.4 Grenzwerte gegen Unendlich

Vorgehen beim lösen von Grenzwerten

1. Naiven Ansatz ausprobieren \rightarrow limit direkt bilden
2. Falls unbestimmte Form entsteht:
Umformen gemäss folgenden Ansätzen

Arithmetik: $+, -, *, :, \sqrt{\dots}, |\dots|$

Erweiterung: erweitern mit $\frac{1}{x^n}$ $n =$ höchste (Nenner-)Potenz

Erweiterung: erweitern mit Gegenterm (3. Binom bilden)

Tabelle: Bei Brüchen Tabelle aus Abschnitt 4.8 anschauen!

Beispiel Grenzwert n gegen Unendlich

$$f(n) = \frac{-2n^2 + 4n - 5}{8n^2 - 3n + 7} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{"Naiv": } \frac{-\infty + \infty + 5}{\infty - \infty + 7} \rightarrow \frac{-\infty + \infty}{\infty - \infty} \rightarrow ?$$

$$\text{Algebra, Erweitern mit } \frac{1}{n^2}: f(n) = \frac{-2 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}}{8 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}} \quad (n \rightarrow \infty) = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

1.3.5 Rechnen mit Unendlich

Bestimmte Formen

$$\infty + \infty = \infty \quad -\infty - \infty = -\infty \quad 0 \cdot [a, b] = 0 \cdot \text{beschränkt} = 0$$

$$g + \infty = \infty \quad g - \infty = -\infty \quad (g \in \mathbb{R})$$

$$\infty \cdot \infty = \infty \quad -\infty \cdot (\infty) = -\infty \quad g \cdot \infty = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\infty} = 0 \quad \frac{g}{\infty} = 0 \quad g \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\infty}{0+} = \infty \quad \frac{\infty}{0-} = -\infty \quad \frac{\infty}{g} = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{0+} = \infty \quad \frac{1}{0-} = -\infty \quad g \in \mathbb{R} - 0$$

$$\frac{g}{0+} = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases} \quad \frac{g}{0-} = \begin{cases} -\infty & g > 0 \\ \infty & g < 0 \end{cases}$$

Unbestimmte Formen

$$\frac{0}{0} = ? \quad \frac{\infty}{\infty} = ? \quad \infty \cdot 0 = ?$$

$$0 \cdot \infty = ? \quad \infty - \infty = ? \quad 0^0 = ?$$

$$\infty^0 = ? \quad 1^\infty = ?$$

Ausser 1 ist eine Konstante, dann gilt $1^\infty = 1$

1.3.6 Wachstumsvergleich

$$(1) \quad \frac{n^k}{q^n} (n \rightarrow \infty) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}; q > 1) \quad \frac{\text{Potenz}}{\text{Exponentiell}} \rightarrow 0$$

$$(2) \quad \frac{q^n}{n!} (n \rightarrow \infty) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}; q > 1) \quad \frac{\text{Exponentiell}}{\text{Fakultät}} \rightarrow 0$$

$$(2) \quad \frac{\ln(n)}{n^k} (n \rightarrow \infty) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \frac{\text{Logarithmisch}}{\text{Potenz}} \rightarrow 0$$

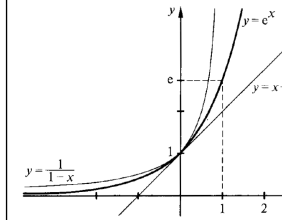
1.3.7 Bolzano-Prinzip

Jede beschränkte, monotone Zahlenfolge ist konvergent!

1. Monotonie beweisen
2. Beschränktheit vermuten und möglichen Grenzwert g mittels Grenzwertgleichung finden
3. Beschränktheit beweisen
 - 3.1 a_1 ist obere/untere Schranke
 - 3.2 Vermutete untere/obere Schranke mit voll. Induktion beweisen
z.B. $a_{n+1} \leq a_n$ wobei a_{n+1} und a_n mit vermutetem Grenzwert ersetzt werden

1.3.8 Exponentialfunktion

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$



Definitions- / Wertebereich:
 $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}^+$

Einschlussung:

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$e^x \leq \frac{1}{1-x} \quad \text{für } x < 1$$

1.3.9 Hyperbolische Funktionen

$$e^x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sinh(x) + \cosh(x)$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \mathbb{R} \rightarrow [1; \infty)$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})} \quad \mathbb{R} \rightarrow (-1; 1)$$

$$|\sinh(x)| < \cosh(x)$$

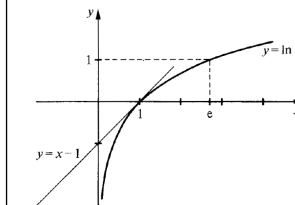
Area-Funktionen (Umkehrung Hyperbolische. F.)

