Lineare Algebra Einführung

HS 2021 Prof. Dr. Andreas Müller

Simone Stitz, 7. November 2023

`https://gitlab.com/sstitz/lineare-algebra`

1 Lineare Gleichungssysteme

1.1 Matritzen und Vektoren

Matrix: $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ Einheitsmatrix: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zeilenvektor: $a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_n \end{pmatrix}$ Spaltenvektor: $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Standardbasisvektoren: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.2 Rechenregeln mit Matritzen und Vektoren

1.2.1 Addition / Subtraktion

Beschreibung für Spaltenvektoren → gilt analog für Zeilenvektoren!
Beschreibung nur für Addition → gilt analog für Subtraktion!

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad a + b = \begin{pmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3+6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+7 \\ 3+5 & 4+3 \\ 5+6 & 6+2 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Multiplikation

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \lambda \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda \cdot 1 \\ \lambda \cdot 8 \\ \lambda \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad \lambda \cdot D = \begin{pmatrix} \lambda \cdot 6 & \lambda \cdot 1 & \lambda \cdot 2 \\ \lambda \cdot 5 & \lambda \cdot 4 & \lambda \cdot 0 \\ \lambda \cdot 4 & \lambda \cdot 1 & \lambda \cdot 9 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot v = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 1 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \\ 5 \cdot 1 + 4 \cdot 8 + 0 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 1 \cdot 8 + 9 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 37 \\ 48 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 4 \cdot 4 \\ 0 \cdot (-2) + 4 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 & 0 \cdot 4 + 4 \cdot (-5) + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix}$$

1.2.3 Division

Divisionen von Matritzen werden durch eine Multiplikation mit der inversen Matrix durchgeführt.

1.2.4 Zusammenfassung / Erweiterung der Rechenregeln

Symmetrie:	$A = A^t$	
Orthagonalität:	$AA^t = A^tA = E$	$A^{-1} = A^t$
	A^t auch orthagonal	$\det(A) = \pm 1$
Produkte:	$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$	$(AB)C = A(BC)$
	$EA = A = AE$	$A(B + C) = AB + AC$
	$A(\lambda B) = (\lambda A)B$	
Transponiert:	$(AB)^t = B^tA^t$	
Inverse:	$A^{-1}A = E$	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
Potenzen:	$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$	

1.3 Tranponierte Matrix A^t

Spiegelung an Diagonalen

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

1.4 Inverse Matrix A^{-1}

Die Inverse Matrix ist **nur für quadratische Matritzen** definiert. Die Inverse Matrix kann durch dar Gauss-Verfahren oder mit dem Entwicklungssatz berechnet werden.

1. Gauss: A^{-1} $\boxed{\text{A} \mid \text{E}} \xrightarrow{\text{Gauss}} \boxed{\text{E} \mid A^{-1}}$

2. Entwicklungssatz: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$ für $\det(A) \neq 0$

Bsp. 2 x 2 Matrizen: $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ für $\det(A) \neq 0$

→ **für Variante Entwicklungssatz siehe Beispiel nächste Seite**

1.5 Lineares Gleichungssystem

Ein Lineares Gleichungssystem kann als Matrix geschrieben werden:

1.5.1 Beispiel

$$\begin{aligned} x &+ 3y &= 1 \\ -x &+ 5y &= -1 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem wird in eine Matrix abgefüllt:

x	y	b
1	3	1
−1	5	−1

1.5.2 Lineare Gleichungssysteme lösen

- Gauss-Algorithmus
- Inverse Matrix $x = A^{-1} \cdot b$
- Cramersche Regel

1.6 Gauss-Algorithmus

Die aktuelle Zeile wird durch das Pivot-Element ($\neq 0$) geteilt.

x	y	
2	6	2
-1	5	-1

x	y	
1	3	1
-1	5	-1

Anschliessend werden alle Spalten unterhalb des Pivots auf 0 gesetzt, indem man das x-Fache der neuen "Pivot- Zeile"von der entsprechenden Zeile subtrahiert / addiert.

x	y	
1	3	1
$\boxed{-1}$	5	-1

x	y	
1	3	1
0	8	0

Schritt 1 und Schritt 2 wiederholen, bis nur noch 1en auf der Diagonalen stehen.

x	y	
1	3	1
0	8	0

x	y	
1	3	1
0	1	0

Wenn nur noch 1en auf der Diagonale stehen muss nur doch die blaue Operation durchgeführt werden (Rückwärts-Einsetzen)

x	y	
1	$\boxed{3}$	1
0	1	0

x	y	
1	0	1
0	1	0

1.6.1 Spezialfall RREF

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	*	0	*	*
0	0	1	*	*
0	0	0	0	*
0	0	0	0	*

Wenn die nächste Spalte im Gauss-Algorithmus kein Pivot-Element enthält (0 ist), kann die Spalte übersprungen werden. Die Spalte repräsentiert eine frei wählbare Variable
→ Siehe Abschnitt zu Lösungsmenge

1.6.2 Simulatane Lösung (mehrere Rechte Seiten)

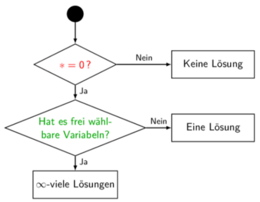
Wenn zwei Gleichungssysteme sich nur auf der rechten Seite unterscheiden können sie in das gleiche Gauss-Tableau abgefüllt werden.
→ normal mit Gauss-Algorithmus lösen

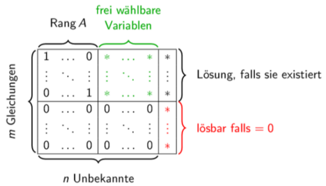
$$\begin{aligned} 2x + 4y + 2z &= 34 \\ x + 3y + 3z &= 32 \\ 4x + 10y + 12z &= 122 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 4y + 2z &= 28 \\ x + 3y + 3z &= 30 \\ 4x + 10y + 12z &= 116 \end{aligned}$$

x	y	z		
2	4	2	34	28
1	3	3	32	30
4	10	12	122	116

1.7 Lösungsmenge

Falls mehr Unbekannte als Gleichungen vorhanden sind, können nicht alle Unbekannten bestimmt werden.





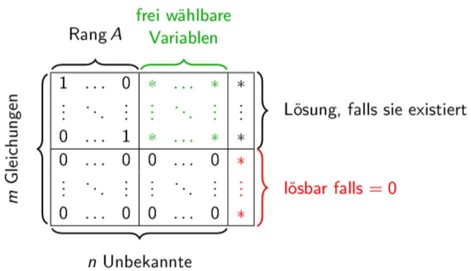
Wenn es unendlich viele Lösungen gibt kann die Lösungsmenge folgendermassen angegeben werden
Vorzeichenwechsel bei frei wählbaren Variablen beachten!

x	y	z	w	
1	0	3	−2	5
0	1	−2	4	−7
0	0	0	0	∗
0	0	0	0	∗

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

1.8 Rang einer Matrix

Anzahl linear unabhängiger Zeilen / Spalten
Entspricht der Anzahl eindeutig bestimmbarer Variablen



1.9 Lineare Abhängigkeit

Wenn eine Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile ist, sind die Zeilen linar abhängig.
Beim Gauss-Algorithmus entsteht eine Nullzeile.

