

Physik I, II und III

2023 - 2024 – Dr. Christoph Wetli, Gregor Dudle

Autoren:
Fabian Suter

Version:

1.0.1

<https://github.com/FabianSuter/Physik.git>



Inhaltsverzeichnis

1 Statik	4	4 Hydrostatik	12
1.1 Schwerkraft (Gewichtskraft)	4	4.1 Festkörper, Flüssigkeit, Gas	12
1.2 Normalkraft (Kontaktkraft)	4	4.2 Druck p / Schubspannung τ	12
1.3 Zerlegung von Kräften	4	4.3 Kompression	12
1.4 Gleichgewichtsbedingungen für Massepunkte	4	4.4 Dichte ρ	12
1.5 Haftriebung / Gleitreibung	4	4.5 Boyle-Mariotte	13
1.6 Starre Körper	4	4.6 Hydrostatischer Druck (Schweredruck)	13
1.7 Addition von Kräften	4	4.7 Barometrische Höhenformel (Gase)	13
1.8 Drehmoment	4	4.8 Statischer Auftrieb (Fluid)	13
1.9 Gleichgewichtsbedingungen für starre Körper	5	4.9 Oberflächenspannung σ	13
1.10 Gleichgewichts-Arten	5	4.10 Grenzflächenspannung	13
1.11 Deformierbare Körper	5	4.11 Kapillarität h	13
1.12 Schiefe Ebene (mit Seil)	5	4.12 Druck in Seifenblase p	13
1.13 Rezept: Aufgaben zur Statik lösen	6		
1.14 Abweichung Erdbeschleunigung	6		
2 Kinematik	6	5 Hydrodynamik - Ideale Fluide	13
2.1 Geradlinige Bewegung (1D)	6	5.1 Stromlinien-Modell	13
2.2 Gleichförmige Bewegung $a(t) = 0$	6	5.2 Kontinuitätsgleichung	13
2.3 Gleichm. beschleunigte Bewegung $a(t) = \text{konst}$	6	5.3 Bernoulli-Gleichung	13
2.4 Beliebige Bewegung (2D)	6	5.4 Bernoulli-Gleichung und Energieerhaltung	14
2.5 Bahnkurven	6		
2.6 Gleichförmige Bewegung $a_{tangential} = 0$	6	6 Hydrodynamik - Reale Fluide	14
2.7 Gleichm. beschl. Bewegung $a_{tangential} = \text{konst}$	6	6.1 Newton'sches Reibungs-Gesetz	14
2.8 Kreisbewegung	6	6.2 Stokes'sche Reibung F_R	14
2.9 Gleichförmige Kreisbewegung	7	6.3 Hagen-Poiseuille	14
2.10 Gleichm. beschleunigte Kreisbewegung	7	6.4 Reynolds-Zahl Re	14
2.11 Senkrechter Wurf	7	6.5 Turbulente / Laminare Rohrströmung	15
2.12 Horizontaler Wurf	7	6.6 Prandtl'sche Grenzschicht-Dicke D	15
2.13 Schiefer Wurf	7	6.7 Bernoulli-Gleichung mit innerer Reibung	15
3 Dynamik	7	6.8 Druckwiderstand F_D	15
3.1 Newtonsche Gesetze	7	6.9 Auftriebskraft F_A nach Kutta-Jukowski	15
3.2 Reibungskräfte	7	6.10 Dynamischer Auftrieb F_A	15
3.3 Rollreibungslänge e (Drehmoment)	7	6.11 Induzierter Widerstand F_w	15
3.4 Angetriebenes Rad	8	6.12 Gleitwinkel φ	16
3.5 Arbeit und Energie	8	6.13 Helmholtz'sche Wirbelsätze	16
3.6 Energieerhaltung (in abgeschlossenen Systemen)	8		
3.7 Leistung und Wirkungsgrad	8	7 Thermodynamik	16
3.8 Impuls \vec{p}	8	7.1 Terminologie	16
3.9 Impulserhaltungssatz (Impulssatz)	9	7.2 Absolute Temperatur T	16
3.10 Stöße	9	7.3 Thermische Ausdehnung	16
3.11 Rakete	9	7.4 Thermische Spannung σ	16
3.12 Gravitation	9		
3.13 Bezugssysteme: Inertialsystem	10	8 Ideales Gas	16
3.14 Beschleunigte Bezugssysteme	10	8.1 Modell des idealen Gases	16
3.15 Rotation starrer Körper	10	8.2 Universelle Gasgleichung	16
3.16 Trägheitsellipsoid	11	8.3 Universelle Gasgleichung für ideale Gase	17
3.17 Satz von Steiner	11	8.4 Mechanische Arbeit ΔW von Gasen	17
3.18 Arbeit und Leistung (Rotation)	11	8.5 Gesetz von Avogadro	17
3.19 Rotationsenergie	11	8.6 Molmasse M , Molvolumen V_m	17
3.20 Drehimpuls \vec{L} / Impulserhaltung (Rotation)	11	8.7 Dichte eines Gases ρ	17
3.21 Rotation vs. Translation	12	8.8 Phänomene von idealen Gasen	17
		8.9 Partialdruck p_i	17
		8.10 Gesetz von Dalton	17
		8.11 Volumen- und Massenkonzentration (Gasgemisch)	17
		8.12 Mol-Masse Gasgemisch	18
9 Reales Gas	18		
9.1 Van der Waals-Gleichung (1 Mol)			
9.2 Van der Waals-Gleichung (n Mol)			

10 Wärmelehre	18	17.16 Gekoppelte Pendel	31
10.1 Wärme Q	18		
10.2 Erster Hauptsatz der Wärmelehre	18		
10.3 Mechanische Wärmeäquivalente	18		
10.4 Wärmekapazität	18		
10.5 Latente Wärme, Enthalpie (Schmelz-/ Verdampfungswärme)	19		
10.6 Wärmebilanz	19		
11 Phasen und Phasenübergänge	19		
11.1 Phasen	19		
11.2 Dampfdruck $p_s(T)$	19		
11.3 Dampfdruck-Kurve (Clausius-Clapeyron)	19		
11.4 Schmelzdruck-Kurve (Clausius-Clapeyron)	19		
11.5 Gasdruck-Kurve (Clausius-Clapeyron)	20		
11.6 Formeln von Magnus	20		
11.7 Umkehrformeln von Magnus	20		
11.8 Luftfeuchtigkeit	20		
11.9 Taupunkts-Temperatur θ_d	20		
11.10 Relative Innen-Feuchte f_{ri}	20		
12 Kinetische Gas-Theorie	20		
12.1 Aequipartitionsgesetz	20		
12.2 Geschwindigkeiten	20		
12.3 Maxwell-Boltzmann-Verteilung	21		
12.4 Mittlere freie Weglänge $\bar{\lambda}$	21		
12.5 Dichtefunktion	21		
12.6 Transportvorgänge	21		
13 Temperaturstrahlung	21		
13.1 Strahlungs-Gesetze	21		
13.2 Wärmetransport (an Beispiel Hauswand)	21		
13.3 Wärme-Bedarf (Heizleistung)	22		
13.4 Wärmeverlust durch Abstrahlung	22		
13.5 Zustandsänderungen	22		
14 Rückwandlung innerer Energie	22		
14.1 Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre	22		
14.2 Kreisprozess (reversibler Prozess)	22		
14.3 Carnot-Wirkungsgrad	22		
14.4 Adiabaten-Gleichung (Kreisprozess)	22		
14.5 Kreisprozesse (Vorgänge)	23		
14.6 Beispiel Kreisprozess	23		
14.7 Entropie-Zunahme	23		
15 Molmassen wichtiger Atome	23		
16 Optik	23		
16.1 Licht	23		
16.2 Lichtquellen	23		
16.3 Messgrößen	23		
16.4 Gegenüberstellung	24		
16.5 Raumwinkel	24		
16.6 Reflexionsgesetz	24		
16.7 Reflexionen - Spezialfälle	24		
16.8 Brechung	24		
16.9 Dispersion	25		
16.10 Abbildungen	25		
16.11 Abbildungsgleichungen	26		
16.12 Brechkraft D	26		
16.13 Linsenschleifergleichung	26		
16.14 Konvexe und Konkave Linsen	26		
16.15 Aberration	26		
16.16 Polarisation	26		
16.17 Streuung	27		
16.18 Abbildungssysteme - Auge	27		
16.19 Abbildungssysteme - Fotoapparat	27		
16.20 Abbildungssysteme - Lupe	28		
16.21 Abbildungssysteme - Fernrohr	28		
16.22 Abbildungssysteme - Mikroskop	28		
16.23 Farbentheorie	28		
17 Schwingungen	28		
17.1 Freie Schwingungen	28		
17.2 Beispiel - Federpendel	28		
17.3 Beschreibung einer 1D-Schwingung	29		
17.4 Pendel	29		
17.5 Perkussionszentrum	29		
17.6 Periodische Schwingung	29		
17.7 Signalmodulationen	30		
17.8 Gedämpfte Schwingungen	30		
17.9 Fremderregte Schwingung	30		
17.10 Fremderregte Schwingungen - Krafterregung	30		
17.11 Fremderregte Schwingungen - Dämpfererregung	31		
17.12 Fremderregte Schwingungen - Stützenerregung	31		
17.13 Fremderregte Schwingung - Unwucherregung	31		
17.14 Fremderregte Schwingung - Schwingkreis	31		
17.15 Fremderregte Schwingung - Güte Q	31		
18 Wellen	32		
18.1 Definition	32		
18.2 Klassifizierung von Wellen	32		
18.3 Wellengeschwindigkeit / Phasengeschwindigkeit u	32		
18.4 Wellengleichungen	32		
18.5 Harmonische Wellen	32		
18.6 Wellenflächen / Wellenfronten	33		
18.7 Wellenausbreitung	33		
18.8 Bewegte Quellen	33		
18.9 Frequenzverschiebung durch Bewegung	33		
18.10 Bewegte Quelle oder bewegter Beobachter	33		
18.11 Bewegte Quelle mit Winkel	33		
18.12 Bewegte Quelle und bewegter Beobachter	34		
18.13 Wellenwiderstand, Energietransport – Schallwellen	34		
18.14 Dispersion	34		
19 Superposition von Wellen	34		
19.1 Schwebung	34		
19.2 Interferenz	35		
19.3 Kohärenz	35		
19.4 Reflexion und Transmission	35		
19.5 Anwendung: Elektromagnetische Wellen	35		
20 Stehende Wellen	35		
20.1 Entstehung von stehenden Wellen	35		
20.2 Prinzip von Huygens	35		
20.3 Eigenschwingungen - 1D	36		
20.4 Eigenschwingungen - 2D	36		
21 Beugung	36		
21.1 Beugung - Spalt	36		
21.2 Beugung - Runde Öffnung (Pinhole)	36		
21.3 Beugung - Gitter	36		
21.4 Babinet-Prinzip	37		
22 Akustik	37		
22.1 Pegel	37		
22.2 Schallintensität	37		
22.3 Verschiedene Schallquellen	37		
22.4 Intensität bei Kugelwellen (ohne Dämpfung)	37		
22.5 PHON-Skala	38		
22.6 Schalldämpfung / Schalldämmung	38		
22.7 Intensität bei Kugelwellen (mit Dämpfung)	38		
22.8 Schalldämmung / Schalldämm-Mass	38		
22.9 Schalldämm-Mass	38		
22.10 Anhall / Nachhall	38		
23 Ansätze zu Aufgaben Physik II	38		
23.1 Saugheber	38		
23.2 Barometer	38		
23.3 Pitotrohr	38		
23.4 Venturirohr	39		
23.5 Pumpe	39		
23.6 Bewegungen	39		
23.7 U-Rohr	39		
23.8 Springbrunnen	39		
23.9 Wasser mit Dampf erhitzen	39		
23.10 Eis in Wasser schmelzen	39		
23.11 Beschlagenes Fenster	39		
23.12 Luftbefeuchter	39		
24 Anhang	39		
24.1 Messunsicherheit	39		
24.2 Trigonometrie	39		
25 Vektorrechnung	40		
25.1 Betrag eines Vektors	40		
25.2 Gleichheit zweier Vektoren	40		
25.3 Negative eines Vektors	40		
25.4 Addition zweier Vektoren	40		
25.5 Subtraktion zweier Vektoren	40		
25.6 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	40		
25.7 Skalarprodukt	40		
25.8 Kreuzprodukt (nur in 3D)	40		
26 Statistik	40		
26.1 Arithmetisches Mittel \bar{x}_{arith}	40		
26.2 Geometrisches Mittel \bar{x}_{geom}	40		
26.3 Quadratisches Mittel QMW (RMS)	40		
26.4 Harmonisches Mittel \bar{x}_{harm}	40		
26.5 Standardabweichung σ	40		
26.6 Standardabweichung des Mittelwerts	40		

27 Mathematik-Hilfe	40		
27.1 Trigonometrie	40	27.4 Ableitungsregeln S. 445-448	40
27.2 Schwerpunkt	40	27.5 Allgemeine Logarithmus-Ableitung	41
27.3 Polarkoordinaten (Kreisbewegung)	40	27.6 Integrationsregeln S. 494-496	41
		27.7 Wichtige Integrale S. 495	41

1 Statik

1.1 Schwerkraft (Gewichtskraft)

$$\text{Allgemein: } F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$\text{Erde: } F_G = G \cdot \frac{m_E \cdot m}{r_E^2} = m \cdot g$$

F_G	Gewichtskraft	$[F_G] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$
G	Gravitationskonstante	$6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$
m_i	Massen der Körper	$[m] = \text{kg}$
r	Abstand der Massen	$[r] = \text{m}$
g	Erdbeschleunigung	$9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
m_E	Masse der Erde	$5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
r_E	Erdradius	$6.378 \cdot 10^6 \text{ m}$

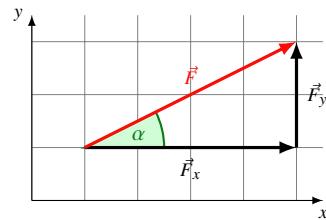
1.2 Normalkraft (Kontaktkraft)

(Sekundär-) Kraft, welche sich so anpasst, dass in Ruhe ein Kräftegleichgewicht herrscht:

$$F_G = -F_N \quad \Rightarrow \text{im Gleichgewicht auf horizontaler Oberfläche}$$

1.3 Zerlegung von Kräften

Kraftvektoren kann man komponentenweise aufteilen:



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$$

hilfreich beim Lösen von Aufgaben!

1.4 Gleichgewichtsbedingungen für Massepunkte

Der Massepunkt erfährt keine Beschleunigung

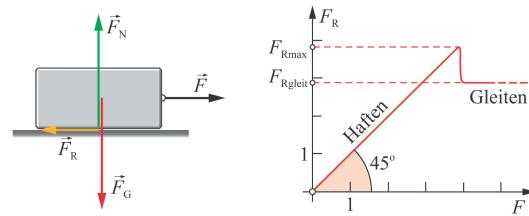
⇒ Summe aller wirkenden Kräfte ist 0

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \text{komponentenweise}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_x = \vec{0} \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_y = \vec{0} \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_z = \vec{0}$$

1.5 Haftreibung / Gleitreibung

1.5.1 Trockene Festkörperreibung



$$\text{Haftreibung: } \vec{F}_{R,\max} = \mu_H \cdot \vec{F}_N$$

$$|\vec{F}_R| \leq |\vec{F}_{R,\max}|$$

$$\text{Gleitreibung: } \vec{F}_{\text{Gleit}} \approx \mu_G \cdot \vec{F}_N$$

\vec{F}_R	Reibungskraft	$[\vec{F}_R] = \text{N}$
$\vec{F}_{R,\max}$	Haftreibungskraft	$[\vec{F}_{R,\max}] = \text{N}$
\vec{F}_{Gleit}	Gleitreibungskraft	$[\vec{F}_{\text{Gleit}}] = \text{N}$

1.5.2 Viskose Reibung

Sobald Schmiermittel zum Einsatz kommen, ist die Reibungskraft abhängig von der Größe der Berührungsfläche:

Bei gleicher Normalkraft \vec{F}_N ist bei

- kleinerem Flächendruck die Reibung kleiner
- grösserem Flächendruck die Reibung grösser

1.6 Starre Körper

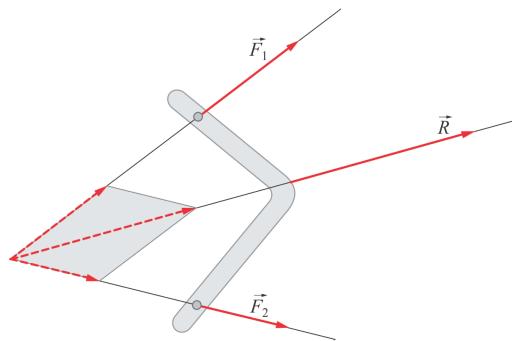
- Ein starrer Körper wird durch angreifende Kräfte nicht deformiert
- Bei einem starrer Körper kann die Kraft entlang ihrer Wirkungslinie beliebig verschoben werden

1.7 Addition von Kräften

1.7.1 Spezialfall: Ebene Kräftegruppe für schiefe Wirkungslinie

Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie verschieben

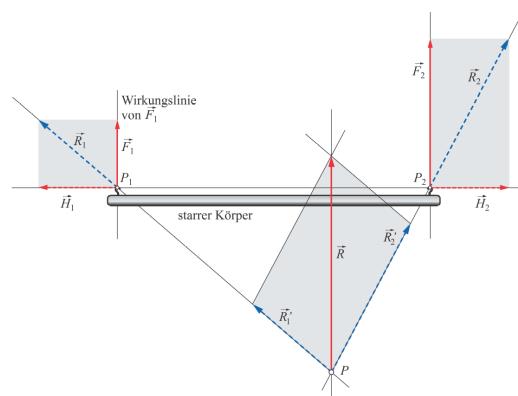
⇒ Im Schnittpunkt vektorielle Addition der Kräfte durchführen, um die resultierende Kraft zu erhalten.



Dieses Verfahren kann auch mehrfach angewendet werden!

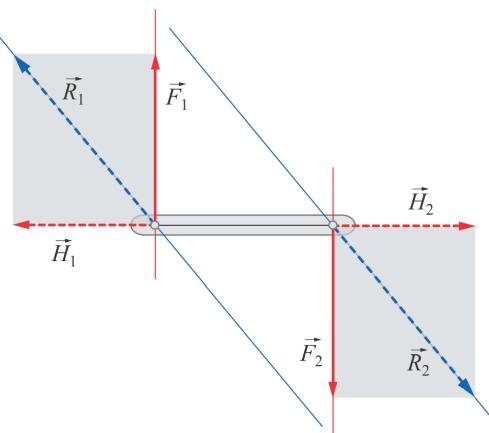
1.7.2 Spezialfall: Ebene Kräftegruppe für parallele Wirkungslinie

Zwei sich zu null addierende Hilfskräfte hinzufügen (\vec{H}_1 , \vec{H}_2)



1.7.3 Spezialfall: Ebene Kräftegruppe für parallel, entgegengesetzte und senkrechte Wirkungslinien

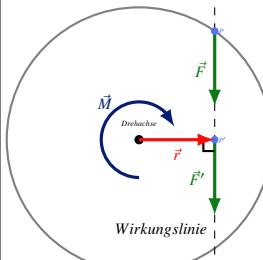
Kräftepaare können in andere Kräftepaare umgewandelt werden, aber niemals zu einer resultierenden Kraft R vereinfacht werden.



1.8 Drehmoment

Eine Drehwirkung auf einen starren Körper lässt sich auf zwei verschiedene Arten und Weisen erzeugen:

- Kräftepaar
- einzelne Kraft und Bezugspunkt (Drehzentrum)



$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = a \cdot |\vec{F}|$$

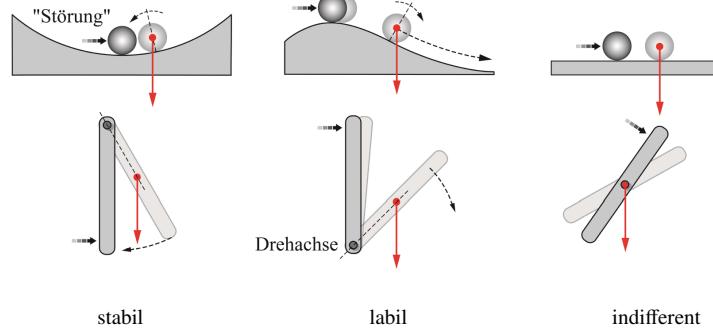
Die Länge a muss **senkrecht** zur wirkenden Kraft sein!

$$\begin{array}{ll} \vec{M} & \text{Drehmoment} & [M] = \text{Nm} \\ \vec{r} & \text{Abstandsvektor} & [r] = \text{m} \\ \vec{F} & \text{Angreifende Kraft} & [F] = \text{N} \end{array}$$

1.9 Gleichgewichtsbedingungen für starre Körper

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad \sum_{i=1}^m \vec{M}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \text{komponentenweise}$$

1.10 Gleichgewichts-Arten



1.11 Deformierbare Körper

1.11.1 Spannungen

Zugspannung σ

senkrecht wirkende Kraft pro Flächeneinheit
Wenn $\sigma < 0$ spricht man von **Druck**

$$\sigma = \frac{F_{\perp}}{A} \quad [\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Schubspannung τ (Scherung)

parallel wirkende Kraft pro Flächeneinheit

$$\tau = \frac{F_{\parallel}}{A} \quad [\tau] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

1.11.2 Dehnung ϵ (Hook'sches Gesetz)

$$\epsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma = \frac{1}{E} \cdot \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{\Delta l}{l}$$

ϵ	Dehnung	$[\epsilon] = 1$
E	Elastizitätsmodul (Materialeigenschaft)	$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
l	Länge des Körpers vor Dehnung	$[l] = \text{m}$
Δl	Längenunterschied bei Dehnung	$[\Delta l] = \text{m}$
σ	Zugspannung	$[\sigma] = \text{N}$
A	Querschnittsfläche	$[A] = \text{m}^2$

⇒ Das Hook'sche Gesetz gilt nur, solange die Deformation linear-elastisch ist!

1.11.3 Querkontraktion ϵ_q

Wird ein Stab gedehnt (länger), so wird er automatisch auch dünner

$$\epsilon_q = \frac{\Delta d}{d} = -\mu \epsilon \quad \mu \in (0; 0.5)$$

ϵ_q	Querkontraktion	$[\epsilon_q] = 1$
d	Ursprüngliche Dicke des Materials	$[d] = \text{m}$
Δd	Dicken-Änderung	$[\Delta d] = \text{m}$
ϵ	(Längs-) Dehnung	$[\epsilon] = 1$
μ	Poisson-Zahl (Materialeigenschaft)	$[\mu] = 1$

1.11.4 Kompression $\frac{\Delta V}{V}$

Ein Körper wird von allen Seiten mit dem gleichen Druck belastet, sodass sich sein Volumen verkleinert

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \cdot \Delta p \quad (K = \frac{1}{\kappa})$$

V	Ursprüngliches Volumen des Körpers	$[V] = \text{m}^3$
ΔV	Volumenänderung	$[\Delta V] = \text{m}^3$
κ	Kompressibilität	$[\kappa] = \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$
Δp	Druckänderung	$[\Delta p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$

$$\text{Würfel: } \Rightarrow \kappa = \frac{3}{E} (1 - 2\mu)$$

Völlig inkompressibler Körper: $\kappa = 0$ $K = \infty$ $\mu = 0.5$

1.11.5 Schubbeanspruchung (Scherung)

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (\text{gilt für isotrope Materialien})$$

γ	Scherwinkel	$[\gamma] = {}^\circ$
G	Schubmodul; Gleitmodul; Torsionsmodul	$[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
τ	Schubspannung	$[\tau] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
E	Elastizitätsmodul (Materialeigenschaft)	$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
μ	Poisson-Zahl (Materialeigenschaft)	$[\mu] = 1$

1.11.6 Torsionsfeder

$$M = c \cdot \Phi \quad c = \frac{\pi G r^4}{2l}$$

M	Drehmoment	$[M] = \text{Nm}$
c	Auslenkkonstante	$[c] =$
Φ	Auslenkwinkel	$[\Phi] = {}^\circ$
G	Schubmodul	$[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
r	Radius der Feder	$[r] = \text{m}$
l	Länge der Feder	$[l] = \text{m}$

1.11.7 Schraubenfeder

$$F = c \cdot \Delta l \quad c = \frac{Gr^4}{4nr^3}$$

F	Kraft	$[F] = \text{N}$
c	Auslenkkonstante	$[c] =$
Δl	Längenänderung	$[\Delta l] = \text{m}$
G	Schubmodul	$[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
r	Drahtradius der Feder	$[r] = \text{m}$
R	Windungsradius der Feder	$[R] = \text{m}$
n	Anzahl Windungen	$[n] =$

1.11.8 Zugfeder

$$F = k \cdot \Delta x = \frac{A \cdot E}{x_0} \cdot \Delta x$$

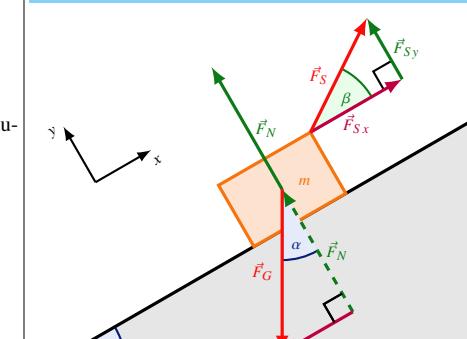
F	Kraft	$[F] = \text{N}$
k	Auslenkkonstante	$[k] =$
Δx	Längenänderung	$[\Delta x] = \text{m}$
x_0	Ruhelänge der Feder	$[x_0] = \text{m}$
E	Elastizitätsmodul (Materialeigenschaft)	$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
A	Querschnittsfläche der Feder	$[A] = \text{m}^2$

1.11.9 Blattfeder

$$z = \frac{4l^3}{E \cdot b \cdot h^3} F$$

F	Kraft	$[F] = \text{N}$
z	Verbiegung	$[z] = \text{m}$
l	Längenänderung	$[l] = \text{m}$
E	Elastizitätsmodul	$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
b	Breite des Querschnitts	$[b] = \text{m}$
h	Höhe des Querschnitts	$[h] = \text{m}$

1.12 Schiefe Ebene (mit Seil)



Wichtige Formeln und Zusammenhänge zur schiefen Ebene

$$F = m \cdot a$$

$$F_G = m \cdot g$$

$$F_N = m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \quad F_H = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

1.13 Rezept: Aufgaben zur Statik lösen

- Koordinatensystem festlegen
- Alle wirkenden Kräfte einzeichnen
- Bezugspunkt P (Drehpunkt) festlegen
⇒ **Da wo viele Kräfte** (oder da wo sinnvoll)
- Kräfte komponentenweise aufschreiben: $\sum \vec{F}_i = 0$
- Drehmomente M aufschreiben und gleichsetzen: $\sum \vec{M} = \vec{M}$

1.14 Abweichung Erdbeschleunigung

$$g(\Phi, h) = 9.78032677 \cdot \frac{1 + 0.001931851 \cdot \sin^2 \Phi}{\sqrt{1 - 0.006694380 \cdot \sin^2 \Phi}} - 3.086 \cdot 10^{-6} \cdot h$$

g Erdbeschleunigung $[g] = \frac{m}{s^2}$
 h Höhe über Meer $[h] = m$
 Φ Breitengrad $[\Phi] = {}^\circ$

2 Kinematik

2.1 Geradlinige Bewegung (1D)

Die Bewegung erfolgt entlang einer Gerade (keine Richtungsänderung)

$$\begin{array}{ll} x(t) \quad \frac{d}{dt} \quad v(t) \quad \frac{d}{dt} \quad a(t) & x(t) \quad \int dt \quad v(t) \quad \int dt \quad a(t) \end{array}$$

2.1.1 Weg $x(t)$

Weg mit Zeit parametrisiert: $x = x(t)$

2.1.2 Geschwindigkeit $v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

momentane Geschw.: $\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t)$ (Tangente)

mittlere Geschw.: $\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$ (Sekante)

2.1.3 Beschleunigung $a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

momentane Beschleunigung: $\frac{d}{dt}v(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$

mittlere Beschleunigung: $\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$

2.1.4 Ruck $j(t)$

Änderung der Beschleunigung pro Zeiteinheit: $j(t) = \dot{a}(t) = \ddot{x}(t)$

2.2 Gleichförmige Bewegung $a(t) = 0$

$$a(t) = 0$$

$$v(t) = v_0 = \text{const}$$

$$x(t) = v_0 \cdot t + x_0$$

2.3 Gleichm. beschleunigte Bewegung $a(t) = \text{konst}$

Allgemein:

Anwendungsfall: Freier Fall

$$a(t) = a_0 = \text{const}$$

$$a(t) = -g = \text{const}$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0$$

$$v(t) = -g \cdot t$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

$$x(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + h_0$$

2.3.1 Höchsten Punkt x_{\max} finden (Extremum)

Im Extrempunkt gilt: $\frac{d}{dt}x(t) = v(t) = 0$

$$0 = v(t_{\max}) = -g \cdot t_{\max} + v_0 \Rightarrow t_{\max} = \frac{v_0}{g}$$

Durch einsetzen von t_{\max} in $x(t)$ erhält man die maximale Höhe:

$$x(t_{\max}) = -\frac{1}{2} g \cdot t_{\max}^2 + v_0 \cdot t_{\max} + h_0 = -\frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0^2}{g} + h_0$$

2.4 Beliebige Bewegung (2D)

2.4.1 Geschwindigkeit (tangential zur Bahnkurve)

momentane Geschw.: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \frac{d}{dt} \vec{r} = \dot{\vec{r}}$

mittlere Geschw.: $\bar{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$

Betrag: $v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$

2.4.2 Beschleunigung

momentane Beschl.: $\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \ddot{\vec{r}}$

mittlere Beschl.: $\bar{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

Die Beschleunigung kann ungleich null sein, auch wenn der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist

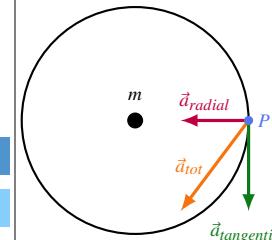
2.5 Bahnkurven

Die Geschwindigkeitsänderung in einer Bahnkurve wird in zwei Komponenten aufgeteilt:

$\Delta \vec{v}_{\text{radial}}$ und $\Delta \vec{v}_{\text{tangential}}$

Der tangentiale Anteil ändert ausschliesslich den Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}|$

Der radiale Anteil ändert ausschliesslich die Richtung der Geschwindigkeit \vec{v}



$$a_{\text{tangential}} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

$$a_{\text{radial}} = \frac{v^2}{r}$$

$$F_{\text{zentripetal}} = m \frac{v^2}{r}$$

$$(F_{\text{zentri}})^2 + (F_{\text{bremsen}})^2 = (F_R)^2$$

Wenn $a = 0 \Rightarrow F_{\text{Zentri}} = F_{\text{Haft}}$

2.6 Gleichförmige Bewegung $a_{\text{tangential}} = 0$

tangential (Tacho)

radial

$$a_{\text{tangential}} = 0$$

$$a_{\text{radial}} = \frac{v^2}{r}$$

$$v(t) = v_0 = \text{const}$$

$$s(t) = v_0 \cdot t + s_0$$

2.7 Gleichm. beschl. Bewegung $a_{\text{tangential}} = \text{konst}$

tangential (Tacho)

radial

$$a_{\text{tang}} = a_0 = \text{const}$$

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = (\alpha \cdot t)^2 \cdot r$$

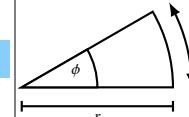
$$v(t) = a_{\text{tang}} \cdot t + v_0$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_{\text{tang}} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Die Gesamtbeschleunigung eines Systems $\vec{a}_{\text{tot}} = \vec{a}_{\text{tangential}} + \vec{a}_{\text{radial}}$ muss nicht zwingend konstant sein! Bei Änderungen der Richtung ändert die Gesamtbeschleunigung.