$$\operatorname{arsinh}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcosh}(x) : [1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$\operatorname{artanh}(x) : |x| < 1 \rightarrow \mathbb{R}$$

1.3.10 Logarithmusfunktion



Definitions- / Wertebereich:
 $D_f = \mathbb{R}^+ \rightarrow W_f = \mathbb{R}$

Einschlussung:

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$

1.4 Grenzwerte von Funktionen

1.4.1 Techniken zur Berechnung von Grenzwerten

Arithmetik: $+, -, *, :, \sqrt{\dots}, |\dots|$
 Erweiterung: erweitern mit $\frac{1}{x^n}$ $n =$ höchste (Nenner-)Potenz
 Erweiterung: erweitern mit Gegenterm (3. Binom bilden)
 Faktorisierung: Zähler und Nenner faktorisieren und kürzen
Trigo: Bronstein S. 57 1. C beachten

1.4.2 Links- / Rechtsseitiger Grenzwert

Eine kritische Stelle x_0 kann von links und rechts angenähert werden.

$$\text{linksseitiger Grenzwert: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g^-$$

$$\text{rechtsseitiger Grenzwert: } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g^+$$

\Rightarrow Wenn $g^- = g^+ = g \rightarrow$ Konvergenz

\Rightarrow Wenn $g^- \neq g^+ \rightarrow$ unbestimmte Divergenz

1.4.3 Konvergenz, Divergenz

Konvergenz von $f(x)$

$x \rightarrow \infty$ Toleranzungleichung: $|f(x) - g| < \epsilon$ wenn $x > M(\epsilon)$
 $x \rightarrow -\infty$ Toleranzungleichung: $|f(x) - g| < \epsilon$ wenn $x < m(\epsilon)$

$x \rightarrow x_0$ Toleranzungleichung: $|f(x) - g| < \epsilon$ $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$

Bestimmte Divergenz von $y = f(x)$

Quadrant	Kriterium	Folgerung
I	$y \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$)	$y > K$ wenn $x > M(K)$
II	$y \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow -\infty$)	$y > K$ wenn $x < m(K)$
III	$y \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow -\infty$)	$y < k$ wenn $x < m(k)$
IV	$y \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow \infty$)	$y < k$ wenn $x > M(k)$
	$f(x) \rightarrow \infty$	$y > K > 0$ wenn $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$
	$f(x) \rightarrow -\infty$	$y < k < 0$ wenn $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$

1.4.4 Stetigkeit

Definition Stetigkeit: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Eine Funktion ist stetig, wenn der Funktionsgraph kann gezeichnet werden, ohne dass der Stift abgesetzt werden muss.

Art der Unstetigkeitsstelle	Bedingungen	Beispiel $f: x \mapsto f(x) =$	Graph von f
hebbare Unstetigkeitsstelle	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ und $g \neq f(x_0)$	$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1 & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$	
	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ und $x_0 \notin D_f$	$\frac{x^2 - 1}{x - 1}$	
Unstetigkeitsstelle 1. Art (Sprungstelle)	g^+ und g^- existieren in x_0 , aber $g^+ \neq g^-$	$\begin{cases} x - 1 & \text{für } x \geq 1 \\ -1 & \text{für } x < 1 \end{cases}$	
Unstetigkeitsstelle 2. Art	mindestens g^+ oder g^- existieren in x_0 nicht	$\begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{für } x > 1 \\ 1 & \text{für } x \leq 1 \end{cases}$	
	f ist für $x \uparrow x_0$ und $x \downarrow x_0$ unbestimmt divergent (Oszillationsstelle)	$\sin \frac{1}{x}$	

1.4.5 Übertragungsprinzip (Folgenprinzip)

f besitzt an der Stelle x_0 Grenzwert g , wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge $\langle x_n \rangle$ gilt: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = g$

Beispiel

$f(x) = \frac{|x+2|}{2x+4}$ und $x_0 = -2$

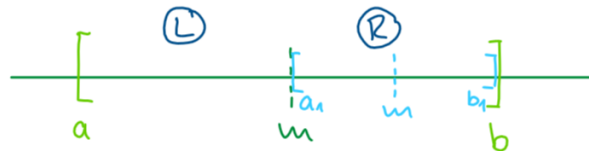
linksseitig: $x_n = x_0 - \frac{1}{n}$ für jedes x in $f(x)$ einsetzen;
Grenzwert g^- gegen ∞ bestimmen

rechtsseitig: $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$ für jedes x in $f(x)$ einsetzen;
Grenzwert g^+ gegen ∞ bestimmen