$\lambda_1 \cdot$ Zeile 1 + $\lambda_2 \cdot$ Zeile 2 + $\lambda_3 \cdot$ Zeile 3 = Nullzeile

Um die Koeffizienten λ_i zu finden wird dir ursprüngliche Matrix A transponiert und auf Null gesetzt.

x_1	x_2	x_3
1	2	3
6	5	4
7	8	9

$\xRightarrow{A^T}$

λ_1	λ_2	λ_3	
1	6	7	0
2	5	8	0
3	4	9	0

Die neue Matrix wird mit dem Gauss-Verfahren gelöst

λ_1	λ_2	λ_3	
1	0	$\frac{13}{7}$	0
1	0	$\frac{6}{7}$	0
0	0	0	0

$\Longrightarrow$ $\lambda_1 = -\frac{13}{7}\lambda_3$
$\lambda_2 = -\frac{6}{7}\lambda_3$
λ_3 frei wählbar

1.10 Lineares Gleichungssystem $A \cdot x = b$

Ein lineares Gleichungssystem entstspricht dem Produkt aus Matrix mal Vektor

Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 &= b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Symbolische Schreibweise für Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$$

Dieses Gleichungssystem bestitz die Lösung $x = A^{-1} \cdot b$

1.11 Homogene / Inhomogene LGS

Inhomogen: $Ax = b$
Homogen: $Ax = 0$

1.12 Reguläre / Singuläre Matrix

Die Begriffe sind nur für quadratische Matritzen definiert!
regulär: genau 1 Lösung → det(A) $\neq 0$
singulär: 0 oder ∞ Lösungen → det(A) $= 0$

2 Determinante

Die Determinante ist eine Kennzahl dafür, ob eine **quadratische** Matrix singulär oder regulär ist.

regulär: $\det(A) \neq 0$
singulär: $\det(A) = 0$

2.1 Notation

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

2.2 Definierende Eigenschaften der Determinante

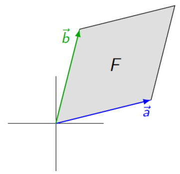
1. Wenn eine Zeile mit einem Faktor λ multipliziert wird, so wird auch $\det(A)$ mit λ multipliziert
2. $\det(A)$ ändert nicht bei blauen Operationen
3. $\det(E) = 1$
4. Wenn A singulär ist ($\det(A) = 0$) dann ist auch A^t singulär $\det(A^t) = 0$

2.3 Geometrische Interpretation der Determinante

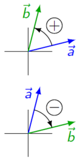
2.3.1 Fläche

Orientierter Flächeninhalt des Parallelogramms aufgespannt durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$F(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

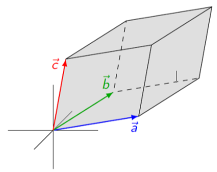


$$F(\vec{a}, \vec{b}) \begin{cases} > 0, \\ < 0, \end{cases}$$



2.3.2 Volumen

Orientiertes Volumen eines Parallelepipeds (Spat) aufgespannt durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$



$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \begin{cases} > 0, & \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ bilden ein Rechtssystem} \\ < 0, & \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ bilden ein Linkssystem} \end{cases}$$

2.4 Allgemeine Berechnung der Determinante

Die Determinante kann mithilfe des Gauss-Algorithmus berechnet werden. Die Determinante ist das **Produkt** aller Pivot-Elemente. (Rückwärts-Einsetzen beim Gauss-Verfahren nicht nötig)

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 49 & 14 \\ -2 & -6 & 60 \\ -1 & 0 & 57 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 49 & 14 \\ -2 & -6 & 60 \\ -1 & 0 & 57 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 8 & 64 \\ 0 & 7 & 59 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pivot-Elemente: 7 8 3

Wert der Determinante

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \text{Pivot-Element } i = 7 \cdot 8 \cdot 3 = 168$$

2.5 Sarrus

2.5.1 2 x 2 Matrix

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2.5.2 3 x 3 Matrix

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

2.6 Rechenregeln für die Determinante

1. Enthält A eine Nullzeile/Nullspalte, dann gilt $\det(A) = 0$
2. Sind zwei Zeilen/Spalten der Matrix A gleich, gilt $\det(A) = 0$
3. Vertauscht man in der Matrix A zwei Zeilen/Spalten, so ändert das Vorzeichen von $\det(A)$
4. $\det(E) = 1$
5. Die Determinante ist eine lineare Funktion der Zeilen/Spalten

Produktformel: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Determinante der Inversen: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Transponierte Matrix: $\det(A) = \det(A^T)$

2.7 Entwicklungssatz

1. Zeile oder Spalte mit meisten Nullen auswählen
2. Element herausschreiben **(Vorzeichenmatrix beachten!)** herausgenommene Elemente, welche 0 sind fallen weg!
3. Zeile und Spalte von gewähltem Element wegdenken
4. Rest (Minor) als Determinante mit herausgenommenem Element multiplizieren
5. Schritte 2-4 wiederholen, bis ganze Zeile/Spalte bearbeitet ist
6. Wenn noch keine 3x3 Determinanten; Schritte 1-5 wiederholen
7. Wenn 3x3 Determinanten erreicht sind, mit Sarrus-Formel Minor-Determinanten konkret ausrechnen

Vorzeichenmatrix

+	-	+	-
-	+	-	+
+	-	+	-
-	+	-	+

2.7.1 Beispiel Entwicklungssatz

Berechnung der Determinante von Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 1 \\ 8 & 8 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 1 \\ 8 & 8 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ 8 & 10 & 1 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 8 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Sarrus}$$

2.7.2 Beispiel Inverse Matrix mittels Entwicklungssatz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. det(A) berechnen
2. Minoren gemäss Entwicklungssatz in A^{-1} schreiben **Farben beachten!**
3. Minoren mit Sarrus berechnen

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

→ Sarrus-Formel anwenden

2.8 Cramersche Regel

Mit der Cramerschen Regel können ebenfalls Gleichungssysteme von Typ $A \cdot x = b$ gelöst werden.
Jede Unbekannte x wird durch Determinanten berechnet.

→ Es müssen n-1 Determinanten berechnet werden!

2.8.1 Beispiel Cramersche Regel

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 1 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 2$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & -7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 3$$

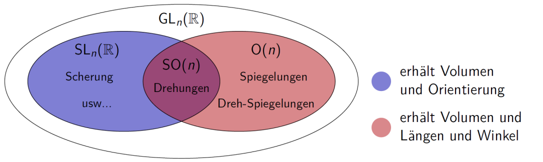
2.9 Matritzengruppen

Allgemeine Lineare Gruppe:
$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \mid \det(A) \neq 0\}$

Orthogonale Gruppe:
$O(n) = \{A \mid A^t A = E\}$

Spezielle Lineare Gruppe:
$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \mid \det(A) = 1\}$

Spezielle Orthogonale Gruppe:
$SO(n) = \{A \mid A^t A = E \wedge \det(A) = 1\} = SL_n(\mathbb{R}) \cap O(n)$



3 Lineare Vektorräume

3.1 Koordinatensystem

Ein Koordinatensystem ist festgelegt durch:

- Ursprung O
- Basis bestehend aus linear unabh. Basisvekoren b_i

Ortsvektor: Vektor $\overrightarrow{OP} = \vec{p} = x_1 \cdot \vec{b_1} + x_2 \cdot \vec{b_2}$

x_1 und x_2 sind Koordinaten des Punktes P bzw. Linearkombinationen der Basisvektoren b_i

3.2 Vektorraum $\langle A \rangle$

Menge aller Koordinaten (Linearkombinationen), welche durch die Vektoren $A = \vec{a_1}, ..., \vec{a_n}$ erreicht werden können.

Durch bilden weiterer Linearkombinationen (Skalierungen) der Vektoren $\vec{a_i}$ verlässt man den Vektorraum nicht.

Auch Additionen / Subtaktionen von Vektoren des Vektorraums verlassen den Verktorraum nicht.

3.2.1 Dimension

Die Dimension $\dim\langle A\rangle$ des Vektorraums besteht aus der maximalen Anzahl linear unabhängiger Vektoren im Vektorraum.
→ Linear abhängige Vektoren ändern die Dimension nicht!

3.3 Basis eines Vektorraums

Die Basis eines Vektorraus muss die folgenden Kriterien erfüllen:
1. Lineare Unabhängigkeit der Basisvektoren b_i, damit Koordinaten x_i eindeutig sind
2. Basisvektoren $\vec{b_i}$ müssen den ganzen Vektorraum aufspannen

$$\vec{p} = x_1 \cdot \vec{b_1} + x_2 \cdot \vec{b_2} + x_3 \cdot \vec{b_3} = \mathrm{B}\ \mathrm{x} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ und $\vec{b_3}$ sind im Beispiel die Standardbasisvektoren. Es können aber auch irgendwelche Vektoren einer anderen Basis sein.

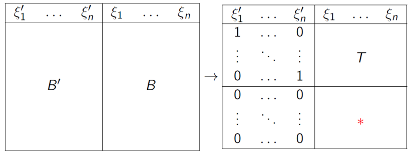
3.4 Basistransformation

Basismatrix B $= \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ Basismatrix B' $= \{\vec{b_1'}, \vec{b_2'}, \vec{b_3'}\}$

Vektor $\vec{v} = \xi B = \xi' B'$ in Koordinatensystem ξ und ξ'

3.4.1 Basistransformation allgemeiner Fall

Transformationsmatrix T mittels Gauss-Algorithmus finden:



Umrechnung: $\xi' = T\xi$

Die roten Sterne müssen Nullen sein, damit es eine Lösung gibt!

