

Physik

Zusammenfassung an der OST

Fabian Suter, 13. Juni 2024

<https://github.com/FabianSuter/Physik.git>

1 Statik

1.1 Schwerkraft (Gewichtskraft)

$$\text{Allgemein: } F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$\text{Erde: } F_G = G \cdot \frac{m_E \cdot m}{r_E^2} = m \cdot g$$

| | | |
|-------|-----------------------|--|
| F_G | Gewichtskraft | $[F_G] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = \text{N}$ |
| G | Gravitationskonstante | $6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ |
| m_i | Massen der Körper | $[m] = \text{kg}$ |
| r | Abstand der Massen | $[r] = \text{m}$ |
| g | Erdbeschleunigung | $9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |
| m_E | Masse der Erde | $5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ |
| r_E | Erdradius | $6.378 \cdot 10^6 \text{ m}$ |

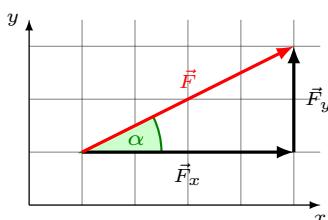
1.2 Normalkraft (Kontaktkraft)

(Sekundär-) Kraft, welche sich so anpasst, dass in Ruhe ein Kräftegleichgewicht herrscht:

$$F_G = -F_N \quad \Rightarrow \text{im Gleichgewicht auf horizontaler Oberfläche}$$

1.3 Zerlegung von Kräften

Kraftvektoren kann man komponentenweise aufteilen:



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_Z$$

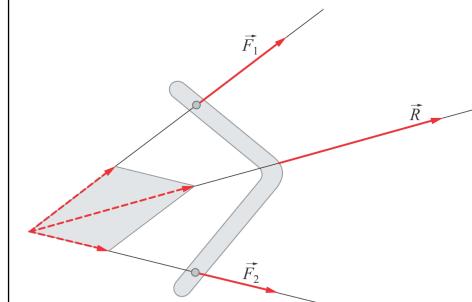
hilfreich beim Lösen von Aufgaben!

1.4 Gleichgewichtsbedingungen für Massepunkte

Der Massepunkt erfährt keine Beschleunigung
⇒ Summe aller wirkenden Kräfte ist 0

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \text{komponentenweise}$$

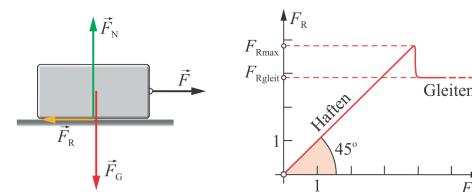
$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_x = \vec{0} \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_y = \vec{0} \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_z = \vec{0}$$



Dieses Verfahren kann auch mehrfach angewendet werden!

1.5 Haftriebung / Gleitreibung

1.5.1 Trockene Festkörperreibung



$$\text{Haftriebung: } \vec{F}_{R,max} = \mu_H \cdot \vec{F}_N$$

$$|\vec{F}_R| \leq |\vec{F}_{R,max}|$$

$$\text{Gleitreibung: } \vec{F}_{Gleit} \approx \mu_G \cdot \vec{F}_N$$

| | | |
|-------------------|--------------------|--------------------------------|
| \vec{F}_R | Reibungskraft | $[\vec{F}_R] = \text{N}$ |
| $\vec{F}_{R,max}$ | Haftriebungskraft | $[\vec{F}_{R,max}] = \text{N}$ |
| \vec{F}_{Gleit} | Gleitreibungskraft | $[\vec{F}_{Gleit}] = \text{N}$ |

1.5.2 Viskose Reibung

Sobald Schmiermittel zum Einsatz kommen, ist die Reibungskraft abhängig von der Grösse der Berührungsfläche:

Bei gleicher Normalkraft F_N ist bei

- kleinerem Flächendruck die Reibung kleiner
- grösserem Flächendruck die Reibung grösser

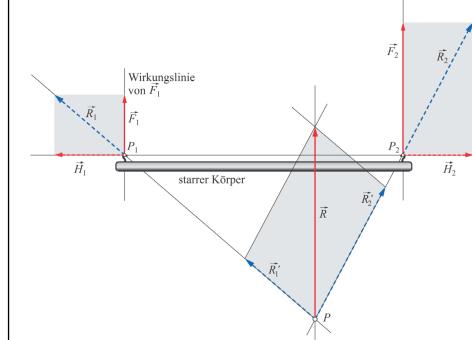
1.6 Starre Körper

- Ein starrer Körper wird durch angreifende Kräfte nicht deformiert
- Bei einem starren Körper kann die Kraft entlang ihrer Wirkungslinie beliebig verschoben werden

1.7 Addition von Kräften

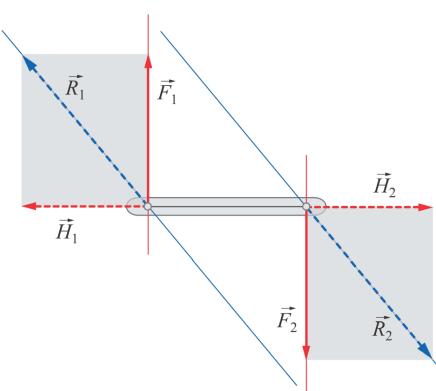
1.7.1 Spezialfall: Ebene Kräftegruppe für schiefe Wirkungslinie

Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie verschieben
⇒ Im Schnittpunkt vektorielle Addition der Kräfte durchführen, um die resultierende Kraft zu erhalten.



1.7.3 Spezialfall: Ebene Kräftegruppe für parallel, entgegengesetz und gleich grosse Kräfte

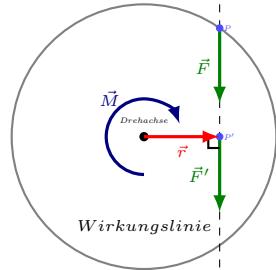
Kräftepaare können in andere Kräftepaare umgewandelt werden, aber niemals zu einer resultierenden Kraft R vereinfacht werden.



1.8 Drehmoment

Eine Drehwirkung auf einen starren Körper lässt sich auf zwei verschiedene Arten und Weisen erzeugen:

- Kräftepaar
- einzelne Kraft und Bezugspunkt (Drehzentrum)



$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = a \cdot |\vec{F}|$$

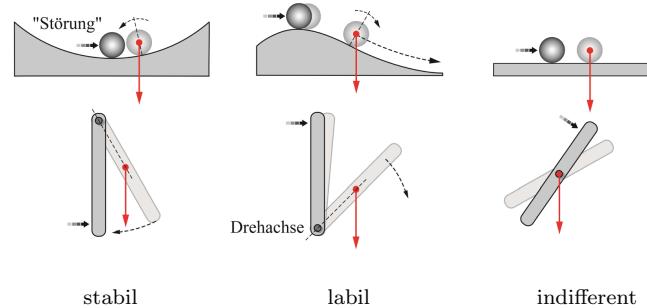
Die Länge a muss **senkrecht** zur wirkenden Kraft sein!

| | | |
|-----------|-------------------|-------------------|
| \vec{M} | Drehmoment | $[M] = \text{Nm}$ |
| \vec{r} | Abstandsvektor | $[r] = \text{m}$ |
| \vec{F} | Angreifende Kraft | $[F] = \text{N}$ |

1.9 Gleichgewichtsbedingungen für starre Körper

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad \sum_{i=1}^m \vec{M}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \text{komponentenweise}$$

1.10 Gleichgewichts-Arten



1.11 Deformierbare Körper

1.11.1 Spannungen

Zugspannung σ

senkrecht wirkende Kraft pro Flächeneinheit
Wenn $\sigma < 0$ spricht man von **Druck**

$$\sigma = \frac{F_{\perp}}{A} \quad [\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Schubspannung τ (Scherung)

parallel wirkende Kraft pro Flächeneinheit

$$\tau = \frac{F_{\parallel}}{A} \quad [\tau] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

1.11.2 Dehnung ϵ (Hook'sches Gesetz)

$$\epsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma = \frac{1}{E} \cdot \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{\Delta l}{l}$$

| | | |
|------------|---|-------------------------------------|
| ϵ | Dehnung | $[\epsilon] = 1$ |
| E | Elastizitätsmodul (Materialeigenschaft) | $[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ |
| l | Länge des Körpers vor Dehnung | $[l] = \text{m}$ |
| Δl | Längenunterschied bei Dehnung | $[\Delta l] = \text{m}$ |
| σ | Zugspannung | $[\sigma] = \text{N}$ |
| A | Querschnittsfläche | $[A] = \text{m}^2$ |

⇒ Das Hook'sche Gesetz gilt nur, solange die Deformation linear-elastisch ist!

1.11.3 Querkontraktion ϵ_q

Wird ein Stab gedehnt (länger), so wird er automatisch auch dünner

$$\epsilon_q = \frac{\Delta d}{d} = -\mu \epsilon \quad \mu \in (0; 0.5)$$

| | | |
|--------------|------------------------------------|-------------------------|
| ϵ_q | Querkontraktion | $[\epsilon_q] = 1$ |
| d | Ursprüngliche Dicke des Materials | $[d] = \text{m}$ |
| Δd | Dicken-Änderung | $[\Delta d] = \text{m}$ |
| ϵ | (Längs-) Dehnung | $[\epsilon] = 1$ |
| μ | Poisson-Zahl (Materialeigenschaft) | $[\mu] = 1$ |

1.11.4 Kompression $\frac{\Delta V}{V}$

Ein Körper wird von allen Seiten mit dem gleichen Druck belastet, sodass sich sein Volumen verkleinert

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \cdot \Delta p \quad (K = \frac{1}{\kappa})$$

| | | |
|------------|------------------------------------|--|
| V | Ursprüngliches Volumen des Körpers | $[V] = \text{m}^3$ |
| ΔV | Volumenänderung | $[\Delta V] = \text{m}^3$ |
| κ | Kompressibilität | $[\kappa] = \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$ |
| Δp | Druckänderung | $[\Delta p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$ |

$$\text{Würfel: } \Rightarrow \kappa = \frac{3}{E} (1 - 2\mu)$$

Völlig inkompressibler Körper: $\kappa = 0$ $K = \infty$ $\mu = 0.5$

1.11.5 Schubbeanspruchung (Scherung)

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (\text{gilt für isotrope Materialien})$$

| | | |
|----------|---|--|
| γ | Scherwinkel | $[\gamma] = {}^\circ$ |
| G | Schubmodul; Gleitmodul; Torsionsmodul | $[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ |
| τ | Schubspannung | $[\tau] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ |
| E | Elastizitätsmodul (Materialeigenschaft) | $[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ |
| μ | Poisson-Zahl (Materialeigenschaft) | $[\mu] = 1$ |

1.11.6 Torsionsfeder

$$M = c \cdot \Phi \quad c = \frac{\pi G r^4}{2l}$$

| | | |
|--------|------------------|-------------------------------------|
| M | Drehmoment | $[M] = \text{Nm}$ |
| c | Auslenkkonstante | $[c] =$ |
| Φ | Auslenkwinkel | $[\Phi] = {}^\circ$ |
| G | Schubmodul | $[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ |
| r | Radius der Feder | $[r] = \text{m}$ |
| l | Länge der Feder | $[l] = \text{m}$ |

1.11.7 Schraubenfeder

$$F = c \cdot \Delta l \quad c = \frac{Gr^4}{4nR^3}$$

| | | |
|------------|--------------------------|-------------------------------------|
| F | Kraft | $[F] = \text{N}$ |
| c | Auslenkkonstante | $[c] =$ |
| Δl | Längenänderung | $[\Delta l] = \text{m}$ |
| G | Schubmodul | $[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ |
| r | Drahtradius der Feder | $[r] = \text{m}$ |
| R | Windungsradius der Feder | $[R] = \text{m}$ |
| n | Anzahl Windungen | $[n] =$ |

1.11.8 Zugfeder

$$F = k \cdot \Delta x = \frac{A \cdot E}{x_0} \cdot \Delta x$$

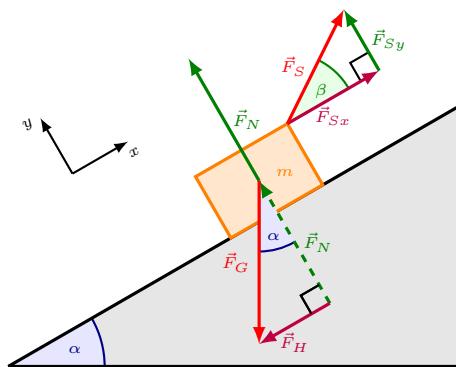
| | | |
|------------|---|-------------------------------------|
| F | Kraft | $[F] = \text{N}$ |
| k | Auslenkkonstante | $[k] =$ |
| Δx | Längenänderung | $[\Delta x] = \text{m}$ |
| x_0 | Ruhelänge der Feder | $[x_0] = \text{m}$ |
| E | Elastizitätsmodul (Materialeigenschaft) | $[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ |
| A | Querschnitt der Feder | $[A] = \text{m}^2$ |

1.11.9 Blattfeder

$$z = \frac{4l^3}{E \cdot b \cdot h^3} F$$

| | | |
|-----|-------------------------|-----------------------|
| F | Kraft | $[F] = N$ |
| z | Verbiegung | $[z] = m$ |
| l | Längenänderung | $[l] = m$ |
| E | Elastizitätsmodul | $[E] = \frac{N}{m^2}$ |
| b | Breite des Querschnitts | $[b] = m$ |
| h | Höhe des Querschnitts | $[h] = m$ |

1.12 Schiefe Ebene (mit Seil)



Wichtige Formeln und Zusammenhänge zur schiefen Ebene

$$F = m \cdot a \quad F_G = m \cdot g$$

$$F_N = m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \quad F_H = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

1.13 Rezept: Aufgaben zur Statik lösen

- Koordinatensystem festlegen
- Alle wirkenden Kräfte einzeichnen
- Bezugspunkt P (Drehpunkt) festlegen
⇒ Da wo viele Kräfte (oder da wo sinnvoll)
- Kräfte komponentenweise aufschreiben: $\sum \vec{F}_i = 0$
- Drehmomente M aufschreiben und gleichsetzen: $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M}$

1.14 Abweichung Erdbeschleunigung

$$g(\phi, h) = 9.78032677 \cdot \frac{1 + 0.001931851 \cdot \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - 0.006694380 \cdot \sin^2 \phi}} - 3.086 \cdot 10^{-6} \cdot h$$

| | | |
|--------|-------------------|-----------------------|
| g | Erdbeschleunigung | $[g] = \frac{m}{s^2}$ |
| h | Höhe über Meer | $[h] = m$ |
| ϕ | Breitengrad | $[\phi] = {}^\circ$ |

2 Kinematik

2.1 Geradlinige Bewegung (1D)

Die Bewegung erfolgt entlang einer Geraden (keine Richtungsänderung)

$$x(t) \quad \underbrace{\frac{d}{dt}}_{v(t)} \quad \underbrace{\frac{d}{dt}}_{a(t)} \quad x(t) \quad \underbrace{\int dt}_{v(t)} \quad \underbrace{\int dt}_{a(t)}$$

2.1.1 Weg $x(t)$

Weg mit Zeit parametrisiert: $x = x(t)$

2.1.2 Geschwindigkeit $v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$$\text{momentane Geschw.: } \frac{d}{dt} x(t) = \dot{x}(t) \quad (\text{Tangente})$$

$$\text{mittlere Geschw.: } \bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (\text{Sekante})$$

2.1.3 Beschleunigung $a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$$\text{momentane Beschleunigung: } \frac{d}{dt} v(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

$$\text{mittlere Beschleunigung: } \bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

2.1.4 Ruck $j(t)$

Änderung der Beschleunigung pro Zeiteinheit: $j(t) = \dot{a}(t) = \ddot{x}(t)$

2.2 Gleichförmige Bewegung $a(t) = 0$

$$a(t) = 0$$

$$v(t) = v_0 = \text{const}$$

$$x(t) = v_0 \cdot t + x_0$$

2.3 Gleichm. beschleunigte Bewegung $a(t) = \text{konst}$

Allgemein:

$$a(t) = a_0 = \text{const}$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

Anwendungsfall: Freier Fall

$$a(t) = -g = \text{const}$$

$$v(t) = -g \cdot t$$

$$x(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + h_0$$

2.3.1 Höchsten Punkt x_{max} finden (Extremum)

Im Extrempunkt gilt: $\frac{d}{dt} x(t) = v(t) = 0$

$$0 = v(t_{max}) = -g \cdot t_{max} + v_0 \quad \Rightarrow t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

Durch einsetzen von t_{max} in $x(t)$ erhält man die maximale Höhe:

$$x(t_{max}) = -\frac{1}{2} g \cdot t_{max}^2 + v_0 \cdot t_{max} + h_0 = -\frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0^2}{g} + h_0$$

2.4 Beliebige Bewegung (2D)

2.4.1 Geschwindigkeit (tangential zur Bahnkurve)

$$\text{momentane Geschw.: } \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \frac{d}{dt} \vec{r} = \dot{\vec{r}}$$

$$\text{mittlere Geschw.: } \bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\text{Betrag: } v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

2.4.2 Beschleunigung

$$\text{momentane Beschl.: } \vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\text{mittlere Beschl.: } \bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Die Beschleunigung kann ungleich null sein, auch wenn der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist

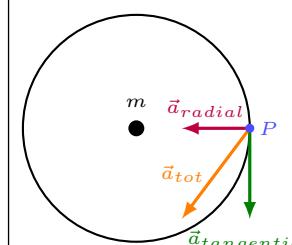
2.5 Bahnkurven

Die Geschwindigkeitsänderung in einer Bahnkurve wird in zwei Komponenten aufgeteilt:

$$\Delta \vec{v}_{\text{radial}} \text{ und } \Delta \vec{v}_{\text{tangential}}$$

Der tangentielle Anteil ändert ausschliesslich den Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}|$

Der radiale Anteil ändert ausschliesslich die Richtung der Geschwindigkeit \vec{v}



$$a_{\text{tangential}} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

$$a_{\text{radial}} = \frac{v^2}{r}$$

$$F_{\text{zentripetal}} = m \frac{v^2}{r}$$

$$(F_{\text{zentri}})^2 + (F_{\text{bremsen}})^2 = (F_R)^2$$

Wenn $a = 0 \Rightarrow F_{\text{Zentri}} = F_{\text{Haft}}$

2.6 Gleichförmige Bewegung $a_{\text{tangential}} = 0$

tangential (Tacho)

$$a_{\text{tangential}} = 0$$

$$v(t) = v_0 = \text{const}$$

$$s(t) = v_0 \cdot t + s_0$$

radial

$$a_{\text{radial}} = \frac{v^2}{r}$$

2.7 Gleichm. beschl. Bewegung $a_{tangential} = \text{konst}$

tangential (Tacho)

$$a_{tang} = a_0 = \text{const}$$

$$v(t) = a_{tang} \cdot t + v_0$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_{tang} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

radial

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = (\alpha \cdot t)^2 \cdot r$$

Die Gesamtbeschleunigung eines Systems $\vec{a}_{tot} = \vec{a}_{tangential} + \vec{a}_{radial}$ muss nicht zwingend konstant sein! Bei Änderungen der Richtung ändert die Gesamtbeschleunigung.

