

Physik 3 - SWO

HS 2023 Prof. Dr. Gregor Dudle

Simone Stitz, Yanick Thalmann, 29. Januar 2024

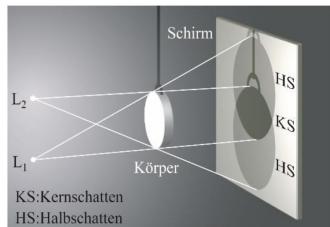
<https://gitlab.com/sstitz/physik-3-swo>

1 Optik

1.1 Licht

Licht kann auf mehrere Arten beschrieben werden:

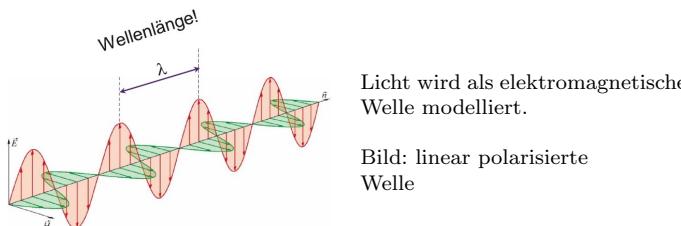
1.1.1 Lichtstrahlen



Die **geometrische Optik** oder **Strahlenoptik** geht davon aus, dass sich das Licht im Vakuum als **geradliniger Strahl** ausbreitet.

Mit der geometrischen Optik können die Phänomene Reflexion und Brechung erklärt werden.

1.1.2 Lichtwellen



Licht wird als elektromagnetische Welle modelliert.

Bild: linear polarisierte Welle

Lichtfarben und ihre Frequenzen / Wellenlängen

Farbe	Wellenlänge in nm
violett	380 ... 435
blau	435 ... 465
blaugrün	465 ... 485
grün	485 ... 565
gelb	565 ... 590
orange	590 ... 630
rot	630 ... 780

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$$\begin{array}{ll} \lambda & \text{Wellenlänge} & [\lambda] = \text{m} \\ c & \text{Lichtgeschwindigkeit } c = 300 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} & [c] = \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ f & \text{Frequenz} & [f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz} \end{array}$$

1.1.3 Lichtteilchen

Modellvorstellung des Lichts als ein Fluss von Lichtteilchen (**Photonen**)

$$E = h \cdot f$$

$$\begin{array}{ll} E & \text{Energie eines Photons} & [E] = \text{J} \\ h & \text{Planck'sche Konstante } 6.626 \cdot 10^{-34} \frac{\text{J}}{\text{Hz}} & [h] = \frac{\text{J}}{\text{Hz}} \\ f & \text{Frequenz} & [f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz} \end{array}$$

1.2 Lichtquellen

1.2.1 Thermische Strahler

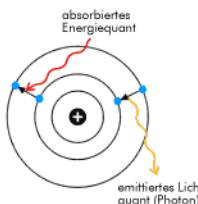
Schwarzkörper-Modell: Modell eines Körpers, der in alle Richtungen abstrahlt (und energetisch im Gleichgewicht ist)

Ein Schwarzkörper strahlt **alle** Lichtfarben ab. (auch die für den Mensch nicht sichtbaren.)

Glühbirnen

Muss auf allen Wellenlängen angeregt werden, um schliesslich sichtbares Licht abzustrahlen.
⇒ Es wird viel Energie nicht nutzbar 'verheizt'

1.2.2 Lumineszenz



LEDs

Können mit einer bestimmten Frequenz angeregt werden und strahlen nur gewünschtes Licht ab.
⇒ energieeffizient

Elektronen werden angeregt und steigen in energetisch höheren Zustand. Sobald die Elektronen wieder in ihren Grundzustand zurückkehren wird ein Lichtquant (Photon) abgestrahlt. Die Leuchtfarbe wird durch die Frequenz der Anregung bestimmt.

Fluoreszenz: kein Nachleuchten
Phosphoreszenz: mit Nachleuchten

1.3 Messgrößen

1.3.1 Radiometrie

Physikalische Messgrößen der elektromagnetischen Strahlung

1.3.2 Photometrie

Radiometrische Größen, gewichtet mit dem photometrischen Strahlungsäquivalent K , welches die **Empfindlichkeit des menschlichen Auges** angibt.

Photometrischen Strahlungsäquivalent K

Gibt die Empfindlichkeit des menschlichen Auges wieder und ist eine empirisch genormte Kurve

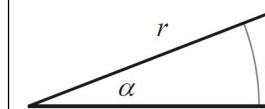
⇒ Das menschliche Auge ist bei einer Wellenlänge von 555 nm (grüne Farbe) am empfindlichsten.

1.4 Gegenüberstellung

Radiometrie			Photometrie		
Einheit	Symbol	Grösse	Grösse	Symbol	Einheit
Quellen	W	Strahlungsfluss	Lichtstrom	$\Phi_v = \int K(\lambda) \frac{d\Phi_e}{d\lambda} d\lambda$	lumen, lm
	$W \text{ sr}^{-1}$	Strahlstärke	Lichtstärke	$I_v = \frac{d\Phi_v}{d\Omega}$	cd = lm sr ⁻¹
Empfänger	$W \text{ m}^{-2}$	Bestrahlungsstärke	Beleuchtungsstärke	$E_v = \frac{d\Phi_v}{dA}$	$lx = lm^{-2}$

