

Physik

Sammlung, gegliedert nach Modul

Fabian Suter, 21. Februar 2024

<https://github.com/FabianSuter/Physik.git>

1 Statik

1.1 Schwerkraft (Gewichtskraft)

$$\text{Allgemein: } F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$\text{Erde: } F_G = G \cdot \frac{m_E \cdot m}{r_E^2} = m \cdot g$$

F_G	Gewichtskraft	$[F_G] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = \text{N}$
G	Gravitationskonstante	$6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$
m_i	Massen der Körper	$[m] = \text{kg}$
r	Abstand der Massen	$[r] = \text{m}$
g	Erdbeschleunigung	$9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
m_E	Masse der Erde	$5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
r_E	Erdradius	$6.378 \cdot 10^6 \text{ m}$

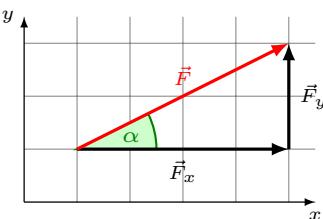
1.2 Normalkraft (Kontaktkraft)

(Sekundär-) Kraft, welche sich so anpasst, dass in Ruhe ein Kräftegleichgewicht herrscht:

$$F_G = -F_N \quad \Rightarrow \text{im Gleichgewicht auf horizontaler Oberfläche}$$

1.3 Zerlegung von Kräften

Kraftvektoren kann man komponentenweise aufteilen:



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_Z$$

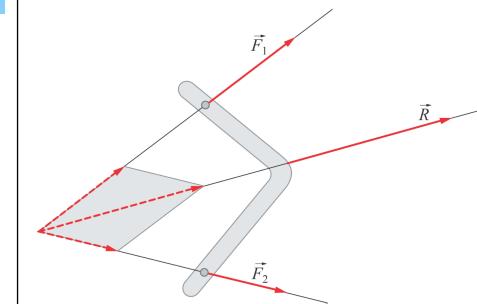
hilfreich beim Lösen von Aufgaben!

1.4 Gleichgewichtsbedingungen für Massepunkte

Der Massepunkt erfährt keine Beschleunigung
⇒ Summe aller wirkenden Kräfte ist 0

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \text{komponentenweise}$$

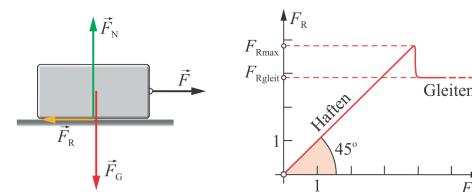
$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_x = \vec{0} \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_y = \vec{0} \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_z = \vec{0}$$



Dieses Verfahren kann auch mehrfach angewendet werden!

1.5 Haftriebung / Gleitreibung

1.5.1 Trockene Festkörperreibung



$$\text{Haftriebung: } \vec{F}_{R,max} = \mu_H \cdot \vec{F}_N$$

$$|\vec{F}_R| \leq |\vec{F}_{R,max}|$$

$$\text{Gleitreibung: } \vec{F}_{Gleit} \approx \mu_G \cdot \vec{F}_N$$

\vec{F}_R	Reibungskraft	$[\vec{F}_R] = \text{N}$
$\vec{F}_{R,max}$	Haftriebungskraft	$[\vec{F}_{R,max}] = \text{N}$
\vec{F}_{Gleit}	Gleitreibungskraft	$[\vec{F}_{Gleit}] = \text{N}$

1.5.2 Viskose Reibung

Sobald Schmiermittel zum Einsatz kommen, ist die Reibungskraft abhängig von der Grösse der Berührungsfläche:

Bei gleicher Normalkraft \vec{F}_N ist bei

- kleinerem Flächendruck die Reibung kleiner
- grösserem Flächendruck die Reibung grösser

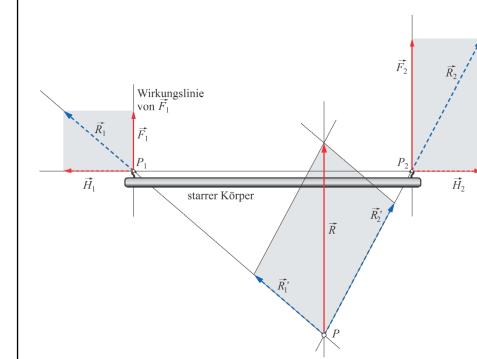
1.6 Starre Körper

- Ein starrer Körper wird durch angreifende Kräfte nicht deformiert
- Bei einem starren Körper kann die Kraft entlang ihrer Wirkungslinie beliebig verschoben werden

1.7 Addition von Kräften

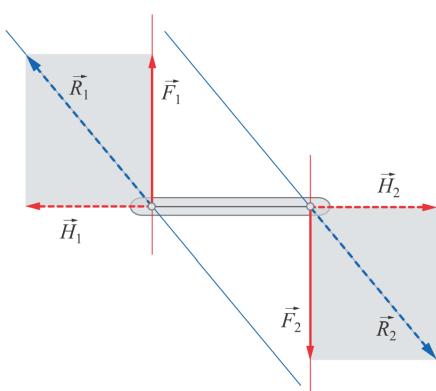
1.7.1 Spezialfall: Ebene Kräftegruppe für schiefe Wirkungslinie

Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie verschieben
⇒ Im Schnittpunkt vektorielle Addition der Kräfte durchführen, um die resultierende Kraft zu erhalten.



1.7.3 Spezialfall: Ebene Kräftegruppe für parallel, entgegengesetz und gleich grosse Kräfte

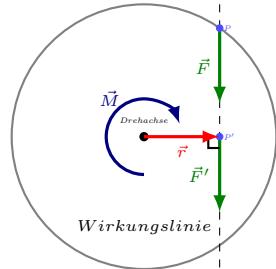
Kräftepaare können in andere Kräftepaare umgewandelt werden, aber niemals zu einer resultierenden Kraft \vec{R} vereinfacht werden.



1.8 Drehmoment

Eine Drehwirkung auf einen starren Körper lässt sich auf zwei verschiedene Arten und Weisen erzeugen:

- Kräftepaar
- einzelne Kraft und Bezugspunkt (Drehzentrum)



$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = a \cdot |\vec{F}|$$

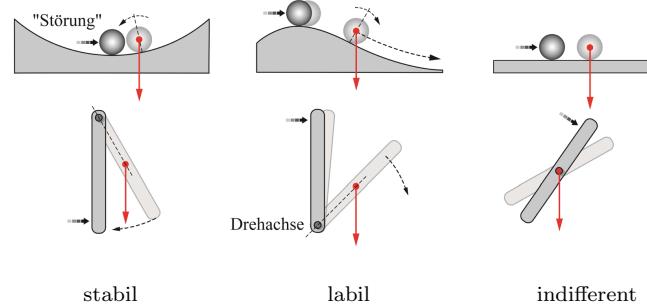
Die Länge a muss **senkrecht** zur wirkenden Kraft sein!

\vec{M}	Drehmoment	$[M] = \text{Nm}$
\vec{r}	Abstandsvektor	$[r] = \text{m}$
\vec{F}	Angreifende Kraft	$[F] = \text{N}$

1.9 Gleichgewichtsbedingungen für starre Körper

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad \sum_{i=1}^m \vec{M}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \text{komponentenweise}$$

1.10 Gleichgewichts-Arten



1.11 Deformierbare Körper

1.11.1 Spannungen

Zugspannung σ

senkrecht wirkende Kraft pro Flächeneinheit
Wenn $\sigma < 0$ spricht man von **Druck**

$$\sigma = \frac{F_{\perp}}{A} \quad [\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Schubspannung τ (Scherung)

parallel wirkende Kraft pro Flächeneinheit

$$\tau = \frac{F_{\parallel}}{A} \quad [\tau] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

1.11.2 Dehnung ϵ (Hook'sches Gesetz)

$$\epsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma = \frac{1}{E} \cdot \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{\Delta l}{l}$$

ϵ	Dehnung	$[\epsilon] = 1$
E	Elastizitätsmodul (Materialeigenschaft)	$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
l	Länge des Körpers vor Dehnung	$[l] = \text{m}$
Δl	Längenunterschied bei Dehnung	$[\Delta l] = \text{m}$
σ	Zugspannung	$[\sigma] = \text{N}$
A	Querschnittsfläche	$[A] = \text{m}^2$

⇒ Das Hook'sche Gesetz gilt nur, solange die Deformation linear-elastisch ist!

1.11.3 Querkontraktion ϵ_q

Wird ein Stab gedehnt (länger), so wird er automatisch auch dünner

$$\epsilon_q = \frac{\Delta d}{d} = -\mu \epsilon \quad \mu \in (0; 0.5)$$

ϵ_q	Querkontraktion	$[\epsilon_q] = 1$
d	Ursprüngliche Dicke des Materials	$[d] = \text{m}$
Δd	Dicken-Änderung	$[\Delta d] = \text{m}$
ϵ	(Längs-) Dehnung	$[\epsilon] = 1$
μ	Poisson-Zahl (Materialeigenschaft)	$[\mu] = 1$

1.11.4 Kompression $\frac{\Delta V}{V}$

Ein Körper wird von allen Seiten mit dem gleichen Druck belastet, sodass sich sein Volumen verkleinert

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \cdot \Delta p \quad (K = \frac{1}{\kappa})$$

V	Ursprüngliches Volumen des Körpers	$[V] = \text{m}^3$
ΔV	Volumenänderung	$[\Delta V] = \text{m}^3$
κ	Kompressibilität	$[\kappa] = \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$
Δp	Druckänderung	$[\Delta p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$

$$\text{Würfel: } \Rightarrow \kappa = \frac{3}{E} (1 - 2\mu)$$

Völlig inkompressibler Körper: $\kappa = 0$ $K = \infty$ $\mu = 0.5$

1.11.5 Schubbeanspruchung (Scherung)

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (\text{gilt für isotrope Materialien})$$

γ	Scherwinkel	$[\gamma] = {}^\circ$
G	Schubmodul; Gleitmodul; Torsionsmodul	$[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
τ	Schubspannung	$[\tau] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
E	Elastizitätsmodul (Materialeigenschaft)	$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
μ	Poisson-Zahl (Materialeigenschaft)	$[\mu] = 1$

1.11.6 Torsionsfeder

$$M = c \cdot \Phi \quad c = \frac{\pi G r^4}{2l}$$

M	Drehmoment	$[M] = \text{Nm}$
c	Auslenkkonstante	$[c] =$
Φ	Auslenkwinkel	$[\Phi] = {}^\circ$
G	Schubmodul	$[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
r	Radius der Feder	$[r] = \text{m}$
l	Länge der Feder	$[l] = \text{m}$

1.11.7 Schraubenfeder

$$F = c \cdot \Delta l \quad c = \frac{Gr^4}{4nR^3}$$

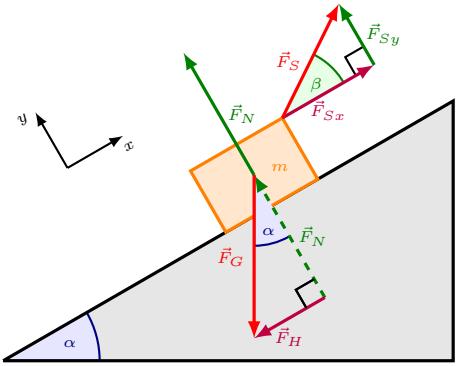
F	Kraft	$[F] = \text{N}$
c	Auslenkkonstante	$[c] =$
Δl	Längenänderung	$[\Delta l] = \text{m}$
G	Schubmodul	$[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
r	Drahtradius der Feder	$[r] = \text{m}$
R	Windungsradius der Feder	$[R] = \text{m}$
n	Anzahl Windungen	$[n] =$

1.11.8 Blattfeder

$$z = \frac{4l^3}{E \cdot b \cdot h^3} F$$

F	Kraft	$[F] = \text{N}$
z	Verbiegung	$[z] = \text{m}$
l	Längenänderung	$[l] = \text{m}$
E	Elastizitätsmodul	$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
b	Breite des Querschnitts	$[b] = \text{m}$
h	Höhe des Querschnitts	$[h] = \text{m}$

1.12 Schiefe Ebene (mit Seil)



Wichtige Formeln und Zusammenhänge zur schiefen Ebene

$$F = m \cdot a \quad F_G = m \cdot g$$

$$F_N = m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \quad F_H = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

1.13 Rezept: Aufgaben zur Statik lösen

1. Koordinatensystem festlegen
2. Alle wirkenden Kräfte einzeichnen
3. Bezugspunkt P (Drehpunkt) festlegen
⇒ Da wo viele Kräfte (oder da wo sinnvoll)
4. Kräfte komponentenweise aufschreiben: $\sum \vec{F}_i = 0$
5. Drehmomente M aufschreiben und gleichsetzen: $\overleftarrow{M} = \overrightarrow{M}$

1.14 Abweichung Erdbeschleunigung

$$g(\phi, h) = 9.78032677 \cdot \frac{1 + 0.001931851 \cdot \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - 0.006694380 \cdot \sin^2 \phi}} - 3.086 \cdot 10^{-6} \cdot h$$

$$\begin{array}{ll} g & \text{Erdbeschleunigung} & [g] = \frac{m}{s^2} \\ h & \text{Höhe über Meer} & [h] = m \\ \phi & \text{Breitengrad} & [\phi] = {}^\circ \end{array}$$

2 Kinematik

2.1 Geradlinige Bewegung (1D)

Die Bewegung erfolgt entlang einer Gerade (keine Richtungsänderung)

$$x(t) \quad \frac{d}{dt} v(t) \quad \frac{d}{dt} a(t) \quad x(t) \quad \underbrace{\int dt}_{v(t)} \quad \underbrace{\int dt}_{a(t)}$$

2.1.1 Weg $x(t)$

Weg mit Zeit parametrisiert: $x = x(t)$

2.1.2 Geschwindigkeit $v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$$\text{momentane Geschw.: } \frac{d}{dt} x(t) = \dot{x}(t) \quad (\text{Tangente})$$

$$\text{mittlere Geschw.: } \bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (\text{Sekante})$$

2.1.3 Beschleunigung $a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$$\text{momentane Beschleunigung: } \frac{d}{dt} v(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

$$\text{mittlere Beschleunigung: } \bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

2.1.4 Ruck $j(t)$

Änderung der Beschleunigung pro Zeiteinheit: $j(t) = \dot{a}(t) = \dddot{x}(t)$

2.2 Gleichförmige Bewegung $a(t) = 0$

$$a(t) = 0$$

$$v(t) = v_0 = \text{const}$$

$$x(t) = v_0 \cdot t + x_0$$

2.3 Gleichm. beschleunigte Bewegung $a(t) = \text{konst}$

Allgemein:

$$a(t) = a_0 = \text{const}$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0 \quad x(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + h_0$$

Anwendungsfall: Freier Fall

$$a(t) = -g = \text{const}$$

$$v(t) = -g \cdot t$$

2.3.1 Höchsten Punkt x_{max} finden (Extremum)

Im Extrempunkt gilt: $\frac{d}{dt} x(t) = v(t) = 0$

$$0 = v(t_{max}) = -g \cdot t_{max} + v_0 \Rightarrow t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

Durch einsetzen von t_{max} in $x(t)$ erhält man die maximale Höhe:

$$x(t_{max}) = -\frac{1}{2} g \cdot t_{max}^2 + v_0 \cdot t_{max} + h_0 = -\frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0^2}{g} + h_0$$

2.4 Beliebige Bewegung (2D)

2.4.1 Geschwindigkeit (tangential zur Bahnkurve)

$$\text{momentane Geschw.: } \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \frac{d}{dt} \vec{r} = \dot{\vec{r}}$$

$$\text{mittlere Geschw.: } \bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\text{Betrag: } v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

2.4.2 Beschleunigung

$$\text{momentane Beschl.: } \vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\text{mittlere Beschl.: } \bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Die Beschleunigung kann ungleich null sein, auch wenn der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist

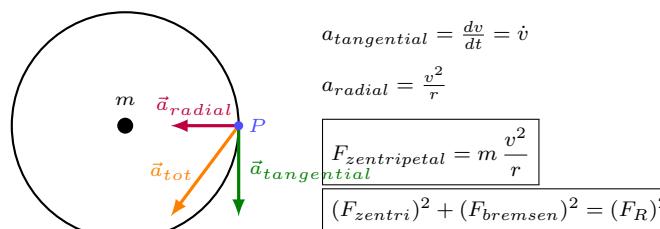
2.5 Bahnkurven

Die Geschwindigkeitsänderung in einer Bahnkurve wird in zwei Komponenten aufgeteilt:

$$\Delta \vec{v}_{radial} \quad \text{und} \quad \Delta \vec{v}_{tangential}$$

Der tangentielle Anteil ändert ausschliesslich den Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}|$

Der radiale Anteil ändert ausschliesslich die Richtung der Geschwindigkeit \vec{v}



2.6 Gleichförmige Bewegung $a_{tangential} = 0$

tangential (Tacho)

$$a_{tangential} = 0$$

$$v(t) = v_0 = \text{const}$$

$$s(t) = v_0 \cdot t + s_0$$

radial

$$a_{radial} = \frac{v^2}{r}$$

2.7 Gleichm. beschl. Bewegung $a_{tangential} = \text{konst}$

tangential (Tacho)

$$a_{tangential} = a_0 = \text{const}$$

radial

$$a_{radial} = \frac{v^2}{r}$$

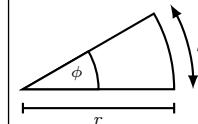
$$v(t) = a_{tangential} \cdot t + v_0$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_{tangential} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Die Gesamtbeschleunigung eines Systems $\vec{a}_{tot} = \vec{a}_{tangential} + \vec{a}_{radial}$ muss nicht zwingend konstant sein! Bei Änderungen der Richtung ändert die Gesamtbeschleunigung.

