

Physik

Zusammenfassung an der OST

Fabian Suter, 18. Dezember 2024

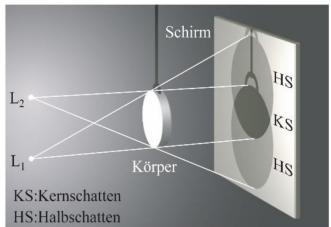
<https://github.com/FabianSuter/Physik.git>

1 Optik

1.1 Licht

Licht kann auf mehrere Arten beschrieben werden:

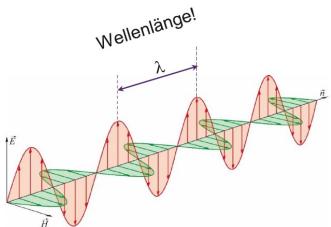
1.1.1 Lichtstrahlen



Die **geometrische Optik** oder **Strahlenoptik** geht davon aus, dass sich das Licht im Vakuum als **geradliniger Strahl** ausbreitet.

Mit der geometrischen Optik können die Phänomene Reflexion und Brechung erklärt werden.

1.1.2 Lichtwellen



Licht wird als elektromagnetische Welle modelliert.

Bild: linear polarisierte Welle

Lichtfarben und ihre Frequenzen / Wellenlängen

| Farbe | Wellenlänge in nm |
|----------|-------------------|
| violett | 380 ... 435 |
| blau | 435 ... 465 |
| blaugrün | 465 ... 485 |
| grün | 485 ... 565 |
| gelb | 565 ... 590 |
| orange | 590 ... 630 |
| rot | 630 ... 780 |

λ Wellenlänge

c Lichtgeschw. $c = 299'792'458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

f Frequenz

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$$[\lambda] = \text{m}$$

$$[c] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$[f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$$

1.1.3 Lichtteilchen

Modellvorstellung des Lichts als ein Fluss von Lichtteilchen (**Photonen**)

$$E = h \cdot f$$

E Energie eines Photons

h Planck'sche Konstante $6.626 \cdot 10^{-34} \frac{\text{J}}{\text{Hz}}$

f Frequenz

$$[E] = \text{J}$$

$$[h] = \frac{\text{J}}{\text{Hz}}$$

$$[f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$$

1.2 Lichtquellen

1.2.1 Thermische Strahler

Schwarzkörper-Modell: Modell eines Körpers, der in alle Richtungen abstrahlt (und energetisch im Gleichgewicht ist)

Ein Schwarzkörper strahlt **alle** Lichtfarben ab. (auch die für den Mensch nicht sichtbaren.)

Glühbirnen

Muss auf allen Wellenlängen angeregt werden, um schliesslich sichtbares Licht abzustrahlen.

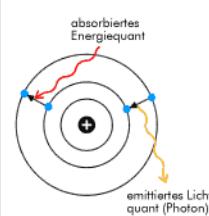
⇒ Es wird viel Energie nicht nutzbar 'verheizt'

LEDs

Können mit einer bestimmten Frequenz angeregt werden und strahlen nur gewünschtes Licht ab.

⇒ energieeffizient

1.2.2 Lumineszenz



Elektronen werden angeregt und steigen in energetisch höheren Zustand. Sobald die Elektronen wieder in ihren Grundzustand zurückkehren wird ein Lichtquant (Photon) abgestrahlt. Die Leuchtfarbe wird durch die Frequenz der Anregung bestimmt.

Fluoreszenz: kein Nachleuchten

Phosphoreszenz: mit Nachleuchten

1.3 Messgrößen

1.3.1 Radiometrie

Physikalische Messgrössen der elektromagnetischen Strahlung

1.3.2 Photometrie

Radiometrische Grössen, gewichtet mit dem photometrischen Strahlungsäquivalent K , welches die **Empfindlichkeit des menschlichen Auges** angibt.

Photometrischen Strahlungsäquivalent K

Gibt die Empfindlichkeit des menschlichen Auges wieder und ist eine

empirisch genormte Kurve

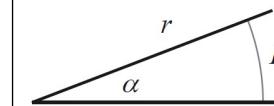
⇒ Das menschliche Auge ist bei einer Wellenlänge von 555 nm (grüne Farbe) am empfindlichsten. ($638 \frac{\text{lm}}{\text{W}}$)

1.4 Gegenüberstellung

| Radiometrie | | | Photometrie | | |
|--------------------|---------------------------------|--------|-------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| Quellen | Einheit | Symbol | Grösse | Symbol | Einheit |
| W | Φ_e | | Strahlungsfluss (Radiant flux) | Lichtstrom (Luminous flux) | $\Phi_v = \int K(\lambda) \frac{d\Phi_e}{d\lambda} d\lambda$ lumen, lm |
| W sr^{-1} | $I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega}$ | | Strahlstärke (Radiant intensity) | Lichtstärke (Luminous intensity) | $I_v = \frac{d\Phi_v}{d\Omega}$ cd = lm sr ⁻¹ |
| W m^{-2} | $E_e = \frac{d\Phi_e}{dA}$ | | Bestrahlungsstärke (Irradiance) | Beleuchtungsstärke (Illuminance) | $E_v = \frac{d\Phi_v}{dA}$ lx = lm m ⁻² |

1.5 Raumwinkel

1.5.1 Winkel in der Ebene (Radian)

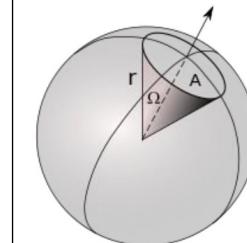


Länge des Bogens auf einem Kreis mit $r = 1 \text{ m}$

$$\alpha = \frac{L}{r}$$

Vollkreis: 2π $[\alpha] = \text{rad}$

1.5.2 Winkel im Raum (Steradian)

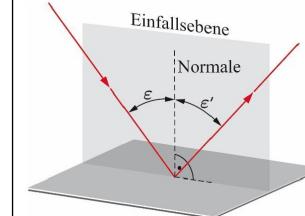


Aufgespannte Fläche, projiziert auf eine Kugel mit $r = 1 \text{ m}$

$$\Omega = \frac{A}{r^2} = \frac{A}{1\text{m}^2}$$

Kugel: 4π $[\Omega] = \text{sr}$

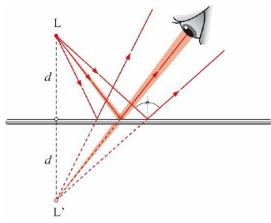
1.6 Reflexionsgesetz



Einfallswinkel = Ausfallwinkel

$$\varepsilon = \varepsilon'$$

1.6.1 Grenzflächen von Reflexionen

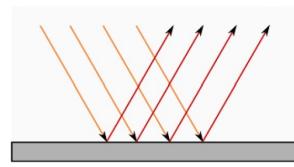


L **reelles Bild**

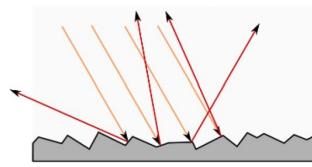
Bild, welches auf Schirm abgebildet werden kann

L'

virtuelles Bild (Spiegelbild von L)
Bild, welches nicht auf Schirm abgebildet werden kann



Glatter Spiegel
Direkte Reflexion



Rauer Spiegel
Diffuse Reflexion

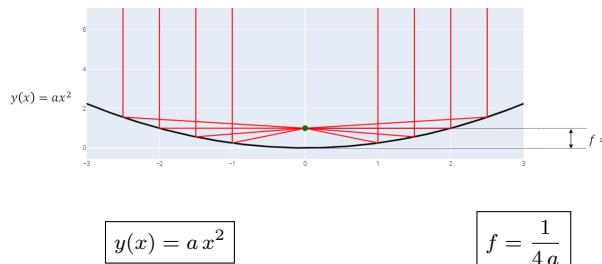
1.7 Reflexionen - Spezialfälle

Brennpunkt F Brennpunkt (Fokus) ist der Punkt, in dem parallel zur optischen Achse auf einen Spiegel oder eine Linse einfallende Strahlen sich schneiden

Brennweite f Abstand des Brennpunktes von der Linse bzw. dem Spiegel

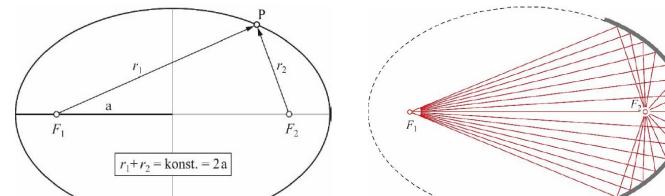
1.7.1 Parabolspiegel

Parallel einfallende Strahlen werden in einem Punkt fokussiert



1.7.2 Elliptischer Spiegel

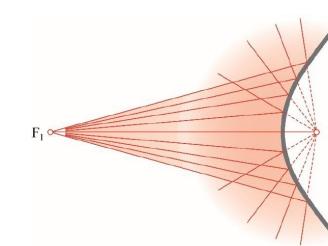
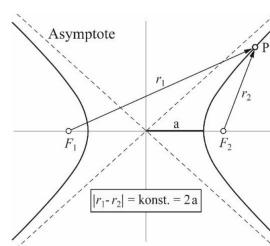
Konzentration von Energie in einem nicht zugänglichen Punkt



$$y(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

1.7.3 Hyperbolischer Spiegel

Objekt in Spiegel versetzen

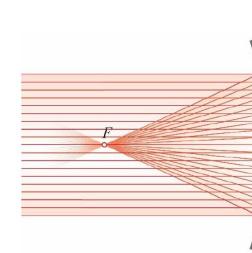
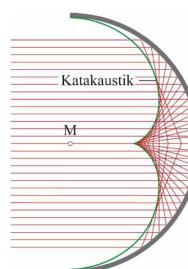


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1.7.4 Sphärische Spiegel

Parallell einfallende Strahlen werden nicht mehr in einem Punkt fokussiert (Katakaustik)

Da die achsnahen Strahlen nach der Reflexion annähernd durch einen Punkt gehen, wird dieser Punkt wieder Brennpunkt F genannt.



$$f = \frac{r}{2}$$

f Brennweite

r Krümmungsradius des Spiegels

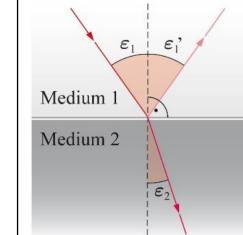
$[f] = \text{m}$

$[r] = \text{m}$

1.8 Brechung

Fällt ein Lichtstrahl auf die Grenzfläche zweier Medien, so dringt ein Teil des einfallenden Lichtes in das zweite Medium ein. Die auftretende Richtungsänderung wird als **Brechung** bezeichnet. Der in das zweite Medium eindringende Strahl wird **gebrochener Strahl** genannt.

1.8.1 Brechungsgesetz / Geschwindigkeit



$$\frac{\sin(\varepsilon_1)}{\sin(\varepsilon_2)} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$v_i = \frac{c}{n_i}$$

Je grösser n , desto grösser die Ablenkung und desto kleiner ε

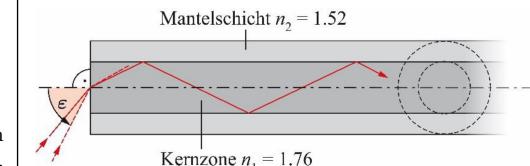
$n_2 > n_1$

ε_i Winkel zur Normalen
 n_i Brechungsindex
 v_i Geschwindigkeit im Medium n_i
 c Lichtgeschwindigkeit $c = 300 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

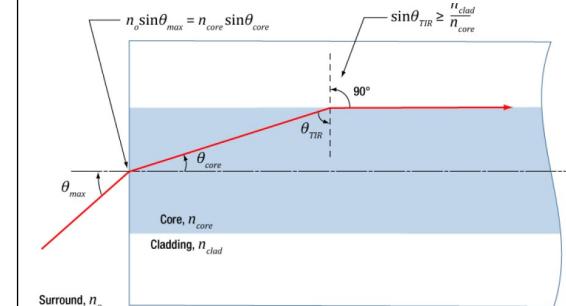
$$\begin{aligned} [\varepsilon_i] &= {}^\circ \\ [n_i] &= 1 \\ [v_i] &= \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ [c] &= \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

1.8.2 Anwendung: Glasfaser

Der Lichtstrahl bleibt in der Kernzone (Medium 1) gefangen, da diese einen grösseren Brechungsindex hat als die Mantelschicht (Medium 2)



Extremfall (Numerical Aperture NA = $n \sin \theta_{\max}$):



$$n_0 \sin \theta_{\max} = \sqrt{n_{\text{core}}^2 - n_{\text{clad}}^2}$$

1.8.3 Totalreflexion

Der Einfallswinkel ε_1 kann nicht grösser als 90° sein.
Für $\varepsilon_1 = 90^\circ$ berechnet sich $\varepsilon_2 = \varepsilon_g$ aus:

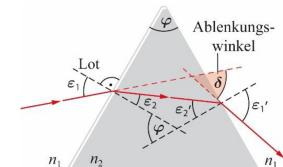
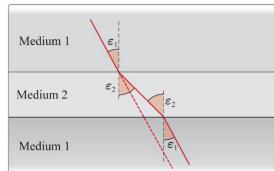
$$\varepsilon_g = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$$

Für den Grenzfall von $\varepsilon_1 > 90^\circ$ wird der gesamte Stahl reflektiert.