1.5 Raumwinkel

1.5.1 Winkel in der Ebene

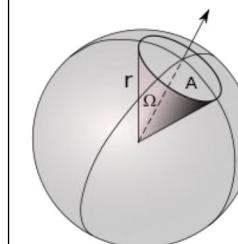


Länge des Bogens auf einem Kreis mit $r = 1 \text{ m}$

$$\alpha = \frac{L}{r}$$

Vollkreis: 2π $[\alpha] = \text{rad}$

1.5.2 Winkel im Raum

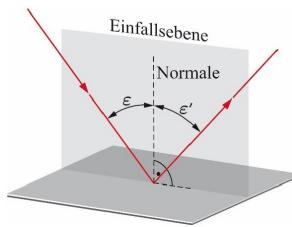


Aufgespannte Fläche, projiziert auf eine Kugel mit $r = 1 \text{ m}$

$$\Omega = \frac{A}{r^2} = \frac{A}{1\text{m}^2}$$

Kugel: 4π $[\Omega] = \text{sr} (\text{Steradian})$

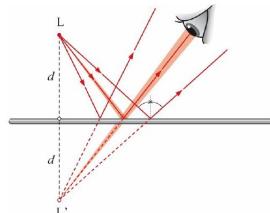
1.6 Reflexionsgesetz



Einfallswinkel = Ausfallwinkel

$$\varepsilon = \varepsilon'$$

1.6.1 Grenzflächen von Reflexionen



L reelles Bild
Bild, welches auf Schirm abgebildet werden kann

L' virtuelles Bild (Spiegelbild von L)
Bild, welches nicht auf Schirm abgebildet werden kann

glatter Spiegel: direkte Reflexion (siehe Bild oben)
rauher Spiegel: diffuse Reflexion

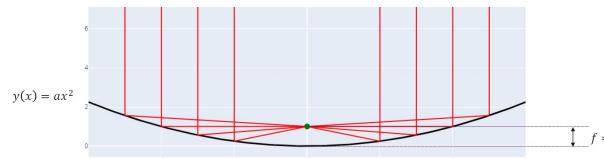
1.7 Reflexionen - Spezialfälle

Brennpunkt F Brennpunkt (Fokus) ist der Punkt, in dem parallel zur optischen Achse auf einen Spiegel oder eine Linse einfallende Strahlen sich schneiden

Brennweite f Abstand des Brennpunktes von der Linse bzw. dem Spiegel

1.7.1 Parabolspiegel

Parallel einfallende Strahlen werden in einem Punkt fokussiert

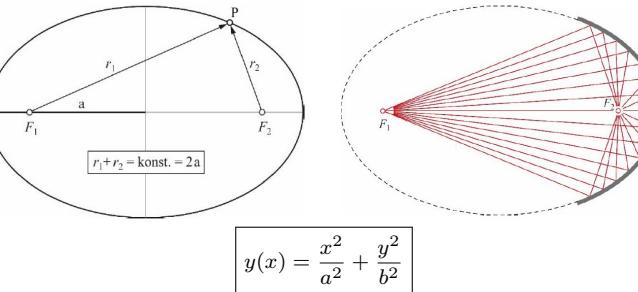


$$y(x) = a x^2$$

$$f = \frac{1}{4a}$$

1.7.2 Elliptischer Spiegel

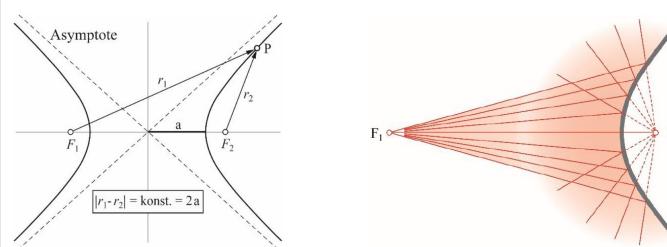
Konzentration von Energie in einem nicht zugänglichen Punkt



$$y(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

1.7.3 Hyperbolischer Spiegel

Objekt in Spiegel versetzen

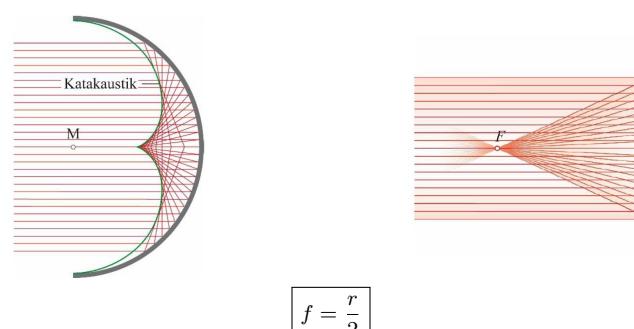


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1.7.4 Sphärische Spiegel

Paralell einfallende Strahlen werden nicht mehr in einem Punkt fokussiert (Katakauistik)

Da die achsnahen Strahlen nach der Reflexion annähernd durch einen Punkt gehen, wird dieser Punkt wieder Brennpunkt F genannt.



f Brennweite

r Krümmungsradius des Spiegels

$$f = \frac{r}{2}$$

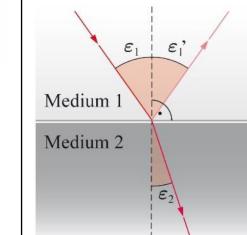
$[f] = \text{m}$

$[r] = \text{m}$

1.8 Brechung

Fällt ein Lichtstrahl auf die Grenzfläche zweier Medien, so dringt ein Teil des einfallenden Lichtes in das zweite Medium ein. Die auftretende Richtungsänderung wird als **Brechung** bezeichnet. Der in das zweite Medium eindringende Strahl wird **gebrochener Strahl** genannt.