1.4.6 Nullstellen bestimmen gemäss Bolzano

$f(x)$ auf Intervall $[a; b]$ stetig, $f(a)$ und $f(b)$ haben versch. Vorzeichen
 \rightarrow Es existiert (mindestens) eine Nullstelle ξ
 NS mittels Bisektion (Intervallschachtelung) näherungsweise berechnen:

- (1) $I_0 = [a; b] = [a_0; b_0]$ gesamtes Intervall
- (2) I_0 halbieren $\rightarrow m = \frac{a_0 + b_0}{2}$
- (3) Teil-Intervall mit Vorzeichenwechsel bestimmen:
links: $f(a) \cdot f(m) < 0$; rechts: $f(b) \cdot f(m) > 0$
- (4) Teil-Intervall mit Vorzeichenwechsel: $I_1 = [a_1; b_1]$
- (5) Schritt (2) - (4) n mal wiederholen: $I_{n+1} \in I_n$
- (6) ... $\xi \in (a; b)$ mit $f(\xi) = 0$ (Nullstelle)
- (7) $|\text{Error}| \leq \frac{b-a}{2^n \text{Schritte} + 1}$



1.4.7 Spezielle Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} &= 1 & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x &= e^a & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} &= \frac{1}{\ln(a)} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-e^{-x}} &= 1 & \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} &= 0 & \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) &= 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln(a) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^\alpha - 1}{x} &= \alpha & \lim_{x \rightarrow 0^+} z^z &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin(x)} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0^+} y^\beta (\ln(y))^\alpha &= 0 & & \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^\beta x} &= 0 \quad (a > 1; \alpha, \beta > 0) & \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k &= \begin{cases} \infty & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

1.4.8 Asymptotenbestimmung

Asymptote einer gebrochen rationalen Funktion $f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$
 bestimmen gemäss:

	$m > n$	$m = n$	$m < n$
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} r(x)$	0	$\frac{a_n}{b_m}$	∞ oder $-\infty$
Asymptote	x-Achse	$\parallel x, g(x) = \frac{a_m}{b_n}$	ganzrat. Teil der Polynomdiv.
Konv./Div.	Konvergenz	Konvergenz	Divergenz

1.4.9 Grenzwerte von rekursiven Folgen

Anwendung des Bolzano-Prinzips! Beispiel: $a_1 = \frac{1}{4}$; $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$

1. Monotonie
beweisen mit Ansatz $a_{n+1} \geq a_n$ bzw. $a_{n+1} \leq a_n$
2. Beschränktheit
erste Schranke = erster Wert der Reihe
Zweite Schranke: Annahme, es gibt Grenzwert g und er ist sup / inf

Grenzwertgleichung: $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$ ($n \rightarrow \infty$) $\Rightarrow g = g^2 + \frac{1}{4}$
 Gleichung nach g auflösen
 \Rightarrow Wenn es ein sup / inf gibt, dann ist es das berechnete $g \in \mathbb{R}$

3. Beweisen (oder widerlegen), dass g sup / inf ist
Ansatz: $a_n \leq g$ bzw. $a_n \geq g$ mit vollst. Induktion beweisen

2 Differentialrechnung S. 444 ff

Kurvenuntersuchungen S. 261 Taylor-reihe S. 455

2.1 Begriff der Ableitung / Differenzialquotient S. 444

Die Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 entspricht der Steigung der Tangente an $f(x)$ im Punkt x_0

$$\text{Differenzenquotient: } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\text{Differenzialquotient: } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad (\Delta x = h)$$

2.2 Tangente / Normale / Zwischenwinkel

$$\text{Tangente: } y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$$

$$\text{Normale: } y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + y_0$$

$$\text{Zwischenwinkel: } \tan(\alpha) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \rightarrow \text{Winkel gegen Uhrz.}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \rightarrow \text{Winkel im Uhrzeigersinn}$$

2.3 Einseitige Ableitungen S. 445

$$\text{rechtsseitig: } f'_r(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \quad \text{linksseitig: } f'_l(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$$

$f'_r(x_0) = f'_l(x_0) \rightarrow$ Konvergenz
Alle anderen Fälle \rightarrow unbestimmte Divergenz \rightarrow keine Ableitung!

