Elektrotechnik 1

HS 2023, Prof. Dr. Hans-Dieter Lang

Fabian Steiner, 22. November 2025

V1.1.0

1 Grundlagen

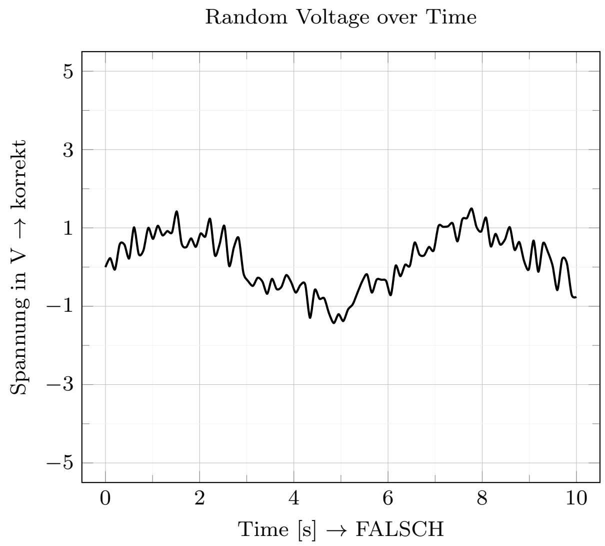
1.1 Einheiten

Korrekte Angabe von Werten:

12 µ m
- m → Einheit
- µ → Präfix
- 12 → Wert

{x} → Zahlenwert = 12
$[x]$ → Einheit abrufen = $\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$ → kann Präfixe enthalten, technisch gesehen nicht ganz richtig

1.2 Graphen



Bei Graphen muss darauf geachtet werden, dass die Einheit korrekt angegeben wird. Die Angabe in eckigen Klammern ist nicht mehr zu verwenden.

2 Grundlagen Elektrotechnik

2.1 Ladung

Wichtigster Grundsatz: **Ladung ist eine Eigenschaft**.
Jedes Elementarteilchen hat eine Elementarladung. Daher ist jede gemessene Ladung immer ein Vielfaches dieser Elementarladung.
Die wichtigsten Eigenschaften sind:

- Es gibt 2 Arten: Positiv & Negativ
- Gleiche Ladungen stossen sich ab, ungleiche ziehen sich an
- Ladung ist quantisierbar (ein Vielfaches einer Elementarladung)
- Ladung bleibt insgesamt erhalten
- Ladung ist an Masse gebunden

Ladung wird in $\mathrm{C} \mathrel{\hat{=}} \mathrm{A\,s}$ quantisiert.

2.2 Ladungstransport

Elektrische Ladung wird unterschiedlich gut in verschiedenen Medien transportiert.

Medium	Beweglicher Ladungsträger	Beispiele
Metalle	freie Elektronen	Cu, Ag, Au, ...
Elektrolyte	freie Ionen	Salzwasser, Säuren, Laugen, ...
Gase, Plasma	freie Elektronen, freie Ionen	FL-Röhren, Sonnenplasma
Halbleiter	Freie Elektronen, Löcher	Si, Ge, Se, GaN, ...
Vakuum	Keine(“nichts”)	CRT-Bildschirme
Isolatoren	“nichts”	Keramik, Kunststoffe, ...

Luft kann dabei zu den Gasen/Plasma und zu den Isolatoren gezählt werden, je nach Spannungsbereich

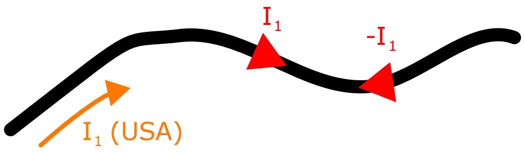
2.3 Elektrischer Strom

Elektrischer Strom ist der Transport von Ladung.

Einfache Definition: $I = \frac{\Delta Q}{\Delta \mathbf{t}} = \frac{N_e}{\Delta \mathbf{t}}$

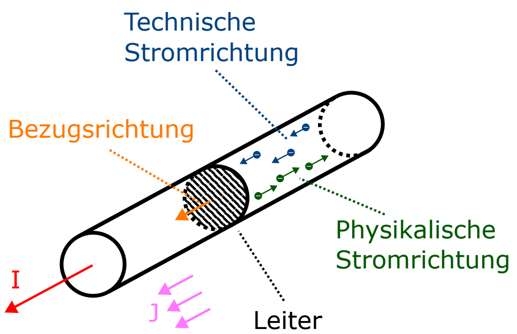
Masseinheit: $[I] = \frac{[Q]}{[t]} = \frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = \mathrm{A}$

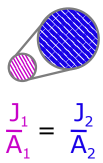
Elektrischer Strom braucht immer eine Bezugsrichtung:



Die Richtung des elektrischen Stromes sagt aus in welche Richtung sich die Elektronen bewegen.
Es wird zwischen der technischen und der physikalischen Richtung unterschieden, welche gegeneinander laufen.
Die Elementarladung eines Elektrons ist negativ.

2.4 Stromdichte (rechtwinklig zur Fläche)





Stromdichte sagt aus wie viel Strom über einen Querschnitt fliesst.
In einem Leiter ohne konstanten Querschnitt bleibt die Stromdichte proportional zur Fläche konstant.

Masseinheit: $[J] = \frac{[I]}{[A]} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$

2.4.1 Schmelzstromdichte

Die Schmelzstromdichte sagt aus, wie viel Strom durch einen Leiter fliessen muss, bis dieser anfängt zu schmelzen (typischerweise tausende A).

2.5 Elektrisches Potenzial

Elektrisches Potenzial ist Arbeit, die für den Spannungstransport zur Verfügung steht oder freigesetzt wird beim Transport der Ladung.

Einfache Definition: $[\varphi] = \frac{\Delta[W]}{[Q]} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \mathrm{V} = \frac{\mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^3\,\mathrm{A}}$

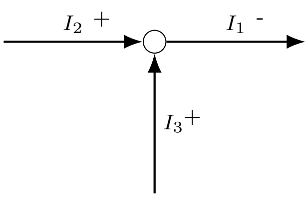
2.6 Elektrische Spannung

Elektrische Spannung ist ein Potenzialunterschied. D.h. elektrische Spannung ist eine Differenz von Energie, die zum Ladungstransport zur Verfügung steht.

Einfache Definition: $[U] = \varphi_a - \varphi_b = \mathrm{V}$

2.7 Kirchhoff current law / Kirchhoff I / KCL

Die Summe aller Ströme in einem geschlossenen Knoten ist 0.



$$\sum_n I_n = 0$$

Die einzige Bedingung ist, dass alle Ströme dieselbe Bezugsrichtung haben.

2.8 Kirchhoff voltage law / Kirchhoff II / KVL

Die Summe aller Teilspannungen in einer Masche ist 0.

$$\sum_n U_n = 0$$

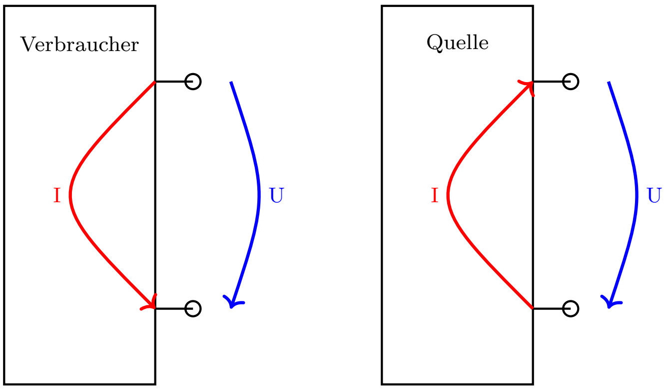
Die Bedingung ist das alle Spannungen dasselbe Referenzpotential haben.

2.9 Elektrische Leistung

Elektrische Leistung ist Arbeit pro Zeit.

Definition :$[P] = \frac{\Delta[W]}{\Delta[t]} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{V\,A\,s}}{\mathrm{s}} = \mathrm{V\,A} = \mathrm{W}$

2.10 Verbraucher oder Quelle



Um einen Verbraucher und eine Quelle auseinander zu halten, kann man die Richtungen der Spannung und des Stromes überprüfen.
Ist die Spannung und der Strom parallel zueinander, handelt es sich um einen Verbraucher (wie ein Widerstand).
Ist die Spannung und der Strom antiparallel, handelt es sich um eine Quelle (aus einer Spannungsquelle fliesst ein Strom hinaus).

2.11 Elektrischer Widerstand / Leitwert

Elektrischer Widerstand / Leitwert ist eine Konsequenz des Zusammenhangs von elektrischem Strom und Spannung.

$$\mathrm{I}\underbrace{\text{ist proportional zu}}_{\propto}\mathrm{U} \qquad\qquad \mathrm{I} = \mathrm{G} \cdot \mathrm{U}$$

G ist der sogenannte elektrische Leitwert und von oben abgeleitet: $[\mathrm{G}] = \frac{[\mathrm{I}]}{[\mathrm{U}]} = \mathrm{S}$ (Siemens).

Der elektrische Widerstand entsteht durch den Kehrwert vom Leitwert: $[\mathrm{R}] = \frac{1}{[\mathrm{G}]} = \frac{[\mathrm{U}]}{[\mathrm{I}]} = \Omega$ (Ohm).