2.8 Kreisbewegung

2.8.1 Winkel ϕ (zurückgelegter Weg)



$$\text{Radian: } \phi = \frac{s}{r}$$

2.8.2 Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\phi}{t}$

$$\omega := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$$

Der Betrag v der (Bahn-) Geschwindigkeit entspricht: $v = r \cdot \omega$

Umlaufzeit, Periode T

Umlaufzeit für vollständige Umdrehung

Drehzahl, Drehfrequenz f inverse Umlaufzeit $f = \frac{1}{T}$

Wichtige Umrechnungsformeln

$v = r \cdot \omega$	\Leftrightarrow	$\omega = \frac{v}{r}$
$f = \frac{1}{T}$	\Leftrightarrow	$T = \frac{1}{f}$
$\omega = \frac{2\pi}{T}$	\Leftrightarrow	$T = \frac{2\pi}{\omega}$ $\omega = \frac{2\pi n}{60}$
$\omega = 2\pi f$	\Leftrightarrow	$f = \frac{\omega}{2\pi}$ $v = \frac{\pi d n}{60}$

2.8.3 Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{\omega}{t}$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$a_{tangential} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} r \cdot \omega = r \cdot \alpha$$

2.9 Gleichförmige Kreisbewegung

$$\alpha(t) = 0$$

$$\omega(t) = \omega_0 = \text{const}$$

$$\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$$

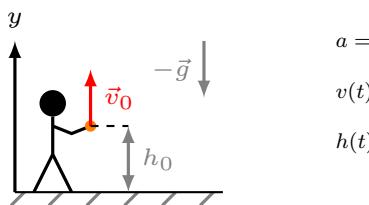
2.10 Gleichm. beschleunigte Kreisbewegung

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \text{const}$$

$$\omega(t) = \alpha_0 \cdot t + \omega_0$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \phi_0$$

2.11 Senkrechter Wurf



$$a = -g = \text{const}$$

$$v(t) = -g \cdot t + v_0$$

$$h(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0$$

2.11.1 Maximale Flughöhe h_{max} bestimmen

Bei der maximalen Flughöhe h_{max} gilt: $v(t) \stackrel{!}{=} 0$

$$v_0 - g \cdot t_{max} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

Nun wird t_{max} in $h(t)$ eingesetzt:

$$h_{max} = h(t_{max}) = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g^2} + v_0 \frac{v_0}{g} + h_0 = \frac{v_0^2}{2g} + h_0$$

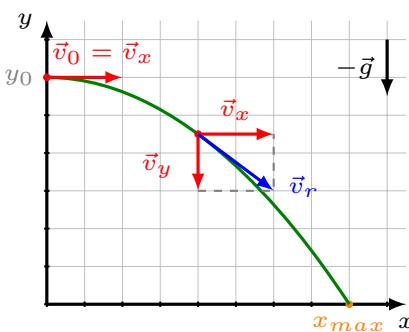
Hinweis: Die maximale Flughöhe kann auch über die potentielle und kinetische Energie berechnet werden!

$$E_{kin} \stackrel{!}{=} 0 \quad E_{pot} \stackrel{!}{=} m \cdot g \cdot h_{max}$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h_{max} \quad \Rightarrow \quad h_{max} = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot m \cdot g} = \frac{v^2}{2g}$$

⇒ für abgeschlossene Systeme!

2.12 Horizontaler Wurf



Der horizontale Wurf muss komponentenweise beschrieben werden
x-Achse: gleichförmige, unbeschleunigte Bewegung
y-Achse: gleichmäßig beschleunigte Bewegung

x-Achse

$$a_x = 0$$

$$v_x = v_0$$

$$x = v_0 \cdot t + x_0$$

y-Achse

$$a_y = -g$$

$$v_y = -g \cdot t$$

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + y_0$$

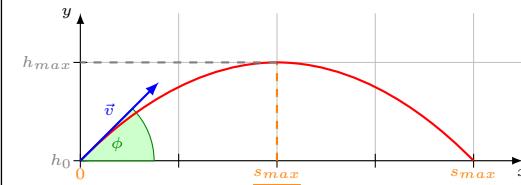
Tipp: Lege den Koordinatenursprung in den Abwurf-Ort

2.12.1 Beschreibung der Flugbahn (Eliminierung von t)

Die y-Koordinate soll als Funktion der x-Koordinate ausgedrückt werden: $y = f(x)$

$$x = v_0 \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{x}{v_0} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 = -\frac{1}{2} \frac{g \cdot x^2}{v_0^2} = y(x)$$

2.13 Schiefer Wurf



Der schiefe Wurf muss komponentenweise beschrieben werden
x-Achse: gleichförmige, unbeschleunigte Bewegung
y-Achse: gleichmäßig beschleunigte Bewegung

x-Achse

$$a_x = 0$$

$$v_x = v_0 \cdot \cos(\phi)$$

$$x = v_0 \cdot \cos(\phi) \cdot t + x_0$$

y-Achse

$$a_y = -g$$

$$v_y = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin(\phi)$$

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\phi) \cdot t + y_0$$

Tipp: Lege den Koordinatenursprung in den Abwurf-Ort

2.13.1 Beschreibung der Flugbahn (Eliminierung von t)

Die y-Koordinate soll als Funktion der x-Koordinate ausgedrückt werden: $y = f(x)$

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(\phi) \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\phi)}$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cdot \cos^2(\phi)} \cdot x^2 + \tan(\phi) \cdot x = y(x)$$

2.13.2 Ansätze zur Bestimmung von Extrema

$$\begin{aligned} \text{max. Wurftweite } s_{max} &\stackrel{!}{=} 0 \quad (\phi \in \{45; 135\}) \\ s_{max} &= x_{max} \in \{0, \frac{2 \cdot v_0^2}{g} \cos(\phi) \cdot \sin(\phi)\} \end{aligned}$$

$$\text{Elevationswinkel } \phi = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{g \cdot d}{v_0^2} \right) = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{g \cdot x_{max}}{v_0^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{max. Wurfhöhe } &\stackrel{!}{=} 0 \\ v_y &= 0 \\ x_{maxHöhe} &= h_{max} = \frac{s_{max}}{2} = \frac{x_{max}}{2} \\ y(x_{maxHöhe}) &= \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\phi)}{2g} \end{aligned}$$

3 Dynamik

3.1 Newtonsche Gesetze

Gesetze, welche Bewegungen beschreiben.

3.1.1 Erstes Newtonsches Gesetz: Trägheitsgesetz

Ein Körper verharzt in seine Zustand (Ruhe, gleichförmige geradlinige Bewegung), wenn er nicht durch eine Kraft gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Die **Trägheit** eines Körpers hängt von seiner (Trägheits-) Masse ab.

3.1.2 Zweites Newtonsches Gesetz: Aktionsgesetz

$$\begin{array}{lll} \vec{F} & \text{Kraft} & [F] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N} \\ m & \text{(Trägheits-) Masse} & [m] = \text{kg} \\ \vec{a} & \text{Beschleunigung} & [a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{array}$$

⇒ Anwendung erfolgt meist komponentenweise!

3.1.3 Drittes Newtonsches Gesetz: Wechselwirkungsgesetz

Wirkt ein Körper A auf einen Körper B mit der Kraft \vec{F}_{AB} , so wirkt der Körper B auf A mit der Kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

3.2 Reibungskräfte

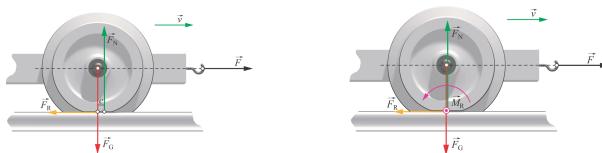
$$\text{Haftreibung: } \vec{F}_{R,\max} = \mu_H \cdot \vec{F}_N$$

$$\text{Gleitreibung: } \vec{F}_{\text{Gleit}} \approx \mu_G \cdot \vec{F}_N$$

$$\text{Rollreibung: } \vec{F}_{\text{Roll}} \approx \mu_R \cdot \vec{F}_N$$

\vec{F}_R	Reibungskraft	$[\vec{F}_R] = \text{N}$
$\vec{F}_{R,\max}$	Haftreibungskraft	$[\vec{F}_{R,\max}] = \text{N}$
\vec{F}_{Gleit}	Gleitreibungskraft	$[\vec{F}_{\text{Gleit}}] = \text{N}$

3.3 Rollreibungslänge e (Drehmoment)

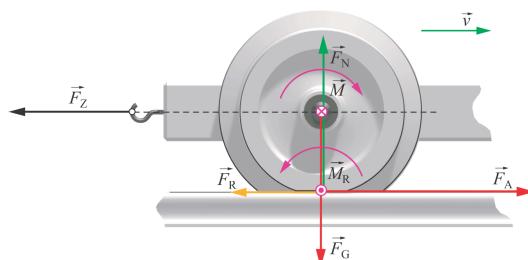


$$e = \frac{r \cdot F}{F_N} = \frac{r \cdot F_R}{F_N} = \frac{r \cdot \mu_R \cdot F_R}{F_N} = \mu_R \cdot r$$

$$M_R = e \cdot F_N = \mu_R \cdot r \cdot F_N = r \cdot F_R = r \cdot F$$

e	Rollreibungslänge	$[e] = \text{m}$
r	Radius des Rades	$[r] = \text{m}$
F_R	Rollreibungskraft	$[F_R] = \text{N}$
F_N	Normalkraft	$[F_N] = \text{N}$
μ_R	Rollreibungskoeffizient	$[\mu_R] = 1$
M_R	Rollreibungsmoment	$[M_R] = \text{Nm}$

3.4 Angetriebenes Rad



\vec{F}_Z	Zugkraft	$[F_Z] = \text{N}$
\vec{F}_N	Normalkraft	$[F_N] = \text{N}$
\vec{F}_R	Rollreibungskraft	$[F_R] = \text{N}$
\vec{F}_A	Haftreibungskraft	$[F_A] = \text{N}$

3.4.1 Hinweise zu Reibung an Rädern

- Jedes Rad weist Rollreibung auf
- Zusätzlich zur Rollreibung weist ein angetriebenes Rad eine Haftreibung auf

3.5 Arbeit und Energie

3.5.1 Arbeit

Wird der Angriffspunkt einer Kraft \vec{F} um die Strecke $d\vec{s}$ verschoben so leistet die Kraft die Arbeit W

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} \quad (\text{Skalarprodukt})$$

Wenn die projizierte Kraft konstant ist: $W = F \bullet s_{AB}$

W	Arbeit	$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$
F	Kraft	$[F] = \text{N}$
s	Weg	$[s] = \text{m}$

3.5.2 Potentielle Energie W_{pot}

Beim Anheben eines Körpers gewinnt der Körper an potentieller Energie (Lageenergie)

$$W_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

W_{pot}	Potentielle Energie	$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$
m	Masse des Körpers	$[m] = \text{kg}$
g	Erdbeschleunigung	$[g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
h	Höhe der Körpers	$[h] = \text{m}$

Beispiel: Spannen einer Feder

Federkraft als Funktion der Auslenkung x $F = -k \cdot x$

$$W_{pot} = \int_0^{x_0} -\vec{F} \bullet d\vec{x} = \int_0^{x_0} k \cdot x \, dx = \frac{1}{2} k \cdot x_0^2$$

W_{pot}	Potentielle Energie	$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$
F	Federkraft	$[F] = \text{N}$
k	Federkonstante	$[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$
x_0	Auslenkung der Feder	$[x_0] = \text{m}$

3.5.3 Kinetische Energie W_{kin}

$$W_{kin} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} = F \bullet s_{AB} = m a \cdot \frac{a}{2} t^2 = m \frac{a^2 \cdot t^2}{2} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

W_{kin}	Kinetische Energie	$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$
F	Kraft	$[F] = \text{N}$
s	Wegstück (Kinematik)	$[s] = \text{m}$
m	Masse des Körpers	$[m] = \text{kg}$
a	Beschleunigung (Kinematik)	$[a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
v	Geschwindigkeit (Kinematik)	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.6 Energieerhaltung (in abgeschlossenen Systemen)

Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ist unveränderlich!

abgeschlossen: Es wird keine Masse hinzugefügt/entfernt und es wirken keine äusseren Kräfte!

$$W = \underbrace{m \cdot g \cdot h}_{\text{pot. Energie}} = m \cdot g \cdot \underbrace{\frac{1}{2} g \cdot t^2}_{h(t)} = \underbrace{\frac{1}{2} m \cdot v^2}_{\text{kin. Energie}}$$

Für nicht abgeschlossene Systeme kann eine Bilanzrechnung aufgestellt werden:

Die Energiezunahme im Gesamtsystem entspricht der von aussen zugeführten Energie.

Die Energieabnahme im Gesamtsystem entspricht der von aussen entzogenen Energie.

3.6.1 Energiesatz der Mechanik

$$E_{pot} + E_{kin} = E_{tot} = \text{const} \quad (\text{gilt zu jedem Zeitpunkt})$$

3.7 Leistung und Wirkungsgrad

3.7.1 Leistung

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \bullet \Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

P	Leistung	$[P] = \text{W} = \frac{\text{J}}{\text{s}}$
ΔW	geleistete Arbeit	$[\Delta W] = \text{J}$
Δt	verstrichene Zeit	$[\Delta t] = \text{s}$
F	Kraft	$[F] = \text{N}$
Δs	Wegstück	$[\Delta s] = \text{m}$

Pferdestärken

$$1 \text{ PS} = 75 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 735.5 \text{ W}$$

3.7.2 Wirkungsgrad η

Faustregel: Je grösser eine Maschine, desto besser ihr Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} \quad \eta < 1 \quad [\eta] = 1$$

3.8 Impuls \vec{p}

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

2. Newton'sches Gesetz allgemeingültiger (relativistisch):

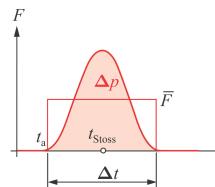
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d \vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{d \vec{p}}{dt}$$

\vec{p}	Impuls	$[\vec{p}] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$
m	Masse	$[m] = \text{kg}$
\vec{v}	Geschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
F	Kraft	$[F] = \text{N}$
\vec{a}	Beschleunigung	$[\vec{a}] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

3.8.1 Kraftstoss Δp

Ein Kraftstoss entspricht einer Impulsänderung und kann über die mittlere Kraft beschrieben werden.

$$\int_{t_a}^{t_a + \Delta t} F(t) dt = \bar{F} \cdot \Delta t = \Delta p = p' - p$$



$F(t)$	Kraftverlauf	$[F] = \text{N}$
\bar{F}	mittlere Kraft	$[\bar{F}] = \text{N}$
Δt	Zeitdauer des Kraftstosses	$[\Delta t] = \text{s}$
Δp	Impulsänderung	$[\Delta p] = \text{Ns}$
p	Impuls vor dem Stoss	$[p] = \text{Ns}$
p'	Impuls nach dem Stoss	$[p'] = \text{Ns}$
\vec{a}	Beschleunigung	$[\vec{a}] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

3.9 Impulserhaltungssatz (Impulssatz)

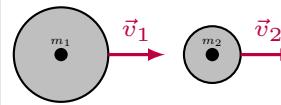
In einem **abgeschlossenen System** bleibt der Gesamtimpuls konstant
abgeschlossenes System: es wirken keine externen Kräfte

$$\vec{p} = \int \underbrace{\frac{d \vec{p}}{dt}}_{F_{\text{außen}}=0} dt = c = \text{const}$$

3.10 Stösse

$$\text{Elastizitätszahl: } k = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} = -\frac{v'_{\text{rel}}}{v_{\text{rel}}} \geq 0$$

$$\text{Deformationsarbeit: } Q = (E_1 + E_2) - (E'_1 + E'_2) \geq 0$$



3.10.1 Gerader, zentraler, total elastischer Stoss

Die beiden Stosspartner verformen sich nicht!