1.8.1 Brechungsgesetz / Geschwindigkeit



$$\frac{\sin(\varepsilon_1)}{\sin(\varepsilon_2)} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$v_i = \frac{c}{n_i}$$

Je grösser n , desto grösser die Ablenkung und desto kleiner ε

ε_i Winkel zur Normalen

$$[\varepsilon_i] = {}^\circ$$

n_i Brechungsindex

$$[n_i] = 1$$

v_i Geschwindigkeit im Medium n_i

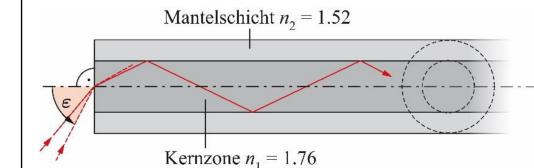
$$[v_i] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c Lichtgeschwindigkeit $c = 300 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$[c] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1.8.2 Anwendung: Glasfaser

Der Lichtstrahl bleibt in der Kernzone (Medium 1) gefangen, da diese einen grösseren Brechungsindex hat als die Mantelschicht (Medium 2)



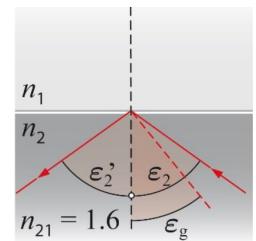
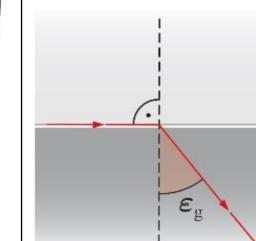
1.8.3 Totalreflexion

Der Einfallwinkel ε_1 kann nicht grösser als 90° sein.

Für $\varepsilon_1 = 90^\circ$ berechnet sich $\varepsilon_2 = \varepsilon_g$ aus:

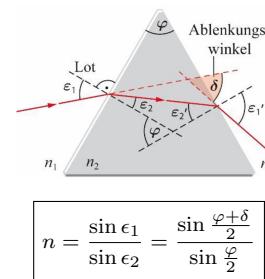
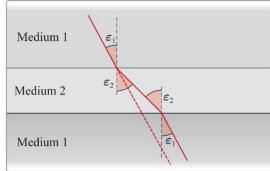
$$\varepsilon_g = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$$

Für den Grenzfall von $\varepsilon_1 > 90^\circ$ wird der gesamte Strahl reflektiert.



1.8.4 Brechung an ebenen Grenzflächen

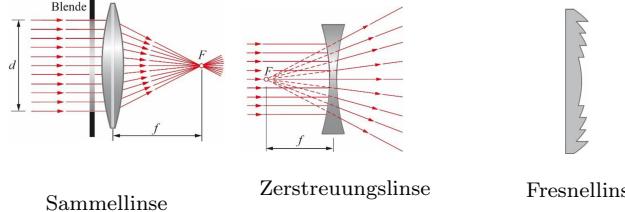
Ein Lichtstrahl wird verschoben bzw. in eine beliebige Richtung geändert



1.8.5 Brechung an gekrümmten Flächen

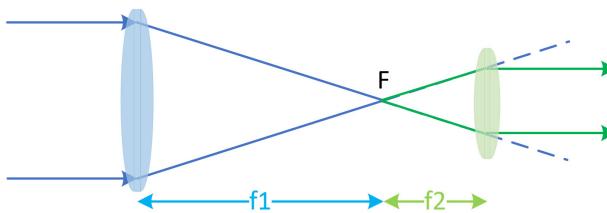
DIE Anwendung der Brechung ist eine Linse.

1.8.6 Linsentypen



Fresnellinse: Es kann vermieden werden, dass die Linse eine übermäßige Dicke aufweist.

1.8.7 Beispiel mit zwei Linsen



Rechts gibt es ein kleineres Bild als links.

1.9 Dispersion

Der **Brechungsindex** eines Mediums ist eine **Funktion der Wellenlänge**: $n = n(\lambda)$

Diese Wellenlängenabhängigkeit wird als **Dispersion** bezeichnet

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{A}{\lambda_0^2 - \lambda^2}$$

$$n^2(f) = 1 + \frac{A'}{f_0^2 - f^2}$$

1.9.1 Abbe Zahl V

Gibt an, wie stark dispersiv ein Material ist
Große Abbe-Zahl → wenig dispersives Material

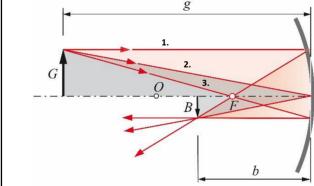
1.10 Abbildungen

1.10.1 Konstruktions-Anweisung

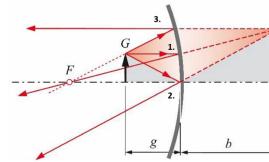
Man benutzt zwei der drei Hauptstrahlen:

1. Parallel Strahl → Brennpunkt
2. Mittelpunkt Strahl → mit gleichem Winkel zurück
3. Brennpunkt Strahl → Paralleler Strahl

reelles Bild



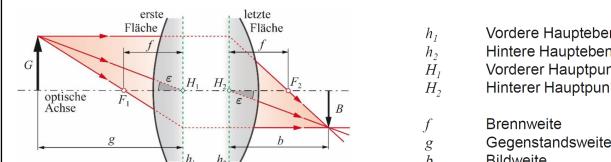
virtuelles Bild



B wird als **reeller Bildpunkt** bezeichnet, wenn sich die austretenden Strahlen schneiden.

B wird als **virtueller Bildpunkt** bezeichnet, wenn sich nur die Verlängerungen der austretenden Strahlen schneiden.

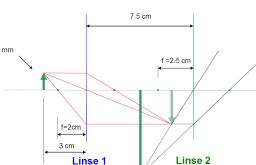
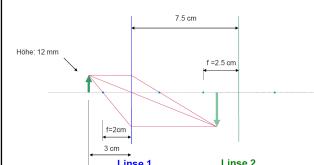
1.10.2 Terminologie



Die **Öffnungsblende** oder **Aperturblende** begrenzt das in das System einfallende Lichtbündel

Die **Feldblende** begrenzt das Bildfeld. Sie legt den Ausschnitt der Objektebene fest, der abgebildet wird.