1.8.4 Brechung an ebenen Grenzflächen

Ein Lichtstrahl wird verschoben bzw. in eine beliebige Richtung geändert

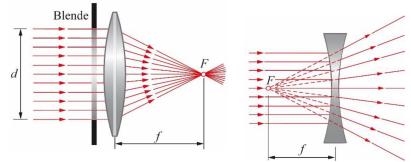


$$n = \frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{\sin \frac{\varphi + \delta}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

1.8.5 Brechung an gekrümmten Flächen

DIE Anwendung der Brechung ist eine Linse.

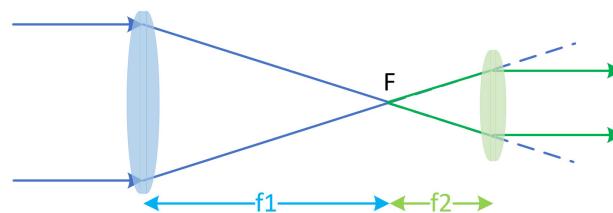
1.8.6 Linsentypen



Fresnellinse

Fresnellinse: Es kann vermieden werden, dass die Linse eine übermässige Dicke aufweist.

1.8.7 Beispiel mit zwei Linsen



Rechts gibt es ein kleineres Bild als links.

1.8.8 Typische Brechungswerte

| Material | Brechungsindex n für $\lambda = 589 \text{ nm}$ |
|--------------------------|---------------------------------------------------|
| Luft (Normalbed.) | 1.000'292 |
| Helium (Normalbed.) | 1.000'034'911 |
| Wasser (20°C) | 1.33 |
| Glycerin | 1.47 |
| Quarzglas | 1.54 |
| Plexiglas | 1.51 |
| Kronglas | 1.52 |
| Brillenglas (Kunststoff) | bis 1.76 |
| Diamant | 2.42 |

1.9 Dispersion

Der Brechungsindex eines Mediums ist eine **Funktion der Wellenlänge**: $n = n(\lambda)$

Diese Wellenlängenabhängigkeit wird als **Dispersion** bezeichnet

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{A}{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}}$$

$$n^2(f) = 1 + \frac{A'}{f_0^2 - f^2}$$

1.9.1 Abbe Zahl V

Gibt an, wie stark dispersiv ein Material ist
Große Abbe-Zahl \rightarrow wenig dispersives Material

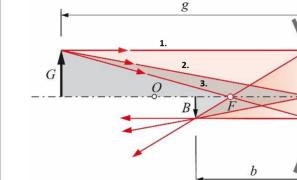
1.10 Abbildungen

1.10.1 Konstruktions-Anweisung

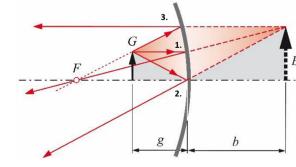
Man benutzt zwei der drei Hauptstrahlen:

1. Paralleler Strahl \rightarrow Brennpunkt
2. Mittelpunkt-Strahl \rightarrow mit gleichem Winkel zurück
3. Brennpunkt-Strahl \rightarrow Paralleler Strahl

reelles Bild



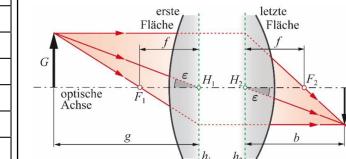
virtuelles Bild



B wird als **reeller Bildpunkt** bezeichnet, wenn sich die austretenden Strahlen schneiden.

B wird als **virtueller Bildpunkt** bezeichnet, wenn sich nur die Verlängerungen der austretenden Strahlen schneiden.

1.10.2 Terminologie



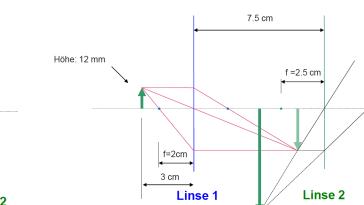
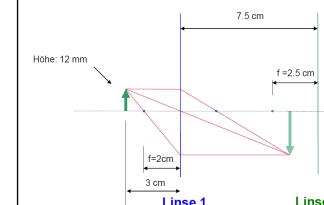
h_1
 h_2
 H_1
 H_2
 Vordere Hauptebene
 Hintere Hauptebene
 Vorderer Hauptpunkt
 Hinterer Hauptpunkt

f
 g
 b
 Brennweite
 Gegenstandsweite
 Bildweite

Die **Öffnungsblende** oder **Aperturblende** begrenzt das in das System einfallende Lichtbündel (Irisblenden, Linsenfassungen)

Die **Feldblende** begrenzt das Bildfeld. Sie legt den Ausschnitt der Objektebene fest, der abgebildet wird. (Foto-, Filmkamera: Formatarahmen)

1.10.3 Beispiel: Abbildungen bei zwei Sammellinsen



1.11 Abbildungsgleichungen

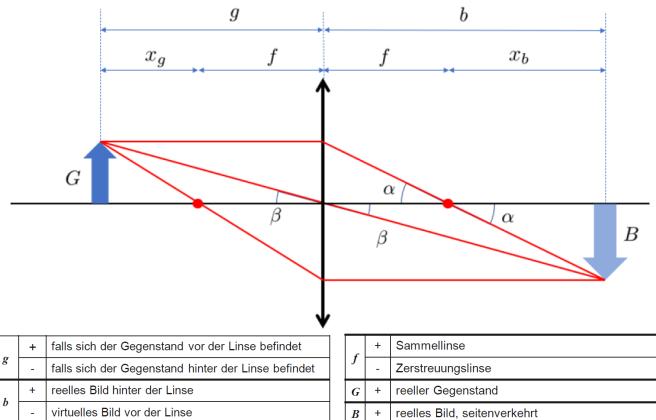
Ein Bild ist scharf dargestellt, wenn die **Abbildungsgleichung** erfüllt ist!

Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$$

Newton'sche Abb.-Gleichung

$$x_b \cdot x_g = f^2$$



1.11.1 Vergrößerungsverhältnis

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

$$V_{tot} = V_1 \cdot V_2$$

| | | |
|-----|-------------------------|-----------|
| V | Vergrößerungsverhältnis | $[V] = 1$ |
| b | Bildweite | $[b] = m$ |
| g | Gegenstandsweite | $[g] = m$ |
| B | Bildgröße | $[B] = m$ |
| G | Gegenstandsgröße | $[G] = m$ |
| f | Brennweite | $[f] = m$ |

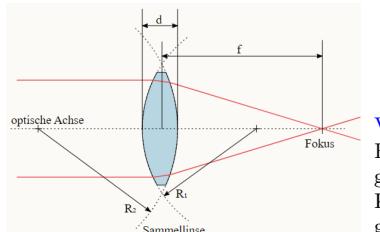
1.12 Brechkraft D

Die Optiker benutzen nicht die Brennweite sondern die Brechkraft in Dioptrie

Es gilt: $1 \text{ dpt} = 1 \text{ m}^{-1}$

$$D = \frac{1}{f}$$

1.13 Linsenschleifergleichung



$$D = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Vorzeichen von R_i beachten!
 Beide haben gleiches Vorzeichen, wenn Krümmungsmittelpunkte auf gleicher Seite der Linse liegen

1.13.1 Symmetrische Linsen ($R_1 = R_2$)

Für symmetrische Linsen gilt:

| | |
|---------------------------|----------------------------------------|
| $D = (n - 1) \frac{2}{R}$ | $f = \frac{1}{D} = \frac{R}{2(n - 1)}$ |
| D | Brechkraft |
| f | Brennweite |
| R_i | Linsenradius |
| n | Brechungsindex |
| $[D]$ | = dpt |
| $[f]$ | = $\frac{1}{s}$ Hz |
| $[R_i]$ | = m |
| $[n]$ | = 1 |

1.13.2 Kombination von zwei Linsen

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d}$$

1.13.3 Kombination von zwei dünnen Linsen ohne Zwischenraum

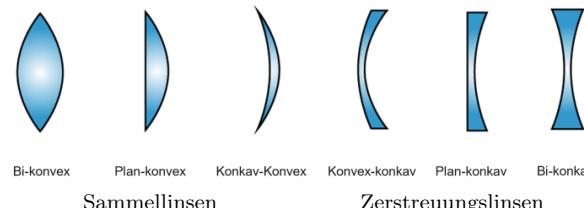
Die Kombination von zwei dünnen Linsen ohne Zwischenraum ist wie folgt definiert:

$$D = D_1 + D_2$$

1.14 Konvexe und Konkave Linsen

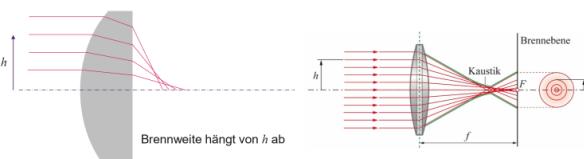
Konvex: nach aussen gewölbt

Konkav: nach innen gewölbt



1.15 Aberration

Unter dem Begriff Aberration versteht man die Abweichung vom idealisierten Fall.



1.15.1 Astigmatismus

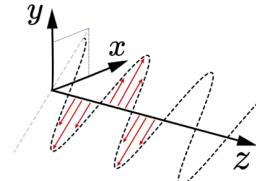


1.16 Polarisation

1.16.1 Lineare Polarisation

E_x und E_y können unterschiedliche Amplituden haben.
 Die Phasen müssen gleich sein.

EM-Wellen können mit dem Herzsches Gitter oder mit dem Brewster Winkel linear polarisiert werden.



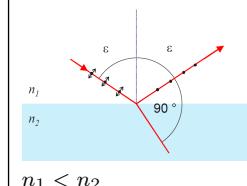
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

\vec{E} kann zu $\vec{0}$ werden

1.16.2 Brewster Winkel

Unter dem Brewster Winkel wird nur linear polarisiertes Licht zurückgeworfen.

Der ins Medium 2 eindringende Strahl steht dabei senkrecht auf dem reflektierten Strahl

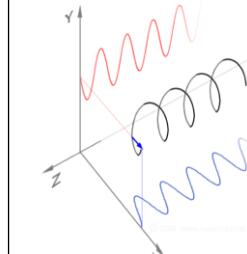


$$\tan(\varepsilon) = \frac{n_2}{n_1}$$

1.16.3 Zirkulare Polarisation

x und y Komponenten haben die gleiche Amplitude und eine Phasendifferenz von 90°

Positive zirkulare Polarisation σ^+
 Negative zirkulare Polarisation σ^-



$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(2\pi ft - kz) \\ E_0 \sin(2\pi ft - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

\vec{E} kann nicht zu $\vec{0}$ werden

1.16.4 Elliptische Polarisation

x und y Komponenten haben unterschiedliche Amplituden und eine beliebige Phasendifferenz.

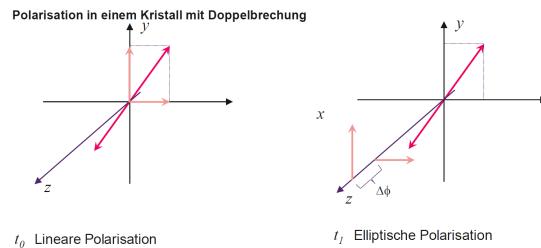
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(2\pi ft - kz) \\ E_0 \cos(2\pi ft - kz + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.16.5 Doppelbrechung

Doppelbrechung ist eine anisotropische Eigenschaft von Kristallen. Diese Kristalle haben unterschiedliche Brechungsindizes in unterschiedliche Richtungen.

Nach einer gewissen Zeit t haben die x - und y -Komponente einen Phasenunterschied.

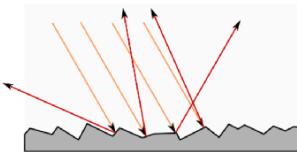
$\Rightarrow x$ und y bewegen sich unterschiedlich schnell fort



1.17 Streuung

1.17.1 Diffuse Streuung

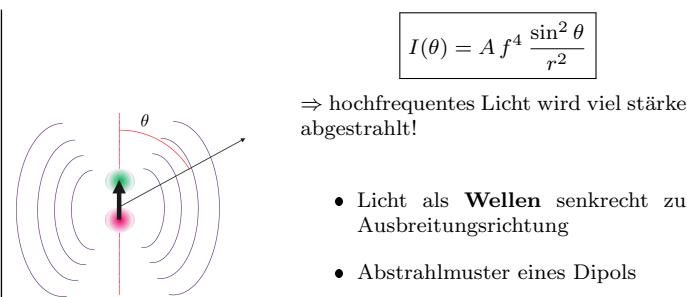
Streuung des Lichts an Teilchen von Dimensionen $d \gg \lambda$



- Licht als **Strahlen**
- Reflexion in alle Richtungen
- Keine bevorzugte Richtung, unabhängig von λ
- Beispiele:
 - Wolken, Nebel
 - milchige Lösungen

1.17.2 Rayleigh-Streuung

Streuung des Lichts an Teilchen von Dimensionen $d < \lambda$ (atomare Größe)



$$I(\theta) = A f^4 \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

\Rightarrow hochfrequentes Licht wird viel stärker abgestrahlt!