	Beispiel	Graph
$f'(x_0)$ existiert	$f: x \mapsto x^2$ $f'(0) = 0$	
$f'_r(x_0)$ existiert $f'_l(x_0)$ existiert $f'_r(x_0) \neq f'_l(x_0)$	$f: x \mapsto x $ $f'_l(0) = -1$ $f'_r(0) = 1$	
An der Stelle x_0 existiert die uneigentliche Ableitung	$f: x \mapsto \sqrt[3]{x}$ $f'_l(0) = \infty$ $f'_r(0) = \infty$	
f besitzt die einseitigen uneigentlichen Ableitungen an der Stelle x_0 .	$f: x \mapsto \sqrt{ x }$ $f'_l(0) = -\infty$ $f'_r(0) = \infty$	
Die einseitigen und die einseitigen uneigentlichen Ableitungen existieren nicht	$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ $f'_l(0)$ und $f'_r(0)$ existieren nicht	

2.4 Generische Muster

$$\text{Allg. Potenz} \quad (f(x)^\alpha)' = f'(x) \cdot \alpha \cdot f(x)^{\alpha-1}$$

$$\text{Allg. log-Regel} \quad \ln(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\text{Allg. exp-Regel} \quad (e^{f(x)})' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$$

2.5 Ableitungsregeln S. 445-448

2.5.1 Elementare Regeln

$$\text{Potenzen: } \begin{aligned} f(x) &= x^3 & f'(x) &= 3x^2 \\ f(x) &= x^\alpha & f'(x) &= \alpha \cdot x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

$$\text{Linearität: } \begin{aligned} f(x) &= c \cdot x^2 & f'(x) &= c \cdot 2x \end{aligned}$$

$$\text{Summe: } (u(x) + v(x) - w(x))' = u'(x) + v'(x) - w'(x)$$

$$\text{Konstanten: } c = \text{konst} \rightarrow c' = 0$$

2.5.2 Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

2.5.3 Quotientenregel

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \rightarrow \text{als Produkt schreiben}$$

$$u(x) \cdot \left(\frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \frac{-v'(x)}{v(x)^2}$$

2.5.4 Kettenregel

$$g(f(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

2.5.5 Umkehrfunktion

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

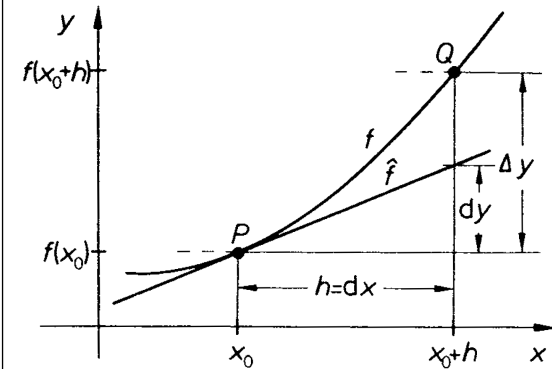
2.6 Allgemeine Logarithmus-Ableitung

$$(\log_b(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)}\right)' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot (\ln(x))' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}$$

2.7 Lineare Approximation / Differenzial dy S. 459

Differenzial = $dy = df$ = "Höhenunterschied der Tangente"
= "Linearzuwachs"

$$\text{Differenzial} = f'(x_0) \cdot dx = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$



$\Delta y \approx dy \rightarrow$ Approximation / Fehler

Fehler: $\Delta y - dy \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0$

Die Tangente ist die beste lineare Approximation!

2.8 Approximationsfehler

Die Fehler beziehen sich auf den Arbeitspunkt (z.B. x_0)

$$\text{Absoluter Fehler: } \Delta y - dy = f(x) - \hat{f}(x) \quad \text{Einheit } y$$

$$\text{Relativer Fehler: } \frac{\Delta y - dy}{y_0} = \frac{f(x) - \hat{f}(x)}{x_0} \quad \text{Einheitenlos}$$

2.9 Fehlerfortpflanzung

$$\text{Absolut: } \Delta x \rightarrow \Delta y \quad \Delta y \approx dy = f'(x_0) \cdot dx$$

$$\text{Relativ: } \Delta x \rightarrow \frac{\Delta y}{y_0} \quad \frac{\Delta y}{y_0} \approx \frac{dy}{y_0} = \frac{f'(x_0) \cdot dx}{y_0}$$

	$\Delta x = dx$ (abs)	$\frac{\Delta x}{x} = \frac{dx}{x}$ (rel)
$\Delta y \approx dy$ (abs)	A	B
$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}$ (rel)	C	D

\rightarrow Tabelle ist bidirektional (Umkehrfunktionen)