1.10.3 Beispiel: Abbildungen bei zwei Sammellinsen



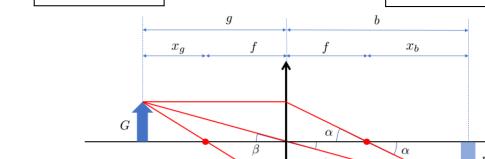
1.11 Abbildungsgleichungen

Ein Bild ist scharf dargestellt, wenn die Abbildungsgleichung erfüllt ist!

Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$$

$$x_b \cdot x_g = f^2$$



Hinweis: Ein Spiegel hat eine Brennweite von $f = \infty$
⇒ Vereinfachung der Abbildungsgleichung!

1.11.1 Vergrößerungsverhältnis

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

$$V_{tot} = V_1 \cdot V_2$$

V	Vergrößerungsverhältnis	$[V] = 1$
b	Bildweite	$[b] = m$
g	Gegenstandsweite	$[g] = m$
B	Bildgrösse	$[B] = m$
G	Gegenstandsgrösse	$[G] = m$
f	Brennweite	$[f] = m$

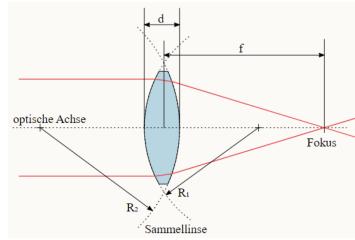
1.12 Brechkraft D

Die Optiker benutzen nicht die Brennweite sondern die Brechkraft in **Dioptrie**

Es gilt: $1 \text{ dpt} = 1 \text{ m}^{-1}$

$$D = \frac{1}{f}$$

1.13 Linsenschleifergleichung



$$D = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Vorzeichen von R_i beachten!

Beide haben gleiches Vorzeichen, wenn Krümmungsmittelpunkte auf gleicher Seite der Linse liegen

1.13.1 Symmetrische Linsen ($R_1 = R_2$)

Für symmetrische Linsen gilt:

$$D = (n - 1) \frac{2}{R}$$

$$f = \frac{1}{D} = \frac{R}{2(n - 1)}$$

D	Brechkraft	$[D] = \text{dpt}$
f	Brennweite	$[f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$
R_i	Linsenradius	$[R_i] = \text{m}$
n	Brechungsindex	$[n] = 1$

1.13.2 Kombination von zwei dünnen Linsen ohne Zwischenraum

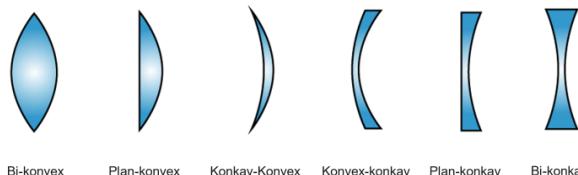
Die Kombination von zwei dünnen Linsen ohne Zwischenraum ist wie folgt definiert:

$$D = D_1 + D_2$$

1.14 Konvexe und Konkave Linsen

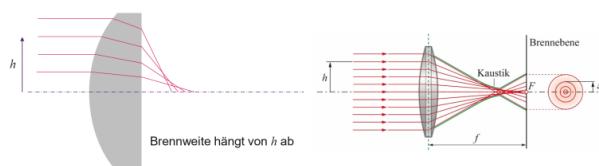
Konvex: nach aussen gewölbt

Konkav: nach innen gewölbt

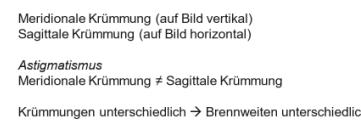


1.15 Aberration

Unter dem Begriff Aberration versteht man die Abweichung vom idealisierten Fall.



1.15.1 Astigmatismus



Meridionale Krümmung (auf Bild vertikal)
Sagittale Krümmung (auf Bild horizontal)

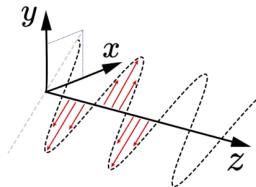
Astigmatismus
Meridionale Krümmung \neq Sagittale Krümmung
Krümmungen unterschiedlich \rightarrow Brennweiten unterschiedlich

1.16 Polarisation

1.16.1 Lineare Polarisation

E_x und E_y können unterschiedliche Amplituden haben. Die Phasen müssen gleich sein.

EM-Wellen können mit dem Herzsch's Gitter oder mit dem Brewster Winkel linear Polariert werden.



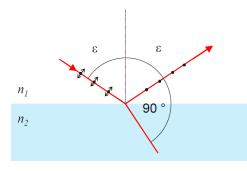
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

\vec{E} kann zu $\vec{0}$ werden

1.16.2 Brewster Winkel

Unter dem Brewster Winkel wird nur linear polarisiertes Licht zurückgeworfen.

Der ins Medium 2 eindringende Strahl steht dabei senkrecht auf dem reflektierten Strahl



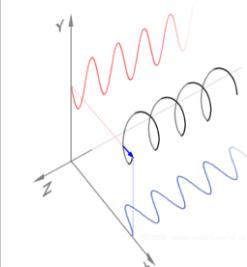
$$\tan(\varepsilon) = \frac{n_2}{n_1}$$

$n_1 < n_2$

1.16.3 Zirkulare Polarisation

x und y Komponenten haben die gleiche Amplitude und eine Phasendifferenz von 90°

Positive zirkulare Polarisation σ^+
Positive zirkulare Polarisation σ^-



$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(2\pi ft - kz) \\ E_0 \sin(2\pi ft - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

\vec{E} kann nicht zu $\vec{0}$ werden

1.16.4 Elliptische Polarisation

x und y Komponenten haben unterschiedliche Amplituden und eine beliebige Phasendifferenz.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(2\pi ft - kz) \\ E_0 \cos(2\pi ft - kz + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

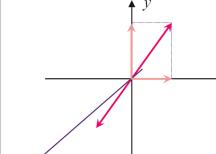
1.16.5 Doppelbrechung

Doppelbrechung ist eine anisotropische Eigenschaft von Kristallen. Diese Kristalle haben unterschiedliche Brechungsindizes in unterschiedliche Richtungen

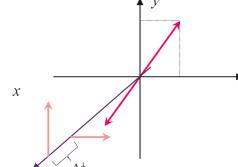
Nach einer gewissen Zeit t haben die x- und y-Komponente einen Phasenunterschied.