2.8 Kreisbewegung

2.8.1 Winkel ϕ (zurückgelegter Weg)



2.8.2 Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\phi}{t}$

$$\omega := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$$

Der Betrag v der (Bahn-) Geschwindigkeit entspricht: $v = r \cdot \omega$

Umlaufzeit, Periode T

Umlaufzeit für vollständige Umdrehung

Drehzahl, Drehfrequenz f inverse Umlaufzeit $f = \frac{1}{T}$

Wichtige Umrechnungsformeln

| |
|---|
| $v = r \cdot \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{v}{r}$ |
| $f = \frac{1}{T} \Leftrightarrow T = \frac{1}{f}$ |
| $\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{f} \quad \omega = \frac{2\pi n}{60}$ |
| $\omega = 2\pi f \Leftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \quad v = \frac{\pi d n}{60}$ |

2.8.3 Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{\omega}{t}$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\phi}{dt^2} \ddot{\phi}$$

$$a_{tangential} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} r \cdot \omega = r \cdot \alpha$$

2.9 Gleichförmige Kreisbewegung

$$\alpha(t) = 0$$

$$\omega(t) = \omega_0 = \text{const}$$

$$\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$$

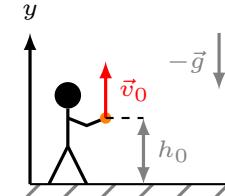
2.10 Gleichm. beschleunigte Kreisbewegung

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \text{const}$$

$$\omega(t) = \alpha_0 \cdot t + \omega_0$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \phi_0$$

2.11 Senkrechter Wurf



$$a = -g = \text{const}$$

$$v(t) = -g \cdot t + v_0$$

$$h(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0$$

2.11.1 Maximale Flughöhe h_{max} bestimmen

Bei der maximalen Flughöhe h_{max} gilt: $v(t) = 0$

$$v_0 - g \cdot t_{max} = 0 \Rightarrow t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

Nun wird t_{max} in $h(t)$ eingesetzt:

$$h_{max} = h(t_{max}) = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} + v_0 \frac{v_0}{g} + h_0 = \frac{v_0^2}{2g} + h_0$$

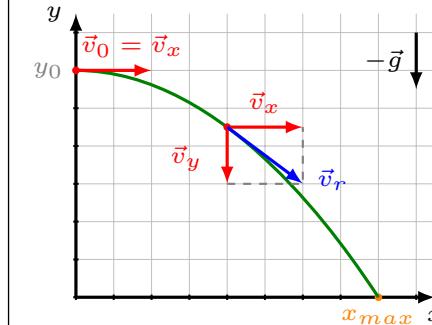
Hinweis: Die maximale Flughöhe kann auch über die potentielle und kinetische Energie berechnet werden!

$$E_{kin} = 0 \quad E_{pot} = m \cdot g \cdot h_{max}$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{m v^2}{2 m g} = \frac{v^2}{2g}$$

⇒ für abgeschlossene Systeme!

2.12 Horizontaler Wurf



Der horizontale Wurf muss komponentenweise beschrieben werden
x-Achse: gleichförmige, unbeschleunigte Bewegung
y-Achse: gleichmäßig beschleunigte Bewegung

x-Achse

$$a_x = 0$$

$$v_x = v_0$$

$$x = v_0 \cdot t + x_0$$

y-Achse

$$a_y = -g$$

$$v_y = -g \cdot t$$

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + y_0$$

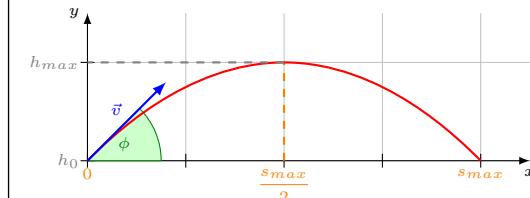
Tipp: Lege den Koordinatenursprung in den Abwurf-Ort

2.12.1 Beschreibung der Flugbahn (Eliminierung von t)

Die y-Koordinate soll als Funktion der x-Koordinate ausgedrückt werden: $y = f(x)$

$$x = v_0 t \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 = -\frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2} = y(x)$$

2.13 Schiefer Wurf



Der schiefe Wurf muss komponentenweise beschrieben werden
x-Achse: gleichförmige, unbeschleunigte Bewegung
y-Achse: gleichmäßig beschleunigte Bewegung

x-Achse

$$a_x = 0$$

$$v_x = v_0 \cdot \cos(\phi)$$

$$x = v_0 \cdot \cos(\phi) \cdot t + x_0$$

y-Achse

$$a_y = -g$$

$$v_y = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin(\phi)$$

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\phi) \cdot t + y_0$$

Tipp: Lege den Koordinatenursprung in den Abwurf-Ort

2.13.1 Beschreibung der Flugbahn (Eliminierung von t)

Die y -Koordinate soll als Funktion der x -Koordinate ausgedrückt werden: $y = f(x)$

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(\phi) \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\phi)}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2(\phi)} \cdot x^2 + \tan(\phi) \cdot x = y(x)$$

2.13.2 Ansätze zur Bestimmung von Extrema

$$\text{max. Wurfweite } s_{max} \quad y \stackrel{!}{=} 0 \quad (\phi \in \{45; 135\})$$

$$s_{max} = x_{max} \in \{0, \frac{2v_0^2}{g} \cos(\phi) \cdot \sin(\phi)\}$$

Elevationswinkel

$$\phi = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{g \cdot d}{v_0^2} \right) = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{g \cdot x_{max}}{v_0^2} \right)$$

max. Wurfhöhe

$$v_y \stackrel{!}{=} 0 \\ x_{maxHöhe} = h_{max} = s_{max} = \frac{x_{max}}{2} \\ y(x_{maxHöhe}) = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\phi)}{2g}$$

3 Dynamik

3.1 Newtonsche Gesetze

Gesetze, welche Bewegungen beschreiben.

3.1.1 Erstes Newtonsches Gesetz: Trägheitsgesetz

Ein Körper verharrt in seine Zustand (Ruhe, gleichförmige geradlinige Bewegung), wenn er nicht durch eine Kraft gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Die **Trägheit** eines Körpers hängt von seiner (Trägheits-) Masse ab.

3.1.2 Zweites Newtonsches Gesetz: Aktionsgesetz

$$\begin{array}{lll} \vec{F} & \text{Kraft} & [F] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N} \\ \vec{F} = m \cdot \vec{a} & m & \text{(Trägheits-) Masse} \quad [m] = \text{kg} \\ & \vec{a} & \text{Beschleunigung} \quad [a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{array}$$

\Rightarrow Anwendung erfolgt meist komponentenweise!

3.1.3 Drittes Newtonsches Gesetz: Wechselwirkungsgesetz

Wirkt ein Körper A auf einen Körper B mit der Kraft \vec{F}_{AB} , so wirkt der Körper B auf A mit der Kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

3.2 Reibungskräfte

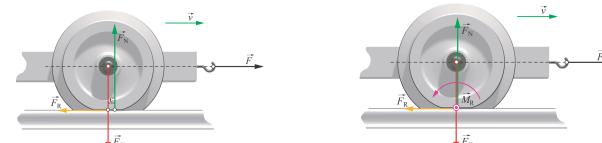
$$\text{Haftreibung: } \vec{F}_{R,max} = \mu_H \cdot \vec{F}_N \Rightarrow \text{treibende Kraft}$$

$$\text{Gleitreibung: } \vec{F}_{Gleit} \approx \mu_G \cdot \vec{F}_N$$

$$\text{Rollreibung: } \vec{F}_{Roll} \approx \mu_R \cdot \vec{F}_N \Rightarrow \text{bremsende Kraft}$$

| | | |
|-------------------|--------------------|--------------------------------|
| \vec{F}_R | Reibungskraft | $[\vec{F}_R] = \text{N}$ |
| $\vec{F}_{R,max}$ | Haftreibungskraft | $[\vec{F}_{R,max}] = \text{N}$ |
| \vec{F}_{Gleit} | Gleitreibungskraft | $[\vec{F}_{Gleit}] = \text{N}$ |

3.3 Rollreibungslänge e (Drehmoment)

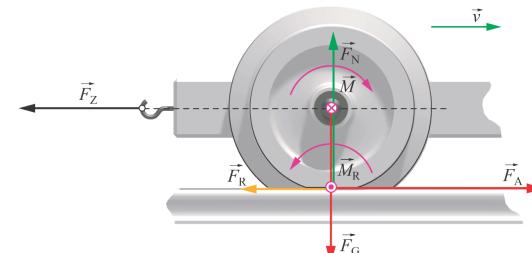


$$e = \frac{r \cdot F}{F_N} = \frac{r \cdot F_R}{F_N} = \frac{r \cdot \mu_R \cdot F_R}{F_N} = \mu_R \cdot r$$

$$M_R = e \cdot F_N = \mu_R \cdot r \cdot F_N = r \cdot F_R = r \cdot F$$

| | | |
|---------|-------------------------|---------------------|
| e | Rollreibungslänge | $[e] = \text{m}$ |
| r | Radius des Rades | $[r] = \text{m}$ |
| F_R | Rollreibungskraft | $[F_R] = \text{N}$ |
| F_N | Normalkraft | $[F_N] = \text{N}$ |
| μ_R | Rollreibungskoeffizient | $[\mu_R] = 1$ |
| M_R | Rollreibungsmoment | $[M_R] = \text{Nm}$ |

3.4 Angetriebenes Rad



| | | |
|-------------|-------------------|--------------------|
| \vec{F}_Z | Zugkraft | $[F_Z] = \text{N}$ |
| \vec{F}_N | Normalkraft | $[F_N] = \text{N}$ |
| \vec{F}_R | Rollreibungskraft | $[F_R] = \text{N}$ |
| \vec{F}_A | Haftreibungskraft | $[F_A] = \text{N}$ |

3.4.1 Hinweise zu Reibung an Rädern

- Jedes Rad weist Rollreibung auf
- Zusätzlich zur Rollreibung weist ein angetriebenes Rad eine Haftreibung auf

3.5 Arbeit und Energie

3.5.1 Arbeit

Wird der Angriffspunkt einer Kraft \vec{F} um die Strecke $d\vec{s}$ verschoben so leistet die Kraft die Arbeit W

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} \quad (\text{Skalarprodukt})$$

Wenn die projizierte Kraft konstant ist: $W = F \bullet s_{AB}$

| | | |
|-----|--------|--|
| W | Arbeit | $[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$ |
| F | Kraft | $[F] = \text{N}$ |
| s | Weg | $[s] = \text{m}$ |

3.5.2 Potentielle Energie W_{pot}

Beim Anheben eines Körpers gewinnt der Körper an potentieller Energie (Lageenergie)

$$W_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

| | | |
|-----------|---------------------|--|
| W_{pot} | Potentielle Energie | $[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$ |
| m | Masse des Körpers | $[m] = \text{kg}$ |
| g | Erdbeschleunigung | $[g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |
| h | Höhe der Körpers | $[h] = \text{m}$ |

Beispiel: Spannen einer Feder

Federkraft als Funktion der Auslenkung x $F = -k \cdot x$

$$W_{pot} = \int_0^{x_0} -F \bullet d\vec{x} = \int_0^{x_0} k \cdot x \, dx = \frac{1}{2} k \cdot \Delta x^2$$

| | | |
|------------|----------------------|--|
| W_{pot} | Potentielle Energie | $[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$ |
| F | Federkraft | $[F] = \text{N}$ |
| k | Federkonstante | $[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$ |
| Δx | Auslenkung der Feder | $[\Delta x] = \text{m}$ |

3.5.3 Kinetische Energie W_{kin}

$$W_{kin} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} = F \bullet s_{AB} = m a \cdot \frac{a}{2} t^2 = m \frac{a^2 \cdot t^2}{2} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

| | | |
|-----------|-----------------------------|-----------------------|
| W_{kin} | Kinetische Energie | $[W] = N \cdot m = J$ |
| F | Kraft | $[F] = N$ |
| s | Wegstück (Kinematik) | $[s] = m$ |
| m | Masse des Körpers | $[m] = kg$ |
| a | Beschleunigung (Kinematik) | $[a] = \frac{m}{s^2}$ |
| v | Geschwindigkeit (Kinematik) | $[v] = \frac{m}{s}$ |

3.6 Energieerhaltung (in abgeschlossenen Systemen)

Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ist unveränderlich!

abgeschlossen: Es wird keine Masse hinzugefügt/entfernt und es wirken keine äusseren Kräfte!

$$W = \underbrace{m \cdot g \cdot h}_{\text{pot. Energie}} = m \cdot g \cdot \underbrace{\frac{1}{2} g \cdot t^2}_{h(t)} = \underbrace{\frac{1}{2} m \cdot v^2}_{\text{kin. Energie}}$$

Für nicht abgeschlossene Systeme kann eine Bilanzrechnung aufgestellt werden:

Die Energiezunahme im Gesamtsystem entspricht der von aussen zugeführten Energie.

Die Energieabnahme im Gesamtsystem entspricht der von aussen entzogenen Energie.

3.6.1 Energiesatz der Mechanik

$$E_{pot} + E_{kin} = E_{tot} = \text{const} \quad (\text{gilt zu jedem Zeitpunkt})$$

3.7 Leistung und Wirkungsgrad

3.7.1 Leistung

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \bullet \Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

| | | |
|------------|-------------------|-------------------------|
| P | Leistung | $[P] = W = \frac{J}{s}$ |
| ΔW | geleistete Arbeit | $[W] = J$ |
| Δt | verstrichene Zeit | $[t] = s$ |
| F | Kraft | $[F] = N$ |
| Δs | Wegstück | $[s] = m$ |

Pferdestärken

$$1 \text{ PS} = 75 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 1 \frac{m}{s} = 735.5 \text{ W}$$

3.7.2 Wirkungsgrad η

Faustregel: Je grösser eine Maschine, desto besser ihr Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} \quad \eta < 1 \quad [\eta] = 1$$

3.8 Impuls \vec{p}

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

2. Newton'sches Gesetz allgemeingültiger (relativistisch):

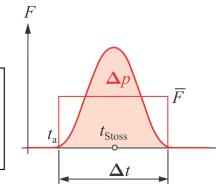
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d \vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{v}) = \frac{d \vec{p}}{dt}$$

| | | |
|-----------|-----------------|------------------------------------|
| \vec{p} | Impuls | $[\vec{p}] = \frac{kg \cdot m}{s}$ |
| m | Masse | $[m] = kg$ |
| \vec{v} | Geschwindigkeit | $[v] = \frac{m}{s}$ |
| F | Kraft | $[F] = N$ |
| \vec{a} | Beschleunigung | $[\vec{a}] = \frac{m}{s^2}$ |

3.8.1 Kraftstoss Δp

Ein Kraftstoss entspricht einer Impulsänderung und kann über die mittlere Kraft beschrieben werden.

$$\int_{t_a}^{t_a+\Delta t} F(t) dt = \bar{F} \cdot \Delta t = \Delta p = p' - p$$



| | | |
|------------|----------------------------|-----------------------------|
| $F(t)$ | Kraftverlauf | $[F] = N$ |
| \bar{F} | mittlere Kraft | $[\bar{F}] = N$ |
| Δt | Zeitdauer des Kraftstosses | $[\Delta t] = s$ |
| Δp | Impulsänderung | $[\Delta p] = Ns$ |
| p | Impuls vor dem Stoss | $[p] = Ns$ |
| p' | Impuls nach dem Stoss | $[p'] = Ns$ |
| \vec{a} | Beschleunigung | $[\vec{a}] = \frac{m}{s^2}$ |

3.9 Impulserhaltungssatz (Impulssatz)

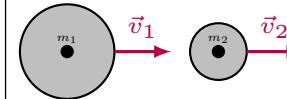
In einem **abgeschlossenen System** bleibt der Gesamtimpuls konstant
abgeschlossenes System: es wirken keine externen Kräfte

$$\vec{p} = \int \underbrace{\frac{d \vec{p}}{dt}}_{F_{\text{außen}}=0} dt = c = \text{const}$$

3.10 Stösse

$$\text{Elastizitätszahl: } k = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} = -\frac{v'_{rel}}{v_{rel}} \geq 0$$

$$\text{Deformationsarbeit: } Q = (E_1 + E_2) - (E'_1 + E'_2) \geq 0$$



3.10.1 Gerader, zentraler, total elastischer Stoss

Die beiden Stosspartner verformen sich nicht!

⇒ Für die Deformationsarbeit gilt: $Q = 0$

$$\begin{aligned} \text{Impulssatz: } p &\stackrel{!}{=} p' \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &\stackrel{!}{=} m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Energiesatz: } E_{kin} &\stackrel{!}{=} E'_{kin} \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \\ v'_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \\ v'_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \end{aligned}$$

3.10.2 Gerader, zentraler, total inelastischer Stoss

Die beiden Stosspartner haften nach dem Stoss aneinander und haben die gleiche Geschwindigkeit.