⇒ Für die Deformationsarbeit gilt: $Q = 0$

$$\text{Impulssatz: } p = p' \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 \stackrel{!}{=} m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$\begin{aligned} \text{Energiesatz: } E_{\text{kin}} &\stackrel{!}{=} E'_{\text{kin}} \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \\ v'_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \\ v'_2 &= \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \end{aligned}$$

3.10.2 Gerader, zentraler, total inelastischer Stoss

Die beiden Stosspartner haften nach dem Stoss aneinander und haben die gleiche Geschwindigkeit.

⇒ Für die Deformationsarbeit gilt: $Q \neq 0$

$$\text{Impulssatz: } p = p' \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 \stackrel{!}{=} (m_1 + m_2) v'$$

$$\begin{aligned} \text{Energiesatz: } E_{\text{kin}} &\stackrel{!}{=} E'_{\text{kin}} \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 + Q \end{aligned}$$

$$\text{Deformationsarbeit: } Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} \mu \cdot v_{\text{rel}}^2$$

$$\text{Relativgeschw.: } v_{\text{rel}} := |v_1 - v_2|$$

$$\text{Reduzierte Masse: } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

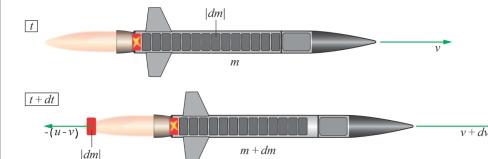
k	Elastizitätszahl	$[k] = 1$
E_1, E_2	Energien vor Stoss	$[E] = \text{J}$
E'_1, E'_2	Energien nach Stoss	$[E'] = \text{J}$
m_1, m_2	stossende Massen	$[m] = \text{kg}$
v_1, v_2	Geschwindigkeit vor Stoss	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
v'_1, v'_2	Geschwindigkeit nach Stoss	$[v'] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Q	Deformationsarbeit	$[Q] = \text{J}$
v_{rel}	Relativgeschwindigkeit	$[v_{\text{rel}}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
μ	reduzierte Masse	$[\mu] = \text{kg}$

3.11 Rakete

3.11.1 Rakete im Flug

⇒ Masse ist hier veränderbar! $m(t) = m = m_{\text{Start}} - \mu \cdot t$

Die Rakete verliert an Treibstoff, wodurch die Masse der Rakete abnimmt ($dm < 0$)



$$\text{Impulssatz: } m \cdot v(t) = (m + dm)(v(t) + dv) + dm(u - v) \quad dm < 0$$

$$\text{Raketengleichung: } v(t) = -u \cdot \ln(m) + v_0 + u \cdot \ln(m_0) = v_0 + u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

$$\text{Massenverhältnis: } \frac{\text{Startmasse}}{\text{Endmasse}}$$

$$\text{max. Geschwindigkeitsänderung: } \Delta v = v - v_0 = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

$$\text{Schubkraft: } F_{\text{Schub}} = \frac{dp}{dt} = -\frac{u \cdot dm}{dt} = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{\mu} (-u) = \mu \cdot u$$

⇒ Hier wurde noch keine Erdbeschleunigung (Anziehung) berücksichtigt!

u	Strahlgeschwindigkeit der Rakete	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
m	Zeitlich veränderbare Masse $m(t)$	$[m] = \text{kg}$
m_0	Masse zum Startzeitpunkt	$[m] = \text{kg}$
v_0	Startgeschwindigkeit	$[v_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
F_{Schub}	Schubkraft der Rakete	$[F_{\text{Schub}}] = \text{N}$
μ	Treibstoffverbrauch pro Zeit	$[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$

3.11.2 Aufstieg der Rakete im Schwefeld

Konstante Erdbeschleunigung g wird berücksichtigt

Veränderbare Masse: $m(t) = m = m_{\text{Start}} - \mu \cdot t$

$$\text{Gesamtkraft: } m(t) \frac{dv}{dt} = m(t) \cdot a = F_{\text{Schub}} - F_G = \mu \cdot u - m \cdot g$$

$$\text{Beschleunigung: } a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{\mu \cdot u}{m_0 - \mu \cdot t} - g$$

$$\text{Raketengleichung: } v(t) = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) - g \cdot t$$

$$\text{Spezifischer Impuls: } T = \frac{m(t)}{\mu} = \frac{u}{g}$$

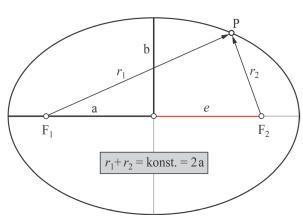
$$\text{Steighöhe: } h_t = u \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 - \frac{u}{\mu} \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_t}\right) \cdot m_t$$

u	Strahlgeschwindigkeit der Rakete	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
m	Zeitlich veränderbare Masse $m(t)$	$[m] = \text{kg}$
m_0	Masse zum Startzeitpunkt	$[m] = \text{kg}$
v_0	Startgeschwindigkeit	$[v_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
g	Erdbeschleunigung	$[g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
μ	Treibstoffverbrauch pro Zeit	$[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$
T	spezifischer Impuls (Zeit von konstantem Schub)	$[T] = \text{s}$

3.12 Gravitation

3.12.1 Erstes Kepler'sches Gesetz

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren Brennpunkt sich die Sonne befindet.



a	große Halbachse
b	kleine Halbachse
F_1, F_2	Brennpunkte
e	Exzentrizität
ϵ	num. Exzentrizität $\epsilon = \frac{e}{a}$
r_{min}	minimaler Radius
r_{max}	$r_{min} = a(1 - \epsilon)$ maximaler Radius $r_{max} = a(1 + \epsilon)$

3.12.2 Zweites Kepler'sches Gesetz

Der Fahrstrahl der Planeten überstreicht in der gleichen Zeit die gleiche Fläche.

⇒ Bei kleinerem Abstand zur Sonne ist die Geschwindigkeit schneller!

3.12.3 Drittes Kepler'sches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der grossen Halbachsen.

$$a = \left(\frac{T}{T_{ref}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot a_{ref} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{a_{ref}}\right)^3 = \left(\frac{T}{T_{ref}}\right)^2$$

Als Referenz wird die Erde verwendet!

Astronomische Einheit: $a_{ref} = 1 \text{ AE} = 149.6 \cdot 10^6 \text{ km}$

Referenzzeit: $T_{ref} = 1 \text{ a} = 1 \text{ Jahr}$

a	große Halbachse gesuchter Planet	$[a] = \text{AE}$
a_{ref}	große Halbachse Erde	$[a_{ref}] = \text{AE}$
T	Umlaufzeit Planet	$[T] = \text{Jahre}$
T_{ref}	Umlaufzeit Erde	$[T] = \text{Jahre}$

3.12.4 Gravitationsgesetz

$$\text{Gravitationskraft: } F_G = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \text{mit } G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

3.12.5 Gravitationswirkung innerhalb einer Kugel

$$F_G = G \frac{m_{Kern}(r) m}{r^2} = G \frac{4 \pi r^3 \rho m}{3 r^2} = \frac{4 \pi}{3} G \rho m r$$

F_G	Gravitationskraft	$[F_G] = \text{N}$
G	Gravitationskonstante	$[G] = \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$
r	Radius (Abstand vom Zentrum)	$[r] = \text{m}$
ρ	homogene Dichte der Kugel	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
m	Masse vom Massepunkt	$[m] = \text{kg}$
m_{Kern}	Masse des Kugelkerns	$[m_{Kern}] = \text{kg}$

3.12.6 Gravitationswirkung ausserhalb einer Kugel

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

F_G	Gravitationskraft	$[F_G] = \text{N}$
G	Gravitationskonstante	$[G] = \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$
r	Radius (Abstand vom Zentrum)	$[r] = \text{m}$
m	Masse vom Massepunkt	$[m] = \text{kg}$
M	Gesamtmasse der Kugel	$[M] = \text{kg}$

3.12.7 Gravitationspotential ϕ

Wenn eine Masse in einem Gravitationsfeld bewegt wird, so wird Arbeit verrichtet.

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_G \bullet d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} G \frac{M \cdot m}{r^2} dr = G \cdot M \cdot m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$\text{potentielle Energie: } E_{pot}(r) = -G \frac{M m}{r}$$

$$\text{Gravitationspotential: } \phi = \frac{E_{pot}}{m} = -\frac{G \cdot M}{r}$$

Im Inneren eines homogenen Zentralkörpers gilt

$$F_G = \frac{4 \pi \cdot G \cdot \rho \cdot m \cdot r}{3}$$

$$E_{pot} = -\frac{2 \pi \cdot G \cdot \rho \cdot m}{3} r^2 + c'$$

$$\phi = -\frac{2 \pi \cdot G \cdot \rho}{3} r^2 + c = -\frac{G \cdot M(r)}{2r} + c = -\frac{G \cdot M(r)}{2r} - \frac{G \cdot M}{2R}$$

W	Arbeit	$[W] = \text{J}$
F_G	Gravitationskraft	$[F_G] = \text{N}$
E_{pot}	potentielle Energie	$E_{pot} = \text{J}$
G	Gravitationskonstante	$[G] = \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$
r	Radius (Abstand vom Zentrum)	$[r] = \text{m}$
ρ	homogene Dichte der Kugel	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
m	Masse vom Massepunkt	$[m] = \text{kg}$
M	Gesamtmasse der Kugel	$[M] = \text{kg}$
R	Radius der Kugeloberfläche	$[R] = \text{m}$

3.13 Bezugssysteme: Inertialsystem

Inertialsystem: **unbeschleunigtes** Bezugssystem

Wenn die Newton'schen Gesetze im Bezugssystem S gelten, so gelten sie auch im Bezugssystem S', solange dieses nicht beschleunigt ist und nicht rotiert.
⇒ **In sämtlichen Inertialsystemen sind die mechanischen Gesetze identisch!**

3.13.1 Galilei-Transformation

Bezugssystem S' bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0

Transformation zwischen S und S'

$$v_0 = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x &= x' + v_x t \\ y &= y' + v_y t \\ z &= z' + v_z t \\ t &= t' \end{aligned}$$

3.14 Beschleunigte Bezugssysteme

In beschleunigten Bezugssystemen müssen **Trägheitskräfte** berücksichtigt werden!

3.14.1 Translatorisch beschleunigtes Bezugssystem

Beispiel: Zug beschleunigt auf gerader Schiene

Für einen Beobachter im **beschleunigten System S'** wirkt eine Trägheitskraft:

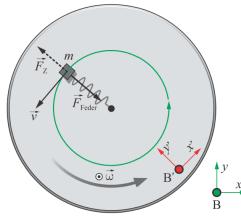
$$\text{Gesamtkraft: } \vec{F}' = \vec{F} - m \cdot \vec{a}_0 = \vec{F} + \vec{F}_{Trägheit}$$

\vec{F}'	Gesamte im System wirkende Kraft	$[\vec{F}'] = \text{N}$
\vec{F}	Statisch wirkende Kräfte	$[\vec{F}] = \text{N}$
$\vec{F}_{Trägheit}$	Trägheitskraft	$[\vec{F}_{Trägheit}] = \text{N}$
m	Masse im System	$[m] = \text{kg}$
\vec{a}_0	Beschleunigung des Systems	$[\vec{a}_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

3.14.2 Gleichförmig rotierendes Bezugssystem (Scheinkräfte)

Fest verbundene Masse \Rightarrow Scheinkraft: Zentrifugalkraft

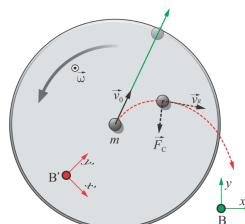
$$\vec{F}_z = -m \vec{a}_z = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$$



\vec{F}_z	Zentrifugalkraft (Trägheitskraft; Scheinkraft)	$[\vec{F}_z] = \text{N}$
m	Masse im System	$[m] = \text{kg}$
\vec{a}_z	Beschleunigung des Systems (a_{radial})	$[\vec{a}_z] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
\vec{r}	Radius des Systems (nach innen zeigend)	$[\vec{r}] = \text{m}$

lose Masse \Rightarrow Scheinkraft: Corioliskraft

$$\vec{F}_c = -m \cdot \vec{a}_c = -m \cdot 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_R)$$



\vec{F}_c	Corioliskraft (Trägheitskraft; Scheinkraft)	$[\vec{F}_c] = \text{N}$
m	Masse im System	$[m] = \text{kg}$
\vec{a}_c	Coriolisbeschleunigung	$[\vec{a}_c] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
\vec{v}_R	Relativgeschwindigkeit	$[\vec{v}_R] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.14.3 D'Alembert'sches Prinzip

Wird ein Körper in einem mitbewegten Koordinatensystem betrachtet, so bleibt er in Ruhe: $\vec{v}_R = 0$ und $\vec{a}_R = 0$

$$\vec{F} + \underbrace{\vec{F}_z + \vec{F}_c}_{\text{Scheinkräfte}} = \vec{0}$$

\Rightarrow Statisches Gleichgewichtsproblem

3.15 Rotation starrer Körper

Rotation:	Drehung um feste Achse
Kreisel:	Drehung um starren Punkt
Kreiselbewegung	Drehung eines völlig freien, starren Körpers um seinen Schwerpunkt

3.15.1 Dynamisches Grundgesetz der Rotation

Es ist nur die tangentiale Komponente der Kraft (des Drehmoments) eines rotierenden Körpers relevant!

$$dM_t = r \cdot dF_t = r \cdot dm \cdot a_t = dm \cdot r^2 \cdot \alpha$$

$$M = \int dM = \int r^2 \alpha \cdot dm = \alpha \underbrace{\int r^2 \cdot dm}_{J_{\text{Scheibe}} = m \cdot r^2} \Rightarrow M = J \cdot \alpha$$

dM_t	kleine Tan.-Komponente des Drehmoments	$[dM_t] = \text{Nm}$
M	(gesamtes) Drehmoment	$[M] = \text{Nm}$
dF_t	kleine Tangentialkomponente der Kraft	$[dF_t] = \text{N}$
r	Abstand Drehachse zu Massepunkt (Rand)	$[r] = \text{m}$
dm	kleines Massestück des Körpers	$dm = \text{kg}$
a_t	Tangentialbeschleunigung ($a_t = r \cdot \alpha$)	$[a_t] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
α	Winkelbeschleunigung	$[\alpha] = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$
J	(Massen-) Trägheitsmoment	$[J] = \text{kg m}^2$

3.15.2 Massenträgheitsmomente

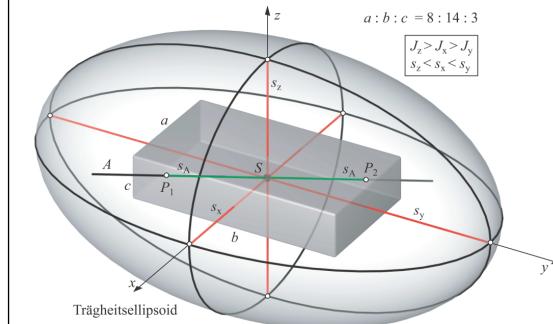
Körper	Trägheitsmoment
Vollzylinder	$\frac{mr^2}{2}$
Hohlzylinder	$\frac{m(r_a^2 + r_i^2)}{2}$
Kugel	$\frac{2}{5}mr^2$
Quader	$\frac{m(a^2 + b^2)}{12}$

3.16 Trägheitsellipsoid

Trägheitsradius r_0 : als ob ganze Masse eines Körpers nur einen Radius hätte

$$r_0 = \sqrt{\frac{J}{m}}$$

r_0	Trägheitsradius	$[r_0] = \text{m}$
m	Masse des Körpers	$[m] = \text{kg}$
J	(Massen-) Trägheitsmoment	$[J] = \text{kg m}^2$
s_0	reziproker Trägheitsradius	$[s_0] = \text{m}$

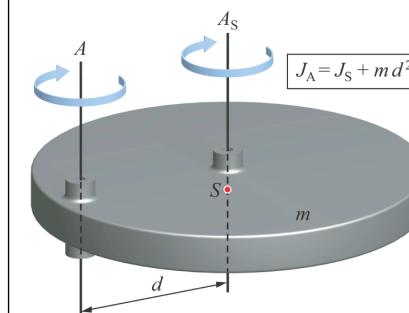


Hauptträgheits-Achsen (entsprechen immer Symmetrie-Achsen, falls vorhanden)

beliebige Achse J_A $J_A = J_x \cdot \cos^2(\alpha) + J_y \cdot \cos^2(\beta) + J_z \cdot \cos^2(\gamma)$

3.17 Satz von Steiner

Beschreibt, wie man das Trägheitsmoment J berechnet, wenn die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt des rotierenden Körpers geht, sondern parallel dazu verläuft.