\Rightarrow x und y bewegen sich unterschiedlich schnell fort

Polarisation in einem Kristall mit Doppelbrechung



t_0 Lineare Polarisation

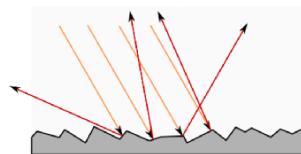


t_1 Elliptische Polarisation

1.17 Streuung

1.17.1 Diffuse Streuung

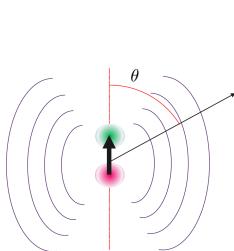
Streuung des Lichts an Teilchen von Dimensionen $d \gg \lambda$



- Licht als **Strahlen**
- Reflexion in alle Richtungen
- Keine bevorzugte Richtung unabhängig von λ
- Wolken, Nebel
- milchige Lösungen

1.17.2 Rayleigh-Streuung

Streuung des Lichts an Teilchen von Dimensionen $d < \lambda$ (atomare Größe)



$$I(\theta) = A f^4 \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

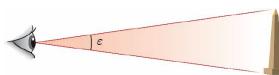
⇒ hochfrequentes Licht wird viel stärker abgestrahlt!

- Licht als **Wellen** senkrecht zur Ausbreitungsrichtung
- Abstrahlmuster eines Dipols
- Himmel tagsüber blau
- Himmel abends rötlich

1.18 Abbildungssysteme - Auge

1.18.1 Terminologie des Auges

Sehwinkel ε



Die Größe, in der ein Gegenstand dem betrachtenden Auge erscheint (**in Bogenminuten**)

$$1^\circ \Leftrightarrow 60'$$

Auflösung

Minimaler Winkelabstand ε_{\min} , den zwei Punkte haben müssen, damit sie noch getrennt wahrgenommen werden.

Normalsichtiges Auge: Auflösung ca. 1 Bogenminute ($1'$)

Sehschärfe

Reziproker Wert der Auflösung

$$S = \frac{1}{\varepsilon_{\min}} \quad \text{beim Menschen also } S = 1$$

Deutliche Schweite s (normierte Betrachtungsdistanz)

Damit die Vergrößerungen von Lupen und Mikroskopen eindeutig bestimmt werden können, wird eine **deutliche Schweite** definiert:

$$s = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m}$$

1.18.2 Kurzsichtigkeit vs. Weitsichtigkeit

Kurzsichtigkeit

- Augapfel zu lang
- Konkave Streulinse als Korrektur
- Brille rückt Gegenstand näher heran

Weitsichtigkeit

- Augapfel zu kurz
- Konvexe Sammellinse als Korrektur
- Brille rückt Gegenstand weiter weg

1.19 Abbildungssysteme - Fotoapparat

Bildgröße B

Die Bildweite b ist normalerweise viel kleiner als die Gegenstandsweite g und daraus folgt:

$$B = \frac{f}{g} G$$

Lichtstärke H

Die Intensität des Lichts auf dem Film ist gegeben durch

$$H = \left(\frac{d}{f} \right)^2 = q^2$$

Blendenzahl Z

z.B.: 1, 1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, ...

$$Z = \frac{1}{q} = \frac{1}{\sqrt{H}}$$

Belichtungszeit

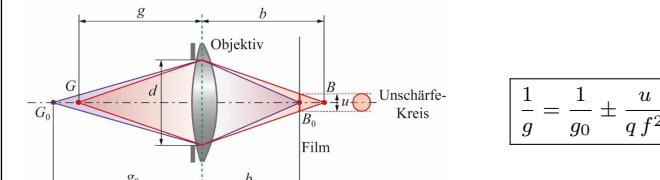
Zusammenhang zwischen Blendenzahl H und Lichtstärke Z

$$H = \frac{1}{Z^2}$$

Schärfentiefe

In der Filmebene ergibt sich vom Punkt G kein scharfer Bildpunkt, sondern ein **Unschärfe-Kreis** mit dem Durchmesser u .

Es wird folgende Gegenstandsweite g in den Unschärfe-Kreis abgebildet:



$$\frac{1}{g} = \frac{1}{g_0} \pm \frac{u}{q f^2}$$

b Bildweite
 b_0 Bilddistanz

B BildgröÙe₀

B_0 Bild₀

g Gegenstandsweite (G zu Objektiv)

g_0 Gegenstandsdistanz₀ (G_0 zu Objektiv)

G Gegenstandsgröße

G_0 Gegenstandsgröße₀

f Brennweite

u Durchmesser Unschärfe-Kreis

d Durchmesser Blendenöffnung

$[b] = \text{m}$

$[b_0] = \text{m}$

$[B] = \text{m}$

$[B_0] = \text{m}$

$[g] = \text{m}$

$[g_0] = \text{m}$

$[G] = \text{m}$

$[G_0] = \text{m}$

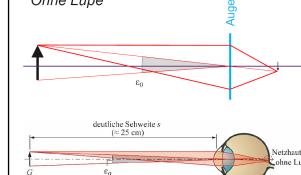
$[f] = \text{m}$

$[d] = \text{m}$

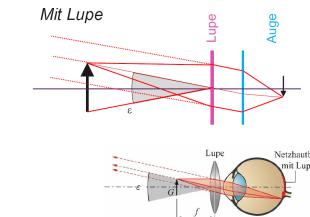
$[d] = \text{m}$

1.20 Abbildungssysteme - Lupe

Ohne Lupe



$$\tan(\varepsilon_0) = \frac{G}{s}$$



$$\tan(\varepsilon) = \frac{G}{f}$$

ε_i Sehwinkel
 s Deutliche Schweite $s = 0.25 \text{ m}$
 f Brennweite
 V Vergrößerung