2.12 Leitfähigkeit

Elektrische Leitfähigkeit ist eine Materialeigenschaft und hängt von der Mobilität, der Anzahl und der Ladung der freien Ladungsträger ab.

$$\text{Leitfähigkeit } [\sigma] = \mathrm{n} \cdot \mathrm{q} \cdot \mathrm{\mu} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V\,m}} = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$$
$$\mathrm{n} = \text{Anzahl freier Ladungsträger}$$
$$\mathrm{q} = \text{Ladung pro Ladungsträger}$$
$$\mathrm{\mu} = \text{Mobilität / Freiheit der Elektronen sich zu bewegen}$$

Die Faktoren “n” und “q” sind dabei Materialkonstanten. “µ” ist allerdings temperaturabhängig.

2.12.1 Mobilität

Die Mobilität µeines Ladungsträgers setzt sich wie folgt zusammen:

$$\mathrm{\mu} = \frac{\mathrm{q}\tau}{\mathrm{m}}$$
$$\mathrm{q} = \text{Ladung des Ladungsträger}$$
$$\tau = \text{Mittlere Stosszeit zwischen den Ladungsträger}$$
$$\mathrm{m} = \text{Masse des Ladungsträger}$$
$$[\mathrm{\mu}] = \frac{\mathrm{C\,s}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{V\,s}}$$

2.12.2 Spezifischer Widerstand

Der Kehrwert der Leitfähigkeit wird oftmals auch verwendet:

$$[\text{Spezifischer Widerstand}] = \left[\frac{1}{\sigma}\right] = [\varrho] = \frac{\mathrm{V\,m}}{\mathrm{A}}$$

2.12.3 Widerstandsberechnungen

Um aus Leitfähigkeit und spez. Widerstand einen Widerstand zu berechnen, können folgende Formeln verwendet werden.

$$\Omega = \frac{\varrho \cdot [\text{Leiterlänge}]}{[\text{Leiterfläche}]} = \frac{\varrho \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{m}^2} \qquad\qquad \Omega = \frac{[\text{Leiterlänge}]}{\sigma \cdot [\text{Leiterfläche}]} = \frac{\mathrm{m}}{\sigma \cdot \mathrm{m}^2}$$

Allerdings sind diese Formeln nicht allgemeingültig und können nur verwendet werden, wenn die Feldlinien konstant senkrecht zur Fläche stehen. Manchmal wird die Einheit auch gekürzt dargestellt (machen aber nur einige fiese Dozenten).

2.13 Temperaturabhängigkeit

Nicht ideale Widerstände ändern ihren Wert, unter anderem, abhängig mit der Temperatur. In der Regel ändert sich der Widerstand nicht linear und ist von Widerstand zu Widerstand etwas anders. Um trotzdem Widerstandswerte annähern zu können, wird die Funktion des Widerstands angenähert. Dies erfolgt je nach Anwendung mit einem, zwei oder noch mehr Termen.

$$
\begin{aligned}
\Delta \mathrm{R} &= \alpha \cdot \Delta \mathrm{T} \cdot \mathrm{R}_{t20} && \rightarrow \text{Lineare Annäherung} \\
\Delta \mathrm{R} &= \alpha \cdot \Delta \mathrm{T} \cdot \mathrm{R}_{t20} + \beta \cdot (\Delta \mathrm{T})^2 \cdot \mathrm{R}_{t20} && \rightarrow \text{Quadratische Annäherung} \\
&\dots \\
\mathrm{R}_{(\mathrm{T})} &= (1 + \alpha \cdot \Delta \mathrm{T}) \cdot \mathrm{R}_{t20} && \rightarrow \text{Lineare Annäherung} \\
\mathrm{R}_{(\mathrm{T})} &= (1 + \alpha \cdot \Delta \mathrm{T} + \beta \cdot (\Delta \mathrm{T})^2) \cdot \mathrm{R}_{t20} && \rightarrow \text{Quadratische Annäherung}
\end{aligned}
$$

Der Widerstand R_{t20} setzt hier jeweils den "Nullpunkt" oder den Ausgangspunkt, von welcher aus die Temperatur berechnet wird.

2.13.1 PPM's

Eine andere, in der Praxis häufig verwendete Art, Temperaturkoeffizienten anzugeben, sind die sogenannten PPM's oder auch parts per milion (in der Praxis auch TCR / temperature coefficient). Diese sagen aus, um wie viel sich ein Widerstandswert pro Kelvin ändert. Daher handelt es sich hier nur um ein lineares Modell mit beschränkter Genauigkeit. Sie haben meist keine Potenz oder sind ganzzahlig, da sie, wie der Name es schon andeutet, mit 10^{-6} multipliziert werden. Die korrespondierende Formel dazu lautet:

$$\frac{\Delta \mathrm{R}(\Delta \mathrm{T})}{\mathrm{R}_{\mathrm{T}0}} = \frac{\Delta \mathrm{R}}{10^6}$$

3 Gleichstromnetzwerke

Generell werden im folgenden Abschnitt nur lineare Gleichstromnetzwerke behandelt.

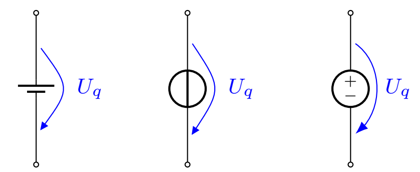
3.1 Vereinbarungen für die schematische Darstellung

- Ein Netzwerk besteht i.d.R. aus min. 2 verknüpften Komponenten.
- Alle Komponenten (Verbindungen, Widerstände, ...) werden als ideal betrachtet.
- Nicht ideales Verhalten muss explizit modelliert werden.
- Generell sind die Komponenten eines elektrischen Schaltkreises dimensionslos und "unendlich weit" voneinander entfernt.
- Es existieren keine Effekte wie thermische, elektromagnetische, ... Beeinflussung, welche **nicht explizit im Schema modelliert oder vermerkt** werden.

3.2 Ideale Quellen

3.2.1 Spannungsquelle

Eine *Ideale Spannungsquelle* legt fest, dass über den Anschlüssen die festgelegte Spannung herrscht. Egal wie gross die Last ist, die Spannung bleibt gleich.
Es gibt verschiedene Symbole:

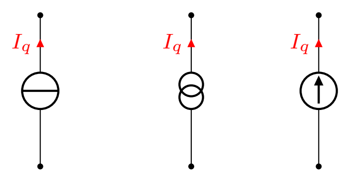


Typ 1 Typ 2 Typ 3

- **Typ 1** stellt eine Batterie dar. Durch das Symbol ist klar, welche Polarität herrscht. Daher kann auch eine Spannung ohne Spannungspfeil gezeichnet werden.
- **Typ 2** ist die europäische Darstellungsart. Sie ist weniger gebräuchlich, da zwingend immer ein Spannungspfeil gezeichnet werden muss.
- **Typ 3** ist die amerikanische Variante. Sie ist die gebräuchlichste Variante, da die Polarität auch klargestellt ist.

3.2.2 Stromquelle

Eine *Ideale Stromquelle* legt fest, dass durch das Symbol der festgelegte Strom fliesst. Egal wie gross die Last ist, der Strom bleibt gleich.
Es gibt verschiedene Symbole:



Typ 1 Typ 2 Typ 3

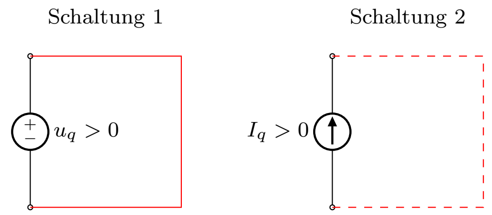
- **Typ 1** ist die europäische Darstellungsart. Sie braucht einen Strompfeil, da die Richtung des Stromes nicht definiert ist.
- **Typ 2** braucht auch einen Strompfeil, ist aber nicht sehr gebräuchlich.
- **Typ 3** ist die amerikanische Art und am gebräuchlichsten, da die Stromrichtung schon definiert ist.

3.2.3 Aussage ob Quelle oder keine Quelle

Die obigen Quellen sagen lediglich aus, ob eine Spannung oder ein Strom an einem Punkt existiert. Ob die Quelle schlussendlich wirklich eine Quelle ist – und damit Energie ins System liefert – muss durch einen Abgleich mit der korrespondierenden Spannung / Strom über der Quelle (siehe Kapitel 2.10) kontrolliert werden.

3.2.4 Widersprüche

Es gibt Widersprüche, welche durch die obigen Quellen entstehen können:



Die beiden obigen Schaltungen sind widersprüchlich, hervorgerufen durch die roten (oder fehlenden) idealen Verbindungen.
In Schaltung 1 sind die beiden Pole einer Idealen Spannungsquelle verbunden. Die Spannung soll grösser als 0 sein, kann sie aber nicht, da durch die Verbindung beide Pole gleichsein müssen. → Widerspruch.
In Schaltung 2 erzeugt die ideale Stromquelle einen Strom der grösser als 0 ist, kann aber nicht fliessen, da keine Verbindung vorhanden ist. → Widerspruch.

3.3 Gesteuerte Quellen

In der Elektrotechnik viel gebrauchte Elemente sind sogenannte gesteuerte Quellen. Sie haben eine Messgrösse, welche mit dem Steuerparameter multipliziert wird und als Ausgangsgrösse ausgegeben wird. Die Mess- und Ausgangsgrösse kann entweder Spannung oder Strom sein, daher gibt es 4 verschiedene Arten gesteuerter Quellen.