2.10 Wichtige Ableitungen S.446

f	D_f	f'	$D_{f'}$	f	D_f	f'	$D_{f'}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	\mathbb{R}	nx^{n-1}	\mathbb{R}	$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}^+	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	\mathbb{R}^+	$\arctan x$	\mathbb{R}	$\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}
$ x $	\mathbb{R}	$\frac{x}{ x } = \frac{ x }{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\operatorname{arccot} x$	\mathbb{R}	$-\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}
$\sin x$	\mathbb{R}	$\cos x$	\mathbb{R}	$\sinh x$	\mathbb{R}	$\cosh x$	\mathbb{R}
$\cos x$	\mathbb{R}	$-\sin x$	\mathbb{R}	$\cosh x$	\mathbb{R}	$\sinh x$	\mathbb{R}
$\tan x$	$A^1)$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1+\tan^2 x}$	$A^1)$	$\tanh x$	\mathbb{R}	$\frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{1}{1-\tanh^2 x}$	\mathbb{R}
$\cot x$	$B^2)$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{1}{1+\cot^2 x}$	$B^2)$	$\coth x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{1-\coth^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
e^x	\mathbb{R}	e^x	\mathbb{R}	$\operatorname{arsinh} x$	\mathbb{R}	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	\mathbb{R}
$a^x, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	\mathbb{R}	$a^x \cdot \ln a$	\mathbb{R}	$\operatorname{arcosh} x$	$[1, \infty)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(1, \infty)$
$\ln x $	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\operatorname{artanh} x$	$(-1, 1)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-1, 1)$
$\log_a x, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	\mathbb{R}^+	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	\mathbb{R}^+	$\operatorname{arcoth} x$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

2.11 Taylor-Reihe (Approximation höherer Ordnung)

n = Ordnung der Approximationsfunktion $p_n(x)$
 $h = x - x_0$

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot h^n$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot h^k \quad |h = x - x_0$$

Der Approximationsfehler $R_n(x_0, h)$ entspricht $f(x) - p_n(x)$ und wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

2.12 Fehler R_n der Taylor-Reihe

Der Fehler ist nicht klar berechenbar, sondern nur auf einem Intervall "bestimmbar" \rightarrow Worst Case!

Voraussetzung: f auf Intervall $[a; b]$ mind. $(n+1)$ mal ableitbar

Lagrange: $|R_n| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1} \right|$

Cauchy: $|R_n| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot h^{n+1} \cdot (1-\theta)^n \right|$

$0 < \theta < 1 \quad \xi = x_0 + \theta \cdot h$
 θ steuert Lage von ξ auf Intervall



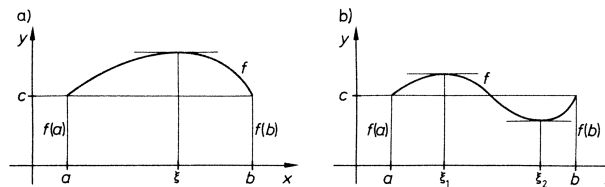
2.12.1 Verhalten von R_n

- $n \rightarrow \infty$ "Normal" $R_n \rightarrow 0$ $|h|$ fix
- $n \rightarrow 0^+$ "Normal" $R_n \rightarrow 0$ n fix
 $|f^{n+1}(\tilde{x})| < K^{n+1}$ ($K < 0, n \in \mathbb{N}_0, \tilde{x} \in (a; b)$)

2.13 Satz von Rolle S. 454

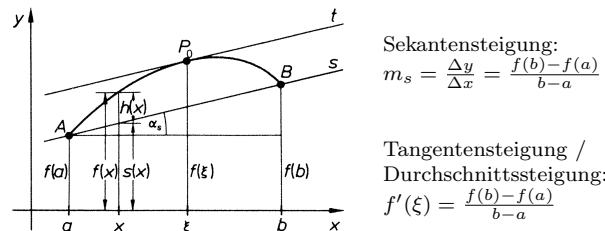
Voraussetzungen: f auf Intervall $[a; b]$ mind. $(n+1)$ mal ableitbar
 $f(a) = f(b)$

Auf dem Intervall $(a; b)$ existiert mindestens einmal eine horizontale Tangente: $f'(\xi) = 0$



2.14 Mittelwertsatz S. 454

Voraussetzungen: f auf Intervall $[a; b]$ mind. $(n+1)$ mal ableitbar



2.15 Extremalstellen S. 455-457

$f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, stetig $\Rightarrow W_f =$ abgeschlossenes Intervall

2.15.1 Absolut Extremalstelle (Randanalyse durchführen)

Absolutes Maximum: $\max(W_f)$
 Absolutes Minimum: $\min(W_f)$

2.15.2 Relative Extremalstelle

Lokales Maximum: "Berg" (nicht am Rand der Funktion)
 $f(x) \leq f(x_0) \quad x \in U_\delta(x_0)$
 Wechsel von \uparrow zu \downarrow