$[\varepsilon_i] = {}^\circ$

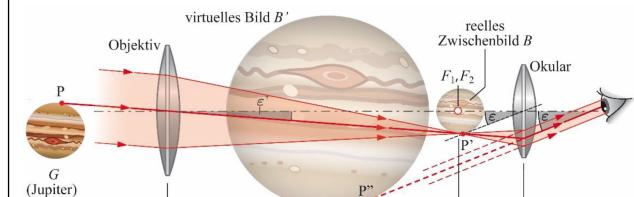
$[s] = \text{m}$

$[f] = \text{m}$

$[V] = 1$

1.21 Abbildungssysteme - Fernrohr

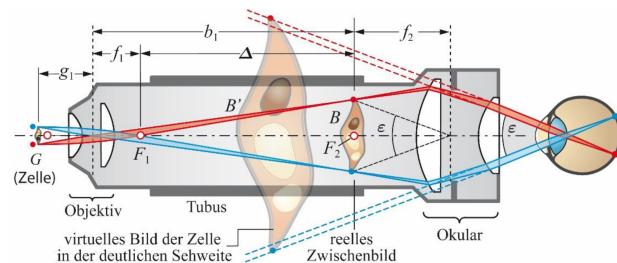
Es wird zuerst ein vergrößertes Bild erzeugt, welches selber wiederum mit einer Lupe betrachtet wird.



$$V = \frac{\tan(\varepsilon)}{\tan(\varepsilon_0)} = \frac{\frac{B}{f_2}}{\frac{B}{f_1}} = \frac{f_1}{f_2}$$

1.22 Abbildungssysteme - Mikroskop

Es wird zuerst ein vergrößertes Bild erzeugt, welches selber wiederum mit einer Lupe betrachtet wird.



$$V = \frac{\Delta \cdot s}{f_1 \cdot f_2} = \frac{\tan(\varepsilon)}{\tan(\varepsilon_0)} = \frac{b}{g_1} = \frac{B}{G} \frac{s}{f_2} = \frac{b_1}{f_2} = \frac{b_1}{g_1} \frac{s}{f_2}$$

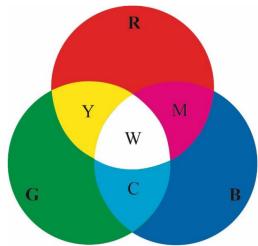
ε_i	Schwinkel	$[\varepsilon_i] = {}^\circ$
s	Deutliche Schweite $s = 0.25 \text{ m}$	$[s] = \text{m}$
f_i	Brennweite	$[f_i] = \text{m}$
V	Vergrößerung	$[V] = 1$
Δ	optische Tubuslänge (Abstand der Brennpunkte)	$[\Delta] = \text{m}$
b_1	Bildweite	$[b_1] = \text{m}$
g_1	Gegenstandsweite	$[g_1] = \text{m}$
B	Bildgrösse	$[B] = \text{m}$
G	Gegenstandsgrösse	$[G] = \text{m}$

1.23 Farbentheorie

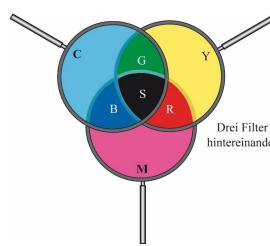
Spektralfarben: Die gesamten Lichtfarben
Monochromatisches Licht: Nur eine einzige Wellenlänge (Farbe)

1.23.1 Farbmischungen

Additive Farbmischung



Subtraktive Farbmischung



2 Schwingungen

Freie Schwingung

Wird ein schwingungsfähiges System aus dem Gleichgewichtszustand gebracht und dann sich selbst überlassen, so führt es freie Schwingungen oder Eigenschwingungen aus.

Erzwungene Schwingung

Wird ein System von aussen durch periodische oder auch nichtperiodische Störungen zum Schwingen veranlasst, wird von fremderregten Schwingungen gesprochen.

Selbsterregte Schwingung

Ein schwingungsfähiges System kann unter Umständen einer Energiequelle Energie entziehen und diese der eigenen Schwingung selbst zuführen, so dass die Schwingung trotz einer eventuell vorhandenen Dämpfung nicht abklingt.

2.1 Freie Schwingungen

2.1.1 Terminologie

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{y}(t) = v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad \ddot{y}(t) = a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$y(t)$	Position zum Zeitpunkt t	$[y(t)] = \text{m}$
$\dot{y}(t)$	Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t	$[\dot{y}(t)] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$\ddot{y}(t)$	Beschleunigung zum Zeitpunkt t	$[\ddot{y}(t)] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
A	Amplitude	$[A] = \text{m}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
φ	Phase	$[\varphi] = \text{rad}$
T	Periodendauer	$[T] = \text{s}$
f	Frequenz	$[f] = \frac{1}{\text{s}}$

2.2 Beispiel - Federpendel

$$F_{res} = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$

$$F_{Feder} = -k \cdot x$$

Kräftegleichgewicht: $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$

$$\text{DGL: } \ddot{x} = -\omega^2 \cdot x \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Allgemeine Lösung: $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

$$m \quad \text{Masse} \quad [m] = \text{m}$$

$$k = c \quad \text{Federkonstante} \quad [k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