2.8 Kreisbewegung

2.8.1 Winkel ϕ (zurückgelegter Weg)



$$\text{Radian: } \phi = \frac{s}{r}$$

2.8.2 Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\phi}{t}$

$$\omega := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$$

Der Betrag v der (Bahn-) Geschwindigkeit entspricht: $v = r \cdot \omega$

Umlaufzeit, Periode T Umlaufzeit für vollständige Umdrehung

Drehzahl, Drehfrequenz f inverse Umlaufzeit $f = \frac{1}{T}$

Wichtige Umrechnungsformeln

$v = r \cdot \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{v}{r}$
$f = \frac{1}{T} \Leftrightarrow T = \frac{1}{f}$
$\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \omega = \frac{2\pi n}{60}$
$\omega = 2\pi f \Leftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \quad v = \frac{\pi d n}{60}$

2.8.3 Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{\omega}{t}$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\phi}{dt^2} \ddot{\phi}$$

$$a_{\text{tangential}} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} r \cdot \omega = r \cdot \alpha$$

2.9 Gleichförmige Kreisbewegung

$$\alpha(t) = 0$$

$$\omega(t) = \omega_0 = \text{const}$$

$$\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$$

2.10 Gleichm. beschleunigte Kreisbewegung

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \text{const}$$

$$\omega(t) = \alpha_0 \cdot t + \omega_0$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \phi_0$$

2.11 Senkrechter Wurf



2.11.1 Maximale Flughöhe h_{max} bestimmen

Bei der maximalen Flughöhe h_{max} gilt: $v(t) = 0$

$$v_0 - g \cdot t_{max} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

Nun wird t_{max} in $h(t)$ eingesetzt:

$$h_{max} = h(t_{max}) = -\frac{g}{2} \frac{v_0^2}{g^2} + v_0 \frac{v_0}{g} + h_0 = \frac{v_0^2}{2g} + h_0$$

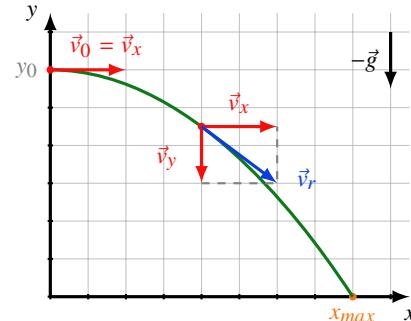
Hinweis: Die maximale Flughöhe kann auch über die potentielle und kinetische Energie berechnet werden!

$$E_{kin} = 0 \quad E_{pot} = m \cdot g \cdot h_{max}$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h_{max} \quad \Rightarrow \quad h_{max} = \frac{m \cdot v^2}{2mg} = \frac{v^2}{2g}$$

⇒ für abgeschlossene Systeme!

2.12 Horizontaler Wurf



Der horizontale Wurf muss komponentenweise beschrieben werden

x-Achse: gleichförmige, unbeschleunigte Bewegung

y-Achse: gleichmäßig beschleunigte Bewegung

x-Achse

$$a_x = 0$$

$$v_x = v_0$$

$$x = v_0 \cdot t + x_0$$

y-Achse

$$a_y = -g$$

$$v_y = -g \cdot t$$

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + y_0$$

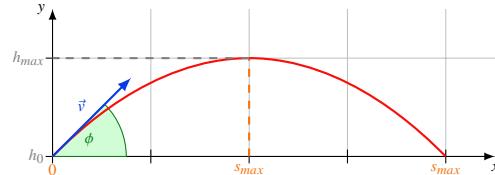
Tipp: Legt den Koordinatenursprung in den Abwurft-Ort

2.12.1 Beschreibung der Flugbahn (Eliminierung von t)

Die y-Koordinate soll als Funktion der x-Koordinate ausgedrückt werden: $y = f(x)$

$$x = v_0 t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{x}{v_0} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 = -\frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2} = y(x)$$

2.13 Schiefer Wurf



Der schiefe Wurf muss komponentenweise beschrieben werden

x-Achse: gleichförmige, unbeschleunigte Bewegung

y-Achse: gleichmäßig beschleunigte Bewegung

x-Achse

$$a_x = 0$$

$$v_x = v_0 \cdot \cos(\phi)$$

$$x = v_0 \cdot \cos(\phi) \cdot t + x_0$$

y-Achse

$$a_y = -g$$

$$v_y = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin(\phi)$$

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\phi) \cdot t + y_0$$

Tipp: Legt den Koordinatenursprung in den Abwurft-Ort

2.13.1 Beschreibung der Flugbahn (Eliminierung von t)

Die y-Koordinate soll als Funktion der x-Koordinate ausgedrückt werden: $y = f(x)$

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(\phi) \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\phi)}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cdot \cos^2(\phi)} \cdot x^2 + \tan(\phi) \cdot x = y(x)$$

2.13.2 Ansätze zur Bestimmung von Extrema

$$\text{max. Wurftweite } s_{max} \quad y' = 0 \quad (\phi \in \{45; 135\})$$

$$s_{max} = x_{max} \in \{0, \frac{2 v_0^2}{g} \cos(\phi) \cdot \sin(\phi)\}$$

$$\text{Elevationswinkel} \quad \phi = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{g \cdot d}{v_0^2} \right) = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{g \cdot x_{max}}{v_0^2} \right)$$

$$\text{max. Wurfhöhe} \quad v_y' = 0$$

$$x_{maxHöhe} = h_{max} = \frac{s_{max}}{2} = \frac{x_{max}}{2}$$

$$y(x_{maxHöhe}) = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\phi)}{2g}$$

3 Dynamik

3.1 Newtonsche Gesetze

Gesetze, welche Bewegungen beschreiben.

3.1.1 Erstes Newtonsches Gesetz: Trägheitsgesetz

Ein Körper verharrt in seine Zustand (Ruhe, gleichförmige geradlinige Bewegung), wenn er nicht durch eine Kraft gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Die Trägheit eines Körpers hängt von seiner (Trägheits-) Masse ab.

3.1.2 Zweites Newtonsches Gesetz: Aktionsgesetz

\vec{F}	Kraft	$[F] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$
m	(Trägheits-) Masse	$[m] = \text{kg}$
\vec{a}	Beschleunigung	$[a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

⇒ Anwendung erfolgt meist komponentenweise!

3.1.3 Drittes Newtonsches Gesetz: Wechselwirkungsgesetz

Wirkt ein Körper A auf einen Körper B mit der Kraft \vec{F}_{AB} , so wirkt der Körper B auf A mit der Kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

3.2 Reibungskräfte

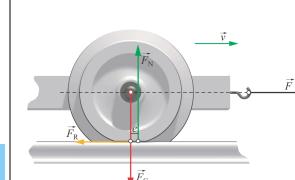
$$\text{Hafreibung: } \vec{F}_{R,max} = \mu_H \cdot \vec{F}_N \Rightarrow \text{treibende Kraft}$$

$$\text{Gleitreibung: } \vec{F}_{Gleit} \approx \mu_G \cdot \vec{F}_N$$

$$\text{Rollreibung: } \vec{F}_{Roll} \approx \mu_R \cdot \vec{F}_N \Rightarrow \text{bremsende Kraft}$$

\vec{F}_R	Reibungskraft	$[\vec{F}_R] = \text{N}$
$\vec{F}_{R,max}$	Hafreibungskraft	$[\vec{F}_{R,max}] = \text{N}$
\vec{F}_{Gleit}	Gleitreibungskraft	$[\vec{F}_{Gleit}] = \text{N}$

3.3 Rollreibungslänge e (Drehmoment)

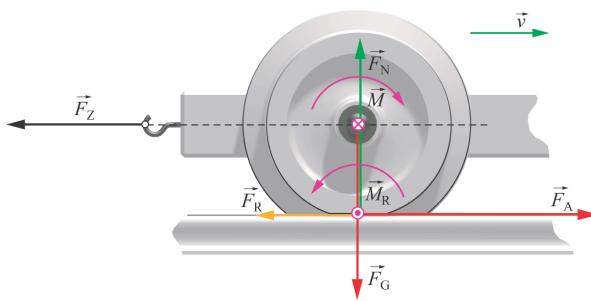


$$e = \frac{r \cdot F}{F_N} = \frac{r \cdot F_R}{F_N} = \frac{r \cdot \mu_R \cdot F_R}{F_N} = \mu_R \cdot r$$

$$M_R = e \cdot F_N = \mu_R \cdot r \cdot F_N = r \cdot F_R = r \cdot F$$

e	Rollreibungslänge	$[e] = m$
r	Radius des Rades	$[r] = m$
F_R	Rollreibungskraft	$[F_R] = N$
F_N	Normalkraft	$[F_N] = N$
μ_R	Rollreibungskoeffizient	$[\mu_R] = 1$
M_R	Rollreibungsmoment	$[M_R] = \text{Nm}$

3.4 Angetriebenes Rad



F_Z	Zugkraft	$[F_Z] = N$
F_N	Normalkraft	$[F_N] = N$
F_R	Rollreibungskraft	$[F_R] = N$
F_A	Haftreibungskraft	$[F_A] = N$

3.4.1 Hinweise zu Reibung an Rädern

- Jedes Rad weist Rollreibung auf
- Zusätzlich zur Rollreibung weist ein angetriebenes Rad eine Haftreibung auf

3.5 Arbeit und Energie

3.5.1 Arbeit

Wird der Angriffspunkt einer Kraft \vec{F} um die Strecke $d\vec{s}$ verschoben so leistet die Kraft die Arbeit W

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} \quad (\text{Skalarprodukt})$$

Wenn die projizierte Kraft konstant ist: $W = F \bullet s_{AB}$

W	Arbeit	$[W] = N \cdot m = J$
F	Kraft	$[F] = N$
s	Weg	$[s] = m$

3.5.2 Potentielle Energie W_{pot}

Beim Anheben eines Körpers gewinnt der Körper an potentieller Energie (Lageenergie)

$$W_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

W_{pot}	Potentielle Energie	$[W] = N \cdot m = J$
m	Masse des Körpers	$[m] = kg$
g	Erdbeschleunigung	$[g] = \frac{m}{s^2}$
h	Höhe der Körpers	$[h] = m$

Beispiel: Spannen einer Feder

Federkraft als Funktion der Auslenkung x $F = -k \cdot x$

$$W_{pot} = \int_0^{x_0} -F \bullet d\vec{x} = \int_0^{x_0} k \cdot x dx = \frac{1}{2} k \cdot \Delta x^2$$

W_{pot}	Potentielle Energie	$[W] = N \cdot m = J$
F	Federkraft	$[F] = N$
k	Federkonstante	$[k] = \frac{N}{m}$
Δx	Auslenkung der Feder	$[\Delta x] = m$

3.5.3 Kinetische Energie W_{kin}

$$W_{kin} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} = F \bullet s_{AB} = m \cdot a \cdot \frac{1}{2} t^2 = m \cdot \frac{a^2 \cdot t^2}{2} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

W_{kin}	Kinetische Energie	$[W] = N \cdot m = J$
F	Kraft	$[F] = N$
s	Wegstück (Kinematik)	$[s] = m$
m	Masse des Körpers	$[m] = kg$
a	Beschleunigung (Kinematik)	$[a] = \frac{m}{s^2}$
v	Geschwindigkeit (Kinematik)	$[v] = \frac{m}{s}$

3.6 Energieerhaltung (in abgeschlossenen Systemen)

Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ist unveränderlich!

abgeschlossen: Es wird keine Masse hinzugefügt/entfernt und es wirken keine äusseren Kräfte!

$$W = \underbrace{m \cdot g \cdot h}_{\text{pot. Energie}} = m \cdot g \cdot \underbrace{\frac{1}{2} g \cdot t^2}_{h(t)} = \underbrace{\frac{1}{2} m \cdot v^2}_{\text{kin. Energie}}$$

Für nicht abgeschlossene Systeme kann eine Bilanzrechnung aufgestellt werden:
Die Energiezunahme im Gesamtsystem entspricht der von aussen zugeführten Energie.
Die Energieabnahme im Gesamtsystem entspricht der von aussen entzogenen Energie.

3.6.1 Energiesatz der Mechanik

$$E_{pot} + E_{kin} = E_{tot} = \text{const} \quad (\text{gilt zu jedem Zeitpunkt})$$

3.7 Leistung und Wirkungsgrad

3.7.1 Leistung

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \bullet \Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

P	Leistung	$[P] = W = \frac{J}{s}$
ΔW	geleistete Arbeit	$[\Delta W] = J$
Δt	verstrichene Zeit	$[\Delta t] = s$
F	Kraft	$[F] = N$
Δs	Wegstück	$[\Delta s] = m$

Pferdestärken

$$1 \text{ PS} = 75 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 1 \frac{m}{s} = 735.5 \text{ W}$$

3.7.2 Wirkungsgrad η

Faustregel: Je grösser eine Maschine, desto besser ihr Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} \quad \eta < 1 \quad [\eta] = 1$$

3.8 Impuls \vec{p}

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

2. Newton'sches Gesetz allgemeingültiger (relativistisch):

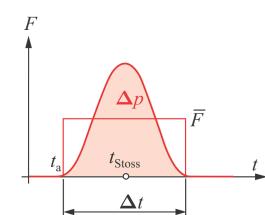
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

\vec{p}	Impuls	$[\vec{p}] = \frac{kg \cdot m}{s}$
m	Masse	$[m] = kg$
\vec{v}	Geschwindigkeit	$[v] = \frac{m}{s}$
F	Kraft	$[F] = N$
\vec{a}	Beschleunigung	$[\vec{a}] = \frac{m}{s^2}$

3.8.1 Kraftstoss Δp

Ein Kraftstoss entspricht einer Impulsänderung und kann über die mittlere Kraft beschrieben werden.

$$\int_{t_a}^{t_a+\Delta t} F(t) dt = \bar{F} \cdot \Delta t = \Delta p = p' - p$$



$F(t)$	Kraftverlauf	$[F] = N$
\bar{F}	mittlere Kraft	$[\bar{F}] = N$
Δt	Zeitdauer des Kraftstosses	$[\Delta t] = s$
Δp	Impulsänderung	$[\Delta p] = Ns$
p	Impuls vor dem Stoss	$[p] = Ns$
p'	Impuls nach dem Stoss	$[p'] = Ns$
\ddot{a}	Beschleunigung	$[\ddot{a}] = \frac{m}{s^2}$

3.9 Impulserhaltungssatz (Impulssatz)

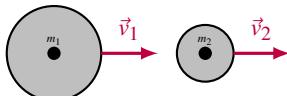
In einem **abgeschlossenen System** bleibt der Gesamtimpuls konstant
abgeschlossenes System: es wirken keine externen Kräfte

$$\vec{p} = \int_{F_{\text{außen}}=0} \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{dt} dt = c = \text{const}$$

3.10 Stösse

Elastizitätszahl: $k = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = -\frac{v'_{\text{rel}}}{v_{\text{rel}}} \geq 0$

Deformationsarbeit: $Q = (E_1 + E_2) - (E'_1 + E'_2) \geq 0$



3.10.1 Gerader, zentraler, total elastischer Stoss

Die beiden Stosspartner verformen sich nicht!

⇒ Für die Deformationsarbeit gilt: $Q = 0$

Impulssatz: $p \stackrel{!}{=} p'$
 $m_1 v_1 + m_2 v_2 \stackrel{!}{=} m_1 v'_1 + m_2 v'_2$

Energiesatz: $E_{\text{kin}} \stackrel{!}{=} E'_{\text{kin}}$
 $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$
 $v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m}{m_1 + m_2} \cdot v_2$
 $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2$

3.10.2 Gerader, zentraler, total inelastischer Stoss

Die beiden Stosspartner haften nach dem Stoss aneinander und haben die gleiche Geschwindigkeit.

⇒ Für die Deformationsarbeit gilt: $Q \neq 0$

Impulssatz: $p \stackrel{!}{=} p'$
 $m_1 v_1 + m_2 v_2 \stackrel{!}{=} (m_1 + m_2) v'$

Energiesatz: $E_{\text{kin}} \stackrel{!}{=} E'_{\text{kin}}$
 $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 + Q$

Deformationsarbeit: $Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} \mu \cdot v_{\text{rel}}^2$

Relativgeschw.: $v_{\text{rel}} := |v_1 - v_2|$

Reduzierte Masse: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

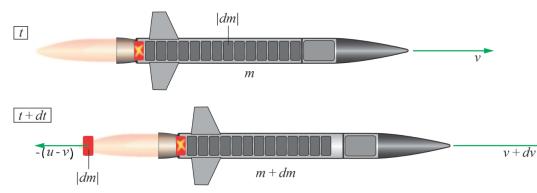
k	Elastizitätszahl	$[k] = 1$
E_1, E_2	Energien vor Stoss	$[E] = J$
E'_1, E'_2	Energien nach Stoss	$[E'] = J$
m_1, m_2	stossende Massen	$[m] = \text{kg}$
v_1, v_2	Geschwindigkeit vor Stoss	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
v'_1, v'_2	Geschwindigkeit nach Stoss	$[v'] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Q	Deformationsarbeit	$[Q] = J$
v_{rel}	Relativgeschwindigkeit	$[v_{\text{rel}}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
μ	reduzierte Masse	$[\mu] = \text{kg}$

3.11 Rakete

3.11.1 Rakete im Flug

⇒ Masse ist hier veränderbar! $m(t) = m = m_{\text{Start}} - \mu \cdot t$

Die Rakete verliert an Treibstoff, wodurch die Masse der Rakete abnimmt ($dm < 0$)



Impulssatz: $m \cdot v(t) = (m + dm)(v(t) + dv) + dm(u - v) \quad dm < 0$

Raketengleichung: $v(t) = -u \cdot \ln(m) + v_0 + u \cdot \ln(m_0) = v_0 + u \cdot \ln(\frac{m_0}{m})$

Massenverhältnis: $\frac{\text{Startmasse}}{\text{Endmasse}}$

max. Geschwindigkeitsänderung: $\Delta v = v - v_0 = u \cdot \ln(\frac{m_0}{m})$

Schubkraft: $F_{\text{Schub}} = \frac{dp}{dt} = -\frac{u \cdot dm}{dt} = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{\mu} (-u) = \mu \cdot u$

⇒ Hier wurde noch keine Erdbeschleunigung (Anziehung) berücksichtigt!

u	Strahlgeschwindigkeit der Rakete	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
m	Zeitlich veränderbare Masse $m(t)$	$[m] = \text{kg}$
m_0	Masse zum Startzeitpunkt	$[m] = \text{kg}$
v_0	Startgeschwindigkeit	$[v_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
F_{Schub}	Schubkraft der Rakete	$[F_{\text{Schub}}] = N$
μ	Treibstoffverbrauch pro Zeit	$[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$

3.11.2 Aufstieg der Rakete im Schwerefeld

Konstante Erdbeschleunigung g wird berücksichtigt

Veränderbare Masse: $m(t) = m = m_{\text{Start}} - \mu \cdot t$

Gesamtkraft: $m(t) \frac{dv}{dt} = m(t) \cdot a = F_{\text{Schub}} - F_G = \mu \cdot u - m \cdot g$

Beschleunigung: $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{\mu \cdot u}{m_0 - \mu \cdot t} - g$

Raketengleichung: $v(t) = u \cdot \ln(\frac{m_{\text{Start}}}{m(t)}) - g \cdot t$

Spezifischer Impuls: $T = \frac{m(t)}{\mu} = \frac{u}{g}$

Steighöhe: $h_t = u \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 - \frac{u}{g} \cdot \ln(\frac{m_0}{m_t}) \cdot m_t$

u	Strahlgeschwindigkeit der Rakete	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
-----	----------------------------------	-----------------------------------

m	Zeitlich veränderbare Masse $m(t)$	$[m] = \text{kg}$
-----	------------------------------------	-------------------

m_0	Masse zum Startzeitpunkt	$[m] = \text{kg}$
-------	--------------------------	-------------------

v_0	Startgeschwindigkeit	$[v_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
-------	----------------------	-------------------------------------

g	Erdbeschleunigung	$[g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
-----	-------------------	-------------------------------------

μ	Treibstoffverbrauch pro Zeit	$[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$
-------	------------------------------	--------------------------------------

T	spezifischer Impuls (Zeit von konstantem Schub)	$[T] = \text{s}$
-----	---	------------------

r_{\min}	minimaler Radius	
------------	------------------	--

r_{\max}	maximaler Radius	
------------	------------------	--

$r_{\min} = a(1 - \epsilon)$		
------------------------------	--	--

$r_{\max} = a(1 + \epsilon)$		
------------------------------	--	--

a	große Halbachse	
-----	-----------------	--

b	kleine Halbachse	
-----	------------------	--

F_1, F_2	Brennpunkte	
------------	-------------	--

e	Exzentrizität	
-----	---------------	--

ϵ	num. Exzentrizität $\epsilon = \frac{e}{a}$	
------------	---	--

r_{\min}	minimaler Radius	
------------	------------------	--

r_{\max}	maximaler Radius	
------------	------------------	--

$r_{\min} = a(1 - \epsilon)$		
------------------------------	--	--

$r_{\max} = a(1 + \epsilon)$		
------------------------------	--	--

3.12.2 Zweites Kepler'sches Gesetz

Der Fahrstrahl der Planeten überstreicht in der gleichen Zeit die gleiche Fläche.
⇒ Bei kleinerem Abstand zur Sonne ist die Geschwindigkeit schneller!

3.12.3 Drittes Kepler'sches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der grossen Halbachsen.

$$a = (\frac{T}{T_{\text{ref}}})^{\frac{3}{2}} \cdot a_{\text{ref}} \quad \Leftrightarrow \quad (\frac{a}{a_{\text{ref}}})^3 = (\frac{T}{T_{\text{ref}}})^2$$

Als Referenz wird die Erde verwendet!

Astronomische Einheit: $a_{\text{ref}} = 1 \text{ AE} = 149.6 \cdot 10^6 \text{ km}$

Referenzzeit: $T_{\text{ref}} = 1 \text{ a} = 1 \text{ Jahr}$

a	grosse Halbachse gesuchter Planet	$[a] = \text{AE}$
a_{ref}	grosse Halbachse Erde	$[a_{ref}] = \text{AE}$
T	Umlaufzeit Planet	$[T] = \text{Jahre}$
T_{ref}	Umlaufzeit Erde	$[T] = \text{Jahre}$

3.12.4 Gravitationsgesetz

$$\text{Gravitationskraft: } F_G = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \text{mit } G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

3.12.5 Gravitationswirkung innerhalb einer Kugel

$$F_G = G \frac{m_{Kern}(r) m}{r^2} = G \frac{4 \pi r^3 \rho m}{3 r^2} = \frac{4 \pi}{3} G \rho m r$$

F_G	Gravitationskraft	$[F_G] = \text{N}$
G	Gravitationskonstante	$[G] = \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$
r	Radius (Abstand vom Zentrum)	$[r] = \text{m}$
ρ	homogene Dichte der Kugel	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
m	Masse vom Massepunkt	$[m] = \text{kg}$
m_{Kern}	Masse des Kugelkerns	$[m_{Kern}] = \text{kg}$

3.12.6 Gravitationswirkung ausserhalb einer Kugel

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

F_G	Gravitationskraft	$[F_G] = \text{N}$
G	Gravitationskonstante	$[G] = \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$
r	Radius (Abstand vom Zentrum)	$[r] = \text{m}$
m	Masse vom Massepunkt	$[m] = \text{kg}$
M	Gesamtmasse der Kugel	$[M] = \text{kg}$

3.12.7 Gravitationspotential ϕ

Wenn eine Masse in einem Gravitationsfeld bewegt wird, so wird Arbeit verrichtet.

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_G \bullet d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} G \frac{M \cdot m}{r^2} dr = G \cdot M \cdot m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$\text{potentielle Energie: } E_{pot}(r) = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

$$\text{Gravitationspotential: } \phi = \frac{E_{pot}}{m} = -\frac{G \cdot M}{r}$$

Im Inneren eines homogenen Zentralkörpers gilt

$$F_G = \frac{4 \pi \cdot G \cdot \rho \cdot m \cdot r}{3}$$

$$E_{pot} = -\frac{2 \pi \cdot G \cdot \rho \cdot m}{3} r^2 + c'$$

$$\phi = -\frac{2 \pi \cdot G \cdot \rho}{3} r^2 + c = -\frac{G \cdot M(r)}{2r} + c = -\frac{G \cdot M(r)}{2r} - \frac{G \cdot M}{2R}$$

W	Arbeit	$[W] = \text{J}$
F_G	Gravitationskraft	$[F_G] = \text{N}$
E_{pot}	potentielle Energie	$E_{pot} = \text{J}$
G	Gravitationskonstante	$[G] = \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$
r	Radius (Abstand vom Zentrum)	$[r] = \text{m}$
ρ	homogene Dichte der Kugel	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
m	Masse vom Massepunkt	$[m] = \text{kg}$
M	Gesamtmasse der Kugel	$[M] = \text{kg}$
R	Radius der Kugeloberfläche	$[R] = \text{m}$

3.13 Bezugssysteme: Inertialsystem

Inertialsystem: **unbeschleunigtes Bezugssystem**

Wenn die Newton'schen Gesetze im Bezugssystem S gelten, so gelten sie auch im Bezugssystem S', solange dieses nicht beschleunigt ist und nicht rotiert.

⇒ **In sämtlichen Inertialsystemen sind die mechanischen Gesetze identisch!**

3.13.1 Galilei-Transformation

Bezugssystem S' bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 :

Transformation zwischen S und S'

$$v_0 = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= x' + v_x t \\ y &= y' + v_y t \\ z &= z' + v_z t \\ t &= t' \end{aligned}$$

3.14 Beschleunigte Bezugssysteme

In beschleunigten Bezugssystemen müssen **Trägheitskräfte** berücksichtigt werden!

3.14.1 Translatorisch beschleunigtes Bezugssystem

Beispiel: Zug beschleunigt auf gerader Schiene

Für einen Beobachter im **beschleunigten System S'** wirkt eine Trägheitskraft:

$$\text{Gesamtkraft: } \vec{F}' = \vec{F} - m \cdot \vec{a}_0 = \vec{F} + \vec{F}_{Trägheit}$$

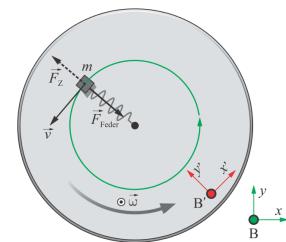
\vec{F}'	Gesamte im System wirkende Kraft	$[\vec{F}'] = \text{N}$
\vec{F}	Statisch wirkende Kräfte	$[\vec{F}] = \text{N}$
$\vec{F}_{Trägheit}$	Trägheitskraft	$[\vec{F}_{Trägheit}] = \text{N}$
m	Masse im System	$[m] = \text{kg}$
\vec{a}_0	Beschleunigung des Systems	$[\vec{a}_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

3.14.2 Gleichförmig rotierendes Bezugssystem (Scheinkräfte)

Fest verbundene Masse ⇒ Scheinkraft: Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_z = -m \vec{a}_z = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$$

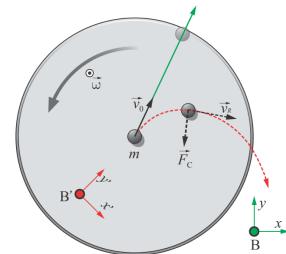
$$\vec{F}_{Zentrifugal} \stackrel{!}{=} -\vec{F}_{Zentripetal}$$



\vec{F}_z	Zentrifugalkraft (Trägheitskraft; Scheinkraft)	$[\vec{F}_z] = \text{N}$
m	Masse im System	$[m] = \text{kg}$
\vec{a}_z	Beschleunigung des Systems (a_{radial})	$[\vec{a}_z] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
\vec{r}	Radius des Systems (nach innen zeigend)	$[\vec{r}] = \text{m}$

lose Masse ⇒ Scheinkraft: Corioliskraft

$$\vec{F}_c = -m \cdot \vec{a}_c = -m \cdot 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_R)$$



\vec{F}_c	Corioliskraft (Trägheitskraft; Scheinkraft)	$[\vec{F}_c] = \text{N}$
m	Masse im System	$[m] = \text{kg}$
\vec{a}_c	Coriolisbeschleunigung	$[\vec{a}_c] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
\vec{v}_R	Relativgeschwindigkeit	$[\vec{v}_R] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.14.3 D'Alembert'sches Prinzip

Wird ein Körper in einem mitbewegten Koordinatensystem betrachtet, so bleibt er in Ruhe: $\vec{v}_R = 0$ und $\vec{a}_R = 0$

$$\vec{F} + \underbrace{\vec{F}_z + \vec{F}_c}_{\text{Scheinkräfte}} = \vec{0}$$

⇒ Statisches Gleichgewichtsproblem

3.15 Rotation starrer Körper

Rotation:	Drehung um feste Achse
Kreisel:	Drehung um starren Punkt
Kreiselbewegung	Drehung eines völlig freien, starren Körpers um seinen Schwerpunkt

3.15.1 Dynamisches Grundgesetz der Rotation

Es ist **nur die tangentiale Komponente** der Kraft (des Drehmoments) eines rotierenden Körpers relevant!

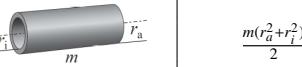
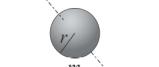
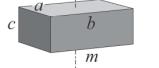
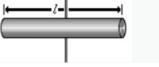
$$dM_t = r \cdot dF_t = r \cdot dm \cdot a_t = dm \cdot r^2 \cdot \alpha$$

$$M = \int dM = \int r^2 \alpha \cdot dm = \alpha \underbrace{\int r^2 \cdot dm}_{J_{\text{Scheibe}} = m \cdot r^2}$$

$$\Rightarrow M = J \cdot \alpha = r \cdot F$$

dM_t	kleine Tan.-Komponente des Drehmoments	$[dM_t] = \text{Nm}$
M	(gesamtes) Drehmoment	$[M] = \text{Nm}$
dF_t	kleine Tangentialkomponente der Kraft	$[dF_t] = \text{N}$
r	Abstand Drehachse zu Massepunkt (Rand)	$[r] = \text{m}$
dm	kleines Massestück des Körpers	$dm = \text{kg}$
a_t	Tangentialbeschleunigung ($a_t = r \cdot \alpha$)	$[a_t] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
α	Winkelbeschleunigung	$[\alpha] = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$
J	(Massen-) Trägheitsmoment	$[J] = \text{kg m}^2$

3.15.2 Massenträgheitsmomente

Körper		Trägheitsmoment
Vollzylinder / Scheibe		$\frac{mr^2}{2}$
Hohlzylinder		$\frac{m(r_o^2 + r_i^2)}{2}$
Kugel		$\frac{2}{5}mr^2$
Quader		$\frac{m(a^2 + b^2 + c^2)}{12}$
Massenpunkt	a) 	mr^2
Dünner Stab		$\frac{1}{12}ml^2$

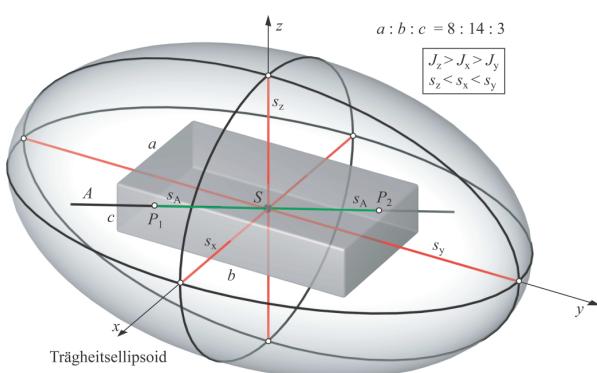
3.16 Trägheitsellipsoid

Trägheitsradius r_0 : als ob ganze Masse eines Körpers nur einen Radius hätte

$$r_0 = \sqrt{\frac{J}{m}}$$

$$s_0 = \frac{1}{r_0}$$

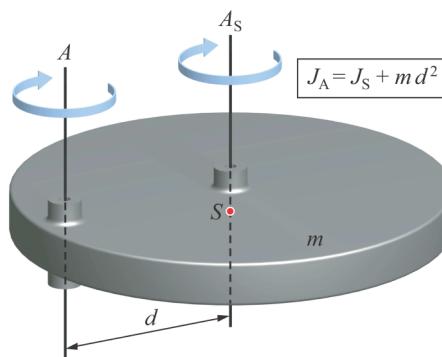
r_0	Trägheitsradius	$[r_0] = \text{m}$
m	Masse des Körpers	$[m] = \text{kg}$
J	(Massen-) Trägheitsmoment	$[J] = \text{kg m}^2$
s_0	reziproker Trägheitsradius	$[s_0] = \text{m}$



Hauptträgheits-Achsen (entsprechen immer Symmetrie-Achsen, falls vorhanden)
beliebige Achse $J_A = J_x \cdot \cos^2(\alpha) + J_y \cdot \cos^2(\beta) + J_z \cdot \cos^2(\gamma)$

3.17 Satz von Steiner

Beschreibt, wie man das Trägheitsmoment J berechnet, wenn die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt des rotierenden Körpers geht, sondern **parallel** dazu verläuft.