Lokales Minimum: "Tal" (nicht am Rand der Funktion)
 $f(x) \geq f(x_0) \quad x \in U_\delta(x_0)$
 Wechsel von \downarrow zu \uparrow

Terrasse: $f'(x_0) = 0$ aber kein "Berg" / "Tal"

2.15.3 Prinzip von Fermat S. 453

Wenn x_0 ein relatives Minimum / Maximum ist muss zwingend die Ableitung $f'(x_0) = 0$ sein \rightarrow **Umkehrung gilt nicht!**
 x_0 = kritische Stelle \rightarrow zu prüfen auf Berg, Tal oder Terrasse

$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	$f^{(n)}(x_0)$	
0	< 0		"Berg" (Achtung auf Randstellen)
0	> 0		"Tal" (Achtung auf Randstellen)
0	0	< 0	wenn n gerade: "Berg"
0	0	> 0	wenn n gerade: "Tal"
0	0	$\neq 0$	wenn n ungerade; Terrasse

y-Koordinate des Punktes: x_0 in $f(x)$ einsetzen

2.16 Monotonie S. 453

$f'(x_0)$	
≥ 0	monoton wachsend
≤ 0	monoton fallend
> 0	streng monoton wachsend
< 0	streng monoton fallend

2.17 Wendepunkte (Terrassenpunkte)

Wendepunkt = Krümmungswechsel = Vorzeichenwechsel für $f''(x)$ bei x_0

$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	$f^{(n)}(x_0)$	
	0	< 0	n ungerade: links-rechts Wendestelle
	0	> 0	n ungerade: rechts-links Wendestelle
	0	$\neq 0$	n gerade: Flachpunkt

Ausserdem liegt eine WP vor wenn f'' beim Durchgang durch x_0 das Vorzeichen wechselt, also $f''(x_0) < 0$ für $x < x_0$ und für $f''(x_0) > 0$ für $x > x_0$ bzw. umgekehrt.

y-Koordinate des Punktes: x_0 in $f(x)$ einsetzen

2.18 Krümmungsverhalten

Das beschriebene Verhalten gilt global für die ganze Funktion $f(x)$ bzw. auf einem ganzen Intervall, nicht nur an einer Stelle x_0 !

2.18.1 Linkskrümmung (konvex)

- $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
 $f(x)$ überall grösser als Tangentensteigung an jedem Punkt
- $f' \uparrow$ Tangentialsteigung steigt kontinuierlich
- $f'' \geq 0$

Strenge Krümmung: Logik verstärkt (ausser bei Berührungspunkt x_0)

2.18.2 Rechtskrümmung (konkav)

- $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
 $f(x)$ überall kleiner als Tangentensteigung an jedem Punkt
- $f' \downarrow$ Tangentialsteigung sinkt kontinuierlich
- $f'' \leq 0$

Strenge Krümmung: Logik verstärkt (ausser bei Berührungspunkt x_0)

2.19 Bernoulli-Hôpital S. 57-58

2.19.1 B.H. I

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad (x \rightarrow x_0) \quad \frac{0}{0}$$

Wenn $\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$ eine bestimmte Form ist, dann ist dies das Resultat von $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

2.19.2 B.H. II

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad (x \rightarrow x_0) \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Wenn $\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$ eine bestimmte Form ist, dann ist dies das Resultat von $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

Bernoulli-Hôpital darf auch mehrfach nacheinander verwendet werden \rightarrow immer erst algebraisch vereinfachen!

2.20 Unbestimmte Formen zu Bernoulli-Formen

$$f \cdot g \text{ vom Typ } (0^+) \cdot \infty \quad \frac{f}{1/g} \text{ von Typ } \frac{0}{0}$$

$$f - g \text{ vom Typ } \infty - \infty \quad \frac{1/g - 1/f}{1/fg} \text{ von Typ } \frac{0}{0}$$

$$f^g \text{ als } (0^+)^0; \infty^0; 1^\infty \quad f^g = e^{g \cdot \ln(f)} \text{ wobei } g \cdot \ln(f) \text{ von Typ } (0^+) \cdot \infty \text{ bzw. } \infty \cdot 0$$

$$\text{Vorzeichen auskl.:} \quad \begin{aligned} (0^-) \cdot \infty &= -(0^+) \cdot \infty \\ (0^+)^{0^-} &= \frac{1}{(0^+)^{0^+}} \text{ oder } 1^{-\infty} = \frac{1}{1^\infty} \end{aligned}$$