3.4.2 Spezialfall Basistransformation (quadratische Matrizen)

Transfotmationsmatrix T	$T = (B')^{-1}B$
Koordinaten ξ' in neuem Koordinatensystem:	$\xi = T\xi$

3.5 Lineare Abbildungen (Bilder des Vektoraums)

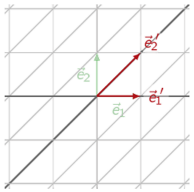
Eine lineare Abbildung:
- bildet Geraden auf Geraden ab
- erhält Parallelität
- fixiert den Ursprung

Lineare Abbildungen werden mit der Abbildungsmatrix A beschrieben.
Die Spalten von A sind Bilder der Basisvektoren

Eine Abbildung A kann durch ihre Inverse A^{-1} rückgängig gemacht werden.

3.5.1 Beispiel Abbildungsmatrix A einer Scherung

Die Standardbasisvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ werden durch die Abbildungsmatrix A auf die Vektoren $\vec{e_1'}$ und $\vec{e_2'}$ abgebildet.
Die Spalten der Abbildungsmatrix A enthalten die Bilder $\vec{e_1'}$ und $\vec{e_2'}$ der Standardbasisvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$



$$A = \begin{pmatrix}\underbrace{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}}_{\vec{e}_1'} & \underbrace{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}_{\vec{e}_2'}\end{pmatrix}$$

3.5.2 Anwendung einer Abbildung auf einen Vektor

Der Vektor $\vec{v}$ wird mit der Abbildungsmatrix auf den Vektor $\vec{v'}$ abgebildet: $A \cdot \vec{v} = \vec{v'}$

Die Abbildung kann mittels $A^{-1} \cdot \vec{v'} = \vec{v}$ rückgängig gemacht werden.
Das geht nur, wenn A eine quadratische Matrix ist!

3.5.3 Zusammensetzung linearer Abbildungen

Wenn mehrere lineare Abbildungen "wirken", so werden die Abbildngsmatritzen multipliziert.

Die als erstes wirkende Abbildung steht dabei ganz rechts in der Multiplikation!

Abbildungsmatrix C = AB → Erst wirkt Abbildungsmatrix B, danach A

3.6 Kern einer Matrix

Alle Abbildungen eines Vektors $\vec{v}$, welche durch die Abbildungsmatrix A auf den Nullvektor von $\vec{v'}$ abgebildet werden
$A \cdot \vec{v} = 0$ → Nullraum, Kern von A, $\ker(A)$

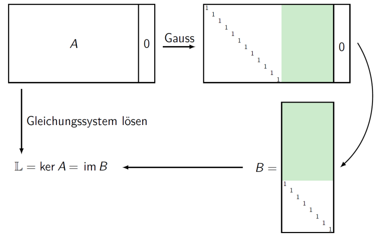
3.7 Bild einer Matrix

Menge der Vektoren, welche man aus den Spalten einer Matrix erzeugen kann.

Das Bild besteht aus allen Vektoren, welche unter der Abbildung, die B vermittelt, wentstehen können.

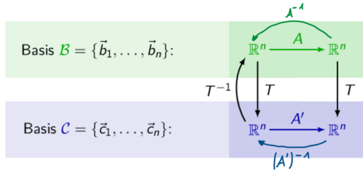
3.8 Kern, Bild und Gauss-Algorithmus

Die Lösungsmenge entspricht dem Kern von A bzw. dem Bild von B



3.9 Basiswechsel für lineare Abbildungen

Die lineare Abbildung, die in der Basis B durch die Matrix A beschrieben wird, wird in der Basis C durch die Matrix A' beschrieben.



$A' = TAT^{-1}$
$\det(A') = \det(A)$
$\mathrm{Spur}(A') = \mathrm{Spur}(A)$

3.10 Elementare Abbildungsmatritzten

3.10.1 Drehmatrix D finden

Die Drehung wird beschrieben durch $D \cdot A = A'$
Die Spalten der Matrix A sind die Punkte vor der Drehung, A' enthält die Punkte nach der Drehung (Bilder)
$D = A' \cdot A^{-1}$
Die Matritzten müssen quadratisch sein! Falls nötig Matritzen mit einem Punkt erweitern, damit sie quadratisch werden

3.10.2 Spiegelungen (orthogonale Matrix)

$\det(A) = -1$

2 Dimensionen

x-Achse	y-Achse	an 45° Geraden
$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

3 Dimensionen

xy-Ebene	xz-Ebene	an yz-Ebene
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

3.10.3 Projektionen

Projektionen auf etwas (z.B. die Koordinatenachsen) liefern die "Länge des Schattens" des Vektors auf diese Achse. $P^2 = P$

x-Achse	y-Achse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

xy-Ebene	xz-Ebene	an yz-Ebene
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.10.4 Drehungen D (orthogonale Matrix)

Die Spalten von D_α sind Bilder der Basisvektoren
Determinante: $\det(D) = 1$

Die Drehung findet gegen den Uhrzeigersinn statt
Für Drehung in Uhrzeigersinn: $D_{-\alpha} = D_\alpha^{-1}$ verwenden
$D_\alpha D_\beta = D_{\alpha+\beta}$

2 Dimensionen

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

3 Dimensionen

Drehung um x-Achse

$$D_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Drehung um y-Achse

$$D_y = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Drehung um z-Achse

$$D_z = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.11 Drehwinkel von Drehmatritzen D

Der Drehwinkel einer Drehmatrix D wird mithilfe der Spur der Drehmatrix berechnet (siehe nächster Abschnitt)

2 Dimensionen	3 Dimensionen
$\cos(\alpha) = \frac{\text{Spur}(D)}{2}$	$\cos(\alpha) = \frac{\text{Spur}(D)-1}{2}$

3.12 Spur

Die Spur einer Matrix ist die Summe der Elemente auf der Diagonalen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 2 & 9 & 6 \\ 8 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{Spur}(A) = 1 + 9 + 5 = 15$$

3.12.1 Rechenregeln Spur

Vertauschung	$\text{Spur}(BA) = \text{Spur}(AB)$
Zykl. Vertauschung:	$\text{Spur}(ABC) = \text{Spur}(CAB) = \text{Spur}(BCA)$
Anwendung:	$\text{Spur}(TAT^{-1}) = \text{Spur}(T^{-1}TA) = \text{Spur}(A)$

4 Vektorgeometrie

Generell gilt auf dieser Zusammenfassung:

$\vec{p}$	Ortsvektor (Vektor vom Ursprung zu Punkt auf Geraden)
$\vec{r}$	Richtungsvektor
$\vec{x}$	Platzhalter für Punkt (auf Ebene / Geraden) x_1, x_2, x_3
s, t, u, v	Variablen $\in \mathbb{R}$

4.1 Normalenvektor

Der Normalenvektor einer Geraden / Ebene steht senkrecht auf der Geraden / Ebene.
Der Normalenvektor kann mit dem Vektorprodukt oder dem Skalarprodukt berechnet werden

Vektorprodukt: $\vec{n} = \vec{r_1} \times \vec{r_2}$
Skalarpodukt: $\vec{n} \bullet \vec{r_1} = 0$ und $\vec{n} \bullet \vec{r_2} = 0$
Skalarprodukte als Gleichung aufschreiben
$\rightarrow$ Gauss-Tableau $\rightarrow$ Normalenvektor
(es gibt eine frei wählbare Variable)

4.2 Darstellungsformen von Ebenen / Geraden

4.2.1 Koordinatenform

Ebene:	$n_x\, x_1 + n_y\, x_2 + n_z\, x_3 = b$	$5\, x_1 + 10\, x_2 - 2\, x_3 = 6$
Gerade:	$n_x\, x_1 + n_y\, x_2 = b$	$5\, x_1 + 10\, x_2 = 6$

Die roten Koeffizienten entsprechen den Koordinaten des Normalenvektors.
b entspricht dem Abstand der Ebene zum Nullpunkt des Koordinatensystems.