- Licht als **Wellen** senkrecht zur Ausbreitungsrichtung
- Abstrahlmuster eines Dipols
- Himmel tagsüber blau
- Himmel abends rötlich

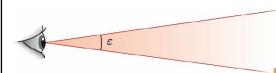
1.18 Abbildungssysteme - Auge

Brechzahl Augenlinse: 1.3

Tiefe: $\sim 25\text{mm}$

1.18.1 Terminologie des Auges

Sehwinkel ε



Die Grösse, in der ein Gegenstand dem betrachtenden Auge erscheint (**in Bogenminuten**)

$$1^\circ \Leftrightarrow 60'$$

Auflösung

Minimaler Winkelabstand ε_{min} , den zwei Punkte haben müssen, damit sie noch getrennt wahrgenommen werden.

Normalsichtiges Auge: Auflösung ca. 1 Bogenminute ($1'$)

Sehschärfe

Reziproker Wert der Auflösung

$$S = \frac{1}{\varepsilon_{min}} \quad \text{beim Menschen also } S = 1$$

Deutliche Sehweite s (**normierte Betrachtungsdistanz**)

Damit die Vergrösserungen von Lupen und Mikroskopen eindeutig bestimmt werden können, wird eine **deutliche Sehweite** definiert:

$$s = 25\text{ cm} = 0.25\text{ m}$$

1.18.2 Kurzsichtigkeit vs. Weitsichtigkeit

Kurzsichtigkeit

- Augapfel zu lang
- Konkave Streulinse als Korrektur
- Brille rückt Gegenstand näher heran

Weitsichtigkeit

- Augapfel zu kurz
- Konvexe Sammellinse als Korrektur
- Brille rückt Gegenstand weiter weg

1.19 Abbildungssysteme - Fotoapparat

Bildgrösse $B[m]$

Die Bildweite b ist normalerweise viel kleiner als die Gegenstandsweite g und daraus folgt:

$$B = \frac{f}{g} G$$

Lichtstärke $H[\frac{W}{m^2}]$

Die Intensität des Lichts auf dem Film ist gegeben durch

$$H = \left(\frac{d}{f}\right)^2 = q^2$$

Blendenzahl Z

z.B.: 1, 1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, ...

$$Z = \frac{1}{q} = \frac{1}{\sqrt{H}}$$

Belichtung E , Belichtungszeit t

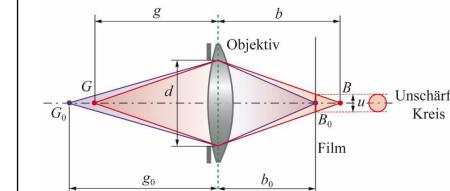
$$E = Ht \approx q^2 t$$

$$t = \frac{G}{v} = \frac{g B}{f v}$$

Schärfentiefe

In der Filmebene ergibt sich vom Punkt G kein scharfer Bildpunkt, sondern ein **Unschärfekreis** mit dem Durchmesser u .

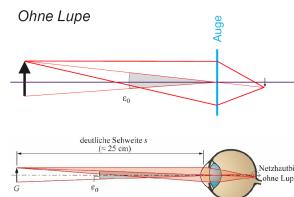
Es wird folgende Gegenstandsweite g in den Unschärfekreis abgebildet:



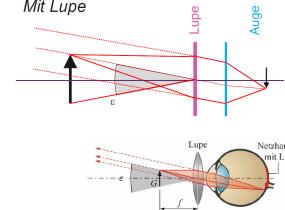
$$\frac{1}{g} = \frac{1}{g_0} \pm \frac{u}{q f^2}$$

| | | |
|-------|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| b | Bildweite | $[b] = \text{m}$ |
| b_0 | Bilddistanzo | $[b_0] = \text{m}$ |
| B | Bildgrösse | $[B] = \text{m}$ |
| B_0 | Bild ₀ | $[B_0] = \text{m}$ |
| g | Gegenstandsweite (G zu Objektiv) | $[g] = \text{m}$ |
| g_0 | Gegenstandsdistanz ₀ (G ₀ zu Objektiv) | $[g_0] = \text{m}$ |
| G | Gegenstandsgrösse | $[G] = \text{m}$ |
| G_0 | Gegenstandsgrösse ₀ | $[G_0] = \text{m}$ |
| f | Brennweite | $[f] = \text{m}$ |
| u | Durchmesser Unschärfekreis | $[d] = \text{m}$ |
| d | Durchmesser Blendenöffnung | $[d] = \text{m}$ |
| v | Geschw. des zu fotograf. Objekts | $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |

1.20 Abbildungssysteme - Lupe



$$\tan(\varepsilon_0) = \frac{G}{s}$$

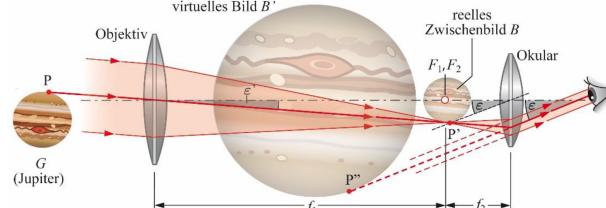


$$\tan(\varepsilon) = \frac{G}{f}$$

| | | |
|-----------------|-----------------------------------------|------------------------------|
| ε_i | Sehwinkel | $[\varepsilon_i] = {}^\circ$ |
| s | Deutliche Schweite $s = 0.25 \text{ m}$ | $[s] = \text{m}$ |
| f | Brennweite | $[f] = \text{m}$ |
| V | Vergrößerung | $[V] = 1$ |

1.21 Abbildungssysteme - Fernrohr

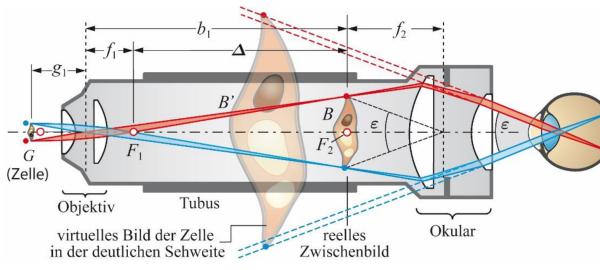
Es wird zuerst ein vergrößertes Bild erzeugt, welches selber wiederum mit einer Lupe betrachtet wird.



$$V = \frac{\tan(\varepsilon)}{\tan(\varepsilon')} = \frac{B}{B'} = \frac{f_1}{f_2}$$

1.22 Abbildungssysteme - Mikroskop

Es wird zuerst ein vergrößertes Bild erzeugt, welches selber wiederum mit einer Lupe betrachtet wird.



$$V = \frac{\Delta \cdot s}{f_1 \cdot f_2} = \frac{\tan(\varepsilon)}{\tan(\varepsilon_0)} = \frac{\frac{B}{f_2}}{\frac{G}{s}} = \frac{B}{G} \frac{s}{f_2} = \frac{b_1}{g_1} \frac{s}{f_2}$$

| | | |
|-----------------|-----------------------------------------------|------------------------------|
| ε_i | Sehwinkel | $[\varepsilon_i] = {}^\circ$ |
| s | Deutliche Schweite $s = 0.25 \text{ m}$ | $[s] = \text{m}$ |
| f_i | Brennweite | $[f_i] = \text{m}$ |
| V | Vergrößerung | $[V] = 1$ |
| Δ | optische Tubuslänge (Abstand der Brennpunkte) | $[\Delta] = \text{m}$ |
| b_1 | Bildweite | $[b_1] = \text{m}$ |
| g_1 | Gegenstandsweite | $[g_1] = \text{m}$ |
| B | Bildgrösse | $[B] = \text{m}$ |
| G | Gegenstandsgrösse | $[G] = \text{m}$ |

1.23 Farbentheorie

Spektralfarben:

Mischfarben:

Grundfarben:

Komplementärfarben:

Monochromatisches Licht:

Die gesamten Lichtfarben

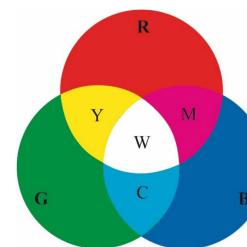
Mischung von versch. Spektralfarben
Ein Set, um alle Mischfarben zu erzeugen

Mischfarbe, die bleibt, wenn von weissem Licht eine Farbe ausgeblendet wird

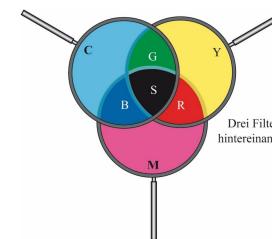
Nur eine einzige Wellenlänge (Farbe)

1.23.1 Farbmischungen

Additive Farbmischung



Subtraktive Farbmischung



gebracht und dann sich selbst überlassen, so führt es *freie Schwingungen* oder *Eigenschwingungen* aus.

Erzwungene Schwingung

Wird ein System von aussen durch periodische oder auch nichtperiodische Störungen zum Schwingen veranlasst, wird von *fremderregten Schwingungen* gesprochen.

Selbsterregte Schwingung

Ein schwingungsfähiges System kann unter Umständen einer Energiequelle Energie entziehen und diese der eigenen Schwingung selbst zuführen, so dass die Schwingung trotz einer eventuell vorhandenen Dämpfung nicht abklingt.

2.1 Freie Schwingungen

2.1.1 Terminologie

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$y(t) = v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad \ddot{y}(t) = a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

| | | |
|---------------|-----------------------------------|-----------------------------------------------|
| $y(t)$ | Position zum Zeitpunkt t | $[y(t)] = \text{m}$ |
| $\dot{y}(t)$ | Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t | $[\dot{y}(t)] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| $\ddot{y}(t)$ | Beschleunigung zum Zeitpunkt t | $[\ddot{y}(t)] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |
| A | Amplitude | $[A] = \text{m}$ |
| ω | Winkelgeschwindigkeit | $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |
| φ | Phase | $[\varphi] = \text{rad}$ |
| T | Periodendauer | $[T] = \text{s}$ |
| f | Frequenz | $[f] = \frac{1}{\text{s}}$ |

2.2 Beispiel - Federpendel

$$F_{res} = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$

$$F_{Feder} = -k \cdot x$$

$$\text{Kräftegleichgewicht: } m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$$

$$\text{DGL: } \ddot{x} = -\omega^2 \cdot x \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\text{Allgemeine Lösung: } x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$m \quad \text{Masse} \quad [m] = \text{m}$$

$$k = c \quad \text{Federkonstante} \quad [k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

2.2.1 Harmonische Schwingung - Energiebetrachtung

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$E_{tot} = E_{pot} + E_{kin} = \frac{k \cdot x^2}{2} + \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2}$$

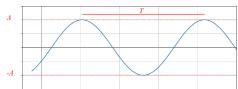
$$= \frac{k}{2} A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{m}{2} \omega^2 A^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{kA^2}{2} (\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi))$$

$$E_{tot} = \frac{k \cdot A^2}{2}$$

2.3 Beschreibung einer 1D-Schwingung

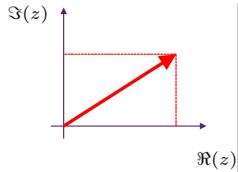
2.3.1 Zeitbreich



Auslenkung in Abhängigkeit der Zeit
Beispiel: Oszilloskop

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

2.3.2 Zeigerdarstellung

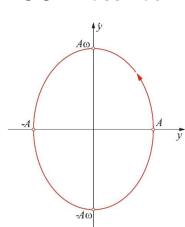


Auslenkung als Zeiger (komplexe Zahl),
der um den Ursprung rotiert

$$z(t) = x(t) + i y(t)$$

$$\mathcal{R}(z) \quad \mathcal{F}(z)$$

2.3.3 Phasenraum



Darstellung der Position y und der
Ableitung (Geschwindigkeit)

2.4 Pendel

2.4.1 Fadenpendel

$$F_R = F_G \cdot \sin(\varphi) = m \cdot g \cdot \sin(\varphi) \approx m \cdot g \cdot \varphi$$

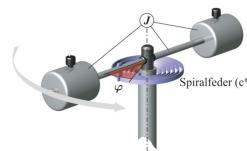
$$x = \varphi \cdot l \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{x}{l}$$

$$\Rightarrow F_G = m \cdot g \cdot \frac{x}{l}$$

$$\text{Kräftegleichgewicht: } F = m \cdot \ddot{x} = -m \cdot g \frac{x}{l}$$

$$\text{DGL: } \ddot{x} = -\omega^2 \cdot x \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{g}{l}$$

2.4.2 Drehpendel



Analogie ohne Rotation:

$$F = -k \cdot x \quad F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$

$$M = -c^* \varphi \quad M = J \cdot \ddot{\varphi}$$

Gleichgewicht: $J \cdot \ddot{\varphi} = -c^* \varphi$

$$\text{DGL: } \ddot{\varphi} = -\omega^2 \cdot \varphi \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{c^*}{J}$$

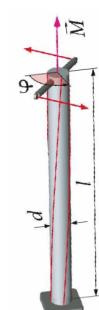
φ folgt der gleichen DGL wie x im Fall des Federpendels

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega t + \delta)$$

$$J \quad \text{Trägheitsmoment} \quad [J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$c^* \quad \text{Winkelrichtgrösse} \quad [c^*] = \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$$