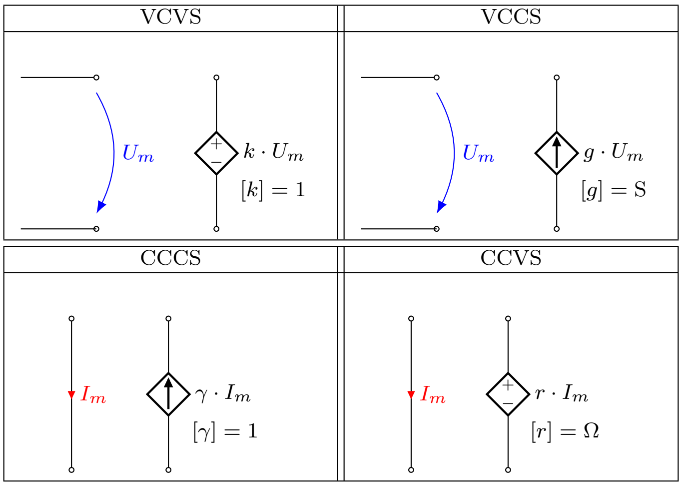
- Spannungsgesteuerte Spannungsquelle (VCVS)
- Spannungsgesteuerte Stromquelle (VCCS)
- Stromgesteuerte Spannungsquelle (CCVS)
- Stromgesteuerte Stromquelle (CCCS)

Der Steuerparameter der VCVS und CCCS sind einheitenlose Grössen, welche meist mit Symbolen wie k oder γ bezeichnet werden. Die Steuerparameter der VCCS und CCVS müssen die Messgrösse in die Ausgangsgrösse umwandeln und haben dadurch eine Einheit:

VCCS → S

CCVS → Ω

Symbole und dessen Messklemmen:



3.4 Lineare Quellen

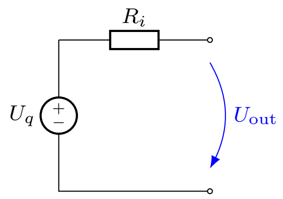
Eine lineare Quelle besteht aus einer Idealen Quelle und einem (linearen) Widerstand. Die Spannung der Quelle verhält sich linear zum Strom, der aus der Quelle fliesst. Man kann eine lineare Quelle mit einer Spannungs- oder Stromquelle realisieren und unterscheidet dabei zwischen einer Thévenin- oder Norton-Quelle.
Lineare Quellen haben 3 verschiedene Eigenschaften:

- **Leerlaufspannung** ist die Spannung, welche an den Ausgangsklemmen anliegt, wenn die Quelle nicht belastet wird
- **Kurzschlussstrom** ist der maximal Strom, welcher durch einen Kurzschluss an den Ausgangsklemmen erzeugt werden kann
- **Innenwiderstand** ist der innere Widerstand der Quelle (vollständig vereinfacht)

Wenn 2 dieser Eigenschaften bekannt sind, kann die letzte berechnet werden, da diese linear abhängig ist.

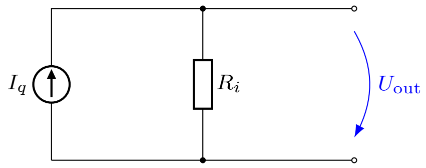
3.4.1 Thévenin Quelle

Eine Thévenin Quelle besteht aus einer Idealen Spannungsquelle und einem Widerstand in der folgenden Konstellation:



3.4.2 Norton Quelle

Eine Nortonquelle besteht aus einer Idealen Stromquelle und einem Widerstand in der folgenden Konstellation:



3.5 Helmholz-, Thévenin-, Norton-Theorem

Das Helmholz-, Thévenin- und Norton-Theorem sagen etwas sehr Ähnliches aus. Helmholz / Thévenin stellen fest, dass alle Kombinationen aus linearen Widerständen und idealen Spannungsquellen auf eine Thévenin Quelle reduziert werden können. Norton erweiterte dies auf eine Norton Quelle. Daher kann eine Thévenin Quelle zu einer Norton Quelle umgewandelt werden und umgekehrt. Dies kann sehr nützlich sein, um lineare Netzwerke zu lösen.

3.6 Superposition / Überlagerungssatz

Superposition ermöglicht das schrittweise Erkunden von Schaltungen durch Ausschalten von idealen Quellen bis auf eine und das anschliessende Überlagern (Summieren der Ströme).

- Die Schaltung muss linear sein
- Alle passiven Bauteile bleiben immer gleich
- Es werden nur die Quellen verändert
- Definitiv abhängige Quellen dürfen nicht ausgeschaltet werden

Thévenin und Norton Quellen werden verschieden abgeschaltet:

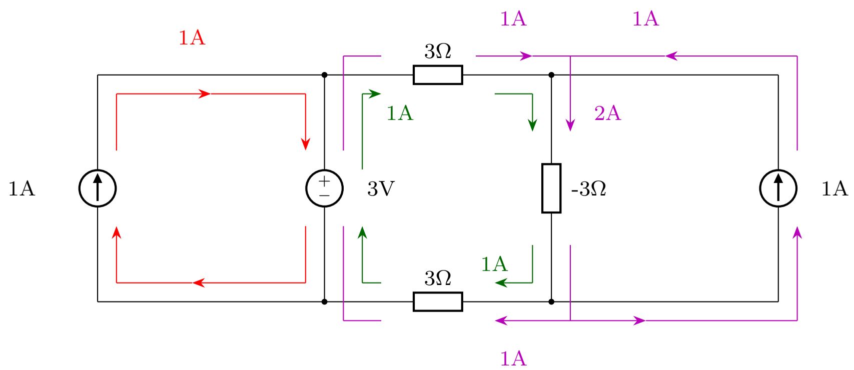
- Eine Thévenin Quellen wird zu einer idealen Verbindung (nicht kurzgeschlossen!).

- Eine Norton Quelle wird zu einem idealen Unterbruch.

3.6.1 Leistung bei Superposition

Leistung darf während dem Superpositionieren nicht separat berechnet werden. Es müssen alle Quellen zuerst superponiert und summiert werden, dann erst darf die Leistung berechnet werden. Ansonsten stimmt das Resultat nicht.

3.6.2 Beispiel

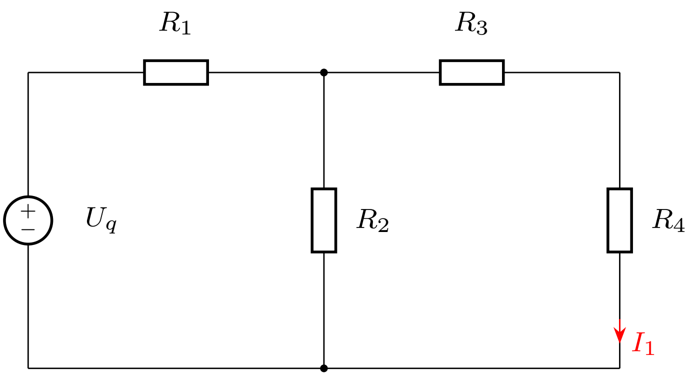


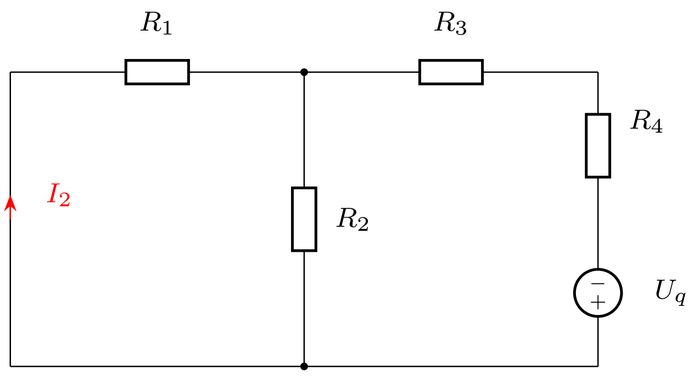
In diesem Beispiel wurden alle Quellen nacheinander ausgeschaltet und die Ströme eingezeichnet. Nun können die Ströme summiert und die Leistungen bestimmt werden.

3.7 Reziprozität /Kirchhoffscher Umkehrungssatz

In einem Netzwerk mit nur einer realen Idealen Quelle kann die Quelle und eine Messgrösse ausgetauscht werden. Das Verhältnis bleibt gleich. Die Quellgrösse, welche im veränderten Netzwerk angelegt wird, ist aber nicht gleich.