J_S	Trägheitsmoment (Rot. um Schwerp.)	$[J_S] = \text{kg m}^2$
J_A	Trägheitsmoment (Rot. um bel. Punkt)	$[J_A] = \text{kg m}^2$
m	Masse des Körpers	$[m] = \text{kg}$
d	Abstand zum Schwerpunkt	$[d] = \text{m}$

3.18 Arbeit und Leistung (Rotation)

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{s} = F_t \cdot ds = F_t \cdot r \cdot d\phi = M \cdot d\phi$$

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\phi}{dt} = M \cdot \omega$$

F_t	Tantentialer Kraftanteil der Rotation	$[F_t] = N$
$d\phi$	zurückgelegter Kreiswinkel	$[d\phi] = \text{rad}$
P	Leistung	$[P] = W$
W	Energie	$[W] = J$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
M	Drehmoment	$[M] = \text{Nm}$

3.19 Rotationsenergie

Folgendes gilt nur für die Rotation um den Schwerpunkt eines Körpers!

Die totale kinetische Energie ist die Summe aller kinetischer Energien eines Körpers

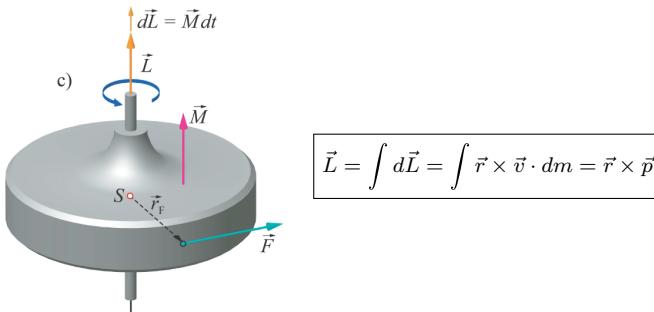
$$E_{kin} = \int \frac{1}{2} v^2 dm = E_{trans} + E_{rot}$$

$$E_{trans} = \frac{1}{2} m \cdot v_s^2$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J_s \cdot \omega^2$$

E_{trans}	Translationsenergie des Schwerpunkts	$[E_{trans}] = J$
m	Masse des Körpers	$[m] = \text{kg}$
v_s	Geschwindigkeit des Schwerpunkts	$[v_s] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
E_{rot}	Rotationsenergie	$[E_{rot}] = J$
J_s	Trägheitsmoment (Rot. um Schwerp.)	$[J_s] = \text{kg m}^2$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

3.20 Drehimpuls \vec{L} / Impulserhaltung (Rotation)



\vec{L}	Drehimpuls	$[\vec{L}] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$
\vec{r}	Abstand Massepunkt zu Rot-Achse	$[\vec{r}] = \text{m}$
\vec{v}	Rotationsgeschwindigkeit	$[\vec{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
dm	kleines Masse-Stück	$[dm] = \text{kg}$
\vec{p}	Impuls	$[\vec{p}] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$

3.20.1 Drehmoment \vec{M} vs. Drehimpuls \vec{L}

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d}{dt} \vec{L} = \dot{\vec{L}}$$

In einem abgeschlossenen System ($\vec{M} = 0$) bleibt der Gesamtdrehimpuls erhalten
⇒ $\vec{L} = \text{const}$

Impulserhaltung: $L = L'$

$$J_1 \cdot \omega + J_2 \cdot \omega' = J_1 \cdot \omega'_1 + J_2 \cdot \omega'_2$$

Energiesatz:

$$E_{rot} = E'_{rot} + Q$$

$$\frac{1}{2} J_1 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \cdot \omega_2^2 = \frac{1}{2} J_1 \cdot \omega'^2_1 + \frac{1}{2} J_2 \cdot \omega'^2_2 + Q$$

\vec{M} Drehmoment

\vec{r} Abstand Massepunkt zu Rot-Achse

\vec{F} Kraft, welche Drehmoment bewirkt

\vec{p} Impuls

\vec{L} Drehimpuls

J Massenträgheitsmoment

ω Winkelgeschwindigkeit

Q Deformationsarbeit

$$[\vec{M}] = \text{Nm}$$

$$[\vec{r}] = \text{m}$$

$$[\vec{F}] = \text{N}$$

$$[\vec{p}] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$$

$$[\vec{L}] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

$$[J] = \text{kg m}^2$$

$$[\omega] = \frac{1}{\text{s}}$$

$$[Q] = \text{J}$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v = v_0 + at$$

$$\Delta x = \frac{(v)}{\Delta t}$$

$$(v) = \frac{1}{2}(v_0 + v)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 a \Delta x$$

$$F$$

$$m$$

$$dW = F ds$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$P = F v$$

$$p = m v$$

$$F_{ext} = m a = \frac{dp}{dt}$$

3.20.2 Drehimpuls \vec{L} vs. Winkelgeschwindigkeit ω

$$L = \int dL = \int r^2 \omega dm = \omega \int r^2 dm = J \omega$$

L	Drehimpuls	$[L] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$
r	Abstand Massepunkt zu Rot-Achse	$[r] = \text{m}$
dm	kleines Masse-Stück	$[dm] = \text{kg}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
J	(Massen-) Trägheitsmoment (hier Tensor)	$[J] = \text{kg m}^2$

3.21 Rotation vs. Translation

Drehbewegung	Lineare Bewegung
Drehwinkel $\Delta\theta$	Verschiebung Δx
$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	Geschwindigkeit $v = \frac{dx}{dt}$
$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	Beschleunigung $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_0 + \alpha t$	Gleichungen für den Fall konstanter Beschleunigung
Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{(\omega)}{\Delta t}$	$\Delta x = \frac{(v)}{\Delta t}$
$(\omega) = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$	$(v) = \frac{1}{2}(v_0 + v)$
$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \alpha \Delta \theta$	$v^2 = v_0^2 + 2 a \Delta x$
Drehmoment M	Kraft F
Trägheitsmoment I	Masse m
Arbeit $dW = M dt$	Arbeit $dW = F ds$
Kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} I \omega^2$	Kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$
Leistung $P = M \omega$	Leistung $P = F v$
Drehimpuls $L = I \omega$	Impuls $p = m v$
Zweites Newton'sches Axiom $M_{ext} = I \alpha = \frac{dL}{dt}$	Zweites Newton'sches Axiom

4 Vektorrechnung

4.1 Betrag eines Vektors

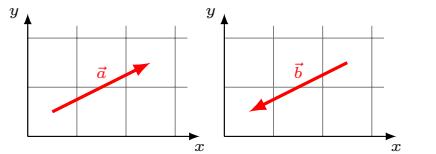
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

4.2 Gleichheit zweier Vektoren

Zwei Vektoren sind gleich, wenn alle Komponenten identisch sind:

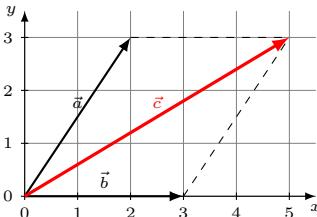
- $A_x = B_x$
- $A_y = B_y$
- $A_z = B_z$

4.3 Negative eines Vektors



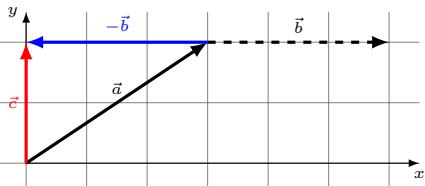
$$\begin{aligned} b_x &= -a_x \\ b_y &= -a_y \\ b_z &= -a_z \end{aligned}$$

4.4 Addition zweier Vektoren



$$\begin{aligned} c_x &= a_x + b_x \\ c_y &= a_y + b_y \\ c_z &= a_z + b_z \end{aligned}$$

4.5 Subtraktion zweier Vektoren



$$\begin{aligned} c_x &= a_x - b_x \\ c_y &= a_y - b_y \\ c_z &= a_z - b_z \end{aligned}$$

4.6 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

$$\vec{b} = s \vec{a} \quad |\vec{B}| = |s| \cdot |\vec{a}|$$

$$\begin{aligned} b_x &= s \cdot a_x \\ b_y &= s \cdot a_y \\ b_z &= s \cdot a_z \end{aligned}$$

4.7 Skalarprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi)$$

4.8 Kreuzprodukt (nur in 3D)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

5 Statistik

5.1 Arithmetisches Mittel \bar{x}_{arith}

$$\bar{x}_{arith} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

5.2 Geometrisches Mittel \bar{x}_{geom}

Nur für positive Zahlenreihen x_i definiert!

$$\bar{x}_{geom} := \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N x_i} \quad \Rightarrow \bar{x}_{geom} \leq \bar{x}_{arith}$$

5.3 Quadratisches Mittel QMW (RMS)

Wechselstromtechnik; Effektivwert

$$QMW := \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}$$

5.4 Harmonisches Mittel \bar{x}_{harm}

$$\bar{x}_{harm} := \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i}}$$

Kann sinnvoll eingesetzt werden, wenn man für die i -te Teilstrecke s_i eine Zeit t_i benötigt (also eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $v_i = \frac{s_i}{t_i}$ und eine Durchschnittsgeschwindigkeit über N Teilstrecken ermitteln will:

$$\bar{v}_{harm} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i}{\sum_{i=1}^N t_i} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i}{\sum_{i=1}^N \frac{s_i}{v_i}} \quad \text{gewichtetes harm. Mittel}$$

5.5 Standardabweichung σ

Varianz:

$$\sigma^2 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_{arith})^2$$

Standardabweichung: $\sigma := \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_{arith})^2}$

5.6 Standardabweichung des Mittelwerts

Gilt nur, wenn eine Normalverteilung vorliegt!
Beschreibt nur statistische Fehler

$$\sigma(\bar{x}_{arith}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

6 Mathematik-Hilfe

6.1 Trigonometrie

Sinus	Cosinus	Tangens
$\frac{GK}{H}$	$\frac{AK}{H}$	$\frac{AK}{GK}$

6.2 Schwerpunkt

Die Koordinaten des Schwerpunkts müssen komponentenweise berechnet werden:

$$x_s = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{M} \quad y_s = \frac{\sum y_i \cdot m_i}{M} \quad z_s = \frac{\sum z_i \cdot m_i}{M}$$

x_s, y_s, z_s Koordinaten des Schwerpunkts

x_i, y_i, z_i Koordinaten von kleinen Massepunkten

m_i Kleine Massepunkte an entsprechenden Koordinaten
 M Gesamtmasse des Körpers

6.3 Polarkoordinaten (Kreisbewegung)

$$\text{polar} \rightarrow \text{kartesisch} \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\phi) \\ r \cdot \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\text{kartesisch} \rightarrow \text{polar} \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\left(\frac{x}{y}\right) \end{pmatrix}$$

6.4 Ableitungsregeln S .445-448

6.4.1 Elementare Regeln

Potenzen: $f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2$
 $f(x) = x^\alpha \quad f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Linearität: $f(x) = c \cdot x^2 \quad f'(x) = c \cdot 2x$

Summe: $(u(x) + v(x) - w(x))' = u'(x) + v'(x) - w'(x)$

Konstanten: $c = \text{const} \rightarrow c' = 0$

6.4.2 Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

6.4.3 Quotientenregel

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \quad \rightarrow \text{als Produkt schreiben}$$

$$u(x) \cdot \left(\frac{1}{v(x)} \right)' = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \frac{-v'(x)}{v(x)^2}$$

6.4.4 Kettenregel

$$g(f(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

6.4.5 Umkehrfunktion

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

6.5 Allgemeine Logarithmus-Ableitung

$$(\log_b(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)} \right)' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot (\ln(x))' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}$$

6.6 Integrationsregeln S. 494-496

Linearität: $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$

6.6.1 Rechenregeln mit Integralen S. 508-510

Zerlegung: $\int_a^b f_1(x) dx + f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Grenzen tauschen: $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

Gleiche Grenzen: $\int_a^a f(x) dx = 0$

6.7 Wichtige Integrale S. 495

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \quad \int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\int_a^b 1 dx = b - a \text{ (Rechteck)}$$

7 Hydrostatik

7.1 Festkörper, Flüssigkeit, Gas

7.1.1 Festkörper

- kein Fluid
- festes Volumen; feste Gestalt
- Moleküle / Atome befinden sich in regelmässiger Gitter-Anordnung
- inkompresibel (sehr schlecht komprimierbar)
- Kraft: Weiterleitung (längs ihrer Wirkungslinie)
- Druck: Verstärkung

7.1.2 ideale Flüssigkeit

- Fluid
- festes Volumen; keine feste Gestalt
- Moleküle / Atome bewegen sich chaotisch aneinander vorbei
- Moleküle / Atome füllen den Raum aus / berühren sich
- inkompresibel (schlecht komprimierbar)
- reibungsfrei (keine Scherkräfte)
- Kraft: Verstärkung
- Druck: Weiterleitung (gleichmässig)

7.1.3 Gas

- Fluid
- kein festes Volumen; keine feste Gestalt
- Moleküle / Atome fliegen mit hoher Geschwindigkeit durch den Raum
- Es gibt sehr viel Zwischenraum
- Moleküle / Atome führen bei Zusammenstoss unter sich oder mit Gefäßwand elastische Stöße aus
- kompressibel (gut komprimierbar)
- reibungsfrei (keine Scherkräfte)

7.2 Druck p / Schubspannung τ

Druck ist eine skalare Grösse (hat keine Richtung)

$$p = \frac{F_{\perp}}{A}$$

$$\tau = \frac{F_{\parallel}}{A}$$

p	Druck	$[p] = \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
τ	Schubspannung (Scherkraft)	$[\tau] = \text{N}$
F_{\perp}	Kraft senkrecht zu A	$[F_{\perp}] = \text{N}$
F_{\parallel}	Kraft parallel zu A	$[F_{\parallel}] = \text{N}$
A	Fläche	$[A] = \text{m}^2$

In abgeschlossenen, miteinander verbundenen Systemen herrscht ein Druck-Gleichgewicht!

$$p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

7.2.1 Weitere Einheiten von Druck

1 bar = 10^5 Pa (Absolutdruck: Vergleich zu Vakuum)
 1 hPa = 100 Pa = 1 mbar
 $1 \text{ at} = 1 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2} = 9.81 \cdot 10^4 \text{ Pa}$
 $1 \text{ atü} = 1 \text{ at}$ (Überdruck; Vergleich zu normalem Luftdruck)
 1 Torr = $\frac{1}{760}$ at (1mm-Hg-Säule)

7.3 Kompression

$$\text{Flüssigkeiten: } \Delta p = \frac{1}{\kappa} \cdot -\frac{\Delta V}{V} = K \cdot -\frac{\Delta V}{V}$$

$$\text{Gase: } \Delta p = p(h) - p_0 = \frac{1}{\kappa_T} \cdot -\frac{\Delta V}{V}$$

Δp	Druckerhöhung	$[\Delta p] = \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
κ	Kompressibilität (Flüssigkeit)	$[\kappa] = \frac{1}{\text{Pa}}$
$K = \frac{1}{\kappa}$	Kompressionsmodul	$[K] = \text{Pa}$
κ_T	Kompressibilität (Gas)	$[\kappa_T] = \frac{1}{\text{Pa}}$
$-\frac{\Delta V}{V}$	relative Volumen-Abnahme	$[\frac{\Delta V}{V}] = 1$

7.4 Dichte ρ

$$\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow m = \rho \cdot V$$

ρ	Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
m	Masse	$[m] = \text{kg}$
V	Volumen	$[V] = \text{m}^3$

7.4.1 Wichtige Dichten

$$\rho_{\text{Wasser}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_{\text{Luft}} = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

7.5 Boyle-Mariotte

Das Gesetz von Boyle-Mariotte beschreibt die Kompressibilität von Gasen.