4.2.2 Parameterform

Hinweis: in 2 Dimensionen ohne z-Koordinate, ansonsten analog

Gerade g: $\vec{p} + s \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$

Ebene E: $\vec{p} + s \cdot \vec{r_1} + t \cdot \vec{r_2} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} r1_x \\ r1_y \\ r1_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r2_x \\ r2_y \\ r3_z \end{pmatrix}$

4.2.3 Normalenform

Gerade g: $\vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ Ebene E: $\vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{p}) = 0$

Wenn $\neq 0$ liegt der Punkt x nicht auf der Geraden / Ebene

4.2.4 Umrechnungen der verschiedenen Formen

Koordinatenform in Parameterform

1. Normalenvektor aus Koordinatengleichung ablesen Koordinatengleichung einsetzen
2. Richtungsvektoren aus den 3 Punkten bilden
3. Parameterform aufstellen

Koordinatenform in Normalenform

1. 3 Punkte auf Ebene bestimmen Spurpunkte in Koordinatengleichung einsetzen
2. Punkt auf Ebene finden: Spurpunkt einsetzen
3. Aus gefundenem Normalen- und Richtungsvektor Normalenform aufstellen

Parameterform in Normalenform

1. aus Richtungsvektoren den Normalenvektor bilden
2. Aus gefundenem Normalenvektor und bekanntem Stützvektor die Normalenform aufstellen

Parameterform in Koordinatenform

1. Paramaterform Zeile für Zeile als einzelne Gleichungen aufschreiben
2. Variablen s und t schrittweise aus GlSys eliminieren Vielfache einer Gleichung mit Vielfache von anderer Gleichung addieren/subtrahieren und somit neue Gleichungen finden
3. Wenn s und t eliminiert sind und die Schlussgleichung gefunden ist, entspricht dies der Koordinatengleichung

Normalenform in Parameterform

1. Richtungsvektoren aus Normalenvektor finden:
   Eine Komponente des Normalenvektors 0 setzen
   $\rightarrow$ 0 in erstem Richtungsvektor
   verbleibenden Komponenten vertauscht in Richtungsvektor einsetzen und ein Vorzeichen tauschen
2. Schritt 1 für zweiten Richtungsvektor wiederholen
   Wichtig: Andere Komponente von Normalen 0 setzen!
3. Aus Richtungsvektoren und bekannten Stützvektor Parameterform aufstellen

4.3 Hesse'sche Normalform als Darstellungsform

In der Hesse'schen Normalform ist der Abstand d vom Nullpunkt zur Ebene immer d = 1

4.3.1 Beispiel Umwandlung in Hessesche Normalform

Ebene E:	$3x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 3$
Hesse'sche Normalform:	$x_1 + \frac{8}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 = 1$

4.4 Orthonormalbasis

In einer Orthonormalbasis stehen die Basisvektoren b_i senkrecht aufeinander und haben die Länge 1

Ausgedrückt mit dem Skalarprodukt bedeutet dies:

Senkrecht aufeinander:	$\vec{b_1} \bullet \vec{b_2} = 0$
Länge 1:	$\vec{b_1} \bullet \vec{b_1} = 1$

4.5 Skalarprodukt

2 Dimensionen

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

3 Dimensionen

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

wenn Basis = Orthonormalbasis!

4.5.1 Eigenschaften des Skalarprodukts

Linearität	linear in $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (bilinear) $\rightarrow$ man kann ausmultiplizieren
Orthagonalität:	$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$
Länge im Quadrat:	$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{u}|^2$
Länge:	$\sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$
Als Matrixprodukt:	$\vec{a}^t\vec{b} = \vec{b}^t\vec{a} = \vec{a} \bullet \vec{b}$

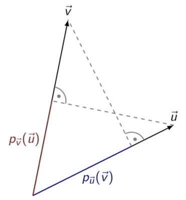
Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

4.6 Länge (Betrag) eines Vektors

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

4.7 Orthagonale Projektion mittels Skalarprodukt



Länge der orthogonalen Projektion von $\vec{v}$ auf $\vec{u}$:

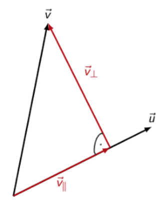
$$p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{|\vec{u}|}$$

Länge der orthogonalen Projektion von $\vec{u}$ auf $\vec{v}$:

$$p_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

4.8 Prallel- und Orthagonalkomponente

Ein Vektor kann in zwei orthagonale Komponenten aufgeteilt werden



Parallelkomponenten:

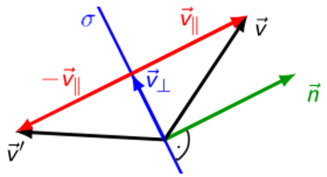
$$\vec{v}_\parallel = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{|\vec{u}|} \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}} \cdot \vec{u}$$

Orthogonalkomponente:

$$\vec{v}_\perp = \vec{v} - \vec{v}_\parallel = \vec{v} - \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}} \cdot \vec{u}$$

4.9 Spiegelung

Der gespiegelte Vektor entspricht $\vec{v'} = \vec{v} - 2\vec{v}_\parallel = \vec{v} - 2\vec{n}\frac{\vec{n} \bullet \vec{v}}{|\vec{n}|^2}$



Beschreibung der Spiegelnugsmatrix S:

$$S = E - 2\frac{1}{|\vec{n}|^2}\vec{n} \bullet \vec{n}^t$$

Wenn $\vec{n}$ Länge 1 hat:
$S = E - 2\vec{n}^0 \bullet \vec{n}^{0t}$

4.10 Orthagonale Matrix / Orthagonalität

Orthagonal heisst: $A^tA = E$
Eine orthagonale Matrix ändert das Skalarprodukt nicht.

Eigenschaften orthagonale Matritzten:
$A^tA = E \quad A^{-1} = A^t \quad A^t$ auch orthagonal

4.11 Hessesche Normalform

Berechnung Abstand d von Punkt $\vec{x}$ zu Ebene
Anwendung in Koordinatenform und Normalform möglich
$\vec{q}$ entspricht dem Stützvektor der Ebene!

4.11.1 Länge des Normalenvektors nicht 1

Koordinatenform	Parameterform
$d = \frac{n_x}{|\vec{n}|}x_1 + \frac{n_y}{|\vec{n}|}x_2 + \frac{n_z}{|\vec{n}|}x_3 - \frac{\vec{n} \bullet \vec{q}}{|\vec{n}|}$	$d = \frac{\vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{q})}{|\vec{n}|}$

4.11.2 Länge des Normalenvektors ist 1

Koordinatenform	Parameterform
$d = n_xx_1 + n_yx_2 + n_zx_3 - \vec{n} \bullet \vec{q}$	$d = \vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{q})$

4.12 Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

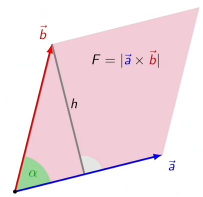
Nur definiert in 3 Dimensionen!

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -(a_1b_3 - a_3b_1) \\ a_1b_2 - a_2b_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$
$$\vec{a} \times \vec{a} = 0$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{b}$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \bullet \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{b}$$

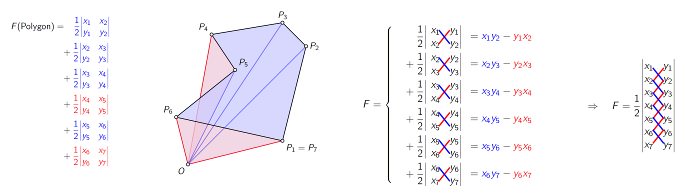
4.12.1 Eigenschaften des Vektorprodukts

- $\vec{a} \times \vec{b}$ ist senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$
  $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{a} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}) = 0$
  $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{b} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}) = 0$
- $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist Fläche eines Parallelogramm
- $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem
- $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ ist Volumen eines Parallelepipeds
- Höhe eines Parallelogramms: $\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{\vec{a}}$
- Zwischenwinkel eines Parallelogramms: $\sin(\alpha) = \frac{h}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \bullet |\vec{b}|}$



4.13 Berechnung von Polygonen (Schuhbändelformel)

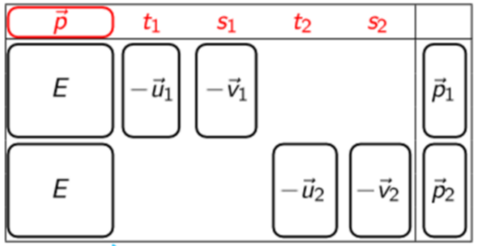
Die Fläche eines Polygons kann aus Flächen von Dreiecken, als über Determinanten berechnet werden:



4.14 Allgemeine Lösung für Schnittprobleme

Um ein Schnittproblem zu lösen kann alles in ein Gauss-Tableau geschrieben werden, welches anschliessend gelöst werden kann.