2.2.1 Harmonische Schwingung - Energiebetrachtung

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

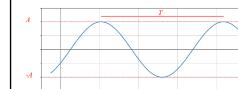
$$\dot{x}(t) = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} E_{tot} &= E_{pot} + E_{kin} = \frac{k \cdot x^2}{2} + \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} \\ &= \frac{k}{2} A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{m}{2} \omega^2 A^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{kA^2}{2} (\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)) \end{aligned}$$

$$E_{tot} = \frac{k \cdot A^2}{2}$$

2.3 Beschreibung einer 1D-Schwingung

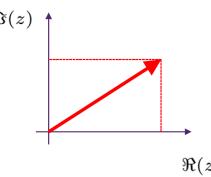
2.3.1 Zeitbreich



Auslenkung in Abhängigkeit der Zeit
Beispiel: Oszilloskop

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

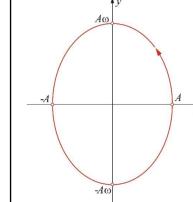
2.3.2 Zeigerdarstellung



Auslenkung als Zeiger (komplexe Zahl), der um den Ursprung rotiert

$$z(t) = \underbrace{x(t)}_{\mathcal{R}(z)} + i \underbrace{y(t)}_{\mathcal{I}(z)}$$

2.3.3 Phasenraum



Darstellung der Position y und der Ableitung (Geschwindigkeit)

2.4 Pendel

2.4.1 Fadenpendel

$$F_R = F_G \cdot \sin(\varphi) = m \cdot g \cdot \sin(\varphi) \approx m \cdot g \cdot \varphi$$

$$\begin{aligned} x &= \varphi \cdot l \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{x}{l} \\ \Rightarrow F_G &= m \cdot g \cdot \frac{x}{l} \end{aligned}$$

$$\text{Kräftegleichgewicht: } F = m \cdot \ddot{x} = -m \cdot g \frac{x}{l}$$

$$\text{DGL: } \ddot{x} = -\omega^2 \cdot x \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{g}{l}$$

2.4.2 Drehpendel

Analogie ohne Rotation:

$$F = -k \cdot x \quad F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$

$$M = -c^* \varphi \quad M = J \cdot \ddot{\varphi}$$

$$\text{Gleichgewicht: } J \cdot \ddot{\varphi} = -c^* \varphi$$

$$\text{DGL: } \ddot{\varphi} = -\omega^2 \cdot \varphi \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{c^*}{J}$$

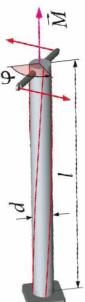
φ folgt der gleichen DGL wie x im Fall des Federpendels

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega t + \delta)$$

$$J \quad \text{Trägheitsmoment} \quad [J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$c^* \quad \text{Winkelrichtgrösse} \quad [c^*] = \frac{\text{N m}}{\text{rad}}$$

2.4.3 Torisonpendel



Variante des Drehpendels mit der Winkelrichtgrösse

$$c^* = \frac{\pi r^4 G}{2l}$$

$$\begin{aligned} G &\quad \text{Torsionsmodul} \\ l &\quad \text{Länge} \\ r = \frac{d}{2} &\quad \text{Radius} \end{aligned}$$

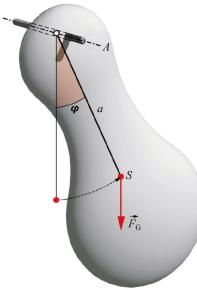
2.4.4 Physikalisches Pendel

$$M = -a \cdot \sin(\varphi) \cdot F_G = -a \cdot m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$$

$$\text{Bewegungsgleichung: } M = J_A \cdot \ddot{\varphi}$$

$$\text{Gleichgewicht: } -a \cdot m \cdot g \cdot \sin(\varphi) = J_A \cdot \ddot{\varphi}$$

$$\text{Kleine Winkel: } -a \cdot m \cdot g \cdot \varphi = J_A \cdot \ddot{\varphi}$$



$$\text{DGL: } \ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{g}{L^*} = \frac{g \cdot a \cdot m}{J_A}$$

$$L^* = \frac{J_A}{a \cdot m} \quad J_A = J_s + m \cdot a^2$$

φ folgt der gleichen DGL wie x im Fall des Federpendels

Auch gültig für mehrere Massen:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{A1} + J_{A2}}{(a_1 \cdot m_1 + a_2 \cdot m_2) \cdot g}}$$

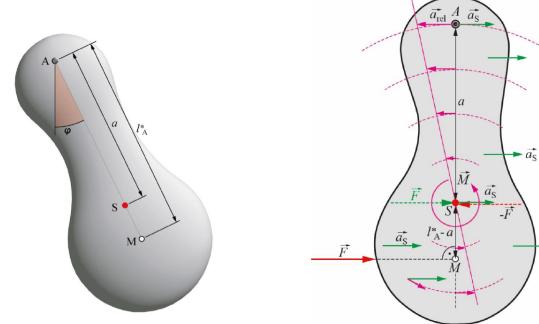
⇒ J-Tabelle im Anhang Abschnitt 8.1

S	Schwerpunkt des Körpers	$[J_S] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$
J_s	Trägheitsmoment bzgl. S	$[a] = \text{m}$
a	Abstand Schwerpunkt - Drehpunkt	$[L^*] = \text{m}$
L^*	Reduzierte Länge	$[J_A] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$
J_A	Trägheitsmoment um Aufhängepunkt	

2.5 Perkussionszentrum

Frage: Wie weit vom Drehpunkt A muss ein Impuls auf einen Körper ausgeübt werden, damit keine Kraft auf die Achse ausgeübt wird?

Antwort: Auf Höhe der reduzierten Länge $L^* = \frac{J_A}{a \cdot m}$



2.6 Periodische Schwingung

Muster wiederholt sich

$$f(t) = f(t - T)$$

Periodische Schwingungen können im **Frequenzbereich** in eine **Grundschwingung** und **Oberschwingungen (Harmonische)** zerlegt werden.