2.21 Optimierungsprobleme

1. Problem durch eine Funktion f mit ultimativer Variablen x ausdrücken $\rightarrow f(x)$
2. Fermat anwenden: $f'(x) = 0$
3. gefundene kritische Stellen auf Maximum / Minimum prüfen
- 3.1 Logik Randalanalyse: x links und rechts über Rand des Intervalls hinaus gehen lassen (z.B. nach $\pm\infty$) und Berg / Tal durch Logik entscheiden
- 3.2 Monotoniewechsel bei x_0 ausnützen: Wert $> x_0$ und $< x_0$ einsetzen
- 3.3 Taylor-Theorie: Vorzeichen der zweiten Ableitung gemäss Abschnitt 1.15.3

2.22 Asymptote bestimmen

Asymptotengerade: $y = mx + q$ m und q sind gesucht

$$\text{Steigung:} \quad m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\text{Achsenabschnitt:} \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) \\ \rightarrow \text{berechnetes } m \text{ einsetzen!}$$

3 Integralrechnung S.493

3.1 Obersumme / Untersumme

Die Fläche unter einer Funktion $f(x)$ wird in Intervalle zerlegt.

Voraussetzung: $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ und \mathbb{W}_f beschränkt

Zerlegung: $Z = \{x_0; x_1; \dots; x_n\} = \{x_i \mid i = 0; \dots; n\}$ ($n \in \mathbb{N}; n \geq 2$)

Breite(n) der Intervalle: $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ Δx kann variieren!

Machsenweite: $\max(\Delta x_i) = d(Z)$

Äquidistante Zerlegung: $Z = \{a + \frac{b-a}{n} \cdot i \mid i = 0; \dots; n\}$

Untersumme \underline{US}

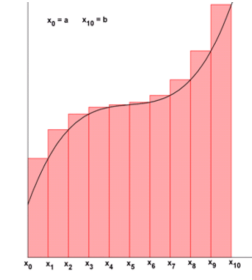
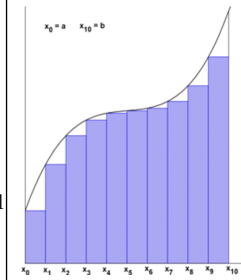
$$US = \sum_{i=0}^{n-1} \underline{m}_i \cdot \Delta x_i$$

$$\underline{m}_i = \inf\{f(x) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$$

Obersumme \overline{OS}

$$OS = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{M}_i \cdot \Delta x_i$$

$$\overline{M}_i = \sup\{f(x) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$$



Unter-Integral

$$\underline{I} = \lim_{d(Z) \rightarrow 0} \underline{US} \quad \infty \cdot 0 \\ \underline{I} = \int_a^b f(x) dx$$

Ober-Integral

$$\overline{I} = \lim_{d(Z) \rightarrow 0} \overline{OS} \quad \infty \cdot 0 \\ \overline{I} = \int_a^b f(x) dx$$

3.2 Riemann-Summe S.506-507

$$RS = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \quad d(Z) \rightarrow 0 \quad \int_a^b f(x) dx$$

$$\xi \in [x_i; x_{i+1}]$$

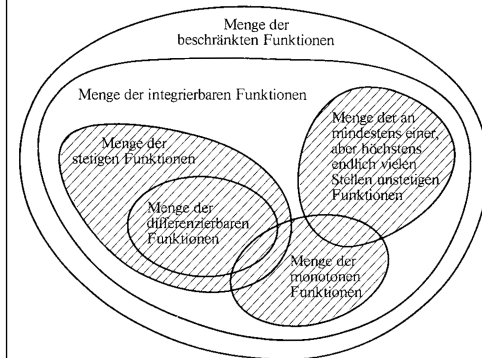
3.3 Riemann-Integral S.507

$$I = \underline{I} = \overline{I} \text{ wenn } \underline{I} = \overline{I}$$

$$\text{Notation: } \int_a^b f(x) dx \quad \begin{array}{ll} a, b & \text{Integrationsgrenzen} \\ f(x) & \text{Integrand} \end{array}$$

3.4 Integrierbare Funktionen

Hinreichendes Kriterium: $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ und \mathbb{W}_f beschränkt



3.5 Integrationsregeln S. 494-496

Linearität: $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$

3.5.1 Rechenregeln mit Integralen S. 508-510

Zerlegung: $\int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Grenzen tauschen: $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

Gleiche Grenzen: $\int_a^a f(x) dx = 0$

3.6 Wichtige Integrale S. 495

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \quad \int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\int_a^b 1 dx = b - a \text{ (Rechteck)}$$

3.7 Flächen unter Integralen

Voraussetzung: $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ und \mathbb{W}_f beschränkt

Fläche $A = \int_a^b |f(x)| dx$

Der Inhalt des Betrags muss auf Vorzeichen untersucht werden!
Negative Vorzeichen müssen über die x-Achse geklappt werden:
 $|x^2 - x| = -(x^2 - x)$ falls $x > x^2$