2.4.3 Torsionspendel



Variante des Drehpendels mit der Winkelrichtgrösse

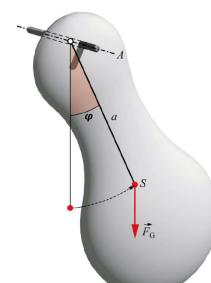
$$c^* = \frac{\pi r^4 G}{2l}$$

$$G \quad \text{Torsionsmodul}$$

$$l \quad \text{Länge}$$

$$r = \frac{d}{2} \quad \text{Radius}$$

2.4.4 Physikalisches Pendel



$$M = -a \cdot \sin(\varphi) \cdot F_G = -a \cdot m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$$

$$\text{Bewegungsgleichung: } M = J_A \cdot \ddot{\varphi}$$

$$\text{Gleichgewicht: } -a \cdot m \cdot g \cdot \sin(\varphi) = J_A \cdot \ddot{\varphi}$$

$$\text{Kleine Winkel: } -a \cdot m \cdot g \cdot \varphi = J_A \cdot \ddot{\varphi}$$

$$\text{DGL: } \ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{g}{L^*} = \frac{g \cdot a \cdot m}{J_A}$$

$$L^* = \frac{J_A}{a \cdot m} \quad J_A = J_s + m \cdot a^2$$

φ folgt der gleichen DGL wie x im Fall des Federpendels

Auch gültig für mehrere Massen:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{A1} + J_{A2}}{(a_1 \cdot m_1 + a_2 \cdot m_2) \cdot g}}$$

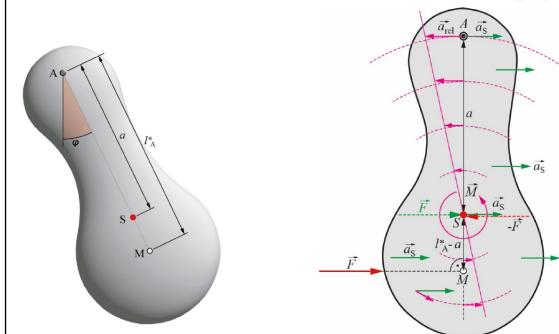
⇒ J-Tabelle im Anhang Abschnitt 8.1

| | | |
|-------|----------------------------------|--------------------------------------|
| S | Schwerpunkt des Körpers | $[J_S] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$ |
| J_s | Trägheitsmoment bzgl. S | $[a] = \text{m}$ |
| a | Abstand Schwerpunkt - Drehpunkt | $[L^*] = \text{m}$ |
| L^* | Reduzierte Länge | $[J_A] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$ |
| J_A | Trägheitsmoment um Aufhängepunkt | |

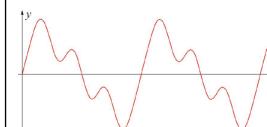
2.5 Perkussionszentrum

Frage: Wie weit vom Drehpunkt A muss ein Impuls auf einen Körper ausgeübt werden, damit keine Kraft auf die Achse ausgeübt wird?

Antwort: Auf Höhe der reduzierten Länge $L^* = \frac{J_A}{a \cdot m}$



2.6 Periodische Schwingung



Muster wiederholt sich

$$f(t) = f(t - T)$$

Periodische Schwingungen können im Frequenzbereich in eine **Grundschwingung** und **Oberschwingungen (Harmonische)** zerlegt werden.

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n \cdot \omega + \varphi_n)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{Grundschwingung}$$

$$\omega_n = n \cdot \omega_0 \quad \text{n-te Harmonische}$$

2.6.1 Fourier-Analyse

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt$$

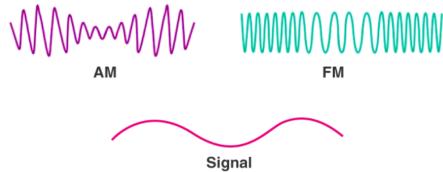
$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

2.7 Signalmodulationen

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Amplitudenmodulation (AM)
Frequenzmodulation (FM)

Veränderung von A
Veränderung von ω

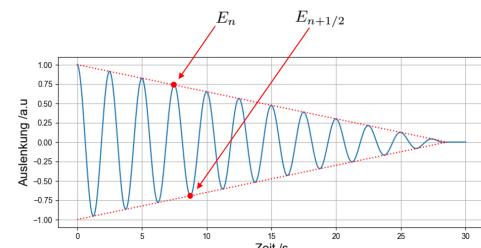


2.8 Gedämpfte Schwingungen

2.8.1 Gedämpfte Schwingung - Konstante Reibungskraft

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \mu F_N \quad \text{für } \ddot{x}(t) > 0$$

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) + \mu F_N \quad \text{für } \ddot{x}(t) < 0$$



$$E = \frac{k A^2}{2}$$

$$\Delta A = 4 \frac{F_R}{k}$$

| | | |
|------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| E | Energie bei max. Auslenkung | $[E] = \text{J}$ |
| $k = c$ | Federkonstante | $[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$ |
| A | Amplitude bei max. Auslenkung | $[A] = \text{m}$ |
| ΔA | Amplitudenänderung pro Periode | $[\Delta A] = \text{m}$ |
| F_R | Reibungskraft | $[F_R] = \text{N}$ |

2.8.2 Gedämpfte Schwingungen - Dämpfung proportional zur Geschwindigkeit

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad D = \frac{\delta}{\omega}, \quad f = \frac{\Omega}{2\pi}$$

| | | | |
|----------|----------------------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. Fall: | $\delta^2 - \omega^2 > 0, D > 1$ | $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$ | Aperiod. Schwingung |
| 2. Fall: | $\delta^2 - \omega^2 < 0, D < 1$ | $x(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\Omega t + \varphi)$ | Period. Schwingung |
| 3. Fall: | $\delta^2 - \omega^2 = 0, D = 1$ | $x(t) = (A + Bt)e^{-\delta t}$ | Grenzfall ($\lambda = -\delta$) |

$$\lambda_{1,2} = -\omega(D \pm \sqrt{D^2 - 1})$$

$$z \cdot \Lambda = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+z}}\right) = z \cdot \delta T$$

$$\Omega^2 = \omega^2 - \delta^2$$

| | | |
|-----------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|
| $\frac{\kappa}{2} = \delta$ | Abklingkonstante | $[\kappa = \delta] = \frac{1}{\text{s}}$ |
| ω | Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung | $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |
| D | Dämpfungsgrad | $[D] = 1$ |
| Ω | Kreisfrequenz gedämpfte Schwingung | $[\Omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |
| Λ | Logarithmisches Dekrement | $[\Lambda] = \frac{1}{\text{s}}$ |
| A_n | Amplitude zum Zeitpunkt t | $[A_n] = \text{m}$ |
| A_{n+z} | Amplitude zum Zeitpunkt $t + z \cdot T$ | $[A_{n+z}] = \text{m}$ |
| z | Anzahl verstrichene Schwingungen | $[z] = 1$ |
| T | Periodendauer | $[T] = \text{s}$ |
| f | Frequenz der gedämpften Schwingung | $[f] = \text{Hz}$ |

2.9 Fremderregte Schwingung

2.9.1 Definition

Erzwungene Schwingungen sind Schwingungen, die durch eine periodische Störung verursacht werden. (EN: *driven oscillation*)

2.9.2 Übersicht über Hilfsgrößen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \delta = \frac{\kappa}{2} = \frac{b}{2m}, \quad D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\kappa}{2\omega_0}$$

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \Omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$$

| | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------------|
| ω_0 | Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung | $[\omega_0] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |
| Ω_d | Kreisfrequenz gedämpfte Eigenfrequenz | $[\Omega_d] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |
| ω_r | Resonanzkreisfrequenz | $[\omega_r] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |
| ω | Kreisfrequenz der Störung (Erreger) | $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |
| $\frac{\kappa}{2} = \delta$ | Abklingkonstante | $[\kappa] = \frac{1}{\text{s}}$ |
| D | Dämpfungsgrad | $[D] = 1$ |
| η | Dimensionslose Frequenz | $[\eta] = 1$ |
| $k = c$ | Federkonstante | $[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$ |

2.9.3 Resonanz

Die Amplitude A wird maximal, wenn der Nenner von $A(\omega)$ minimal wird

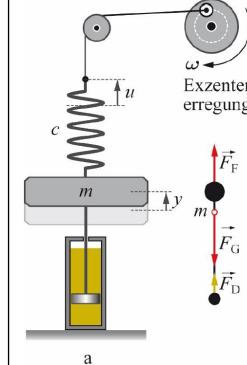
Resonanzkreisfrequenz:

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2}$$

Resonanzamplitude:

$$A_r = \frac{u_0}{2D\sqrt{1 - D^2}}$$

2.10 Fremderregte Schwingungen - Kraftregung



$$\text{DGL: } m \ddot{y} + b \dot{y} + cy = F_0 \sin(\omega t)$$

$$y(t) = \underbrace{A(\omega) \sin(\omega t - \varphi)}_{y_p(t)} + \underbrace{B e^{-\delta t} \sin(\Omega_d t + \varphi_0)}_{y_h(t)}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right), \quad A(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

$A(\omega)$ Amplitudenverlauf $[A(\omega)] = \text{m}$
 φ Phasenverschiebung $[\varphi] = \text{rad}$

2.10.1 Vergrößerungsfunktion / Phasenverschiebung

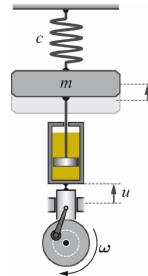
$$V = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1 - \eta^2}\right)$$

$$V_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_r^4}} \quad \text{mit } \eta_r = \sqrt{1 - 2D^2}$$

| | | |
|-----------|-------------------------|--------------------------|
| φ | Phasenverschiebung | $[\varphi] = \text{rad}$ |
| V | Vergrößerungsfunktion | $[V] = 1$ |
| V_r | Vergrößerungsfunktion | $[V_r] = 1$ |
| η | Dimensionslose Frequenz | $[\eta] = 1$ |
| D | Dämpfungsgrad | $[D] = 1$ |

2.11 Fremderregte Dämpfererregung



$$\text{DGL: } m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = b\omega u_0 \cos(\omega t)$$

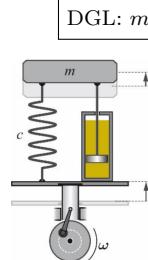
$$A(\omega) = \frac{b\omega u_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

$$V = \frac{2D\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right) - \frac{\pi}{2}$$

- $A(\omega)$ Amplitude der Schwingung $[A(\omega)] = \text{m}$
 φ Phasenverschiebung $[\varphi] = \text{rad}$
 V Vergrößerungsfunktion $[V] = 1$
 η Dimensionslose Frequenz $[\eta] = 1$
 D Dämpfungsgrad $[D] = 1$

2.12 Fremderregte Stützenerregung



$$\text{DGL: } m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = -m\omega^2 u_0 \sin(\omega t) \quad \text{mit } q = y - u$$

$$A(\omega) = \frac{\omega^2 u_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

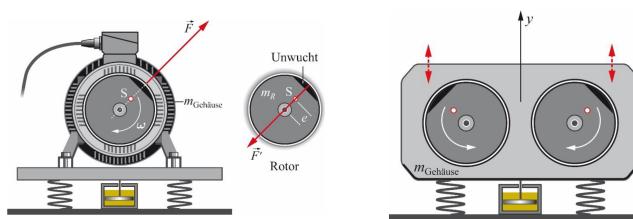
$$V = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right) - \pi$$

- φ Phasenverschiebung
 V Vergrößerungsfunktion
 η Dimensionslose Frequenz
 D Dämpfungsgrad
 ω_0 Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung $[\omega_0] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
 ω Kreisfrequenz der Störung (Erreger) $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
 $A(\omega)$ Amplitude der Schwingung $[A(\omega)] = \text{m}$

2.13 Fremderregte Schwingung - Unwuchterregung

Unwucht: Schwerpunkt S des Rotors der Masse m_R bewegt sich auf einem Kreis mit Radius e



$$\text{DGL in } y\text{-Richtung: } m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = -m_R\omega^2 e \sin(\omega t)$$

Radiale Beschleunigung des Schwerpunkts des Rotors: $a_R = \omega^2 e$

Kraft des Rotors auf die Maschine: $F_U = m_R \cdot a_R = m_R \cdot \omega^2 e$

$$A(\omega) = \frac{m_R}{m} \frac{e\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

$$A_R = \frac{m_R}{m} \frac{e}{2D\sqrt{1-D^2}}$$

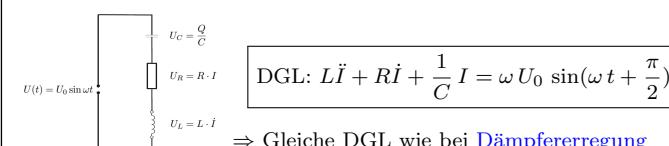
2.13.1 Kraft auf die Basis des Gehäuses

$$F_B = cy + b\dot{y} = F_{B0} \sin(\omega t - \varphi + \psi)$$

$$F_{B0} = \frac{m_R e \omega^2 \sqrt{1 + (2D\eta)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