⇒ Für die Deformationsarbeit gilt: $Q \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{Impulssatz: } p &\stackrel{!}{=} p' \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &\stackrel{!}{=} (m_1 + m_2) v' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Energiesatz: } E_{kin} &\stackrel{!}{=} E'_{kin} \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 + Q \end{aligned}$$

$$\text{Deformationsarbeit: } Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} \mu \cdot v_{rel}^2$$

$$\text{Relativgeschw.: } v_{rel} := |v_1 - v_2|$$

$$\text{Reduzierte Masse: } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

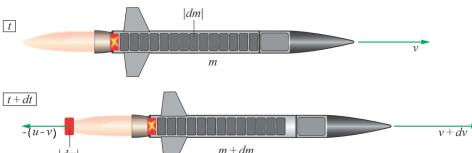
| | | |
|--------------|----------------------------|---------------------------|
| k | Elastizitätszahl | $[k] = 1$ |
| E_1, E_2 | Energien vor Stoss | $[E] = J$ |
| E'_1, E'_2 | Energien nach Stoss | $[E'] = J$ |
| m_1, m_2 | stossende Massen | $[m] = kg$ |
| v_1, v_2 | Geschwindigkeit vor Stoss | $[v] = \frac{m}{s}$ |
| v'_1, v'_2 | Geschwindigkeit nach Stoss | $[v'] = \frac{m}{s}$ |
| Q | Deformationsarbeit | $[Q] = J$ |
| v_{rel} | Relativgeschwindigkeit | $[v_{rel}] = \frac{m}{s}$ |
| μ | reduzierte Masse | $[\mu] = kg$ |

3.11 Rakete

3.11.1 Rakete im Flug

⇒ Masse ist hier veränderbar! $m(t) = m = m_{Start} - \mu \cdot t$

Die Rakete verliert an Treibstoff, wodurch die Masse der Rakete abnimmt ($dm < 0$)



$$\text{Impulssatz: } m \cdot v(t) = (m+dm)(v(t)+dv) + dm(u-v) \quad dm < 0$$

$$\text{Raketengleichung: } v(t) = -u \cdot \ln(m) + v_0 + u \cdot \ln(m_0) = v_0 + u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

$$\text{Massenverhältnis: } \frac{\text{Startmasse}}{\text{Endmasse}}$$

$$\text{max. Geschwindigkeitsänderung: } \Delta v = v - v_0 = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

$$\text{Schubkraft: } F_{Schub} = \frac{dp}{dt} = -\frac{u \cdot dm}{dt} = \frac{dm}{dt}(-u) = \mu \cdot u$$

⇒ Hier wurde noch keine Erdbeschleunigung (Anziehung) berücksichtigt!

| | | |
|-------------|------------------------------------|--------------------------------------|
| u | Strahlgeschwindigkeit der Rakete | $[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| m | Zeitlich veränderbare Masse $m(t)$ | $[m] = \text{kg}$ |
| m_0 | Masse zum Startzeitpunkt | $[m] = \text{kg}$ |
| v_0 | Startgeschwindigkeit | $[v_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| F_{Schub} | Schubkraft der Rakete | $[F_{Schub}] = \text{N}$ |
| μ | Treibstoffverbrauch pro Zeit | $[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ |

3.11.2 Aufstieg der Rakete im Schwerefeld

Konstante Erdbeschleunigung g wird berücksichtigt

$$\text{Veränderbare Masse: } m(t) = m = m_{Start} - \mu \cdot t$$

$$\text{Gesamtkraft: } m(t) \frac{dv}{dt} = m(t) \cdot a = F_{Schub} - F_G = \mu \cdot u - m \cdot g$$

$$\text{Beschleunigung: } a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{\mu \cdot u}{m_0 - \mu \cdot t} - g$$

$$\text{Raketengleichung: } v(t) = u \cdot \ln\left(\frac{m_{Start}}{m(t)}\right) - g \cdot t$$

$$\text{Spezifischer Impuls: } T = \frac{m(t)}{\mu} = \frac{u}{g}$$

$$\text{Steighöhe: } h_t = u \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 - \frac{u}{\mu} \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_t}\right) \cdot m_t$$

| | | |
|-------|---|--------------------------------------|
| u | Strahlgeschwindigkeit der Rakete | $[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| m | Zeitlich veränderbare Masse $m(t)$ | $[m] = \text{kg}$ |
| m_0 | Masse zum Startzeitpunkt | $[m] = \text{kg}$ |
| v_0 | Startgeschwindigkeit | $[v_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| g | Erdbeschleunigung | $[g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |
| μ | Treibstoffverbrauch pro Zeit | $[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ |
| T | spezifischer Impuls (Zeit von konstantem Schub) | $[T] = \text{s}$ |

3.12.5 Gravitationswirkung innerhalb einer Kugel

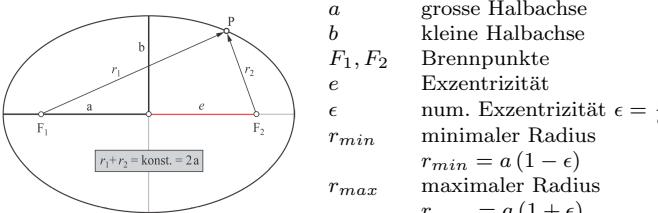
$$F_G = G \frac{m_{Kern}(r)m}{r^2} = G \frac{4\pi r^3 \rho m}{3r^2} = \frac{4\pi}{3} G \rho m r$$

| | | |
|------------|------------------------------|--|
| F_G | Gravitationskraft | $[F_G] = \text{N}$ |
| G | Gravitationskonstante | $[G] = \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ |
| r | Radius (Abstand vom Zentrum) | $[r] = \text{m}$ |
| ρ | homogene Dichte der Kugel | $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| m | Masse vom Massepunkt | $[m] = \text{kg}$ |
| m_{Kern} | Masse des Kugelkerns | $[m_{Kern}] = \text{kg}$ |

3.12 Gravitation

3.12.1 Erstes Kepler'sches Gesetz

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren Brennpunkt sich die Sonne befindet.



| | |
|------------|---|
| a | große Halbachse |
| b | kleine Halbachse |
| F_1, F_2 | Brennpunkte |
| e | Exzentrizität |
| ϵ | num. Exzentrizität $\epsilon = \frac{e}{a}$ |
| r_{min} | minimaler Radius |
| r_{max} | maximaler Radius |

3.12.2 Zweites Kepler'sches Gesetz

Der Fahrstrahl der Planeten überstreicht in der gleichen Zeit die gleiche Fläche.
⇒ Bei kleinerem Abstand zur Sonne ist die Geschwindigkeit schneller!

3.12.3 Drittes Kepler'sches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der grossen Halbachsen.

$$a = \left(\frac{T}{T_{ref}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot a_{ref} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{a_{ref}}\right)^3 = \left(\frac{T}{T_{ref}}\right)^2$$

Als Referenz wird die Erde verwendet!

Astronomische Einheit: $a_{ref} = 1 \text{ AE} = 149.6 \cdot 10^6 \text{ km}$

Referenzzeit: $T_{ref} = 1 \text{ a} = 1 \text{ Jahr}$

| | | |
|-----------|----------------------------------|-------------------------|
| a | große Halbachse gesuchter Planet | $[a] = \text{AE}$ |
| a_{ref} | große Halbachse Erde | $[a_{ref}] = \text{AE}$ |
| T | Umlaufzeit Planet | $[T] = \text{Jahre}$ |
| T_{ref} | Umlaufzeit Erde | $[T] = \text{Jahre}$ |

3.12.4 Gravitationsgesetz

$$\text{Gravitationskraft: } F_G = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \text{mit } G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

3.12.6 Gravitationswirkung außerhalb einer Kugel

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

| | | |
|-------|------------------------------|--|
| F_G | Gravitationskraft | $[F_G] = \text{N}$ |
| G | Gravitationskonstante | $[G] = \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ |
| r | Radius (Abstand vom Zentrum) | $[r] = \text{m}$ |
| m | Masse vom Massepunkt | $[m] = \text{kg}$ |
| M | Gesamtmasse der Kugel | $[M] = \text{kg}$ |

3.12.7 Gravitationspotential ϕ

Wenn eine Masse in einem Gravitationsfeld bewegt wird, so wird Arbeit verrichtet.

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_G \bullet d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} G \cdot M \cdot m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) dr$$

$$\text{potentielle Energie: } E_{pot}(r) = -G \frac{M m}{r}$$

$$\text{Gravitationspotential: } \phi = \frac{E_{pot}}{m} = -\frac{G \cdot M}{r}$$

Im Inneren eines homogenen Zentralkörpers gilt

$$F_G = \frac{4\pi \cdot G \cdot \rho \cdot m \cdot r}{3}$$

$$E_{pot} = -\frac{2\pi \cdot G \cdot \rho \cdot m}{3} r^2 + c'$$

$$\phi = -\frac{2\pi \cdot G \cdot \rho}{3} r^2 + c = -\frac{G \cdot M(r)}{2r} + c = -\frac{G \cdot M(r)}{2r} - \frac{G \cdot M}{2R}$$

| | | |
|-----------|------------------------------|--|
| W | Arbeit | $[W] = \text{J}$ |
| F_G | Gravitationskraft | $[F_G] = \text{N}$ |
| E_{pot} | potentielle Energie | $E_{pot} = \text{J}$ |
| G | Gravitationskonstante | $[G] = \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ |
| r | Radius (Abstand vom Zentrum) | $[r] = \text{m}$ |
| ρ | homogene Dichte der Kugel | $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| m | Masse vom Massepunkt | $[m] = \text{kg}$ |
| M | Gesamtmasse der Kugel | $[M] = \text{kg}$ |
| R | Radius der Kugeloberfläche | $[R] = \text{m}$ |

3.13 Bezugssysteme: Inertialsystem

Inertialsystem: unbeschleunigtes Bezugssystem

Wenn die Newton'schen Gesetze im Bezugssystem S gelten, so gelten sie auch im Bezugssystem S', solange dieses nicht beschleunigt ist und nicht rotiert.

⇒ In sämtlichen Inertialsystemen sind die mechanischen Gesetze identisch!

3.13.1 Galilei-Transformation

Bezugssystem S' bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 :

$$v_0 = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Transformation zwischen S und S'

$$\begin{aligned} x &= x' + v_x t \\ y &= y' + v_y t \\ z &= z' + v_z t \\ t &= t' \end{aligned}$$

3.14 Beschleunigte Bezugssysteme

In beschleunigten Bezugssystemen müssen Trägheitskräfte berücksichtigt werden!

3.14.1 Translatorisch beschleunigtes Bezugssystem

Beispiel: Zug beschleunigt auf gerader Schiene

Für einen Beobachter im beschleunigten System S' wirkt eine Trägheitskraft:

$$\text{Gesamtkraft: } \vec{F}' = \vec{F} - m \cdot \vec{a}_0 = \vec{F} + \vec{F}_{Trägheit}$$

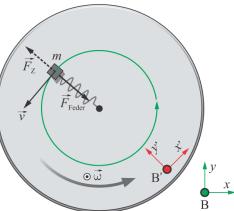
| | | |
|----------------------|----------------------------------|---|
| \vec{F}' | Gesamte im System wirkende Kraft | $[\vec{F}'] = \text{N}$ |
| \vec{F} | Statisch wirkende Kräfte | $[\vec{F}] = \text{N}$ |
| $\vec{F}_{Trägheit}$ | Trägheitskraft | $[\vec{F}_{Trägheit}] = \text{N}$ |
| m | Masse im System | $[m] = \text{kg}$ |
| \vec{a}_0 | Beschleunigung des Systems | $[\vec{a}_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |

3.14.2 Gleichförmig rotierendes Bezugssystem (Scheinkräfte)

Fest verbundene Masse ⇒ Scheinkraft: Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_z = -m \cdot \vec{a}_z = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$$

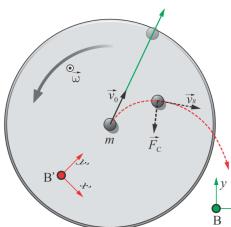
$$\vec{F}_{Zentrifugal} = -\vec{F}_{Zentripetal}$$



| | | |
|-------------|--|---|
| \vec{F}_z | Zentrifugalkraft (Trägheitskraft; Scheinkraft) | $[\vec{F}_z] = \text{N}$ |
| m | Masse im System | $[m] = \text{kg}$ |
| \vec{a}_z | Beschleunigung des Systems (a_{radial}) | $[\vec{a}_z] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |
| ω | Winkelgeschwindigkeit | $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |
| \vec{r} | Radius des Systems (nach innen zeigend) | $[\vec{r}] = \text{m}$ |

lose Masse ⇒ Scheinkraft: Corioliskraft

$$\vec{F}_c = -m \cdot \vec{a}_c = -m \cdot 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_R)$$



| | | |
|-------------|---|---|
| \vec{F}_c | Corioliskraft (Trägheitskraft; Scheinkraft) | $[\vec{F}_c] = \text{N}$ |
| m | Masse im System | $[m] = \text{kg}$ |
| \vec{a}_c | Coriolisbeschleunigung | $[\vec{a}_c] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |
| ω | Winkelgeschwindigkeit | $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |
| \vec{v}_R | Relativgeschwindigkeit | $[\vec{v}_R] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |

3.14.3 D'Alembert'sches Prinzip

Wird ein Körper in einem mitbewegten Koordinatensystem betrachtet, so bleibt er in Ruhe: $\vec{v}_R = 0$ und $\vec{a}_R = 0$

$$\vec{F} + \underbrace{\vec{F}_z + \vec{F}_c}_{\text{Scheinkräfte}} = \vec{0}$$

⇒ Statisches Gleichgewichtsproblem

3.15 Rotation starrer Körper

| | |
|-----------------|--|
| Rotation: | Drehung um feste Achse |
| Kreisel: | Drehung um starren Punkt |
| Kreiselbewegung | Drehung eines völlig freien, starren Körpers um seinen Schwerpunkt |

3.15.1 Dynamisches Grundgesetz der Rotation

Es ist nur die tangentiale Komponente der Kraft (des Drehmoments) eines rotierenden Körpers relevant!

$$dM_t = r \cdot dF_t = r \cdot dm \cdot a_t = dm \cdot r^2 \cdot \alpha$$

$$M = \int dM = \int r^2 \alpha \cdot dm = \alpha \underbrace{\int r^2 \cdot dm}_{J_{Scheibe} = m \cdot r^2}$$

$$\Rightarrow M = J \cdot \alpha = r \cdot F$$

| | | |
|----------|---|--|
| dM_t | kleine Tan.-Komponente des Drehmoments | $[dM_t] = \text{Nm}$ |
| M | (gesamtes) Drehmoment | $[M] = \text{Nm}$ |
| dF_t | kleine Tangentialkomponente der Kraft | $[dF_t] = \text{N}$ |
| r | Abstand Drehachse zu Massepunkt (Rand) | $[r] = \text{m}$ |
| dm | kleines Massestück des Körpers | $dm = \text{kg}$ |
| a_t | Tangentialbeschleunigung ($a_t = r \cdot \alpha$) | $[a_t] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |
| α | Winkelbeschleunigung | $[\alpha] = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ |
| J | (Massen-) Trägheitsmoment | $[J] = \text{kg m}^2$ |

3.15.2 Massenträgheitsmomente

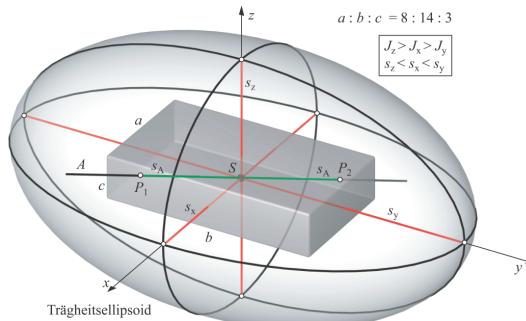
| Körper | Trägheitsmoment |
|--------------|------------------------------|
| Vollzylinder | $\frac{mr^2}{2}$ |
| Hohlzylinder | $\frac{m(r_a^2 + r_i^2)}{2}$ |
| Kugel | $\frac{2}{5}mr^2$ |
| Quader | $\frac{m(a^2 + b^2)}{12}$ |
| Ring: | $m \cdot r^2$ |

3.16 Trägheitsellipsoid

Trägheitsradius r_0 : als ob ganze Masse eines Körpers nur einen Radius hätte

$$r_0 = \sqrt{\frac{J}{m}}$$

| | | |
|-------|----------------------------|-----------------------|
| r_0 | Trägheitsradius | $[r_0] = \text{m}$ |
| m | Masse des Körpers | $[m] = \text{kg}$ |
| J | (Massen-) Trägheitsmoment | $[J] = \text{kg m}^2$ |
| s_0 | reziproker Trägheitsradius | $[s_0] = \text{m}$ |

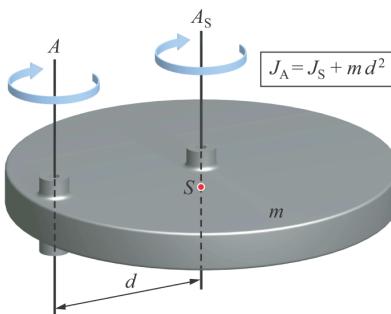


Hauptträgheits-Achsen (entsprechen immer Symmetrie-Achsen, falls vorhanden)

beliebige Achse J_A $J_A = J_x \cdot \cos^2(\alpha) + J_y \cdot \cos^2(\beta) + J_z \cdot \cos^2(\gamma)$

3.17 Satz von Steiner

Beschreibt, wie man das Trägheitsmoment J berechnet, wenn die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt des rotierenden Körpers geht, sondern parallel dazu verläuft.



| | | |
|-------|--------------------------------------|-------------------------|
| J_S | Trägheitsmoment (Rot. um Schwerp.) | $[J_S] = \text{kg m}^2$ |
| J_A | Trägheitsmoment (Rot. um bel. Punkt) | $[J_A] = \text{kg m}^2$ |
| m | Masse des Körpers | $[m] = \text{kg}$ |
| d | Abstand zum Schwerpunkt | $[d] = \text{m}$ |

3.18 Arbeit und Leistung (Rotation)

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{s} = F_t \cdot ds = F_t \cdot r \cdot d\phi = M \cdot d\phi$$

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\phi}{dt} = M \cdot \omega$$

| | | |
|----------|---------------------------------------|--|
| F_t | Tantentialer Kraftanteil der Rotation | $[F_t] = N$ |
| $d\phi$ | zurückgelegter Kreiswinkel | $[d\phi] = \text{rad}$ |
| P | Leistung | $[P] = W$ |
| W | Energie | $[W] = J$ |
| ω | Winkelgeschwindigkeit | $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |
| M | Drehmoment | $[M] = \text{Nm}$ |

3.19 Rotationsenergie

Folgendes gilt nur für die Rotation um den Schwerpunkt eines Körpers!