E	Einheitsmatrix
$\vec{u}, \vec{v}$	Richtungsvektoren
$\vec{p_1}, \vec{p_1}$	Stützvektoren



4.14.1 Beispiel: Schnittpunkt von zwei Geraden

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	s	t	
1	0	0	-7	0	18
0	1	0	2	0	-7
0	0	1	-1	0	0
1	0	0	0	3	-18
0	1	0	0	-4	19
0	0	1	0	-2	7

x_1	x_2	x_3	s	t	
1	0	0	0	0	-3
0	1	0	0	0	-1
0	0	1	0	0	-3
0	0	0	1	0	-3
0	0	0	0	1	-5
0	0	0	0	0	0

Schnittpunkt: $(-3 \mid -1 \mid -3) \quad s = -3 \quad t = -5$

4.14.2 Beispiel: Durchstosspunkt Gerade durch Ebene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	s	u	v	
1	0	0	-1	0	0	0
0	1	0	-1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	-1	0	0
0	1	0	0	0	-1	0
0	0	1	0	-1	-1	0

x_1	x_2	x_3	s	u	v	
1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$
0	1	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$
0	0	1	0	0	0	$\frac{2}{3}$
0	0	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$
0	0	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$
0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$

Durchstosspunkt: $(\frac{1}{3} | \frac{1}{3} | \frac{2}{3}) \quad s = \frac{1}{3} \quad u = \frac{1}{3} \quad v = \frac{1}{3}$

4.14.3 Beispiel: Schnittgerade von 2 Ebenen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	s	t	u	v	
1	0	0	-3	5	0	0	6
0	1	0	2	-3	0	0	4
0	0	1	-2	7	0	0	7
1	0	0	0	0	-4	1	2
0	1	0	0	0	-11	-1	2
0	0	1	0	0	0	-3	4

x_1	x_2	x_3	s	t	u	v	
1	0	0	0	0	0	1	$\frac{10}{3}$
0	1	0	0	0	0	-1	$\frac{17}{3}$
0	0	1	0	0	0	-3	4
0	0	0	1	0	0	2	$-\frac{1}{3}$
0	0	0	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$
0	0	0	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$

Schnittgerade: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{17}{3} \\ 4 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

4.15 Orthonormalisierung

Beschreibt, wie man von einer beliebigen Basis zu einer Orthonormalbasis kommt
Orthonormalbasis: siehe Abschnitt 4.4

4.15.1 Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren

Basisvektoren $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ und $\vec{a_3}$ sind nicht orthagonal. Sie sollen orthagonalisiert werden und durch die Vektoren $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ und $\vec{b_3}$ ausgedrückt werden:

$$\vec{b_1} = \frac{\vec{a_1}}{|\vec{a_1}|} \qquad \vec{b_2} = \frac{\vec{a_2} - (\vec{a_2} \bullet \vec{b_1})\vec{b_1}}{|\vec{a_2} - (\vec{a_2} \bullet \vec{b_1})\vec{b_1}|}$$

$$\vec{b_3} = \frac{\vec{a_3} - (\vec{a_3} \bullet \vec{b_1})\vec{b_1} - (\vec{a_3} \bullet \vec{b_2})\vec{b_2}}{\vec{a_3} - (\vec{a_3} \bullet \vec{b_1})\vec{b_1} - (\vec{a_3} \bullet \vec{b_2})\vec{b_2}}$$ kann beliebig weitergeführt werden

4.16 Least Squares Überbestimmtes Gleichungssystem

Ein Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten ist im allgemeinen nicht lösbar
Wir suchen also eine Lösung, welche am "wenigsten falsch" ist bzw. $|A \cdot \vec{x} - \vec{b}|$ möglichst klein

4.16.1 Beispiel Least Squares

Die Unbekannten sind rot eingefärbt

Gegeben sind Punkte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ in der Ebene. Finde eine Gerade, die (möglichst genau) durch die Punkte verläuft.

Geradengleichung muss für alle (x_i, y_i) erfüllt sein:

$$y_i = ax_i + b$$

n Gleichungen für 2 Unbekannte:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \quad \Rightarrow \quad \text{Least-Squares:} \quad \vec{x} = (A^t A)^{-1} A^t \vec{b}$$

nichtlineare Teile (z.B. d^2) können einfach neu benannt weden ($d^2 = m$) und in das Verfahren eingesetzt werden.
Sobald eine lineare Lösung gefunden ist kann der nichtlineare Teil berechnet werden.

4.17 Kreis und Kugel

4.17.1 Kreis

Vektorgleichung:	$(\vec{p} - \vec{m})^2 = r^2$
Koordinatengleichung:	$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2$

Die Koeffizienten von x und y entsprechen Koordinatenmittelpunkt:
$x^2 - 2m_x x + m_x^2 + y^2 - 2m_y y + m_y^2 = r^2$

Beispiel

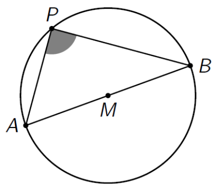
$$x^2 - 4x \quad + y^2 + 6y \quad - 12 = 0$$

quadratisches Ergänzen:

$$x^2 - 4x + 2^2 + y^2 + 6y + 3^2 - 2^2 - 3^2 - 12 = 0$$
$$(x-2)^2 \quad + (y+3)^2 \quad = 5^2$$

$\Rightarrow$ Kreis um den Mittelpunkt $M = (2, -3)$ mit Radius $r = 5$

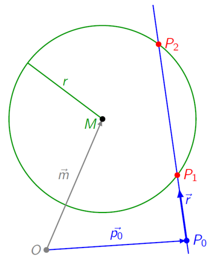
4.17.2 Thales-Kreis



Thales-Kreis:

$$\left(\vec{p} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)^2 = r^2$$

4.17.3 Durchstosspunkt Gerade-Kreis



Gleichungen

Gerade: $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{r}$

Kreis: $(\vec{p} - \vec{m}) \cdot (\vec{p} - \vec{m}) = r^2$

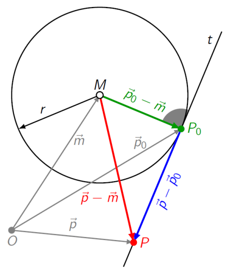
Einsetzen

$$(\vec{p}_0 + t\vec{r} - \vec{m})^2 = r^2$$
$$(\vec{p}_0 - \vec{m})^2 + 2t\vec{r} \cdot (\vec{p}_0 - \vec{m}) + t^2\vec{r}^2 = r^2$$
$$\vec{r}^2 t^2 + 2\vec{r} \cdot (\vec{p}_0 - \vec{m})t + (\vec{p}_0 - \vec{m})^2 - r^2 = 0$$

quadratische Gleichung mit Lösungen t_i

$$\vec{p}_i = \vec{p}_0 + t_i\vec{r}$$

4.17.4 Tangente an Kreis



Tangentengleichung

Kreisgleichung

$$(\vec{p}_0 - \vec{m}) \cdot (\vec{p}_0 - \vec{m}) = |\vec{p}_0 - \vec{m}|^2 = r^2$$

Tangente t in $P_0 \perp$ Radiusvektor

$$(\vec{p}_0 - \vec{m}) \perp (\vec{p} - \vec{p}_0)$$
$$\Rightarrow (\vec{p}_0 - \vec{m}) \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0) = 0$$

Summe = Tangentengleichung

$$(\vec{p}_0 - \vec{m}) \cdot (\vec{p} - \vec{m}) = r^2$$

Die Länge der Projektion von $\vec{p} - \vec{m}$ auf $\vec{p}_0 - \vec{m}$ ist r.

4.17.5 Kugel

Vektorgleichung: $(\vec{p} - \vec{m})^2 = r^2$

Koordinatengleichung: $(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 + (z - m_z)^2 = r^2$

4.17.6 Zusammenfassung Kugel

- **Gleichung für Kugel** mit Mittelpunkt M und Radius r

$$|\vec{p} - \vec{m}|^2 = (\vec{p} - \vec{m}) \bullet (\vec{p} - \vec{m}) = r^2$$

- **Durchstosspunkt**: Geradengleichung $\vec{p} = \vec{p}_0 + s \cdot \vec{r}$ in Kugelgleichung einsetzen

$$(\vec{p}_0 + s \cdot \vec{r} - \vec{m}) \bullet (\vec{p}_0 + s \cdot \vec{r} - \vec{m}) = r^2$$
$$\vec{r} \bullet \vec{r} \cdot s^2 + 2\,(\vec{p}_0 - \vec{m}) \bullet \vec{r} \cdot s + (\vec{p}_0 - \vec{m}) \bullet (\vec{p}_0 - \vec{m}) - r^2 = 0$$

- **Tangentialebene** an Kugel im Punkt P_1
  a) $(\vec{p} - \vec{p}_1) \perp (\vec{p}_1 - \vec{m})$
  $$\Rightarrow \quad (\vec{p} - \vec{p}_1) \bullet (\vec{p}_1 - \vec{m}) = 0$$
  b) $\perp$ Projektion von $(\vec{p} - \vec{m})$ auf $(\vec{p}_1 - \vec{m})$
  $$\Rightarrow \quad (\vec{p} - \vec{m}) \bullet (\vec{p}_1 - \vec{m}) = r^2$$