J_S	Trägheitsmoment (Rot. um Schwerp.)	$[J_S] = \text{kg m}^2$
J_A	Trägheitsmoment (Rot. um bel. Punkt)	$[J_A] = \text{kg m}^2$
m	Masse des Körpers	$[m] = \text{kg}$
d	Abstand zum Schwerpunkt	$[d] = \text{m}$

3.18 Arbeit und Leistung (Rotation)

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{s} = F_t \cdot ds = F_t \cdot r \cdot d\phi = M \cdot d\phi$$

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\phi}{dt} = M \cdot \omega$$

F_t	Tantentialer Kraftanteil der Rotation	$[F_t] = \text{N}$
$d\phi$	zurückgelegter Kreiswinkel	$[d\phi] = \text{rad}$
P	Leistung	$[P] = \text{W}$
W	Energie	$[W] = \text{J}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
M	Drehmoment	$[M] = \text{Nm}$

3.19 Rotationsenergie

Folgendes gilt nur für die Rotation um den Schwerpunkt eines Körpers!

Die totale kinetische Energie ist die Summe aller kinetischer Energien eines Körpers

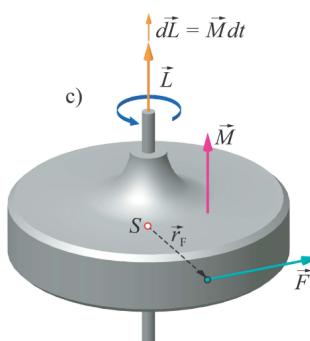
$$E_{kin} = \int \frac{1}{2} v^2 dm = E_{trans} + E_{rot}$$

$$E_{trans} = \frac{1}{2} m \cdot v_s^2$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J_s \cdot \omega^2$$

E_{trans}	Translationsenergie des Schwerpunkts	$[E_{trans}] = \text{J}$
m	Masse des Körpers	$[m] = \text{kg}$
v_s	Geschwindigkeit des Schwerpunkts	$[v_s] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
E_{rot}	Rotationsenergie	$[E_{rot}] = \text{J}$
J_s	Trägheitsmoment (Rot. um Schwerp.)	$[J_s] = \text{kg m}^2$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

3.20 Drehimpuls \vec{L} / Impulserhaltung (Rotation)



$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} \cdot dm = \vec{r} \times \vec{p}$$

\vec{L}	Drehimpuls	$[\vec{L}] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$
\vec{r}	Abstand Massepunkt zu Rot-Achse	$[\vec{r}] = \text{m}$
\vec{v}	Rotationsgeschwindigkeit	$[\vec{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
dm	kleines Masse-Stück	$[dm] = \text{kg}$
\vec{p}	Impuls	$[\vec{p}] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$

3.20.1 Energie beim Runterrollen

$$E_{pot} = E_{kin} + E_{rot}, \quad m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

3.20.2 Drehmoment \vec{M} vs. Drehimpuls \vec{L}

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d}{dt}\vec{L} = \dot{\vec{L}}$$

In einem abgeschlossenen System ($\vec{M} = 0$) bleibt der Gesamtdrehimpuls erhalten $\Rightarrow \vec{L} = \text{const}$

Impulserhaltung: $L \stackrel{!}{=} L'$
 $J_1 \cdot \omega + J_2 \cdot \omega \stackrel{!}{=} J_1 \cdot \omega'_1 + J_2 \cdot \omega'_2$

Energiesatz: $E_{\text{rot}} \stackrel{!}{=} E'_{\text{rot}} + Q$
 $\frac{1}{2}J_1 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2 \cdot \omega_2^2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}J_1 \cdot \omega_1'^2 + \frac{1}{2}J_2 \cdot \omega_2'^2 + Q$

\vec{M}	Drehmoment	$[\vec{M}] = \text{Nm}$
\vec{r}	Abstand Massepunkt zu Rot-Achse	$[\vec{r}] = \text{m}$
\vec{F}	Kraft, welche Drehmoment bewirkt	$[\vec{F}] = \text{N}$
\vec{p}	Impuls	$[\vec{p}] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$
\vec{L}	Drehimpuls	$[\vec{L}] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$
J	Massenträgheitsmoment	$[J] = \text{kg m}^2$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
Q	Deformationsarbeit	$[Q] = \text{J}$

3.20.3 Drehimpuls \vec{L} vs. Winkelgeschwindigkeit ω

$$L = \int dL = \int r^2 \omega dm = \omega \int r^2 dm = J \omega$$

L	Drehimpuls	$[L] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$
r	Abstand Massepunkt zu Rot-Achse	$[r] = \text{m}$
dm	kleines Masse-Stück	$[dm] = \text{kg}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
J	(Massen-) Trägheitsmoment (hier Tensor)	$[J] = \text{kg m}^2$

3.21 Rotation vs. Translation

Drehbewegung	Lineare Bewegung		
	$\Delta\theta$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	$a = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
Winkelgeschwindigkeit			Beschleunigung
Winkelbeschleunigung			Gleichungen für den Fall konstanter Beschleunigung
Gleichungen für den Fall konstanter Winkelbeschleunigung	$\Delta\theta = (\omega_0 + \alpha t)$ $(\omega) = \frac{1}{2}(\omega_0 + \alpha t)$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $v = v_0 + at$ $\Delta x = (v) \Delta t$ $(v) = \frac{1}{2}(\omega_0 + v)$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ $v^2 = v_0^2 + 2 a \Delta x$	
Drehmoment	M	Kraft	F
Trägheitsmoment	I	Masse	m
Arbeit	$dW = M d\theta$	Arbeit	$dW = F ds$
Kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I \omega^2$	Kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$
Leistung	$P = M \omega$	Leistung	$P = F v$
Drehimpuls	$L = I \omega$	Impuls	$p = m v$
Zweites Newton'sches Axiom	$M_{\text{ext}} = I \alpha = \frac{dL}{dt}$	Zweites Newton'sches Axiom	$F_{\text{ext}} = m a = \frac{dp}{dt}$

4 Hydrostatik

4.1 Festkörper, Flüssigkeit, Gas

4.1.1 Festkörper

- kein Fluid
- festes Volumen; feste Gestalt
- Moleküle / Atome befinden sich in regelmässiger Gitter-Anordnung
- inkompressibel (sehr schlecht komprimierbar)
- Kraft: Weiterleitung (längs ihrer Wirkungslinie)
- Druck: Verstärkung

4.1.2 ideale Flüssigkeit

- Fluid
- festes Volumen; keine feste Gestalt
- Moleküle / Atome bewegen sich chaotisch aneinander vorbei
- Moleküle / Atome füllen den Raum aus / berühren sich
- inkompressibel (schlecht komprimierbar)
- reibungsfrei (keine Scherkräfte)
- Kraft: Verstärkung
- Druck: Weiterleitung (gleichmässig)

4.1.3 Gas

- Fluid
- kein festes Volumen; keine feste Gestalt
- Moleküle / Atome fliegen mit hoher Geschwindigkeit durch den Raum
- Es gibt sehr viel Zwischenraum
- Moleküle / Atome führen bei Zusammenstoss unter sich oder mit Gefässwand elestische Stöße aus
- kompressibel (gut komprimierbar)
- reibungsfrei (keine Scherkräfte)

4.2 Druck p / Schubspannung τ

Druck ist eine skalare Grösse (hat keine Richtung)

$$p = \frac{F_{\perp}}{A} \quad \tau = \frac{F_{\parallel}}{A}$$

p	Druck	$[p] = \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
τ	Schubspannung (Scherkraft)	$[\tau] = \text{N}$
F_{\perp}	Kraft senkrecht zu A	$[F_{\perp}] = \text{N}$
F_{\parallel}	Kraft parallel zu A	$[F_{\parallel}] = \text{N}$
A	Fläche	$[A] = \text{m}^2$

In abgeschlossenen, miteinander verbundenen Systemen herrscht ein Druck-Gleichgewicht!

$$p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

4.2.1 Weitere Einheiten von Druck

1 bar = 10^5 Pa (Absolutdruck: Vergleich zu Vakuum)

1 hPa = 100 Pa = 1 mbar

1 at = $1 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2} = 9.81 \cdot 10^4 \text{ Pa}$

1 atü = 1 at (Überdruck; Vergleich zu normalem Luftdruck)

1 Torr = $\frac{1}{760}$ at (1mm-Hg-Säule)

1 psi = 6894.76 Pa (Britisch)

4.3 Kompression

$$\text{Flüssigkeiten: } \Delta p = \frac{1}{\kappa} \cdot -\frac{\Delta V}{V} = K \cdot -\frac{\Delta V}{V}$$

$$\text{Gase: } \Delta p = p(h) - p_0 = \frac{1}{\kappa_T} \cdot -\frac{\Delta V}{V}$$

Δp	Druckerhöhung	$[\Delta p] = \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
κ	Kompressibilität (Flüssigkeit)	$[\kappa] = \frac{1}{\text{Pa}}$
$K = \frac{1}{\kappa}$	Kompressionsmodul	$[K] = \text{Pa}$
κ_T	Kompressibilität (Gas)	$[\kappa_T] = \frac{1}{\text{Pa}}$
$-\frac{\Delta V}{V}$	realtive Volumen-Abnahme	$[\frac{\Delta V}{V}] = 1$

4.4 Dichte ρ

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Leftrightarrow \quad m = \rho \cdot V$$

$$\rho \quad \text{Dichte} \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$m \quad \text{Masse} \quad [m] = \text{kg}$$

$$V \quad \text{Volumen} \quad [V] = \text{m}^3$$

4.4.1 Wichtige Dichten

$$\rho_{\text{Wasser}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_{\text{Luft}} = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

4.5 Boyle-Mariotte

Das Gesetz von Boyle-Mariotte beschreibt die Kompressibilität von Gasen.

⇒ Das Gesetz gilt nur bei konstanter Temperatur!

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

$$\begin{array}{ll} \rho_x & \text{Gas-Dichte} \quad [\rho_x] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ p_x & \text{Gas-Druck} \quad [p_x] = \text{Pa} \\ V_x & \text{Volumen} \quad [V_x] = \text{m}^3 \end{array}$$

4.6 Hydrostatischer Druck (Schweredruck)

Fluid inkompressibel!

$$p = \rho \cdot g \cdot h$$

$$\begin{array}{ll} \rho & \text{Dichte der Flüssigkeit} \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ g & \text{Erdbeschleunigung } g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad [g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ h & \text{Höhe unter der Flüssigkeits-Oberfläche} \quad [h] = \text{m} \end{array}$$

Der Druck ist nur von der Höhe der darüberliegenden Flüssigkeit abhängig, nicht von deren Volumen oder Gewicht.

4.7 Barometrische Höhenformel (Gase)

Fluid kompressibel!

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{p_0}{p_0} \cdot g \cdot h}$$

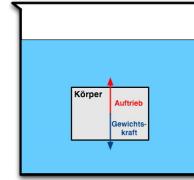
$$\begin{array}{ll} p(h) & \text{Schweredruck des Gases bei Höhe } h \quad [p(h)] = \text{Pa} \\ p_0 & \text{Luftdruck auf Meereshöhe } p_0 = 10^5 \text{ Pa} \quad [p_0] = \text{Pa} \\ \rho_0 & \text{Luft-Dichte auf Meereshöhe } \rho_0 = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad [\rho_0] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ g & \text{Erdbeschleunigung } g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad [g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ h & \text{Höhe über Meer} \quad [h] = \text{m} \end{array}$$

4.8 Statischer Auftrieb (Fluid)

Der Auftrieb eines Körpers entspricht dem Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit (Archimedes).

$$F_A = \rho_{FI} \cdot V_K \cdot g$$

$$F_A = F_{G,FI} = m_{FI} \cdot g = \rho_{FI} \cdot V_K \cdot g$$



$$\begin{array}{ll} F_A & \text{Auftriebskraft} \quad [F_A] = \text{N} \\ \rho_{FI} & \text{Dichte verdrängtes Fluid} \quad [\rho_{FI}] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ V_K & \text{verdrängtes Fluid-Volumen} \quad [V_K] = \text{m}^3 \\ g & \text{Erdbeschleunigung } g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad [g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ m_{FI} & \text{Masse des verdrängten Fluids} \quad [m_{FI}] = \text{kg} \\ F_{G,FI} & \text{Gewichtskraft verdrängtes Fluid} \quad [F_{G,FI}] = \text{N} \end{array}$$

4.9 Oberflächenspannung σ

$$\sigma := \frac{F}{l}$$

$$\begin{array}{ll} \sigma & \text{Oberflächenspannung} \quad [\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^2} \\ F & \text{Kraft} \quad [F] = \text{N} \\ l & \text{Länge} \quad [l] = \text{m} \end{array}$$

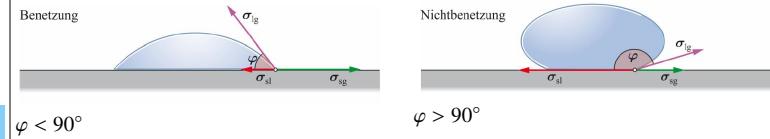
Die Länge l entspricht der gesamten Berührungsfläche zwischen Flüssigkeit und Festkörper / Gas

Zylinder $l = 2\pi r$

Lamellen $l = 2b$ (beidseitig!)

4.10 Grenzflächenspannung

$$\sigma_{sl} + \sigma_{lg} \cdot \cos\varphi = \sigma_{sg}$$



4.11 Kapillarität h

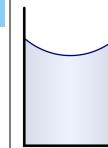
$$h = \frac{2 \cdot \sigma}{\rho \cdot g \cdot r} = \frac{\sigma}{\rho \cdot g \cdot d}$$

σ Totale Grenzflächenspannung $[\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$

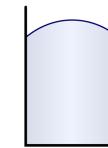
ρ Dichte der Flüssigkeit $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

r Radius der Kapillare $[r] = \text{m}$

d Durchmesser der Kapillare $[d] = \text{m}$



benetzend



nicht benetzend

4.12 Druck in Seifenblase p

$$p = \frac{2 \cdot \sigma}{r}$$

σ Oberflächenspannung $[\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$

r Radius der Seifenblase $[r] = \text{m}$

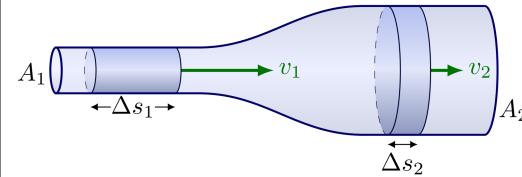
5 Hydrodynamik - Ideale Fluide

Ideale Fluide nehmen keine Scherkräfte auf (keine Reibung) und sind inkompressibel.

5.1 Stromlinien-Modell

- Stromlinien zeigen Geschwindigkeit des Fluids
- **Dichte** Stromlinien bedeutet **hohe** Geschwindigkeit
- **Dünne** Stromlinien bedeutet **niedrige** Geschwindigkeit
- Stationär: Stromlinien = Bahnlinien ⇒ schneiden sich nicht

5.2 Kontinuitätsgleichung



$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \dot{V} = A \cdot v = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \dot{V}$$

ΔV Volumenänderung

$[\Delta V] = \text{m}^3$

Δt Zeitänderung

$[\Delta t] = \text{s}$

\dot{V} Volumenstrom (Volumen pro Zeit)

$[\dot{V}] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

A_x Querschnittsfläche

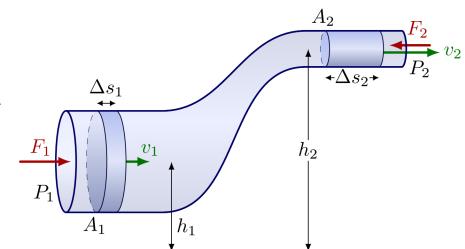
$[A_x] = \text{m}^2$

v_x Geschwindigkeit der Flüssigkeit

$[v_x] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

⇒ Gilt auch für Gase, wenn $v \ll v_{\text{Schall}}$

5.3 Bernoulli-Gleichung



Die Bernoulli-Gleichung beschreibt ein bewegtes Fluid

$$\underbrace{p + \rho \cdot g \cdot h}_{\text{statisch}} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho \cdot v^2}_{\text{dynamisch}} = \text{const}$$

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$$

5.3.1 Spezialfall: Horizontal

$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{const}$$

5.3.2 Spezialfall: Statik

$$p + \rho \cdot g \cdot h = \text{const}$$

5.3.3 Hydrodynamisches Paradoxon

Je grösser die Strömungsgeschwindigkeit, desto kleiner der Druck

5.4 Bernoulli-Gleichung und Energieerhaltung

Die in der Bernoulli-Gleichung vorkommenden Terme können als Energie pro Volumen betrachtet werden

$$\begin{aligned} E_{\text{Mech}} &= \text{elast. Energie} + \text{pot. Energie} + \text{kin. Energie} \\ &= p \cdot V + m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \text{const} \end{aligned}$$

Wenn durch das Volumen dividiert wird erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{Mech}}}{Volumen} &= \frac{\text{elastische Energie}}{\text{Volumen}} + \frac{\text{pot. Energie}}{\text{Volumen}} + \frac{\text{kin. Energie}}{\text{Volumen}} \\ &= p + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{const} \end{aligned}$$

Bei einer horizontalen Strömung entfällt die pot. Energie (pro Volumen)

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{Mech}}}{Volumen} &= \frac{\text{elastische Energie}}{\text{Volumen}} + \frac{\text{kin. Energie}}{\text{Volumen}} \\ &= p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{const} \end{aligned}$$

6 Hydrodynamik - Reale Fluide

Reale Fluide nehmen Scherkräfte auf (Reibung)

6.1 Newton'sches Reibungs-Gesetz

Ein reales Fluid erfährt Reibung

$$\tau = \eta \cdot \frac{v}{d} \quad \tau = \eta \cdot \frac{dv}{dz}$$

τ	Schubspannung	$[\tau] = \text{N}$
η	dynmische Zähigkeit (Viskosität)	$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$
v	Geschwindigkeitsdifferenz zw. Auflagen	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
z	Richtung senkrecht zur Verschiebung	$[z] = \text{m}$
d	Distanz zwischen den Auflagen	$[d] = \text{m}$
$\frac{dv}{dz}$	Geschwindigkeits-Gradient in z-Richtung	$[\frac{dv}{dz}] = \frac{1}{\text{s}}$

Beispiele: Werte für η

$$\begin{aligned} \eta_{\text{Luft}} &:= 17 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s} \\ \eta_{\text{Wasser}(20^\circ\text{C})} &:= 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s} \\ \eta_{\text{Öl}} &:= 0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s} \text{ bis } 1 \text{ Pa} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

6.1.1 Kinematische Zähigkeit ν

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

$$\begin{aligned} \nu &\text{ kinematische Zähigkeit} & [\nu] &= \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \\ \rho &\text{ Dichte} & [\rho] &= \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{aligned}$$

6.2 Stokes'sche Reibung F_R

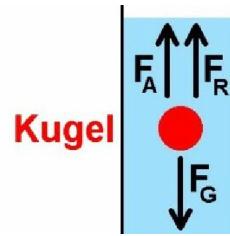
Z.B. für Kugel in Öl oder fallende Wassertropfen

$$F_R = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R \cdot v$$

$$\begin{aligned} F_R &\text{ Reibungskraft} & [F_R] &= \text{N} \\ \eta &\text{ Dynamische Zähigkeit (Viskosität)} & [\eta] &= \text{Pa} \cdot \text{s} \\ R &\text{ Kugelradius} & [R] &= \text{m} \\ v &\text{ Geschwindigkeit} & [v] &= \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

6.2.1 Kugelfall-Viskosimeter

Auf eine Kugel, welche in einer Flüssigkeit hinabgleitet wirken folgende Kräfte:



F_G Gewichtskraft
 F_A statischer Auftrieb
 F_R Stokes'sche Reibung

Ansatz zum Lösen von Aufgaben: **Kräftegleichgewicht**

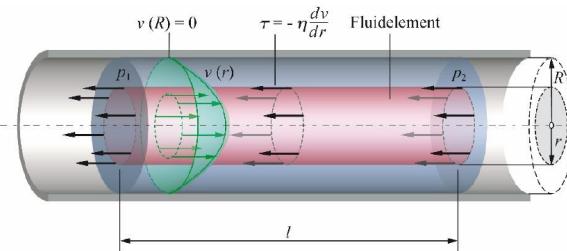
6.3 Hagen-Poiseuille

Beschreibung von laminaren Strömungen in einem runden Rohr
⇒ Schichtströmung

6.3.1 Gesetz von Hagen-Poiseuille

$$\dot{V} = \frac{\pi \cdot \Delta p \cdot R^4}{8 \cdot \eta \cdot l}$$

6.3.2 Geschwindigkeitsverteilung von $r = 0$ bis R



$$v(r) = \frac{1}{4 \cdot \eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} \cdot (R^2 - r^2)$$

$v(r)$	Fliessgeschwindigkeit beim Radius r	$[v(r)] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
r	betrachteter Radius	$[r] = \text{m}$
η	Dynamische Zähigkeit (Viskosität)	$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$
R	Rohr-(Innen)Radius	$[R] = \text{m}$
Δp	Druckdifferenz	$[\Delta p] = \text{Pa}$
$V = \frac{dV}{dt}$	Volumenstrom	$[\dot{V}] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$
l	Länge des Rohrs	$[l] = \text{m}$

6.4 Reynolds-Zahl Re

Gibt ein Richtmaß für die Wirbelbildung

- Druck-Differenz (Bernoulli) begünstigt Wirbelbildung
- Innere Reibung (Schubspannung) verhindert Wirbelbildung

$$Re = \frac{\Delta p}{\tau} = \frac{\rho \cdot \bar{v} \cdot d}{\eta} \quad \text{mit } \bar{v} = \frac{\dot{V}}{A}$$

Re	Reynolds-Zahl	$[Re] = 1$
η	Dynamische Zähigkeit (Viskosität)	$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$
\bar{v}	Mittlere Geschwindigkeit	$[\bar{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
d	Typische Dimension (Rohrdurchmesser)	$[d] = \text{m}$
Δp	Druckdifferenz	$[\Delta p] = \text{Pa}$
τ	Schubspannung	$[\tau] = \text{N}$

Sobald die Reynolds-Zahl Re grösser ist als ein kritischer Wert bilden sich Wirbel

⇒ Rohr: $Re_{\text{kritisch}} \approx 2320$

6.4.1 Ähnlichkeitsgesetz

Reynolds-Zahl dient auch richtigem Vergleich von Modellversuchen.

⇒ Gleiche Reynolds-Zahl bedeutet gleiches Verhalten

⇒ Gleiche Reynolds-Zahl bedeutet auch gleiche Relative Grenzschicht-Dicke D (siehe 6.6)

6.5 Turbulente / Laminare Rohrströmung

6.5.1 Hilfe, um Reynoldszahl zu bestimmen (laminar)

$$\Delta p = 32 \cdot \eta \cdot l \cdot \frac{v}{d^2}$$

6.5.2 Druckunterschied in laminare / turbulente Strömung

$$\lambda_{turbulent} = \frac{0.316}{\sqrt{Re}} \quad \lambda_{laminar} = \frac{64}{Re}$$

$$\Rightarrow \Delta p_x = \lambda_x \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2$$

Δp_x	Druckdifferenz (laminar/turbulent)	$[\Delta p] = \text{Pa}$
η	Dynamische Zähigkeit (Viskosität)	$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$
l	Rohr-Länge	$[l] = \text{m}$
v	Fliess-Geschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
d	Rohr-Durchmesser	$[d] = \text{m}$
ρ	Dichte des Fluids	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Re	Reynolds-Zahl	$[Re] = 1$

6.5.3 Unbekannt / Gemischt (Pratische Anwendung)

Vorgehen, wenn man nicht weiss, ob sich Wirbel bilden oder nicht

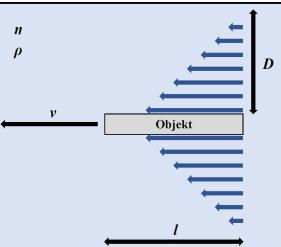
1. Laminar rechnen (um fehlenden Parameter ρ , v , d , oder η zu bestimmen)
2. Aus Resultat Reynolds-Zahl berechnen
3. Mit kritischer Reynolds-Zahl vergleichen
4. Beim Überschreiten \Rightarrow Turbulent rechnen!

6.6 Prandl'sche Grenzschicht-Dicke D

Prandl'sche Grenzschicht-Dicke D beschreibt, in welcher **Distanz** die **Geschwindigkeit** eines laminar bewegten Teils (z.B. ein Flugzeugflügel) **Null** ist.

$$D = \sqrt{\frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{l}{v}}$$

D	Prandl'sche Grenzschicht-Dicke	$[D] = \text{m}$
η	Dynamische Zähigkeit (Viskosität)	$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$
ρ	Dichte des Fluids	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
l	Länge des bewegten Teils (in Richtung von v)	$[l] = \text{m}$



Die Geschwindigkeit innerhalb der Grenzschicht D nimmt vom Teil bis hin zum äussersten Rand **linear** ab.

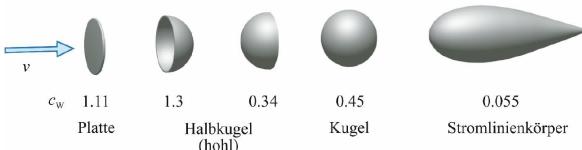
6.7 Bernoulli-Gleichung mit innerer Reibung

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \alpha_2 \cdot \rho \cdot v_2^2 + \Delta p_v$$

Korrekturfaktoren	turbulent	laminar
	$\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 2$	$\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$
Druckverlust Δp_v	$\Delta p_v = \lambda_x \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2$	
	$\lambda_{turbulent} = \frac{0.316}{\sqrt{Re}}$	$\lambda_{laminar} = \frac{64}{Re}$

6.8 Druckwiderstand F_D

Bezeichnet die turbulente Luftreibungskraft F_D und wird meist als Luftwiderstand bezeichnet



$$F_D = \Delta p \cdot A_s = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_s \cdot c_w$$

F_D Druckwiderstand

Δp Druckdifferenz

ρ Luft-Dichte

v Strömungs-Geschwindigkeit

c_w Widerstandsbeiwert / Widerstandszahl

A_s projizierte Fläche senkrecht zur Strömung

$[F_D] = \text{N}$

$[\Delta p] = \text{Pa}$

$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$[c_w] = 1$

$[A_s] = \text{m}^2$

Der Widerstandsbeiwert c_w ist **geometrieabhängig**!

6.9 Auftriebskraft F_A nach Kutta-Jukowski

Beschreibt Proportionalität zwischen dynamischem Auftrieb und Zirkulation

$$F_A = \rho \cdot v \cdot l \cdot \Gamma$$

F_A dynamischer Auftrieb

ρ Dichte des Fluids

v Geschwindigkeit

l Länge quer zur Strömung

Γ Zirkulation

$[F_A] = \text{N}$

$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$[l] = \text{m}$

$[\Gamma] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

6.9.1 Zirkulation Γ

Die Zirkulation ist ein Mass für die **Rotation** im Strömungsfeld

$$\Gamma = \oint \vec{v} \bullet d\vec{s}$$

Γ Zirkulation

$\vec{v} \bullet d\vec{s}$ Geschwindigkeit entlang dem Weg

(Skalarprodukt: $\vec{v} \bullet d\vec{s} = a \cdot b \cdot \cos(\varphi)$)

$[\Gamma] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

$[\vec{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Rotierender Zylinder:

$$\Gamma = 2\pi r v_{Zyl} = 4\pi^2 r^2 f$$

6.10 Dynamischer Auftrieb F_A

$$F_A = c_A \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_{||}}_{\Delta p}$$

F_A dynamischer Auftrieb

c_A Auftriebskoeffizient

ρ Luft-Dichte

v Strömungsgeschwindigkeit

$A_{||}$ Projizierte Fläche **parallel** zur Strömung

$[F_A] = \text{N}$

$[c_A] = 1$

$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$[A_{||}] = \text{m}^2$

6.10.1 Wissenswertes zum dynamischen Auftrieb

Ein gerade ausgerichtetes, symmetrisches Stromlinienprofil erzeugt **keinen** dynamischen Auftrieb

An einem asymmetrischen Flügelprofil entsteht dynamischer Auftrieb

6.11 Induzierter Widerstand F_W

Kommt durch Energieverlust (Wirbelbildung) zu Stande, welcher entsteht, wenn die Umgebungsluft in Bewegung gesetzt wird

$$F_W = c_w^* \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_{||}$$

F_W Induzierter Widerstand

c_w^* Widerstands-Koeffizient

ρ Luft-Dichte

v Strömungsgeschwindigkeit

$A_{||}$ Projizierte Fläche **parallel** zur Strömung

$[F_W] = \text{N}$

$[c_w^*] = 1$

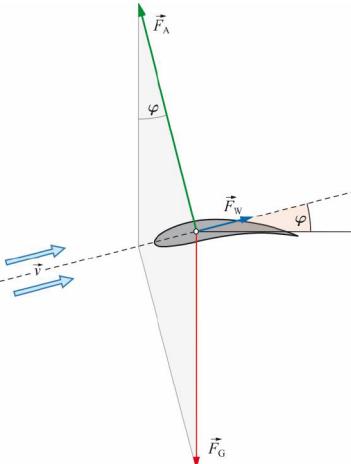
$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$[A_{||}] = \text{m}^2$

6.12 Gleitwinkel φ

Gibt die zurückgelegte Strecke pro verbrauchte Höhe an
Im Luft-Kanal ist dies der Anstell-Winkel



$$\tan(\varphi) = \frac{F_W}{F_A} = \frac{c_W^*}{c_A} = \frac{v_V}{v_H}$$

φ	Gleitwinkel
F_W	Widerstandskraft
F_A	Auftriebskraft
c_W^*	Widerstands-Koeffizient
c_A	Auftriebs-Koeffizient
v_V	Vertikal-Geschwindigkeit
v_H	Horizontal-Geschwindigkeit

6.12.1 Gängige Gleitzahlen

Flugobjekt	Gleitzahl
Hängegleiter	10 bis 15
Boeing 747	15
Airbus A380	20
Segelflugzeug	40 (Rekord 70)

6.13 Helmholtz'sche Wirbelsätze

1. Wirbel hat kein Anfang und kein Ende
2. Wirbel besteht immer aus denselben Fluidteilchen
3. Zirkulation zeitlich konstant

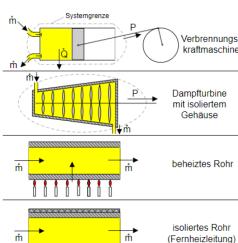
7 Thermodynamik

7.1 Terminologie

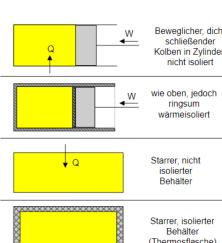
System ist ↓		Materie-tausch	Energietausch	
			Arbeit	Wärme
offen	erlaubt	-	erlaubt	erlaubt
		adiabatisch arbeitsdicht beides	erlaubt Nein Nein	Nein erlaubt Nein

geschlossen	Nein	-	möglich	möglich
		adiabatisch arbeitsdicht energiedicht	möglich Nein Nein	Nein möglich Nein

Offen



Geschlossen



7.2 Absolute Temperatur T

$$T = \theta + 273.15 \text{ K} = \theta - \theta_0$$

T	Absolute Temperatur gemessen in Kelvin	$[T] = \text{K}$
θ	Temperatur gemessen in °C	$[\theta] = ^\circ\text{C}$
θ_0	Absoluter Nullpunkt: $= -273.15 \text{ } ^\circ\text{C} = 0 \text{ K}$	

7.3 Thermische Ausdehnung

7.3.1 Längenausdehnung Δl

$$l' = l + \Delta l = l + \alpha \cdot l \cdot \Delta T = l(1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

l'	Länge nach Ausdehnung	$[l'] = \text{m}$
l	Anfangslänge	$[l] = \text{m}$
Δl	Längenänderung	$[\Delta l] = \text{m}$
α	Längenausdehnungskoeffizient	$[\alpha] = \frac{1}{\text{K}}$
ΔT	Temperaturänderung	$[\Delta T] = \text{K}$

7.3.2 Flächenausdehnung ΔA

$$A' = A + \Delta A = A + \underbrace{\beta}_{\approx 2\alpha} \cdot A \cdot \Delta T = A(1 + \beta \cdot \Delta T)$$

A'	Fläche nach Ausdehnung	$[A'] = \text{m}^2$
A	Anfangsfläche	$[A] = \text{m}^2$
ΔA	Flächenänderung	$[\Delta A] = \text{m}^2$
β	Flächenausdehnungskoeffizient	$[\beta] = \frac{1}{\text{K}}$
ΔT	Temperaturänderung	$[\Delta T] = \text{K}$

7.3.3 Volumenausdehnung ΔV

$$V' = V + \Delta V = V + \underbrace{\gamma}_{\approx 3\alpha} \cdot V \cdot \Delta T = V(1 + \gamma \cdot \Delta T)$$

V'	Volumen nach Ausdehnung	$[V'] = \text{m}^3$
V	Anfangsvolumen	$[V] = \text{m}^3$
ΔV	Volumenänderung	$[\Delta V] = \text{m}^3$
γ	Volumenausdehnungskoeffizient	$[\gamma] = \frac{1}{\text{K}}$
ΔT	Temperaturänderung	$[\Delta T] = \text{K}$

Material	Koeffizient (10^{-6} K^{-1})
Aluminium	23
Eisen	12
Stahl, unlegiert	11 ... 13
Diamant	1.3
Silizium	2
Gummi	220
Beton	12
Polyesterol	70
Zerodur	0 ± 0.007

7.4 Thermische Spannung σ

$$p = \sigma = \varepsilon \cdot E = E \cdot \frac{\Delta l}{l} = E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

σ	Thermische Spannung	$[\sigma] = \text{Pa}$
ε	Dehnung	$[\varepsilon] = 1$
E	Elastizitätsmodul	$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
α	Längenausdehnungskoeffizient	$[\alpha] = \frac{1}{\text{K}}$
ΔT	Temperaturänderung	$[\Delta T] = \text{K}$
p	Druck	$[p] = \text{Pa}$

8 Ideales Gas

8.1 Modell des idealen Gases

Jedes Gas ist gleich!