⇒ Das Gesetz gilt nur bei konstanter Temperatur!

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 = \text{const} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

$$\begin{aligned} \rho_x &\text{ Gas-Dichte} & [\rho_x] &= \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ p_x &\text{ Gas-Druck} & [p_x] &= \text{Pa} \\ V_x &\text{ Volumen} & [V_x] &= \text{m}^3 \end{aligned}$$

7.6 Hydrostatischer Druck (Schweredruck)

Gilt nur für Flüssigkeiten!

$$p = \rho \cdot g \cdot h$$

$$\begin{aligned} \rho &\text{ Dichte der Flüssigkeit} & [\rho] &= \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ g &\text{ Erdbeschleunigung} & g &= 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} & [g] &= \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ h &\text{ Höhe unter der Flüssigkeits-Oberfläche} & h &= \text{m} \end{aligned}$$

Der Druck ist nur von der Höhe der darüberliegenden Flüssigkeit abhängig, nicht von deren Volumen oder Gewicht.

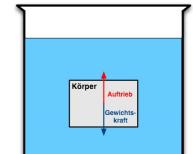
7.7 Barometrische Höhenformel (Gase)

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h}$$

$$\begin{aligned} p(h) &\text{ Schweredruck des Gases bei Höhe } h & [p(h)] &= \text{Pa} \\ p_0 &\text{ Luftdruck auf Meereshöhe } p_0 = 10^5 \text{ Pa} & [p_0] &= \text{Pa} \\ \rho_0 &\text{ Luft-Dichte auf Meereshöhe } \rho_0 = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} & [\rho_0] &= \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ g &\text{ Erdbeschleunigung} & g &= 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} & [g] &= \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ h &\text{ Höhe über Meer} & h &= \text{m} \end{aligned}$$

7.8 Statischer Auftrieb (Fluid)

Der Auftrieb eines Körpers entspricht dem Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit (Archimedes).



$$F_A = \rho_{fl} \cdot V_K \cdot g$$

$$F_A = F_{G,fl} = m_{fl} \cdot g = \rho_{fl} \cdot V_K \cdot g$$

$$\begin{aligned} F_A &\text{ Auftriebskraft} & [F_A] &= \text{N} \\ \rho_{fl} &\text{ Dichte verdrängtes Fluid} & [\rho_{fl}] &= \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ V_K &\text{ verdrängtes Fluid-Volumen} & [V_K] &= \text{m}^3 \\ g &\text{ Erdbeschleunigung} & g &= 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} & [g] &= \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ m_{fl} &\text{ Masse des verdrängten Fluids} & [m_{fl}] &= \text{kg} \\ F_{G,fl} &\text{ Gewichtskraft verdrängtes Fluid} & [F_{G,fl}] &= \text{N} \end{aligned}$$

9 Hydrodynamik - Reale Fluide

Reale Fluide nehmen Scherkräfte auf (Reibung)

9.1 Newton'sches Reibungs-Gesetz

Ein reales Fluid erfährt Reibung

$$\tau = \eta \cdot \frac{v}{d}$$

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dz}$$

τ	Schubspannung
η	dynamische Zähigkeit (Viskosität)
v	Geschwindigkeitsdifferenz zw. Auflagen
z	Richtung senkrecht zur Verschiebung
d	Distanz zwischen den Auflagen
$\frac{dv}{dz}$	Geschwindigkeits-Gradient in z-Richtung

$[v]$	$= \text{N}$
$[\eta]$	$= \text{Pa} \cdot \text{s}$
$[v]$	$= \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$[z]$	$= \text{m}$
$[d]$	$= \text{m}$
$[\frac{dv}{dz}]$	$= \frac{1}{\text{s}}$

Beispiele: Werte für η

$$\eta_{Luft} := 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\eta_{Wasser} := 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\eta_{Öl} := 0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s} \text{ bis } 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

9.1.1 Kinematische Zähigkeit ν

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

$$\nu \quad \text{kinematische Zähigkeit} \quad [\nu] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\rho \quad \text{Dichte} \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

9.2 Stokes'sche Reibung F_R

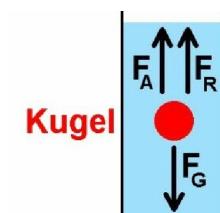
Z.B. für Kugel in Öl oder fallende Wassertropfen

$$F_R = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R \cdot v$$

F_R	Reibungskraft	$[F_R] = \text{N}$
η	Dynamische Zähigkeit (Viskosität)	$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$
R	Kugelradius	$[R] = \text{m}$
v	Geschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

9.2.1 Kugelfall-Viskosimeter

Auf eine Kugel, welche in einer Flüssigkeit hinabgleitet wirken folgende Kräfte:



F_G Gewichtskraft
 F_A statischer Auftrieb
 F_R Stokes'sche Reibung

Ansatz zum Lösen von Aufgaben:
Kräftegleichgewicht

9.3 Hagen-Poiseuille

Beschreibung von laminaren Strömungen in einem runden Rohr
⇒ Schichtströmung

9.3.1 Gesetz von Hagen-Poiseuille

$$\dot{V} = \frac{\pi \cdot \Delta p \cdot R^4}{8 \cdot \eta \cdot l}$$

9.3.2 Geschwindigkeitsverteilung von $r = 0$ bis R

$$v(r) = \frac{1}{4 \cdot \eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} \cdot (R^2 - r^2)$$

$v(r)$	Fliessgeschwindigkeit beim Radius r	$[v(r)] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
r	betrachteter Radius	$[r] = \text{m}$
η	Dynamische Zähigkeit (Viskosität)	$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$
R	Rohr-(Innen)Radius	$[R] = \text{m}$
Δp	Druckdifferenz	$[\Delta p] = \text{Pa}$
\dot{V}	Volumenstrom	$[\dot{V}] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$
l	Länge des Rohrs	$[l] = \text{m}$

9.4 Reynolds-Zahl Re

Gibt ein Richtmaß für die Wirbelbildung

- Druck-Differenz (Bernoulli) begünstigt Wirbelbildung
- Innere Reibung (Schubspannung) verhindert Wirbelbildung

$$Re = \frac{\Delta p}{\tau} = \frac{\rho \cdot \bar{v} \cdot d}{\eta} \quad \text{mit } \bar{v} = \frac{\dot{V}}{A}$$

Re	Reynolds-Zahl	$[Re] = 1$
η	Dynamische Zähigkeit (Viskosität)	$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$
\bar{v}	Mittlere Geschwindigkeit	$[\bar{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
d	Typische Dimension (Rohrdurchmesser)	$[d] = \text{m}$
Δp	Druckdifferenz	$[\Delta p] = \text{Pa}$
τ	Schubspannung	$[\tau] = \text{N}$

Sobald die Reynolds-Zahl Re grösser ist als ein kritischer Wert bilden sich Wirbel

⇒ Rohr: $Re_{kritisch} \approx 2320$

9.4.1 Ähnlichkeitsgesetz

Reynolds-Zahl dient auch richtigem Vergleich von Modellversuchen.

⇒ Gleiche Reynolds-Zahl bedeutet gleiches Verhalten

⇒ Gleiche Reynolds-Zahl bedeutet auch gleiche Relative Grenzschicht-Dicke D (siehe Abschnitt 3.5)

9.5 Turbulente / Laminare Rohrströmung

9.5.1 Hilfe, um Reynoldszahl zu bestimmen (laminar)

$$\Delta p = 32 \cdot \eta \cdot l \cdot \frac{v}{d^2}$$

9.5.2 Druckunterschied in laminare / turbulente Strömung

$$\lambda_{turbulent} = \frac{0.316}{\sqrt[4]{Re}} \quad \lambda_{laminar} = \frac{64}{Re}$$

$$\Rightarrow \Delta p_x = \lambda_x \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2$$

Δp_x	Druckdifferenz (laminar/turbulent)	$[\Delta p] = \text{Pa}$
η	Dynamische Zähigkeit (Viskosität)	$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$
l	Rohr-Länge	$[l] = \text{m}$
v	Fliess-Geschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
d	Rohr-Durchmesser	$[d] = \text{m}$
ρ	Dichte des Fluids	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Re	Reynolds-Zahl	$[Re] = 1$

9.5.3 Unbekannt / Gemischt (Pratische Anwendung)

Vorgehen, wenn man nicht weiss, ob sich Wirbel bilden oder nicht

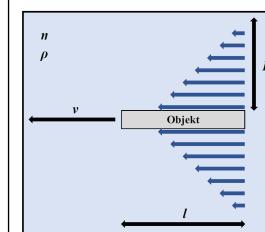
1. Laminar rechnen (um fehlenden Parameter ρ , v , d , oder η zu bestimmen)
2. Aus Resultat Reynolds-Zahl berechnen
3. Mit kritischer Reynolds-Zahl vergleichen
4. Beim Überschreiten ⇒ Turbulent rechnen!

9.6 Prandl'sche Grenzschicht-Dicke D

Prandl'sche Grenzschicht-Dicke D beschreibt, in welcher Distanz die Geschwindigkeit eines laminar bewegten Teils (z.B. ein Flugzeugflügel) Null ist.

$$D = \sqrt{\frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{l}{v}}$$

D	Prandl'sche Grenzschicht-Dicke	$[D] = \text{m}$
η	Dynamische Zähigkeit (Viskosität)	$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$
ρ	Dichte des Fluids	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
l	Länge des bewegten Teils (in Richtung von v)	$[l] = \text{m}$
v	Geschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$



Die Geschwindigkeit innerhalb der Grenzschicht D nimmt von Teil bis hin zum äussersten Rand linear ab.

9.7 Bernoulli-Gleichung mit innerer Reibung

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \alpha_2 \cdot \rho \cdot v_2^2 + \Delta p_v$$

	laminar	turbulent
Korrekturfaktoren	$\alpha_1 = \alpha_2 = 2$	$\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$
Druckverlust Δp_v	$\Delta p_v = \lambda_x \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2$	
	$\lambda_{turbulent} = \frac{0.316}{\sqrt{Re}}$	$\lambda_{laminar} = \frac{64}{Re}$

9.8 Druckwiderstand F_D

Bezeichnet die turbulente Luftreibungskraft F_R und wird meist als Luftwiderstand bezeichnet

$$F_D = \Delta p \cdot A_s = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_s \cdot c_w$$

F_D	Druckwiderstand	$[F_D] = \text{N}$
Δp	Druckdifferenz	$[\Delta p] = \text{Pa}$
ρ	Luft-Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
v	Strömungs-Geschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
c_w	Widerstandsbeiwert / Widerstandszahl	$[c_w] = 1$
A_s	projizierte Fläche senkrecht zur Strömung	$[A_s] = \text{m}^2$

Der Widerstandsbeiwert c_w ist **geometrieabhängig**!

9.9 Auftriebskraft F_A nach Kutta-Jukowski

Beschreibt Proportionalität zwischen dynamischem Auftrieb und Zirkulation

$$F_A = \rho \cdot v \cdot l \cdot \Gamma$$

F_A	dynamischer Auftrieb	$[F_A] = \text{N}$
ρ	Dichte des Fluids	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
v	Geschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
l	Länge quer zur Strömung	$[l] = \text{m}$
Γ	Zirkulation	$[\Gamma] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

9.9.1 Zirkulation Γ

Die Zirkulation ist ein Mass für die **Rotation** im Strömungsfeld

$$\Gamma = \oint \vec{v} \bullet d\vec{s}$$

Γ	Zirkulation	$[\Gamma] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
$\vec{v} \bullet d\vec{s}$	Geschwindigkeit entlang dem Weg (Skalarprodukt: $\vec{v} \bullet d\vec{s} = a \cdot b \cdot \cos(\varphi)$)	$[\vec{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

9.10 Dynamischer Auftrieb F_A

$$F_A = c_A \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_{\parallel}}_{\Delta p}$$

F_A	dynamischer Auftrieb	$[F_A] = \text{N}$
c_A	Auftriebskoeffizient	$[c_A] = 1$
ρ	Luft-Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
v	Strömungsgeschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
A_{\parallel}	Projizierte Fläche parallel zur Strömung	$[A_{\parallel}] = \text{m}^2$

9.10.1 Wissenswertes zum dynamischen Auftrieb

Ein gerade ausgerichtetes, symmetrisches Stromlinienprofil erzeugt **keinen** dynamischen Auftrieb

An einem asymmetrischen Flügelprofil entsteht dynamischer Auftrieb

9.11 Induzierter Widerstand F_W

Kommt durch Energieverlust (Wirbelbildung) zu Stande, welcher entsteht, wenn die Umgebungsluft in Bewegung gesetzt wird

$$F_W = c_w^* \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_{\parallel}$$

F_W	Induzierter Widerstand	$[F_W] = \text{N}$
c_w^*	Widerstands-Koeffizient	$[c_w^*] = 1$
ρ	Luft-Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
v	Strömungsgeschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
A_{\parallel}	Projizierte Fläche parallel zur Strömung	$[A_{\parallel}] = \text{m}^2$

9.12 Gleitwinkel φ

Gibt die zurückgelegte Strecke pro verbrauchte Höhe an
Im Luft-Kanal ist dies der Anstell-Winkel

$$\tan(\varphi) = \frac{F_W}{F_A} = \frac{c_w^*}{c_A} = \frac{v_V}{v_H}$$

φ	Gleitwinkel	$[\varphi] = {}^\circ$
F_W	Widerstandskraft	$[F_W] = \text{N}$
F_A	Auftriebskraft	$[F_A] = \text{N}$
c_w^*	Widerstands-Koeffizient	$[c_w^*] = 1$
c_A	Auftriebs-Koeffizient	$[c_A] = 1$
v_V	Vertikal-Geschwindigkeit	$[v_V] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
v_H	Horizontal-Geschwindigkeit	$[v_H] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

9.13 Helmholtz'sche Wirbelsätze

1. Wirbel hat kein Anfang und kein Ende
2. Wirbel besteht immer aus denselben Fluidteilchen
3. Zirkulation zeitlich konstant

10 Thermodynamik

10.1 Absolute Temperatur T

$$T = \theta + 273.15 \text{ K} = \theta - \theta_0$$

T	Absolute Temperatur gemessen in Kelvin	$[T] = \text{K}$
θ	Temperatur gemessen in ${}^\circ\text{C}$	$[\theta] = {}^\circ\text{C}$
θ_0	Absoluter Nullpunkt: $= -273.15 {}^\circ\text{C} = 0 \text{ K}$	

10.2 Thermische Ausdehnung

10.2.1 Längenausdehnung Δl

$$l' = l + \Delta l = l + \alpha \cdot l \cdot \Delta T = l(1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

l'	Länge nach Ausdehnung	$[l'] = \text{m}$
l	Anfangslänge	$[l] = \text{m}$
Δl	Längenänderung	$[\Delta l] = \text{m}$
α	Längenausdehnungskoeffizient	$[\alpha] = \frac{1}{\text{K}}$
ΔT	Temperaturänderung	$[\Delta T] = \text{K}$

10.2.2 Flächenausdehnung ΔA

$$A' = A + \Delta A = A + \underbrace{\beta}_{\approx 2 \alpha} \cdot A \cdot \Delta T = A(1 + \beta \cdot \Delta T)$$

A'	Länge nach Ausdehnung	$[A'] = \text{m}^2$
A	Anfangslänge	$[A] = \text{m}^2$
ΔA	Längenänderung	$[\Delta A] = \text{m}^2$
β	Flächenausdehnungskoeffizient	$[\beta] = \frac{1}{\text{K}}$
ΔT	Temperaturänderung	$[\Delta T] = \text{K}$

10.2.3 Volumenausdehnung ΔV

$$V' = V + \Delta V = V + \underbrace{\gamma}_{\approx 3 \alpha} \cdot V \cdot \Delta T = V(1 + \gamma \cdot \Delta T)$$

V'	Volumen nach Ausdehnung	$[A'] = \text{m}^3$
V	Anfangsvolumen	$[A] = \text{m}^3$
ΔV	Volumenänderung	$[\Delta V] = \text{m}^3$
γ	Volumenausdehnungskoeffizient	$[\beta] = \frac{1}{\text{K}}$
ΔT	Temperaturänderung	$[\Delta T] = \text{K}$

10.3 Thermische Spannung σ

$$p = \sigma = \varepsilon \cdot E = E \cdot \frac{\Delta l}{l} = E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

σ	Thermische Spannung	$[\sigma] = \text{Pa}$
ε	Dehnung	$[\varepsilon] = 1$
E	Elastizitätsmodul	$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
α	Längenausdehnungskoeffizient	$[\alpha] = \frac{1}{\text{K}}$
ΔT	Temperaturänderung	$[\Delta T] = \text{K}$
p	Druck	$[p] = \text{Pa}$

11 Ideales Gas

11.1 Modell des idealen Gases

Jedes Gas ist gleich!