Die totale kinetische Energie ist die Summe aller kinetischer Energien eines Körpers

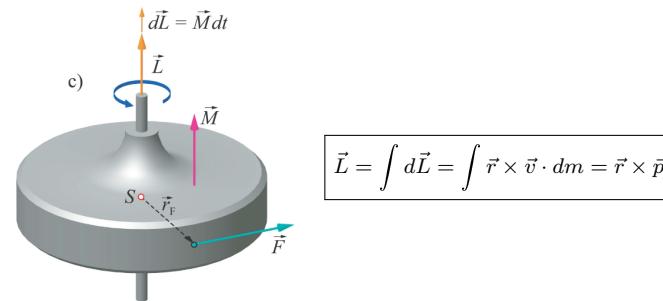
$$E_{kin} = \int \frac{1}{2} v^2 dm = E_{trans} + E_{rot}$$

$$E_{trans} = \frac{1}{2} m \cdot v_s^2$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J_s \cdot \omega^2$$

| | | |
|-------------|--------------------------------------|--|
| E_{trans} | Translationsenergie des Schwerpunkts | $[E_{trans}] = \text{J}$ |
| m | Masse des Körpers | $[m] = \text{kg}$ |
| v_s | Geschwindigkeit des Schwerpunkts | $[v_s] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| E_{rot} | Rotationsenergie | $[E_{rot}] = \text{J}$ |
| J_s | Trägheitsmoment (Rot. um Schwerp.) | $[J_s] = \text{kg m}^2$ |
| ω | Winkelgeschwindigkeit | $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |

3.20 Drehimpuls \vec{L} / Impulserhaltung (Rotation)



$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} \cdot dm = \vec{r} \times \vec{p}$$

\vec{L} Drehimpuls

\vec{r} Abstand Massenpunkt zu Rot-Achse

$[\vec{L}] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$

$[\vec{r}] = \text{m}$

\vec{v} Rotationsgeschwindigkeit

$[\vec{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

dm kleines Masse-Stück

$[dm] = \text{kg}$

\vec{p} Impuls

$[\vec{p}] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$

3.20.1 Energie beim Runterrollen

$$E_{pot} = E_{kin} + E_{rot}, \quad m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

3.20.2 Drehmoment \vec{M} vs. Drehimpuls \vec{L}

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d}{dt} \vec{L} = \dot{\vec{L}}$$

In einem abgeschlossenen System ($\vec{M} = 0$) bleibt der Gesamt-drehimpuls erhalten
⇒ $\vec{L} = \text{const}$

Impulserhaltung: $L \stackrel{!}{=} L'$

$$J_1 \cdot \omega + J_2 \cdot \omega \stackrel{!}{=} J_1 \cdot \omega'_1 + J_2 \cdot \omega'_2$$

Energiesatz: $E_{rot} \stackrel{!}{=} E'_{rot} + Q$

$$\frac{1}{2} J_1 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \cdot \omega_2^2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} J_1 \cdot \omega_1'^2 + \frac{1}{2} J_2 \cdot \omega_2'^2 + Q$$

\vec{M} Drehmoment

$[\vec{M}] = \text{Nm}$

\vec{r} Abstand Massenpunkt zu Rot-Achse

$[\vec{r}] = \text{m}$

\vec{F} Kraft, welche Drehmoment bewirkt

$[\vec{F}] = \text{N}$

\vec{p} Impuls

$[\vec{p}] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$

\vec{L} Drehimpuls

$[\vec{L}] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$

J Massenträgheitsmoment

$[J] = \text{kg m}^2$

ω Winkelgeschwindigkeit

$[\omega] = \frac{1}{\text{s}}$

Q Deformationsarbeit

$[Q] = \text{J}$

3.20.3 Drehimpuls \vec{L} vs. Winkelgeschwindigkeit ω

$$L = \int dL = \int r^2 \omega dm = \omega \int r^2 dm = J \omega$$

L Drehimpuls

$[L] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$

r Abstand Massenpunkt zu Rot-Achse

$[r] = \text{m}$

dm kleines Masse-Stück

$[dm] = \text{kg}$

ω Winkelgeschwindigkeit

$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

J (Massen-) Trägheitsmoment (hier Tensor)

$[J] = \text{kg m}^2$

3.21 Rotation vs. Translation

| Drehbewegung | Lineare Bewegung | |
|--|---|--|
| Drehwinkel | $\Delta\theta$ | $v = \frac{dx}{dt}$ |
| Winkelgeschwindigkeit | $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ | $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ |
| Winkelbeschleunigung | $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ | Beschleunigung |
| Gleichungen für den Fall konstanter Winkelbeschleunigung | $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\Delta\theta = (\omega) \Delta t$ $(\omega) = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha \Delta\theta$ | Gleichungen für den Fall konstanter Beschleunigung $v = v_0 + at$ $\Delta x = \langle v \rangle \Delta t$ $\langle v \rangle = \frac{1}{2}(v_0 + v)$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a t^2$ $v^2 = v_0^2 + 2a \Delta x$ |
| Drehmoment | M | Kraft |
| Trägheitsmoment | I | Masse |
| Arbeit | $dW = M d\theta$ | Arbeit |
| Kinetische Energie | $E_{kin} = \frac{1}{2} I \omega^2$ | Kinetische Energie |
| Leistung | $P = M \omega$ | Leistung |
| Drehimpuls | $L = I \omega$ | Impuls |
| Zweites Newton'sches Axiom | $M_{ext} = I \alpha = \frac{dL}{dt}$ | Zweites Newton'sches Axiom |

4 Hydrostatik

4.1 Festkörper, Flüssigkeit, Gas

4.1.1 Festkörper

- kein Fluid
- festes Volumen; feste Gestalt
- Moleküle / Atome befinden sich in regelmässiger Gitter-Anordnung
- inkompressibel (sehr schlecht komprimierbar)
- Kraft: Weiterleitung (längs ihrer Wirkungslinie)
- Druck: Verstärkung

4.1.2 ideale Flüssigkeit

- Fluid
- festes Volumen; keine feste Gestalt
- Moleküle / Atome bewegen sich chaotisch aneinander vorbei
- Moleküle / Atome füllen den Raum aus / berühren sich
- inkompressibel (schlecht komprimierbar)
- reibungsfrei (keine Scherkräfte)
- Kraft: Verstärkung
- Druck: Weiterleitung (gleichmässig)

4.1.3 Gas

- Fluid
- kein festes Volumen; keine feste Gestalt
- Moleküle / Atome fliegen mit hoher Geschwindigkeit durch den Raum
- Es gibt sehr viel Zwischenraum
- Moleküle / Atome führen bei Zusammenstoss unter sich oder mit Gefäßwand elestische Stöße aus
- kompressibel (gut komprimierbar)
- reibungsfrei (keine Scherkräfte)

4.2 Druck p / Schubspannung τ

Druck ist eine skalare Grösse (hat keine Richtung)

$$p = \frac{F_{\perp}}{A}$$

$$\tau = \frac{F_{\parallel}}{A}$$

| | | |
|-----------------|----------------------------|----------------------------|
| p | Druck | $[p] = Pa = \frac{N}{m^2}$ |
| τ | Schubspannung (Scherkraft) | $[\tau] = N$ |
| F_{\perp} | Kraft senkrecht zu A | $[F_{\perp}] = N$ |
| F_{\parallel} | Kraft parallel zu A | $[F_{\parallel}] = N$ |
| A | Fläche | $[A] = m^2$ |

In abgeschlossenen, miteinander verbundenen Systemen herrscht ein Druck-Gleichgewicht!

$$p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

4.2.1 Weitere Einheiten von Druck

1 bar = 10^5 Pa (Absolutdruck: Vergleich zu Vakuum)
 1 hPa = 100 Pa = 1 mbar
 1 at = $1 kp \cdot cm^{-2} = 9.81 \cdot 10^4$ Pa
 1 atü = 1 at (Überdruck; Vergleich zu normalem Luftdruck)
 1 Torr = $\frac{1}{760}$ at (1mm-Hg-Säule)
 1 psi = 6894.76 Pa (Britisch)

4.3 Kompression

$$\text{Flüssigkeiten: } \Delta p = \frac{1}{\kappa} \cdot -\frac{\Delta V}{V} = K \cdot -\frac{\Delta V}{V}$$

$$\text{Gase: } \Delta p = p(h) - p_0 = \frac{1}{\kappa_T} \cdot -\frac{\Delta V}{V}$$

$$\begin{array}{ll} \Delta p & \text{Druckerhöhung} \\ \kappa & \text{Kompressibilität (Flüssigkeit)} \\ K = \frac{1}{\kappa} & \text{Kompressionsmodul} \\ \kappa_T & \text{Kompressibilität (Gas)} \\ -\frac{\Delta V}{V} & \text{realtive Volumen-Abnahme} \end{array} \quad [\Delta p] = Pa = \frac{N}{m^2} \quad [\kappa] = \frac{1}{Pa} \quad [K] = Pa \quad [\kappa_T] = \frac{1}{Pa} \quad [\frac{\Delta V}{V}] = 1$$

4.4 Dichte ρ

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Leftrightarrow \quad m = \rho \cdot V$$

$$\begin{array}{ll} \rho & \text{Dichte} \\ m & \text{Masse} \\ V & \text{Volumen} \end{array} \quad [\rho] = \frac{kg}{m^3} \quad [m] = kg \quad [V] = m^3$$

4.4.1 Wichtige Dichten

$$\begin{array}{ll} \rho_{Wasser} & = 1000 \frac{kg}{m^3} \\ \rho_{Luft} & = 1.2 \frac{kg}{m^3} \end{array}$$

4.5 Boyle-Mariotte

Das Gesetz von Boyle-Mariotte beschreibt die Kompressibilität von Gasen.
 ⇒ Das Gesetz gilt nur bei konstanter Temperatur!

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$\begin{array}{ll} \rho_x & \text{Gas-Dichte} \\ p_x & \text{Gas-Druck} \\ V_x & \text{Volumen} \end{array} \quad [\rho_x] = \frac{kg}{m^3} \quad [p_x] = Pa \quad [V_x] = m^3$$

4.6 Hydrostatischer Druck (Schweredruck)

Fluid inkompressibel!

$$p = \rho \cdot g \cdot h$$

| | | |
|--------|--|---|
| ρ | Dichte der Flüssigkeit | $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| g | Erdbeschleunigung $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ | $[g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |
| h | Höhe unter der Flüssigkeits-Oberfläche | $[h] = \text{m}$ |

Der Druck ist nur von der Höhe der darüberliegenden Flüssigkeit abhängig, nicht von deren Volumen oder Gewicht.

4.7 Barometrische Höhenformel (Gase)

Fluid kompressibel!

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{p_0}{p_0} \cdot g \cdot h}$$

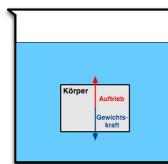
| | | |
|----------|--|---|
| $p(h)$ | Schweredruck des Gases bei Höhe h | $[p(h)] = \text{Pa}$ |
| p_0 | Luftdruck auf Meereshöhe $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ | $[p_0] = \text{Pa}$ |
| ρ_0 | Luft-Dichte auf Meereshöhe $\rho_0 = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ | $[\rho_0] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| g | Erdbeschleunigung $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ | $[g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |
| h | Höhe über Meer | $[h] = \text{m}$ |

4.8 Statischer Auftrieb (Fluid)

Der Auftrieb eines Körpers entspricht dem Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit (Archimedes).

$$F_A = \rho_{Fl} \cdot V_K \cdot g$$

$$F_A = F_{G,Fl} = m_{Fl} \cdot g = \rho_{Fl} \cdot V_K \cdot g$$



| | | |
|-------------|--|--|
| F_A | Auftriebskraft | $[F_A] = \text{N}$ |
| ρ_{Fl} | Dichte verdrängtes Fluid | $[\rho_{Fl}] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| V_K | verdrängtes Fluid-Volumen | $[V_K] = \text{m}^3$ |
| g | Erdbeschleunigung $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ | $[g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |
| m_{Fl} | Masse des verdrängten Fluids | $[m_{Fl}] = \text{kg}$ |
| $F_{G,Fl}$ | Gewichtskraft verdrängtes Fluid | $[F_{G,Fl}] = \text{N}$ |

4.9 Oberflächenspannung σ

$$\sigma := \frac{F}{l}$$

| | | |
|----------|---------------------|--|
| σ | Oberflächenspannung | $[\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$ |
| F | Kraft | $[F] = \text{N}$ |
| l | Länge | $[l] = \text{m}$ |

Die Länge l entspricht der gesamten Berührungsfläche zwischen Flüssigkeit und Festkörper / Gas

Zylinder $l = 2\pi r$

Lamellen $l = 2b$ (beidseitig!)

4.10 Grenzflächenspannung

$$\sigma_{sl} + \sigma_{lg} \cdot \cos\varphi = \sigma_{sg}$$

Benetzung

$\varphi < 90^\circ$

Nichtbenetzung

$\varphi > 90^\circ$

4.11 Kapillarität h

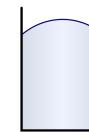
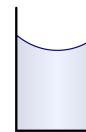
$$h = \frac{2 \cdot \sigma}{\rho \cdot g \cdot r} = \frac{\sigma}{\rho \cdot g \cdot d}$$

σ Totale Grenzflächenspannung $[\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$

ρ Dichte der Flüssigkeit $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

r Radius der Kapillare $[r] = \text{m}$

d Durchmesser der Kapillare $[d] = \text{m}$



benetzend

nicht benetzend

4.12 Druck in Seifenblase p

$$p = \frac{2 \cdot \sigma}{r}$$

σ Oberflächenspannung $[\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$

r Radius der Seifenblase $[r] = \text{m}$

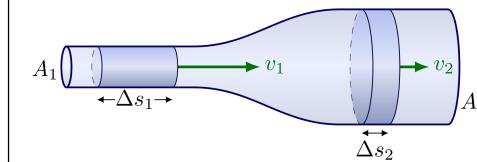
5 Hydrodynamik - Ideale Fluide

Ideale Fluide nehmen keine Scherkräfte auf (keine Reibung) und sind inkompressibel.

5.1 Stromlinien-Modell

- Stromlinien zeigen Geschwindigkeit des Fluids
- Dicke Stromlinien bedeutet hohe Geschwindigkeit
- Dünne Stromlinien bedeutet niedrige Geschwindigkeit
- Stationär: Stromlinien = Bahnlinien \Rightarrow schneiden sich nicht

5.2 Kontinuitätsgleichung



$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \dot{V} = A \cdot v = \text{const}$$

$$\Leftrightarrow A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \dot{V}$$

ΔV Volumenänderung

$[\Delta V] = \text{m}^3$

Δt Zeitänderung

$[\Delta t] = \text{s}$

\dot{V} Volumenstrom (Volumen pro Zeit)

$[\dot{V}] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

A_x Querschnittsfläche

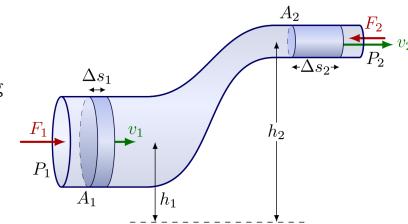
$[A_x] = \text{m}^2$

v_x Geschwindigkeit der Flüssigkeit

$[v_x] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

\Rightarrow Gilt auch für Gase, wenn $v \ll v_{Schall}$

5.3 Bernoulli-Gleichung



Die Bernoulli-Gleichung beschreibt ein bewegtes Fluid

$$p + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{const}$$

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$$

5.3.1 Spezialfall: Horizontal

$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{const}$$

5.3.2 Spezialfall: Statik

$$p + \rho \cdot g \cdot h = \text{const}$$

5.3.3 Hydrodynamisches Paradoxon

Je grösser die Strömungsgeschwindigkeit, desto kleiner der Druck

5.4 Bernoulli-Gleichung und Energieerhaltung

Die in der Bernoulli-Gleichung vorkommenden Terme können als Energie pro Volumen betrachtet werden

$$\begin{aligned} E_{\text{Mech}} &= \text{elast. Energie} + \text{pot. Energie} + \text{kin. Energie} \\ &= p \cdot V + m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \text{const} \end{aligned}$$

Wenn durch das Volumen dividiert wird erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{Mech}}}{Volumen} &= \frac{\text{elastische Energie}}{\text{Volumen}} + \frac{\text{pot. Energie}}{\text{Volumen}} + \frac{\text{kin. Energie}}{\text{Volumen}} \\ &= p + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{const} \end{aligned}$$

Bei einer horizontalen Strömung entfällt die pot. Energie (pro Volumen)

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{Mech}}}{Volumen} &= \frac{\text{elastische Energie}}{\text{Volumen}} + \frac{\text{kin. Energie}}{\text{Volumen}} \\ &= p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{const} \end{aligned}$$

6 Hydrodynamik - Reale Fluide

Reale Fluide nehmen Scherkräfte auf (Reibung)

6.1 Newton'sches Reibungs-Gesetz

Ein reales Fluid erfährt Reibung

$$\tau = \eta \cdot \frac{v}{d} \quad \tau = \eta \cdot \frac{dv}{dz}$$

| | | |
|-----------------|---|--|
| τ | Schubspannung | $[\tau] = \text{N}$ |
| η | dynmische Zähigkeit (Viskosität) | $[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$ |
| v | Geschwindigkeitsdifferenz zw. Auflagen | $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| z | Richtung senkrecht zur Verschiebung | $[z] = \text{m}$ |
| d | Distanz zwischen den Auflagen | $[d] = \text{m}$ |
| $\frac{dv}{dz}$ | Geschwindigkeits-Gradient in z-Richtung | $[\frac{dv}{dz}] = \frac{1}{\text{s}}$ |

Beispiele: Werte für η

$$\begin{aligned} \eta_{\text{Luft}} &:= 17 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s} \\ \eta_{\text{Wasser}}(20^\circ\text{C}) &:= 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s} \\ \eta_{\text{Öl}} &:= 0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s} \text{ bis } 1 \text{ Pa} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

6.1.1 Kinematische Zähigkeit ν

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

$$\begin{aligned} \nu &\quad \text{kinematische Zähigkeit} \quad [\nu] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \\ \rho &\quad \text{Dichte} \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{aligned}$$

6.2 Stokes'sche Reibung F_R

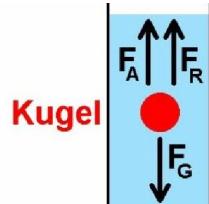
Z.B. für Kugel in Öl oder fallende Wassertropfen

$$F_R = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R \cdot v$$

| | | |
|--------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| F_R | Reibungskraft | $[F_R] = \text{N}$ |
| η | Dynamische Zähigkeit (Viskosität) | $[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$ |
| R | Kugelradius | $[R] = \text{m}$ |
| v | Geschwindigkeit | $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |

6.2.1 Kugelfall-Viskosimeter

Auf eine Kugel, welche in einer Flüssigkeit hinabgleitet wirken folgende Kräfte:



| | |
|-------|---------------------|
| F_G | Gewichtskraft |
| F_A | statischer Auftrieb |
| F_R | Stokes'sche Reibung |

Ansatz zum Lösen von Aufgaben:
Kräftegleichgewicht

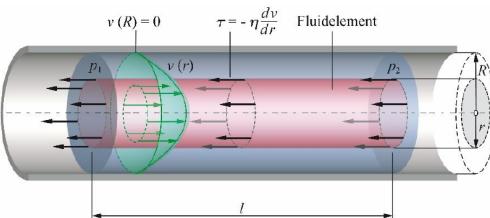
6.3 Hagen-Poiseuille

Beschreibung von laminaren Strömungen in einem runden Rohr
⇒ Schichtströmung

6.3.1 Gesetz von Hagen-Poiseuille

$$\dot{V} = \frac{\pi \cdot \Delta p \cdot R^4}{8 \cdot \eta \cdot l}$$

6.3.2 Geschwindigkeitsverteilung von $r = 0$ bis R



$$v(r) = \frac{1}{4 \cdot \eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} (R^2 - r^2)$$

| | | |
|---------------------------|---------------------------------------|---|
| $v(r)$ | Fliessgeschwindigkeit beim Radius r | $[v(r)] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| r | betrachteter Radius | $[r] = \text{m}$ |
| η | Dynamische Zähigkeit (Viskosität) | $[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$ |
| R | Rohr-(Innen)Radius | $[R] = \text{m}$ |
| Δp | Druckdifferenz | $[\Delta p] = \text{Pa}$ |
| $\dot{V} = \frac{dV}{dt}$ | Volumenstrom | $[\dot{V}] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ |
| l | Länge des Rohrs | $[l] = \text{m}$ |

6.4 Reynolds-Zahl Re

Gibt ein Richtmaß für die Wirbelbildung

- Druck-Differenz (Bernoulli) begünstigt Wirbelbildung
- Innere Reibung (Schubspannung) verhindert Wirbelbildung

$$Re = \frac{\Delta p}{\tau} = \frac{\rho \cdot \bar{v} \cdot d}{\eta} \quad \text{mit } \bar{v} = \frac{\dot{V}}{A}$$

| | | |
|------------|--------------------------------------|---|
| Re | Reynolds-Zahl | $[Re] = 1$ |
| η | Dynamische Zähigkeit (Viskosität) | $[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$ |
| \bar{v} | Mittlere Geschwindigkeit | $[\bar{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| d | Typische Dimension (Rohrdurchmesser) | $[d] = \text{m}$ |
| Δp | Druckdifferenz | $[\Delta p] = \text{Pa}$ |
| τ | Schubspannung | $[\tau] = \text{N}$ |

Sobald die Reynolds-Zahl Re grösser ist als ein kritischer Wert bilden sich Wirbel

⇒ Rohr: $Re_{\text{kritisch}} \approx 2320$

6.4.1 Ähnlichkeitsgesetz

Reynolds-Zahl dient auch richtigem Vergleich von Modellversuchen.