1. Moleküle sind Massenpunkte (keine Ausdehnung)
2. Stöße sind elastisch (keine zwischenmolekularen Kräfte)
Kein Volumen bei $T = 0$
Kein Druck bei $T = 0$

8.1.1 Thermische Ausdehnung von Gasen

- Ausdehnung von Gasen ist sehr gross
- Bei allen Gasen ist die Ausdehnung **gleich**
- Volumen beim Nullpunkt ist **Null**

8.2 Universelle Gasgleichung

Alle Gase verhalten sich gleich, insbesondere bei gleicher Anzahl Moleküle

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

p_x	Absolut-Druck	$[p_x] = \text{Pa}$
	Absolut-Druck: $p_0 + p$	
V_x	Volumen	$[V_x] = \text{m}^3$
T_x	Absolut-Temperatur (in K)	$[T] = \text{K}$

8.2.1 Boyle-Mariotte

Das Gesetz gilt nur bei konstanter Temperatur!

⇒ Isotherme Zustandsänderung

$$p \cdot V = \text{const} \quad \Rightarrow \quad p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

8.2.2 Gay-Lussac

Das Gesetz gilt nur bei konstantem Druck!

⇒ **Isobare** Zustandsänderung

$$\frac{V}{T} = \text{const} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

8.2.3 Gay-Lussac und Amontons

Das Gesetz gilt nur bei konstantem Volumen!

⇒ **Isochore** Zustandsänderung

$$\frac{p}{T} = \text{const} \Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

8.3 Universelle Gasgleichung für ideale Gase

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T = N \cdot k \cdot T$$

p	Absolut-Druck	$[p] = \text{Pa}$
	Absolut-Druck: $p_0 + p$	
V	Volumen	$[V] = \text{m}^3$
n	Mol-Zahl	$[n] = \text{mol}$
R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
T	Absolut-Temperatur (in K)	$[T] = \text{K}$
N	Anzahl Moleküle	$[N] = 1$
k	Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$	$[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$

8.3.1 Zusammenhänge zwischen den Konstanten

$$R = k \cdot N_A = \frac{N \cdot k}{n}$$

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M} = \frac{N \cdot k}{R}$$

R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
k	Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$	$[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$
N	Anzahl Moleküle	$[N] = 1$
N_A	Avogadrokonstante: $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$	$[N_A] = \frac{1}{\text{mol}}$
n	Mol-Zahl	$[n] = \text{mol}$
m	Masse	$[m] = \text{kg}$
M	Mol-Masse	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$

8.4 Mechanische Arbeit ΔW von Gasen

Folgende Formel ist für Flüssigkeiten **nicht** gültig, da diese inkompressibel sind ($\Delta V = 0$)

$$\Delta W = F \cdot \Delta s = p \cdot A \cdot \Delta s = p \cdot \Delta V$$

ΔW	Mechanische Arbeit von Gas	$[\Delta W] = \text{J}$
F	Kraft	$[F] = \text{N}$
Δs	Wegänderung	$[\Delta s] = \text{m}$
p	Druck	$[p] = \text{Pa}$
A	Fläche	$[A] = \text{m}^2$
ΔV	Volumenänderung	$[\Delta V] = \text{m}^3$

8.5 Gesetz von Avogadro

Ein Mol eines Gases nimmt bei Normalbedingungen immer das gleiche Volumen ein (=Molvolumen)

Ideale Gase enthalten bei gleichem Druck p und gleicher Temperatur T immer gleich viele Moleküle (im Molvolumen)

8.6 Molmasse M , Molvolumen V_m

Siehe auch 8.3

Molmasse ist die **Ordnungszahl** im Periodensystem

$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$$

Molvolumen:

$$V_m = \frac{V}{n}$$

p	Absolut-Druck	$[p] = \text{Pa}$
	Absolut-Druck: $p_0 + p$	
V	Volumen	$[V] = \text{m}^3$
R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
T	Absolut-Temperatur (in K)	$[T] = \text{K}$
N_A	Avogadrokonstante: $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$	$[N_A] = \frac{1}{\text{mol}}$
k	Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$	$[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$
n	Mol-Zahl	$[n] = \text{mol}$
m	Masse	$[m] = \text{kg}$
M	Mol-Masse	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
N	Anzahl Moleküle	$[N] = 1$
V_m	Molvolumen	$[V_m] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$

8.7 Dichte eines Gases ρ

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{V_m} = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}$$

ρ	Gas-Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
m	Masse	$[m] = \text{kg}$
V	Volumen	$[V] = \text{m}^3$
M	Mol-Masse	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
V_m	Molvolumen (22.4 L bei 0 °C und 1000 hPa)	$[V_m] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$
p	Absolut-Druck	$[p] = \text{Pa}$
	Absolut-Druck: $p_0 + p$	
R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
T	Absolut-Temperatur (in K)	$[T] = \text{K}$

8.8 Phänomene von idealen Gasen

8.8.1 Anomalie des Wassers

Die feste Form (Eis) ist leichter als die flüssige Form (Wasser)
Die **größte Dichte weist Wasser bei 4 °C** auf, nicht beim Gefrierpunkt von 0 °C

⇒ Ein See gefriert somit nur an der Oberfläche. Am Grund des Sees beträgt die Wassertemperatur 4 °C

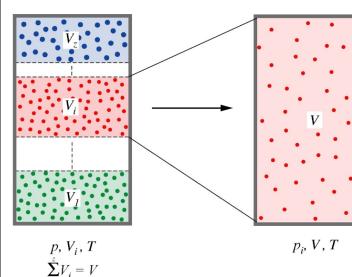
8.8.2 Osmotischer Druck (Zelldruck)

Grosse Moleküle innerhalb von vielen kleinen Molekülen in einer Flüssigkeit verhalten sich ähnlich wie die Moleküle eines idealen Gases, wenn die Flüssigkeit von einer für die Moleküle halb-durchlässigen (semi-permeabel) Membran umgeben ist.

Osmotischer Druck: $p = \frac{n}{V} \cdot R \cdot T$ (ideale Gasgleichung)

8.9 Partialdruck p_i

Ausgangslage: Gasgemisch (z.B. Luft: Sauerstoff-Stickstoff)



Der Partialdruck p_i ist der Druck, welcher die i -te Gaskomponente erzeugen würde, wenn ihr das gesamte Volumen zur Verfügung stehen würde.

8.10 Gesetz von Dalton

In einem Gas ist die Summe der Partialdrücke p_i gleich dem Gesamtdruck

$$\sum_{i=1}^n p_i = p$$

p_i	Partialdruck	$[p_i] = \text{Pa}$
p	(Gesamt-) Druck	$[p] = \text{Pa}$

8.11 Volumen- und Massenkonzentration (Gasgemisch)

8.11.1 Volumen-Konzentrationen (Volumen-Anteile)

$$q_i = \frac{V_i}{V} = \frac{n_i}{n} = \frac{p_i}{p}$$

q_i	Volumen-Konzentration
V_i	Volumen der i-ten Gas-Komponente
V	Gesamt-Volumen
n_i	Molzahl der i-ten Gas-Komponente
n	Gesamt-Molzahl des Gemischs
p_i	Partialdruck der i-ten Gaskomponente
p	Druck des Gemischs

$[q_i] = 1$
$[V_i] = \text{m}^3$
$[V] = \text{m}^3$
$[n_i] = \text{mol}$
$[n] = \text{mol}$
$[p_i] = \text{Pa}$
$[p] = \text{Pa}$

a	Eigenvolumen	$[a] = \frac{\text{J} \cdot \text{m}^3}{\text{mol}^2}$
R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
T_k	Kritische Absolut- Temperatur	$[T_k] = \text{K}$
V_{mk}	Kritisches Mol-Volumen	$[V_{mk}] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$
b	Binnendruck	$[b] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$
p_k	Kritischer Druck	$[p_k] = \text{Pa}$

8.11.2 Massen-Konzentration (Massen-Anteile)

$$\mu_i = \frac{m_i}{m} = \frac{M_i}{M} \cdot q_i$$

μ_i	Volumen-Konzentrationen	$[\mu_i] = 1$
m_i	Masse der i-ten Gas-Komponente	$[m_i] = \text{kg}$
m	Masse der Gemischs	$[m] = \text{kg}$
M_i	Mol-Masse der i-ten Gas-Komponente	$[M_i] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
M	Mol-Masse des Gemischs	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
q_i	Volumen-Konzentration	$[q_i] = 1$

8.12 Mol-Masse Gasgemisch

Die Mol-Masse des Gas-Gemischs kann als gewichteter Mittelwert berechnet werden, gewichtet mit den jeweiligen Volumen-Anteilen

$$M = \sum_{i=1}^n q_i \cdot M_i$$

M	Mol-Masse Gasgemisch	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
q_i	Volumen-Konzentration	$[q_i] = 1$
M_i	Mol-Masse der i-ten Gas-Komponente	$[M_i] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$

9 Reales Gas

Im Vergleich zum idealen Gas müssen zwei Dinge berücksichtigt werden:

Eigen-Volumen:

Ideales Gas hat **kleineres** Volumen als gemessen
(Ideal-Gas-Volumen um das Molekül-Eigenvolumen reduzieren)

Binnen-Druck:

Ideales Gas hat **grösseren** Druck als gemessen
(Ideal-Gas-Druck um Binnendruck erhöhen)

9.1 Van der Waals-Gleichung (1 Mol)

⇒ Für nicht-ideale Gase!

$$p' \cdot V'_m = R \cdot T$$

$$p' = p + \frac{a}{V_m^2} \quad V'_m = V_m - b$$

p'	Korrigierter Druck	$[p'] = \text{Pa}$
V'_m	Korrigiertes Mol-Volumen	$[V_m] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$
R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
T	Absolut- Temperatur (in K)	$[T] = \text{K}$
p	Druck des Gemischs	$[p] = \text{Pa}$
a	Eigenvolumen	$[a] = \frac{\text{J} \cdot \text{m}^3}{\text{mol}^2}$
b	Binnendruck	$[b] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$
V_m	Mol-Volumen	$[V_m] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$

9.2 Van der Waals-Gleichung (n Mol)

$$(p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2}) \cdot (V - n \cdot b) = n \cdot R \cdot T$$

p	Druck des Gemischs	$[p] = \text{Pa}$
n	Mol-Zahl	$[n] = \text{mol}$
a	Eigenvolumen	$[a] = \frac{\text{J} \cdot \text{m}^3}{\text{mol}^2}$
V	Volumen	$[V] = \text{m}^3$
b	Binnendruck	$[b] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$
R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
T	Absolut- Temperatur (in K)	$[T] = \text{K}$

9.2.1 Van der Waals-Parameter

$$a = \frac{9}{8} \cdot R \cdot T_k \cdot V_{mk} = \frac{27R^2 T_k^2}{64 \cdot p_k}$$

$$b = \frac{V_{mk}}{3} = \frac{RT_k}{8 \cdot p_k}$$

$$V_{mk} = 3 \cdot b$$

$$T_k = \frac{8 \cdot a}{27 \cdot R \cdot b}$$

$$p_k = \frac{a}{27 \cdot b^2}$$

10 Wärmelehre

10.1 Wärme Q

Wärme ist Energie, welche stets (**von allein**) von höherer zu niedrigerer Temperatur fliesst

$$\Delta U = \frac{1 \cdot HS \ 100\%}{2 \cdot HS \ 100\%} \Delta W + \Delta Q$$

10.2 Erster Hauptsatz der Wärmelehre

Nicht nur durch Wärmezufuhr, sondern auch durch mechanische Arbeit lässt sich die Temperatur und damit die innere Energie U erhöhen

$$\Delta U = \Delta W + \Delta Q$$

ΔU	Zu-/Abgeführte Innere Energie	$[\Delta U] = \text{J}$
ΔW	Zu-/Abgeführte Arbeit	$[\Delta W] = \text{J}$
ΔQ	Zu-/Abgeführte Wärme	$[\Delta Q] = \text{J}$

10.2.1 Ansätze für 1. HS

$$\Delta Q = E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$\Delta Q = E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

$$\Delta \dot{Q} = \Delta P$$

10.2.2 Mechanische Arbeit eines Gases

Für mehr Details, siehe Abschnitt 8.4

$$\Delta W = p \cdot \Delta V$$

10.3 Mechanische Wärmeäquivalente

1 Kalorie = 4,1868 J (cal)

⇒ Energie, um 1 Gramm Wasser um 1 Grad zu erwärmen

1 kcal = 4186,8 J

⇒ Energie, um 1 Kilogramm Wasser um 1 Grad zu erwärmen

10.3.1 Elektrisches Wärmeäquivalent c

Elektrische Energie = Wärme

$$U \cdot I \cdot t = c \cdot m \cdot \Delta T \Leftrightarrow c = \frac{U \cdot I \cdot t}{m \cdot \Delta T}$$

c	Elektrisches Wärmeäquivalent	$[c] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$
U	Spannung	$[U] = \text{V}$
I	Strom	$[I] = \text{A}$
t	Zeit	$[t] = \text{s}$
m	Masse	$[m] = \text{kg}$
ΔT	Temperaturänderung	$[\Delta T] = \text{K}$

10.4 Wärmekapazität

Die Wärmekapazität drückt das Energiespeicher-Vermögen aus.

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T = n \cdot c_M \cdot \Delta T = C \cdot \Delta T$$

10.4.1 Absolute Wärmekapazität C

Energiespeicher-Vermögen eines Gegenstands

$$\Delta Q = C \cdot \Delta T \quad C \frac{\Delta T}{\Delta t} = \dot{Q}$$

10.4.2 Spezifische Wärmekapazität c

Energiespeicher-Vermögen einer Substanz

Substanz	c bei 20°C
Wasser	4182
Ethanol	2430
Glyzerin	2390
Quecksilber	139
Gold	129
Stahl	480

10.4.3 Molare Wärmekapazität c_M

Energiespeicher-Vermögen einer Anzahl Moleküle

$$c_M = \frac{c}{n} = M \cdot c$$

ΔQ	Zu-/Abgeführte Wärme	$[\Delta Q] = \text{J}$
c	spezifische Wärmekapazität	$[c] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$
c_M	molare Wärmekapazität	$[c_M] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
C	absolute Wärmekapazität	$[C] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$
m	Masse	$[m] = \text{kg}$
ΔT	Temperaturänderung	$[\Delta T] = \text{K}$
n	Mol-Zahl	$[n] = \text{mol}$
M	Mol-Masse	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$

10.4.4 Molare Wärmekapazität von Gasen

$$C_{mp} - C_{mV} = R$$

C_{mp}	isobare Wärme-Kapazität ($p = \text{const}$)	$[C_{mp}] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
C_{mV}	isochore Wärme-Kapazität ($V = \text{const}$)	$[C_{mV}] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
R	Universelle Gaskonstante $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

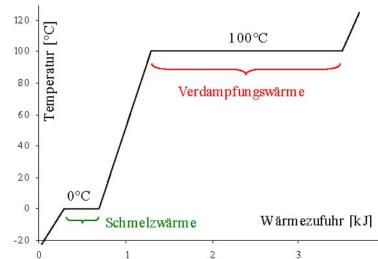
10.4.5 Molare Wärmekapazität von Festkörpern

$$T > \Theta_D : \quad C_m \approx 3R \approx 25 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \quad (\text{Dulong} - \text{Petit})$$

$$T \ll \Theta_D : \quad C_m = \frac{12 \cdot \pi^4}{5} \cdot R \cdot \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \quad (\text{Debye})$$

T	Absolut-Temperatur (in K)	$[T] = \text{K}$
Θ_D	Debye-Temperatur $\Theta_D \approx 200 \text{ K}$	$[\Theta_D] = \text{K}$
C_m	molare Wärmekapazität	$[C_m] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

10.5 Latente Wärme, Enthalpie (Schmelz-/ Verdampfungswärme)



Beim Schmelzen und Verdampfen findet **keine** Temperaturerhöhung statt
Beim Gefrieren und oder
Kondensieren wird diese
versteckte Wärme wieder frei, **ohne** Abnahme
der Temperatur

Die Schmelz-/ Verdampfungswärme ist stark druckabhängig

$$Q_f = q_f \cdot m \quad q_{fWasser} := 334 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$Q_s = q_s \cdot m \quad q_{sWasser} := 2256 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Q_f	Schmelz-/Erstarrungs-Wärme	$[Q_f] = \text{J}$
q_f	Spezifische Schmelzwärme	$[q_f] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$
Q_s	Verdampfungs-/Kondensations-Wärme	$[Q_s] = \text{J}$
q_s	Spezifische Verdampfungs-Wärme	$[q_s] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$

10.6 Wärmebilanz

Wärmeaustausch zwischen verschiedenen Materialien

In einem abgeschlossenen System (nach aussen isoliert) muss gelten:

Zugeführte Wärme = Abgeführte Wärme

$$\sum_{i=1}^n (\Delta Q_i + \Delta Q_{fi} + \Delta Q_{si}) = 0$$

ΔQ_i	i-te Wärme-Menge aus Temperatur-Zu-/Abnahme	$[\Delta Q_i] = \text{J}$
ΔQ_{fi}	i-te Wärme-Menge aus Schmelz-/Erstarrungs-Vorgang	$[\Delta Q_{fi}] = \text{J}$
ΔQ_{si}	i-te Wärme-Menge aus Verdampfungs-/Kondensations-Vorgang + zugeführte Wärme-Menge - abgeführt Wärme-Menge	$[\Delta Q_{si}] = \text{J}$

11 Phasen und Phasenübergänge

11.1 Phasen

- Fest**
feste Gestalt; festes Volumen
- Flüssig**
keine feste Gestalt; festes Volumen
- Gasförmig**
keine feste Gestalt; kein festes Volumen
- Plasma**
Bei sehr hoher Temperatur ist Materie ionisiert (Elektronengas)
- Mischung / Dispersion:**

	flüssig	gasförmig
fest	Suspension (Sol)	Aerosol (Rauch)
flüssig	Emulsion	Aerosol (Nebel)
gasförmig	Schaum	-

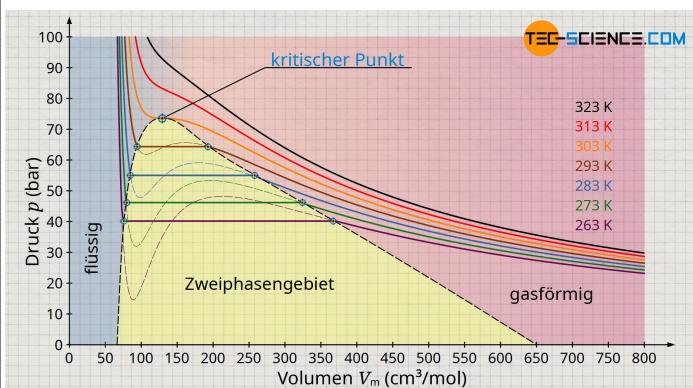
11.2 Dampfdruck $p_s(T)$

Der Dampfdruck bedeutet das Gleichgewicht der Flüssigkeit mit ihrer Dampfphase

Der Dampfdruck ist das Niveau des kontanten Drucks im 2-Phasengebiet eines realen Gases nach van der Waals.

Der Dampfdruck ist nur **temperaturabhängig**

Bei Kompression oder Expansion ändert sich der Dampfdruck nicht, sondern der Anteil Flüssigkeit zu Gas muss ändern



Verdunsten ⇒ Schnellste Teilchen treten aus Flüssigkeit aus

Sieden/Verdampfen Dampfdruck = Umgebungsdruck

11.3 Dampfdruck-Kurve (Clausius-Clapeyron)

Kondensieren ⇔ Verdampfen flüssig ⇔ gasförmig

$$\frac{dp_s}{dT} = \frac{q_s}{T \cdot \left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_f} \right)}$$

11.3.1 Dampfdruck $p_s(T)$ von Wasser (Clausius-Clapeyron)

$$p_s(T) = p_{s0} \cdot e^{\frac{q_s \cdot M_W}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)}$$

$$p_{s0} = 610.7 \text{ Pa} \quad T_0 = 273 \text{ K} \quad q_s = 2420 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \quad M_W = 18.02 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

11.4 Schmelzdruck-Kurve (Clausius-Clapeyron)

Erstarren ⇔ Schmelzen fest ⇔ flüssig

$$\frac{dp_f}{dT} = \frac{q_f}{T \cdot \left(\frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_s} \right)}$$

11.5 Gasdruck-Kurve (Clausius-Clapeyron)

Desublimieren \Leftrightarrow Sublimieren fest \Leftrightarrow gasförmig

$$\frac{dp_{sub}}{dT} = \frac{q_s + q_f}{T \cdot \left(\frac{1}{\rho_s} - \frac{1}{\rho_f} \right)}$$

q_s	spezifische Verdampfungs-Wärme	$[q_s] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$
q_f	spezifische Schmelz-Wärme	$[q_f] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$
$q_s + q_f$	spezifische Sublimations-Wärme	
p_s	Dampfdruck	$[p_s] = \text{Pa}$
p_f	Schmelzdruck	$[p_f] = \text{Pa}$
p_g	Schmelzdruck	$[p_g] = \text{Pa}$
ρ_g	Dichte Gas	$[\rho_g] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
ρ_f	Dichte Flüssigkeit	$[\rho_f] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
ρ_s	Dichte Festkörper	$[\rho_s] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
T	Temperatur	$[T] = \text{K}$
M	Molare Masse	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

11.6 Formeln von Magnus

Die Formeln von Magnus dienen der vereinfachten Berechnung des Dampfdrucks von Wasser = Sättigungsdruck

11.6.1 Dampfdruck von Wasser $p_s(\theta) (\theta \geq 0^\circ\text{C})$

$$p_s(\theta) = p_{s0} \cdot 10^{\frac{7.5 \cdot \theta}{\theta+237}}$$

11.6.2 Schmelzdruck von Wasser $p_s(\theta) (\theta \leq 0^\circ\text{C})$

$$p_s(\theta) = p_{s0} \cdot 10^{\frac{9.5 \cdot \theta}{\theta+265.5}}$$

11.6.3 WMO erweiterte Lösung $p_s(\theta) (-40^\circ\text{C} < \theta < 50^\circ\text{C})$

$$p_s(\theta) = p_{s0} \cdot e^{\left(\frac{17.62 \cdot \theta}{243.04 + \theta} \right)}$$

p_s	Dampfdruck / Schmelzdruck	$[p_s] = \text{Pa}$
p_{s0}	Dampfdruck bei 0°C	$p_{s0} = 610.7 \text{ Pa}$
θ	Temperatur	$[\theta] = {}^\circ\text{C}$

11.7 Umkehrformeln von Magnus

11.7.1 $\theta(p_s)$ für $p_s \geq p_{s0}$

$$\theta(p_s) = \frac{237 \cdot \log\left(\frac{p_s}{6107}\right)}{7.5 - \log\left(\frac{p_s}{6107}\right)}$$

11.7.2 $\theta(p_s)$ für $p_s \leq p_{s0}$

$$\theta(p_s) = \frac{265.5 \cdot \log\left(\frac{p_s}{p_{s0}}\right)}{9.5 - \log\left(\frac{p_s}{p_{s0}}\right)}$$

11.8 Luftfeuchtigkeit

11.8.1 Absolute Luftfeuchtigkeit f

$$f = \frac{m_w}{V}$$

11.8.2 Relative Luftfeuchtigkeit f_r

$$f_r = \frac{m_w}{m_s} = \frac{p_d}{p_s} = \frac{p_d}{p_s(\theta)}$$

f	Absolute Luftfeuchtigkeit	$[f] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
f_r	Relative Luftfeuchtigkeit	$[f_r] = 1$
m_w	Masse Wasserdampf	$[m_w] = \text{kg}$
m_s	Masse Wasserdampf bei Sättigung	$[m_s] = \text{kg}$
V	Volumen	$[V] = \text{m}^3$
p_d	Partialdruck Wasserdampf	$[p_d] = \text{Pa}$
p_s	Dampfdruck = Sättigungsdruck Wasserdampf	$[p_s] = \text{Pa}$
θ	Temperatur	$[\theta] = {}^\circ\text{C}$

11.8.3 Feuchte vs. trockene Luft

Feuchte Luft ist leichter als trockene Luft!

$$\rho_f = \rho_t + \frac{p_d}{RT} (M_w - M_L)$$

ρ_f	Dichte feuchte Luft	$[\rho_f] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
ρ_t	Dichte trockene Luft ($\frac{p_0 M_L}{RT}$)	$[\rho_t] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
p_d	Partialdruck Wasserdampf	$[p_d] = \text{Pa}$
T	Temperatur	$[T] = \text{K}$
M_w	Molmasse H_2O (18g/mol)	$[M_w] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
M_L	Molmasse Luft (28.949g/mol)	$[M_L] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

11.9 Taupunkts-Temperatur θ_d

Temperatur, bei welcher 100% Luftfeuchtigkeit herrscht.

Wenn die Taupunkt-Temperatur **unterschritten** wird, dann kondensiert Wasser.

$$\theta_d(\theta, f_r) = \frac{237 \cdot \left(\log(f_r) + \frac{7.5 \cdot \theta}{\theta + 237} \right)}{7.5 - \left(\log(f_r) + \frac{7.5 \cdot \theta}{\theta + 237} \right)}$$

$$\theta_d(x) = \frac{237 \cdot x}{7.5 - x} \quad \text{mit} \quad x(\theta, f_r) = \log(f_r) + \frac{7.5 \cdot \theta}{\theta + 237}$$

θ_d	Taupunkts-Temperatur	$[\theta_d] = {}^\circ\text{C}$
f_r	relative Luftfeuchtigkeit	$[f_r] = 1$
θ	Temperatur	$[\theta] = {}^\circ\text{C}$

11.10 Relative Innen-Feuchte f_{ri}

$$f_{ri} = \frac{p_s(\theta_a)}{p_s(\theta_i)} \cdot f_{ra}$$

f_{ri}	relative Feuchte im Inneren	$[f_{ri}] = 1$
f_{ra}	relative Feuchte der Außenluft	$[f_{ra}] = 1$
$p_s(\theta_i)$	Dampfdruck bei Innentemperatur	$[p_s(\theta_i)] = \text{Pa}$
$p_s(\theta_a)$	Dampfdruck bei Außentemperatur	$[p_s(\theta_a)] = \text{Pa}$

12 Kinetische Gas-Theorie

12.1 Aequipartitionsgesetz

Mittlere kinetische Energie

Idealisierte Annahmen:

1. Moleküle = Massenpunkte
2. Keine (bzw.) elastischen Zusammenstöße
3. Keine Kräfte zwischen den Molekülen
4. Elastischer Stoß gegen Wand
5. Alle Moleküle haben gleiche Geschwindigkeit
6. 1/6 aller Moleküle fliegen gegen eine einzelne Wand

$$\bar{E} = f \cdot \frac{k \cdot T}{2}$$

$f = 3$	1-atomiges Gas
$f = 5$	2-atomiges Gas
$f = 6$	3-atomiges Gas

$$\bar{E} = \text{Mittlere kinetische Energie} \quad [\bar{E}] = \text{J}$$

$$f = \text{Freiheitsgrade} \quad [f] = 1$$

$$k = \text{Boltzmann-Konstante} \quad k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad [k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$T = \text{Absolute Temperatur} \quad [T] = \text{K}$$

12.2 Geschwindigkeiten

12.2.1 Mittlere quadratische Geschwindigkeit u

$$u = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}}$$

12.2.2 Mittlere Geschwindigkeit \bar{v}

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 \cdot k \cdot T}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi M}}$$

12.2.3 Wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_0

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot T}{M}}$$

k	Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$	$[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$
T	absolute Temperatur	$[T] = \text{K}$
m	Masse des Teilchens	$[m] = \text{kg}$
M	Molmasse	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$

R Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ $[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

12.3 Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$f(m, T, v) = \sqrt{\frac{2 \cdot m^3}{\pi \cdot k^3 \cdot T^3}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k \cdot T}}$$

m	Masse des Teilchens	$[m] = \text{kg}$
k	Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$	$[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$
T	absolute Temperatur	$[T] = \text{K}$
v	Geschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

12.4 Mittlere freie Weglänge $\bar{\lambda}$

Gibt an, um welche Strecke sich ein Molekül im Mittel bis zum nächsten Zusammenstoß fortbewegen kann.

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n \cdot (\pi \cdot d^2)} \quad \text{mit Wirkungsquerschnitt } \sigma = \pi \cdot d^2$$

n	Molekül-Dichte	$[n] = \frac{1}{\text{m}^3}$
d	Molekül-Durchmesser	$[d] = \text{m}$

12.5 Dichtefunktion

Verteilungsfunktion der mittleren, freien Weglänge

$$f(x) = \frac{1}{\bar{\lambda}} \cdot e^{-\frac{x}{\bar{\lambda}}}$$

12.6 Transportvorgänge

12.6.1 Wärmeleitung

Transport von **kinetischer Energie** (als Wärme wahrgenommen)

$$j_Q = -\lambda_Q \cdot \frac{dT}{dx} \quad \lambda_Q = \frac{1}{6} \cdot n \cdot \bar{v} \cdot \bar{\lambda} \cdot f \cdot k$$

12.6.2 Diffusion

Transport von **Masse**

$$j_D = -D \cdot \frac{dn}{dx} \quad D = \frac{1}{3} \cdot \bar{v} \cdot \bar{\lambda}$$

12.6.3 Viskosität ($\nu \ll v_{therm}$)

Transport von **Impuls**

$$\tau = -\eta \cdot \frac{dv}{dx} \quad \eta = \frac{1}{3} \cdot \bar{v} \cdot \bar{\lambda} \cdot \rho$$

j_Q	Wärmestrom	$[j_Q] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
λ_Q	Wärmeleitfähigkeit	$[\lambda_Q] = \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$
j_D	Diffusionsstrom	$[j_D] = ?$
D	Diffusionskonstante	$[D] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
τ	Schubspannung	$[\tau] = \text{N}$
η	Viskosität	$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$
n	Molekül-Dichte	$[n] = \frac{1}{\text{m}^3}$
\bar{v}	Mittlere Geschwindigkeit	$[\bar{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$\bar{\lambda}$	Mittlere freie Weglänge	$[\bar{\lambda}] = \text{m}$
f	Anzahl Freiheitsgrade	$[f] = 1$
k	Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$	$[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$
T	absolute Temperatur	$[T] = \text{K}$
ρ	Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

13 Temperaturstrahlung

- Wärmestrahlung = Berührungslose Übertragung von Wärme
- In Form von elektromagnetischen Wellen ($\lambda @ \text{IR}$)
- Körper absorbiert elektromagn. Strahlung und erhöht seine Temperatur
Jeder Körper mit $T > 0 \text{ K}$ strahlt Wärme ab (Temp-strahlung)
- Für jede Wellenlänge muss ein Körper gleich viel Energie abstählen, wie er zuvor aufgenommen hat!

13.1 Strahlungs-Gesetze

13.1.1 Stefan-Boltzmann-Gesetz

- Ideal schwarzer Körper (Hohlraum) absorbiert alle Wellenlängen zu 100 %
- Je mehr ein Körper absorbiert, desto mehr muss er emmitten (Energie-Gleichgewicht)

Ein schwarzer Körper (=Hohlraumstrahler) der Temperatur T hat eine totale Abstrahlungsleistung pro Oberfläche K_S von:

$$K_S = \sigma \cdot T^4$$

$$K_S \quad \text{Schwarzkörper-Emission} \quad [K_S] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\sigma \quad \text{Stefan-Boltzmann-Konstante} \quad [\sigma] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$$

$$\sigma = 5.671 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$$

$$T \quad \text{Temperatur} \quad [T] = \text{K}$$

13.1.2 Wien'sches Verschiebungsgesetz

Verschiebung der maximalen Wellenlänge:

$$\lambda_{max} \cdot T = \text{const} = b$$

$$\lambda_{max} \quad \text{Wellenlängen-Maximum (Planck)} \quad [\lambda_{max}] = \text{m}$$

$$T \quad \text{Temperatur} \quad [T] = \text{K}$$

$$b \quad \text{Konstante: } b = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad [b] = \text{m} \cdot \text{K}$$

13.1.3 Planck'sches Gesetz der Quantenmechanik

Ein Oszillator, welcher auf ein anderes Energieniveau (=Elektronen-Kreisbahnen nach Bohr) wechselt, setzt die Energiedifferenz ΔE in ein Lichtquant (Photon) mit entsprechender Frequenz f um.