1. Moleküle sind Massenpunkte (keine Ausdehnung)
 2. Stöße sind elastisch (keine zwischenmolekularen Kräfte)
- Kein Volumen bei $T = 0$
Kein Druck bei $T = 0$

11.1.1 Thermische Ausdehnung von Gasen

- Ausdehnung von Gasen ist sehr gross
- Bei allen Gasen ist die Ausdehnung **gleich**
- Volumen beim Nullpunkt ist **Null**

11.2 Universelle Gasgleichung

Alle Gase verhalten sich gleich, insbesondere bei gleicher Anzahl Moleküle

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

p_x	Absolut-Druck	$[p_x] = \text{Pa}$
	Absolut-Druck: $p_0 + p$	
V_x	Volumen	$[V_x] = \text{m}^3$
T_x	Absolut-Temperatur (in K)	$[T] = \text{K}$

11.3 Universelle Gasgleichung für ideale Gase

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T = N \cdot k \cdot T$$

p	Absolut-Druck	$[p] = \text{Pa}$
	Absolut-Druck: $p_0 + p$	
V	Volumen	$[V] = \text{m}^3$
n	Mol-Zahl	$[n] = \text{mol}$
R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
T	Absolut-Temperatur (in K)	$[T] = \text{K}$
N	Anzahl Moleküle	$[N] = 1$
k	Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$	$[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$

11.3.1 Zusammenhänge zwischen den Konstanten

$$R = k \cdot N_A = \frac{N \cdot k}{n}$$

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M} = \frac{N \cdot k}{R}$$

R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
k	Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$	$[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$
N	Anzahl Moleküle	$[N] = 1$
N_A	Avogadrokonstante: $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$	$[N_A] = \frac{1}{\text{mol}}$
n	Mol-Zahl	$[n] = \text{mol}$
m	Masse	$[m] = \text{kg}$
M	Mol-Masse	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$

11.2.1 Boyle-Mariotte

Das Gesetz gilt nur bei konstanter Temperatur!
⇒ isotherme Zustandsänderung

$$p \cdot V = \text{const} \quad \Rightarrow \quad p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

11.2.2 Gay-Lussac

Das Gesetz gilt nur bei konstantem Druck!
⇒ isobare Zustandsänderung

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

11.2.3 Gay-Lussac und Amontons

Das Gesetz gilt nur bei konstantem Volumen!
⇒ isochore Zustandsänderung

$$\frac{p}{T} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

11.4 Mechanische Arbeit ΔW von Gasen

Folgende Formel ist für Flüssigkeiten **nicht** gültig, da diese inkompressibel sind ($\Delta V = 0$)

$$\Delta W = F \cdot \Delta s = p \cdot A \cdot \Delta s = p \cdot \Delta V$$

ΔW	Mechanische Arbeit von Gas	$[\Delta W] = \text{J}$
F	Kraft	$[F] = \text{N}$
Δs	Wegänderung	$[\Delta s] = \text{m}$
p	Druck	$[p] = \text{Pa}$
A	Fläche	$[A] = \text{m}^2$
ΔV	Volumenänderung	$[\Delta V] = \text{m}^3$

11.5 Gesetz von Avogadro

Ein Mol eines Gases nimmt bei Normalbedingungen immer das gleiche Volumen ein (=Molvolumen)

Ideale Gase enthalten bei gleichem Druck p und gleicher Temperatur T immer gleich viele Moleküle (im Molvolumen)

11.6 Molmasse M , Molvolumen V_m

Für 1 Mol Teilchen gilt:

$$p \cdot V = R \cdot T = N_A \cdot k \cdot T$$

Molmasse ist die **Ordnungszahl** im Periodensystem

$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$$

Mol-Volumen:

$$V_m = \frac{V}{n}$$

p	Absolut-Druck	$[p] = \text{Pa}$
	Absolut-Druck: $p_0 + p$	
V	Volumen	$[V] = \text{m}^3$
R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
T	Absolut-Temperatur (in K)	$[T] = \text{K}$
N_A	Avogadrokonstante: $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$	$[N_A] = \frac{1}{\text{mol}}$
k	Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$	$[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$
n	Mol-Zahl	$[n] = \text{mol}$
m	Masse	$[m] = \text{kg}$
M	Mol-Masse	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
N	Anzahl Moleküle	$[N] = 1$
V_m	Mol-Volumen	$[V_m] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$

11.7 Dichte eines Gases ρ

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{V_m} = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}$$

ρ	Gas-Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
m	Masse	$[m] = \text{kg}$
V	Volumen	$[V] = \text{m}^3$
M	Mol-Masse	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
V_m	Mol-Volumen (22.4 L bei 0 °C und 1000 hPa)	$[V_m] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$
p	Absolut-Druck Absolut-Druck: $p_0 + p$	$[p] = \text{Pa}$
R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
T	Absolut-Temperatur (in K)	$[T] = \text{K}$

11.8 Phänomene von idealen Gasen

11.8.1 Anomalie des Wassers

Die feste Form (Eis) ist leichter als die flüssige Form (Wasser). Die **grösste Dichte weist Wasser bei 4 °C** auf, nicht beim Gefrierpunkt von 0 °C

⇒ Ein See gefriert somit nur an der Oberfläche. Am Grund des Sees beträgt die Wassertemperatur 4 °C

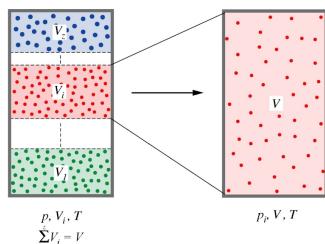
11.8.2 Osmotischer Druck (Zelldruck)

Grosse Moleküle innerhalb von vielen kleinen Molekülen in einer Flüssigkeit verhalten sich ähnlich wie die Moleküle eines idealen Gases, wenn die Flüssigkeit von einer für die Moleküle halb-durchlässigen (semi-permeabel) Membran umgeben ist.

Osmotischer Druck : $p = \frac{n}{V} \cdot R \cdot T$ (ideale Gasgleichung)

11.9 Partialdruck p_i

Ausgangslage: Gasgemisch (z.B. Luft: Sauerstoff-Stickstoff)



Der Partialdruck p_i ist der Druck, welcher die i-te Gaskomponente erzeugen würde, wenn ihr das gesamte Volumen zur Verfügung stehen würde.

11.10 Gesetz von Dalton

In einem Gas ist die Summe der Partialdrücke p_i gleich dem Gesamtdruck

$$\sum_{i=1}^n p_i = p$$

p_i	Partialdruck	$[p_i] = \text{Pa}$
p	(Gesamt-) Druck	$[p] = \text{Pa}$

11.11 Volumen- und Massenkonzentration (Gasgemisch)

11.11.1 Volumen-Konzentrationen (Volumen-Anteile)

$$q_i = \frac{V_i}{V} = \frac{n_i}{n} = \frac{p_i}{p}$$

q_i	Volumen-Konzentration	$[q_i] = 1$
V_i	Volumen der i-ten Gas-Komponente	$[V_i] = \text{m}^3$
V	Gesamt-Volumen	$[V] = \text{m}^3$
n_i	Molzahl der i-ten Gas-Komponente	$[n_i] = \text{mol}$
n	Gesamt-Molzahl des Gemischs	$[n] = \text{mol}$
p_i	Partialdruck der i-ten Gaskomponente	$[p_i] = \text{Pa}$
p	Druck des Gemischs	$[p] = \text{Pa}$

11.11.2 Massen-Konzentration (Massen-Anteile)

$$\mu_i = \frac{m_i}{m} = \frac{M_i}{M} \cdot q_i$$

μ_i	Volumen-Konzentrationen	$[\mu_i] = 1$
m_i	Masse der i-ten Gas-Komponente	$[m_i] = \text{kg}$
m	Masse der Gemischs	$[m] = \text{kg}$
M_i	Mol-Masse der i-ten Gas-Komponente	$[M_i] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
M	Mol-Masse des Gemischs	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
q_i	Volumen-Konzentration	$[q_i] = 1$

11.12 Mol-Masse Gasgemisch

Die Mol-Masse des Gas-Gemischs kann als gewichteter Mittelwert berechnet werden, gewichtet mit den jeweiligen Volumen-Anteilen

$$M = \sum_{i=1}^n q_i \cdot M_i$$

M	Mol-Masse Gasgemisch	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
q_i	Volumen-Konzentration	$[q_i] = 1$
M_i	Mol-Masse der i-ten Gas-Komponente	$[M_i] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$

12 Reales Gas

Im Vergleich zum idealen Gas müssen zwei Dinge berücksichtigt werden:

Eigen-Volumen:

Ideales Gas hat **kleineres** Volumen als gemessen (Ideal-Gas-Volumen um das Molekül-Eigenvolumen reduzieren)

Binnen-Druck:

Ideales Gas hat **grösseren** Druck als gemessen (Ideal-Gas-Druck um Binnendruck erhöhen)

12.1 Van der Waals-Gleichung (1 Mol)

⇒ Für nicht-ideale Gase!

$$p' \cdot V'_m = R \cdot T$$

$$p' = p + \frac{a}{V_m^2}$$

$$V'_m = V_m - b$$

p' Korrigierter Druck

V'_m Korrigiertes Mol-Volumen

$[p'] = \text{Pa}$

$[V_m] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$

R Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

T Absolut-Temperatur (in K)

$[T] = \text{K}$

p Druck des Gemischs

$[p] = \text{Pa}$

a Eigenvolumen

$[a] = \frac{\text{J} \cdot \text{m}^3}{\text{mol}^2}$

b Binnendruck

$[b] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$

V_m Mol-Volumen

$[V_m] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$

12.2 Van der Waals-Gleichung (n Mol)

$$\left(p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2}\right) \cdot (V - n \cdot b) = n \cdot R \cdot T$$

p	Druck des Gemischs	$[p] = \text{Pa}$
n	Mol-Zahl	$[n] = \text{mol}$
a	Eigenvolumen	$[a] = \frac{\text{J} \cdot \text{m}^3}{\text{mol}^2}$
V	Volumen	$[V] = \text{m}^3$
b	Binnendruck	$[b] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$
R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
T	Absolut-Temperatur (in K)	$[T] = \text{K}$

12.2.1 Van der Waals-Parameter

$$a = \frac{9}{8} \cdot R \cdot T_k \cdot V_{mk}$$

$$b = \frac{V_{mk}}{3}$$

$$V_{mk} = 3 \cdot b$$

$$T_k = \frac{8 \cdot a}{27 \cdot R \cdot b}$$

$$p_k = \frac{a}{27 \cdot b^2}$$

a	Eigenvolumen	$[a] = \frac{\text{J} \cdot \text{m}^3}{\text{mol}^2}$
R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
T_k	Kritische Absolut-Temperatur	$[T_k] = \text{K}$
V_{mk}	Kritisches Mol-Volumen	$[V_{mk}] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$
b	Binnendruck	$[b] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$
p_k	Kritischer Druck	$[p_k] = \text{Pa}$

13 Wärmelehre

13.1 Wärme Q

Wärme ist Energie, welche stets (**von allein**) von höherer zu niedrigerer Temperatur fließt

$$\Delta U = \frac{1 \cdot HS \cdot 100\%}{2 \cdot HS \cdot 100\%} = \Delta W + \Delta Q$$

13.2 Erster Hauptsatz der Wärmelehre

Nicht nur durch Wärmezufuhr, sondern auch durch mechanische Arbeit lässt sich die Temperatur und damit die innere Energie U erhöhen

$$\Delta U = \Delta W + \Delta Q$$

ΔU	Zu-/Abgeführte Innere Energie	$[\Delta U] = \text{J}$
ΔW	Zu-/Abgeführte Arbeit	$[\Delta W] = \text{J}$
	z.B. E_{kin} , E_{pot} , W_{Gas} , W_{reib}	

ΔQ	Zu-/Abgeführte Wärme	$[\Delta Q] = \text{J}$
------------	----------------------	-------------------------

13.2.1 Ansätze für 1. HS

$$\Delta Q = E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$\Delta Q = E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

$$\Delta \dot{Q} = \Delta P$$

13.2.2 Mechanische Arbeit eines Gases

Für mehr Details, siehe Abschnitt 11.4

$$\Delta W = p \cdot \Delta V$$

13.3 Mechanische Wärmeäquivalente

1 Kalorie = 4,1868 J (cal)

⇒ Energie, um 1 Gramm Wasser um 1 Grad zu erwärmen

1 kcal = 4186,8 J

⇒ Energie, um 1 Kilogramm Wasser um 1 Grad zu erwärmen

13.3.1 Elektrisches Wärmeäquivalent c

Elektrische Energie = Wärme

$$U \cdot I \cdot t = c \cdot m \cdot \Delta T \Leftrightarrow c = \frac{U \cdot I \cdot t}{m \cdot \Delta T}$$

c	Elektrisches Wärmeäquivalent	$[c] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$
U	Spannung	$[U] = \text{V}$
I	Strom	$[I] = \text{A}$
t	Zeit	$[t] = \text{s}$
m	Masse	$[m] = \text{kg}$
ΔT	Temperaturänderung	$[\Delta T] = \text{K}$

13.4 Wärmekapazität

Die Wärmekapazität drückt das Energiespeicher-Vermögen aus.

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T = n \cdot C_m \cdot \Delta T = C \cdot \Delta T$$

13.4.1 Absolute Wärmekapazität C

Energiespeicher-Vermögen eines **Gegenstands**

$$\Delta Q = C \cdot \Delta T$$

13.4.2 Spezifische Wärmekapazität c

Energiespeicher-Vermögen einer **Substanz**

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$

$$c_{Wasser} = 4187 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

13.4.3 Molare Wärmekapazität C_m

Energiespeicher-Vermögen einer **Anzahl Moleküle**

$$C_m = \frac{c}{n} = M \cdot c$$

ΔQ	Zu-/Abgeführte Wärme	$[\Delta Q] = \text{J}$
c	spezifische Wärmekapazität	$[c] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$
C	absolute Wärmekapazität	$[C] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$
C_m	molare Wärmekapazität	$[C_m] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
m	Masse	$[m] = \text{kg}$
ΔT	Temperaturänderung	$[\Delta T] = \text{K}$
n	Mol-Zahl	$[n] = \text{mol}$
M	Mol-Masse	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$

13.4.4 Molare Wärmekapazität von Gasen

$$C_{mp} - C_{mV} = R$$

C_{mp}	isobare Wärme-Kapazität ($p = \text{const}$)	$[C_{mp}] = \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$
C_{mV}	isochore Wärme-Kapazität ($V = \text{const}$)	$[C_{mV}] = \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$
R	Universelle Gaskonstante $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$

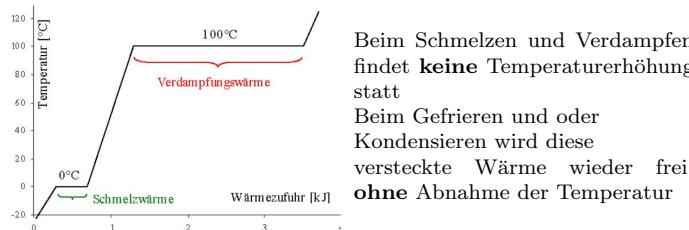
13.4.5 Molare Wärmekapazität von Festkörpern

$$T > \Theta_D : C_m \approx 3R \approx 25 \frac{\text{J}}{\text{mol}} \quad (\text{Dulong - Petit})$$

$$T \ll \Theta_D : C_m = \frac{12 \cdot \pi^4}{5} \cdot R \cdot \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \quad (\text{Debye})$$

T	Absolut-Temperatur (in K)	$[T] = \text{K}$
Θ_D	Debye-Temperatur $\Theta_D \approx 200 \text{ K}$	$[\Theta_D] = \text{K}$
C_m	molare Wärmekapazität	$[C_m] = \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$
R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$