⇒ Gleiche Reynolds-Zahl bedeutet gleiches Verhalten

⇒ Gleiche Reynolds-Zahl bedeutet auch gleiche Relative Grenzschicht-Dicke D (siehe 6.6)

6.5 Turbulente / Laminare Rohrströmung

6.5.1 Hilfe, um Reynoldszahl zu bestimmen (laminar)

$$\Delta p = 32 \cdot \eta \cdot l \cdot \frac{v}{d^2}$$

6.5.2 Druckunterschied in laminare / turbulente Strömung

$$\lambda_{turbulent} = \frac{0.316}{\sqrt{Re}} \quad \lambda_{laminar} = \frac{64}{Re}$$

$$\Rightarrow \Delta p_x = \lambda_x \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2$$

| | | |
|--------------|------------------------------------|---|
| Δp_x | Druckdifferenz (laminar/turbulent) | $[\Delta p] = \text{Pa}$ |
| η | Dynamische Zähigkeit (Viskosität) | $[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$ |
| l | Rohr-Länge | $[l] = \text{m}$ |
| v | Fliess-Geschwindigkeit | $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| d | Rohr-Durchmesser | $[d] = \text{m}$ |
| ρ | Dichte des Fluids | $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| Re | Reynolds-Zahl | $[Re] = 1$ |

6.5.3 Unbekannt / Gemischt (Pratische Anwendung)

Vorgehen, wenn man nicht weiss, ob sich Wirbel bilden oder nicht

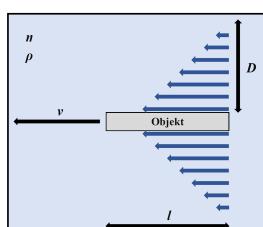
1. Laminar rechnen (um fehlenden Parameter ρ , v , d , oder η zu bestimmen)
2. Aus Resultat Reynolds-Zahl berechnen
3. Mit kritischer Reynolds-Zahl vergleichen
4. Beim **Überschreiten** \Rightarrow Turbulent rechnen!

6.6 Prandl'sche Grenzschicht-Dicke D

Prandl'sche Grenzschicht-Dicke D beschreibt, in welcher **Distanz** die **Geschwindigkeit** eines laminar bewegten Teils (z.B. ein Flugzeugflügel) Null ist.

$$D = \sqrt{\frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{l}{v}}$$

| | | |
|--------|---|---|
| D | Prandl'sche Grenzschicht-Dicke | $[D] = \text{m}$ |
| η | Dynamische Zähigkeit (Viskosität) | $[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$ |
| ρ | Dichte des Fluids | $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| l | Länge des bewegten Teils (in Richtung von v) | $[l] = \text{m}$ |
| v | Geschwindigkeit | $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |



Die Geschwindigkeit innerhalb der Grenzschicht D nimmt vom Teil bis hin zum äussersten Rand **linear** ab.

6.7 Bernoulli-Gleichung mit innerer Reibung

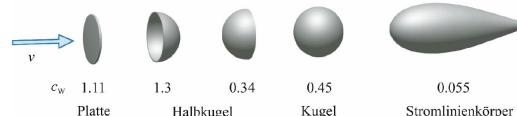
$$p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \alpha_2 \cdot \rho \cdot v_2^2 + \Delta p_v$$

| | turbulent | laminar |
|---------------------------|---|---|
| Korrekturfaktoren | $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 2$ | $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$ |
| Druckverlust Δp_v | $\Delta p_v = \lambda_x \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2$ | $\lambda_{turbulent} = \frac{0.316}{\sqrt{Re}}$ |

$$\lambda_{laminar} = \frac{64}{Re}$$

6.8 Druckwiderstand F_D

Bezeichnet die turbulente Luftreibungskraft F_R und wird meist als Luftwiderstand bezeichnet



$$F_D = \Delta p \cdot A_s = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_s \cdot c_w$$

| | | |
|------------|---|---|
| F_D | Druckwiderstand | $[F_D] = \text{N}$ |
| Δp | Druckdifferenz | $[\Delta p] = \text{Pa}$ |
| ρ | Luft-Dichte | $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| v | Strömungs-Geschwindigkeit | $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| c_w | Widerstandsbeiwert / Widerstandszahl | $[c_w] = 1$ |
| A_s | projizierte Fläche senkrecht zur Strömung | $[A_s] = \text{m}^2$ |

Der Widerstandsbeiwert c_w ist **geometrieabhängig**!

6.9 Auftriebskraft F_A nach Kutta-Jukowski

Beschreibt Proportionalität zwischen dynamischem Auftrieb und Zirkulation

$$F_A = \rho \cdot v \cdot l \cdot \Gamma$$

| | | |
|----------|-------------------------|--|
| F_A | dynamischer Auftrieb | $[F_A] = \text{N}$ |
| ρ | Dichte des Fluids | $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| v | Geschwindigkeit | $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| l | Länge quer zur Strömung | $[l] = \text{m}$ |
| Γ | Zirkulation | $[\Gamma] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ |

6.9.1 Zirkulation Γ

Die Zirkulation ist ein Mass für die **Rotation** im Strömungsfeld

$$\Gamma = \oint \vec{v} \bullet d\vec{s}$$

$$\begin{aligned} \Gamma & \text{ Zirkulation} & [\Gamma] &= \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \\ \vec{v} \bullet d\vec{s} & \text{ Geschwindigkeit entlang dem Weg} & [\vec{v}] &= \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ & (\text{Skalarprodukt: } \vec{v} \bullet d\vec{s} = a \cdot b \cdot \cos(\varphi)) & [\vec{v}] &= \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Rotierender Zylinder:

$$\Gamma = 2\pi r v_{Zyl} = 4\pi^2 r^2 f$$

6.10 Dynamischer Auftrieb F_A

$$F_A = c_A \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_{||}}_{\Delta p} \cdot A_{||}$$

| | | |
|----------|--|---|
| F_A | dynamischer Auftrieb | $[F_A] = \text{N}$ |
| c_A | Auftriebskoeffizient | $[c_A] = 1$ |
| ρ | Luft-Dichte | $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| v | Strömungsgeschwindigkeit | $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| $A_{ }$ | Projizierte Fläche parallel zur Strömung | $[A_{ }] = \text{m}^2$ |

6.10.1 Wissenswertes zum dynamischen Auftrieb

Ein gerade ausgerichtetes, symmetrisches Stromlinienprofil erzeugt **keinen** dynamischen Auftrieb

An einem asymmetrischen Flügelprofil entsteht dynamischer Auftrieb

6.11 Induzierter Widerstand F_W

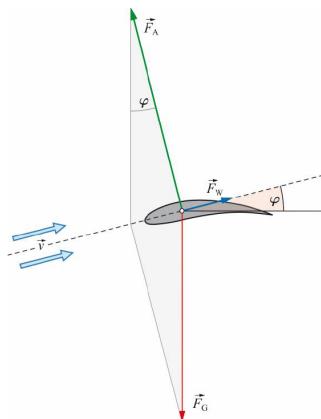
Kommt durch Energieverlust (Wirbelbildung) zu Stande, welcher entsteht, wenn die Umgebungsluft in Bewegung gesetzt wird

$$F_W = c_W^* \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_{||}$$

| | | |
|----------|--|---|
| F_W | Induzierter Widerstand | $[F_W] = \text{N}$ |
| c_W^* | Widerstands-Koeffizient | $[c_W^*] = 1$ |
| ρ | Luft-Dichte | $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| v | Strömungsgeschwindigkeit | $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| $A_{ }$ | Projizierte Fläche parallel zur Strömung | $[A_{ }] = \text{m}^2$ |

6.12 Gleitwinkel φ

Gibt die zurückgelegte Stecke pro verbrauchte Höhe an
Im Luft-Kanal ist dies der Anstell-Winkel



$$\tan(\varphi) = \frac{F_W}{F_A} = \frac{c_W^*}{c_A} = \frac{v_V}{v_H}$$

| | | |
|-----------|----------------------------|-------------------------------------|
| φ | Gleitwinkel | $[\varphi] = {}^\circ$ |
| F_W | Widerstandskraft | $[F_W] = \text{N}$ |
| F_A | Auftriebskraft | $[F_A] = \text{N}$ |
| c_W^* | Widerstands-Koeffizient | $[c_W^*] = 1$ |
| c_A | Auftriebs-Koeffizient | $[c_A] = 1$ |
| v_V | Vertikal-Geschwindigkeit | $[v_V] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| v_H | Horizontal-Geschwindigkeit | $[v_H] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |

6.12.1 Gängige Gleitzahlen

| Flugobjekt | Gleitzahl |
|---------------|----------------|
| Hängegleiter | 10 bis 15 |
| Boeing 747 | 15 |
| Airbus A380 | 20 |
| Segelflugzeug | 40 (Rekord 70) |

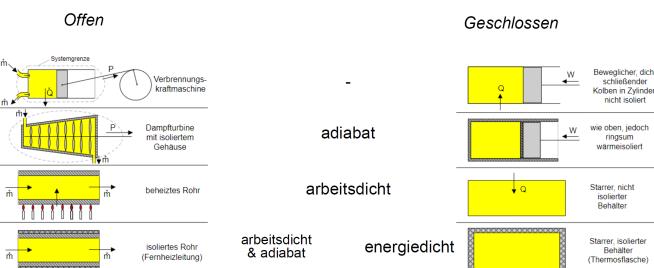
6.13 Helmholtz'sche Wirbelsätze

1. Wirbel hat kein Anfang und kein Ende
2. Wirbel besteht immer aus denselben Fluidteilchen
3. Zirkulation zeitlich konstant

7 Thermodynamik

7.1 Terminologie

| System ist ↓ | Materietausch | Energetausch | | |
|--------------|---------------|---|---|--|
| | | Arbeit | Wärme | |
| offen | erlaubt | - adiabatisch arbeitsdicht beides | erlaubt erlaubt Nein Nein Nein | erlaubt Nein erlaubt Nein Nein |
| geschlossen | Nein | - | möglich möglich Nein möglich Nein | möglich Nein möglich Nein |



7.2 Absolute Temperatur T

$$T = \theta + 273.15 \text{ K} = \theta - \theta_0$$

- T Absolute Temperatur gemessen in Kelvin $[T] = \text{K}$
 θ Temperatur gemessen in ${}^\circ\text{C}$ $[\theta] = {}^\circ\text{C}$
 θ_0 Absoluter Nullpunkt: $-273.15 {}^\circ\text{C} = 0 \text{ K}$

7.3 Thermische Ausdehnung

7.3.1 Längenausdehnung Δl

$$l' = l + \Delta l = l + \alpha \cdot l \cdot \Delta T = l (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

| | | |
|------------|------------------------------|---------------------------------|
| l' | Länge nach Ausdehnung | $[l'] = \text{m}$ |
| l | Anfangslänge | $[l] = \text{m}$ |
| Δl | Längenänderung | $[\Delta l] = \text{m}$ |
| α | Längenausdehnungskoeffizient | $[\alpha] = \frac{1}{\text{K}}$ |
| ΔT | Temperaturänderung | $[\Delta T] = \text{K}$ |

7.3.2 Flächenausdehnung ΔA

$$A' = A + \Delta A = A + \underbrace{\beta}_{\approx 2\alpha} \cdot A \cdot \Delta T = A (1 + \beta \cdot \Delta T)$$

| | | |
|------------|-------------------------------|--------------------------------|
| A' | Länge nach Ausdehnung | $[A'] = \text{m}^2$ |
| A | Anfangslänge | $[A] = \text{m}^2$ |
| ΔA | Längenänderung | $[\Delta A] = \text{m}^2$ |
| β | Flächenausdehnungskoeffizient | $[\beta] = \frac{1}{\text{K}}$ |
| ΔT | Temperaturänderung | $[\Delta T] = \text{K}$ |

7.3.3 Volumenausdehnung ΔV

$$V' = V + \Delta V = V + \underbrace{\gamma}_{\approx 3\alpha} \cdot V \cdot \Delta T = V (1 + \gamma \cdot \Delta T)$$

| | | |
|------------|-------------------------------|---------------------------------|
| V' | Volumen nach Ausdehnung | $[V'] = \text{m}^3$ |
| V | Anfangsvolumen | $[V] = \text{m}^3$ |
| ΔV | Volumenänderung | $[\Delta V] = \text{m}^3$ |
| γ | Volumenausdehnungskoeffizient | $[\gamma] = \frac{1}{\text{K}}$ |
| ΔT | Temperaturänderung | $[\Delta T] = \text{K}$ |

| Material | Koeffizient (10^{-6} K^{-1}) |
|------------------|--|
| Aluminium | 23 |
| Eisen | 12 |
| Stahl, unlegiert | 11 ... 13 |
| Diamant | 1.3 |
| Silizium | 2 |
| Gummi | 220 |
| Beton | 12 |
| Polyesterol | 70 |
| Zerodur | 0 ± 0.007 |

7.4 Thermische Spannung σ

$$p = \sigma = \varepsilon \cdot E = E \cdot \frac{\Delta l}{l} = E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

| | | |
|---------------|------------------------------|-------------------------------------|
| σ | Thermische Spannung | $[\sigma] = \text{Pa}$ |
| ε | Dehnung | $[\varepsilon] = 1$ |
| E | Elastizitätsmodul | $[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ |
| α | Längenausdehnungskoeffizient | $[\alpha] = \frac{1}{\text{K}}$ |
| ΔT | Temperaturänderung | $[\Delta T] = \text{K}$ |
| p | Druck | $[p] = \text{Pa}$ |

8 Ideales Gas

8.1 Modell des idealen Gases

Jedes Gas ist gleich!

1. Moleküle sind Massenpunkte (keine Ausdehnung)
2. Stöße sind elastisch (keine zwischenmolekularen Kräfte)
Kein Volumen bei $T = 0$
Kein Druck bei $T = 0$

8.1.1 Thermische Ausdehnung von Gasen

- Ausdehnung von Gasen ist sehr gross
- Bei allen Gasen ist die Ausdehnung **gleich**
- Volumen beim Nullpunkt ist **Null**

8.2 Universelle Gasgleichung

Alle Gase verhalten sich gleich, insbesondere bei gleicher Anzahl Moleküle

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{const} \Rightarrow \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

| | | |
|-------|----------------------------------|----------------------|
| p_x | Absolut-Druck | $[p_x] = \text{Pa}$ |
| | Absolut-Druck: $p_0 + p$ | |
| V_x | Volumen | $[V_x] = \text{m}^3$ |
| T_x | Absolut-Temperatur (in K) | $[T] = \text{K}$ |

8.2.1 Boyle-Mariotte

Das Gesetz gilt nur bei konstanter Temperatur!
⇒ Isotherme Zustandsänderung

$$p \cdot V = \text{const} \Rightarrow p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

8.2.2 Gay-Lussac

Das Gesetz gilt nur bei konstantem Druck!
⇒ Isobare Zustandsänderung

$$\frac{V}{T} = \text{const} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

8.2.3 Gay-Lussac und Amontons

Das Gesetz gilt nur bei konstantem Volumen!
⇒ Isochore Zustandsänderung

$$\frac{p}{T} = \text{const} \Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

8.3 Universelle Gasgleichung für ideale Gase

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T = N \cdot k \cdot T$$

| | | |
|-----|--|--|
| p | Absolut-Druck | $[p] = \text{Pa}$ |
| | Absolut-Druck: $p_0 + p$ | |
| V | Volumen | $[V] = \text{m}^3$ |
| n | Mol-Zahl | $[n] = \text{mol}$ |
| R | Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ | $[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ |
| T | Absolut-Temperatur (in K) | $[T] = \text{K}$ |
| N | Anzahl Moleküle | $[N] = 1$ |
| k | Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ | $[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$ |

8.3.1 Zusammenhänge zwischen den Konstanten

$$R = k \cdot N_A = \frac{N \cdot k}{n}$$

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M} = \frac{N \cdot k}{R}$$

| | | |
|-------|--|--|
| R | Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ | $[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ |
| k | Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ | $[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$ |
| N | Anzahl Moleküle | $[N] = 1$ |
| N_A | Avogadrokonstante: $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$ | $[N_A] = \frac{1}{\text{mol}}$ |
| n | Mol-Zahl | $[n] = \text{mol}$ |
| m | Masse | $[m] = \text{kg}$ |
| M | Mol-Masse | $[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$ |

8.4 Mechanische Arbeit ΔW von Gasen

Folgende Formel ist für Flüssigkeiten **nicht** gültig, da diese inkompressibel sind ($\Delta V = 0$)

$$\Delta W = F \cdot \Delta s = p \cdot A \cdot \Delta s = p \cdot \Delta V$$

| | | |
|------------|----------------------------|---------------------------|
| ΔW | Mechanische Arbeit von Gas | $[\Delta W] = \text{J}$ |
| F | Kraft | $[F] = \text{N}$ |
| Δs | Wegänderung | $[\Delta s] = \text{m}$ |
| p | Druck | $[p] = \text{Pa}$ |
| A | Fläche | $[A] = \text{m}^2$ |
| ΔV | Volumenänderung | $[\Delta V] = \text{m}^3$ |

8.5 Gesetz von Avogadro

Ein Mol eines Gases nimmt bei Normalbedingungen immer das gleiche Volumen ein (=Molvolumen)

Ideale Gase enthalten bei gleichem Druck p und gleicher Temperatur T immer gleich viele Moleküle (im Molvolumen)

8.6 Molmasse M , Molvolumen V_m

Siehe auch 8.3

Molmasse ist die **Ordnungszahl** im Periodensystem

$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$$

Molvolumen:

$$V_m = \frac{V}{n}$$

| | | |
|-------|--|--|
| p | Absolut-Druck | $[p] = \text{Pa}$ |
| V | Volumen | $[V] = \text{m}^3$ |
| R | Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ | $[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ |
| T | Absolut-Temperatur (in K) | $[T] = \text{K}$ |
| N_A | Avogadrokonstante: $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$ | $[N_A] = \frac{1}{\text{mol}}$ |
| k | Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ | $[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$ |
| n | Mol-Zahl | $[n] = \text{mol}$ |
| m | Masse | $[m] = \text{kg}$ |
| M | Mol-Masse | $[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$ |
| N | Anzahl Moleküle | $[N] = 1$ |
| V_m | Mol-Volumen | $[V_m] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$ |

8.7 Dichte eines Gases ρ

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{V_m} = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}$$

| | | |
|--------|--|--|
| ρ | Gas-Dichte | $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| m | Masse | $[m] = \text{kg}$ |
| V | Volumen | $[V] = \text{m}^3$ |
| M | Mol-Masse | $[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$ |
| V_m | Mol-Volumen (22.4 L bei 0 °C und 1000 hPa) | $[V_m] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$ |
| p | Absolut-Druck | $[p] = \text{Pa}$ |
| R | Absolut-Druck: $p_0 + p$ | |
| T | Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ | $[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ |
| | Absolut-Temperatur (in K) | $[T] = \text{K}$ |

8.8 Phänomene von idealen Gasen

8.8.1 Anomalie des Wassers

Die feste Form (Eis) ist leichter als die flüssige Form (Wasser). Die **größte Dichte** weist Wasser bei 4 °C auf, nicht beim Gefrierpunkt von 0 °C

⇒ Ein See gefriert somit nur an der Oberfläche. Am Grund des Sees beträgt die Wassertemperatur 4 °C

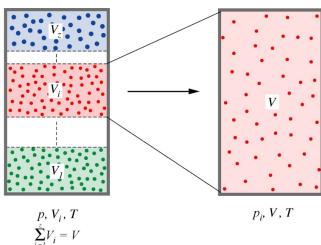
8.8.2 Osmotischer Druck (Zelldruck)

Große Moleküle innerhalb von vielen kleinen Molekülen in einer Flüssigkeit verhalten sich ähnlich wie die Moleküle eines idealen Gases, wenn die Flüssigkeit von einer für die Moleküle halbdurchlässigen (semi-permeable) Membran umgeben ist.