Je nach Vorzeichen von ΔE wird das Photon emmitten oder absorbiert .

$$\Delta E = h \cdot f$$

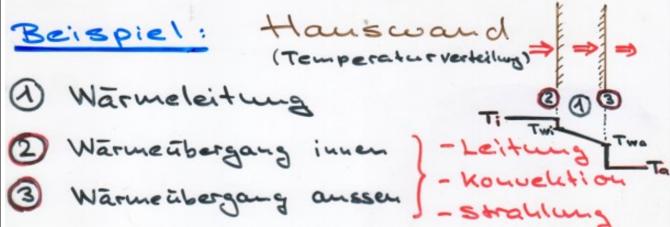
$$\Delta E \quad \text{spektrale Abstrahlung (Energie)} \quad [\Delta E] = \text{J}$$

$$h \quad \text{Planck'sches Wirkungsquantum} \quad [h] = \text{J} \cdot \text{s}$$

$$h = 6.628 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$f \quad \text{Frequenz des Photons} \quad [f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$$

13.2 Wärmetransport (an Beispiel Hauswand)



13.2.1 Wärmeleitung

$$j = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx}$$

$$j \quad \text{Wärmestromdichte} \quad [j] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\lambda \quad \text{Wärmeleitfähigkeit} \quad [\lambda] = \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$$

$$\frac{dT}{dx} \quad \text{Wärmeabnahme / Gradient} \quad \left[\frac{dT}{dx} \right] = \frac{\text{T}}{\text{m}}$$

13.2.2 Wärmeübergang

$$\text{innen: } j = \alpha_i \cdot (T_i - T_{wi}) \quad \text{mit } \alpha_i = 8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

$$\text{außen: } j = \alpha_a \cdot (T_{wa} - T_a) \quad \text{mit } \alpha_a = 20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

13.2.3 Wärmedurchgang

Material + Dicke zusammengefasst (Bereich von k beachten!!)

$$j = k \cdot (T_i - T_a) = k \cdot \Delta T \quad \text{mit } k = \frac{\lambda}{d}$$

j	Wärmestromdichte	$[j] = \frac{W}{m^2}$
λ	Wärmeleitfähigkeit	$[\lambda] = \frac{W}{m \cdot K}$
$\frac{dT}{dx}$	Wärmeabnahme / Gradient	$[\frac{dT}{dx}] = \frac{T}{m}$
α_i	Wärmeübergangszahl innen	$[\alpha_i] = \frac{W}{m^2 \cdot K}$
α_a	Wärmeübergangszahl aussen	$[\alpha_a] = \frac{W}{m^2 \cdot K}$
T_{wa}	Temperatur Wand aussen	$[T_{wa}] = K$
T_a	Aussentemperatur	$[T_a] = K$
T_{wi}	Temperatur Wand innen	$[T_{wi}] = K$
T_i	Innentemperatur	$[T_i] = K$
k	Wärmedurchgangszahl	$[k] = \frac{W}{m^2 \cdot K}$
d	Dicke der Wand	$[d] = m$

$$P = \dot{Q} = j \cdot A \quad \text{siehe auch 13.3}$$

13.2.4 Wärmedurchgang komplett

Der komplette Wärmedurchgang leitet sich her durch die **Erhaltung der Wärmestromdichte** j und errechnet sich mit:

$$\text{n Schichten : } \frac{1}{k_{tot}} = \frac{1}{\alpha_i} + \sum_x \frac{1}{k_x} + \frac{1}{\alpha_a}$$

$$\text{zylindrisch : } \frac{1}{k_{tot}} = r_a \left(\frac{1}{\alpha_i \cdot r_i} + \sum_x \frac{1}{\lambda_x} \cdot \ln \left(\frac{r_{xa}}{r_{xi}} \right) + \frac{1}{\alpha_a \cdot r_a} \right)$$

k_x	Wärmedurchgangszahl x-te Schicht	$[k_x] = \frac{W}{m^2 \cdot K}$
α_i	Wärmeübergangszahl innen	$[\alpha_i] = \frac{W}{m^2 \cdot K}$
α_a	Wärmeübergangszahl aussen	$[\alpha_a] = \frac{W}{m^2 \cdot K}$
r_i	Innenradius Rohr	$[r_i] = m$
r_a	Aussenradius Rohr	$[r_a] = m$
λ_x	Wärmeleitfähigkeit	$[\lambda] = \frac{W}{m \cdot K}$

13.3 Wärme-Bedarf (Heizleistung)

Der Wärme-Bedarf (=Heizleistung) setzt sich zusammen aus **Wärmeverlust durch Wärmeleitung** und **Wärmeverlust durch Luftaustausch**:

$$\underbrace{\dot{Q}_{\text{Wärmeverlust}}}_{\dot{Q}} = \underbrace{\dot{P}_{\text{Heizleistung}}}_{P}$$

$$P = \dot{Q}_{tot} = \dot{Q}_W + \dot{Q}_L$$

$$\dot{Q}_W = A \cdot j = A \cdot k \cdot \Delta T$$

$$\dot{Q}_L = c_L \cdot \rho_L \cdot \dot{V} \cdot \Delta T$$

$$\text{allgemein : } \dot{Q}_{tot} = \sum_{i=1}^n [(A_i \cdot k_i + c_L \cdot \rho_L \cdot \dot{V}) \cdot \Delta T]$$

\dot{Q}_{tot}	Totaler Wärmeverlust	$[\dot{Q}_{tot}] = \frac{J}{s} = W$
\dot{Q}_W	Wärmeleistung	$[\dot{Q}_W] = \frac{J}{s} = W$
\dot{Q}_L	Luftaustausch	$[\dot{Q}_L] = \frac{J}{s} = W$
k_i	Wärmedurchgangszahl i-te Schicht	$[k_i] = \frac{W}{m^2 \cdot K}$
\dot{V}	Volumenstrom ($\dot{V} = \frac{V}{t}$)	$[\dot{V}] = \frac{m^3}{s}$
ρ_L	Dichte der Luft: $\rho_L = 1.2 \frac{kg}{m^3}$	$[\rho_L] = \frac{kg}{m^3}$
c_L	Wärmekapazität Luft: $c_L = 1000 \frac{J}{kg \cdot K}$	$[c_L] = \frac{J}{kg \cdot K}$
A	Fläche der Wärmeleitung	$[A] = m^2$
ΔT	Temperaturdifferenz	$[\Delta T] = K$

13.4 Wärmeverlust durch Abstrahlung

Durch Strahlung kann auch Wärme übertragen werden.

$$j_{12} = c_{12} \cdot (T_1^4 - T_2^4) = \sigma \cdot \varepsilon \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

j_{12}	W-Transport durch Strahlungsaustausch	$[j_{12}] = \frac{W}{m^2}$
c_{12}	Strahlungsaustauschzahl	$[c_{12}] = \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$
σ	Stefan-Boltzmann-Konstante	$[\sigma] = \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$
$\sigma = 5.671 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$		
ε	Emissionsverhältnis	$[\varepsilon] = 1$

13.5 Zustandsänderungen

Erinnerung 1. Hauptsatz : $\Delta U = \Delta W + \Delta Q$

13.5.1 Isotherm

bei konstanter Temperatur

$$W_{ab} = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$$

$$\Delta Q_{zu} = W \quad (\Delta U = 0)$$

13.5.2 Isobar

bei konstantem Druck

$$W_{ab} = p \cdot (V_2 - V_1)$$

$$\Delta Q_{zu} = n \cdot C_{mp} \cdot \Delta T$$

13.5.3 Isochor

bei konstantem Volumen

$$W = 0$$

$$\Delta Q_{zu} = n \cdot C_{mv} \cdot \Delta T \quad (\Delta U = \Delta Q)$$

13.5.4 Adiabatisch

ohne Wärme-Austausch

$$W_{ab} = n \cdot C_{mv} \cdot \Delta T = c \cdot m \cdot \Delta T$$

$$\Delta Q = 0$$

14 Rückwandlung innerer Energie

14.1 Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre

Innere Energie kann **nicht zu 100 %** in Arbeit umgesetzt werden
⇒ Carnot-Wirkungsgrad ist der theoretisch höchstmögliche.

Wärme kann niemals von selbst von einem kälteren Ort zu einem wärmeren Ort fließen (Clausius)

Es gibt keine periodisch wirkende Maschine, die nichts anderes bewirkt als Erzeugung mechanischer Arbeit und Abkühlung eines Wärme-Reservoirs (Kelvin)
⇒ Es gibt kein Perpetuum mobile 2. Art

14.2 Kreisprozess (reversibler Prozess)

Anfangszustand = Endzustand

Rechtslaufender Kreisprozess

Linkslaufender Kreisprozess

- Gibt Arbeit ab
- **Wärmekraftmaschine**
- Bei hoher T wird Wärme aus Prozess **zugeführt**
- Nur Bruchteil der Wärme in Arbeit verwandelbar
- Obergrenze: Carnot-Wirkungsgrad
- Verbraucht Arbeit
- **Wärmepumpe**
- Bei hoher T wird dem Prozess Wärme **abgeführt**
- Erzeugt mehrfaches an Wärme
- Obergrenze: Inv. Carnot-Wirkungsgrad

14.3 Carnot-Wirkungsgrad

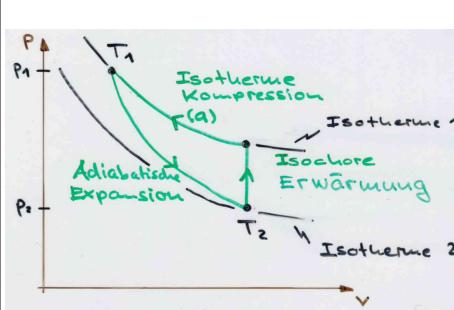
$$\text{Wärmekraftmaschine: } n_C = \frac{W_{ab}}{Q_{zu}} = \frac{T_{hoch} - T_{tief}}{T_{hoch}}$$

$$\text{Wärmepumpe: } n_{iC} = \frac{Q_{zu}}{W_{ab}} = \frac{T_{hoch}}{T_{hoch} - T_{tief}}$$

n_C	Carnot-Wirkungsgrad	$[n_C] = 1$
n_{iC}	Inverset Carnot-Wirkungsgrad	$[n_{iC}] = 1$
T_{tief}	Temperatur des Warm-Reservoirs	$[T_{tief}] = K$
T_{hoch}	Temperatur des Kalt-Reservoirs	$[T_{hoch}] = K$
Q_{zu}	zugeführte Wärme	$[Q_{zu}] = J$
W_{ab}	abgeführte Energie	$[W_{ab}] = J$

14.4 Adiabaten-Gleichung (Kreisprozess)

Adiabate wird beschrieben im pV- / TV- / Tp-Diagramm



$$p \cdot V^\kappa = \text{const}$$

$$T \cdot V^{1-\kappa} = \text{const}$$

$$T^\kappa \cdot p^{1-\kappa} = \text{const}$$

$$\kappa = \frac{C_{mp}}{C_{mv}}$$

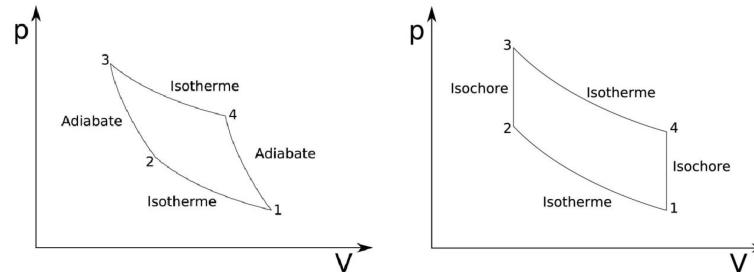
$$C_{mp} - C_{mv} = R$$

C_{mp}	Molare Wärmekapazität @ $p = \text{const}$	$[C_{mp}] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
C_{mV}	Molare Wärmekapazität @ $V = \text{const}$	$[C_{mV}] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
κ	Adiabaten-Exponent	$[\kappa] = 1$
R	Universelle Gaskonstante $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

14.5 Kreisprozesse (Vorgänge)

isotherme Expansion	liefert Wärme	benötigt Energie
isotherme Kompression	benötigt Wärme	liefert Energie
adiabatische Expansion	liefert Arbeit	ohne Wärme
adiabatische Kompression	benötigt Arbeit	ohne Wärme
isochore Erwärmung	ohne Arbeit	benötigt Wärme
isochore Abkühlung	ohne Arbeit	liefert Wärme

14.6 Beispiel Kreisprozess



14.7 Entropie-Zunahme

14.7.1 Definition der Entropie-Zunahme

$$\Delta S = S_1 + S_2 = \int \frac{1}{T} dQ$$

14.7.2 Boltzmann-Gleichung für Entropie-Zunahme

$$\Delta S = k \cdot \ln(W)$$

ΔS	Entropie	$[\Delta S] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$
k	Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$	$[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$
W	Wahrscheinlichkeit eines Zustands	$[W] = 1$

14.7.3 Abgeschlossenes System

- $\Delta S \geq 0$ Entropie kann nur zunehmen in abgeschl. System
 $\Delta S > 0$ Irreversibler Prozess
 $\Delta S = 0$ Reversibler Prozess

15 Molmassen wichtiger Atome

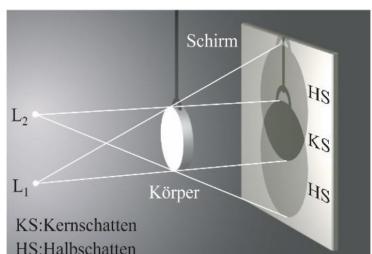
Symbol	Molekül	Molmasse
H	Wasserstoff	$1.008 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$
C	Kohlenstoff	$12.011 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$
N	Stickstoff	$14.007 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$
O	Sauerstoff	$15.999 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$
Al	Aluminium	$26.982 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$
Si	Silicium	$28.982 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$

16 Optik

16.1 Licht

Licht kann auf mehrere Arten beschrieben werden:

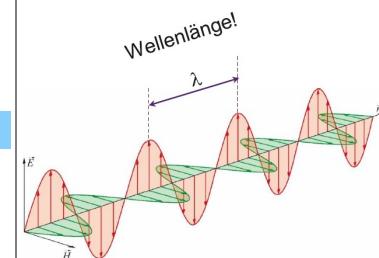
16.1.1 Lichtstrahlen



Die **geometrische Optik** oder **Strahlenoptik** geht davon aus, dass sich das Licht im Vakuum als **geradliniger Strahl** ausbreitet.

Mit der geometrischen Optik können die Phänomene Reflexion und Brechung erklärt werden.

16.1.2 Lichtwellen



Licht wird als elektromagnetische Welle modelliert.

Bild: linear polarisierte Welle

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta \lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$$

Lichtfarben und ihre Frequenzen / Wellenlängen

Farbe	Wellenlänge in nm
violett	380 ... 435
blau	435 ... 465
blaugrün	465 ... 485
grün	485 ... 565
gelb	565 ... 590
orange	590 ... 630
rot	630 ... 780

$$\lambda \text{ Wellenlänge}$$

$$[A] = \text{m}$$

$$c \text{ Lichtgeschw. } c = 299'792'458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$[c] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$f \text{ Frequenz}$$

$$[f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$$

16.1.3 Lichtteilchen

Modellvorstellung des Lichts als ein Fluss von Lichtteilchen (**Photonen**)

$$E = h \cdot f$$

$$E \text{ Energie eines Photons}$$

$$[E] = \text{J}$$

$$h \text{ Planck'sche Konstante } 6.626 \cdot 10^{-34} \frac{\text{J}}{\text{Hz}}$$

$$[h] = \frac{\text{J}}{\text{Hz}}$$

$$f \text{ Frequenz}$$

$$[f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$$

16.2 Lichtquellen

16.2.1 Thermische Strahler

Schwarzkörper-Modell: Modell eines Körpers, der in alle Richtungen abstrahlt (und energetisch im Gleichgewicht ist)

Ein Schwarzkörper strahlt **alle** Lichtfarben ab. (auch die für den Mensch nicht sichtbaren.)

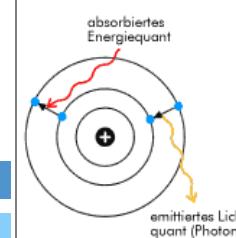
Glühbirnen

Muss auf allen Wellenlängen angeregt werden, um schliesslich sichtbares Licht abzustrahlen.
 ⇒ Es wird viel Energie nicht nutzbar verheizt

LEDs

Können mit einer bestimmten Frequenz angeregt werden und strahlen nur gewünschtes Licht ab.
 ⇒ energieeffizient

16.2.2 Lumineszenz



Elektronen werden angeregt und steigen in energetisch höheren Zustand.

Sobald die Elektronen wieder in ihren Grundzustand zurückkehren wird ein Lichtquant (Photon) abgestrahlt.

Die Leuchtfarbe wird durch die Frequenz der Anregung bestimmt.

Fluoreszenz: kein Nachleuchten

Phosphoreszenz: mit Nachleuchten

16.3 Messgrößen

16.3.1 Radiometrie

Physikalische Messgrößen der elektromagnetischen Strahlung

16.3.2 Photometrie

Radiometrische Größen, gewichtet mit dem photometrischen Strahlungsäquivalent K , welches die **Empfindlichkeit des menschlichen Auges** angibt.

Photometrischen Strahlungsäquivalent K

Gibt die Empfindlichkeit des menschlichen Auges wieder und ist eine empirisch genormte Kurve

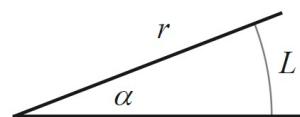
⇒ Das menschliche Auge ist bei einer Wellenlänge von 555 nm (grüne Farbe) am empfindlichsten. (638 $\frac{\text{lm}}{\text{W}}$)

16.4 Gegenüberstellung

Radiometrie			Photometrie		
Einheit	Symbol	Grösse	Grösse	Symbol	Einheit
W	Φ_e	Strahlungsfluss (Radiant flux)	Lichtstrom (Luminous flux)	$\Phi_v = \int K(\lambda) \frac{d\Phi_e}{d\lambda} d\lambda$	lumen, lm
$W \text{ sr}^{-1}$	$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega}$	Strahlstärke (Radiant intensity)	Lichtstärke (Luminous intensity)	$I_v = \frac{d\Phi_v}{d\Omega}$	$\text{cd} = \text{lm sr}^{-1}$
$W \text{ m}^{-2}$	$E_e = \frac{d\Phi_e}{dA}$	Bestrahlungsstärke (Irradiance)	Beleuchtungsstärke (Illuminance)	$E_v = \frac{d\Phi_v}{dA}$	$\text{lx} = \text{lm m}^{-2}$

16.5 Raumwinkel

16.5.1 Winkel in der Ebene (Radian)

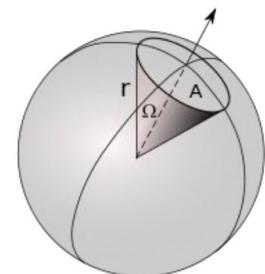


Länge des Bogens auf einem Kreis mit $r = 1 \text{ m}$

$$\alpha = \frac{L}{r}$$

Vollkreis: 2π $[\alpha] = \text{rad}$

16.5.2 Winkel im Raum (Steradian)

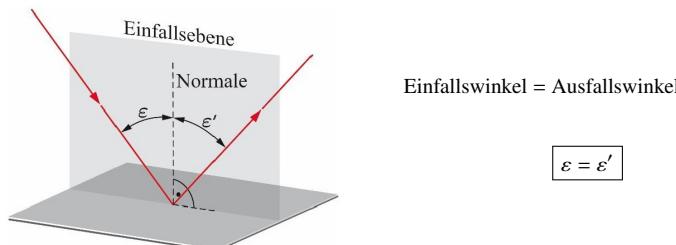


Aufgespannte Fläche, projiziert auf eine Kugel mit $r = 1 \text{ m}$

$$\Omega = \frac{A}{r^2} = \frac{A}{1\text{m}^2}$$

Kugel: 4π $[\Omega] = \text{sr}$

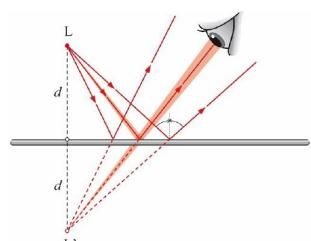
16.6 Reflexionsgesetz



Einfallswinkel = Ausfallwinkel

$$e = e'$$

16.6.1 Grenzflächen von Reflexionen

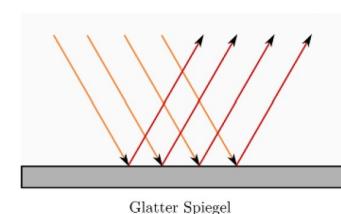


L reelles Bild

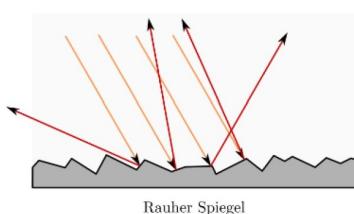
Bild, welches auf Schirm abgebildet werden kann

L' virtuelles Bild (Spiegelbild von L)

Bild, welches nicht auf Schirm abgebildet werden kann



Glatter Spiegel
Direkte Reflexion



Rauer Spiegel
Diffuse Reflexion

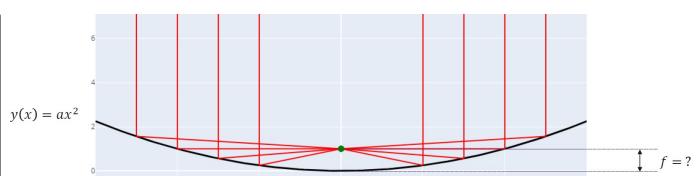
16.7 Reflexionen - Spezialfälle

Brennpunkt F Brennpunkt (Fokus) ist der Punkt, in dem parallel zur optischen Achse auf einen Spiegel oder eine Linse einfallende Stahlen sich schneiden

Brennweite f Abstand des Brennpunktes von der Linse bzw. dem Spiegel

16.7.1 Parabolspiegel

Parallel einfallende Strahlen werden in einem Punkt fokussiert

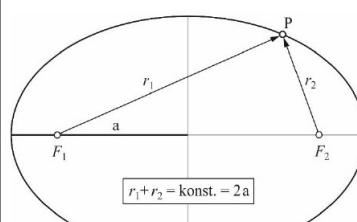


$$y(x) = ax^2$$

$$f = \frac{1}{4a}$$

16.7.2 Elliptischer Spiegel

Konzentration von Energie in einem nicht zugänglichen Punkt

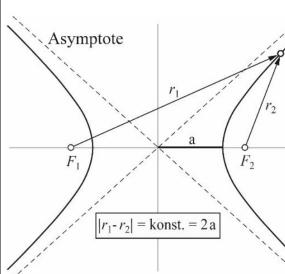


$$r_1 + r_2 = \text{konst.} = 2a$$

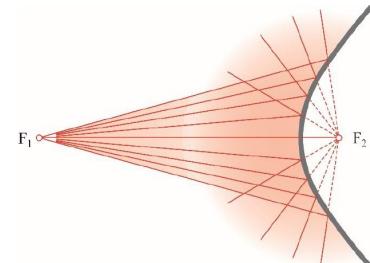
$$y(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

16.7.3 Hyperbolischer Spiegel

Objekt in Spiegel versetzen



$$|r_1 - r_2| = \text{konst.} = 2a$$

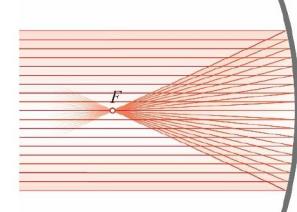
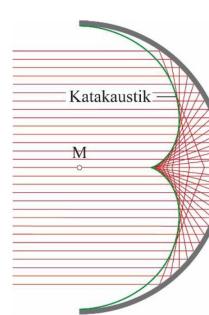


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

16.7.4 Sphärische Spiegel

Paralell einfallende Stahlen werden nicht mehr in einem Punkt fokussiert (Katakustik)

Da die achsnahen Stahlen nach der Reflexion annähernd durch einen Punkt gehen, wird dieser Punkt wieder Brennpunkt F genannt.



$$f = \frac{r}{2}$$

f Brennweite
 r Krümmungsradius des Spiegels

$$[f] = \text{m}$$

$$[r] = \text{m}$$

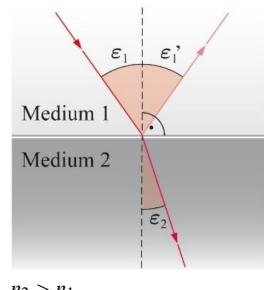
16.8 Brechung

Fällt ein Lichtstrahl auf die Grenzfläche zweier Medien, so dringt ein Teil des einfallenden Lichtes in das zweite Medium ein.

Die auftretende Richtungsänderung wird als **Brechung** bezeichnet.

Der in das zweite Medium eindringende Strahl wird **gebrochener Strahl** genannt.

16.8.1 Brechungsgesetz / Geschwindigkeit



$$\frac{\sin(\varepsilon_1)}{\sin(\varepsilon_2)} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$v_i = \frac{c}{n_i}$$

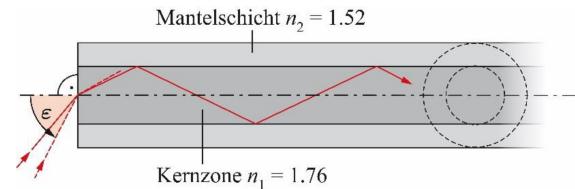
Je grösser n , desto grösser die Ablenkung und desto kleiner ε

$$n_2 > n_1$$

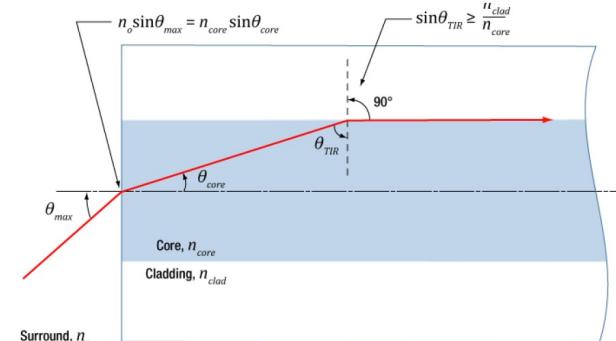
ε_i	Winkel zur Normalen	$[\varepsilon_i] = {}^\circ$
n_i	Brechungsindex	$[n_i] = 1$
v_i	Geschwindigkeit im Medium n_i	$[v_i] = \frac{m}{s}$
c	Lichtgeschwindigkeit $c = 300 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$	$[c] = \frac{m}{s}$

16.8.2 Anwendung: Glasfaser

Der Lichtstrahl bleibt in der Kernzone (Medium 1) gefangen, da diese einen grösseren Brechungsindex hat als die Mantelschicht (Medium 2)



Extremfall (Numerical Aperture NA = $n \sin \theta_{max}$):



$$n_0 \sin \theta_{max} = \sqrt{n_{core}^2 - n_{clad}^2}$$

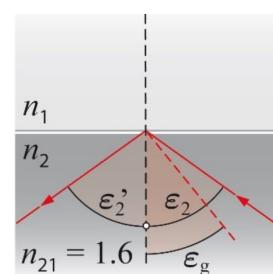
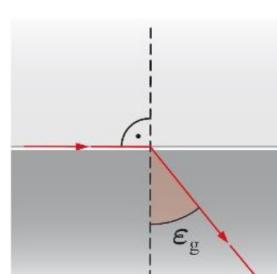
16.8.3 Totalreflexion

Der Einfallswinkel ε_1 kann nicht grösser als 90° sein.

Für $\varepsilon_1 = 90^\circ$ berechnet sich $\varepsilon_2 = \varepsilon_g$ aus:

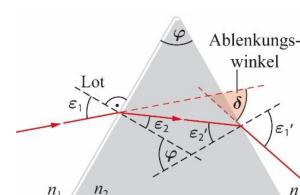
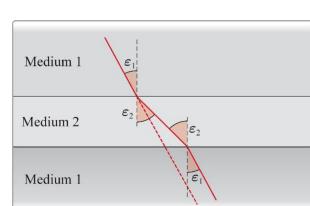
$$\varepsilon_g = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$$

Für den Grenzfall von $\varepsilon_1 > 90^\circ$ wird der gesamte Stahl reflektiert.



16.8.4 Brechung an ebenen Grenzflächen

Ein Lichtstrahl wird verschoben bzw. in eine beliebige Richtung geändert

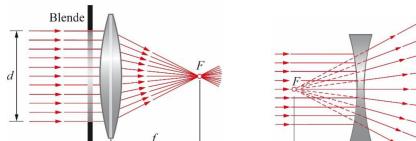


$$n = \frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{\sin \frac{\varphi+\delta}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

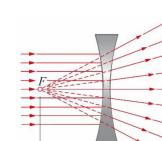
16.8.5 Brechung an gekrümmten Flächen

DIE Anwendung der Brechung ist eine Linse.

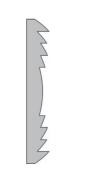
16.8.6 Linsentypen



Sammellinse



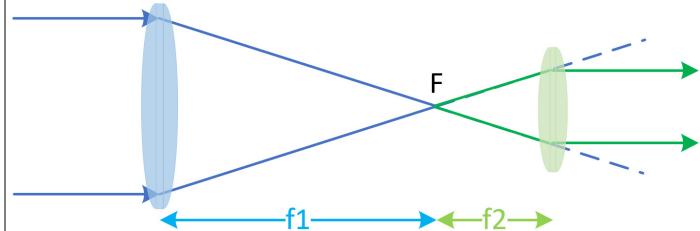
Zerstreuungslinse



Fresnellinse

Fresnellinse: Es kann vermieden werden, dass die Linse eine übermässige Dicke aufweist.

16.8.7 Beispiel mit zwei Linsen



Rechts gibt es ein kleineres Bild als links.

16.8.8 Typische Brechungswerte

Material	Brechungsindex n für $\lambda = 589 \text{ nm}$
Luft (Normalbed.)	1.000'292
Helium (Normalbed.)	1.000'034'911
Wasser (20°C)	1.33
Glycerin	1.47
Quarzglas	1.54
Plexiglas	1.51
Kronglas	1.52
Brillenglas (Kunststoff)	bis 1.76
Diamant	2.42

16.9 Dispersion

Der **Brechungsindex** eines Mediums ist eine **Funktion** der Wellenlänge: $n = n(\lambda)$

Diese Wellenlängenabhängigkeit wird als **Dispersion** bezeichnet

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{A}{\lambda_0^2 - \lambda^2}$$

$$n^2(f) = 1 + \frac{A'}{f_0^2 - f^2}$$

16.9.1 Abbe Zahl V

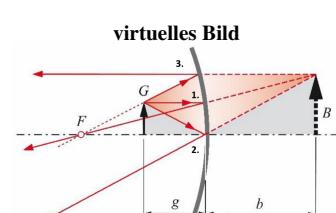
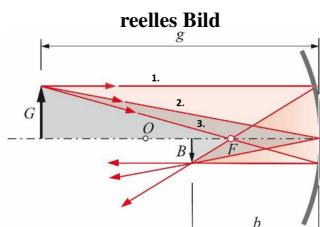
Gibt an, wie stark dispersiv ein Material ist
Große Abbe-Zahl → wenig dispersives Material

16.10 Abbildungen

16.10.1 Konstruktions-Anweisung

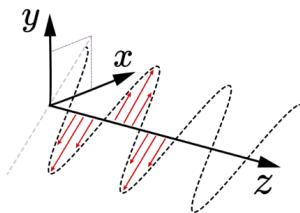
Man benutzt zwei der drei Hauptstrahlen:

1. Paralleler Strahl → Brennpunkt
2. Mittelpunkt-Strahl → mit gleichem Winkel zurück
3. Brennpunkt-Strahl → Paralleler Strahl



B wird als **reeller Bildpunkt** bezeichnet, wenn sich die austretenden Strahlen schneiden.

B wird als **virtueller Bildpunkt** bezeichnet, wenn sich nur die Verlängerungen der austretenden Strahlen schneiden.