- | | | |
|-------------|------------------------------------|---------------------------------------|
| m_R | Masse des Rotors | $[m_R] = \text{kg}$ |
| a_R | Radiale Beschleunigung Schwerpunkt | $[a_R] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ |
| e | Abstand Mittelpunkt - Schwerpunkt | $[e] = \text{m}$ |
| φ | Phasenverschiebung | $[\varphi] = \text{rad}$ |
| η | Dimensionslose Frequenz | $[\eta] = 1$ |
| D | Dämpfungsgrad | $[D] = 1$ |
| $A(\omega)$ | Amplitude | $[A(\omega)] = \text{m}$ |
| A_R | Resonanzamplitude | $[A_R] = \text{m}$ |

2.14 Fremderregte Schwingung - Schwingkreis



$$\text{DGL: } L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = \omega U_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

⇒ Gleiche DGL wie bei Dämpfererregung

$$\text{DGL: } m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = b\omega u_0 \cos(\omega t), A(\omega) = \frac{b\omega u_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

$$I(\omega) = \frac{\omega}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}} U_0, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, D = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$V = \frac{U_{L0}}{U_0} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

2.14.1 Resonanz

Resonanzfrequenz

$$\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

| | | |
|-------------|--------------------------------------|--------------------------------------------|
| ω_0 | Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung | $[\omega_0] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |
| ω | Kreisfrequenz der Störung (Erreger) | $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |
| ω_r | Resonanzfrequenz | $[\omega_r] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |
| I_{0r} | Strom-Amplitude @ Resonanz | $[I_{0r}] = \text{A}$ |
| U_0 | Amplitude der Erregerspannung | $[U_0] = \text{V}$ |
| U_{L0} | Amplitude Spulenspannung | $[U_{L0}] = \text{V}$ |
| $A(\omega)$ | Amplitude der Schwingung | $[A(\omega)] = \text{m}$ |
| V | Vergrößerungsfunktion | $[V] = 1$ |
| η | Dimensionslose Frequenz | $[\eta] = 1$ |
| D | Dämpfungsgrad | $[D] = 1$ |

Amplitude @ Resonanz

$$I_{0r} = \frac{U_0}{R}$$

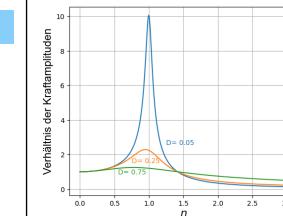
2.15 Fremderregte Schwingung - Güte Q

2.15.1 Definition

Die relative Abnahme der Schwingungsenergie $E(t)$ pro Schwingdauer wird als **Güte** oder **Gütefaktor** bezeichnet

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}$$

2.15.2 Beziehungen



$$Q = \frac{1}{2D}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

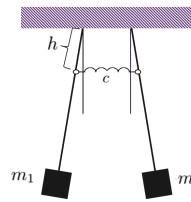
Breite der Resonanzkurve bei $U_0 = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$

breite Kurve ⇒ tiefe Güte

2.16 Gekoppelte Pendel

Zwei Pendel sind durch eine Feder miteinander verbunden.
Die Bewegung eines Pendels hat Auswirkungen auf die Bewegung des anderen Pendels.
 Gesucht ist eine Beschreibung der Bewegung des Pendels.

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 &= -m_1 g a_1 \varphi_1 + c \cdot h^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 &= -m_2 g a_2 \varphi_2 - c \cdot h^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$



Spezialfall $J_1 = J_2 = J$ und $m_1 = m_2 = m$ und $a_1 = a_2 = a$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= -\omega^2 \varphi_1 + k(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \ddot{\varphi}_2 &= -\omega^2 \varphi_2 - k(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \omega^2 = \frac{mga}{J} \quad k = \frac{c \cdot h^2}{J} \quad \omega_k = \sqrt{\omega^2 + 2k}$$

$$\text{mit } \Phi_+ = \varphi_1 + \varphi_2 \quad \Phi_- = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\begin{array}{ll} \text{Symm: } \ddot{\Phi}_+ = -\omega^2 \Phi_+ & \varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \frac{\Phi_0}{2} \cos \omega t \\ \text{Antisymm: } \ddot{\Phi}_- = -(\omega^2 + 2k)\Phi_- & \varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \frac{\Phi_0}{2} \cos \omega_k t \end{array}$$

Allgemeine Lösungen des gekoppelten Systems:

Lineare Kombination der symmetrischen und antisymmetrischen Lösungen

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \Phi \sin(\Omega t) \cdot \cos(\bar{\omega}t) \quad \Omega = \frac{\omega_k - \omega}{2} \\ \varphi_2(t) &= \Phi \cos(\Omega t) \cdot \sin(\bar{\omega}t) \quad \bar{\omega} = \frac{\omega + \omega_k}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} k \text{ Kopplungsfaktor} & [k] = 1 \\ h \text{ Abstand zur Aufhängung} & [h] = \text{m} \\ J \text{ Massenträgheitsmoment} & [J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \\ c \text{ Federkonstante} & [c] = \frac{\text{N}}{\text{m}} \end{array}$$

3 Wellen

3.1 Definition

Eine Welle ist eine **Störung eines Gleichgewichtszustandes**, die sich im **Raum ausbreitet**.

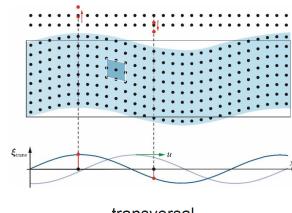
3.1.1 Bemerkungen zur Definition

- Voraussetzung für die **Ausbreitung** einer Welle ist die **Kopplung** benachbarter Teilchen.
- Eine Welle transportiert Energie (keine Materie)**
- Die Störung kann von ganz unterschiedlicher Natur sein:
 - Druck in Luft
 - Auslenkung einer Position entlang einem Seil (Saite)
 - Elektrische Signale

Die Störung wird mit ξ beschrieben: $\xi = \xi(x, y, z, t)$

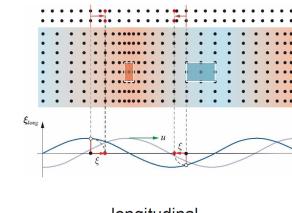
3.2 Klassifizierung von Wellen

Welle breite sich **senkrecht** zur Störung aus



z.B. Lichtwellen

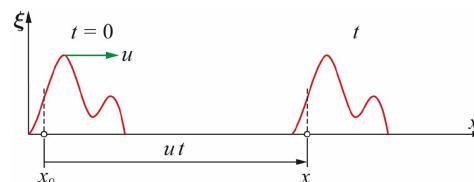
Welle breite sich **parallel** zur Störung aus



z.B. Schallwellen

3.3 Wellengeschwindigkeit / Phasengeschwindigkeit u

Die Störung an der Position x_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ breite sich mit der Geschwindigkeit u aus und erreicht nach einer Zeit t die Position x



$$\xi(x, t) = \xi(x - ut, 0) = f(x - ut)$$

In einem Medium mit **grösserer Dichte** breite sich Wellen **schneller aus!** \Rightarrow Bessere Kopplung der Moleküle

3.3.1 Verschiedene Wellengeschwindigkeiten

Schallwellen in Fluiden:

$$u = \sqrt{\frac{1}{\rho \kappa}}$$

Schallwellen in Gasen:

$$u = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

Elastische Longitudinalwellen in einem schlanken Stab

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Elastische Transversalwellen

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Transversalwellen auf einem Seil oder einer Saite

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

Elektromagnetische Wellen
(transversal)
(z.B. Lichtwellen)

$$u = \frac{c}{n}$$

u Wellengeschwindigkeit

A Querschnittsfläche

E Elastizitätsmodul

F Spannkraft des Seils / der Saite

G Schubmodul

M Molmasse

p Druck

R Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

T Absolut-Temperatur (in K)

κ Kompressibilität

α Adiabatenexponent

ρ Dichte

n Brechungsindex

c Lichtgeschwindigkeit: $c = 300 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$[A] = \text{m}^2$$

$$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$$

$$[F] = \text{N}$$

$$[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$$

$$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$$

$$[p] = \text{Pa}$$

$$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$[T] = \text{K}$$

$$[\kappa] = \frac{1}{\text{Pa}}$$

$$[\alpha] = 1$$

$$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$[n] = 1$$

$$[c] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.4 Wellengleichungen

Die Wellengleichungen stellen eine **Verbindung zwischen Zeit und Ort** her

Eindimensional
Welle breite sich in 1D aus

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Zweidimensional
Welle breite sich in 2D aus

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Dreidimensional
Welle breite sich in 3D aus

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

3.4.1 Wichtige Lösung der Wellengleichung (1D)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Ansatz: $\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \sin(\omega t - kx)$

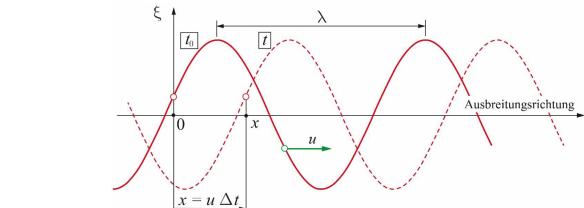
$$\underbrace{-k^2 A \sin(\omega t - kx)}_{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}} = -\frac{1}{u^2} \cdot \underbrace{\omega^2 A \sin(\omega t - kx)}_{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

$$\text{mit Lsgng } u^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

3.5 Harmonische Wellen

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

3.5.1 Terminologie



| | | |
|-----------|-----------------------|------------------------------------------|
| ξ_0 | Amplitude | $[\xi_0]$ |
| ω | Kreisfrequenz | $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |
| T | Periodendauer | $[T] = \text{s}$ |
| k | Wellenzahl | $[k] = \frac{1}{\text{m}}$ |
| λ | Wellenlänge | $\lambda = \text{m}$ |
| u | Wellengeschwindigkeit | $[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| φ | Phasenverschiebung | $[\varphi] = \text{rad}$ |

3.5.2 Zusammenhänge

| Grösse → | k | ω | f | u | T | λ |
|-------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------|--------------------------|---------------------|--------------------------|
| ausgedrückt mit ↓ | | | | | | |
| k | | | $k \cdot u$ | $\frac{ku}{2\pi}$ | $\frac{\omega}{k}$ | $\frac{2\pi}{k \cdot u}$ |
| ω | $\frac{\omega}{u}$ | | | $\frac{\omega}{2\pi}$ | $\frac{\omega}{k}$ | $\frac{2\pi u}{\omega}$ |
| f | $\frac{2\pi f}{u}$ | $2\pi f$ | | $\frac{2\pi f}{k}$ | $\frac{1}{f}$ | $\frac{u}{f}$ |
| u | $\frac{\omega}{u}$ | ku | $\frac{u}{\lambda}$ | | $\frac{\lambda}{u}$ | $\frac{u}{f}$ |
| T | $\frac{2\pi}{u \cdot T}$ | $\frac{2\pi}{T}$ | $\frac{1}{T}$ | $\frac{2\pi}{k \cdot T}$ | | $u \cdot T$ |
| λ | $\frac{2\pi}{\lambda}$ | $\frac{2\pi u}{\lambda}$ | $\frac{u}{\lambda}$ | $\frac{\lambda}{T}$ | $\frac{\lambda}{u}$ | |

3.6 Wellenflächen / Wellenfronten

Die Gesamtheit aller Punkte, die zu einer bestimmten Zeit im gleichen Schwingungszustand sind, bilden eine Fläche im Raum. Diese **Flächen mit gleicher Phase** werden als **Wellenflächen** oder **Wellenfronten** genannt.

Eine Welle kann sich in 3 Dimensionen ausbreiten und dabei **verschiedene Wellenflächen** zeigen.

3.7 Wellenausbreitung

Wellengleichung
(3D)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Lösungsansatz

$$\xi = \xi_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

mit Wellenvektor $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$ und Ortsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$

3.7.1 Ebene Wellen

- Wellenfronten sind Ebenen im Raum
- Wellenvektor \vec{k} steht senkrecht auf den Ebenen
- Abstand** zw. zwei Wellenfronten ist λ

Die Ebenen bewegen sich mit der Wellengeschwindigkeit

$$u = \frac{\omega}{k} \text{ mit } k = \|\vec{k}\| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

in die **Richtung**, die durch den **Wellenvektor** \vec{k} gegeben ist.

3.7.2 Kugelwellen

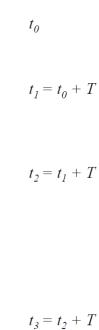
- Wellenfronten sind Kugeln
- Wellenvektor \vec{k} steht senkrecht auf Wellenfronten
- Wellenfronten bewegen sich mit der Wellengeschwindigkeit vom Zentrum weg
- Amplitude nimmt mit $\frac{1}{r}$ ab

Für eine **punktförmige Quelle** und **keine Winkelabhängigkeit** gilt:

$$\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{2}{r} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2}$$

$$\text{mit Lösungsansatz } \xi(t, r) = \frac{1}{r} \xi_0 e^{j(\omega t - k r)}$$

3.8 Bewegte Quellen



Die Quelle bewegt sich mit der **Geschwindigkeit** v_Q in eingezzeichneter Richtung fort

Die Quelle verschiebt sich in der Zeit T um

$$\Delta x = v_Q \cdot T$$

3.8.1 Frequenzverschiebung durch Bewegung der Quelle

Die Quelle sendet eine Frequenz f aus. Durch die Bewegung der Quelle ändert sich die Wellenlänge λ und somit ergibt sich eine neue Frequenz f' , welche ein statischer Beobachter wahrnimmt.