Osmotischer Druck: $p = \frac{n}{V} \cdot R \cdot T$ (ideale Gasgleichung)

8.9 Partialdruck p_i

Ausgangslage: Gasgemisch (z.B. Luft: Sauerstoff-Stickstoff)



Der Partialdruck p_i ist der Druck, welcher die i-te Gaskomponente erzeugen würde, wenn ihr das gesamte Volumen zur Verfügung stehen würde.

8.10 Gesetz von Dalton

In einem Gas ist die Summe der Partialdrücke p_i gleich dem Gesamtdruck

$$\sum_{i=1}^n p_i = p$$

$$\begin{array}{ll} p_i & \text{Partialdruck} & [p_i] = \text{Pa} \\ p & (\text{Gesamt-}) \text{Druck} & [p] = \text{Pa} \end{array}$$

8.11 Volumen- und Massenkonzentration (Gasgemisch)

8.11.1 Volumen-Konzentrationen (Volumen-Anteile)

$$q_i = \frac{V_i}{V} = \frac{n_i}{n} = \frac{p_i}{p}$$

$$\begin{array}{ll} q_i & \text{Volumen-Konzentration} & [q_i] = 1 \\ V_i & \text{Volumen der i-ten Gas-Komponente} & [V_i] = \text{m}^3 \\ V & \text{Gesamt-Volumen} & [V] = \text{m}^3 \\ n_i & \text{Molzahl der i-ten Gas-Komponente} & [n_i] = \text{mol} \\ n & \text{Gesamt-Molzahl des Gemisches} & [n] = \text{mol} \\ p_i & \text{Partialdruck der i-ten Gaskomponente} & [p_i] = \text{Pa} \\ p & \text{Druck des Gemischs} & [p] = \text{Pa} \end{array}$$

8.11.2 Massen-Konzentration (Massen-Anteile)

$$\mu_i = \frac{m_i}{m} = \frac{M_i}{M} \cdot q_i$$

$$\begin{array}{ll} \mu_i & \text{Volumen-Konzentrationen} & [\mu_i] = 1 \\ m_i & \text{Masse der i-ten Gas-Komponente} & [m_i] = \text{kg} \\ m & \text{Masse der Gemischs} & [m] = \text{kg} \\ M_i & \text{Mol-Masse der i-ten Gas-Komponente} & [M_i] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \\ M & \text{Mol-Masse des Gemischs} & [M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \\ q_i & \text{Volumen-Konzentration} & [q_i] = 1 \end{array}$$

8.12 Mol-Masse Gasgemisch

Die Mol-Masse des Gas-Gemisches kann als gewichteter Mittelwert berechnet werden, gewichtet mit den jeweiligen Volumen-Anteilen

$$M = \sum_{i=1}^n q_i \cdot M_i$$

$$\begin{array}{ll} M & \text{Mol-Masse Gasgemisch} & [M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \\ q_i & \text{Volumen-Konzentration} & [q_i] = 1 \\ M_i & \text{Mol-Masse der i-ten Gas-Komponente} & [M_i] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \end{array}$$

9 Reales Gas

Im Vergleich zum idealen Gas müssen zwei Dinge berücksichtigt werden:

Eigen-Volumen:

Ideales Gas hat **kleineres** Volumen als gemessen
(Ideal-Gas-Volumen um das Molekül-Eigenvolumen reduzieren)

Binnen-Druck:

Ideales Gas hat **grösseren** Druck als gemessen
(Ideal-Gas-Druck um Binnendruck erhöhen)

9.1 Van der Waals-Gleichung (1 Mol)

⇒ Für nicht-ideale Gase!

$$p' \cdot V'_m = R \cdot T$$

$$p' = p + \frac{a}{V_m^2}$$

$$V'_m = V_m - b$$

$$\begin{array}{ll} p' & \text{Korrigierter Druck} & [p'] = \text{Pa} \\ V'_m & \text{Korrigiertes Mol-Volumen} & [V_m] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \\ R & \text{Universelle Gaskonstante: } R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} & [R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \\ T & \text{Absolut-Temperatur (in K)} & [T] = \text{K} \\ p & \text{Druck des Gemischs} & [p] = \text{Pa} \\ a & \text{Eigenvolumen} & [a] = \frac{\text{J} \cdot \text{m}^3}{\text{mol}^2} \\ b & \text{Binnendruck} & [b] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \\ V_m & \text{Mol-Volumen} & [V_m] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \end{array}$$

9.2 Van der Waals-Gleichung (n Mol)

$$\left(p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2} \right) \cdot (V - n \cdot b) = n \cdot R \cdot T$$

p Druck des Gemisches

n Mol-Zahl

a Eigenvolumen

V Volumen

b Binnendruck

R Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

T Absolut-Temperatur (in K)

$[p] = \text{Pa}$

$[n] = \text{mol}$

$[a] = \frac{\text{J} \cdot \text{m}^3}{\text{mol}^2}$

$[V] = \text{m}^3$

$[b] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$

$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

$[T] = \text{K}$

$V_{mk} = 3 \cdot b$

$$a = \frac{9}{8} \cdot R \cdot T_k \cdot V_{mk} = \frac{27 R^2 T_k^2}{64 \cdot p_k}$$

$$b = \frac{V_{mk}}{3} = \frac{RT_k}{8 \cdot p_k}$$

$$T_k = \frac{8 \cdot a}{27 \cdot R \cdot b}$$

$$p_k = \frac{a}{27 \cdot b^2}$$

a Eigenvolumen

$[a] = \frac{\text{J} \cdot \text{m}^3}{\text{mol}^2}$

R Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

T_k Kritische Absolut-Temperatur

$[T_k] = \text{K}$

V_{mk} Kritisches Mol-Volumen

$[V_{mk}] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$

b Binnendruck

$[b] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$

p_k Kritischer Druck

$[p_k] = \text{Pa}$

10 Wärmelehre

10.1 Wärme Q

Wärme ist Energie, welche stets (von allein) von höherer zu niedrigerer Temperatur fliesst

$$\Delta U = \frac{\overset{1.HS}{\longleftarrow} 100\%}{\underset{2.HS}{\longrightarrow} 100\%} \Delta W + \Delta Q$$

10.2 Erster Hauptsatz der Wärmelehre

Nicht nur durch Wärmezufuhr, sondern auch durch mechanische Arbeit lässt sich die Temperatur und damit die innere Energie U erhöhen

$$\Delta U = \Delta W + \Delta Q$$

| | | |
|------------|---|-------------------------|
| ΔU | Zu-/Abgeföhrt Innere Energie | $[\Delta U] = \text{J}$ |
| ΔW | Zu-/Abgeföhrt Arbeit | $[\Delta W] = \text{J}$ |
| | z.B. E_{kin} , E_{pot} , W_{Gas} , W_{reib} | |
| ΔQ | Zu-/Abgeföhrt Wärme | $[\Delta Q] = \text{J}$ |

10.2.1 Ansätze für 1. HS

$$\Delta Q = E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$\Delta Q = E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

$$\Delta \dot{Q} = \Delta P$$

10.2.2 Mechanische Arbeit eines Gases

Für mehr Details, siehe Abschnitt 8.4

$$\Delta W = p \cdot \Delta V$$

10.3 Mechanische Wärmeäquivalente

1 Kalorie = 4,1868 J (cal)

⇒ Energie, um 1 Gramm Wasser um 1 Grad zu erwärmen

1 kcal = 4186,8 J

⇒ Energie, um 1 Kilogramm Wasser um 1 Grad zu erwärmen

10.3.1 Elektrisches Wärmeäquivalent c

Elektrische Energie = Wärme

$$U \cdot I \cdot t = c \cdot m \cdot \Delta T \Leftrightarrow c = \frac{U \cdot I \cdot t}{m \cdot \Delta T}$$

| | | |
|------------|------------------------------|---|
| c | Elektrisches Wärmeäquivalent | $[c] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ |
| U | Spannung | $[U] = \text{V}$ |
| I | Strom | $[I] = \text{A}$ |
| t | Zeit | $[t] = \text{s}$ |
| m | Masse | $[m] = \text{kg}$ |
| ΔT | Temperaturänderung | $[\Delta T] = \text{K}$ |

10.4 Wärmekapazität

Die Wärmekapazität drückt das Energiespeicher-Vermögen aus.

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T = n \cdot c_M \cdot \Delta T = C \cdot \Delta T$$

10.4.1 Absolute Wärmekapazität C

Energiespeicher-Vermögen eines Gegenstands

$$\Delta Q = C \cdot \Delta T$$

10.4.2 Spezifische Wärmekapazität c

Energiespeicher-Vermögen einer Substanz

| Substanz | c bei 20°C |
|-------------|--------------|
| Wasser | 4182 |
| Ethanol | 2430 |
| Glyzerin | 2390 |
| Quecksilber | 139 |
| Gold | 129 |
| Stahl | 480 |

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$

10.4.3 Molare Wärmekapazität c_M

Energiespeicher-Vermögen einer Anzahl Moleküle

$$c_M = \frac{c}{n} = M \cdot c$$

$$\Delta Q = \text{Zu-/Abgeföhrt Wärme} \quad [\Delta Q] = \text{J}$$

$$c \quad \text{spezifische Wärmekapazität} \quad [c] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$c_M \quad \text{molare Wärmekapazität} \quad [c_M] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$C \quad \text{absolute Wärmekapazität} \quad [C] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$m \quad \text{Masse} \quad [m] = \text{kg}$$

$$\Delta T \quad \text{Temperaturänderung} \quad [\Delta T] = \text{K}$$

$$n \quad \text{Mol-Zahl} \quad [n] = \text{mol}$$

$$M \quad \text{Mol-Masse} \quad [M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$$

10.4.4 Molare Wärmekapazität von Gasen

$$C_{mp} - C_{mV} = R$$

$$C_{mp} \quad \text{isobare Wärme-Kapazität} \quad (p = \text{const})$$

$$C_{mV} \quad \text{isochore Wärme-Kapazität} \quad (V = \text{const})$$

$$R \quad \text{Universelle Gaskonstante} \quad R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$[C_{mp}] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$[C_{mV}] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

10.4.5 Molare Wärmekapazität von Festkörpern

$$T > \Theta_D : \quad C_m \approx 3R \approx 25 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \quad (\text{Dulong} - \text{Petit})$$

$$T \ll \Theta_D : \quad C_m = \frac{12 \cdot \pi^4}{5} \cdot R \cdot \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \quad (\text{Debye})$$

$$T \quad \text{Absolut-Temperatur} \quad (\text{in K})$$

$$\Theta_D \quad \text{Debye-Temperatur} \quad \Theta_D \approx 200 \text{ K}$$

$$C_m \quad \text{molare Wärmekapazität}$$

$$R \quad \text{Universelle Gaskonstante:} \quad R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

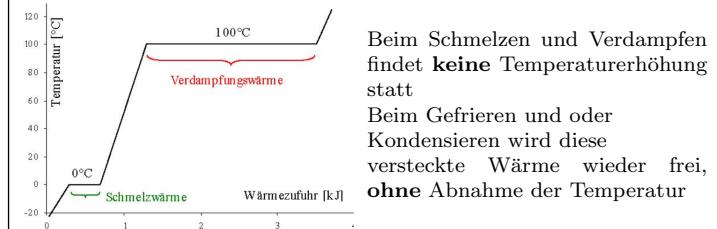
$$[T] = \text{K}$$

$$[\Theta_D] = \text{K}$$

$$[C_m] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

10.5 Latente Wärme, Enthalpie (Schmelz-/ Verdampfungswärme)



Die Schmelz-/ Verdampfungswärme ist stark druckabhängig

$$Q_f = q_f \cdot m$$

$$q_{Wasser} := 334 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$Q_s = q_s \cdot m$$

$$q_{Wasser} := 2256 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$Q_f = \text{Schmelz-/Erstarrungs-Wärme} \quad [Q_f] = \text{J}$$

$$[q_f] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$Q_s = \text{Verdampfungs-/Kondensations-Wärme} \quad [Q_s] = \text{J}$$

$$[q_s] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$q_s = \text{Spezifische Verdampfungs-Wärme}$$

$$[q_s] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$m = \text{Masse} \quad [m] = \text{kg}$$

10.6 Wärmebilanz

Wärmeaustausch zwischen verschiedenen Materialien

In einem abgeschlossenen System (nach aussen isoliert) muss gelten:
Zugeführte Wärme = Abgeführte Wärme

$$\sum_{i=1}^n (\Delta Q_i + \Delta Q_{fi} + \Delta Q_{si}) = 0$$

$$\Delta Q_i \quad \text{i-te Wärme-Menge aus Temperatur-Zu-/Abnahme}$$

$$[\Delta Q_i] = \text{J}$$

$$\Delta Q_{fi} \quad \text{i-te Wärme-Menge aus Schmelz-/Erstarrungs-Vorgang}$$

$$[\Delta Q_{fi}] = \text{J}$$

$$\Delta Q_{si} \quad \begin{aligned} \text{i-te Wärme-Menge aus} \\ \text{Verdampfungs-/Kondensations-Vorgang} \\ + \text{zugeführte Wärme-Menge} \\ - \text{abgeführter Wärme-Menge} \end{aligned}$$

11 Phasen und Phasenübergänge

11.1 Phasen

- Fest**
feste Gestalt; festes Volumen
- Flüssig**
keine feste Gestalt; festes Volumen
- Gasförmig**
keine feste Gestalt; kein festes Volumen
- Plasma**
Bei sehr hoher Temperatur ist Materie ionisiert (Elektronengas)
- Mischung / Dispersion:**

| | flüssig | gasförmig |
|-----------|------------------|-----------------|
| fest | Suspension (Sol) | Aerosol (Rauch) |
| flüssig | Emulsion | Aerosol (Nebel) |
| gasförmig | Schaum | - |

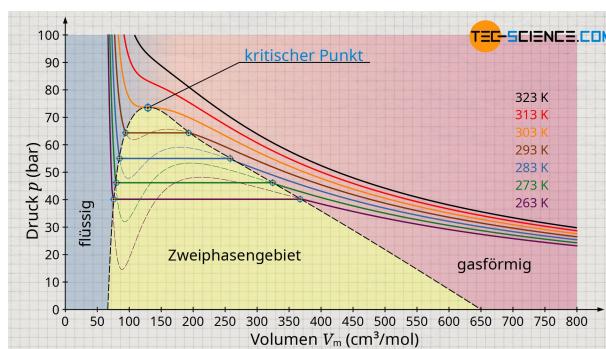
11.2 Dampfdruck $p_s(T)$

Der Dampfdruck bedeutet das Gleichgewicht der Flüssigkeit mit ihrer Dampfphase

Der Dampfdruck ist das Niveau des kontanten Drucks im 2-Phasengebiet eines realen Gases nach van der Waals.