13.5 Latente Wärme (Schmelz-/ Verdampfungswärme)



Die Schmelz-/ Verdampfungswärme ist stark druckabhängig

$$Q_f = q_f \cdot m$$

$$q_{fWasser} := 334 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$Q_S = q_s \cdot m$$

$$q_{sWasser} := 2256 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Q_f	Schmelz-/Erstarrungs-Wärme	$[Q_f] = \text{J}$
q_f	Spezifische Schmelzwärme	$[q_f] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$
Q_S	Verdampfungs-/Kondensations-Wärme	$[Q_S] = \text{J}$
q_s	Spezifische Verdampfungs-Wärme	$[q_s] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$
m	Masse	$[m] = \text{kg}$

13.6 Wärmebilanz

Wärmeaustausch zwischen verschiedenen Materialien

In einem abgeschlossenen System (nach aussen isoliert) muss gelten:
Zugeführte Wärme = Abgeführte Wärme

$$\sum_{i=1}^n (\Delta Q_i + \Delta Q_{f_i} + \Delta Q_{s_i}) = 0$$

ΔQ_i	i-te Wärme-Menge aus Temperatur-Zu-/Abnahme	$[\Delta Q_i] = \text{J}$
ΔQ_{f_i}	i-te Wärme-Menge aus Schmelz-/Erstarrungs-Vorgang	$[\Delta Q_{f_i}] = \text{J}$
ΔQ_{s_i}	i-te Wärme-Menge aus Verdampfungs-/Kondensations-Vorgang + zugeführte Wärme-Menge - abgeführte Wärme-Menge	$[\Delta Q_{s_i}] = \text{J}$

14 Phasen und Phasenübergänge

14.1 Phasen

- **Fest**
feste Gestalt; festes Volumen
- **Flüssig**
keine feste Gestalt; festes Volumen
- **Gasförmig**
keine feste Gestalt; kein festes Volumen
- **Plasma**
Bei sehr hoher Temperatur ist Materie ionisiert (Elektronengas)

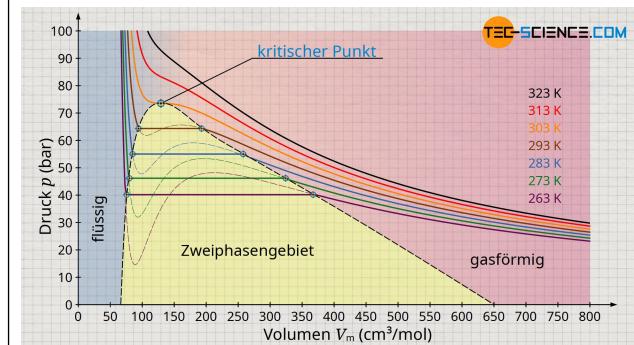
14.2 Dampfdruck $p_s(T)$

Der Dampfdruck bedeutet das Gleichgewicht der Flüssigkeit mit ihrer Dampfphase

Der Dampfdruck ist das Niveau des kontanten Drucks im 2-Phasengebiet eines realen Gases nach van der Waals.

Der Dampfdruck ist nur **temperaturabhängig**

Bei Kompression oder Expansion ändert sich der Dampfdruck nicht, sondern der Anteil Flüssigkeit zu Gas muss ändern



Verdunsten ⇒ Schnellste Teilchen treten aus Flüssigkeit aus

Sieden/Verdampfen Dampfdruck = Umgebungsdruck

14.3 Dampfdruck-Kurve (Clausius-Clapeyron)

Kondensieren \Leftrightarrow Verdampfen flüssig \Leftrightarrow gasförmig

$$\frac{dp_s}{dT} = \frac{q_s}{T \cdot \left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_f} \right)}$$

14.3.1 Dampfdruck $p_s(T)$ von Wasser (Clausius-Clapeyron)

$$p_s(T) = p_{s0} \cdot e^{\frac{q_s \cdot M_W}{R}} \cdot \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)$$

$$p_{s0} = 610.7 \text{ Pa} \quad T_0 = 273 \text{ K} \quad q_s = 2420 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \quad M_W = 18.02 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

14.4 Schmelzdruck-Kurve (Clausius-Clapeyron)

Erstarren \Leftrightarrow Schmelzen fest \Leftrightarrow flüssig

$$\frac{dp_f}{dT} = \frac{q_f}{T \cdot \left(\frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{p_s} \right)}$$

14.5 Gasdruck-Kurve (Clausius-Clapeyron)

Desublimieren \Leftrightarrow Sublimieren fest \Leftrightarrow gasförmig

$$\frac{dp_{sub}}{dT} = \frac{q_s + q_f}{T \cdot \left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_s} \right)}$$

q_s	spezifische Verdampfungs-Wärme	$[q_s] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$
q_f	spezifische Schmelz-Wärme	$[q_f] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$
$q_s + q_f$	spezifische Sublimations-Wärme	
p_s	Dampfdruck	$[p_s] = \text{Pa}$
p_f	Schmelzdruck	$[p_f] = \text{Pa}$
ρ_g	Schmelzdruck	$[\rho_g] = \text{Pa}$
ρ_g	Dichte Gas	$[\rho_g] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
ρ_f	Dichte Flüssigkeit	$[\rho_f] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
ρ_s	Dichte Festkörper	$[\rho_s] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

14.6 Formeln von Magnus

Die Formeln von Magnus dienen der vereinfachten Berechnung des Dampfdrucks von Wasser = Sättigungsdruck

14.6.1 Dampfdruck von Wasser $p_s(\theta)$ ($\theta \geq 0^\circ C$)

$$p_s(\theta) = p_{s0} \cdot 10^{\frac{7.5 \cdot \theta}{\theta + 237}}$$

14.6.2 Schmelzdruck von Wasser $p_s(\theta)$ ($\theta \leq 0^\circ C$)

$$p_s(\theta) = p_{s0} \cdot 10^{\frac{9.5 \cdot \theta}{\theta + 265.5}}$$

p_s	Dampfdruck / Schmelzdruck	$[p_s] = \text{Pa}$
p_{s0}	Dampfdruck bei $0^\circ C$	$[p_{s0}] = \text{Pa}$
θ	Temperatur	$[\theta] = {}^\circ C$

14.7 Umkehrformeln von Magnus

14.7.1 $\theta(p_s)$ für $p_s \geq p_{s0}$

$$\theta(p_s) = \frac{237 \cdot \log\left(\frac{p_s}{6.107}\right)}{7.5 - \log\left(\frac{p_s}{6.107}\right)}$$

14.7.2 $\theta(p_s)$ für $p_s \leq p_{s0}$

$$\theta(p_s) = \frac{265.5 \cdot \log\left(\frac{p_s}{p_{s0}}\right)}{9.5 - \log\left(\frac{p_s}{p_{s0}}\right)}$$

14.8 Luftfeuchtigkeit

14.8.1 Absolute Luftfeuchtigkeit f

$$f = \frac{m_W}{V}$$

14.8.2 Relative Luftfeuchtigkeit f_r

$$f_r = \frac{m_W}{m_S} = \frac{p_D}{p_S} = \frac{p_D}{p_S(\theta)}$$

f	Absolute Luftfeuchtigkeit	$[f] = 1$
f_r	Relative Luftfeuchtigkeit	$[f_r] = 1$
m_W	Masse Wasserdampf	$[m_W] = \text{kg}$
m_S	Masse Wasserdampf bei Sättigung	$[m_S] = \text{kg}$
V	Volumen	$[V] = \text{m}^3$
p_D	Partialdruck Wasserdampf	$[p_D] = \text{Pa}$
p_S	Dampfdruck = Sättigungsdruck Wasserdampf	$[p_s] = \text{Pa}$
θ	Temperatur	$[\theta] = {}^\circ C$

14.8.3 Feuchte vs. trockene Luft

Feuchte Luft ist leichter als trockene Luft!

$$\rho_F < \rho_T \quad (\text{da } M_W < M_L)$$

ρ_F	Dichte feuchte Luft	$[\rho_F] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
ρ_T	Dichte trockene Luft	$[\rho_T] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
M_W	Molmasse H_2O	$[M_W] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
M_S	Molmasse Luft g	$[M_S] = \frac{\text{g}}{\text{mol}}$

14.9 Taupunkts-Temperatur θ_d

Temperatur, bei welcher 100% Luftfeuchtigkeit herrscht.

Wenn die Taupunkt-Temperatur unterschritten wird, dann kondensiert Wasser.

$$\theta_d(\theta, f_r) = \frac{237 \cdot \left(\log(f_r) + \frac{7.5 \cdot \theta}{\theta + 237} \right)}{7.5 - \left(\log(f_r) + \frac{7.5 \cdot \theta}{\theta + 237} \right)}$$

$$\theta_d(x) = \frac{237 \cdot x}{7.5 - x} \quad \text{mit} \quad x(\theta, f_r) = \log(f_r) + \frac{7.5 \cdot \theta}{\theta + 237}$$

θ_d	Taupunkts-Temperatur	$[\theta_d] = {}^\circ C$
f_r	relative Luftfeuchtigkeit	$[f_r] = 1$
θ	Temperatur	$[\theta] = {}^\circ C$

14.10 Relative Innen-Feuchte f_{ri}

$$f_{ri} = \frac{p_s(\theta_a)}{p_s(\theta_i)} \cdot f_{ra}$$

f_{ri}	relative Feuchte im Inneren	$[f_{ri}] = 1$
f_{ra}	relative Feuchte der Aussenluft	$[f_{ra}] = 1$
$p_s(\theta_i)$	Dampfdruck bei Innentemperatur	$[p_s(\theta_i)] = \text{Pa}$
$p_s(\theta_a)$	Dampfdruck bei Aussentemperatur	$[p_s(\theta_a)] = \text{Pa}$

15 Kinetische Gas-Theorie

15.1 Aequipartitionsgesetz

Mittlere kinetische Energie

Idealisierte Annahmen:

1. Moleküle = Massenpunkte
2. Keine (bzw.) elastische Zusammenstöße
3. Keine Kräfte zwischen den Molekülen
4. Elastischer Stoss gegen Wand
5. Alle Moleküle haben gleiche Geschwindigkeit
6. 1/6 aller Moleküle fliegen gegen eine einzelne Wand

$$\bar{E} = f \cdot \frac{k \cdot T}{2}$$

$f = 3$	1-atomiges Gas
$f = 5$	2-atomiges Gas
$f = 6$	3-atomiges Gas

\bar{E} Mittlere kinetische Energie

f Freiheitsgrade

k Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$

T Absolute Temperatur

$$[\bar{E}] = \text{J}$$

$$[f] = 1$$

$$[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$[T] = \text{K}$$

15.2 Geschwindigkeiten

15.2.1 Mittlere quadratische Geschwindigkeit u

$$u = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m}}$$

15.2.2 Mittlere Geschwindigkeit \bar{v}

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 \cdot k \cdot T}{m}}$$

15.2.3 Wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_0

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{\pi \cdot m}}$$

k Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$

T absolute Temperatur

m Masse des Teilchens

$$[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$[T] = \text{K}$$

$$[m] = \text{kg}$$

15.3 Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$f(m, T, v) = \sqrt{\frac{2 \cdot m^3}{\pi \cdot k^3 \cdot T^3}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k \cdot T}}$$

m Masse des Teilchens

$$[m] = \text{kg}$$

k Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$

$$[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

T absolute Temperatur

$$[T] = \text{K}$$

v Geschwindigkeit

$$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

15.4 Mittlere freie Weglänge $\bar{\lambda}$

Gibt an, um welche Strecke sich ein Molekül im Mittel bis zum nächsten Zusammenstoß fortbewegen kann.

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n \cdot (\pi \cdot d^2)} \quad \text{mit Wirkungsquerschnitt } \sigma = \pi \cdot d^2$$

n Molekül-Dichte	$[n] = \frac{1}{\text{m}^3}$
d Molekül-Durchmesser	$[d] = \text{m}^2$

15.5 Dichtefunktion

Verteilungsfunktion der mittleren, freien Weglänge

$$f(x) = \frac{1}{\bar{\lambda}} \cdot e^{-\frac{x}{\bar{\lambda}}}$$

15.6 Transportvorgänge

15.6.1 Wärmeleitung

Transport von kinetischer Energie (als Wärme wahrgenommen)

$$j_Q = -\lambda_Q \cdot \frac{dT}{dx} \quad \lambda_Q = \frac{1}{6} \cdot n \cdot \bar{v} \cdot \bar{\lambda} \cdot f \cdot k$$

15.6.2 Diffusion

Transport von Masse

$$j_D = -D \cdot \frac{dn}{dx} \quad D = \frac{1}{3} \cdot \bar{v} \cdot \bar{\lambda}$$

15.6.3 Viskosität

Transport von Impuls

$$\tau = -\eta \cdot \frac{dv}{dx} \quad \eta = \frac{1}{3} \cdot n \cdot \bar{v} \cdot \bar{\lambda} \cdot \rho$$

j_Q Wärmestrom

$$[j_Q] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

λ_Q Wärmeleitfähigkeit

$$[\lambda_Q] = \frac{\text{W}}{\text{K}}$$

j_D Diffusionsstrom

$$[j_D] = ?$$

D Diffusionskonstante

$$[D] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

τ Schubspannung

$$[\tau] = \text{N}$$

η Viskosität

$$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$$

n Molekül-Dichte

$$[n] = \frac{1}{\text{m}^3}$$

\bar{v} Mittlere Geschwindigkeit

$$[\bar{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$\bar{\lambda}$ Mittlere freie Weglänge

$$[\bar{\lambda}] = \text{m}$$

f Anzahl Freiheitsgrade

$$[f] = 1$$

k Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$

$$[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

T absolute Temperatur

$$[T] = \text{K}$$

ρ Dichte

$$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

16 Temperaturstrahlung

- Wärmestahlung = Berührungslose Übertragung von Wärme
- In Form von elektromagnetischen Wellen (λ @ IR)
- Körper absorbiert elektromagn. Strahlung und erhöht seine Temperatur
Jeder Körper mit $T > 0 \text{ K}$ strahlt Wärme ab (Temp-strahlung)
- Für jede Wellenlänge muss ein Körper gleich viel Energie abstrahlen, wie er zuvor aufgenommen hat!

16.1 Strahlungs-Gesetze

16.1.1 Stefan-Boltzmann-Gesetz

- Ideal schwarzer Körper (Hohlraum) absorbiert alle Wellenlängen zu 100 %
- Je mehr ein Körper absorbiert, desto mehr muss er emmitten (Energie-Gleichgewicht)

Ein schwarzer Körper (=Hohlraumstrahler) der Temperatur T hat eine totale Abstrahlungs-Leistung pro Oberfläche K_S von:

$$K_S = \sigma \cdot T^4$$

K_S Schwarzkörper-Emission

$$[K_S] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

σ Stefan-Boltzmann-Konstante

$$[\sigma] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$$

$$\sigma = 5.671 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$$

T Temperatur

$$[T] = \text{K}$$

16.1.2 Wien'sches Verschiebungsgesetz

Verschiebung der maximalen Wellenlänge:

$$\lambda_{max} \cdot T = \text{const} = b$$

λ_{max} Wellenlängen-Maximum (Planck)

$$[\lambda_{max}] = \text{m}$$

T Temperatur

$$[T] = \text{K}$$

b Konstante: $b = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

$$[b] = \text{m} \cdot \text{K}$$

16.1.3 Planck'sches Gesetz der Quantenmechanik

Ein Oszillator, welcher auf ein anderes Energieniveau (=Elektronen-Kreisbahnen nach Bohr) wechselt, setzt die Energiedifferenz ΔE in ein Lichtquant (Photon) mit entsprechender Frequenz f um.