3.7.1 Herleitung mit Spannungsquelle



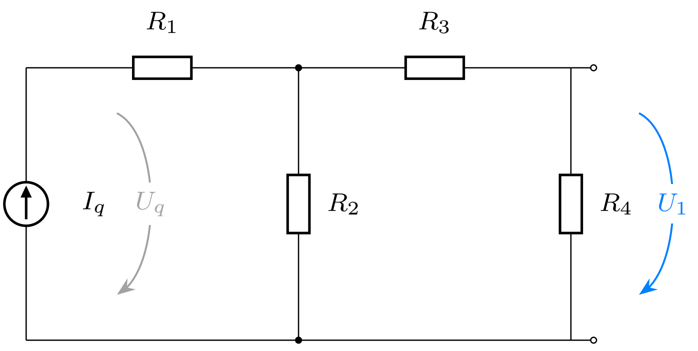


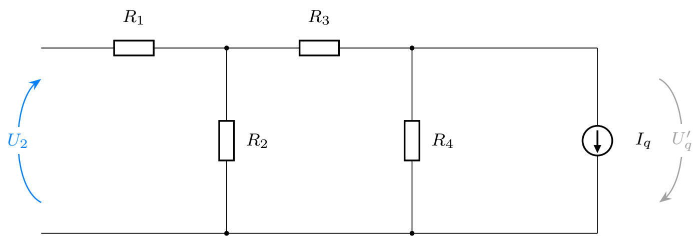
$$I_1 = \frac{U_q}{R_1 + (R_2 \parallel (R_3 + R_4))} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_3 + R_4}$$
$$I_1 = \frac{U_q R_2}{\left(R_1 + \frac{R_2(R_3+R_4)}{R_1+R_3+R_4}\right)(R_2 + R_3 + R_4)}$$
$$I_1 = \frac{U_q R_2}{R_1(R_1 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)}$$

$$I_2 = \frac{U_q}{(R_1 \parallel R_2) + R_3 + R_4} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$
$$I_2 = \frac{U_q R_2}{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} + R_3 + R_4\right)(R_1 + R_2)}$$
$$I_2 = \frac{U_q R_2}{R_1 R_2 + R_3(R_1 + R_2) + R_4(R_1 + R_2)}$$

$$R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_2R_4 = R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_2R_4$$

3.7.2 Herleitung mit Stromquelle





$$U_1 = I_q \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} R_4$$

$$U_2 = I_q \frac{R_4}{R_2 + R_3 + R_4} R_2$$

$$U_1 = U_2$$

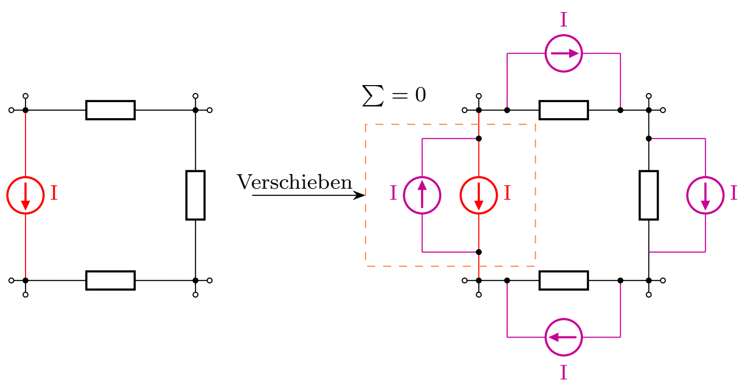
$$\boxed{U_q \neq U_q'}$$

3.8 Ideale Quellen verschieben

Ideale Quellen lassen sich verschieben. Für das systematische Lösen von Netzwerken kann das von Vorteil sein, ist allerdings immer ein Trade-Off. Man verfälscht und verliert immer Potenziale oder Ströme, kann sich jedoch zu Beginn Formeln zurechtlegen, falls diese wieder interessant werden. Das Verfahren für Strom- und Spannungsquellen ist prinzipiell das gleiche.

3.8.1 Ideale Stromquellen

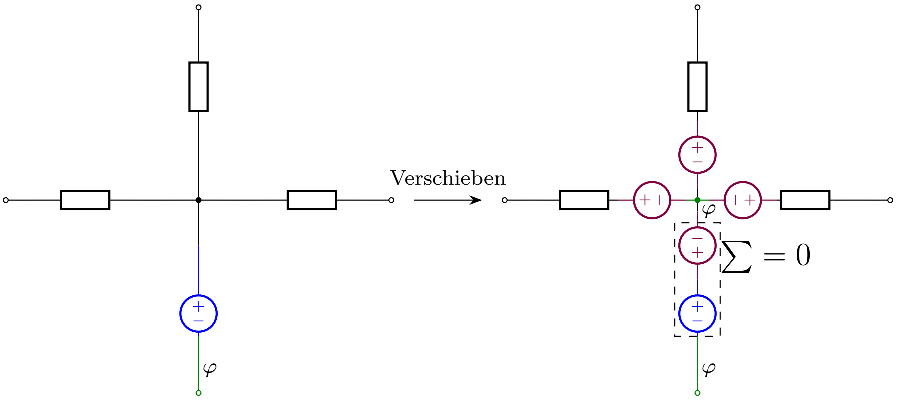
Ein virtueller Strom wird über die vorhandene Quelle gelegt → der Quellstrom wird in der Summe null. Da der Strom jedoch nicht einfach so verschwindet, müssen neue Stromquellen hinzugefügt werden, welche den Strom im Kreis führen:



Das Netzwerk hat nun eine möglicherweise mühsame Stromquelle weniger, allerdings generell mehr. Am besten schiebt man diese auf eine ideale Spannungsquelle, um diese ebenso zu eliminieren.

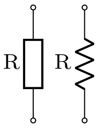
3.8.2 Ideale Spannungsquellen

Bei Idealen Spannungsquellen gilt dasselbe wie für ideale Stromquellen, sie werden jedoch über einen Knoten hinweg geschoben. Man kann sich das auch als zwingenden Ausgleich durch das Entfernen der ersten Spannungsquelle vorstellen.



Note: Das Potenzial φ hat sich nach oben verschoben

3.9 Widerstände

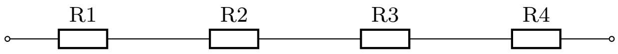


Fixe, lineare Widerstände haben typischerweise die links stehenden Schaltungssymbole.
Links das Europäische(gebräuchlicher), rechts das Amerikanische.
Es gibt verschiedene elementare Schaltungen, welche einfacher separat analysiert werden können.

3.9.1 Serienschaltung

Wenn Widerstände in Serie zueinander stehen, können sie summiert werden.

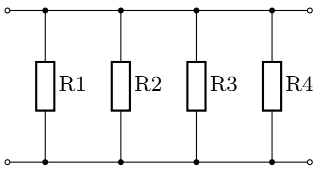
$$R_{tot} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$



3.9.2 Parallelschaltung

Wenn Widerstände parallel zueinander stehen, können ihre Leitwerte zusammengezählt werden.

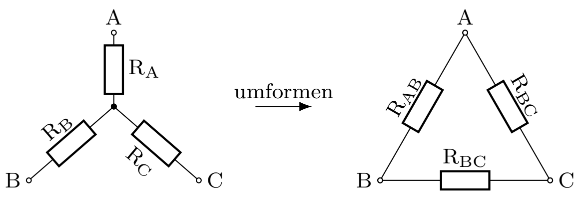
$$R_{tot} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$



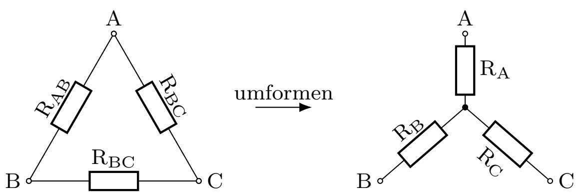
Wenn **nur 2** Widerstände parallel stehen, kann folgende vereinfachte Formel verwendet werden: $\frac{R1 \cdot R2}{R1 + R2}$

3.9.3 Stern - Dreieck - Umwandlung

Widerstände in einer Dreieckskonstellation können in einen Stern und umgekehrt umgewandelt werden.



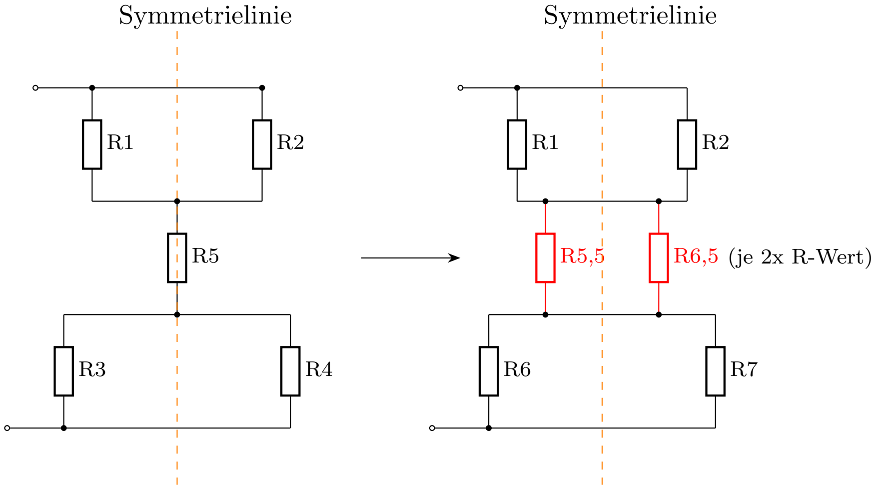
$$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A \cdot R_B}{R_C}$$
$$R_{Ac} = R_A + R_C + \frac{R_A \cdot R_C}{R_B}$$
$$R_{cB} = R_B + R_C + \frac{R_B \cdot R_C}{R_A}$$



$$R_A = \frac{R_{AB} \cdot R_{AC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}}$$
$$R_B = \frac{R_{AB} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}}$$
$$R_C = \frac{R_{AC} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}}$$

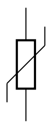
3.10 Symmetrien in Widerstandsnetzwerken

Symmetrien können beim Lösen von Widerstandsnetzwerken nützlich sein, da komplette Netzwerke nur einmal zusammengefasst werden müssen. Dabei ist das Äquipotential-Prinzip sehr wichtig, da ein Widerstand, der auf der Symmetrielinie liegt, aufgeteilt werden darf. Es ist egal, ob in Parallel oder in Serie, solange gleiche Widerstandswerte vorliegen.



Nun können beide Seiten separat angeschaut werden. Da beide Seiten identisch sind, muss nur eine Seite berechnet und der resultierende Wert halbiert werden.