Der Dampfdruck ist nur **temperaturabhängig**

Bei Kompression oder Expansion ändert sich der Dampfdruck nicht, sondern der Anteil Flüssigkeit zu Gas muss ändern



Verdunsten ⇒ Schnellste Teilchen treten aus Flüssigkeit aus

Sieden/Verdampfen Dampfdruck = Umgebungsdruck

11.3 Dampfdruck-Kurve (Clausius-Clapeyron)

Kondensieren ⇔ Verdampfen flüssig ⇔ gasförmig

$$\frac{dp_s}{dT} = \frac{q_s}{T \cdot \left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_f} \right)}$$

11.3.1 Dampfdruck $p_s(T)$ von Wasser (Clausius-Clapeyron)

$$p_s(T) = p_{s0} \cdot e^{\frac{q_s \cdot M_W}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)}$$

$$p_{s0} = 610.7 \text{ Pa} \quad T_0 = 273 \text{ K} \quad q_s = 2420 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \quad M_W = 18.02 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

11.4 Schmelzdruck-Kurve (Clausius-Clapeyron)

Erstarren ⇔ Schmelzen fest ⇔ flüssig

$$\frac{dp_f}{dT} = \frac{q_f}{T \cdot \left(\frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_s} \right)}$$

11.5 Gasdruck-Kurve (Clausius-Clapeyron)

Desublimieren ⇔ Sublimieren fest ⇔ gasförmig

$$\frac{dp_{sub}}{dT} = \frac{q_s + q_f}{T \cdot \left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_s} \right)}$$

| | | |
|-------------|--|--|
| q_s | spezifische Verdampfungs-Wärme | $[q_s] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$ |
| q_f | spezifische Schmelz-Wärme | $[q_f] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$ |
| $q_s + q_f$ | spezifische Sublimations-Wärme | |
| p_s | Dampfdruck | $[p_s] = \text{Pa}$ |
| p_f | Schmelzdruck | $[p_f] = \text{Pa}$ |
| p_g | Schmelzdruck | $[p_g] = \text{Pa}$ |
| ρ_g | Dichte Gas | $[\rho_g] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| ρ_f | Dichte Flüssigkeit | $[\rho_f] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| ρ_s | Dichte Festkörper | $[\rho_s] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| T | Temperatur | $[T] = \text{K}$ |
| M | Molare Masse | $[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$ |
| R | Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ | $[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ |

11.6 Formeln von Magnus

Die Formeln von Magnus dienen der vereinfachten Berechnung des Dampfdrucks von Wasser = Sättigungsdruck

11.6.1 Dampfdruck von Wasser $p_s(\theta)$ ($\theta \geq 0^\circ\text{C}$)

$$p_s(\theta) = p_{s0} \cdot 10^{\frac{7.5 \cdot \theta}{\theta + 237}}$$

11.6.2 Schmelzdruck von Wasser $p_s(\theta)$ ($\theta \leq 0^\circ\text{C}$)

$$p_s(\theta) = p_{s0} \cdot 10^{\frac{9.5 \cdot \theta}{\theta + 265.5}}$$

11.6.3 WMO erweiterte Lösung $p_s(\theta)$ ($-40^\circ\text{C} < \theta < 50^\circ\text{C}$)

$$p_s(\theta) = p_{s0} \cdot e^{\left(\frac{17.62 \cdot \theta}{243.04 + \theta} \right)}$$

p_s Dampfdruck / Schmelzdruck $[p_s] = \text{Pa}$
 p_{s0} Dampfdruck bei 0°C $p_{s0} = 610.7 \text{ Pa}$ $[p_{s0}] = \text{Pa}$
 θ Temperatur $[\theta] = {}^\circ\text{C}$

11.7 Umkehrformeln von Magnus

11.7.1 $\theta(p_s)$ für $p_s \geq p_{s0}$

$$\theta(p_s) = \frac{237 \cdot \log\left(\frac{p_s}{6.107}\right)}{7.5 - \log\left(\frac{p_s}{6.107}\right)}$$

11.7.2 $\theta(p_s)$ für $p_s \leq p_{s0}$

$$\theta(p_s) = \frac{265.5 \cdot \log\left(\frac{p_s}{p_{s0}}\right)}{9.5 - \log\left(\frac{p_s}{p_{s0}}\right)}$$

11.8 Luftfeuchtigkeit

11.8.1 Absolute Luftfeuchtigkeit f

$$f = \frac{m_W}{V}$$

11.8.2 Relative Luftfeuchtigkeit f_r

$$f_r = \frac{m_W}{m_S} = \frac{p_D}{p_S} = \frac{p_D}{p_S(\theta)}$$

| | | |
|----------|--|--------------------------------------|
| f | Absolute Luftfeuchtigkeit | $[f] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| f_r | Relative Luftfeuchtigkeit | $[f_r] = 1$ |
| m_W | Masse Wasserdampf | $[m_W] = \text{kg}$ |
| m_S | Masse Wasserdampf bei Sättigung | $[m_S] = \text{kg}$ |
| V | Volumen | $[V] = \text{m}^3$ |
| p_D | Partialdruck Wasserdampf | $[p_D] = \text{Pa}$ |
| p_S | Dampfdruck = Sättigungsdruck Wasserdampf | $[p_s] = \text{Pa}$ |
| θ | Temperatur | $[\theta] = {}^\circ\text{C}$ |

11.8.3 Feuchte vs. trockene Luft

Feuchte Luft ist leichter als trockene Luft!

$$\rho_f = \rho_t + \frac{p_D}{RT} (M_W - M_L)$$

| | | |
|----------|--|--|
| ρ_f | Dichte feuchte Luft | $[\rho_f] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| ρ_t | Dichte trockene Luft | $[\rho_t] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| p_D | Partialdruck Wasserdampf | $[p_D] = \text{Pa}$ |
| T | Temperatur | $[T] = \text{K}$ |
| M_W | Molmasse H_2O | $[M_W] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$ |
| M_S | Molmasse Luft g | $[M_W] = \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ |
| R | Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ | $[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ |

11.9 Taupunkts-Temperatur θ_d

Temperatur, bei welcher 100% Luftfeuchtigkeit herrscht.

Wenn die Taupunkt-Temperatur **unterschritten** wird, dann kondensiert Wasser.

$$\theta_d(\theta, f_r) = \frac{237 \cdot (\log(f_r) + \frac{7.5 \cdot \theta}{\theta + 237})}{7.5 - (\log(f_r) + \frac{7.5 \cdot \theta}{\theta + 237})}$$

$$\theta_d(x) = \frac{237 \cdot x}{7.5 - x} \quad \text{mit} \quad x(\theta, f_r) = \log(f_r) + \frac{7.5 \cdot \theta}{\theta + 237}$$

| | | |
|------------|---------------------------|---------------------------------|
| θ_d | Taupunkts-Temperatur | $[\theta_d] = {}^\circ\text{C}$ |
| f_r | relative Luftfeuchtigkeit | $[f_r] = 1$ |
| θ | Temperatur | $[\theta] = {}^\circ\text{C}$ |

11.10 Relative Innen-Feuchte f_{ri}

$$f_{ri} = \frac{p_s(\theta_a)}{p_s(\theta_i)} \cdot f_{ra}$$

| | | |
|-----------------|---------------------------------|-------------------------------|
| f_{ri} | relative Feuchte im Inneren | $[f_{ri}] = 1$ |
| f_{ra} | relative Feuchte der Aussenluft | $[f_{ra}] = 1$ |
| $p_s(\theta_i)$ | Dampfdruck bei Innentemperatur | $[p_s(\theta_i)] = \text{Pa}$ |
| $p_s(\theta_a)$ | Dampfdruck bei Aussentemperatur | $[p_s(\theta_a)] = \text{Pa}$ |

12 Kinetische Gas-Theorie

12.1 Aequipartitionsgesetz

Mittlere kinetische Energie

Idealisierte Annahmen:

1. Moleküle = Massenpunkte
2. Keine (bzw.) elastische Zusammenstöße
3. Keine Kräfte zwischen den Molekülen
4. Elastischer Stoss gegen Wand
5. Alle Moleküle haben gleiche Geschwindigkeit
6. 1/6 aller Moleküle fliegen gegen eine einzelne Wand

$$\bar{E} = f \cdot \frac{k \cdot T}{2}$$

- | | |
|---------|----------------|
| $f = 3$ | 1-atomiges Gas |
| $f = 5$ | 2-atomiges Gas |
| $f = 6$ | 3-atomiges Gas |

| | | |
|-----------|--|-----------------------------------|
| \bar{E} | Mittlere kinetische Energie | $[\bar{E}] = \text{J}$ |
| f | Freiheitsgrade | $[f] = 1$ |
| k | Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ | $[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$ |
| T | Absolute Temperatur | $[T] = \text{K}$ |

12.2 Geschwindigkeiten

12.2.1 Mittlere quadratische Geschwindigkeit u

$$u = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}}$$

12.2.2 Mittlere Geschwindigkeit \bar{v}

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 \cdot k \cdot T}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi M}}$$

12.2.3 Wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_0

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot T}{M}}$$

| | | |
|-----|--|--|
| k | Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ | $[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$ |
| T | absolute Temperatur | $[T] = \text{K}$ |
| m | Masse des Teilchens | $[m] = \text{kg}$ |
| M | Molmasse | $[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$ |
| R | Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ | $[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ |

12.3 Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$f(m, T, v) = \sqrt{\frac{2 \cdot m^3}{\pi \cdot k^3 \cdot T^3}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k \cdot T}}$$

| | | |
|-----|--|-----------------------------------|
| m | Masse des Teilchens | $[m] = \text{kg}$ |
| k | Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ | $[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$ |
| T | Absolute Temperatur | $[T] = \text{K}$ |
| v | Geschwindigkeit | $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |

12.4 Mittlere freie Weglänge $\bar{\lambda}$

Gibt an, um welche Strecke sich ein Molekül im Mittel bis zum nächsten Zusammenstoß fortbewegen kann.

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n \cdot (\pi \cdot d^2)}$$

mit Wirkungsquerschnitt $\sigma = \pi \cdot d^2$

$$n \quad \text{Molekül-Dichte} \quad [n] = \frac{1}{\text{m}^3}$$

$$d \quad \text{Molekül-Durchmesser} \quad [d] = \text{m}$$

12.5 Dichtefunktion

Verteilungsfunktion der mittleren, freien Weglänge

$$f(x) = \frac{1}{\bar{\lambda}} \cdot e^{-\frac{x}{\bar{\lambda}}}$$

12.6 Transportvorgänge

12.6.1 Wärmeleitung

Transport von **kinetischer Energie** (als Wärme wahrgenommen)

$$j_Q = -\lambda_Q \cdot \frac{dT}{dx} \quad \lambda_Q = \frac{1}{6} \cdot n \cdot \bar{v} \cdot \bar{\lambda} \cdot f \cdot k$$

12.6.2 Diffusion

Transport von **Masse**

$$j_D = -D \cdot \frac{dn}{dx} \quad D = \frac{1}{3} \cdot \bar{v} \cdot \bar{\lambda}$$

12.6.3 Viskosität ($v \ll v_{therm}$)

Transport von **Impuls**

$$\tau = -\eta \cdot \frac{dv}{dx} \quad \eta = \frac{1}{3} \cdot \bar{v} \cdot \bar{\lambda} \cdot \rho$$

$$j_Q = \text{Wärmestrom}$$

$$[j_Q] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\lambda_Q = \text{Wärmeleitfähigkeit}$$

$$[\lambda_Q] = \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$$

$$j_D = \text{Diffusionsstrom}$$

$$[j_D] = ?$$

$$D = \text{Diffusionskonstante}$$

$$[D] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\tau = \text{Schubspannung}$$

$$[\tau] = \text{N}$$

$$\eta = \text{Viskosität}$$

$$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$$

$$n = \text{Molekül-Dichte}$$

$$[n] = \frac{1}{\text{m}^3}$$

$$\bar{v} = \text{Mittlere Geschwindigkeit}$$

$$[\bar{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\bar{\lambda} = \text{Mittlere freie Weglänge}$$

$$[\bar{\lambda}] = \text{m}$$

$$f = \text{Anzahl Freiheitsgrade}$$

$$[f] = 1$$

$$k = \text{Boltzmann-Konstante } k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$T = \text{absolute Temperatur}$$

$$[T] = \text{K}$$

$$\rho = \text{Dichte}$$

$$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

13 Temperaturstrahlung

- Wärmestahlung = Berührungslose Übertragung von Wärme
- In Form von elektromagnetischen Wellen ($\lambda @ \text{IR}$)
- Körper absorbiert elektromagn. Strahlung und erhöht seine Temperatur
Jeder Körper mit $T > 0 \text{ K}$ strahlt Wärme ab (Temp-strahlung)
- Für jede Wellenlänge muss ein Körper gleich viel Energie abstahlen, wie er zuvor aufgenommen hat!

13.1 Strahlungs-Gesetze

13.1.1 Stefan-Boltzmann-Gesetz

- Ideal schwarzer Körper (Hohlraum) absorbiert alle Wellenlängen zu 100 %
- Je mehr ein Körper absorbiert, desto mehr muss er emmitieren (Energie-Gleichgewicht)

Ein schwarzer Körper (=Hohlraumstrahler) der Temperatur T hat eine totale Abstrahlungs-Leistung pro Oberfläche K_S von:

$$K_S = \sigma \cdot T^4$$

$$\begin{aligned} K_S &\quad \text{Schwarzkörper-Emission} \quad [K_S] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ \sigma &\quad \text{Stefan-Boltzmann-Konstante} \quad [\sigma] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \\ \sigma &= 5.671 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \end{aligned}$$

$$T \quad \text{Temperatur} \quad [T] = \text{K}$$

13.1.2 Wien'sches Verschiebungsgesetz

Verschiebung der maximalen Wellenlänge:

$$\lambda_{max} \cdot T = \text{const} = b$$

$$\begin{aligned} \lambda_{max} &\quad \text{Wellenlängen-Maximum (Planck)} \quad [\lambda_{max}] = \text{m} \\ T &\quad \text{Temperatur} \quad [T] = \text{K} \\ b &\quad \text{Konstante: } b = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad [b] = \text{m} \cdot \text{K} \end{aligned}$$

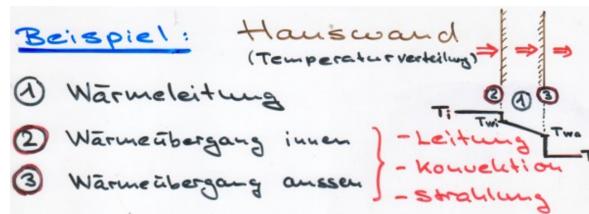
13.1.3 Planck'sches Gesetz der Quantenmechanik

Ein Oszillator, welcher auf ein anderes Energieniveau (=Elektronen-Kreisbahnen nach Bohr) wechselt, setzt die Energiedifferenz ΔE in ein Lichtquant (Photon) mit entsprechender Frequenz f um.
Je nach Vorzeichen von ΔE wird das Photon emmitiert oder absorbiert.

$$\Delta E = h \cdot f$$

$$\begin{aligned} \Delta E &\quad \text{spektrale Abstrahlung (Energie)} \quad [\Delta E] = \text{J} \\ h &\quad \text{Planck'sches Wirkungsquantum} \quad [h] = \text{J} \cdot \text{s} \\ h &= 6.628 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ f &\quad \text{Frequenz des Photons} \quad [f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz} \end{aligned}$$

13.2 Wärmetransport (an Beispiel Hauswand)



13.2.1 Wärmeleitung

$$j = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx}$$

$$\begin{aligned} j &\quad \text{Wärmestromdichte} & [j] &= \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ \lambda &\quad \text{Wärmeleitfähigkeit} & [\lambda] &= \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \\ \frac{dT}{dx} &\quad \text{Wärmeabnahme / Gradient} & [\frac{dT}{dx}] &= \frac{\text{T}}{\text{m}} \end{aligned}$$

13.2.2 Wärmeübergang

$$\text{innen: } j = \alpha_i \cdot (T_i - T_{wi}) \quad \text{mit } \alpha_i = 8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

$$\text{außen: } j = \alpha_a \cdot (T_{wa} - T_a) \quad \text{mit } \alpha_a = 20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

13.2.3 Wärmedurchgang

Material + Dicke zusammengefasst

$$j = k \cdot (T_i - T_a) = k \cdot \Delta T \quad \text{mit } k = \frac{\lambda}{d}$$

$$\begin{aligned} j &\quad \text{Wärmestromdichte} & [j] &= \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ \lambda &\quad \text{Wärmeleitfähigkeit} & [\lambda] &= \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \\ \frac{dT}{dx} &\quad \text{Wärmeabnahme / Gradient} & [\frac{dT}{dx}] &= \frac{\text{T}}{\text{m}} \\ \alpha_i &\quad \text{Wärmeübergangszahl innen} & [\alpha_i] &= \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \\ \alpha_a &\quad \text{Wärmeübergangszahl aussen} & [\alpha_a] &= \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \\ T_{wa} &\quad \text{Temperatur Wand aussen} & [T_{wa}] &= \text{K} \\ T_a &\quad \text{Aussentemperatur} & [T_a] &= \text{K} \\ T_{wi} &\quad \text{Temperatur Wand innen} & [T_{wi}] &= \text{K} \\ T_i &\quad \text{Innentemperatur} & [T_i] &= \text{K} \\ k &\quad \text{Wärmedurchgangszahl} & [k] &= \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \\ d &\quad \text{Dicke der Wand} & [d] &= \text{m} \end{aligned}$$

$$P = \dot{Q} = j \cdot A$$

13.2.4 Wärmedurchgang komplett

Der komplettete Wärmedurchgang leitet sich her durch die Erhaltung der Wärmestrondichte j und errechnet sich mit:

$$\text{n Schichten: } \frac{1}{k_{tot}} = \frac{1}{\alpha_i} + \sum_x \frac{1}{k_x} + \frac{1}{\alpha_a}$$

$$\text{zylindrisch: } \frac{1}{k_{tot}} = r_a \left(\frac{1}{\alpha_i \cdot r_i} + \sum_x \frac{1}{\lambda_x} \cdot \ln \left(\frac{r_{xa}}{r_{xi}} \right) + \frac{1}{\alpha_a \cdot r_a} \right)$$

| | | |
|-------------|----------------------------------|---|
| k_x | Wärmedurchgangszahl x-te Schicht | $[k_x] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$ |
| α_i | Wärmeübergangszahl innen | $[\alpha_i] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$ |
| α_a | Wärmeübergangszahl aussen | $[\alpha_a] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$ |
| r_i | Innenradius Rohr | $[r_i] = \text{m}$ |
| r_a | Aussenradius Rohr | $[r_a] = \text{m}$ |
| λ_x | Wärmeleitfähigkeit | $[\lambda] = \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$ |

13.3 Wärme-Bedarf (Heizleistung)

Der Wärme-Bedarf (=Heizleistung) setzt sich zusammen aus Wärmeverlust durch Wärmeleitung und durch Wärmeverlust durch Luftaustausch:

$$\underbrace{\dot{Q}_{tot}}_{\dot{Q}} = \underbrace{Heizleistung}_{P}$$

$$P = \dot{Q}_{tot} = \dot{Q}_W + \dot{Q}_L$$

$$\dot{Q}_W = A \cdot j = A \cdot k \cdot \Delta T$$

$$\dot{Q}_L = c_L \cdot \rho_L \cdot \dot{V} \cdot \Delta T$$

$$\text{allgemein: } \dot{Q}_{tot} = \sum_{i=1}^n [(A_i \cdot k_i + c_L \cdot \rho_L \cdot \dot{V}) \cdot \Delta T]$$

| | | |
|-----------------|---|--|
| \dot{Q}_{tot} | Totaler Wärmeverlust | $[\dot{Q}_{tot}] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$ |
| \dot{Q}_W | Wärmeleitung | $[\dot{Q}_W] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$ |
| \dot{Q}_L | Luftaustausch | $[\dot{Q}_L] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$ |
| k_i | Wärmedurchgangszahl i-te Schicht | $[k_i] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$ |
| \dot{V} | Volumenstrom | $[\dot{V}] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ |
| ρ_L | Dichte der Luft: $\rho_L = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ | $[\rho_L] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| c_L | Wärmekapazität Luft: $c_L = 1000 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ | $[c_L] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ |
| A | Fläche der Wärmeleitung | $[A] = \text{m}^2$ |
| ΔT | Temperaturdifferenz | $[\Delta T] = \text{K}$ |

13.4 Wärmeverlust durch Abstrahlung

Durch Strahlung kann auch Wärme übertragen werden.

$$j_{12} = c_{12} \cdot (T_1^4 - T_2^4) = \sigma \cdot \varepsilon \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

| | | |
|--|---------------------------------------|--------------------------------------|
| j_{12} | W-Transport durch Strahlungsaustausch | $[j_{12}] = \frac{W}{m^2}$ |
| c_{12} | Strahlungsaustauschzahl | $[c_{12}] = \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$ |
| σ | Stefan-Boltzmann-Konstante | $[\sigma] = \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$ |
| $\sigma = 5.671 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$ | | |
| ε | Emissionsverhältnis | $[\varepsilon] = 1$ |

13.5 Zustandsänderungen

Erinnerung 1. Hauptsatz: $\Delta U = \Delta W + \Delta Q$

13.5.1 Isotherm

bei konstanter Temperatur

$$W_{ab} = n \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

$$\Delta Q_{zu} = W \quad (\Delta U = 0)$$

13.5.2 Isobar

bei konstantem Druck

$$W_{ab} = p \cdot (V_2 - V_1)$$

$$\Delta Q_{zu} = n \cdot C_{mp} \cdot \Delta T$$

13.5.3 Isochor

bei konstantem Volumen

$$W = 0$$

$$\Delta Q_{zu} = n \cdot C_{mV} \cdot \Delta T \quad (\Delta U = \Delta Q)$$

13.5.4 Adiabatisch

ohne Wärme-Austausch

$$W_{ab} = n \cdot C_{mV} \cdot \Delta T$$

$$\Delta Q = 0$$

14 Rückwandlung innerer Energie

14.1 Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre

Innere Energie kann **nicht zu 100 %** in Arbeit umgesetzt werden
⇒ Carnot-Wirkungsgrad ist der theoretisch höchstmögliche.