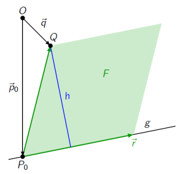
4.18 Abstandsprobleme

4.18.1 Abstand Punkt-Ebene

Berechnung mittels Hessescher Normalform

4.18.2 Abstand Punkt-Gerade

Der Abstand h zwischen der Geraden g und dem Punkt Q entspricht dem Lot zur Geraden g durch Q
Gerade in Paramterdarstellung: $\vec{p} = \vec{p_0} + t\vec{r}$



$$h = \frac{F}{|\vec{r}|} = \frac{r \times (|\vec{q} - \vec{p_0}|)}{|\vec{r}|}$$

4.18.3 Abstand windschiefer Geraden in 3D

Zwei Geraden in Parameterdarstellung:
$\vec{p} = \vec{p_0} + t\vec{r_1}$ und $\vec{q} = \vec{q_0} + 2\vec{r_2}$
die sich nicht schneiden und nicht parallel sind

Abstand $d = (\vec{q_0} - \vec{p_0}) \bullet \frac{\vec{r_1} \times \vec{r_2}}{|\vec{r_1} \times \vec{r_2}|}$

4.18.4 Minimaler Abstand

Aufgabe

Gegeben $A_i \in M_{n \times m_i}$ und $p_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$. Finde die Punkte

$$y_i \in \{A_i x_i + p_i \mid x_i \in \mathbb{R}^{m_i}\},$$

minimalen Abstandes.

Interpretation

Finde x_i $(i = 1, 2)$ derart, dass

$$d = |(p_1 + A_1 x_1) - (p_2 + A_2 x_2)|$$

minimal wird.

Minimalproblem

Kombiniere x_1 und x_2 in einen Vektor $x \in \mathbb{R}^m$, $m = m_1 + m_2$ und A_1 und $-A_2$ in eine $n \times m$-Matrix A:

$$Ax = \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = p_2 - p_1$$

Lösung

Least Squares Problem mit A und $b = p_2 - p_1$

5 Eigenwerte / Eigenvektoren

Ein Vektor $\vec{v}$ heisst Eigenvektor der $n \times n$ Matrix A zum Eigenwert λ, wenn

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \text{und} \quad v \neq 0$$

Eigenschaften

- Ein Eigenvektor $\vec{v}$ wird durch die Matrix A nur gestreckt (Streckungsfaktor λ)
- Es gibt maximal n verschiedene Eigenwerte λ
- Zu jedem Eigenwert gibt es unendlich viele Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren finden

1. Eigenwertproblem: $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow (A - \lambda E)\vec{v} = 0$
2. Charakteristische Gleichung: $\det(A - \lambda E) = 0$
3. Berechnung der Eigenwerte λ_i als Lösungen der charakteristischen Gleichung
4. Berechnung der Eigenvektoren $\vec{v_i}$ mittels Gauss-Algorithmus: $(A - \lambda_i E)\vec{v_i} = 0$
5. Resultat kontrollieren: $A\vec{v_i} = \lambda_i \vec{v_i}$

Hinweis: Wenn AA^t oder A^tA eine Zeile und Spalte mit nur einem Zahleneintrag enthalten, so ist die Zahl ein Eigenwert zum zugehörigen Standardbasisvektor.
Die weiteren EW und EV können ohne diese Zeile/Spalte berechnet werden!

5.1 Eigenschaften der Matrix A bzgl. Eigenwerte

- $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(A')$ = Summe der Eigenwerte von A
- $\det(A) = \det(A')$ = Produkt aller Eigenwerte von A

$$AA^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 9 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Aus AA^t kann man $\lambda = 9$ direkt ablesen.

Daraus folgt: $\vec{v_\lambda} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5.1.1 Beispiel Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen

Matrix

Finde die EW und EV der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte

Charakteristisches Polynom:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6$$
$$\lambda_\pm = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

Eigenvektoren

Für $\lambda = 3$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0-3 & 3 & 0 \\ -2 & 5-3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Av_3 = 3v_3$$

Für $\lambda = 2$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0-2 & 3 & 0 \\ -2 & 5-2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad Av_2 = 2v_2$$

Rechenregeln für Eigenwerte $\frac{1}{\lambda} = \lambda - 1$

5.2 Diagonalisierung einer Matrix

Mit Diagonalmatritzen kann man einfach rechnen

Eine Matrix ist diagonalisierbar, wenn:

- Die Matrix symmetrisch ist , also $A = A^t$
- **Eine Basis aus Eigenvektoren existiert**

5.2.1 Vorgehen Matrix diagonalisieren

1. Eigenbasis C aus n linear unabh. Eigenvektoren finden
   Spalten von C sind Eigenvektoren
2. Basis-Transformationsmatrix T berechnen
   $T = C^{-1} \rightarrow$ Matrix aus Eigenvektoren invertieren
3. Diagonalisierte Matrix A' berechnen
   $A' = TAT^{-1} \rightarrow$ A' enhält Eigenwerte auf Diagonalen

1. Eigenbasis $C = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ aus n linear unabhängigen Eigenvektoren finden.
2. Basis-Transformationsmatrix T berechnen

$$T = C^{-1} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{pmatrix}^{-1}$$

3. Diagonalisierte Matrix A' berechnen.

$$A' = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

5.2.2 Transofotmationsmatrix T; Eigenbasis C

- Die Eigenbasisis-Matrix C enthält in ihren Spalten die Eigenvektoren der Matrix A (Anfangsmatrix)
- Die Transformationsmatrix T ist die Inverse von C

5.2.3 Spezialfall Symmetrische Matrix diagonalisieren

Die Eigenvektoren einer symmetischen Matrix sind orthagonal

5.3 Singulärwertzerlegung (SVD)

Eine $m \times n$ Matrix A wird zerlegt in zwei orthagonale Matrizten und eine Diagonalmatrix
$A = U\,\Sigma\,V^t$

U	orthagonale $m \times m$ Matrix (U diagonalisiert AA^t)
V	orthagonale $n \times n$ Matrix (V diagonalisiert A^tA)
V^t	Transponierte von U
Σ	Diagnonalmatrix mit r Singulärwerten σ_0 bis σ_r

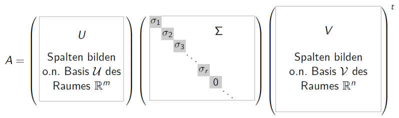


Bild
Die Vektoren $u_1, \dots, u_r$ bilden eine orthonormierte Basis des Bildes im A

Rang
Rang $A = r$

Kern
Die Vektoren $v_{r+1}, \dots, v_n$ bilden eine orthonormierte Basis des Kerns ker A

Komplement
$\langle u_{r+1}, \dots, u_m \rangle = \text{im } A^\perp$

Komplement
$\langle v_1, \dots, v_r \rangle = \ker A^\perp$

5.3.1 Vorgehen Singulärwertzerlegung

1. AA^t und A^tA berechnen
2. Eigenwerte von AA^t oder A^tA berechnen (EW identisch)
3. Eigenwerte der Grösse nach sortieren: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r \geq 0$
4. $V =$ auf Länge 1 normierte Eigenvektoren von A^tA
5. $U =$ Spalten u_i mit $u_i = \frac{Av_i}{|Av_i|}$
6. Singulärwerte bestimmen: $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ und Matrix Σ füllen
7. Kontrolle mit $A = U\,\Sigma\,V^t$

5.4 Pseudoinverse

Die Pseudoinverse löst Gleichungssysteme mit der Lösung minimaler Länge
$|x|$ ist minimal

Pseudoinverse von Σ

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r^{-1} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Pseudoinverse von $A = U\Sigma V^t$

$$A = U\Sigma V^t \quad \Rightarrow \quad A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^t$$

Lösung eines unterbestimmten Gleichungssystems

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ eine } m \times n \text{ Matrix } m < n \\ \text{Rang}(A) = m \\ b \in \mathbb{R}^m \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Lösung:} \\ x = A^\dagger b \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle = \ker A^\perp \\ \text{hat unter allen Lösungen minimale Länge} \end{array}\right.$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad A^\dagger = \begin{pmatrix} -0.037940 & 0.126920 \\ 0.035230 & 0.013098 \\ 0.116531 & -0.020777 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0.54545 \\ -0.18182 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -0.45455 \\ 2.81818 \\ 1 \end{pmatrix} \middle|\ z \in \mathbb{R} \right\} \qquad A^\dagger b = \begin{pmatrix} 0.507678 \\ 0.052394 \\ -0.083107 \end{pmatrix}$$

$$A^\dagger b \bullet \vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad A^\dagger b \perp \vec{r}$$