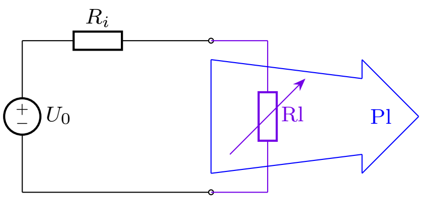
4 Nicht lineare Netzwerke / Leistungsanpassung



Viele Netzwerke sind in der Praxis nicht linear, daher wird meistens ein nicht linearer Widerstand verwendet, um diesen Effekt zu modellieren.
Das links stehende Schemasymbol wird dabei häufig verwendet.
Die Änderung des Widerstandswertes, welche durch einen Effekt wie zum Beispiel Temperatur, Licht oder mechanische Einwirkung herbeigeführt werden, können mit Symbolen signalisiert werden, wie z.B. Pfeile oder ein Temperatursymbol.

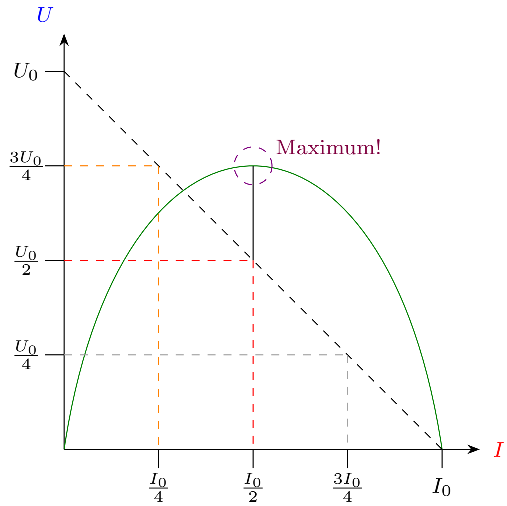
4.1 Leistungsanpassung

Leistungsanpassung beschreibt das Verfahren, einen Widerstand an einer realen Quelle anzupassen, sodass die maximal mögliche Energie aus der Quelle fliesst. Im linearen Fall entspricht der Lastwiderstand dem Innenwiderstand der Quelle.

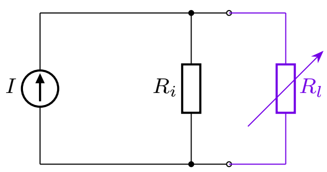


$$\boxed{R_l^* = R_i}$$

maximale leistung, $\eta = 50\%$
Der Stern bei R_l signalisiert, dass Leistungsanpassung gemacht wurde.



4.1.1 Herleitung des optimalen Lastwiderstands einer linearen Stromquelle



$$
\begin{aligned}
U_{R_l} &= \frac{R_i R_l}{R_i + R_l} \cdot I \\
P_{R_l} &= \frac{1}{R_l}(U_{R_l})^2 \\
0 &= \frac{\mathrm{d}P(R_l)}{\mathrm{d}R_l} = R_l'(U_{R_l})^2 + 2\frac{1}{R_l}(U_{R_l'}) \\
0 &= -\frac{1}{R_l^2}\frac{R_i^2 R_l^2 I^2}{(R_i + R_l)^2} + 2\frac{1}{R_l}\frac{R_i R_l I}{R_i + R_l}\left(\frac{R_i I(R_i + R_L) - R_i R_l I}{(R_i + R_l)^2}\right) \\
0 &= 2\frac{R_i^3 I^2}{(R_i + R_l)^3} - \frac{R_i^2 I^2}{(R_i + R_l)^2} \\
\frac{R_i^2 I^2}{(R_i + R_l)^2} &= 2\frac{R_i^3 I^2}{(R_i + R_l)^3} \\
R_i^2 I^2 (R_i + R_l) &= 2R_i^3 I^2 \\
2R_i &= R_i + R_l \\
R_i &= R_l
\end{aligned}
$$

Im Falle eines nicht linearen Widerstands muss eine Formel für die Leistung über dem Lastwiderstand gefunden werden. Die gefundene Formel muss dann abgeleitet und null gesetzt werden, ähnlich wie in der Herleitung.

5 Systematische Netzwerkanalyse

Wichtiger Grundsatz
Das zu analysierende Netzwerk **MUSS** linear sein, ansonsten kann das Netzwerk nicht mit den folgenden Methoden analysiert werden. Grundsätzlich solle das zu analysierende Netzwerk immer zuerst maximal vereinfacht werden, da dies meist zu weniger Aufwand führt. Das schlussendliche Ziel ist es, eine Matrixgleichung zu erhalten, welche man zuletzt invertieren muss.

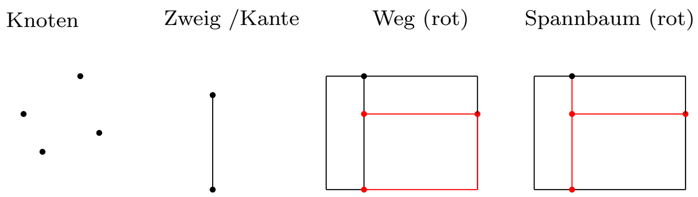
5.1 Auswahl einer geeigneten Methode

Meistens ist die Wahl der Methode frei. Um die Optimale zu wählen, sollte immer der Aufwand von allen Methoden bestimmt und aufgrund dessen entschieden werden.

5.2 Graphentheorie

Um elektrische Netzwerke zu analysieren, wird ein mathematisches Teilgebiet namens Graphentheorie angewendet. Für die systematische Netzwerkanalyse müssen ein paar Grundbegriffe geläufig sein:

- **Knoten** : Ein Punkt, in welchem Zweige enden
- **Zweig/Kante** : Verbindet Knoten untereinander
- **Weg** : Eine zusammenhängende Reihe von Knoten und Zweigen (keine Kante doppelt)
- **Baum** : Ein Weg, welcher nirgends in einem Kreis geschlossen ist (sehr bildlich)
- **Spannbaum** : Ein Weg, welcher alle Knoten miteinander verbindet
- **Zyklus** : Ein Weg, welcher im gleichen Knoten beginnt und endet
- **Kreis** : Ein Zyklus, welcher keinen Knoten zweimal enthält
- **Masche** : Ein Kreis, welcher keine inneren oder äussere Zweige aufweist.



Die Anzahl an Elementen wird wie folgt angegeben:

- Zyklen : z
- Knoten : k
- Maschen M = z - (k - 1) = z - k + 1
- Ideale (nicht lineare) Spannungsquellen : v
- Ideale (nicht lineare) Stromquellen : i

5.3 Zweigstrommethode

Bei der Zweigstrommethode wird das Ohmsche und die beiden kirchhoffschen Gesetze systematisch angewendet. 3 Gruppen an Gleichungen entstehen.

5.3.1 Zweiggleichungen

Anzahl: z - i - v
Ohmsches Gesetz anwenden. Darauf achten, dass keine Brüche vorkommen

5.3.2 Stromgleichungen

Anzahl: k - 1
Kirchhoff I (KCL) umsetzen. Bekannte Quellen nach links nehmen.

5.3.3 Spannungsgleichungen

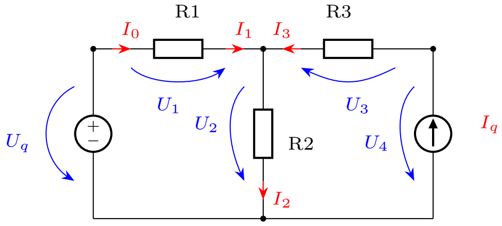
Anzahl: z - k + 1
Kirchhoff II (KVL) anwenden. Bekannte Quellen auf die linke Seite nehmen.

5.3.4 Zusammenführen

Zweiggleichungen in die Strom- und Spannungsgleichungen einsetzen. Gleichungstableau aufstellen mit Unbekannten als Vektor.

5.3.5 Beispiel

In diesem Beispiel wird die maximale Anzahl Knoten verwendet. Einen Knoten könnte man sparen, allerdings bleibt der Rechenaufwand gleich.



U_q und I_q gegeben
Knoten : 4, Zweige : 5
Zweiggleichungen:
z - v - i = 5 - 1 - 1 = 3

$$U_1 = R_1 \cdot I_1 \qquad U_2 = R_2 \cdot I_2 \qquad U_3 = R_3 \cdot I_3$$

Stromgleichungen:
k - 1 = 4 - 1 = 3

$$0 = I_1 + I3 - I_2 \qquad I_q = I_3 \qquad 0 = I_1 - I_0$$

Spannungsgleichungen:
z - k + 1 = 5 - 4 + 1 = 2

$$U_q = U_1 + U_2 \qquad 0 = U_2 + U_3 + U_4$$

Einsetzen der Zweiggleichungen:

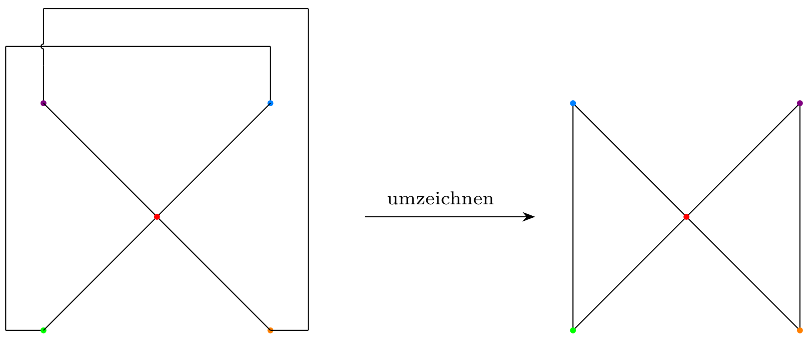
$$U_q = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 \qquad 0 = R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 - U_4 \qquad 0 = I_1 - I_2 + I_3 \qquad I_q = I_3 \qquad 0 = I_1 - I_0$$