Falls v nicht parallel zur Beobachtungsrichtung ist, siehe 3.10

$$\lambda' = \lambda - v_Q \cdot T$$

$$\lambda' = \lambda - v_Q \frac{\lambda}{u}$$

$$\lambda' = \lambda \left(1 - \frac{v_Q}{u} \right)$$

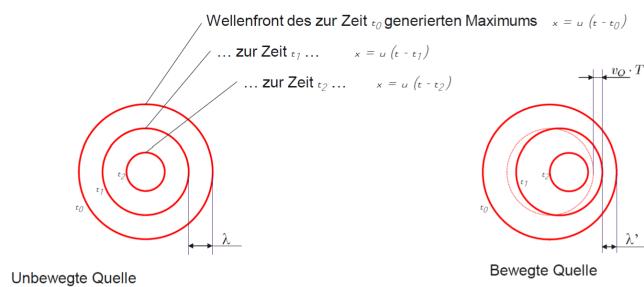
$$f' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda \left(1 - \frac{v_Q}{u} \right)} = \frac{f}{\left(1 - \frac{v_Q}{u} \right)}$$

$$f' = \frac{1}{\left(1 \mp \frac{v_Q}{u} \right)} f$$

- Quelle bewegt sich vom Beobachter weg
- Quelle bewegt sich zum Beobachter hin

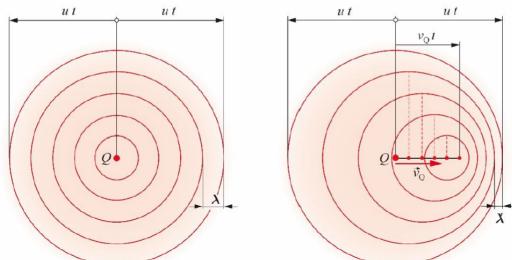
| | | |
|------------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| λ | Wellenlänge der aussendeten Welle | $[\lambda] = \text{m}$ |
| λ' | Wellenlänge der wahrgenommenen Welle | $[\lambda'] = \text{m}$ |
| v_Q | Geschwindigkeit der bewegten Quelle | $[v_Q] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| u | Wellengeschwindigkeit | $[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ |
| f | Frequenz der ausgesendeten Wellen | $[f] = \text{Hz}$ |
| f' | Frequenz der wahrgenommenen Wellen | $[f'] = \text{Hz}$ |
| T | Periodendauer (Dauer der Ausbreitung) | $[T] = \text{s}$ |

3.8.2 Bewegte Quelle vs. unbewegte Quelle



3.9 Doppler Effekt

Die Veränderung der Wellenlänge λ der von einer bewegten Quelle ausgesandten Wellen ist als **Doppler Effekt** bekannt.



3.10 Bewegte Quelle mit Winkel

Die Quelle bewegt sich nicht direkt auf den Beobachter zu, sondern sie bewegt sich am **Beobachter vorbei**

$$f' = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{u} \cdot \cos(\theta_Q)} f$$

v_Q Geschwindigkeit der bewegten Quelle $[v_Q] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 u Wellengeschwindigkeit $[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 f Frequenz der ausgesendeten Wellen $[f] = \text{Hz}$
 f' Frequenz der wahrgenommenen Wellen $[f'] = \text{Hz}$

3.10.1 Beispiel Winkel zw. Quelle und Beobachter

$$\begin{aligned} &\text{Gegeben: } v_Q, \theta, u, d, l \\ &\text{Gesucht: } \frac{f'}{f} \\ &f' = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{u} \cdot \cos(v_Q)} \\ &\tan(\theta) = \frac{d}{l} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\ &\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) \\ &\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{d}{l} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\theta)}}{\cos(\theta)} \\ &\frac{1}{\cos^2(\theta)} = \frac{d^2}{l^2} + 1 \\ &\cos^2(\theta) = \frac{1}{1 + \frac{d^2}{l^2}} \\ &\Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{u} \cdot \sqrt{\frac{l^2}{l^2 + d^2}}} \end{aligned}$$

3.11 Bewegter Beobachter

$$f' = (1 \pm \frac{v_B}{u}) f$$

- + Beobachter geht auf Quelle zu
- Beobachter geht von Quelle weg

v_B Geschwindigkeit des bewegten Beobachters $[v_B] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 v_Q Geschwindigkeit der bewegten Quelle $[v_Q] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 u Wellengeschwindigkeit $[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 f_B Frequenz, welche Beobachter wahrnimmt $[f_B] = \text{Hz}$
 f_Q Frequenz, welche Quelle 'aussendet' $[f_Q] = \text{Hz}$

3.12 Bewegte Quelle und bewegter Beobachter

$$f_B = \frac{u + v_B \cos(\theta_B)}{u - v_Q \cos(\theta_Q)} f_Q$$

$\theta_B = \theta_B$ siehe Skizze $[\theta_B] = {}^\circ$
 v_B Geschwindigkeit bewegter Beobachter $[v_B] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 $\theta_Q = \theta_Q$ siehe Skizze $[\theta_Q] = {}^\circ$
 v_Q Geschwindigkeit bewegte Quelle $[v_Q] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 u Wellengeschwindigkeit $[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 f_B Frequenz beim bewegten Beobachter $[f_B] = \text{Hz}$
 f_Q Frequenz bei der bewegten Quelle $[f_Q] = \text{Hz}$

3.12.1 Optischer Doppler Effekt

Wird verwendet, wenn die Wellengeschwindigkeit u gleich der Lichtgeschwindigkeit c ist!

Es spielt nur die **relative** Bewegung von Beobachter und Quellen eine Rolle

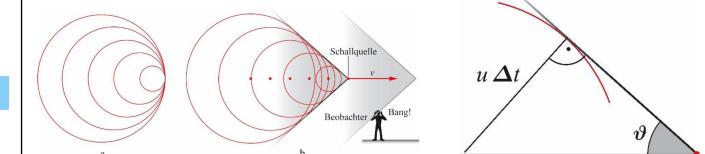
$$f' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos(\vartheta)} f \text{ mit } \beta = \frac{v}{c}$$

$$\text{für } \beta \ll 1 \quad f' \simeq \frac{1}{1 - \beta \cdot \cos(\theta)} \cdot f$$

$$\text{für } \beta \ll 1 \text{ und } \theta \approx \frac{\pi}{2} \quad f' \simeq \frac{1}{1 - \beta} \cdot f$$

3.12.2 Mach'scher Kegel

Wenn sich die Quelle schneller fortbewegt als die Wellengeschwindigkeit, dann entsteht ein Mach'scher Kegel



$$\sin(\vartheta) = \frac{u \Delta t}{v \Delta t} = \frac{u}{v}$$

$$M = \frac{v}{u}$$

v Geschwindigkeit der Quelle $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 u Wellengeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit) $[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 M Machzahl $[M] = 1$

3.13 Wellenwiderstand, Energietransport - Schallwellen

3.13.1 Terminologie Wellenwiderstand

Der **Wellenwiderstand** Z (auch **Impedanz** genannt) beschreibt, wie ein Medium den Fluss von Energie beeinflusst.

⇒ 'Wie gut können sich Wellen in einem Medium ausbreiten?'

$$Z = \rho \cdot u = \frac{\Delta p_0}{v_0}$$

Z Wellenwiderstand bzw. Impedanz $[Z] = \Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}$
 ρ Dichte des Mediums $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
 u Wellengeschwindigkeit $[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 Δp_0 Druckamplitude $[\Delta p_0] = \text{Pa}$
 v_0 Schnellenamplitude $[v_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.13.2 Weitere Terminologien

| | | |
|----------------|--------------------------------------|--------------|
| Schalldruck | $p = \Delta p_0 \cos(\omega t - kx)$ | [p] = Pa |
| Druckamplitude | $\Delta p_0 = \rho u v_0$ | |

| | | |
|---------------------------|-------------------------------|-------------------------|
| Schallschnelle (Schnelle) | $v = v_0 \cos(\omega t - kx)$ | [v] = $\frac{m}{s}$ |
| Schnellenamplitude | $v_0 = \omega \xi_0$ | |

3.13.3 Intensität der Schallwelle

Intensität = gemittelte Energieflussdichte

$$E_{kin} = \frac{\rho \cdot v^2}{4} = \frac{\rho \cdot v_0^2}{4} \quad E_{pot} = \frac{p^2 - p_0^2}{2\rho u^2} = \frac{\rho \cdot v_0^2}{4}$$

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{\rho \cdot v_0^2}{2}$$

$$I = u \cdot \bar{w} = \frac{1}{2} \rho v_0^2 u = \frac{1}{2} \rho (\omega \xi_0)^2 u = \frac{(\Delta p_0)^2}{2 Z} = \frac{P}{A}$$

| | | |
|--------------|--------------------------------|--------------------------------------------------|
| I | Schallintensität | $[I] = \frac{W}{m^2}$ |
| \bar{w} | Energieflussdichte | $[\bar{w}] = \frac{W}{m^2 s}$ |
| Pot. Energie | → 'Kompression Gas' | |
| Kin. Energie | → 'Geschw. Teilchen' | |
| ρ | Dichte | $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$ |
| v_0 | Schnellenamplitude | $[v_0] = \frac{m}{s}$ |
| ξ_0 | Amplitude | $[\xi_0]$ |
| u | Wellengeschwindigkeit | $[u] = \frac{m}{s}$ |
| Δp_0 | Druckamplitude | $[\Delta p_0] = Pa$ |
| Z | Wellenwiderstand bzw. Impedanz | $[Z] = \Omega = \frac{Pa}{m/s} = \frac{Ns}{m^3}$ |
| P | Leistung | $[P] = W$ |
| A | (Abstrahl-) Fläche | $[A] = m^2$ |

3.14 Dispersion

Die Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit von der Wellenlänge wird als Dispersion bezeichnet.

⇒ Siehe Beispiel Optik Abschnitt 1.9

3.14.1 Dispersion bei Wasserwellen

$$u(\lambda) = \sqrt{\left(\frac{g \cdot \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi \cdot \sigma}{\rho \cdot \lambda} \right) \cdot \tanh\left(\frac{2\pi \cdot h}{\lambda} \right)}$$

tiefes Wasser ($\lambda \ll h$)

$$u(\lambda) = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi}}$$

flaches Wasser ($\lambda \gg h$)

$$u = \sqrt{g \cdot h}$$

| | | | |
|-----------|---------------------|---------------------------|-----------------------|
| g | Erdbeschleunigung | $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ | $[g] = \frac{m}{s^2}$ |
| λ | Wellenlänge | $[\lambda] = m$ | |
| σ | Oberflächenspannung | $[\sigma] = \frac{N}{m}$ | |
| h | Wassertiefe | $[h] = m$ | |
| ρ | Dichte | $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$ | |

4 Superposition von Wellen

Superposition beschreibt die Überlagerung (Addition) von Wellen

- Linearität der Wellengleichung
- Die Summe zweier Lösungen der Wellengleichung ist auch eine Lösung der Wellengleichung.

Das Superpositionsprinzip erlaubt die Darstellung von periodischen Wellen als eine Summe von harmonischen Wellen.

4.1 Schwebung

Superposition von Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen
⇒ Hörbar als ein 'Flattern'

$$f_{Schwebung} = f_2 - f_1$$

$$\xi_1 = A \cdot \sin(\omega_1 t)$$

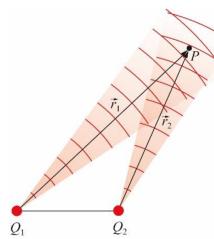
$$\xi_2 = A \cdot \sin(\omega_2 t)$$

$$\xi = 2 A \cdot \sin(\bar{\omega} t) \cdot \cos(\Omega t)$$

mit $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ und $\Omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$

4.2 Interferenz

Superposition von Wellen mit gleichen Frequenzen



$$\xi_1 = A \cdot \sin(\omega t - k r_1)$$

$$\xi_2 = A \cdot \sin(\omega t - k r_2)$$

$$\xi = 2 A \cdot \sin\left(\omega t - \frac{k(r_1 + r_2)}{2}\right) \cos\left(k \frac{r_2 - r_1}{2}\right)$$

⇒ Der cos-Term hängt nur vom Ort ab!

⇒ Es gibt Orte, an denen Welle sich auslöscht!

4.3 Kohärenz

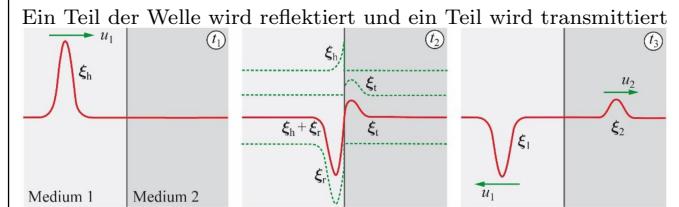
Zwei Wellen werden als kohärent bezeichnet, wenn eine **feste Phasendifferenz** zwischen den beiden Wellen besteht.

Kohärenzlänge ist eine **Vorbedingung**, damit sich eine **Interferenz** bilden kann.

Kohärenzlänge ist der **maximale Streckenunterschied**, den zwei Wellen haben dürfen, damit eine (stabile) Interferenz beobachtet werden kann.