Wärme kann niemals von selbst von einem kälteren Ort zu einem wärmeren Ort fliessen (Clausius)

Es gibt keine periodisch wirkende Maschine, die nichts anderes bewirkt als Erzeugung mechanischer Arbeit und Abkühlung eines Wärme-Reservoirs (Kelvin)

⇒ Es gibt kein Perpetuum mobile 2. Art

14.2 Kreisprozess (reversibler Prozess)

Anfangszustand = Endzustand

Rechtslaufender Kreisprozess

- Gibt Arbeit ab
 - Wärmekraftmaschine**
 - Bei hoher T wird Wärme aus Prozess **zugeführt**
 - Nur Bruchteil der Wärme in Arbeit verwandelbar
 - Obergrenze: Carnot-Wirkungsgrad
- Verbraucht Arbeit
 - Wärmepumpe**
 - Bei hoher T wird dem Prozess Wärme **abgeführt**
 - Erzeugt mehrfaches an Wärme
 - Obergrenze: Inv. Carnot-Wirkungsgrad

14.3 Carnot-Wirkungsgrad

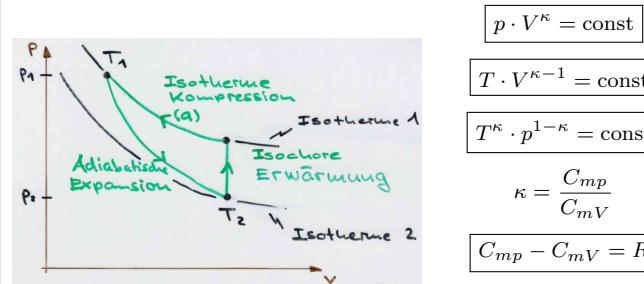
$$\text{Wärmekraftmaschine: } n_C = \frac{W_{ab}}{Q_{zu}} = \frac{T_{hoch} - T_{tief}}{T_{hoch}}$$

$$\text{Wärmepumpe: } n_{iC} = \frac{Q_{zu}}{W_{ab}} = \frac{T_{hoch}}{T_{hoch} - T_{tief}}$$

| | | |
|------------|--------------------------------|------------------|
| n_C | Carnot-Wirkungsgrad | $[n_C] = 1$ |
| n_{iC} | Inverser Carnot-Wirkungsgrad | $[n_{iC}] = 1$ |
| T_{tief} | Temperatur des Warm-Reservoirs | $[T_{tief}] = K$ |
| T_{hoch} | Temperatur des Kalt-Reservoirs | $[T_{hoch}] = K$ |
| Q_{zu} | zugeführte Wärme | $[Q_{zu}] = J$ |
| W_{ab} | abgeführte Energie | $[W_{ab}] = J$ |

14.4 Adiabaten-Gleichung (Kreisprozess)

Adiabate wird beschrieben im pV- / TV- / Tp-Diagramm

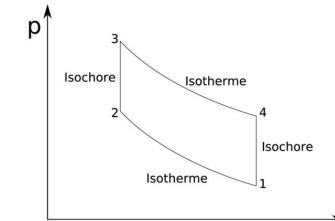
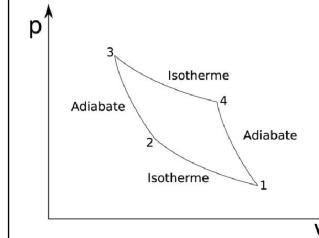


| | | |
|----------|---|---|
| C_{mp} | Molare Wärmekapazität @ $p = \text{const}$ | $[C_{mp}] = \frac{J}{\text{mol} \cdot K}$ |
| C_{mV} | Molare Wärmekapazität @ $V = \text{const}$ | $[C_{mV}] = \frac{J}{\text{mol} \cdot K}$ |
| κ | Adiabaten-Exponent | $[\kappa] = 1$ |
| R | Universelle Gaskonstante $R = 8.314 \frac{J}{\text{mol} \cdot K}$ | $[R] = \frac{J}{\text{mol} \cdot K}$ |

14.5 Kreisprozesse (Vorgänge)

| | | |
|--------------------------|-----------------|------------------|
| isotherme Expansion | liefert Wärme | benötigt Energie |
| isotherme Kompression | benötigt Wärme | liefert Energie |
| adiabatische Expansion | liefert Arbeit | ohne Wärme |
| adiabatische Kompression | benötigt Arbeit | ohne Wärme |
| isochore Erwärmung | ohne Arbeit | benötigt Wärme |
| isochore Abkühlung | ohne Arbeit | liefert Wärme |

14.6 Beispiel Kreisprozess



14.7 Entropie-Zunahme

14.7.1 Definition der Entropie-Zunahme

$$\Delta S = S_1 + S_2 = \int \frac{1}{T} dQ$$

14.7.2 Boltzmann-Gleichung für Entropie-Zunahme

$$\Delta S = k \cdot \ln(W)$$

| | | |
|------------|--|----------------------------|
| ΔS | Entropie | $[\Delta S] = \frac{J}{K}$ |
| k | Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ | $[k] = \frac{J}{K}$ |
| W | Wahrscheinlichkeit eines Zustands | $[W] = 1$ |

14.7.3 Abgeschlossenes System

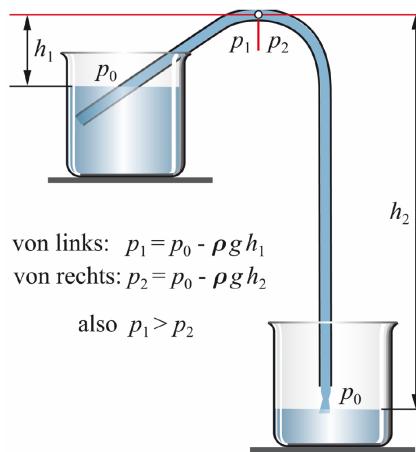
| | |
|-------------------|--|
| $\Delta S \geq 0$ | Entropie kann nur zunehmen in abgeschl. System |
| $\Delta S > 0$ | Irreversibler Prozess |
| $\Delta S = 0$ | Reversibler Prozess |

15 Molmassen wichtiger Atome

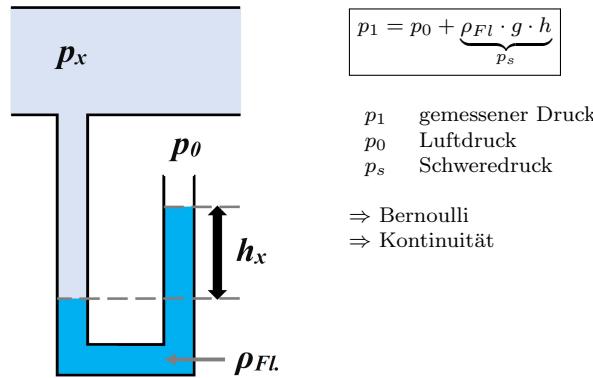
| Symbol | Molekül | Molmasse |
|--------|-------------|------------------------|
| H | Wasserstoff | $1.008 \frac{g}{mol}$ |
| C | Kohlenstoff | $12.011 \frac{g}{mol}$ |
| N | Stickstoff | $14.007 \frac{g}{mol}$ |
| O | Sauerstoff | $15.999 \frac{g}{mol}$ |
| Al | Aluminium | $26.982 \frac{g}{mol}$ |
| Si | Silicium | $28.982 \frac{g}{mol}$ |

16 Ansätze zu Aufgaben

16.1 Saugheber

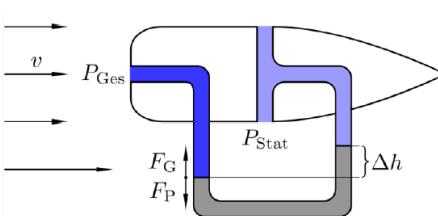


16.2 Barometer



16.3 Pitotrohr

Prandtl'sches Staurohr; Staudruckmesser
Zur Messung von Strömungsgeschwindigkeiten



Bernoulli horizontal :

$$\frac{p_1}{\rho_L} + \frac{1}{2} \rho_L \cdot v_1^2 = \frac{p_2}{\rho_L - \Delta p} + \frac{1}{2} \rho_L \cdot v_2^2$$

$$0 = -\Delta p + \frac{1}{2} \rho_L \cdot v_2^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta p = \frac{1}{2} \rho_L \cdot v_2^2$$

$$\text{Gleichsetzen: } \Delta p = \rho_{Fl} \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot \rho_{Fl} \cdot g \cdot \Delta h}{\rho_L}}$$

16.4 Venturirohr

$$Q = A_1 \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)}} \quad [Q] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

16.5 Pumpe

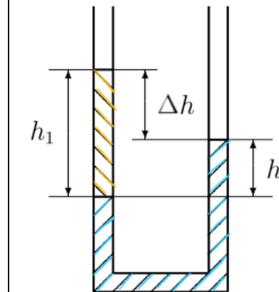
$$W = P \cdot t = F \cdot \Delta s = p \cdot A \cdot \Delta s = p \cdot \Delta V$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{p \cdot V}{t} = p \cdot \dot{V} \quad F = p \cdot A$$

16.6 Bewegungen

$$P = F \cdot v \quad E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

16.7 U-Rohr



Ansatz: Druckgleichgewicht

$$p_1 = p_2$$

$$\rho_1 \cdot g \cdot h_1 = \rho_2 \cdot g \cdot h_2$$

16.8 Wasser mit Dampf erhitzen

Ein Tasse mit einer Masse m_W Wasser und einer Temperatur von T_K wird an der Wasserdampfdüse einer Kaffeemaschine mittels Wasserdampf erhitzt. Der aus der Kaffeemaschine ausströmende Wasserdampf ist T_H heiß. Am Schluss haben sie 10 % mehr Wasser in der Tasse. (entspricht m_D)
Wie warm ist das Wasser nun?

Ansatz: 1. Hauptsatz $Q_{zu} = Q_{ab}$

$$m_W \cdot c_W (T_M - T_K) = q_s \cdot m_D + m_D \cdot c_W (T_H - T_M)$$

16.9 Eis in Wasser schmelzen

In einem Gefäß befinden sich eine Masse m_W Wasser. Dazu wird ein Eiswürfel mit Masse m_E gegeben. Das Eis hat eine Temperatur T_E und das Wasser hat eine Temperatur T_W . Die Temperatur T_0 steht für 0 °C bzw. 273.15 K
Gesucht ist die Mischtemperatur T_M

$$\Delta Q_{ab} = \Delta Q_{zu}$$

$$m_W \cdot c_W \cdot (T_W - T_M) = m_E \cdot c_E \cdot (T_E - T_0) + q_f \cdot m_E + c_W \cdot (T_M - T_0)$$

16.10 Beschlagenes Fenster

Gesucht: Außentemperatur T_a
Gegeben: Innentemperatur T_i , Luftfeuchtigkeit f_i in %, Wärmedurchgangszahl des Fensters k und Wärmeübergangszahl α_i

Beschlag bei $p_s(T_{fi}) = f \cdot p_s(T_i) \Rightarrow T_{fi}$ mittels Magnusformel bestimmen

Wärmestromdichte in allen Schichten gleich: $k(T_a - T_i) = \alpha_i(T_{fi} - T_i)$

16.11 Luftbefeuchter

Gesucht: rel. Luftfeuchtigkeit f_{ri}

Gegeben: Volumen des Zimmers V , Menge verdampftes Wasser m , Zeit für kompletten Austausch t , Innentemperatur T_i , Außentemperatur T_a , Luftfeuchtigkeit f_{ra}

\dot{m} = Massenfluss (ai=nach innen, b=Befeuchter, ia=nach draussen)

$$\dot{V} = \frac{V}{t} \quad [\frac{m^3}{s}], \quad \dot{m}_b = \frac{m}{t_0} \quad [\frac{kg}{s}], \quad M = 0.018 \frac{kg}{mol}$$

$$\rho_s = [\frac{kg}{m^3}] \text{ (Sättigungsdichte)}$$

$$\dot{m}_{ai} + \dot{m}_b = \dot{m}_{ia}$$

$$\dot{m} = f_r \cdot \rho_s \cdot \dot{V}$$

$$f_{ra} \cdot \rho_{sa} \cdot \dot{V} + \dot{m}_b = f_{ri} \cdot \rho_{si} \cdot \dot{V}$$

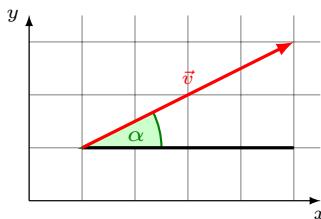
$$\rho_s = p_s(\theta) \cdot \frac{M}{R \cdot T_i} \text{ (Magnusformel für } p_s(T_a \text{ resp. } T_i))$$

17 Vektorrechnung

17.1 Betrag eines Vektors

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

17.2 Richtung eines Vektors (2D)



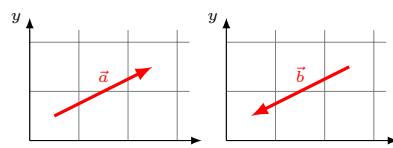
$$\vec{v} = |v| \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)$$

17.3 Gleichheit zweier Vektoren

Zwei Vektoren sind gleich, wenn alle Komponenten identisch sind:

- $A_x = B_x$
- $A_y = B_y$
- $A_z = B_z$

17.4 Negative eines Vektors

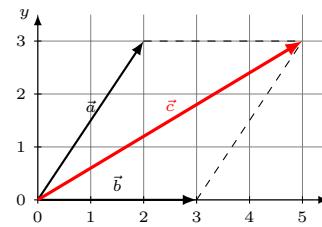


$$b_x = -a_x$$

$$b_y = -a_y$$

$$b_z = -a_z$$

17.5 Addition zweier Vektoren

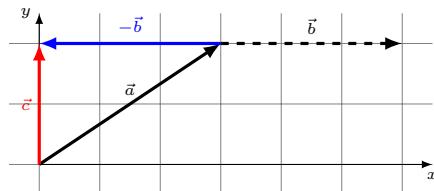


$$c_x = a_x + b_x$$

$$c_y = a_y + b_y$$

$$c_z = a_z + b_z$$

17.6 Subtraktion zweier Vektoren



$$c_x = a_x - b_x$$

$$c_y = a_y - b_y$$

$$c_z = a_z - b_z$$

17.7 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

$$\vec{b} = s \vec{a} \quad |\vec{B}| = |s| \cdot |\vec{a}|$$

$$b_x = s \cdot a_x$$

$$b_y = s \cdot a_y$$

$$b_z = s \cdot a_y$$

17.8 Skalarprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi)$$

17.9 Kreuzprodukt (nur in 3D)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

18 Statistik

18.1 Arithmetisches Mittel \bar{x}_{arith}

$$\bar{x}_{arith} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

18.2 Geometrisches Mittel \bar{x}_{geom}

Nur für positive Zahlenreihen x_i definiert!

$$\bar{x}_{geom} := \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N x_i} \quad \Rightarrow \bar{x}_{geom} \leq \bar{x}_{arith}$$

18.3 Quadratisches Mittel QMW (RMS)

Wechselstromtechnik; Effektivwert

$$QMW := \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}$$

18.4 Harmonisches Mittel \bar{x}_{harm}

$$\bar{x}_{harm} := \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i}}$$

Kann sinnvoll eingesetzt werden, wenn man für die i -te Teilstrecke s_i eine Zeit t_i benötigt (also eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $v_i = \frac{s_i}{t_i}$ und eine Durchschnittsgeschwindigkeit über N Teilstrecken ermitteln will:

$$\bar{v}_{harm} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i}{\sum_{i=1}^N t_i} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i}{\sum_{i=1}^N \frac{s_i}{v_i}} \quad \text{gewichtetes harm. Mittel}$$

18.5 Standardabweichung σ

Varianz:

$$\sigma^2 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_{arith})^2$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma := \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_{arith})^2}$$

18.6 Standardabweichung des Mittelwerts

Gilt nur, wenn eine Normalverteilung vorliegt!

Beschreibt nur statistische Fehler

$$\sigma(\bar{x}_{arith}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

19 Mathematik-Hilfe

19.1 Trigonometrie

| Sinus | Cosinus | Tangens |
|----------------|----------------|-----------------|
| $\frac{GK}{H}$ | $\frac{AK}{H}$ | $\frac{AK}{GK}$ |

19.2 Schwerpunkt

Die Koordinaten des Schwerpunkts müssen komponentenweise berechnet werden:

$$x_s = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{M} \quad y_s = \frac{\sum y_i \cdot m_i}{M} \quad z_s = \frac{\sum z_i \cdot m_i}{M}$$

x_s, y_s, z_s Koordinaten des Schwerpunkts

x_i, y_i, z_i Koordinaten von kleinen Massepunkten

m_i Kleine Massepunkte an entsprechenden Koordinaten

M Gesamtmasse des Körpers

19.3 Polarkoordinaten (Kreisbewegung)

polar → kartesisch $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\phi) \\ r \cdot \sin(\phi) \end{pmatrix}$

kartesisch → polar $\vec{P} = \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\left(\frac{x}{y}\right) \end{pmatrix}$

19.4 Ableitungsregeln S. 445-448

19.4.1 Elementare Regeln

Potenzen: $f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2$
 $f(x) = x^\alpha \quad f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Linearität: $f(x) = c \cdot x^2 \quad f'(x) = c \cdot 2x$

Summe: $(u(x) + v(x) - w(x))' = u'(x) + v'(x) - w'(x)$

Konstanten: $c = \text{const} \rightarrow c' = 0$

19.4.2 Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

19.4.3 Quotientenregel

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \rightarrow \text{als Produkt schreiben}$$

$$u(x) \cdot \left(\frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \frac{-v'(x)}{v(x)^2}$$

19.4.4 Kettenregel

$$g(f(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

19.4.5 Umkehrfunktion

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

19.5 Allgemeine Logarithmus-Ableitung

$$(\log_b(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)}\right)' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot (\ln(x))' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}$$

19.6 Integrationsregeln S. 494-496

Linearität: $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$

19.6.1 Rechenregeln mit Integralen S. 508-510

Zerlegung: $\int_a^b f_1(x) dx + f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Grenzen tauschen: $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

Gleiche Grenzen: $\int_a^a f(x) dx = 0$

19.7 Wichtige Integrale S. 495

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \quad \int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\int_a^b 1 dx = b - a \text{ (Rechteck)}$$