Matrix erstellen:

$$\begin{bmatrix} \cdot & R_1 & R_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & R_2 & R_3 & -1 \\ \cdot & 1 & -1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_q \\ \cdot \\ \cdot \\ I_q \\ \cdot \end{pmatrix}$$

5.4 Maschenstrom-/Kreisstrommethode (MSM)

Aufwand : M - 1 - i
Bei der Kreisstrommethode werden verschiedene Kreisströme als Unbekannte definiert. Liegen diese auf Maschen, spricht man von der Maschenstrommethode. KVL wird dabei stark genutzt. Falls Ströme oder Spannungen gesucht werden, können diese durch einen einzelnen Kreisstrom am einfachsten bestimmt werden.
Das Verfahren kann nur bei *planaren Schaltungen* verwendet werden, sprich, es darf keine Überschneidungen der Zweige geben. **Achtung!** nicht planar wirkende Schaltungen können planar sein, wenn sie etwas umgezeichnet werden:



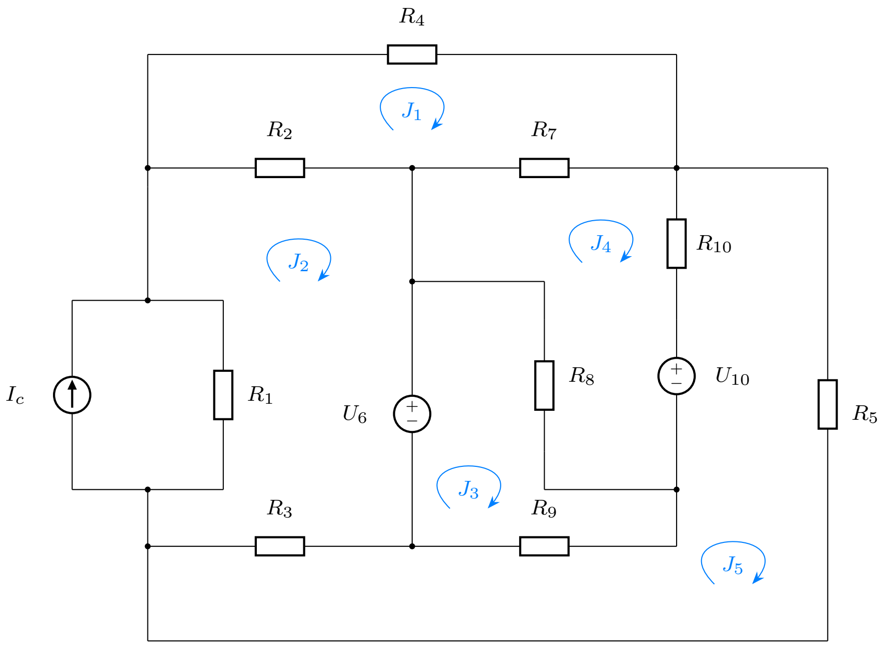
5.4.1 Vorgehen

1. Knoten definieren
2. Stammbaum definieren
   Es darf keine Ideale Stromquelle im Pfad des Stammbaums sein!
3. Matrix einfüllen:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Widerstände} & & \text{Kreisstöme} & & \text{Quellspannungen} \\ \begin{bmatrix} R+R & R+v \\ R & R+R \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} U_{q1} \\ U_{q2} \end{bmatrix} \end{array}$$

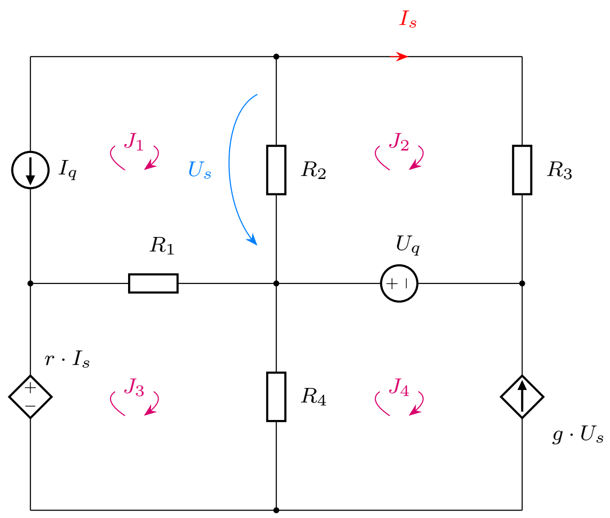
Die Matrix ist grundsätzlich symmetrisch an der Diagonalen, welche die Summen aller Widerstände im Pfad der Kreisströme enthält. Alle Überlagerungen, welche durch verschiedene Kreisströme durch denselben Widerstand entstehen, werden jeweils oberhalb und unterhalb davon notiert und sind **negativ**. Entgegengesetzte Richtung "-" sonst "+".
Gesteuerte Quellen brechen diese Symetrie. Wenn Kreisströme nicht unabhängig definiert sind, müssen sie trotzdem als Störfaktoren mit einbezogen werden und können in den Quellenvektor genommen werden. Falls basierend auf vorherige Grössen, können sie in die Matrix genommen werden.

5.4.2 Einfaches Beispiel ohne gesteuerte Quellen



$$
\begin{bmatrix}
R_2+R_4+R_7 & -R_2 & \cdot & -R_7 & \cdot \\
-R_2 & R_1+R_2+R_3 & \cdot & \cdot & -R_3 \\
\cdot & \cdot & R_8+R_9 & -R_8 & -R_9 \\
-R_7 & \cdot & -R_8 & R_7+R_8+R_{10} & -R_{10} \\
\cdot & -R_3 & -R_9 & -R_{10} & R_3+R_5+R_9+R_{10}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \cdot \\ R_1 \cdot I_c - U_6 \\ U_6 \\ -U_{10} \\ U_{10} \end{bmatrix}
$$

5.4.3 2. Beispiel mit gesteuerten Quellen



Vorbereitungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
J_1 &= -I_q \\
J_2 &= I_s \\
J_4 &= -g \cdot U_s = -g \cdot R_2 \cdot (J_1 - J_2) = g \cdot R_2 \cdot (I_q + J_2)
\end{aligned}
$$

Gesucht sind J_2 & J_3

$$
\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & \cdot \\ \cdot & R_1 + R_4 \end{bmatrix}
\begin{pmatrix} J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} U_q + \overbrace{J_1 \cdot R_2}^{-I_q \cdot R_2} \\ r \cdot \underbrace{I_s}_{J_2} + \underbrace{J_1 \cdot R_1}_{-I_q \cdot R_1} + \underbrace{J_4 \cdot R_4}_{g \cdot R_2 \cdot R_4 \cdot I_q + g \cdot R_2 \cdot R_4 \cdot J_2} \end{pmatrix}
$$

Vereinfachen:

$$
\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & \cdot \\ -g \cdot R_2 \cdot R_4 - r & R_1 + R_4 \end{bmatrix}
\begin{pmatrix} J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} U_q - I_q \cdot R_2 \\ -I_q \cdot R_1 + g \cdot R_2 \cdot R_4 \cdot I_q \end{pmatrix}
$$

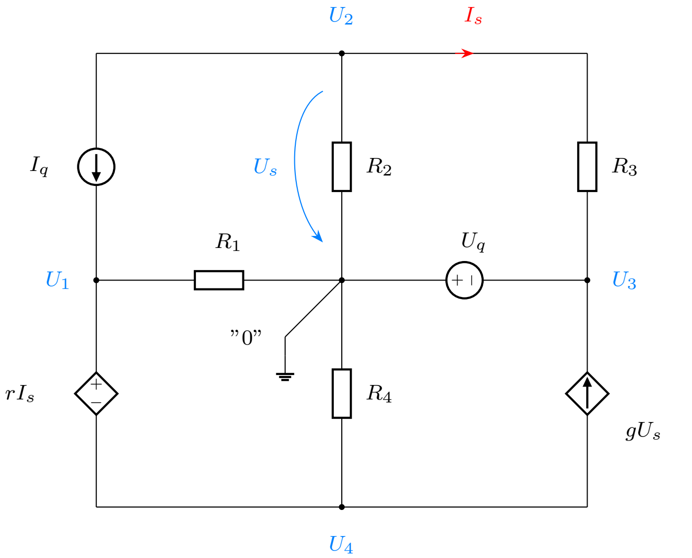
Überprüfen ob, in der Matrix nur Widerstände stehen und im Quellvektor nur Spannungen.

5.5 Knotenpotentialmethode (KPM)

Aufwand: k - 1 - v

Bei der Knotenpotentialmethode wird implizit KCL verwendet. Es werden Knoten definiert, welche in den Unbekanntenvektor eingefüllt werden. Ein Knoten wird als "0" definiert und wird nicht in den Vektor eingefügt. Die Matrix enthält nur Leitwerte, wobei in der Diagonalen Leitwerte sind, die an den Knoten angeschlossen sind. Die Positionen neben der Diagonalen sind **immer Negativ**und sind die Verbindungen zwischen den jeweiligen Knoten. Wenn keine gesteuerte Quellen vorhanden sind, treten Widerstände entweder 1 oder 4-mal in der Matrix auf. Bis auf die gesteuerten Quellen ist die Matrix symmetrisch. Spannungsquellen sind problematisch, da sie weder in die Matrix noch in den Quellvektor eingefügt werden können. Sie müssen verschoben werden, wie im Kapitel 3.8 gezeigt.