4.4 Reflexion und Transmission

4.4.1 Verhalten von Wellen an Grenzflächen von zwei Medien

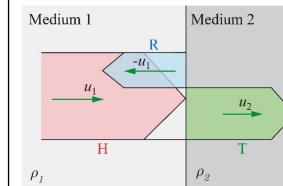


Physikalische Bedingung

Stetigkeit der Wellenfunktion und der Ableitung an der Grenzfläche

$$\xi_1(0) = \xi_2(0) \quad \dot{\xi}_1(0) = \dot{\xi}_2(0)$$

4.4.2 Intensität von Reflexion und Transmission



$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

$$T = \frac{4, Z_1 \cdot Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

R Reflexionskoeffizient

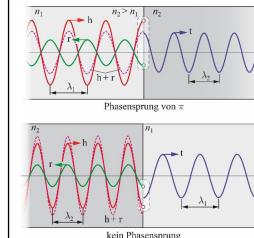
$$[R] = 1$$

T Transmissionskoeffizient

$$[T] = 1$$

Z_i Wellenwiderstand im Medium i $[Z] = \Omega = \frac{Pa}{m/s} = \frac{Ns}{m^3}$

4.4.3 Phasensprünge bei Reflexionen



Reflexion an 'dichtem' Material
⇒ **Phasensprung**

dicht: $n_2 > n_1$
kleinere Wellengeschwindigkeit,
grösserer Wellenwiderstand

Reflexion an 'dünnen' Material
⇒ **kein Phasensprung**

4.5 Anwendung: Elektromagnetische Wellen

4.5.1 Elektromagnetische Wellem in Doppelleiter

$$U_r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} U_h$$

$$I_r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} I_h$$

$$U_t = \frac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2} U_h$$

$$I_t = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2} I_h$$

Kabel mit kurzgeschlossenem Ende $Z_2 = 0$

$$U_r = -U_h$$

$$U_1 = U_h + U_r = U_h - U_h = 0$$

Kabel mit offenem Ende $Z_2 = \infty$

$$I_r = -I_h$$

$$I_1 = I_r + I_h = I_r - I_r = 0$$

U_r Reflektierte Spannung

$$[U_r] = V$$

U_h Eintreffende Spannung

$$[U_h] = V$$

I_r Reflektierter Strom

$$[I_r] = A$$

I_h Eintreffender Strom

$$[I_h] = A$$

Z_i Wellenwiderstand im Medium i $[Z] = \Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{N s}}{\text{m}^3}$

4.5.2 Elektromagnetische Wellen in homogenem Milieu

$$Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} Z_0 = Z_0 \frac{c}{n}$$

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

R Reflexionskoeffizient

$$[R] = 1$$

Z_i Wellenwiderstand im Medium i $[Z] = \Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{N s}}{\text{m}^3}$

μ_r Permeabilitätszahl

$$[\mu_r] = 1$$

ϵ Dielektrizitätszahl

$$[\epsilon_r] = 1$$

n_i Brechungsindex von Medium i

$$[n_i] = 1$$

ϵ_0 Ele. Feldkonstante $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$

$$[\epsilon_0] = \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

μ_0 Magn. Feldkonstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$

$$[\mu_0] = \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$$

Z_0 Wellenwiderstand Vakuum $Z_0 \approx 376.73 \Omega$

c Lichtgeschwindigkeit $c = 300 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

5 Stehende Wellen

5.0.1 Terminologie

Eine **stehende Welle** ist eine Welle, bei der Orte maximaler Auslenkung (oder minimaler Auslenkungen) sich **nicht fortbewegen**

- Ort- und Zeitabhängigkeit sind separiert
- Die Welle bewegt sich nicht im Raum ('Muster bleibt stehen')

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(kx)$$

$\Rightarrow \sin()$ -Terme sind auch erlaubt!

Orte, wo die Welle für alle Zeit = 0 ist heißen **Wellenknoten**

\Rightarrow **Zwei benachbarte Knoten sind $\frac{\lambda}{2}$ auseinander**

Orte, wo die Welle eine maximale Auslenkung erreicht, heißen **Wellenbauch**

\Rightarrow **Zwei benachbarte Bäuche sind $\frac{\lambda}{2}$ auseinander**

k_n Wellenzahl

$$[k_n] = \frac{1}{\text{m}}$$

l Länge der Saite

$$[l] = \text{m}$$

u Wellengeschwindigkeit

$$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

λ_n Wellenlänge

$$[\lambda_n] = \text{m}$$

n Ganze Zahl

$$[n] = 1$$

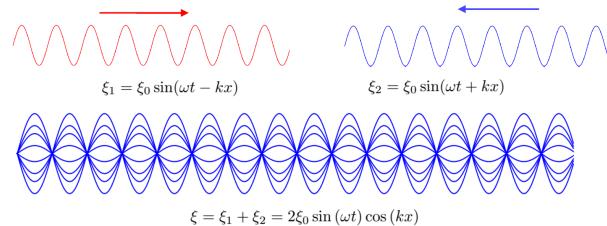
ω Kreisfrequenz

$$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

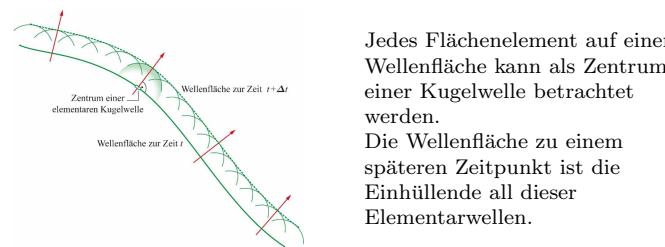
A Querschnitt der Saite

$$[A] = \text{m}^2$$

5.1 Entstehung von stehenden Wellen



5.2 Prinzip von Huygens



Jedes Flächenelement auf einer Wellenfläche kann als Zentrum einer Kugelwelle betrachtet werden.
Die Wellenfläche zu einem späteren Zeitpunkt ist die Einhüllende all dieser Elementarwellen.

5.3 Eigenschwingungen - 1D

$$f_n = \frac{n}{2l} \cdot u = \frac{u}{\lambda_n}$$

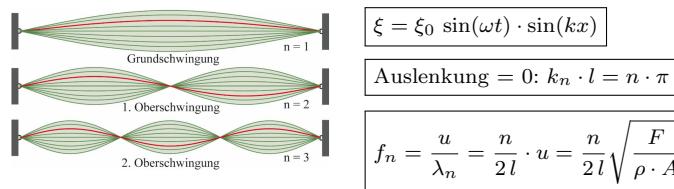
$$\text{Auslenkung} = 0: k_n \cdot l = n \cdot \pi$$

$$\text{Auslenkung max: } k_n \cdot l = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

5.3.1 Saite

- Reflexion an einer Grenzfläche \rightarrow Stehende Welle
- Die stehende Welle muss in den vorhandenen Raum passen \rightarrow Geometrische Bedingung

• Knoten an beiden Enden



$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t) \cdot \sin(kx)$$

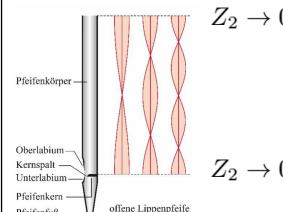
$$\text{Auslenkung} = 0: k_n \cdot l = n \cdot \pi$$

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{n}{2l} \cdot u = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}}$$

5.3.2 Pfeifen

Offene Pfeife

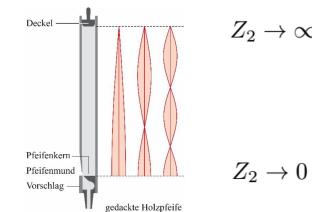
Länge $l = \frac{\lambda}{2}$



Auslenkung an Enden:
Wellenbauch

Gedackte Pfeife

Länge $l = \frac{\lambda}{4}$



Auslenkung offenes Ende:
Wellenbauch
Auslenkung gedacktes Ende:
Knoten (max. Auslenkung)

5.4 Eigenschwingungen - 2D

5.4.1 Rechteckige Membrane

$$\xi(x, y, t) = \xi_0 \sin(\omega t) \sin(k_x x) \sin(k_y y)$$



$$\text{Wellenvektor: } k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

$$u^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

Randbedingungen:

$$\text{Auslenkung} = 0 \quad k_x = \frac{n\pi}{a} \quad k_y = \frac{m\pi}{b}$$

6 Beugung

6.0.1 Terminologie

Die **Richtungsänderungen** der Wellenausbreitung in einem homogenen Medium durch **Hindernisse** wird als **Beugung (Diffraction)** bezeichnet.

- Das Hindernis kann eine Kante, ein Spalt oder ein kleines Objekt sein
- Beugung tritt auf, wenn das **Hindernis von ähnlicher Grösse** ist, wie die **Wellenlänge**

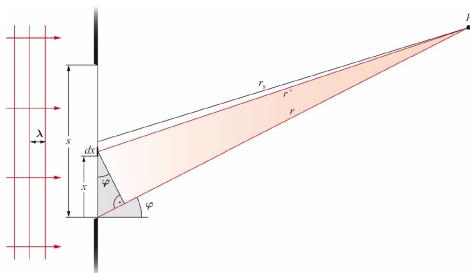
⇒ Beugung tritt auf, wenn eine Welle limitiert wird!

Dies gilt insbesondere für:

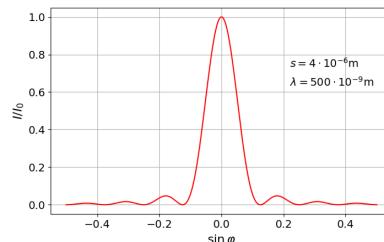
Spalt, Kante, Loch (Pinhole), Objektiv-Öffnung

6.1 Beugung - Spalt

6.1.1 Beschreibung Setup



6.1.2 Intensität nach dem Spalt

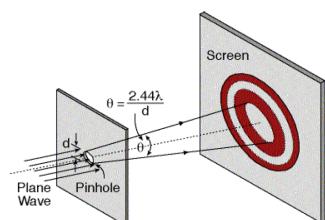


$$I_s \propto A^2 \frac{\sin^2\left(\frac{k \cdot s \cdot \sin(\varphi)}{2}\right)}{\left(\frac{k \cdot s \cdot \sin(\varphi)}{2}\right)^2}$$

$$\text{Minima der Intensität} \\ \sin(\varphi) = n \frac{\lambda}{s}$$

- I_s Intensität
- s Länge des Spalts
- λ Wellenlänge
- n Ordnung (typ. 1)
- A Amplitude
- r siehe Bild Abschnitt 6.1.1
- φ Einfallsinkel der Welle zum Spalt
- Hinweis: Oft muss gegebene φ durch 2 geteilt werden!

6.2 Beugung - Runde Öffnung (2D)



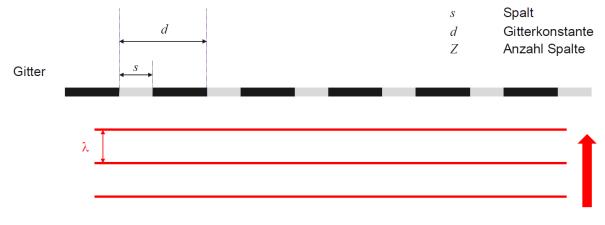
Nullstelle erster Ordnung:

$$\sin(\varphi) = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

$$\begin{aligned} \lambda &\text{ Wellenlänge} & [\lambda] &= \text{m} \\ D &\text{ Loch-Durchmesser} & [D] &= \text{m} \end{aligned}$$

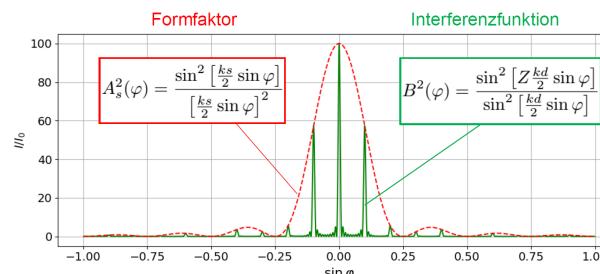
6.3 Beugung - Gitter

6.3.1 Beschreibung Setup



6.3.2 Intensität nach dem Gitter

$$I_G = \frac{A^2}{r^2} A_s^2 B^2$$

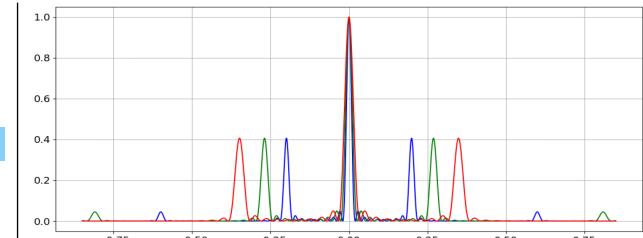


- $A_s^2(\varphi)$ hat Nullstellen bei $n \frac{\lambda}{s}$ (hängt von s ab)
- $B^2(\varphi)$ hat Hauptmaxima bei $n \frac{\lambda}{d}$ und $Z - 2$ Nebenmaxima dazwischen (hängt von Z und d ab)

$$\begin{aligned} I_G &\text{ Intensität nach Gitter} & [I_G] &= \frac{W}{m^2} \\ k &\text{ Wellenzahl} & [k] &= \frac{1}{m} \\ s &\text{ Spalt} & [s] &= \text{m} \\ d &\text{ Gitterkonstante} & [d] &= \text{m} \\ Z &\text{ Anzahl Spalte} & [Z] &= 1 \end{aligned}$$

6.3.3 Auflösungsvermögen

Verschiedene Wellenlängen können getrennt (aufgelöst) werden



Kriterium

Zwei Wellenlängen werden gerade noch aufgelöst, wenn das Hauptmaximum von λ_2 mit dem Minimum von λ_1 zusammenfällt

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = n Z$$

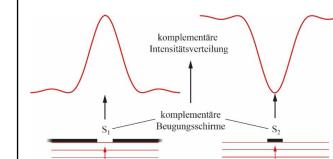
$$\lambda \text{ Wellenlänge} \quad [\lambda] = \text{m}$$

$$\Delta\lambda \text{ Unterschied der Wellenlängen} \quad [\Delta\lambda] = \text{m}$$

$$n \text{ Ordnung der Beugung (typ. 1)} \quad [n] = 1$$

$$Z \text{ Anzahl der Spalten} \quad [Z] = 1$$

6.4 Babinet-Prinzip



Ausserhalb des Bereichs geometrisch-optischer Abbildung produzieren komplementäre Beugungsschirme gleiche Beugungsbilder

7 Akustik

7.0.1 Terminologie

Ton

Eine harmonische Schallwelle wird als **Ton** bezeichnet. Ein (reiner) Ton entspricht also einer **Schallschwingung**, die **eine einzige Frequenz** enthält.