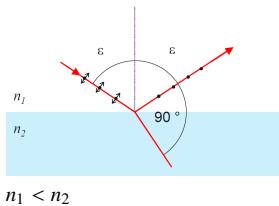


$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

\vec{E} kann zu $\vec{0}$ werden

16.16.2 Brewster Winkel

Unter dem **Brewster Winkel** wird nur **linear polarisiertes Licht** zurückgeworfen.
Der ins Medium 2 eindringende Strahl steht dabei **senkrecht** auf dem reflektierten Strahl

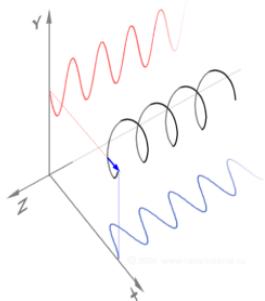


$$\tan(\epsilon) = \frac{n_2}{n_1}$$

16.16.3 Zirkulare Polarisation

x und y Komponenten haben die **gleiche Amplitude** und eine **Phasendifferenz von 90°**

Positive zirkulare Polarisation σ^+
Negative zirkulare Polarisation σ^-



$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(2\pi ft - kz) \\ E_0 \sin(2\pi ft - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

\vec{E} kann nicht zu $\vec{0}$ werden

16.16.4 Elliptische Polarisation

x und y Komponenten haben **unterschiedliche Amplituden** und eine **beliebige Phasendifferenz**.

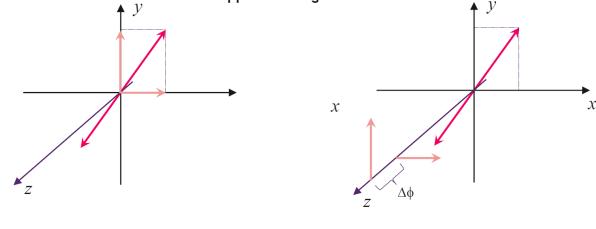
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(2\pi ft - kz) \\ E_0 \cos(2\pi ft - kz + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

16.16.5 Doppelbrechung

Doppelbrechung ist eine anisotropische Eigenschaft von Kristallen
Diese Kristalle haben unterschiedliche Brechungsindizes in unterschiedliche Richtungen

Nach einer gewissen Zeit t haben die x- und y-Komponente einen Phasenunterschied.
 \Rightarrow x und y bewegen sich unterschiedlich schnell fort

Polarisation in einem Kristall mit Doppelbrechung



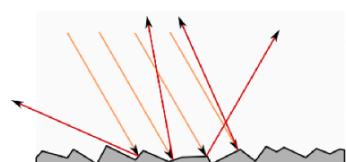
t_0 Lineare Polarisation

t_1 Elliptische Polarisation

16.17 Streuung

16.17.1 Diffuse Streuung

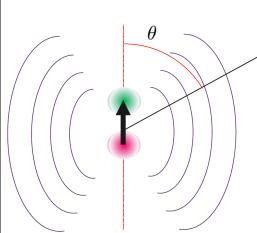
Streuung des Lichts an Teilchen von Dimensionen $d \gg \lambda$



- Licht als **Strahlen**
- Reflexion in alle Richtungen
- Keine bevorzugte Richtung, unabhängig von λ
- Beispiele:
 - Wolken, Nebel
 - milchige Lösungen

16.17.2 Rayleigh-Streuung

Streuung des Lichts an Teilchen von Dimensionen $d < \lambda$
(atomare Grösse)



$$I(\theta) = A f^4 \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

\Rightarrow hochfrequentes Licht wird viel stärker abgestrahlt!

- Licht als **Wellen** senkrecht zur Ausbreitungsrichtung
- Abstrahlmuster eines Dipols
- Himmel tagsüber blau
- Himmel abends rötlich

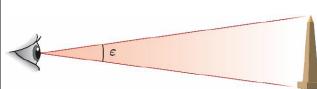
16.18 Abbildungssysteme - Auge

Brechzahl Augenlinse: 1.3

Tiefe: ~25mm

16.18.1 Terminologie des Auges

Sehwinkel ϵ



Die Grösse, in der ein Gegenstand dem betrachtenden Auge erscheint (**in Bogenminuten**)

$$1^\circ \Leftrightarrow 60'$$

Auflösung

Minimaler Winkelabstand ϵ_{min} , den zwei Punkte haben müssen, damit sie noch getrennt wahrgenommen werden.

Normalsichtiges Auge: Auflösung ca. 1 Bogenminute (1')

Sehschärfe

Reziproker Wert der Auflösung

$$S = \frac{1}{\epsilon_{min}} \quad \text{beim Menschen also } S = 1$$

Deutliche Sehweite s (normierte Betrachtungsdistanz)

Damit die Vergrösserungen von Lupen und Mikroskopen eindeutig bestimmt werden können, wird eine **deutliche Sehweite** definiert:

$$s = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m}$$

16.18.2 Kurzsichtigkeit vs. Weitsichtigkeit

Kurzsichtigkeit

- Augapfel zu lang
- Konkave Streulinse als Korrektur
- Brille rückt Gegenstand näher heran

Weitsichtigkeit

- Augapfel zu kurz
- Konvexe Sammellinse als Korrektur
- Brille rückt Gegenstand weiter weg

16.19 Abbildungssysteme - Fotoapparat

Bildgrösse $B[m]$

Die Bildweite b ist normalerweise viel kleiner als die Gegenstandsweite g und daraus folgt:

$$B = \frac{f}{g} G$$

Lichtstärke $H[\frac{W}{m^2}]$

Die Intensität des Lichts auf dem Film ist gegeben durch

$$H = \left(\frac{d}{f}\right)^2 = q^2$$

Blendenzahl Z

z.B.: 1, 1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, ...

$$Z = \frac{1}{q} = \frac{1}{\sqrt{H}}$$

Belichtung E , Belichtungszeit t

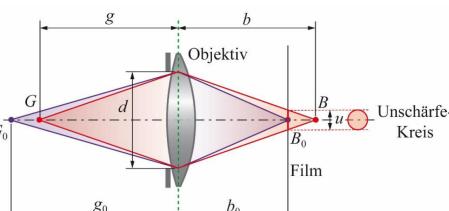
$$E = H t \approx q^2 t$$

$$t = \frac{G}{v} = \frac{g}{f} \frac{B}{v}$$

Schärfentiefe

In der Filmebene ergibt sich vom Punkt G kein scharfer Bildpunkt, sondern ein **Unschärfekreis** mit dem Durchmesser u .

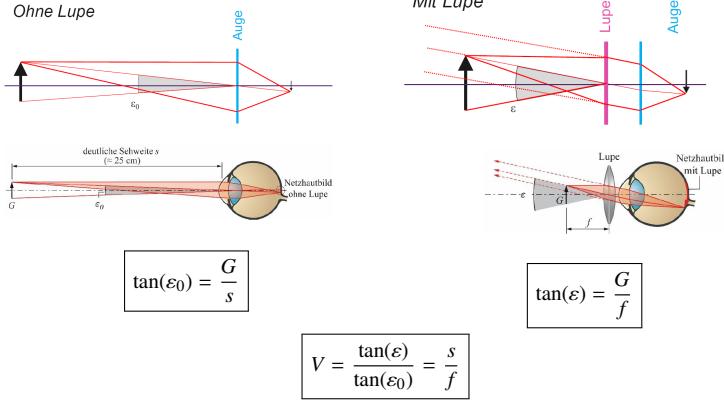
Es wird folgende Gegenstandsweite g in den Unschärfekreis abgebildet:



$$\frac{1}{g} = \frac{1}{g_0} \pm \frac{u}{q f^2}$$

b	Bildweite	$[b] = m$
b_0	Bilddistanz	$[b_0] = m$
B	Bildgrösse	$[B] = m$
B_0	Bildgrösse	$[B_0] = m$
g	Gegenstandsweite (G zu Objektiv)	$[g] = m$
g_0	Gegenstandsdistanz (G_0 zu Objektiv)	$[g_0] = m$
G	Gegenstandsgröße	$[G] = m$
G_0	Gegenstandsgröße	$[G_0] = m$
f	Brennweite	$[f] = m$
u	Durchmesser Unschärfekreis	$[d] = m$
d	Durchmesser Blendenöffnung	$[d] = m$
v	Geschw. des zu fotograf. Objekts	$[v] = \frac{m}{s}$

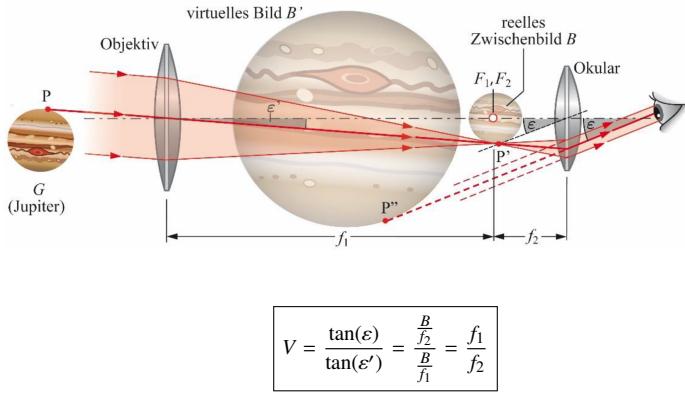
16.20 Abbildungssysteme - Lupe



ϵ_i	Schinkel	$[\epsilon_i] = {}^\circ$
s	Deutsche Schenke $s = 0.25 \text{ m}$	$[s] = \text{m}$
f	Brennweite	$[f] = \text{m}$
V	Vergrößerung	$[V] = 1$

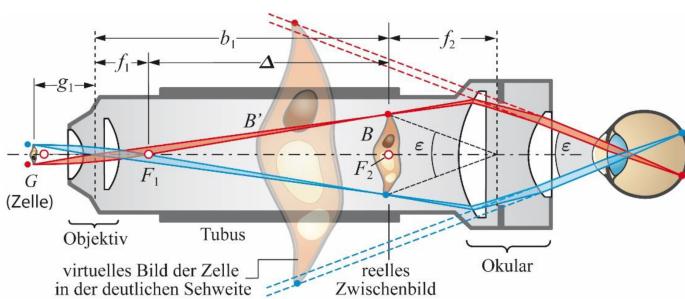
16.21 Abbildungssysteme - Fernrohr

Es wird zuerst ein vergrößertes Bild erzeugt, welches selber wiederum mit einer Lupe betrachtet wird.



16.22 Abbildungssysteme - Mikroskop

Es wird zuerst ein vergrößertes Bild erzeugt, welches selber wiederum mit einer Lupe betrachtet wird.



$$V = \frac{\Delta \cdot s}{f_1 \cdot f_2} = \frac{\tan(\epsilon)}{\tan(\epsilon_0)} = \frac{B}{B'} = \frac{B}{\frac{G}{s}} = \frac{B}{G} \cdot \frac{s}{f_2} = \frac{b_1}{g_1} \cdot \frac{s}{f_2}$$

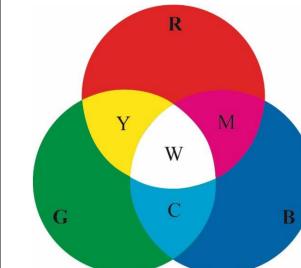
ϵ_i	Schinkel	$[\epsilon_i] = {}^\circ$
s	Deutsche Schenke $s = 0.25 \text{ m}$	$[s] = \text{m}$
f_i	Brennweite	$[f_i] = \text{m}$
V	Vergrößerung	$[V] = 1$
Δ	optische Tubuslänge (Abstand der Brennpunkte)	$[\Delta] = \text{m}$
b_1	Bildweite	$[b_1] = \text{m}$
g_1	Gegenstandsweite	$[g_1] = \text{m}$
B	Bildgrösse	$[B] = \text{m}$
G	Gegenstandsgröße	$[G] = \text{m}$

16.23 Farbentheorie

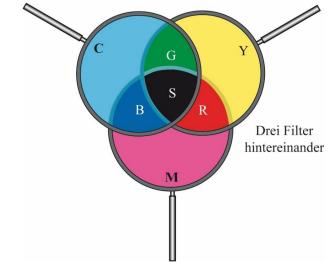
Spektralfarben:	Die gesamten Lichtfarben
Mischfarben:	Mischung von versch. Spektralfarben
Grundfarben:	Ein Set, um alle Mischfarben zu erzeugen
Komplementärfarben:	Mischfarbe, die bleibt, wenn von weissem Licht eine Farbe ausgeblendet wird
Monochromatisches Licht:	Nur eine einzige Wellenlänge (Farbe)

16.23.1 Farbmischungen

Additive Farbmischung



Subtraktive Farbmischung



17 Schwingungen

Freie Schwingung

Wird ein schwingungsfähiges System aus dem Gleichgewichtszustand gebracht und dann sich selbst überlassen, so führt es *freie Schwingungen* oder *Eigenschwingungen* aus.

Erzwungene Schwingung

Wird ein System von aussen durch periodische oder auch nichtperiodische Störungen zum Schwingen veranlasst, wird von *fremderregten Schwingungen* gesprochen.

Selbsterregte Schwingung

Ein schwingungsfähiges System kann unter Umständen einer Energiequelle Energie entziehen und diese der eigenen Schwingung selbst zuführen, so dass die Schwingung trotz einer eventuell vorhandenen Dämpfung nicht abklingt.

17.1 Freie Schwingungen

17.1.1 Terminologie

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{y}(t) = v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{y}(t) = a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$y(t)$	Position zum Zeitpunkt t	$[y(t)] = \text{m}$
$\dot{y}(t)$	Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t	$[\dot{y}(t)] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$\ddot{y}(t)$	Beschleunigung zum Zeitpunkt t	$[\ddot{y}(t)] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
A	Amplitude	$[A] = \text{m}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
φ	Phase	$[\varphi] = \text{rad}$
T	Periodendauer	$[T] = \text{s}$
f	Frequenz	$[f] = \frac{1}{\text{s}}$

17.2 Beispiel - Federpendel

$$F_{res} = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$

$$F_{Feder} = -k \cdot x$$

Kräftegleichgewicht: $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$

$$\text{DGL: } \ddot{x} = -\omega^2 \cdot x \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Allgemeine Lösung: $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

m	Masse	$[m] = \text{m}$
$k = c$	Federkonstante	$[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$

17.2.1 Harmonische Schwingung - Energiebetrachtung

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

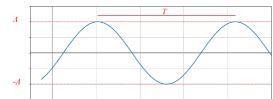
$$\dot{x}(t) = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} E_{tot} &= E_{pot} + E_{kin} = \frac{k \cdot x^2}{2} + \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} \\ &= \frac{k}{2} A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{m}{2} \omega^2 A^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{kA^2}{2} (\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)) \end{aligned}$$

$$E_{tot} = \frac{k \cdot A^2}{2}$$

17.3 Beschreibung einer 1D-Schwingung

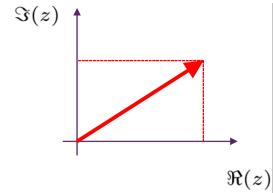
17.3.1 Zeitbreich



Auslenkung in Abhängigkeit der Zeit
Beispiel: Oszilloskop

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

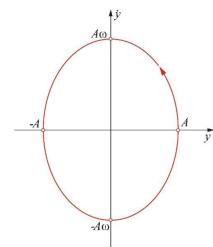
17.3.2 Zeigerdarstellung



Auslenkung als Zeiger (komplexe Zahl), der um den Ursprung rotiert

$$z(t) = \underbrace{x(t)}_{\Re(z)} + i \underbrace{y(t)}_{\Im(z)}$$

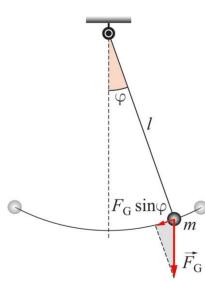
17.3.3 Phasenraum



Darstellung der Position y und der Ableitung (Geschwindigkeit)

17.4 Pendel

17.4.1 Fadenpendel



$$F_R = F_G \cdot \sin(\varphi) = m \cdot g \cdot \sin(\varphi) \approx m \cdot g \cdot \varphi$$

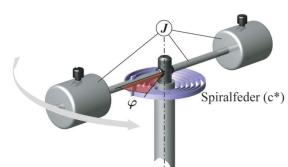
$$x = \varphi \cdot l \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{x}{l}$$

$$\Rightarrow F_G = m \cdot g \cdot \frac{x}{l}$$

$$\text{Kräftegleichgewicht: } F = m \cdot \ddot{x} = -m \cdot g \cdot \frac{x}{l}$$

$$\text{DGL: } \ddot{x} = -\omega^2 \cdot x \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{g}{l}$$

17.4.2 Drehpendel



Analogie ohne Rotation:

$$F = -k \cdot x \quad F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$

$$M = -c^* \varphi \quad M = J \cdot \ddot{\varphi}$$

$$\text{Gleichgewicht: } J \cdot \ddot{\varphi} = -c^* \varphi$$

$$\text{DGL: } \ddot{\varphi} = -\omega^2 \cdot \varphi \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{c^*}{J}$$

φ folgt der gleichen DGL wie x im Fall des Federpendels

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega t + \delta)$$

$$J \quad \text{Trägheitsmoment} \quad [J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$c^* \quad \text{Winkelrichtgrösse} \quad [c^*] = \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$$

17.4.3 Torsionspendel

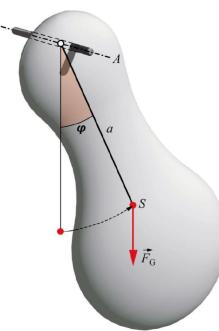


Variante des Drehpendels mit der Winkelrichtgrösse

$$c^* = \frac{\pi r^4 G}{2l}$$

$$\begin{array}{ll} G & \text{Torsionsmodul} \\ l & \text{Länge} \\ r = \frac{d}{2} & \text{Radius} \end{array}$$

17.4.4 Physikalisches Pendel



$$M = -a \cdot \sin(\varphi) \cdot F_G = -a \cdot m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$$

Bewegungsgleichung: $M = J_A \cdot \ddot{\varphi}$

Gleichgewicht: $-a \cdot m \cdot g \cdot \sin(\varphi) = J_A \cdot \ddot{\varphi}$

Kleine Winkel: $-a \cdot m \cdot g \cdot \varphi = J_A \cdot \ddot{\varphi}$

$$\text{DGL: } \ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{g}{L^*} = \frac{g \cdot a \cdot m}{J_A}$$

$$L^* = \frac{J_A}{a \cdot m}$$

$$J_A = J_s + m \cdot a^2$$

φ folgt der gleichen DGL wie x im Fall des Federpendels

Auch gültig für mehrere Massen:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{A1} + J_{A2}}{(a_1 \cdot m_1 + a_2 \cdot m_2) \cdot g}}$$

⇒ J-Tabelle im Anhang Abschnitt 3.15.2

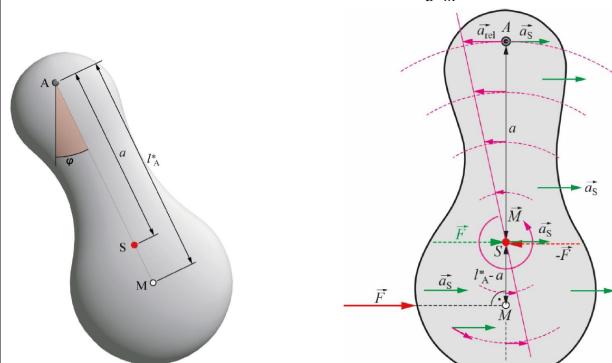
S	Schwerpunkt des Körpers
J_s	Trägheitsmoment bzgl. S
a	Abstand Schwerpunkt - Drehpunkt
L^*	Reduzierte Länge
J_A	Trägheitsmoment um Aufhängepunkt
T	Schwingungsdauer

$[J_S] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$
 $[a] = \text{m}$
 $[L^*] = \text{m}$
 $[J_A] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$
 $[T] = \text{s}$

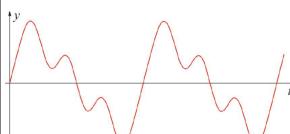
17.5 Perkussionszentrum

Frage: Wie weit vom Drehpunkt A muss ein Impuls auf einen Körper ausgeübt werden, damit keine Kraft auf die Achse ausgeübt wird?

Antwort: Auf Höhe der reduzierten Länge $L^* = \frac{J_A}{a \cdot m}$



17.6 Periodische Schwingung



Muster wiederholt sich

$$f(t) = f(t - T)$$

Periodische Schwingungen können im **Frequenzbereich** in eine **Grundschwingung** und **Oberschwingungen** (**Harmonische**) zerlegt werden.

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n \cdot \omega + \varphi_n)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{Grundschwingung}$$

$$\omega_n = n \cdot \omega_0 \quad \text{n-te Harmonische}$$

17.6.1 Fourier-Analyse

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt$$

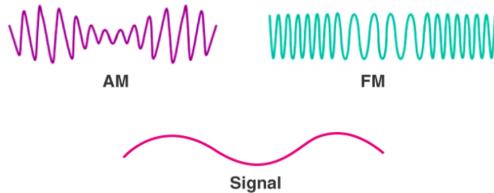
$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt$$

17.7 Signalmodulationen

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Amplitudenmodulation (AM) Veränderung von A
Frequenzmodulation (FM) Veränderung von ω

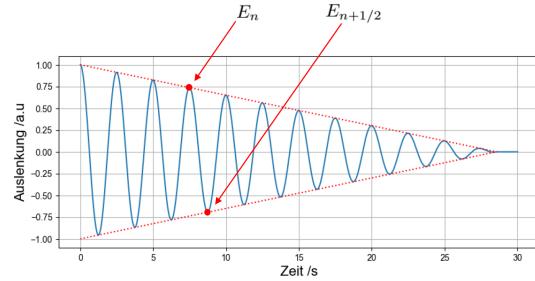


17.8 Gedämpfte Schwingungen

17.8.1 Gedämpfte Schwingung - Konstante Reibungskraft

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \mu F_N \quad \text{für } \ddot{x}(t) > 0$$

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) + \mu F_N \quad \text{für } \ddot{x}(t) < 0$$



$$\Delta A = 4 \frac{F_R}{k}$$

E	Energie bei max. Auslenkung	$[E] = \text{J}$
$k = c$	Federkonstante	$[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$
A	Amplitude bei max. Auslankung	$[A] = \text{m}$
ΔA	Amplitudenänderung pro Periode	$[\Delta A] = \text{m}$
F_R	Reibungskraft	$[F_R] = \text{N}$

17.8.2 Gedämpfte Schwingungen - Dämpfung prop. zur Geschw.

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad D = \frac{\delta}{\omega}, \quad f = \frac{\Omega}{2\pi}$$

1. Fall:	$\delta^2 - \omega^2 > 0, D > 1$	$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$	Aperiod. Schwingung
2. Fall:	$\delta^2 - \omega^2 < 0, D < 1$	$x(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\Omega t + \varphi)$	Period. Schwingung
3. Fall:	$\delta^2 - \omega^2 = 0, D = 1$	$x(t) = (A + Bt)e^{-\delta t}$	Grenzfall ($\lambda = -\delta$)

$$\lambda_{1,2} = -\omega(D \pm \sqrt{D^2 - 1})$$

$$z \cdot \Lambda = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+z}}\right) = z \cdot \delta T$$

$$\Omega^2 = \omega^2 - \delta^2$$

$\frac{\kappa}{2} = \delta$	Abklingkonstante	$[\kappa/\delta] = \frac{1}{\text{s}}$
ω	Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
D	Dämpfungsgrad	$[D] = \frac{1}{\text{s}}$
Ω	Kreisfrequenz gedämpfte Schwingung	$[\Omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
Λ	Logarithmisches Dekrement	$[\Lambda] = \frac{1}{\text{s}}$
A_n	Amplitude zum Zeitpunkt t	$[A_n] = \text{m}$
A_{n+z}	Amplitude zum Zeitpunkt $t + z \cdot T$	$[A_{n+z}] = \text{m}$
z	Anzahl verstrichene Schwingungen	$[z] = 1$
T	Periodendauer	$[T] = \text{s}$
f	Frequenz der gedämpften Schwingung	$[f] = \text{Hz}$

17.9 Fremderregte Schwingung

17.9.1 Definition

Erzwungene Schwingungen sind Schwingungen, die durch eine periodische Störung verursacht werden. (EN: *driven oscillation*)

17.9.2 Übersicht über Hilfsgrößen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \delta = \frac{\kappa}{2} = \frac{b}{2m}, \quad D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2\omega_0}$$

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \Omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - (\frac{\kappa}{2})^2} = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$$

ω_0	Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung	$[\omega_0] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
Ω_d	Kreisfrequenz gedämpfte Eigenfrequenz	$[\Omega_d] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
ω_r	Resonanzkreisfrequenz	$[\omega_r] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
ω	Kreisfrequenz der Störung (Erreger)	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\frac{\kappa}{2} = \delta$	Abklingkonstante	$[\kappa] = \frac{1}{\text{s}}$
D	Dämpfungsgrad	$[D] = 1$
η	Dimensionslose Frequenz	$[\eta] = 1$
$k = c$	Federkonstante	$[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$

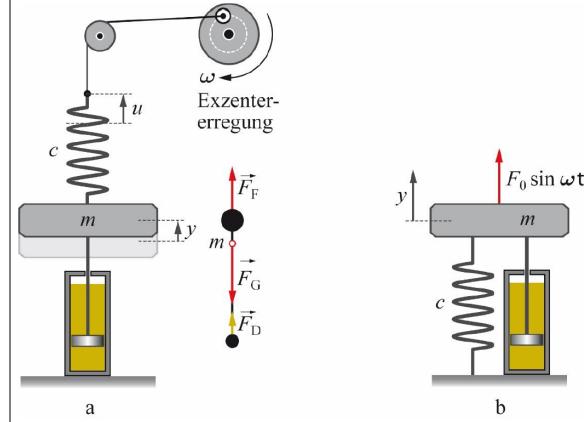
17.9.3 Resonanz

Die Amplitude A wird maximal, wenn der Nenner von $A(\omega)$ minimal wird
Resonanzkreisfrequenz:

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$$

$$A_r = \frac{u_0}{2D\sqrt{1-D^2}}$$

17.10 Fremderregte Schwingungen - Krafterregung



$$\text{DGL: } m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = F_0 \sin(\omega t)$$

$$y(t) = \underbrace{A(\omega) \sin(\omega t - \varphi)}_{y_p(t)} + \underbrace{B e^{-\delta t} \sin(\Omega_d t + \varphi_0)}_{y_h(t)}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

$A(\omega)$ Amplituderverlauf $[A(\omega)] = \text{m}$
 φ Phasenverschiebung $[\varphi] = \text{rad}$

17.10.1 Vergrößerungsfunktion / Phasenverschiebung

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right)$$

$$V_r = \frac{1}{\sqrt{1-\eta_r^4}} \quad \text{mit } \eta_r = \sqrt{1-2D^2}$$

φ Phasenverschiebung $[\varphi] = \text{rad}$

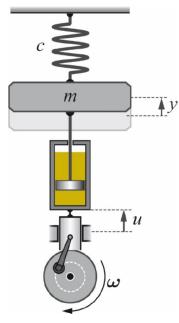
V Vergrößerungsfunktion $[V] = 1$

V_r Vergrößerungsfunktion bei Resonanz $[V_r] = 1$

η Dimensionslose Frequenz $[\eta] = 1$

D Dämpfungsgrad $[D] = 1$

17.11 Fremderregte Schwingungen - Dämpfererregung



$$\text{DGL: } m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = b\omega u_0 \cos(\omega t)$$

$$A(\omega) = \frac{b\omega u_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

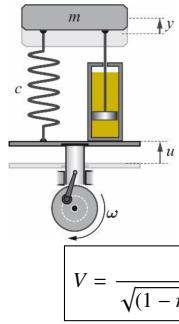
$$V = \frac{2D\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right) - \frac{\pi}{2}$$

$A(\omega)$	Amplitude der Schwingung	$[A(\omega)] = \text{m}$
φ	Phasenverschiebung	$[\varphi] = \text{rad}$
V	Vergrößerungsfunktion	$[V] = 1$
η	Dimensionslose Frequenz	$[\eta] = 1$
D	Dämpfungsgrad	$[D] = 1$

17.12 Fremderregte Schwingungen - Stützenerregung

$$\text{DGL: } m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = -m\omega^2 u_0 \sin(\omega t) \quad \text{mit } q = y - u$$



$$A(\omega) = \frac{\omega^2 u_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

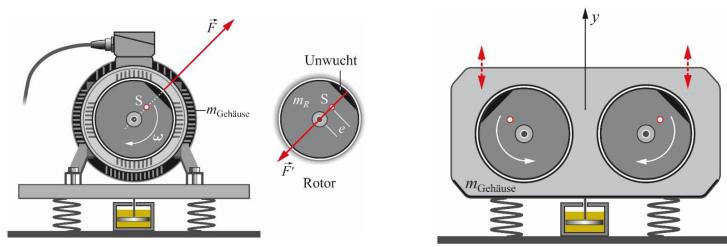
$$V = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right) - \pi$$

φ	Phasenverschiebung	$[\varphi] = \text{rad}$
V	Vergrößerungsfunktion	$[V] = 1$
η	Dimensionslose Frequenz	$[\eta] = 1$
D	Dämpfungsgrad	$[D] = 1$
ω_0	Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung	$[\omega_0] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
ω	Kreisfrequenz der Störung (Erreger)	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$A(\omega)$	Amplitude der Schwingung	$[A(\omega)] = \text{m}$

17.13 Fremderregte Schwingung - Unwuchterregung

Unwucht: Schwerpunkt S des Rotors der Masse m_R bewegt sich auf einem Kreis mit Radius e



$$\text{DGL in } y\text{-Richtung: } m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = -m_R\omega^2 e \sin(\omega t)$$

Radiale Beschleunigung des Schwerpunkts des Rotors: $a_R = \omega^2 e$

Kraft des Rotors auf die Maschine: $F_U = m_R \cdot a_R = m_R \cdot \omega^2 e$

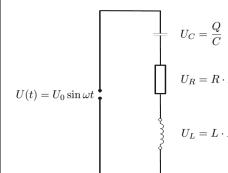
$$A(\omega) = \frac{m_R}{m} \frac{e\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}} \quad A_R = \frac{m_R}{m} \frac{e}{2D\sqrt{1-D^2}}$$

17.13.1 Kraft auf die Basis des Gehäuses

$$F_B = cy + b\dot{y} = F_{B0} \sin(\omega t - \varphi + \psi), \quad \varphi = \psi - \pi \quad F_{B0} = \frac{m_R e \omega^2 \sqrt{1 + (2D\eta)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

m_R	Masse des Rotors	$[m_R] = \text{kg}$
a_R	Radiale Beschleunigung Schwerpunkt	$[a_R] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
e	Abstand Mittelpunkt - Schwerpunkt	$[e] = \text{m}$
φ	Phasenverschiebung	$[\varphi] = \text{rad}$
η	Dimensionslose Frequenz	$[\eta] = 1$
D	Dämpfungsgrad	$[D] = 1$
$A(\omega)$	Amplitude	$[A(\omega)] = \text{m}$
A_R	Resonanzamplitude	$[A_R] = \text{m}$

17.14 Fremderregte Schwingung - Schwingkreis



$$\text{DGL: } L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \omega U_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$\text{DGL: } m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = b\omega u_0 \cos(\omega t), A(\omega) = \frac{b\omega u_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

$$I(\omega) = \frac{\omega}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}} U_0, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, D = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$V = \frac{U_{L0}}{U_0} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right) - \pi$$

17.14.1 Resonanz

Resonanzfrequenz

Amplitude @ Resonanz

$$\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$I_{0r} = \frac{U_0}{R}$$

$$\omega_0 \quad \text{Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung} \quad [\omega_0] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega \quad \text{Kreisfrequenz der Störung (Erreger)} \quad [\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_r \quad \text{Resonanzfrequenz} \quad [\omega_r] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\varphi \quad \text{Phasenverschiebung} \quad [\varphi] = \text{rad}$$

$$I_{0r} \quad \text{Strom-Amplitude @ Resonanz} \quad [I_{0r}] = \text{A}$$

$$U_0 \quad \text{Amplitude der Erregerspannung} \quad [U_0] = \text{V}$$

$$U_{L0} \quad \text{Amplitude Spulenspannung} \quad [U_{L0}] = \text{V}$$

$$A(\omega) \quad \text{Amplitude der Schwingung} \quad [A(\omega)] = \text{m}$$

$$V \quad \text{Vergrößerungsfunktion} \quad [V] = 1$$

$$\eta \quad \text{Dimensionslose Frequenz} \quad [\eta] = 1$$

$$D \quad \text{Dämpfungsgrad} \quad [D] = 1$$

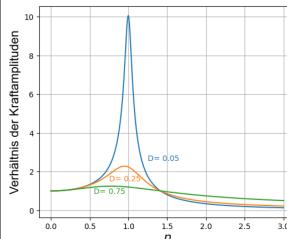
17.15 Fremderregte Schwingung - Güte Q

17.15.1 Definition

Die relative Abnahme der Schwingungsenergie $E(t)$ pro Schwingdauer wird als **Güte** oder **Gütefaktor** bezeichnet

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}$$

17.15.2 Beziehungen



$$Q = \frac{1}{2D}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

$$\text{Breite der Resonanzkurve bei } U_0 = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

breite Kurve \Rightarrow tiefe Güte

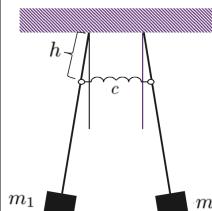
17.16 Gekoppelte Pendel

Zwei Pendel sind durch eine Feder miteinander verbunden.
Die Bewegung eines Pendels hat Auswirkungen auf die Bewegung des anderen Pendels.