6 Matritzenzerlegung

Matritzen werden aus den folgenden Gründen zerlegt:

- schwierige Matrix in einfachere Matritzen aufteilen
- Vereinfachung schwieriger Berechnungen
  z.B. Eigenwertzerlegung $A = T^{-1}A'T$
- Verienfachte Berechnung der Determinanten

6.1 LU-Zerlegung ($A = L \cdot U$)

Rechnung: $\det(A) = \det(L) \cdot \det(U)$
L = Matrix bestehnd aus Pivot-Spalten (oben rechts Nullen)
U = Diagonale mit 1en, oben rechts Elemente von Gauss ohne Rückwärts-Einsetzen, unten rechts Nullen

6.1.1 Beispiel LU-Zerlegung

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -6 & -4 & 2 \\ 3 & 13 & -18 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \text{Gauss-Algorithmus durchführen}$$

3	3	-3
-6	-4	2
3	13	-18

1	1	-1
0	2	-4
0	10	-15

1	1	-1
0	1	-2
0	0	5

1	1	-1
0	1	-2
0	0	1

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 3 & 10 & 5 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.2 LR-Zerlegung ($A = L' \cdot R$)

Die LR-Zerlegung (bzw. L'R-Zerlegung) entsteht aus der LU-Zerlegung

Rechnung: $\det(A) = \det(L') \cdot \det(R)$
$L' = LD^{-1}$
$R = DU$
D = Diagonalmatrix mit den Pivot-Elementen

6.2.1 Beispiel LR-Zerlegung

Fortsetzung des Beispiels der LU-Zerlegung!

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$L' = LD^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 5 \\ 3 & 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = DU = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.3 Cholesky-Zerlegung ($A = LL^t$)

- Cholesky-Zerlegung existiert nur für **positiv definite, quadratische** Matritzten!
- Matritzen mit negativer Determinante haben keine Cholesky-Zerlegung
- Matritzen mit Cholesky-Zerlegung haben Eigenwerte $\lambda_i > 0$
- Cholesky-Zerlegung entspricht "Wurzel ziehen"

$$\det(LL^t) = \det(L)^2 > 0$$

6.3.1 Beispiel Cholesky-Zerlegung

Die Matrizen L und L^t werden durch ausprobieren gefunden
Als Vorbereitung überall wo Nullen stehen müssen, die Nullen einfüllen!
Anschliessend Schritt für Schritt die benötigten Werte berechnen

$$A = LL^t = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 6 & 10 & -7 \\ -4 & -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Werte (Dokumentation Lösungsweg)

$$L_{11} = L_{11}^t \qquad ?\cdot? = ?^2 = 4 \qquad ? = \sqrt{4} = 2$$

$$L_{21} = L_{12}^t \qquad 2\cdot? = 6 \qquad ? = 6/2 = 3$$

$$L_{31} = L_{13}^t \qquad 2\cdot? = -4 \qquad ? = -4/2 = -2$$

$$L_{22} = L_{22}^t \qquad 3^2 + ?^2 = 10 \qquad ? = \sqrt{10 - 3^2} = 1$$

$$L_{32} = L_{23}^t \qquad -2\cdot 3 + 1\cdot? = -7 \qquad ? = \frac{-7-(-2)\cdot 3}{1} = -1$$

$$L_{33} = L_{33}^t \qquad -2^2 + -1^2 + ?^2 = 6 \qquad ? = \sqrt{6 - (-2)^2 - (-1)^2} = 1$$

6.4 QR-Zerlegung $A = Q \cdot R$

$Q =$ orthagonale Matrix; Spalten sind mit Gram-Schmidt orthagonalisierte Spalten der Matrix A
$R =$ obere Dreiecksmatrix mit Koeffizienten der Linearkombination von Spalten von Q

$$R = Q^{-1}A = Q^tA$$

6.4.1 Beispiel QR-Zerlegung

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{a_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b_1} = \frac{\vec{a_1}}{|\vec{a_1}|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b_2} = \frac{\vec{a2} - (\vec{b_1} \bullet \vec{a_2})\cdot \vec{b_1}}{|\vec{a2} - (\vec{b_1} \bullet \vec{a_2})\cdot \vec{b_1}|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$R = Q^{-1}A = Q^tA = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{43}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

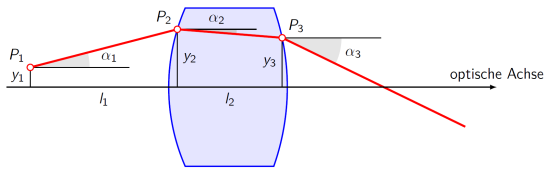
7 TI nspire CX CAS

Zweck	**Befehl**	
Matrix erstellen	menu - 7 - 1	
Skalarprodukt	dotP([Vektor], [Vektor])	
Kreuzprodukt	crossP([Vektor], [Vektor])	
Gauss-Algorithmus RREF	menu - 7 - 5	
Zeilenoperationen	menu - 7 - 9 - X	
Determinante	menu - 7- 3	
Matrix transponieren	menu - 7- 2	
Matrix invertieren	$[\text{Matrix}]^{-1}$	
Spur	menu - 7 - B - 1	
LR-Zerlegung	menu - 7 - B - 2	
QR-Zerlegung	menu - 7 - B - 3	
Eigenwerte	menu - 7 - B - 4	
Eigenvektoren	menu - 7 - B - 5	
Char. Polynom	menu - 7 - B - 6	charPoly(Matrix, x)

8 Anwendungsbeispiele aus der Vorlesung

8.1 Matrixoptik

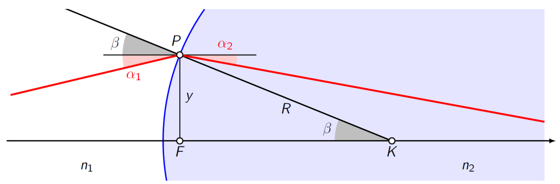
Beschreibung eines Lichtstrahls



$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_3 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

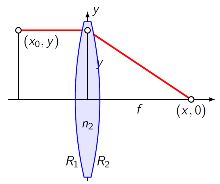
$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Höhe über der optischen Achse} \\ \text{Winkel zur optischen Achse} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_3 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = T_{l_2}\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Brechung an einer Kugelfläche



$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin(\beta + \alpha_2)}{\sin(\beta + \alpha_1)} \simeq \frac{\beta + \alpha_2}{\beta + \alpha_1} \simeq \frac{y/R + \alpha_2}{y/R + \alpha_1} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R}\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}}_{= B(n_1, n_2, R)} \begin{pmatrix} y \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Brennweite einer dünnen Linse



Idealisierung
Unendlich dünne Linse:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transfermatrix der Linse:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} B(n_2, 1, -R_2)T_\varepsilon B(1, n_2, r_1) = B(n_2, 1, -R_2)B(1, n_2, r_1)$$

$$T_{\text{Linse}} = B(n_2, 1, -R_2)B(1, n_2, R_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)(n_2 - 1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bedingung:} \quad T_f T_{\text{Linse}} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ? \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} \frac{1}{n_2 - 1}$$

Dioptrie

Ziel
Eine Grösse finden, mit der sich kombinierte Linsen leicht berechnen lassen

Definition
Eine dünne Linse mit Brennweite f hat die *Brechkraft* $1/f$, Masseinheit *Dioptrie*

$$1 \text{ dpt} = 1 \frac{1}{\text{m}}$$

Rechenregeln
Zwei Linsen mit Brechkraft d_1 und d_2 wirken wie eine Linse mit Brechkraft $d_1 + d_2$

Beweis mit Matrixoptik
Einzelne dünnen Linse

$$T_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

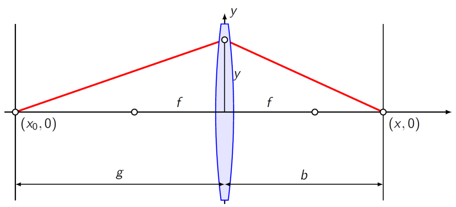
Kombination zweier Linsen:

$$T_{f_1} T_{f_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} = T_f$$

Rechnung mit Dioptrien:

$$d_1 + d_2 = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} = d$$

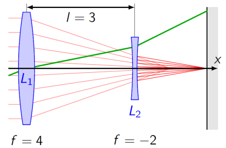
Abbildungsgesetz



$$T_{\text{Linse}} \begin{pmatrix} y \\ y/g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -y/b \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/b \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Effektive Brennweite — Telekonverter