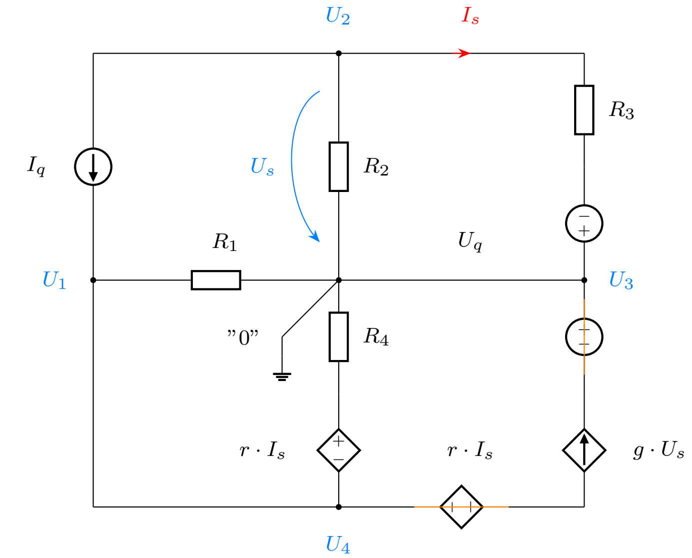
5.5.1 Beispiel



Vorbereitung:

$$U_3 = -U_q$$
$$U_4 = U_1 - r \cdot I_s$$
$$I_s = \frac{1}{R_3} \cdot (U_2 - U_3)$$
$$U_s = U_2$$

Verschieben der Spannungsquellen:



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q - \overbrace{-\frac{r \cdot I_s}{R_4}}^{\frac{r \cdot \frac{1}{R_3}(U_2 - U_3)}{R_3 \cdot R_4}} - \overbrace{g \cdot U_s}^{g \cdot U_2} \\ -I_q - \frac{U_q}{R_3} \end{pmatrix}$$

Vereinfachen:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} & -\frac{r}{R_3 \cdot R_4} - g \\ \cdot & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q \\ -I_q - \frac{U_q}{R_3} \end{pmatrix}$$

Kontrolle: Matrix enthält nur Leitwerte und Quellvektor nur Ströme.

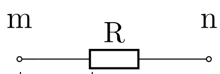
5.6 Modifizierte Knotenpotentialmethode (MNA)

Aufwand: K - 1 + v + s (s sind gesuchte Grössen)
Die modifizierte Knotenpotentialmethode ist die allgemeinere Form der KPM. Mit dieser kann jedes Netzwerk ohne vorherige Veränderung analysiert werden, sie erhält lediglich mehr Variablen. Zu der aufgestellten Matrix der KPM werden für die Ströme in idealen Spannungsquellen, gesuchte Ströme und Ströme in Spulen eine zusätzliche Variable ermittelt. Für diese muss dann auch eine zusätzliche Gleichung aufgestellt werden. Für Ideale Spannungsquellen wird der Strom generell hineindefiniert. Im Allgemeinen kann die Matrix auch mit Elementstempeln aufgestellt werden. Diese sind für alle Elemente definiert, die in einer Schaltung vorkommen.

5.6.1 Elementstempel

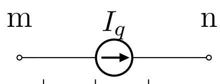
Jedes Bauteil in einer zu analysierenden Schaltung fügt bestimmte Teile in eine Matrix / Quellvektor hinzu. Da diese immer gleich sind, können diese nach folgendem Muster 1:1 hinzugefügt werden. Für Abhängige Grössen wird jeweils eine weitere Gleichung gebraucht welche mit a (auxiliary) benannt wird.

5.6.2 Widerstand



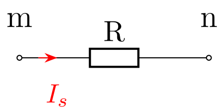
	m	n	q vec.
m	$+\frac{1}{R}$	$-\frac{1}{R}$	·
n	$-\frac{1}{R}$	$+\frac{1}{R}$	·

5.6.3 Unabhängige Stromquelle



	m	n	q vec.
m	·	·	$-I_q$
n	·	·	$+I_q$

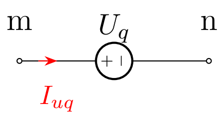
5.6.4 Widerstand mit gesuchtem Strom



$a : U_m - U_n = -RI_s = 0$

	m	n	I_s	q vec.
m	·	·	1	·
n	·	·	-1	·
a	1	-1	-R	0

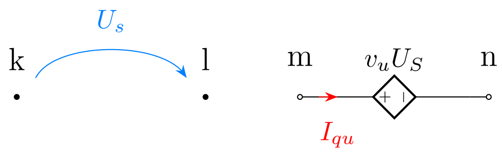
5.6.5 Unabhängige Spannungsquelle



$a : U_m - U_n = U_q$

	m	n	I_s	q vec.
m	·	·	1	·
n	·	·	-1	·
a	1	-1	·	U_q

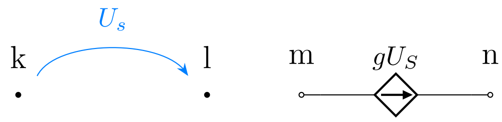
5.6.6 Spannungsgesteuerte Spannungsquelle



$$m - n = v_u U_s$$
$$U_s = k - l$$
$$0 = m - n - k v_u$$

	k	l	m	n	I_q	q vec.
k	·	·	·	·	·	·
l	·	·	·	·	·	·
m	·	·	·	·	1	·
n	·	·	·	·	-1	·
a	$-v_u$	v_u	1	-1	·	·

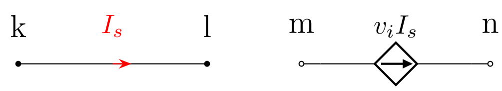
5.6.7 Spannungsgesteuerte Stromquelle



$$U_s = k - l$$
$$I_{mn} = g(k - l)$$
$$I_{mn} = gk - gl$$

	k	l	m	n	q vec.
k	·	·	·	·	·
l	·	·	·	·	·
m	g	-g	·	·	·
n	-g	g	·	·	·

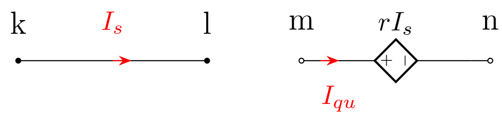
5.6.8 Stromgesteuerte Spannungsquelle



$U_k - U_l = 0$

	k	l	m	n	I_s	q vec.
k	·	·	·	·	1	·
l	·	·	·	·	-1	·
m	·	·	·	·	v_i	·
n	·	·	·	·	$-v_i$	·
a_1	1	-1	·	·	·	·

5.6.9 Stromgesteuerte Stromquelle

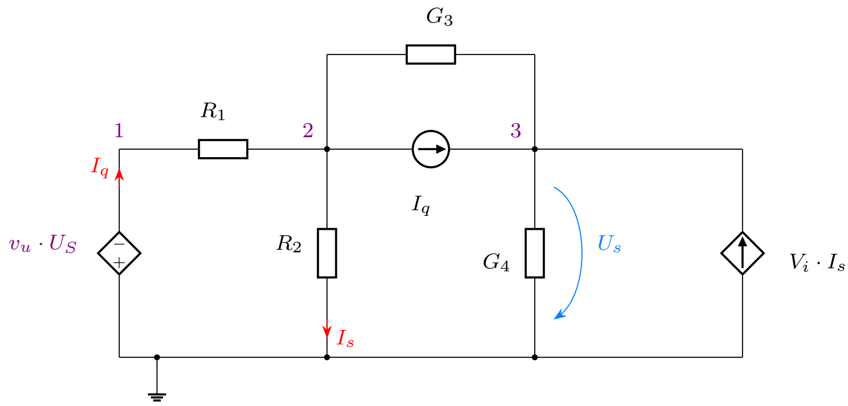


$a_1 : 0 = k - l$

$a_2 : rI_s = m - n$

	k	l	m	n	I_s	I_{qu}	q vec.
k	·	·	·	·	1	·	·
l	·	·	·	·	-1	·	·
m	·	·	·	·	·	1	·
n	·	·	·	·	·	-1	·
a_1	1	-1	·	·	·	·	·
a_2	·	·	1	-1	-r	·	·

5.6.10 Beispiel



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & \cdot & -1 & \cdot \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+G_3 & -G_3 & \cdot & 1 \\ \cdot & -G_3 & G_3+G_4 & \cdot & v_i \\ -1 & \cdot & -v_u & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -R_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ I_q \\ I_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ -I_q \\ I_q \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

An der markierten Stelle würde eigentlich zusätzlich $\frac{1}{R_2}$ stehen laut NA. Da aber ein Strom des Widerstandes gesucht wird, ist dieser nach unten rechts gerutscht, da er ansonsten doppelt vorkommt. Siehe Elementstempel.