Gesucht ist eine Beschreibung der Bewegung des Pendels.

$$J_1\ddot{\varphi}_1 = -m_1 g a_1 \varphi_1 + c \cdot h^2 (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$J_2\ddot{\varphi}_2 = -m_2 g a_2 \varphi_2 - c \cdot h^2 (\varphi_2 - \varphi_1)$$



$$\ddot{\varphi}_1 = -\omega^2 \varphi_1 + k(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -\omega^2 \varphi_2 - k(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\text{mit } \omega^2 = \frac{mga}{J} \quad k = \frac{c \cdot h^2}{J} \quad \omega_k = \sqrt{\omega^2 + 2k}$$

$$\text{mit } \Phi_+ = \varphi_1 + \varphi_2 \quad \Phi_- = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\text{Symm: } \ddot{\Phi}_+ = -\omega^2 \Phi_+ \quad \varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \frac{\Phi_0}{2} \cos \omega t$$

$$\text{Antisymm: } \ddot{\Phi}_- = -(\omega^2 + 2k)\Phi_- \quad \varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \frac{\Phi_0}{2} \cos \omega_k t$$

Allgemeine Lösung des gekoppelten Systems:

Lineare Kombination der symmetrischen und asymmetrischen Lösung

$$\varphi_1(t) = \Phi \sin(\Omega t) \cdot \sin(\bar{\omega} t) \quad \Omega = \frac{\omega_k - \omega}{2}$$

$$\varphi_2(t) = \Phi \cos(\Omega t) \cdot \cos(\bar{\omega} t) \quad \bar{\omega} = \frac{\omega + \omega_k}{2}$$

k	Kopplungsfaktor	$[k] = 1$
h	Abstand zur Aufhängung	$[h] = \text{m}$
J	Massenträgheitsmoment	$[J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$
c	Federkonstante	$[c] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$

18 Wellen

18.1 Definition

Eine Welle ist eine **Störung eines Gleichgewichtszustandes**, die sich **im Raum ausbreitet**.

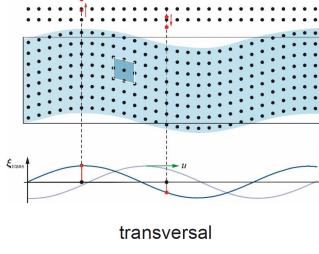
18.1.1 Bemerkungen zur Definition

- Voraussetzung für die **Ausbreitung** einer Welle ist die **Kopplung** benachbarter Teilchen.
- Eine Welle transportiert Energie (keine Materie)**
- Die Störung kann von ganz unterschiedlicher Natur sein:
 - Druck in Luft
 - Auslenkung einer Position entlang einem Seil (Saite)
 - Elektrische Signale

Die Störung wird mit ξ beschrieben: $\xi = \xi(x, y, z, t)$

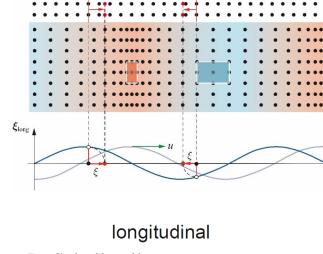
18.2 Klassifizierung von Wellen

Welle breite sich **senkrecht** zur Störung aus



z.B. Lichtwellen

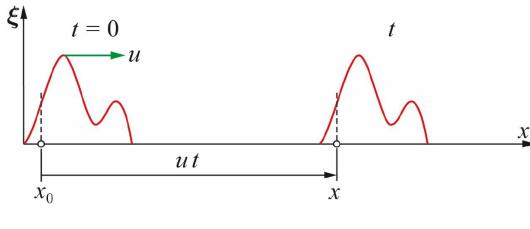
Welle breite sich **parallel** zur Störung aus



z.B. Schallwellen

18.3 Wellengeschwindigkeit / Phasengeschwindigkeit u

Die Störung an der Position x_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ breite sich mit der Geschwindigkeit u aus und erreicht nach einer Zeit t die Position x



$$\xi(x, t) = \xi(x - ut, 0) = f(x - ut)$$

In einem Medium mit **größerer Dichte** breiten sich Wellen **schneller** aus! \Rightarrow Bessere Kopplung der Moleküle

Man schaut bei der Beschreibung der Fortbewegung auf den Ort. Die Verschiebung des Ortes wird mit der Zeit hineingebracht

18.3.1 Verschiedene Wellengeschwindigkeiten

Schallwellen in Fluiden:

$$u = \sqrt{\frac{1}{\rho \kappa}}$$

Schallwellen in Gasen:

$$u = \sqrt{\frac{\chi p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\chi R T}{M}}$$

Elastische Longitudinalwellen in einem schlanken Stab

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Elastische Transversalwellen

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Transversalwellen auf einem Seil oder einer Saite

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

Elektromagnetische Wellen (transversal) (z.B. Lichtwellen)

$$u = \frac{c}{n}$$

u	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
A	Querschnittsfläche	$[A] = \text{m}^2$
E	Elastizitätsmodul	$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$
F	Spannkraft des Seils / der Saite	$[F] = \text{N}$
G	Schubmodul	$[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$
M	Molmasse	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
p	Druck	$[p] = \text{Pa}$
R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
T	Absolut-Temperatur (in K)	$[T] = \text{K}$
κ	Kompressibilität	$[\kappa] = \frac{1}{\text{Pa}}$
α	Adiabatenexponent	$[\alpha] = 1$
ρ	Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
n	Brechungsindex	$[n] = 1$
c	Lichtgeschwindigkeit: $c = 300 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$[c] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

18.4 Wellengleichungen

Die Wellengleichungen stellen eine **Verbindung zwischen Zeit und Ort** her

Eindimensional
Welle breite sich in 1D aus

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Zweidimensional
Welle breite sich in 2D aus

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Dreidimensional
Welle breite sich in 3D aus

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

18.4.1 Wichtige Lösung der Wellengleichung (1D)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Ansatz: $\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \sin(\omega t - k x)$

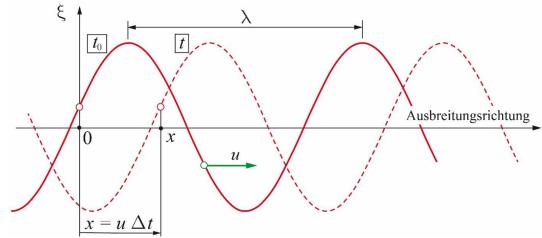
$$\underbrace{-k^2 A \sin(\omega t - k x)}_{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}} = -\frac{1}{u^2} \cdot \underbrace{\omega^2 A \sin(\omega t - k x)}_{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

$$\text{mit Lösung } u^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

18.5 Harmonische Wellen

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \sin(\omega t - k x + \varphi)$$

18.5.1 Terminologie



ξ_0	Amplitude	$[\xi_0]$
ω	Kreisfrequenz	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
T	Periodendauer	$[T] = \text{s}$
k	Wellenzahl	$[k] = \frac{1}{\text{m}}$
λ	Wellenlänge	$\lambda = \text{m}$
u	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
φ	Phasenverschiebung	$[\varphi] = \text{rad}$

18.5.2 Zusammenhänge

Grösse →	k	ω	f	u	T	λ
ausgedrückt mit ↓						
k		$k \cdot u$	$\frac{ku}{2\pi}$	$\frac{\omega}{k}$	$\frac{2\pi}{k \cdot u}$	$\frac{2\pi}{k}$
ω	$\frac{\omega}{u}$		$\frac{\omega}{2\pi}$	$\frac{\omega}{k}$	$\frac{2\pi}{\omega}$	$\frac{2\pi u}{\omega}$
f	$\frac{2\pi f}{u}$	$2\pi f$		$\frac{2\pi f}{k}$	$\frac{1}{f}$	$\frac{u}{f}$
u	$\frac{\omega}{u}$	ku	$\frac{u}{\lambda}$		$\frac{\lambda}{u}$	$\frac{u}{f}$
T	$\frac{2\pi}{u \cdot T}$	$\frac{2\pi}{T}$	$\frac{1}{T}$	$\frac{2\pi}{k \cdot T}$		$u \cdot T$
λ	$\frac{2\pi}{\lambda}$	$\frac{2\pi}{\lambda} u$	$\frac{u}{\lambda}$	$\frac{\lambda}{T}$	$\frac{\lambda}{u}$	

18.6 Wellenflächen / Wellenfronten

Die Gesamtheit aller Punkte, die zu einer bestimmten Zeit im gleichen Schwingungszustand sind, bilden eine Fläche im Raum. Diese **Flächen mit gleicher Phase** werden als **Wellenflächen** oder **Wellenfronten** genannt.

Eine Welle kann sich in 3 Dimensionen ausbreiten und dabei **verschiedene Wellenflächen** zeigen.

18.7 Wellenausbreitung

Wellengleichung (3D)

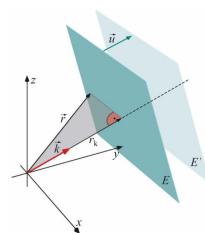
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\xi = \xi_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Lösungsansatz

mit Wellenvektor $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$ und Ortsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$

18.7.1 Ebene Wellen

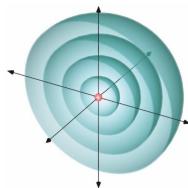


- Wellenfronten sind Ebenen im Raum
 - Wellenvektor \vec{k} steht senkrecht auf den Ebenen
 - Abstand zw. zwei Wellenfronten ist λ
- Die Ebenen bewegen sich mit der Wellengeschwindigkeit

$$u = \frac{\omega}{k} \text{ mit } k = \|\vec{k}\| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

in die **Richtung**, die durch den **Wellenvektor \vec{k}** gegeben ist.

18.7.2 Kugelwellen



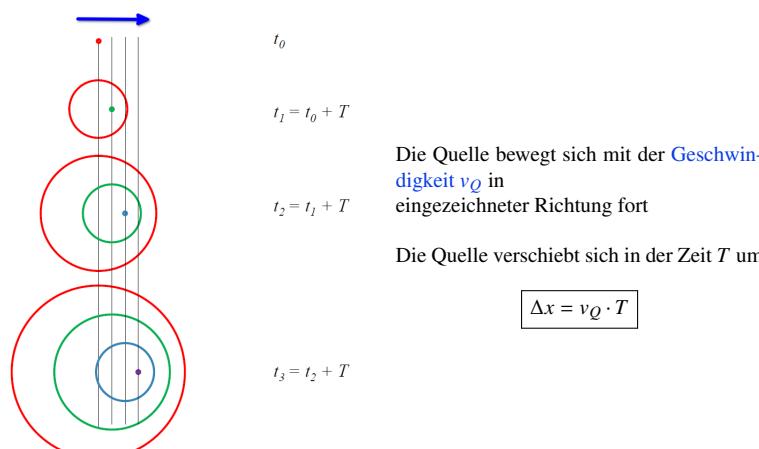
- Wellenfronten sind Kugeln
- Wellenvektor \vec{k} steht senkrecht auf Wellenfronten
- Wellenfronten bewegen sich mit der Wellengeschwindigkeit vom Zentrum weg
- Amplitude nimmt mit $\frac{1}{r}$ ab

Für eine **punktförmige Quelle** und **keine Winkelabhängigkeit** gilt:

$$\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{2}{r} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2}$$

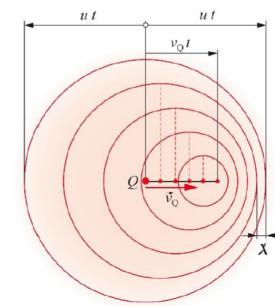
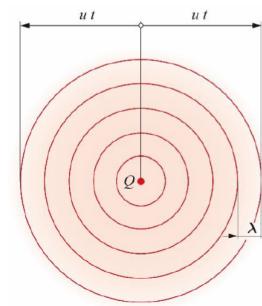
$$\text{mit Lösungsansatz } \xi(t, r) = \frac{1}{r} \xi_0 e^{j(\omega t - kr)}$$

18.8 Bewegte Quellen

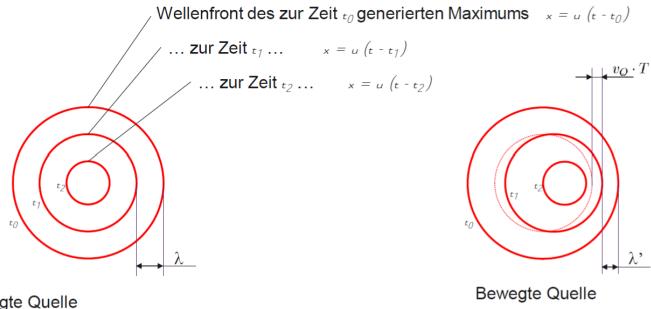


18.8.1 Doppler Effekt

Die **Veränderung der Wellenlänge λ** der von einer **bewegten Quelle** ausgesandten Wellen ist als **Doppler Effekt** bekannt.



18.8.2 Bewegte Quelle vs. unbewegte Quelle



18.9 Frequenzverschiebung durch Bewegung

Die Quelle sendet eine Frequenz f aus. Durch die Bewegung der Quelle ändert sich die Wellenlänge λ und somit ergibt sich eine neue Frequenz f' , welche ein statischer Beobachter wahrnimmt.

Falls v nicht parallel zur Beobachtungsrichtung ist, siehe 18.11

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda - v_{Q\parallel} \cdot T \\ \lambda' &= \lambda - v_{Q\parallel} \frac{\lambda}{u} \\ \lambda' &= \lambda \left(1 - \frac{v_{Q\parallel}}{u} \right) \\ f' &= \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda \left(1 - \frac{v_{Q\parallel}}{u} \right)} = \frac{f}{\left(1 - \frac{v_{Q\parallel}}{u} \right)} \end{aligned}$$

18.10 Bewegte Quelle oder bewegter Beobachter

Bewegte Quelle:

$$f' = \frac{1}{\left(1 \mp \frac{v_{Q\parallel}}{u} \right)} f$$

Bewegter Beobachter:

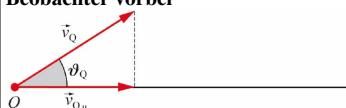
$$f' = \left(1 \pm \frac{v_{B\parallel}}{u} \right) f$$

- + Quelle bewegt sich weg / Beobachter bewegt sich hin
- Quelle bewegt sich hin / Beobachter bewegt sich weg

λ	Wellenlänge der aussendeten Welle	$[\lambda] = \text{m}$
λ'	Wellenlänge der wahrgenommenen Welle	$[\lambda'] = \text{m}$
$v_{Q\parallel}$	Geschwindigkeit der bewegten Quelle	$[v_{Q\parallel}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$v_{B\parallel}$	Geschwindigkeit des bewegten Beobachters	$[v_{B\parallel}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
u	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
f	Frequenz der ausgesendeten Wellen	$[f] = \text{Hz}$
f'	Frequenz der wahrgenommenen Wellen	$[f'] = \text{Hz}$
T	Periodendauer (Dauer der Ausbreitung)	$[T] = \text{s}$

18.11 Bewegte Quelle mit Winkel

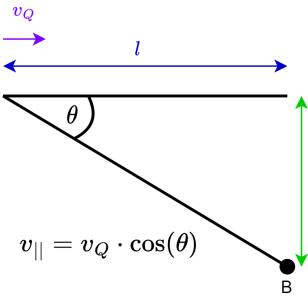
Die Quelle bewegt sich nicht direkt auf den Beobachter zu, sondern sie bewegt sich am **Beobachter vorbei**



$$f' = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{u} \cdot \cos(v_Q)} f$$

v_Q	Geschwindigkeit der bewegten Quelle	$[v_Q] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
u	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
f	Frequenz der ausgesendeten Wellen	$[f] = \text{Hz}$
f'	Frequenz der wahrgenommenen Wellen	$[f'] = \text{Hz}$

18.11.1 Beispiel Winkel zw. Quelle und Beobachter



Gegeben: v_Q , θ , u , d , l
Gesucht: f'

$$f' = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{u} \cdot \cos(v_Q)}$$

$$\tan(\theta) = \frac{d}{l} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$$\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$$

$$\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{d}{l} = \frac{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}{\cos(\theta)}$$

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = \frac{d^2}{l^2} + 1$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{1 + \frac{d^2}{l^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{u} \cdot \sqrt{\frac{l^2}{l^2+d^2}}}$$

18.12 Bewegte Quelle und bewegter Beobachter



$$f_B = \frac{u + v_B \cos(\vartheta_B)}{u - v_Q \cos(\vartheta_Q)} f_Q$$

$\vartheta_B = \theta_B$ siehe Skizze	$[\vartheta_B] = {}^\circ$
v_B Geschwindigkeit bewegter Beobachter	$[v_B] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$\vartheta_Q = \theta_Q$ siehe Skizze	$[\vartheta_Q] = {}^\circ$
v_Q Geschwindigkeit bewegte Quelle	$[v_Q] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
u Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
f_B Frequenz beim bewegten Beobachter	$[f_B] = \text{Hz}$
f_Q Frequenz bei der bewegten Quelle	$[f_Q] = \text{Hz}$

18.12.1 Optischer Doppler Effekt

Wird verwendet, wenn die Wellengeschwindigkeit u gleich der Lichtgeschwindigkeit c ist!

Es spielt nur die relative Bewegung von Beobachter und Quellen eine Rolle

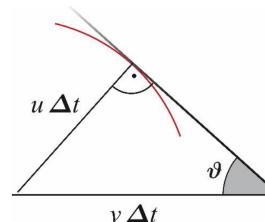
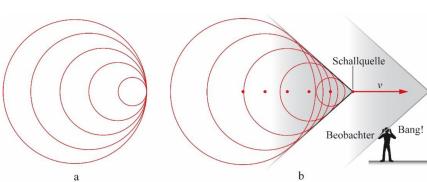
$$f' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos(\vartheta)} f \quad \text{mit } \beta = \frac{v}{c}$$

$$\text{für } \beta \ll 1 \quad f' \approx \frac{1}{1 - \beta \cdot \cos(\theta)} \cdot f$$

$$\text{für } \beta \ll 1 \text{ und } \theta \approx \frac{\pi}{2} \quad f' \approx \frac{1}{1 - \beta} \cdot f$$

18.12.2 Mach'scher Kegel

Wenn sich die Quelle schneller fortbewegt als die Wellengeschwindigkeit, dann entsteht ein Mach'scher Kegel



$$\sin(\theta) = \frac{u \Delta t}{v \Delta t} = \frac{u}{v}$$

$$M = \frac{v}{u}$$

v Geschwindigkeit der Quelle $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

u Wellengeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit) $[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

M Machzahl $[M] = 1$

18.13 Wellenwiderstand, Energietransport – Schallwellen

18.13.1 Terminologie Wellenwiderstand

Der **Wellenwiderstand** Z (auch **Impedanz** genannt) beschreibt, wie ein Medium den Fluss von Energie beeinflusst.

⇒ Wie gut können sich Wellen in einem Medium ausbreiten?

$$Z = \rho \cdot u = \frac{\Delta p_0}{v_0}$$

Z Wellenwiderstand bzw. Impedanz	$[Z] = \Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}$
ρ Dichte des Mediums	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
u Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Δp_0 Druckamplitude	$[\Delta p_0] = \text{Pa}$
v_0 Schnellenamplitude	$[v_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

18.13.2 Weitere Terminologien

Schalldruck	$p = \Delta p_0 \cos(\omega t - k x)$ $[p] = \text{Pa}$
Druckamplitude	$\Delta p_0 = \rho u v_0$

Schallschnelle (Schnelle)	$v = v_0 \cos(\omega t - k x)$ $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Schnellenamplitude	$v_0 = \omega \xi_0$

18.13.3 Intensität der Schallwelle (siehe auch 22.1)

Intensität = gemittelte Energieflossdichte

$$E_{kin} = \frac{\rho \cdot v^2}{4} = \frac{\rho \cdot v_0^2}{4} \quad E_{pot} = \frac{p^2 - p_0^2}{2 \rho u^2} = \frac{\rho \cdot v_0^2}{4}$$

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{\rho \cdot v_0^2}{2}$$

$$I = u \cdot \bar{w} = \frac{1}{2} \rho v_0^2 u = \frac{1}{2} \rho (\omega \xi_0)^2 u = \frac{(\Delta p_0)^2}{2 Z} = \frac{P}{A}$$

I Schallintensität	$[I] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
\bar{w} Energieflossdichte	$[\bar{w}] = \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$
Pot. Energie → 'Kompression Gas'	
Kin. Energie → 'Geschw. Teilchen'	
ρ Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
v_0 Schnellenamplitude	$[v_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
ξ_0 Amplitude	$[\xi_0]$
u Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Δp_0 Druckamplitude	$[\Delta p_0] = \text{Pa}$
Z Wellenwiderstand bzw. Impedanz	$[Z] = \Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}$
P Leistung	$[P] = \text{W}$
A (Abstrahl-) Fläche	$[A] = \text{m}^2$

18.14 Dispersion

Die **Abhängigkeit** der Wellengeschwindigkeit **von der Wellenlänge** wird als Dispersion bezeichnet.

⇒ Siehe Beispiel Optik Abschnitt 16.9

18.14.1 Dispersion bei Wasserwellen

$$u(\lambda) = \sqrt{\left(\frac{g \cdot \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi \cdot \sigma}{\rho \cdot \lambda} \right) \cdot \tanh\left(\frac{2\pi \cdot h}{\lambda} \right)}$$

tiefes Wasser ($\lambda \ll h$)

$$u(\lambda) = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi}}$$

flaches Wasser ($\lambda \gg h$)

$$u = \sqrt{g \cdot h}$$

g Erdbeschleunigung	$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$[g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
λ Wellenlänge		$[\lambda] = \text{m}$
σ Oberflächenspannung		$[\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$
h Wassertiefe		$[h] = \text{m}$
ρ Dichte		$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

19 Superposition von Wellen

Superposition beschreibt die Überlagerung (Addition) von Wellen

- Linearität der Wellengleichung
- Die Summe zweier Lösungen der Wellengleichung ist auch eine Lösung der Wellengleichung.

Das Superpositionsprinzip erlaubt die Darstellung von periodischen Wellen als eine Summe von harmonischen Wellen.

19.1 Schwebung

Superposition von Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen
⇒ Hörbar als ein 'Flattern'

$$f_{\text{Schwebung}} = f_2 - f_1$$

$$\xi_1 = A \cdot \sin(\omega_1 t)$$

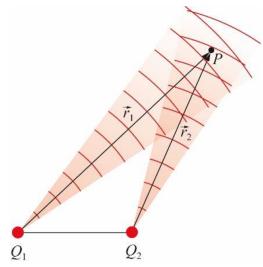
$$\xi_2 = A \cdot \sin(\omega_2 t)$$

$$\xi = 2A \cdot \sin(\bar{\omega}t) \cdot \cos(\Omega t)$$

mit $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ und $\Omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$

19.2 Interferenz

Superposition von Wellen mit gleichen Frequenzen



$$\xi_1 = A \cdot \sin(\omega t - k r_1)$$

$$\xi_2 = A \cdot \sin(\omega t - k r_2)$$

$$\xi = 2A \cdot \sin\left(\omega t - \frac{k(r_1 + r_2)}{2}\right) \cos\left(k \frac{\Delta r}{2}\right)$$

⇒ Der cos-Term hängt nur vom Ort ab!

⇒ Es gibt Orte, an denen Welle sich auslöscht!

19.3 Kohärenz

Zwei Wellen werden als kohärent bezeichnet, wenn eine **feste Phasendifferenz** zwischen den beiden Wellen besteht.

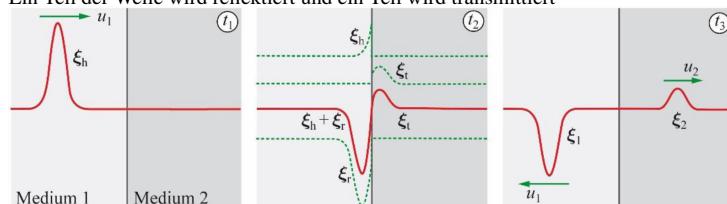
Kohärenz ist eine **Vorbedingung**, damit sich eine **Interferenz** bilden kann.

Kohärenzlänge ist der maximale Streckenunterschied, den zwei Wellen haben dürfen, damit eine (stabile) **Interferenz** beobachtet werden kann.

19.4 Reflexion und Transmission

19.4.1 Verhalten von Wellem an Grenzflächen von zwei Medien

Ein Teil der Welle wird reflektiert und ein Teil wird transmittiert

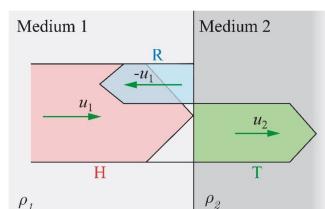


Physikalische Bedingung

Stetigkeit der Wellenfunktion und der Ableitung an der Grenzfläche

$$\xi_1(0) = \xi_2(0) \quad \dot{\xi}_1(0) = \dot{\xi}_2(0)$$

19.4.2 Intensität von Reflexion und Transmission



$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

$$r_{\text{Amplitudenverhältnis}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$T = \frac{4 \cdot Z_1 \cdot Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

R Reflexionskoeffizient

$$[R] = 1$$

T Transmissionskoeffizient

$$[T] = 1$$

Zn Wellenwiderstand im Medium n [Z] = $\Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}$

19.4.3 Phasensprünge bei Reflexionen

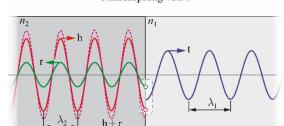
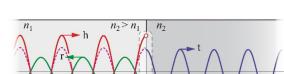
Reflexion an Material mit tieferer Wellenimpedanz

⇒ **Phasensprung**

(El. Impedanz : $z \rightarrow 0$)

dicht: $n_2 > n_1$

kleinere Wellengeschwindigkeit,
grösserer Wellenwiderstand Z



Reflexion an Material mit höherer Wellenimpedanz
⇒ **kein Phasensprung**

(El. Impedanz : $z \rightarrow \infty$)

19.5 Anwendung: Elektromagnetische Wellen

19.5.1 Elektromagnetische Wellen in Doppelleiter

$$u_r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} u_h$$

$$i_r = -\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} i_h$$

$$u_t = \frac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2} u_h$$

$$i_t = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2} i_h$$

Kabel mit kurzgeschlossenem Ende $Z_2 = 0$

$$u_r = -u_h$$

$$u_1 = u_h + u_r = u_h - u_h = 0$$

Kabel mit offenem Ende $Z_2 = \infty$

$$i_r = -i_h$$

$$i_1 = i_r + i_h = i_r - i_r = 0$$

u_r Reflektierte Spannung

$$[u_r] = \text{V}$$

u_h Eintreffende Spannung

$$[u_h] = \text{V}$$

i_r Reflektierter Strom

$$[i_r] = \text{A}$$

i_h Eintreffender Strom

$$[i_h] = \text{A}$$

Z_n Wellenwiderstand im Medium n [Z] = $\Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}$

19.5.2 Elektromagnetische Wellen in homogenem Milieu

$$Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} Z_0 = Z_0 \frac{c}{n}$$

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

R Reflexionskoeffizient

$$[R] = 1$$

Zn Wellenwiderstand im Medium n [Z] = $\Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}$

$$[\mu_r] = 1$$

μ_r Permeabilitätszahl

$$[\epsilon_r] = 1$$

ϵ Dielektrizitätszahl

$$[n_1] = 1$$

n_n Brechungsindex von Medium n

$$[n_1] = 1$$

ϵ_0 El. Feldkonstante $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$

$$[\epsilon_0] = 1$$

μ_0 Magn. Feldkonstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$

$$[\mu_0] = 1$$

Z_0 Wellenwiderstand Vakuum $Z_0 \approx 376.73 \Omega$

c Lichtgeschwindigkeit $c = 300 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

20 Stehende Wellen

20.0.1 Terminologie

Eine **stehende Welle** ist eine Welle, bei der Orte maximaler Auslenkung (oder minimaler Auslenkungen) sich **nicht fortbewegen**

- Ort- und Zeitabhängigkeit sind separiert
- Die Welle bewegt sich nicht im Raum ('Muster bleibt stehen')

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(kx)$$

⇒ sin()-Terme sind auch erlaubt!

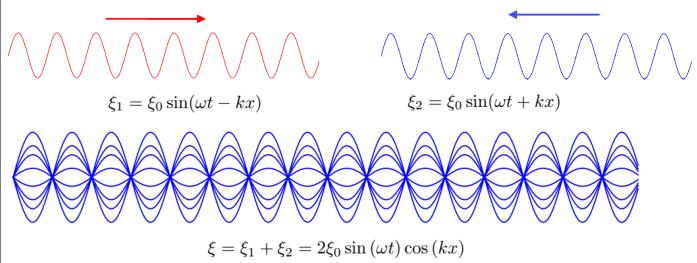
Orte, wo die Welle für alle Zeit = 0 ist heißen **Wellenknoten**

⇒ **Zwei benachbarte Knoten sind $\frac{\lambda}{2}$ auseinander**

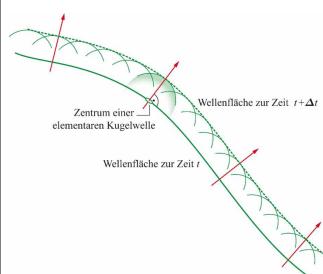
Orte, wo die Welle eine maximale Auslenkung erreicht, heißen **Wellenbauch**

⇒ **Zwei benachbarte Bäuche sind $\frac{\lambda}{2}$ auseinander**

20.1 Entstehung von stehenden Wellen



20.2 Prinzip von Huygens



Jedes Flächenelement auf einer Wellenfläche kann als Zentrum einer Kugelwelle betrachtet werden.

Die Wellenfläche zu einem späteren Zeitpunkt ist die Einhüllende all dieser Elementarwellen.

20.3 Eigenschwingungen - 1D

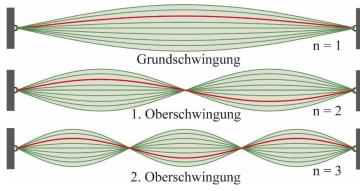
$$f_n = \frac{n}{2l} \cdot u = \frac{u}{\lambda_n}$$

$$\text{Auslenkung } 0: k_n \cdot l = n \cdot \pi$$

$$\text{Auslenkung max: } k_n \cdot l = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

20.3.1 Saite

- Reflexion an einer Grenzfläche → Stehende Welle
- Die stehende Welle muss in den vorhandenen Raum passen
→ Geometrische Bedingung
- Knoten an beiden Enden**



$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t) \cdot \sin(kx)$$

$$\text{Auslenkung } 0: k_n \cdot l = n \cdot \pi$$

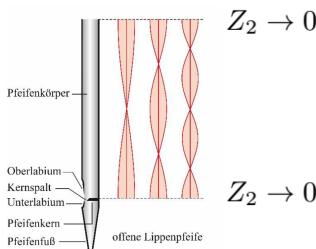
$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{n}{2l} \cdot u = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}}$$

k_n Wellenzahl	$[k_n] = \frac{1}{m}$
l Länge der Saite	$[l] = m$
u Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{m}{s}$
λ_n Wellenlänge	$[\lambda_n] = m$
n Ganze Zahl	$[n] = 1$
ω Kreisfrequenz	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{s}$
A Querschnitt der Saite	$[A] = m^2$

20.3.2 Pfeifen

Offene Pfeife

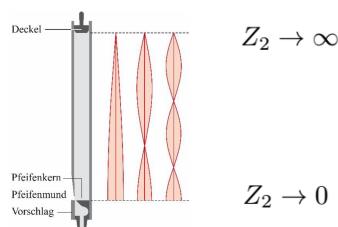
Länge $l = \frac{\lambda}{2}$



Auslenkung an Enden:
Wellenbauch

Gedackte Pfeife

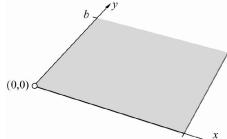
Länge $l = \frac{\lambda}{4}$



Auslenkung offenes Ende:
Wellenbauch
Auslenkung gedacktes Ende:
Knoten (max. Auslenkung)

20.4 Eigenschwingungen - 2D

20.4.1 Rechteckige Membrane



$$\xi(x, y, t) = \xi_0 \sin(\omega t) \sin(k_x x) \sin(k_y y)$$

$$g(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + g(t) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{u^2} f(x, y) g(t) \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

$$\text{Wellenvektor: } k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

$$u^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

Randbedingungen:

$$\text{Auslenkung } 0 \quad k_x = \frac{n\pi}{a} \quad k_y = \frac{m\pi}{b}$$

21 Beugung

21.0.1 Terminologie

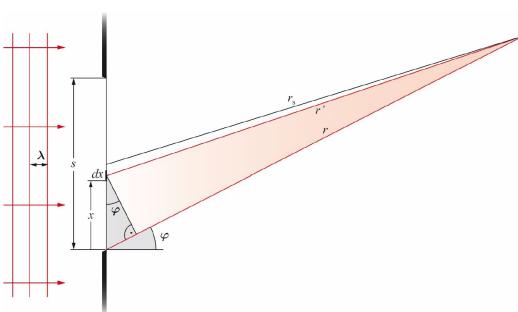
Die **Richtungsänderungen** der Wellenausbreitung in einem homogenen Medium durch **Hindernisse** wird als **Beugung (Diffraction)** bezeichnet.