Je nach Vorzeichen von ΔE wird das Photon emmitten oder absorbiert .

$$\Delta E = h \cdot f$$

ΔE spektrale Abstrahlung (Energie)

$$[\Delta E] = \text{J}$$

h Panck'sches Wirkungsquantum

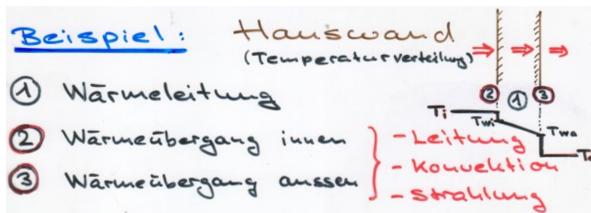
$$[h] = \text{J} \cdot \text{s}$$

$$h = 6.628 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

f Frequenz des Photons

$$[f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$$

16.2 Wärmetransport (an Beispiel Hauswand)



16.2.1 Wärmeleitung

$$j = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx}$$

j Wärmestromdichte	$[j] = \frac{W}{m^2}$
λ Wärmeleitfähigkeit	$[\lambda] = \frac{W}{m \cdot K}$
$\frac{dT}{dx}$ Wärmeabnahme / Gradient	$[\frac{dT}{dx}] = \frac{T}{m}$

16.2.2 Wärmeübergang

innen: $j = \alpha_i \cdot (T_i - T_{wi})$	mit $\alpha_i = 8 \frac{W}{m^2 \cdot K}$
--	--

aussen: $j = \alpha_a \cdot (T_{wa} - T_a)$	mit $\alpha_a = 20 \frac{W}{m^2 \cdot K}$
---	---

16.2.3 Wärmedurchgang

Material + Dicke zusammengefasst

$$j = k \cdot (T_i - T_a) = k \cdot \Delta T \quad \text{mit } k = \frac{\lambda}{d}$$

j Wärmestromdichte	$[j] = \frac{W}{m^2}$
λ Wärmeleitfähigkeit	$[\lambda] = \frac{W}{m \cdot K}$
$\frac{dT}{dx}$ Wärmeabnahme / Gradient	$[\frac{dT}{dx}] = \frac{T}{m}$
α_i Wärmeübergangszahl innen	$[\alpha_i] = \frac{W}{m^2 \cdot K}$
α_a Wärmeübergangszahl aussen	$[\alpha_a] = \frac{W}{m^2 \cdot K}$
T_{wa} Temperatur Wand aussen	$[T_{wa}] = K$
T_a Außentemperatur	$[T_a] = K$
T_{wi} Temperatur Wand innen	$[T_{wi}] = K$
T_i Innentemperatur	$[T_i] = K$
k Wärmedurchgangszahl	$[k] = \frac{W}{m^2 \cdot K}$
d Dicke der Wand	$[d] = m$

$$P = \dot{Q} = j \cdot A$$

16.2.4 Wärmedurchgang komplett

Der komplette Wärmedurchgang leitet sich her durch die Erhaltung der Wärmestromdichte j und errechnet sich mit:

$$\text{n Schichten: } \frac{1}{k_{tot}} = \frac{1}{\alpha_i} + \sum_x \frac{1}{k_x} + \frac{1}{\alpha_a}$$

$$\text{zylindrisch: } \frac{1}{k_{tot}} = r_a \left(\frac{1}{\alpha_i \cdot r_i} + \sum_x \frac{1}{\lambda_x} \cdot \ln \left(\frac{r_{xa}}{r_{xi}} \right) \right) + \frac{1}{\alpha_a} \cdot \frac{1}{r_a}$$

k_x Wärmedurchgangszahl x-te Schicht	$[k_x] = \frac{W}{m^2 \cdot K}$
α_i Wärmeübergangszahl innen	$[\alpha_i] = \frac{W}{m^2 \cdot K}$
α_a Wärmeübergangszahl aussen	$[\alpha_a] = \frac{W}{m^2 \cdot K}$
r_i Innenradius Rohr	$[r_i] = m$
r_a Außenradius Rohr	$[r_a] = m$
λ_x Wärmeleitfähigkeit	$[\lambda] = \frac{W}{m \cdot K}$

16.3 Wärme-Bedarf (Heizleistung)

Der Wärme-Bedarf (=Heizleistung) setzt sich zusammen aus **Wärmeverlust durch Wärmeleitung** und durch **Wärmeverlust durch Luftaustausch**:

$$\frac{\text{Wärmeverlust}}{\dot{Q}} = \frac{\text{Heizleistung}}{P}$$

$$P = \dot{Q}_{tot} = \dot{Q}_W + \dot{Q}_L$$

$$\dot{Q}_W = A \cdot j = A \cdot k \cdot \Delta T$$

$$\dot{Q}_L = c_L \cdot \rho_L \cdot \dot{V} \cdot \Delta T$$

$$\text{allgemein: } \dot{Q}_{tot} = \sum_{i=1}^n [(A_i \cdot k_i + c_L \cdot \rho_L \cdot \dot{V}) \cdot \Delta T]$$

\dot{Q}_{tot} Totaler Wärmeverlust	$[\dot{Q}_{tot}] = \frac{J}{s} = W$
\dot{Q}_W Wärmeleitung	$[\dot{Q}_W] = \frac{J}{s} = W$
\dot{Q}_L Luftaustausch	$[\dot{Q}_L] = \frac{J}{s} = W$
k_i Wärmedurchgangszahl i-te Schicht	$[k_i] = \frac{W}{m^2 \cdot K}$
\dot{V} Volumenstrom	$[\dot{V}] = \frac{m^3}{s}$
ρ_L Dichte der Luft: $\rho_L = 1.2 \frac{kg}{m^3}$	$[\rho_L] = \frac{kg}{m^3}$
c_L Wärmekapazität Luft: $c_L = 1000 \frac{J}{kg \cdot K}$	$[c_L] = \frac{J}{kg \cdot K}$
A Fläche der Wärmeleitung	$[A] = m^2$
ΔT Temperaturdifferenz	$[\Delta T] = K$

16.4 Wärmeverlust durch Abstrahlung

Durch Strahlung kann auch Wärme übertragen werden.

$$j_{12} = c_{12} \cdot (T_1^4 - T_2^4) = \sigma \cdot \varepsilon \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

j_{12} W-Transport durch Strahlungsaustausch	$[j_{12}] = \frac{W}{m^2}$
c_{12} Strahlungsaustauschzahl	$[c_{12}] = \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$
σ Stefan-Boltzmann-Konstante	$[\sigma] = \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$
$\sigma = 5.671 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$	
ε Emissionsverhältnis	$[\varepsilon] = 1$

16.5 Zustandsänderungen

Erinnerung 1. Hauptsatz: $\Delta U = \Delta W + \Delta Q$

16.5.1 Isotherm

bei konstanter Temperatur

$$W_{ab} = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$$

$$\Delta Q_{zu} = W \quad (\Delta U = 0)$$

16.5.2 Isobar

bei konstantem Druck

$$W_{ab} = p \cdot (V_2 - V_1)$$

$$\Delta Q_{zu} = n \cdot C_{mp} \cdot \Delta T$$

16.5.3 Isochor

bei konstantem Volumen

$$W = 0$$

$$\Delta Q_{zu} = n \cdot C_{mv} \cdot \Delta T \quad (\Delta U = \Delta Q)$$

16.5.4 Adiabatisch

ohne Wärme-Austausch

$$W_{ab} = n \cdot C_{mv} \cdot \Delta T$$

$$\Delta Q = 0$$

17 Rückwandlung innerer Energie

17.1 Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre

Innere Energie kann **nicht zu 100 %** in Arbeit umgesetzt werden
⇒ Carnot-Wirkungsgrad ist der theoretisch höchstmögliche.

Wärme kann niemals von selbst von einem kälteren Ort zu einem wärmeren Ort fliessen (Clausius)

Es gibt keine periodisch wirkende Maschine, die nichts anderes bewirkt als Erzeugung mechanischer Arbeit und Abkühlung eines Wärme-Reservoirs (Kelvin)

⇒ Es gibt kein Perpetuum mobile 2. Art

17.2 Kreisprozess (reversibler Prozess)

Anfangszustand = Endzustand

Rechtslaufender Kreisprozess

Linkslaufender Kreisprozess

- Gibt Arbeit ab
- **Wärmekraftmaschine**
- Bei hoher T wird Wärme aus Prozess **zugeführt**
- Nur Bruchteil der Wärme in Arbeit verwandelbar
- Obergrenze:
Carnot-Wirkungsgrad
- Verbraucht Arbeit
- **Wärmepumpe**
- Bei hoher T wird dem Prozess Wärmeabgeführt
- Erzeugt mehrfaches an Wärme
- Obergrenze:
Inv. Carnot-Wirkungsgrad

17.3 Carnot-Wirkungsgrad

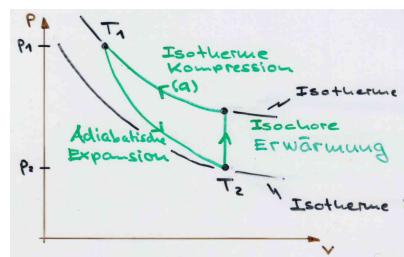
$$\text{Wärmekraftmaschine: } n_C = \frac{W_{ab}}{Q_{zu}} = \frac{T_{hoch} - T_{tief}}{T_{hoch}}$$

$$\text{Wärmepumpe: } n_{iC} = \frac{Q_{zu}}{W_{ab}} = \frac{T_{hoch}}{T_{hoch} - T_{tief}}$$

n_C	Carnot-Wirkungsgrad	$[n_C] = 1$
n_{iC}	Inverset Carnot-Wirkungsgrad	$[n_{iC}] = 1$
T_{tief}	Temperatur des Warm-Reservoirs	$[T_{tief}] = K$
T_{hoch}	Temperatur des Kalt-Reservoirs	$[T_{hoch}] = K$
Q_{zu}	zugeführte Wärme	$[Q_{zu}] = J$
W_{ab}	abgeführte Energie	$[W_{ab}] = J$

17.4 Adiabaten-Gleichung (Kreisprozess)

Adiabate wird beschrieben im pV- / TV- / Tp-Diagramm



$$p \cdot V^\kappa = \text{const}$$

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const}$$

$$T^\kappa \cdot p^{1-\kappa} = \text{const}$$

$$\kappa = \frac{C_{mp}}{C_{mV}}$$

$$C_{mp} - C_{mV} = R$$

$$C_{mp} \quad \text{Molare Wärmekapazität @ } p = \text{const} \quad [C_{mp}] = \frac{J}{\text{mol} \cdot K}$$

$$C_{mV} \quad \text{Molare Wärmekapazität @ } V = \text{const} \quad [C_{mV}] = \frac{J}{\text{mol} \cdot K}$$

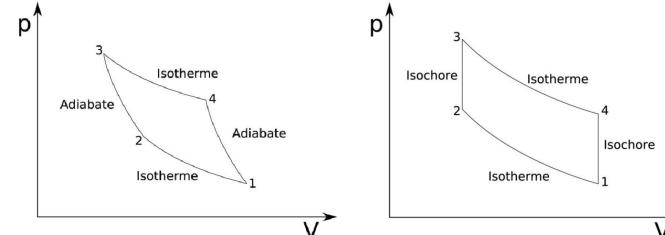
$$\kappa \quad \text{Adiabaten-Exponent} \quad [\kappa] = 1$$

$$R \quad \text{Universelle Gaskonstante } R = 8.314 \frac{J}{\text{mol} \cdot K} \quad [R] = \frac{J}{\text{mol} \cdot K}$$

17.5 Kreisprozesse (Vorgänge)

isotherme Expansion	liefert Wärme	benötigt Energie
isotherme Kompression	benötigt Wärme	liefert Energie
adiabatische Expansion	liefert Arbeit	ohne Wärme
adiabatische Kompression	benötigt Arbeit	ohne Wärme
isochore Erwärmung	ohne Arbeit	benötigt Wärme
isochore Abkühlung	ohne Arbeit	liefert Wärme

17.6 Beispiel Kreisprozess



17.7 Entropie-Zunahme

17.7.1 Definition der Entropie-Zunahme

$$\Delta S = S_1 + S_2 = \int \frac{1}{T} dQ$$

17.7.2 Boltzmann-Gleichung für Entropie-Zunahme

$$\Delta S = k \cdot \ln(W)$$

ΔS Entropie

k Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ $[\Delta S] = \frac{J}{K}$

W Wahrscheinlichkeit eines Zustands $[k] = \frac{J}{K}$

$[W] = 1$

17.7.3 Abgeschlossenes System

$\Delta S \geq 0$ Entropie kann nur zunehmen in abgeschl. System

$\Delta S > 0$ Irreversibler Prozess

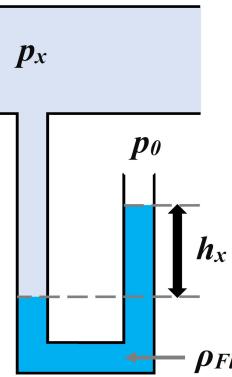
$\Delta S = 0$ Reversibler Prozess

18 Molmassen wichtiger Atome

Symbol	Molekül	Molmasse
H	Wasserstoff	$1.008 \frac{g}{mol}$
C	Kohlenstoff	$12.011 \frac{g}{mol}$
N	Stickstoff	$14.007 \frac{g}{mol}$
O	Sauerstoff	$15.999 \frac{g}{mol}$
Al	Aluminium	$26.982 \frac{g}{mol}$
Si	Silicium	$28.982 \frac{g}{mol}$

19 Ansätze zu Aufgaben

19.1 Barometer

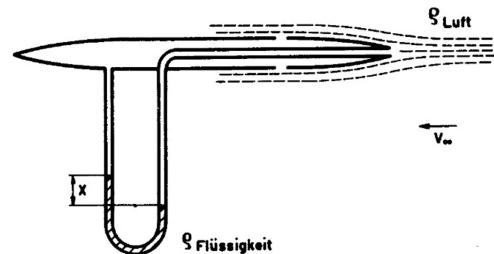


$$p_1 = p_0 + \rho_{FL} \cdot g \cdot h$$

p_1 gemessener Druck
 p_0 Luftdruck
 p_s Schweredruck
 \Rightarrow Bernoulli
 \Rightarrow Kontinuität

19.2 Pitotrohr

Prandtl'sches Staurohr; Staudruckmesser
Zur Messung von Strömungsgeschwindigkeiten



Bernoulli horizontal :
$$\frac{p_1}{\rho_L} + \frac{1}{2} \rho_1 \cdot v_1^2 = \frac{p_2}{\rho_L - \Delta p} + \frac{1}{2} \rho_2 \cdot v_2^2$$

$$0 = -\Delta p + \frac{1}{2} \rho_L \cdot v_2^2 \quad \Rightarrow \Delta p = \frac{1}{2} \rho_L \cdot v_2^2$$

Gleichsetzen : $\Delta p = \rho_{FL} \cdot g \cdot h$

19.3 Pumpe

$$W = P \cdot t = F \cdot \Delta s = p \cdot A \cdot \Delta s = p \cdot \Delta V$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{p \cdot V}{t} = p \cdot \dot{V}$$

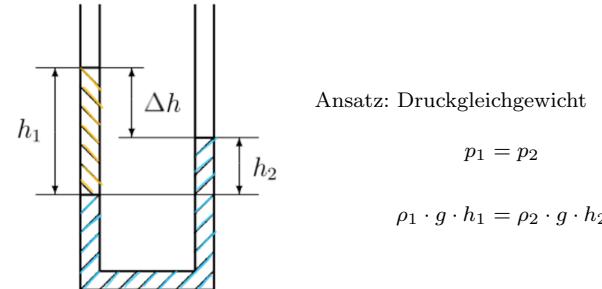
$$F = p \cdot A$$

19.4 Bewegungen

$$P = F \cdot v$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

19.5 U-Rohr



Ansatz: Druckgleichgewicht

$$p_1 = p_2$$

$$\rho_1 \cdot g \cdot h_1 = \rho_2 \cdot g \cdot h_2$$

19.6 Wasser mit Dampf erhitzen

Ein Tasse mit $m_W = 200$ g Wasser mit einer Temperatur von $T_K = 20^\circ\text{C}$ wird an der Wasserdampfdüse einer Kaffeemaschine mittels Wasserdampf erhitzt. Der aus der Kaffeemaschine ausströmende Wasserdampf ist $T_H = 96^\circ\text{C}$ heiß. Am Schluss haben sie 10 % mehr Wasser in der Tasse. (entspricht m_D)
Wie warm ist das Wasser nun?

Ansatz: 1. Hauptsatz $Q_{zu} = Q_{ab}$

$$m_W \cdot c_W (T_M - T_K) = q_s \cdot m_D + m_D \cdot c_W (T_H - T_M)$$

19.7 Eis in Wasser schmelzen

In einem Gefäß befinden sich $m_W = 1$ kg Wasser. Dazu wird ein Eiswürfel von $m_E = 20$ g gegeben. Das Eis hat eine Temperatur von $T_E = -5^\circ\text{C}$ und das Wasser hat eine Temperatur T_W . Die Temperatur T_0 steht für 0°C bzw. 275.15 K
Gesucht ist die Mischtemperatur T_M

$$\Delta Q_{ab} = \Delta Q_{zu}$$

$$m_W \cdot c_W \cdot (T_W - T_M) = m_E \cdot c_E \cdot (T_E - T_0) + q_f \cdot m_E + c_W \cdot (T_M - T_0)$$