Klang

Eine **Überlagerung** von harmonischen Schwingungen, deren **Frequenzen** in einem **ganzzahligen Verhältnis** zur tiefsten Frequenz, zur Frequenz des **Grundtons**, stehen, wird **Klang** genannt.

Geräusch

Bei einem **Geräusch** besteht das Frequenzspektrum nicht mehr aus einzelnen diskreten Linien, sondern weist in einem bestimmten Frequenzbereich eine **kontinuierliche Verteilung** auf.

7.1 Pegel

'Einheit': Bel

$$\text{Pegel} = \log\left(\frac{x}{b_0}\right)$$

$$x = b_0 \cdot 10^{\text{Pegel}}$$

| | | |
|-------|-------------------------|---------------------|
| Pegel | Dimensionslose Grösse | [Pegel] = 1 |
| x | Zu vergleichende Grösse | [x] |
| b_0 | Basisgrösse | [b_0] = [x] |

'Einheit': Dezibel

$$\text{Pegel} = 10 \cdot \log\left(\frac{x}{b_0}\right)$$

$$x = b_0 \cdot 10^{\left(\frac{\text{Pegel}}{10}\right)}$$

7.2 Schallintensität

$$L_I = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$L_p = 20 \cdot \log\left(\frac{p_{eff}}{p_{eff0}}\right)$$

$$p_{eff} = \frac{\Delta p_0}{\sqrt{2}}$$

L_I Schallintensitätspegel [L_I] = dB

L_p Schalldruckpegel [L_p] = dB

I Intensität [I] = $\frac{W}{m^2}$

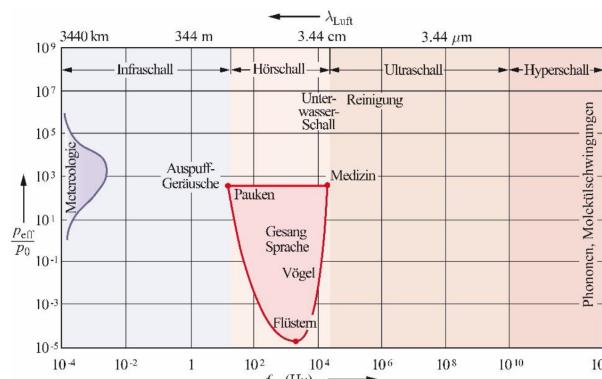
p_{eff} Schalldruck (Effektivwert) [p_{eff}] = Pa

Δp_0 Druckamplitude [Δp_0] = Pa

I_0 Bezugssintensität $I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$

p_{eff0} Bezugsschalldruck $p_{eff0} = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa

7.3 Verschiedene Schallquellen



7.4 Intensität bei Kugelwellen (ohne Dämpfung)

Energieerhaltung

$$I(r) = \frac{P}{4 \pi r^2}$$

Verhältnis

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Pegel

$$L_2 = L_1 - 20 \cdot \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$I(r)$ Intensität

$$[I(r)] = \frac{W}{m^2}$$

P Leistung

$$[P] = W$$

r_i Abstand (Radius) zum Wellenursprung

$$[r_i] = m^2$$

L_i Pegel

$$[L_i] = dB$$

7.6.2 Schalldämmung

Schalldämmung ist die **Behinderung der Schallausbreitung** durch **reflektierende Hindernisse**. Mauern, Türen und Fenster bewirken eine Schalldämmung für den von aussen in das Gebäude eindringenden Schall. Auch die Ausbreitung von Schall innerhalb eines Gebäudes wird durch die Schalldämmung von Zwischenwänden und Türen abgeschwächt. Im Freien wird durch Schallschutzwände eine Schalldämmung für die dahinterliegenden Gebäude erreicht.

7.7 Intensität bei Kugelwellen (mit Dämpfung)

Energieerhaltung

$$I(r) = \frac{P}{4 \pi r^2} e^{-\alpha r}$$

Verhältnis

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} e^{-\alpha(r_2-r_1)}$$

Pegel

$$L_2 = L_1 - 20 \cdot \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - K(r_2 - r_1)$$

$I(r)$ Intensität

$$[I(r)] = \frac{W}{m^2}$$

P Leistung

$$[P] = W$$

r_i Abstand (Radius) zum Wellenursprung

$$[r_i] = m^2$$

L_i Pegel

$$[L_i] = dB$$

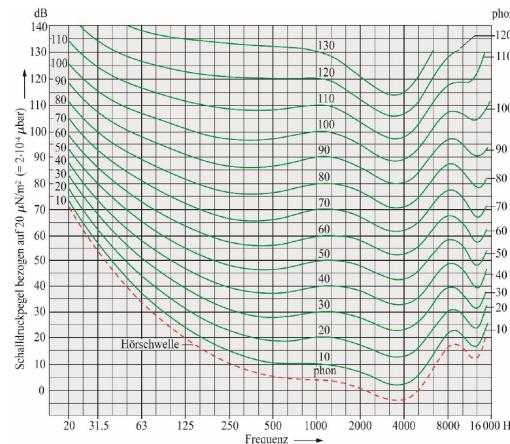
α Dämpfung

$$[\alpha] = 1$$

K Dämpfung

$$[K] = \frac{dB}{m}$$

7.5 PHON-Skala



7.6 Schalldämpfung / Schalldämmung

7.6.1 Schalldämpfung

Schalldämpfung bedeutet eine **Abschwächung** der Schallwellen durch **Absorption**.

Schallenergie wird in '**Wärme**' umgewandelt, d.h. durch die Absorption von Energie werden das von den Schallwellen durchdrungene Medium oder die das Schallfeld begrenzenden Körper erwärmt.

Verschiedene Arten von Absorption für Schalldämpfung Innen

- Poröse Schicht (mit oder ohne perforierte Abdeckung)
- Akustikplatte
- Plattenresonator
- Helmholtz-Resonator

7.8 Schalldämmung / Schalldämm-Mass

Bei der Schallübertragung muss zwischen **Luftschall** und **Körperschall** unterschieden werden.

7.8.1 Luftschalldämmung

Es gibt Schallquellen, die ihre Schallenergie (fast) ausschliesslich in die Luft abstrahlen.

Beispiele: menschliche Stimme, Geigen, Lautsprecher und Blasinstrumente

7.8.2 Körperschalldämmung

Andere Schallerzeuger übertragen die Schallschwingungen nicht nur auf die Luft, sondern auch direkt auf feste Körper.

Streichinstrumente, wie Cello oder Bassgeige, und Klavier oder Flügel übertragen die Schallschwingungen auch direkt auf den Fussboden. Wird ein Nagel in die Wand geschlagen, so wird ein grosser Anteil des erzeugten Schalls als Körperschall übertragen. Beispiele: Trittschall, Wasserleitungsgerausche

7.9 Schalldämm-Mass

$$\mathcal{R} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

7.10 Anhall / Nachhall

7.10.1 Anhall

Es dauert eine gewisse Zeit, bis sich eine konstante Energiedichte der Schallwellen im Raum aufgebaut hat. Dieser Vorgang wird Anhall genannt. Wegen der logarithmischen Empfindlichkeit des Ohrs wird er praktisch nicht wahrgenommen.

7.10.2 Nachhall

Die von den Begrenzungsflächen des Raumes mehrfach reflektierten Wellen bewirken andererseits, dass beim plötzlichen Abschalten einer Schallquelle der Schall nicht sofort verschwindet, sondern allmählich abklingt. Dieses Phänomen wird Nachhall genannt und ist im Gegensatz zum Anhall deutlich wahrnehmbar.

Per Definition ist die Nachhallzeit jene Zeitspanne, in welcher der Schallpegel im Raum um 60 dB sinkt.

7.10.3 Nachhallzeit T_N

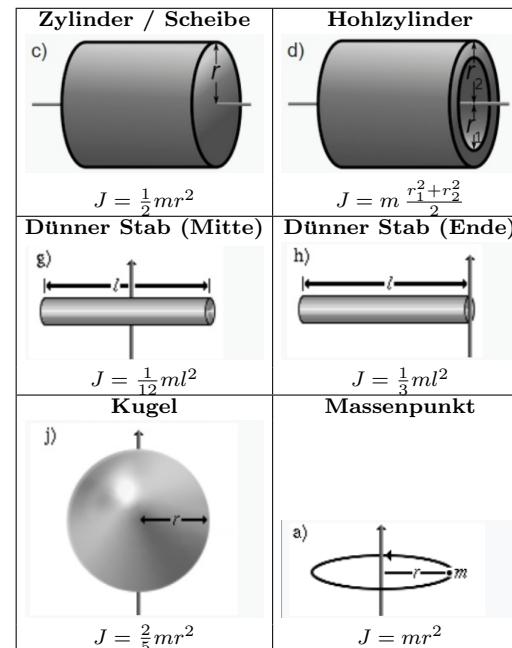
$$T_N = 0.16 \frac{V}{m \sum_i \alpha_i A_i}$$

T_N Nachhallzeit
 V Raumvolumen
 α_i Absorptionsgrad
 A_i Teilfläche der Raumbegrenzung mit Absorption α_i

$[T_N] = \text{s}$
 $[V] = \text{m}^3$
 $[\alpha_i] = 1$
 $[A_i] = \text{m}^2$

8 Anhang

8.1 Massenträgheitsmomente



8.2 Messunsicherheit

Abhängigkeit der Messgrösse: $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Unsicherheit der Messgrösse: $\Delta y = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \Delta x_i^2}$

Beispiel: $f = \frac{c}{\lambda}$

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial c} \right)^2 \Delta c^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)^2 \Delta \lambda^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \Delta c^2 + \left(-\frac{c}{\lambda^2} \right)^2 \Delta \lambda^2} \end{aligned}$$

8.3 Trigonometrie

| α | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | 2π |
|---------------|----|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--------|
| a° | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 210° | 225° | 240° | 270° | 300° | 315° | 330° | 360° |
| $\sin \alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\cos \alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\tan \alpha$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |
| $\cot \alpha$ | - | $-\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | -1 | $-\sqrt{3}$ | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | -1 | $-\sqrt{3}$ | - |

8.3.1 Beziehungen zwischen $\sin(x)$ und $\cos(x)$

$$\sin(-a) = -\sin(a)$$

$$\cos(-a) = \cos(a)$$

$$\sin(\pi - a) = \sin(a)$$

$$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$$

$$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$$

$$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \sin(\frac{\pi}{2} + a) = \cos(a)$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - a) = -\cos(\frac{\pi}{2} + a) = \sin(a)$$

8.3.2 Additionstheoreme

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}$$

8.3.3 Summen und Differenzen

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\tan(a) \pm \tan(b) = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a) \cdot \cos(b)}$$

8.3.4 Produkte

$$\sin(a) \cdot \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

$$\sin(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

8.3.5 Winkelvielfache und Halbwinkel

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cdot \cos(a)$$

$$\sin(3a) = 3 \sin(a) - 4 \sin^3(a)$$

$$\sin(4a) = 8 \cos^3(a) \cdot \sin(a) - 4 \cos(a) \cdot \sin(a)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

$$\cos(3a) = 4 \cos^3(a) - 3 \cos(a)$$

$$\cos(4a) = 8 \cos^4(a) - 8 \cos^2(a) + 1$$

$$\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(a))} \quad \cos\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(a))}$$

8.3.6 Potenzen

$$\sin^2(a) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$$

$$\sin^3(a) = \frac{1}{4}(3 \sin(a) - \sin(3a))$$

$$\sin^4(a) = \frac{1}{8}(\cos(4a) - 4 \cos(2a) + 3)$$

$$\cos^2(a) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$$

$$\cos^3(a) = \frac{1}{4}(\cos(3a) + 3 \cos(a))$$

$$\cos^4(a) = \frac{1}{8}(\cos(4a) + 4 \cos(2a) + 3)$$