6 Anhang

- Formelblatt ELT 1 – Grundlagen, DC-Netzwerke & Strömungsfelder (HS2023 v1)

HS 2023 (v1)

Formelblatt ELT 1 – Grundlagen, DC-Netzwerke & Strömungsfelder

Konstanten

Elementarladung (Ladung des Elektrons $q_e = -e$)	$e = 1.602 \times 10^{-19}$ C	$\approx 1.6 \times 10^{-19}$ C
Masse des Elektrons (Ruhemasse, $v \ll c_0$)	$m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg	$\approx 9 \times 10^{-31}$ kg
Avogadro-Konstante (Anzahl für molare Masse)	$N_A = 6.022 \times 10^{23}$ mol^{-1}	$\approx 6 \times 10^{23}$ mol^{-1}
Boltzmann-Konstante	$k_B = 1.3806 \times 10^{-23}$ J/K	$\approx 1.4 \times 10^{-23}$ J/K
Lichtgeschwindigkeit (in Vakuum)	$c_0 = 299\,792\,458$ m/s	$\approx 3 \times 10^{8}$ m/s

Grundgesetze

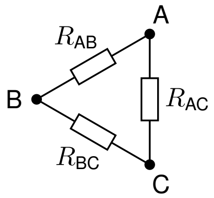
Kirchhoffscher Knotensatz *KH-1* (Kontinuität)	$\sum_n I_n = 0$	$\mathring{I} = \oint_{\text{Hülle}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0$
Kirchhoffscher Maschensatz *KH-2* (Konservativität)	$\sum_n U_n = 0$	$\mathring{U} = \oint_{C=\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$
Ohmsches Gesetz	$R = \frac{U}{I}$ bzw. $G = \frac{I}{U} = \frac{1}{R}$	$[R] = \Omega$, $[G] = \text{S}$

Grundlagen

Stromstärke	$I = \left.\frac{dQ}{dt}\right\|_{\text{durch } A} = \int_A \mathbf{J} \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{n}}\, ds}_{d\mathbf{s}} \overset{\text{homogen}}{=} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}$	$[I] = \frac{\text{C}}{\text{s}} = \text{A}$
Stromdichte *Bewegte Ladungsdichte*	$\mathbf{J} = \frac{dI}{dA}\hat{\mathbf{n}} = \rho \mathbf{v} = \sigma \mathbf{E}$ $\quad (\hat{\mathbf{n}} \perp A,\ \mathbf{A} = \hat{\mathbf{n}} A)$	$[J] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$
Driftgeschwindigkeit (der Ladungsträger)	$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{J}}{q\,n} = \frac{\mathbf{J}}{\rho}$	$[v] = \text{m/s}$, $[q] = \text{C} = \text{A s}$, $[n] = 1/\text{m}^3$, $[\rho] = \text{A s/m}^3$
Elektrische Leitfähigkeit und spez. Widerstand ϱ	$\sigma = \frac{1}{\varrho} = q\,n\,\mu$	$[\sigma] = \text{S/m}$, $[\varrho] = \Omega\,\text{m}$, $[\mu] = \frac{\text{m/s}}{\text{V/m}} = \text{A s}^2/\text{kg}$
Temperaturabhängigkeit von Widerständen	$\Delta R = \left(\alpha \Delta T + \beta \Delta T^2 + \ldots\right) R_{T_0}$ $\quad (\Delta T = T - T_0)$	$[\alpha] = 1/\text{K}$, $[\beta] = 1/\text{K}^2$
Elektrisches Potential *normalisierte pot. Energie*	$\varphi = \frac{W}{Q}$	$[\varphi] = \text{V} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{A s}^3}$
Elektrische Spannung *Potentialdifferenz*	$U_{\text{AB}} = \varphi_{\text{A}} - \varphi_{\text{B}} = \frac{\Delta W}{Q} = \int_{\text{A}}^{\text{B}} \mathbf{E} \cdot \underbrace{d\mathbf{l}}_{\hat{\mathbf{l}}\,dl} \overset{\text{hom.}}{=} \mathbf{E} \cdot \mathbf{l}_{\text{AB}}$	$[U] = \text{V}$
Leistung *Arbeit pro Zeiteinheit*	$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = UI = \int_V p\,dv \overset{\text{homogen}}{=} pV$	$[P] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$
Leistungsdichte des el. Strömungsfelds	$p = \frac{dP}{dv} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = \varrho J^2$	$[p] = \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$
Wirkungsgrad *Effizienz*	$\eta = \frac{\Delta W_{\text{ab}}}{\Delta W_{\text{zu}}}$ bzw. $\eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}} = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{ab}} + P_{\text{ver}}}$	$[\eta] = 1$ (bzw. %)
Ladungsänderung (aus Stromfluss)	$Q(t_2) = \Delta Q + Q(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt + Q(t_1)$	$[Q] = \text{C} = \text{A s}$

Umwandlung

Stern-Dreieck-Umwandlung $\perp \Rightarrow \triangle$

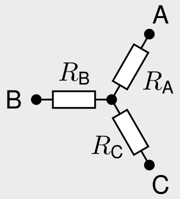


$$R_{\mathrm{AB}} = R_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{B}} + \frac{R_{\mathrm{A}}R_{\mathrm{B}}}{R_{\mathrm{C}}}$$

$$R_{\mathrm{AC}} = R_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{C}} + \frac{R_{\mathrm{A}}R_{\mathrm{C}}}{R_{\mathrm{B}}}$$

$$R_{\mathrm{BC}} = R_{\mathrm{B}} + R_{\mathrm{C}} + \frac{R_{\mathrm{B}}R_{\mathrm{C}}}{R_{\mathrm{A}}}$$

Dreieck-Stern-Umwandlung $\triangle \Rightarrow \perp$



$$R_{\mathrm{A}} = \frac{R_{\mathrm{AB}}R_{\mathrm{AC}}}{R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{BC}} + R_{\mathrm{AC}}}$$

$$R_{\mathrm{B}} = \frac{R_{\mathrm{AB}}R_{\mathrm{BC}}}{R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{BC}} + R_{\mathrm{AC}}}$$

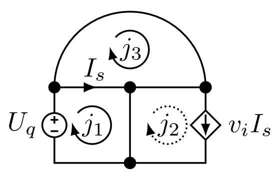
$$R_{\mathrm{C}} = \frac{R_{\mathrm{AC}}R_{\mathrm{BC}}}{R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{BC}} + R_{\mathrm{AC}}}$$

Graphentheorie

Graph $G(V,E)$ bzw. $G(K,Z)$	Ein Graph G besteht aus je einer Menge k Knoten, K, und einer Menge z Zweige (Verbindungen zwischen Knoten), Z.	
Baum *verzweigter Pfad*	Ein Baum ist ein (verzweigter) Pfad/Linienzug (zusammenhängende Zweige bzw. Verbindungen von Knoten) *ohne Zyklen/Kreise*.	
Spannbaum *vollständiger Baum*	Ein Spannbaum ist ein Baum, welcher *alle* Knoten verbindet; er besteht aus $k{-}1$ *Baumzweigen* (daneben $z{-}k{+}1$ Verbindungszweige).	
Masche *innerer/äusserer Kreis*	Eine Masche ist ein Kreis (einzelner Zyklus, d.h. Pfad mit gleichem Start- und Endknoten) *ohne innere <u>oder</u> äussere Zweige*; Anzahl: m.	
Eulerscher Polyedersatz für *planare* Graphen	Anz. Maschen $\quad m = z - k + 2$	$z =$ Anz. Zweige $k =$ Anz. Knoten

Systematische Netzwerkanalyse

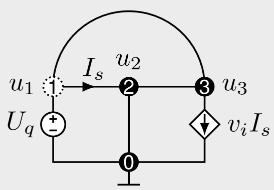
Maschen-/Kreisstrommethode



$$\mathbf{Rj} = \mathbf{u}$$

- Unbekannte $\mathbf{j}$
  - Maschen- bzw. Kreisströme
  - Anzahl: $m - 1 - i$
- Widerstandsmatrix $\mathbf{R}$
  - $r_{xx} = \left[\sum_n R_n\right]_{\text{in } j_x}$
  - $r_{xy} = \pm \left[\sum_n R_n\right]_{\text{in } j_x \,\cap\, j_y}$
  - sowie Steuerparameter von gesteuerten Quellen
- Spannungsquellenvektor $\mathbf{u}$
  - $u_x = \mp \left[\sum_n U_{q,n}\right]_{\text{in } j_x}$
  - positiv: $U_{q,n}$ entgegen j_n

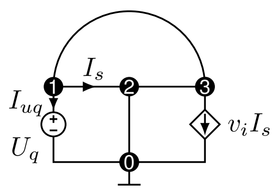
Knotenpotentialmethode (KPM)



$$\mathbf{Gu} = \mathbf{i}$$

- Unbekannte $\mathbf{u}$
  - Knotenspannungen $\varphi - \varphi_0$
  - Anzahl: $k - 1 - v$
- Leitwertmatrix $\mathbf{G}$
  - $g_{xx} = \left[\sum_n G_n\right]_{\text{an } u_x}$
  - $g_{xy} = -\left[\sum_n G_n\right]_{\text{an } u_x \,\&\, u_y}$
  - sowie Steuerparameter von gesteuerten Quellen
- Stromquellenvektor $\mathbf{i}$
  - $i_x = \pm \left[\sum_n I_{q,n}\right]_{\text{an } u_x}$
  - positiv: fliesst in u_x *hinein*

modifizierte Knotenpot. (MNA)



$$\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{w} = \mathbf{s}$$

- Unbekannte $\mathbf{w}$
  - alle Knotenspannungen $\mathbf{u}$, sowie einige Zweigströme ($I_{qu} \Rightarrow v$, $I_s \Rightarrow s$)
  - Anzahl: $k - 1 + v + s$
- modifizierte Leitwertmatrix $\tilde{\mathbf{G}}$
  - Form:
    $$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{\Gamma}_u \\ \mathbf{\Gamma}_i & -\mathbf{R} \end{bmatrix}$$
    ($\mathbf{G}$ ähnlich KPM)
- Quellenvektor $\mathbf{s}$
  - Spannungsquellen
  - Stromquellen