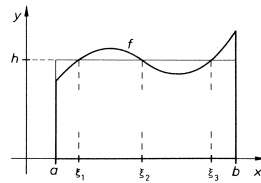
3.8 Mittelwert einer Funktion S. 510

Funktion aufgeteilt in n äquidistante Intervalle $\rightarrow \Delta x = \frac{b-a}{n}$

Mittelwert: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

3.9 Mittelwertsatz S. 510

Voraussetzung: $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ und \mathbb{W}_f beschränkt und stetig
Die Fläche unter der Funktion $f(x)$ kann an mind. einem Punkt ξ als Rechteck dargestellt werden.
 $\xi \in (a; b)$



Fläche = Mittelwert · Intervall-Länge

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi)$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f(\xi)$$

$$(b-a) \cdot h = (b-a) \cdot f(\xi)$$

3.10 Integralfunktion I(x)

Voraussetzung: $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ und integrierbar

$I(x)$ besitzt eine feste untere Grenze $c = \text{const}$ (Anker) und eine variable obere Grenze x (Hauptvariable) $x \in [a; b]$ $c \in [a; b]$

Notation: $I(\tilde{x}) = \int_c^x f(\tilde{x}) d\tilde{x}$ \tilde{x} ist die Integrationsvariable

3.10.1 Eigenschaften der Integralfunktion

Die Integralfunktion hat beim Anker c eine Nullstelle:

$$I(c) = \int_c^c f(\tilde{x}) d\tilde{x} = 0$$

$I(x)$ berührt/schneidet die x-Achse in $[a; b]$ beim Anker
 $\rightarrow I(c) = 0$

Das Verschieben des Ankers bewirkt eine Parallelverschiebung von $I(x)$

$I(x)$ ist immer stetig! (Integration behebt Sprungstellen)
 $I(x)$ ist ableitbar, wenn die Originalfunktion $f(x)$ stetig ist

Ableitung $I'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_c^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} \right) = f(x)$ "Kreislauf"

Integral $I(x)$ $\xrightarrow{\text{differenzieren}}$ $f(x)$

Integral $I(x)$ $\xleftarrow{\text{integrieren}}$ $f(x)$

3.10.2 Beispiel Integralfunktion bestimmen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 0.75 \\ -0.5, & 0.75 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$I(x) = \begin{cases} \int_{c=0}^x 1 d\tilde{x} = x & 0 \leq x < 0.75 \\ \int_{c=0}^{0.75} 1 d\tilde{x} + \int_{0.75}^x (-0.5) d\tilde{x} = 0.75 + (-0.5)(x - 0.75) & 0.75 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Wichtig: Bei Funktionen mit Sprungstellen immer beim Anker beginnen, wenn nichts spezielles verlangt ist

3.11 Stammfunktion F

Eine Funktion $F(x)$ heisst Stammfunktion von $f(x)$ wenn gilt:
 $F'(x) = f(x)$

$F(x) + C$ sind ebenfalls Stammfunktionen von $f(x)$
 $C \in \mathbb{R}$ C ist eine freie Verschiebungszahl

Stammfunktionen F sind Teilmenge der unbestimmten Integrale

\Rightarrow Ableitungstabelle rückwärts lesen für Stammfunktion!

3.12 Unbestimmtes Integral

$$I(x) + C = \int f(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad C \in \mathbb{R}$$

Wenn $f(x)$ stetig ist, dann entspricht das unbestimmte Integral der Stammfunktion

3.13 Hauptsatz der Integration S. 507

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b$$

3.14 Wachstumsvergleiche

- | | | | |
|-----|-------------------------------------------------|-----------------------------|-------------------------------------------------------------|
| (1) | $\frac{n^k}{q^n} (n \rightarrow \infty) = 0$ | $(k \in \mathbb{N}; q > 1)$ | $\frac{\text{Potenz}}{\text{Exponentiell}} \rightarrow 0$ |
| (2) | $\frac{q^n}{n!} (n \rightarrow \infty) = 0$ | $(q > 1)$ | $\frac{\text{Exponentiell}}{\text{Fakultät}} \rightarrow 0$ |
| (3) | $\frac{\ln(n)}{n^k} (n \rightarrow \infty) = 0$ | $(k \in \mathbb{N})$ | $\frac{\text{Logarithmisch}}{\text{Potenz}} \rightarrow 0$ |
| (4) | $\frac{\ln(n)}{n} (n \rightarrow \infty) = 0$ | | $\frac{\text{Logarithmisch}}{\text{Linear}} \rightarrow 0$ |