- Das Hindernis kann eine Kante, ein Spalt oder ein kleines Objekt sein
- Beugung tritt auf, wenn das **Hindernis von ähnlicher Grösse** ist, wie die **Wellenlänge**
- ⇒ Beugung tritt auf, wenn eine Welle limitiert wird!

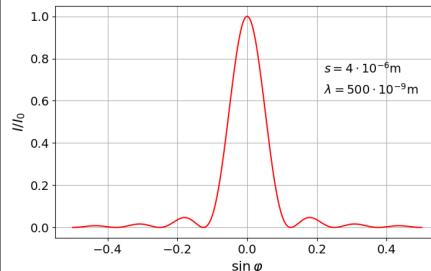
Dies gilt insbesondere für:
Spalt, Kante, Loch (Pinhole), Objektiv-Öffnung

21.1 Beugung - Spalt

21.1.1 Beschreibung Setup



21.1.2 Intensität nach dem Spalt



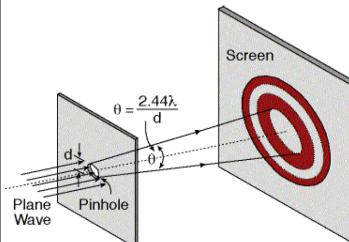
$$I_s \propto \frac{A^2 \sin^2 \left(\frac{k \cdot s \cdot \sin(\varphi)}{2} \right)}{r^2 \left(\frac{k \cdot s \cdot \sin(\varphi)}{2} \right)^2}$$

Minima der Intensität

$$\sin(\varphi) = n \frac{\lambda}{s}$$

I_s Intensität	$[I_s] = \frac{W}{m^2}$
s Länge des Spalts	$[s] = m$
λ Wellenlänge	$[\lambda] = m$
n Ordnung (typ. 1)	$[n] = 1$
A Amplitude	$[A]$
r siehe Bild Abschnitt 21.1.1	$[r] = m$
φ Einfallswinkel der Welle zum Spalt	$[\varphi] = {}^\circ$
Hinweis: Oft muss gegebenes φ durch 2 geteilt werden!	

21.2 Beugung - Runde Öffnung (Pinhole)

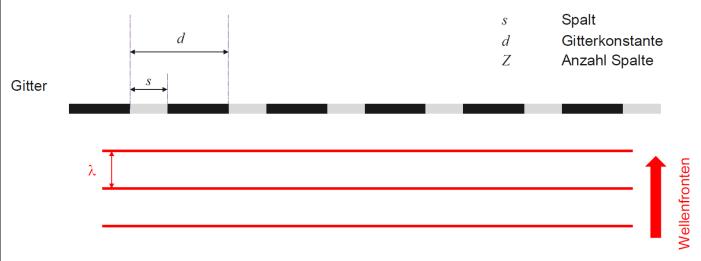


Nullstelle erster Ordnung:

$$\sin(\varphi) = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

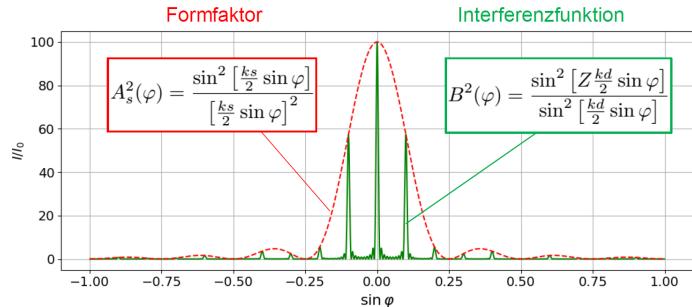
21.3 Beugung - Gitter

21.3.1 Beschreibung Setup



21.3.2 Intensität nach dem Gitter

$$I_G = \frac{A^2}{r^2} A_s^2 B^2$$



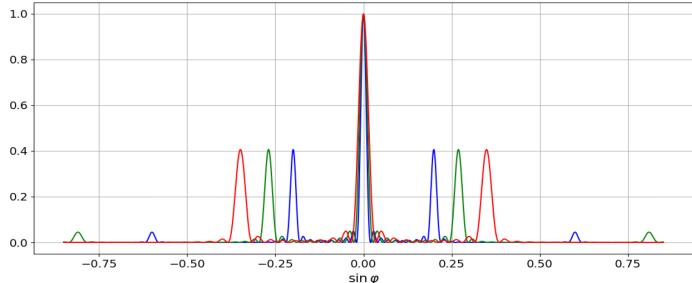
$A_s^2(\varphi)$ hat Nullstellen bei $n \frac{\lambda}{s}$ (hängt von s ab)

$B^2(\varphi)$ hat Hauptmaxima bei $n \frac{\lambda}{d}$ und $Z - 2$ Nebenmaxima dazwischen (hängt von Z und d ab)

$$\begin{aligned} I_G & \text{ Intensität nach Gitter } [I_G] = \frac{W}{m^2} \\ k & \text{ Wellenzahl } [k] = \frac{1}{m} \\ s & \text{ Spalt } [s] = m \\ d & \text{ Gitterkonstante } [d] = m \\ Z & \text{ Anzahl Spalte } [Z] = 1 \end{aligned}$$

21.3.3 Auflösungsvermögen

Verschiedene Wellenlängen können getrennt (aufgelöst) werden



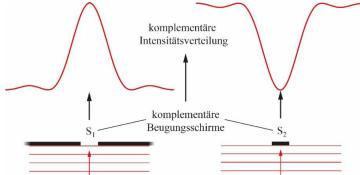
Kriterium

Zwei Wellenlängen werden gerade noch aufgelöst, wenn das Hauptmaximum von λ_2 mit dem Minimum von λ_1 zusammenfällt

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = nZ$$

$$\begin{aligned} \lambda & \text{ Wellenlänge } [\lambda] = m \\ \Delta\lambda & \text{ Unterschied der Wellenlängen } [\Delta\lambda] = m \\ n & \text{ Ordnung der Beugung (typ. 1) } [n] = 1 \\ Z & \text{ Anzahl der Spalten } [Z] = 1 \end{aligned}$$

21.4 Babinet-Prinzip



Ausserhalb des Bereichs geometrisch-optischer Abbildung produzieren komplementäre Beugungsschirme gleiche Beugungsbilder

22 Akustik

22.0.1 Terminologie

Ton

Eine harmonische Schallwelle wird als **Ton** bezeichnet.

Ein (reiner) Ton entspricht also einer **Schallschwingung**, die eine einzige Frequenz enthält.

Klang

Eine **Überlagerung** von harmonischen Schwingungen, deren **Frequenzen** in einem **ganzzahligen Verhältnis** zur tiefsten Frequenz, zur Frequenz des **Grundtons**, stehen, wird **Klang** genannt.

Geräusch

Bei einem **Geräusch** besteht das Frequenzspektrum nicht mehr aus einzelnen diskreten Linien, sondern weist in einem bestimmten Frequenzbereich eine **kontinuierliche Verteilung** auf.

22.1 Pegel

'Einheit': Bel

$$\text{Pegel} = \log\left(\frac{x}{b_0}\right)$$

$$x = b_0 \cdot 10^{\text{Pegel}}$$

'Einheit': Dezibel

$$\text{Pegel} = 10 \cdot \log\left(\frac{x}{b_0}\right)$$

$$x = b_0 \cdot 10^{\left(\frac{\text{Pegel}}{10}\right)}$$

Pegel Dimensionslose Grösse [Pegel] = 1

x Zu vergleichende Grösse [x]

b_0 Basisgrösse [b_0] = [x]

22.2 Schallintensität

$$L_I = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$L_p = 20 \cdot \log\left(\frac{p_{eff}}{p_{eff0}}\right)$$

$$p_{eff} = \frac{\Delta p_0}{\sqrt{2}}$$

L_I Schallintensitätspegel [L_I] = dB

L_p Schalldruckpegel [L_p] = dB

I Intensität [I] = $\frac{W}{m^2}$

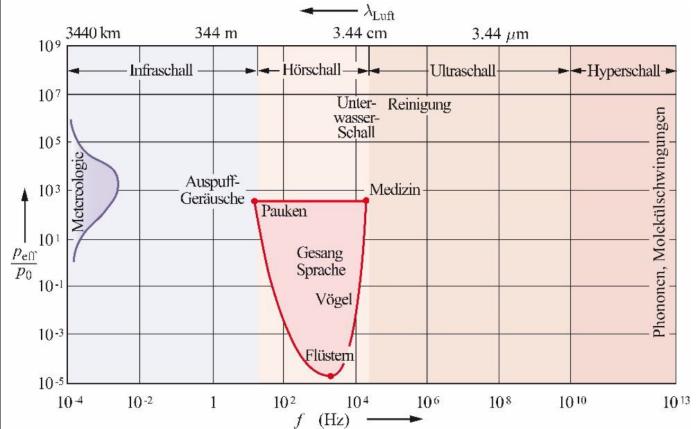
p_{eff} Schalldruck (Effektivwert) [p_{eff}] = Pa

Δp_0 Druckamplitude [Δp_0] = Pa

I_0 Bezugssintensität $I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$

p_{eff0} Bezugsschalldruck $p_{eff0} = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa

22.3 Verschiedene Schallquellen



22.4 Intensität bei Kugelwellen (ohne Dämpfung)

Energieerhaltung

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Verhältnis

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Pegel

$$L_2 = L_1 - 20 \cdot \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$I(r)$ Intensität

$$[I(r)] = \frac{W}{m^2}$$

P Leistung

$$[P] = \text{W}$$

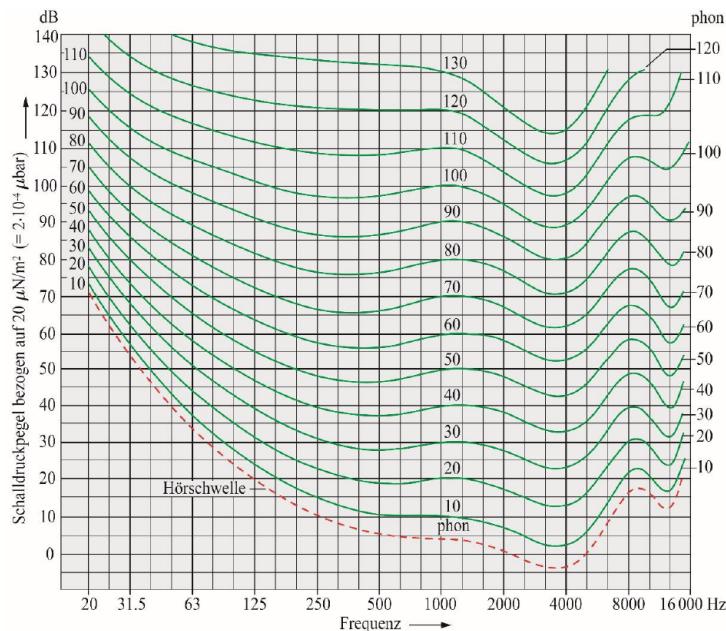
r_i Abstand (Radius) zum Wellenursprung

$$[r_i] = \text{m}^2$$

L_i Pegel

$$[L_i] = \text{dB}$$

22.5 PHON-Skala



22.6 Schalldämpfung / Schalldämmung

22.6.1 Schalldämpfung

Schalldämpfung bedeutet eine **Abschwächung** der Schallwellen durch **Absorption**. Schallenergie wird in 'Wärme' umgewandelt, d.h. durch die Absorption von Energie werden das von den Schallwellen durchdrungene Medium oder die das Schallfeld begrenzenden Körper erwärmt.

Verschiedene Arten von Absorption für Schalldämpfung Innen

- Poröse Schicht (mit oder ohne perforierte Abdeckung)
- Akustikplatte
- Plattenresonator
- Helmholtz-Resonator

22.6.2 Schalldämmung

Schalldämmung ist die **Behinderung der Schallausbreitung** durch **reflektierende Hindernisse**. Mauern, Türen und Fenster bewirken eine Schalldämmung für den von aussen in das Gebäude eindringenden Schall. Auch die Ausbreitung von Schall innerhalb eines Gebäudes wird durch die Schalldämmung von Zwischenwänden und Türen abgeschwächt. Im Freien wird durch Schallschutzwände eine Schalldämmung für die dahinterliegenden Gebäude erreicht.

22.7 Intensität bei Kugelwellen (mit Dämpfung)

$$\text{Energieerhaltung} \quad I(r) = \frac{P}{4\pi r^2} e^{-\alpha r}$$

$$\text{Verhältnis} \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} e^{-\alpha(r_2-r_1)}$$

$$\text{Pegel} \quad L_2 = L_1 - 20 \cdot \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right) - K(r_2 - r_1)$$

$I(r)$	Intensität	$[I(r)] = \frac{W}{m^2}$
P	Leistung	$[P] = W$
r_i	Abstand (Radius) zum Wellenursprung	$[r_i] = m^2$
L_i	Pegel	$[L_i] = dB$
α	Dämpfung	$[\alpha] = 1$
K	Dämpfung	$[K] = \frac{dB}{m}$

22.8 Schalldämmung / Schalldämm-Mass

Bei der Schallübertragung muss zwischen **Luftschall** und **Körperschall** unterschieden werden.

22.8.1 Luftschalldämmung

Es gibt Schallquellen, die ihre Schallenergie (fast) ausschließlich in die Luft abstrahlen. Beispiele: menschliche Stimme, Geigen, Lautsprecher und Blasinstrumente

22.8.2 Körperschalldämmung

Andere Schallerzeuger übertragen die Schallschwingungen nicht nur auf die Luft, sondern auch direkt auf feste Körper. Streichinstrumente, wie Cello oder Bassgeige, und Klavier oder Flügel übertragen die Schallschwingungen auch direkt auf den Fussboden. Wird ein Nagel in die Wand geschlagen, so wird ein grosser Anteil des erzeugten Schalls als Körperschall übertragen.

Beispiele: Trittschall, Wasserleitungsgesäuse

22.9 Schalldämm-Mass

$$R = 10 \cdot \log \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

22.10 Anhall / Nachhall

Es dauert eine gewisse Zeit, bis sich eine konstante Energiedichte der Schallwellen im Raum aufgebaut hat. Dieser Vorgang wird Anhall genannt. Wegen der logarithmischen Empfindlichkeit des Ohrs wird er praktisch nicht wahrgenommen.

22.10.2 Nachhall

Die von den Begrenzungsfächen des Raumes mehrfach reflektierten Wellen bewirken andererseits, dass beim plötzlichen Abschalten einer Schallquelle der Schall nicht sofort verschwindet, sondern allmählich abklängt. Dieses Phänomen wird Nachhall genannt und ist im Gegensatz zum Anhall deutlich wahrnehmbar.

Per Definition ist die **Nachhallzeit** jene Zeitspanne, in welcher der Schallpegel im Raum um 60 dB sinkt.

22.10.3 Nachhallzeit T_N

$$T_N = 0.16 \frac{s}{m} \frac{V}{\sum_i \alpha_i A_i}$$

T_N Nachhallzeit

$[T_N] = s$

V Raumvolumen

$[V] = m^3$

α_i Absorptionsgrad

$[\alpha_i] = 1$

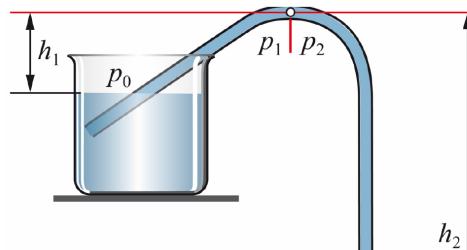
A_i Teilfläche der Raumbegrenzung

$[A_i] = m^2$

mit Absorption α_i

23 Ansätze zu Aufgaben Physik II

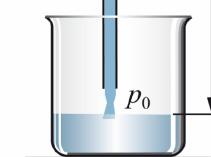
23.1 Saugheber



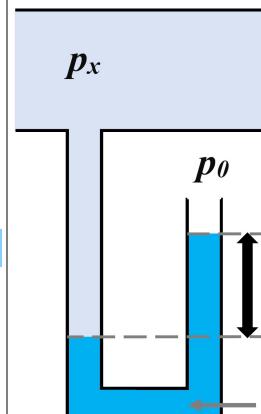
von links: $p_1 = p_0 - \rho g h_1$

von rechts: $p_2 = p_0 - \rho g h_2$

also $p_1 > p_2$



23.2 Barometer



$$p_x = p_0 + \underbrace{\rho_{FL} \cdot g \cdot h}_{p_s}$$

p_x gemessener Druck

p_0 Luftdruck

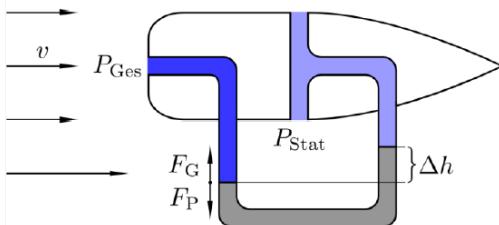
p_s Schweredruck

⇒ Bernoulli

⇒ Kontinuität

23.3 Pitotrohr

Prandtl'sches Staurohr; Staudruckmesser
Zur Messung von Strömungsgeschwindigkeiten



$$\text{Bernoulli horizontal : } \underbrace{\frac{p_1}{\rho_L}}_{0} + \frac{1}{2} \rho_1 \cdot \underbrace{v_1^2}_{0} = \underbrace{\frac{p_2}{\rho_L - \Delta p}}_{\rho_2} + \frac{1}{2} \underbrace{\rho_2}_{\rho_L} \cdot v_2^2$$

$$0 = -\Delta p + \frac{1}{2} \rho_L \cdot v_2^2 \Rightarrow \Delta p = \frac{1}{2} \rho_L \cdot v_2^2$$

$$\text{Gleichsetzen : } \Delta p = \rho_{FL} \cdot g \cdot h \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot \rho_{FL} \cdot g \cdot h}{\rho_L}}$$

23.4 Venturirohr

$$Q = A_1 \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)}} \quad [Q] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

23.5 Pumpe

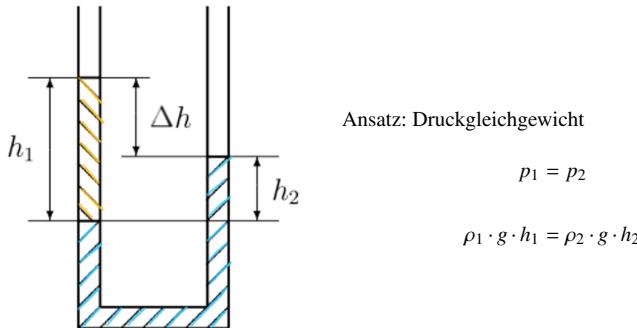
$$W = P \cdot t = F \cdot \Delta s = p \cdot A \cdot \Delta s = p \cdot \Delta V$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{p \cdot V}{t} = p \cdot \dot{V} \quad F = p \cdot A$$

23.6 Bewegungen

$$P = F \cdot v \quad E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

23.7 U-Rohr



23.8 Springbrunnen

Ein Springbrunnen erzeugt einen $[x]$ m hohen Wasserstrahl. Der Düsendurchmesser ist $[d_1]$, der Rohrdurchmesser zum Brunnen $[d_2]$, eine Pumpe für den Betrieb steht $[y]$ m unterhalb des Brunnens.

Gesucht: Pumpdruck, Pumpenleistung bei $\eta = 90\%$

$$\text{Bernoulli: } \underbrace{p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2}_{\text{Pumpe}} = \underbrace{p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gy}_{\text{Düse}}, \quad v_1 A_1 = v_2 A_2$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = mgx \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gx}, \quad v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} = v_2 \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2$$

$$\Delta p = p_1 - p_0 = \rho gy + \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

$$P_{ideal} = \Delta p \dot{V}, \quad P_{Pumpe} = \frac{\Delta p \dot{V}}{\eta}$$

23.9 Wasser mit Dampf erhitzen

Ein Tasse mit einer Masse m_W Wasser und einer Temperatur von T_K wird an der Wasserdampfdüse einer Kaffeemaschine mittels Wasserdampf erhitzt. Der aus der Kaffeemaschine ausströmende Wasserdampf ist T_H heiß. Am Schluss haben sie 10 % mehr Wasser in der Tasse. (entspricht m_D)

Wie warm ist das Wasser nun?

Ansatz: 1. Hauptsatz $Q_{zu} = Q_{ab}$

$$m_W \cdot c_W (T_M - T_K) = q_s \cdot m_D + m_D \cdot c_W (T_H - T_M)$$

23.10 Eis in Wasser schmelzen

In einem Gefäß befinden sich eine Masse m_W Wasser. Dazu wird ein Eiswürfel mit Masse m_E gegeben. Das Eis hat eine Temperatur T_E und das Wasser hat eine Temperatur T_W . Die Temperatur T_0 steht für 0°C bzw. 273.15 K
Gesucht ist die Mischtemperatur T_M

$$\Delta Q_{ab} = \Delta Q_{zu}$$

$$m_W \cdot c_W \cdot (T_W - T_M) = m_E \cdot (T_E - T_0) + q_f + c_W \cdot (T_M - T_0)$$

23.11 Beschlagenes Fenster

Gesucht: Außentemperatur T_a

Gegeben: Innentemperatur T_i , Luftfeuchtigkeit f_i in %, Wärmedurchgangszahl des Fensters k und Wärmeübergangszahl α_i

Beschlag bei $p_s(T_{fi}) = f \cdot p_s(T_i) \Rightarrow T_{fi}$ mittels Magnusformel bestimmen

Wärmestromdichte in allen Schichten gleich: $k(T_a - T_i) = \alpha_i(T_{fi} - T_i)$

23.12 Luftbefeuchter

Gesucht: rel. Luftfeuchtigkeit f_{ri}

Gegeben: Volumen des Zimmers V , Menge verdampftes Wasser m , Zeit für kompletten Austausch t , Innentemperatur T_i , Außentemperatur T_a , Luftfeuchtigkeit f_{ra}

\dot{m} = Massenfluss (ai=nach innen, b=Befeuchter, ia=nach draussen)

$$\dot{V} = \frac{V}{t} \quad [\frac{\text{m}^3}{\text{s}}], \quad \dot{m}_b = \frac{\dot{m}}{t_0} \quad [\frac{\text{kg}}{\text{s}}], \quad M = 0.018 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$$

$$p_s = [\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}] \quad (\text{Sättigungsdichte})$$

$$\dot{m}_{ai} + \dot{m}_b = \dot{m}_{ia}$$

$$\dot{m} = f_r \cdot \rho_s \cdot \dot{V}$$

$$f_{ra} \cdot \rho_{sa} \cdot \dot{V} + \dot{m}_b = f_{ri} \cdot \rho_{si} \cdot \dot{V}$$

$$p_s = p_s(\theta) \cdot \frac{M}{R \cdot T_i} \quad (\text{Magnusformel für } p_s(T_a \text{ resp. } T_i))$$

24 Anhang

24.1 Messunsicherheit

Abhängigkeit der Messgröße: $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Unsicherheit der Messgröße: $\Delta y = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \Delta x_i^2}$

Beispiel: $f = \frac{c}{\lambda}$

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial c} \right)^2 \Delta c^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)^2 \Delta \lambda^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \Delta c^2 + \left(-\frac{c}{\lambda^2} \right)^2 \Delta \lambda^2}$$

24.2 Trigonometrie

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2 π
α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞

24.2.1 Beziehungen zwischen $\sin(x)$ und $\cos(x)$

$$\begin{aligned} \sin(-a) &= -\sin(a) & \cos(-a) &= \cos(a) \\ \sin(\pi - a) &= \sin(a) & \cos(\pi - a) &= -\cos(a) \\ \sin(a + \pi) &= -\sin(a) & \cos(\pi + a) &= -\cos(a) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a) \end{aligned}$$

24.2.2 Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(a \pm b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b) \\ \cos(a \pm b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b) \\ \tan(a \pm b) &= \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)} \end{aligned}$$

24.2.3 Summen und Differenzen

$$\begin{aligned} \sin(a) + \sin(b) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) - \sin(b) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \cos(a) + \cos(b) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(a) - \cos(b) &= -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \tan(a) \pm \tan(b) &= \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a) \cdot \cos(b)} \end{aligned}$$

24.2.4 Produkte

$$\begin{aligned}\sin(a) \cdot \sin(b) &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \cos(a) \cdot \cos(b) &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b)) \\ \sin(a) \cdot \cos(b) &= \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))\end{aligned}$$

24.2.5 Winkelvielfache und Halbwinkel

$$\begin{aligned}\sin(2a) &= 2 \sin(a) \cdot \cos(a) \\ \sin(3a) &= 3 \sin(a) - 4 \sin^3(a) \\ \sin(4a) &= 8 \cos^3(a) \cdot \sin(a) - 4 \cos(a) \cdot \sin(a) \\ \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ \cos(3a) &= 4 \cos^3(a) - 3 \cos(a) \\ \cos(4a) &= 8 \cos^4(a) - 8 \cos^2(a) + 1\end{aligned}$$

$$\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos(a))} \quad \cos\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos(a))}$$

24.2.6 Potenzen

$$\begin{aligned}\sin^2(a) &= \frac{1}{2}(1-\cos(2a)) \\ \sin^3(a) &= \frac{1}{4}(3 \sin(a) - \sin(3a)) \\ \sin^4(a) &= \frac{1}{8}(\cos(4a) - 4 \cos(2a) + 3) \\ \cos^2(a) &= \frac{1}{2}(1+\cos(2a)) \\ \cos^3(a) &= \frac{1}{4}(\cos(3a) + 3 \cos(a)) \\ \cos^4(a) &= \frac{1}{8}(\cos(4a) + 4 \cos(2a) + 3)\end{aligned}$$

25 Vektorrechnung

25.1 Betrag eines Vektors

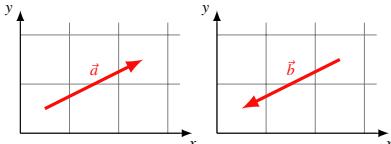
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

25.2 Gleichheit zweier Vektoren

Zwei Vektoren sind gleich, wenn alle Komponenten identisch sind

$$A_x = B_x \quad A_y = B_y \quad A_z = B_z$$

25.3 Negative eines Vektors

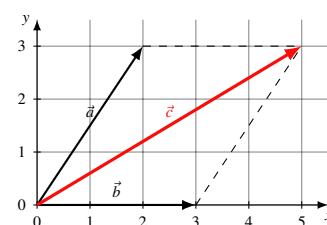


$$b_x = -a_x$$

$$b_y = -a_y$$

$$b_z = -a_z$$

25.4 Addition zweier Vektoren

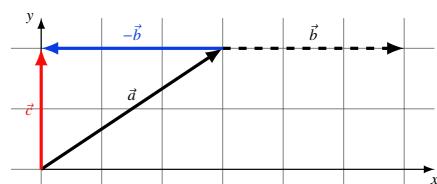


$$c_x = a_x + b_x$$

$$c_y = a_y + b_y$$

$$c_z = a_z + b_z$$

25.5 Subtraktion zweier Vektoren



$$c_x = a_x - b_x$$

$$c_y = a_y - b_y$$

$$c_z = a_z - b_z$$

25.6 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

$$\vec{b} = s \vec{d} \quad |\vec{B}| = |s| \cdot |\vec{d}|$$

$$b_x = s \cdot a_x$$

$$b_y = s \cdot a_y$$

$$b_z = s \cdot a_z$$

25.7 Skalarprodukt

$$\vec{c} = \vec{d} \bullet \vec{b} = |\vec{d}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi)$$

25.8 Kreuzprodukt (nur in 3D)

$$\vec{d} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

26 Statistik

26.1 Arithmetisches Mittel \bar{x}_{arith}

$$\bar{x}_{arith} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

26.2 Geometrisches Mittel \bar{x}_{geom}

Nur für positive Zahlenreihen x_i definiert!

$$\bar{x}_{geom} := \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N x_i} \Rightarrow \bar{x}_{geom} \leq \bar{x}_{arith}$$

26.3 Quadratisches Mittel QMW (RMS)

Wechselstromtechnik; Effektivwert

$$QMW := \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}$$

26.4 Harmonisches Mittel \bar{x}_{harm}

$$\bar{x}_{harm} := \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i}}$$

Kann sinnvoll eingesetzt werden, wenn man für die i -te Teilstrecke s_i eine Zeit t_i benötigt (also eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $v_i = \frac{s_i}{t_i}$ und eine Durchschnittsgeschwindigkeit über N Teilstrecken ermitteln will):

$$\bar{v}_{harm} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i}{\sum_{i=1}^N t_i} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i}{\sum_{i=1}^N \frac{s_i}{v_i}} \quad \text{gewichtetes harm. Mittel}$$

26.5 Standardabweichung σ

Varianz: $\sigma^2 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_{arith})^2$

Standardabweichung: $\sigma := \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_{arith})^2}$

26.6 Standardabweichung des Mittelwerts

Gilt nur, wenn eine Normalverteilung vorliegt!

Beschreibt nur statistische Fehler

$$\sigma(\bar{x}_{arith}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

27 Mathematik-Hilfe

27.1 Trigonometrie

Sinus	Cosinus	Tangens
$\frac{GK}{H}$	$\frac{AK}{H}$	$\frac{AK}{GK}$

27.2 Schwerpunkt

Die Koordinaten des Schwerpunkts müssen komponentenweise berechnet werden:

$$x_s = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{M} \quad y_s = \frac{\sum y_i \cdot m_i}{M} \quad z_s = \frac{\sum z_i \cdot m_i}{M}$$

x_s, y_s, z_s Koordinaten des Schwerpunkts

x_i, y_i, z_i Koordinaten von kleinen Massenpunkten

m_i Kleine Massenpunkte an entsprechenden Koordinaten

M Gesamtmasse des Körpers

27.3 Polarkoordinaten (Kreisbewegung)

$$\text{polar} \rightarrow \text{kartesisch} \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\phi) \\ r \cdot \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\text{kartesisch} \rightarrow \text{polar} \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan^{-1}(\frac{y}{x}) \end{pmatrix}$$

27.4 Ableitungsregeln S. 445-448

27.4.1 Elementare Regeln

$$\begin{array}{ll} \text{Potenzen:} & f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 \\ & f(x) = x^\alpha \quad f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \end{array}$$

$$\text{Linearität:} \quad f(x) = c \cdot x^2 \quad f'(x) = c \cdot 2x$$

$$\text{Summe:} \quad (u(x) + v(x) - w(x))' = u'(x) + v'(x) - w'(x)$$

$$\text{Konstanten:} \quad c = \text{const} \rightarrow c' = 0$$

27.4.2 Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

27.4.3 Quotientenregel

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \rightarrow \text{als Produkt schreiben}$$

$$u(x) \cdot \left(\frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \frac{-v'(x)}{v(x)^2}$$

27.4.4 Kettenregel

$$g(f(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

27.4.5 Umkehrfunktion

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

27.5 Allgemeine Logarithmus-Ableitung

$$(\log_b(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)} \right)' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot (\ln(x))' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}$$

27.6 Integrationsregeln S. 494-496

Linearität: $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$

27.6.1 Rechenregeln mit Integralen S. 508-510

Zerlegung: $\int_a^b f_1(x) dx + f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Grenzen tauschen: $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

Gleiche Grenzen: $\int_a^a f(x) dx = 0$

27.7 Wichtige Integrale S. 495

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \quad \int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\int_a^b 1 dx = b - a \text{ (Rechteck)}$$