Sammellinse + Zerstreuungslinse = lange Brennweite + kurze Baulänge



$$\left.\begin{aligned} T_{L_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix} \\ T_l &= \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ T_{L_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} T &= T_{L_2} T_l T_{L_1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{l}{4} & l \\ \frac{1}{4} - \frac{l}{8} & \frac{l}{2} + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Brennebene: $\quad T_f Te_1 = \begin{pmatrix} 1/4 - f/8 \\ -1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ? \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f = 2$

Baulänge: $\quad \Rightarrow \quad x = 5$

effektive Brennweite: $\quad T_f Te_2 = \begin{pmatrix} 5f/2 + 3 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5/2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f_{\text{eff}} = 8$

8.2 Kettenbrüche

Ein periodischer Kettenbruch

$$y = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\dots}}}}}$$

Idee
y taucht als roterTeil des Kettenbruchs wieder auf

Aufgabe
Finde gute Näherungsbrüche für φ

Gleichung für y

$$y = 1 + \frac{1}{y}$$
$$y^2 - y - 1 = 0$$
$$y_\pm = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

da das gesuchte $y > 0$ ist:

$$y = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi \approx 1.61803398874989484820$$

Kettenbruch für $\sqrt{2} = [1; 2, 2, \dots] \approx 1.4142135\dots$

Berechnung der a_i

$$\sqrt{2} = a_0 + \frac{1}{x_0} \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1 \quad \text{und} \quad x_0 = \frac{1}{\sqrt{2} - a_0}$$
$$x_0 = \frac{1}{0.4142135\dots} = a_1 + \frac{1}{x_1} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{1}{x_0 - a_1}$$
$$x_1 = \frac{1}{0.4142135\dots} = a_2 + \frac{1}{x_2} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{x_1 - a_2}$$
$$x_2 = \frac{1}{0.4142135\dots} = a_3 + \frac{1}{x_3} \quad \Rightarrow \quad a_3 = 2 \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{1}{x_2 - a_3}$$
$$\vdots$$

Kontrolle

$$x = 1 + \frac{1}{1+x} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Brüche und Matrizen

Brüche als Vektoren

$$\frac{p}{q} \to \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Kettenbruch als Matrix

$$\frac{p'}{q'} = \frac{b}{a + \frac{p}{q}} = \frac{bq}{aq+p}$$
$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} b & p' \\ a & q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix}$$

Paare von Brüchen

$$\left(\frac{0}{1}, \frac{b_n}{a_n}\right) = \begin{pmatrix} 0 & b_n \\ 1 & a_n \end{pmatrix}$$
$$\left(\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}, \frac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & b_{n-1} \\ 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_n \\ 1 & a_n \end{pmatrix}$$

Iteration
Kettenbruch von rechts nach links aufbauen

$$\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right) = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & b_n \\ 1 & a_n \end{pmatrix}$$

Von links nach rechts

Assoziativgesetz: $A(BC) = (AB)C$

$$\left(\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}\right) = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}$$
$$\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right) = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}$$
$$\vdots$$
$$\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right) = \begin{pmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ q_{n-2} & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_n \\ 1 & a_n \end{pmatrix}$$

Iterationsformel für Zähler und Nenner:

$$p_n = p_{n-2} b_n + p_{n-1} a_n$$
$$q_n = q_{n-2} b_n + q_{n-1} a_n$$

Beispiel: $[0; 1, 1, 1, \dots]$

$$\begin{pmatrix} 0 & b_k \\ 1 & a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

$\Rightarrow$ Potenzen einer Matrix berechnen...

Iteration für Zähler und Nenner

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}, \quad p_0 = 0, \quad p_1 = 1$$
$$q_n = q_{n-1} + q_{n-2}, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = 1$$
$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n}{p_{n+1}} \to \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

{ p_n sind die Fibonacci-Zahlen

Faktorisierung und a_0

Faktorisierung

$$a + \frac{p}{q} = \frac{aq+p}{q} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} aq+p \\ q \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=A_a} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$
$$\frac{b}{a + \frac{p}{q}} = \frac{bq}{aq+p} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} bq \\ aq+p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=R_b} \begin{pmatrix} aq+p \\ q \end{pmatrix}$$
$$K_{b,a} = R_b A_a = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

Der Summand a_0

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = A_{a_0}[0; a_1, a_2, a_3, \dots] \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix} = A_{a_0} \prod_{k=1}^{n} K_{b_k, a_k}$$

8.3 Rekursionsformeln

Anwendung Eigenwerte / Eigenvektoren / Eigenbasis

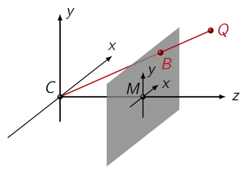
Differenzengleichung: $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$
Anfangswerte: $x_0 = 0, \quad x_1 = 1$

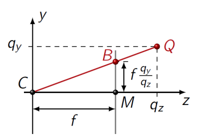
In Matrixform:
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

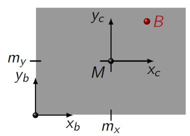
Formel für x_n:
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = (T^{-1}(A')^n T) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)}$$

8.4 Kamerageometrie

Kamera-Abbildungsmatrix K





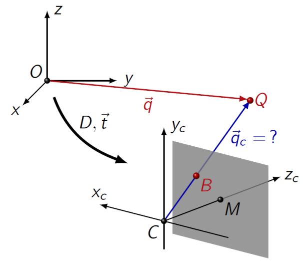


$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\,\frac{q_x}{q_z} \\ f\,\frac{q_y}{q_z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b_x \cdot q_z \\ b_y \cdot q_z \\ q_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f & 0 & m_x \\ 0 & f & m_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{K} \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}$$

Basis-Transformation

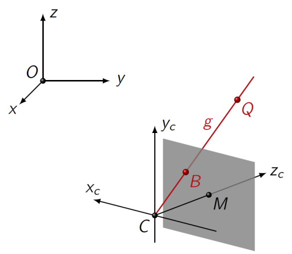
- Basis-Transformation:
$$\vec{q}_c = D(\vec{q} - \vec{c}) = D\vec{q} - D\vec{c} = D\vec{q} + \vec{t} \quad \text{mit} \quad \vec{t} = -D\vec{c}$$



Kamera-Projektionsmatrix P

- Basis-Transformation:
$$\begin{aligned} \vec{q}_c &= D(\vec{q} - \vec{c}) \\ &= D(E\vec{q} - \vec{c}) \\ &= D\begin{pmatrix} E & -\vec{c} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{q} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{q}} \end{aligned}$$
- Kamera-Abbildungsmatrix:
$$\lambda\,\tilde{b} = K\vec{q}_c$$
- Kamera-Projektionsmatrix:
$$\lambda\,\tilde{b} = P\tilde{q} \quad \text{mit} \quad P = K\,D\begin{pmatrix} E & -\vec{c} \end{pmatrix}$$

Gerade (Strahl) berechnen



Gerade: $\vec{p} = \vec{c} + s \cdot \vec{r}$
mit $\vec{r} = (KD)^{-1}\tilde{b}$

8.5 Widerstandsnetzwerk

Randoperator ∂

Spalte i von ∂ beschreibt Kante i:

- "von" $= -1$
- "nach" $= +1$

$$
\partial = \begin{array}{c}
\text{Kanten} \\
\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}\ \text{Knoten}
$$

Geschlossene Zyklen

Lösungen des Gleichungssystems $\partial z = 0$ sind geschlossene Zyklen.

$$
\partial z = \begin{pmatrix}
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Gauss-Algorithmus

Lösung des Gleichungssystems $\partial z = 0$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	0	0	0	0	1	0	0	−1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	−1	0	0
0	0	1	0	0	−1	0	0	1	0	0	−1	0
0	0	0	1	0	1	−1	0	−1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	−1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	−1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
					*	*		*		*	*	

Frei wählbare Kanten: 6, 7, 9, 11 und 12

Lösungsmenge

Lösungsmenge des Gleichungssystems $\partial z = 0$:

$$
\mathbb{L} = \left\{
\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \\ k_7 \\ k_8 \\ k_9 \\ k_{10} \\ k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix}
= k_6 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
+ k_7 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
+ k_9 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
+ k_{11} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
+ k_{12} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\right\}
$$