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n \cdot \omega + \varphi_n)$$

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{2\pi}{T} & \text{Grundschwingung} \\ \omega_n &= n \cdot \omega_0 & \text{k-te Harmonische} \end{aligned}$$

2.6.1 Fourier-Analyse

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt$$

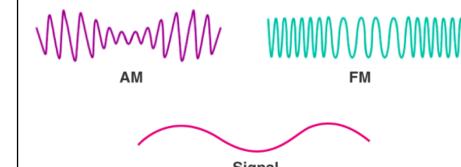
$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt$$

2.7 Signalmodulationen

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Amplitudenmodulation (AM) Veränderung von A
Frequenzmodulation (FM) Veränderung von ω

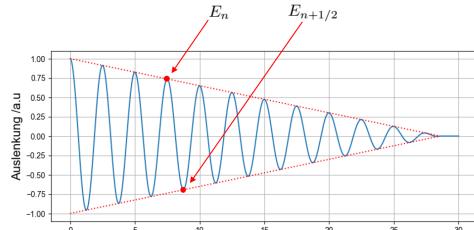


2.8 Gedämpfte Schwingungen

2.8.1 Gedämpfte Schwingung - Konstante Reibungskraft

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \mu F_N \quad \text{für } \ddot{x}(t) > 0$$

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) + \mu F_N \quad \text{für } \ddot{x}(t) < 0$$



$$E = \frac{k A^2}{2}$$

$$\Delta A = 4 \frac{F_R}{k}$$

E	Energie bei max. Auslenkung	$[E] = J$
$k = c$	Federkonstante	$[k] = \frac{N}{m}$
A	Amplitude bei max. Auslenkung	$[A] = m$
ΔA	Amplitudenänderung pro Periode	$[\Delta A] = m$
F_R	Reibungskraft	$[F_R] = N$

2.8.2 Gedämpfte Schwingungen - Dämpfung proportional zur Geschwindigkeit

Zusammenfassung

	$\ddot{x}(t) + \kappa \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$
1. Fall:	$\kappa^2 - 4\omega^2 > 0$ $D > 1$ $x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$ Aperiodische Schwingung $\lambda_{1,2} = -\omega (D \pm \sqrt{D^2 - 1})$
2. Fall:	$\kappa^2 - 4\omega^2 < 0$ $D < 1$ $x(t) = A e^{-\frac{\kappa}{2}t} \cos(\Omega t + \varphi)$ Periodische Schwingung (gedämpft) $\Omega^2 = \omega^2(1 - D^2)$
3. Fall:	$\kappa^2 - 4\omega^2 = 0$ $D = 1$ $x(t) = (A + Bt) e^{-\frac{\kappa}{2}t}$ Grenzfall

$$f = \frac{\Omega}{2\pi}$$

$$\Omega^2 = \omega^2 - \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2$$

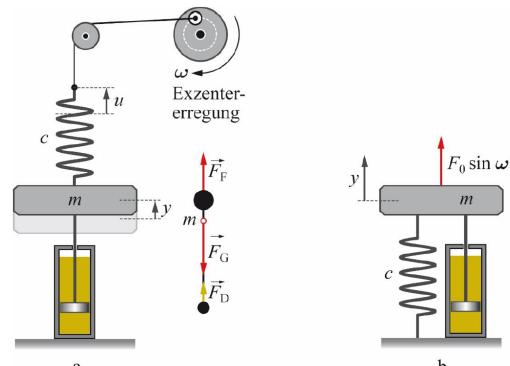
$\frac{\kappa}{2} = \delta$	Abklingkonstante	$[\kappa = \delta] = \frac{1}{s}$
ω	Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung	$[\omega] = \frac{rad}{s}$
D	Dämpfungsgrad	$[D] = 1$
Ω	Kreisfrequenz gedämpfte Schwingung	$[\Omega] = \frac{rad}{s}$
Λ	Logarithmisches Dekrement	$[\Lambda] = 1$
A_n	Amplitude zum Zeitpunkt t	$[A_n] = m$
A_{n+z}	Amplitude zum Zeitpunkt $t + z \cdot T$	$[A_{n+z}] = m$
z	Anzahl verstrichene Schwingungen	$[z] = 1$
T	Periodendauer	$[T] = s$
f	Frequenz der gedämpften Schwingung	$[f] = Hz$

2.9 Fremderregte Schwingung

2.9.1 Definition

Erzwungene Schwingungen sind Schwingungen, die durch eine periodische Störung verursacht werden.

2.10 Fremderregte Schwingungen - Krafterregung



$$\text{DGL: } m \ddot{y} + b \dot{y} + cy = F_0 \sin(\omega t)$$

$$y(t) = \underbrace{A(\omega) \sin(\omega t - \varphi)}_{y_p(t)} + \underbrace{B e^{-\frac{\kappa}{2}t} \sin(\omega_d t + \varphi_0)}_{y_h(t)}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &\quad \text{Amplitudenverlauf} & [A(\omega)] &= m \\ \varphi &\quad \text{Phasenverschiebung} & [\varphi] &= rad \end{aligned}$$

2.10.1 Übersicht über Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} & \delta &= \frac{\kappa}{2} = \frac{b}{2m} & D &= \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\kappa}{2\omega_0} \\ \eta &= \frac{\omega}{\omega_0} & \omega_d &= \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2} & &= \omega_0 \sqrt{1 - D^2} \end{aligned}$$

ω_0	Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung	$[\omega_0] = \frac{rad}{s}$
ω_d	Kreisfrequenz gedämpfte Eigenfrequenz	$[\omega_d] = \frac{rad}{s}$
ω_r	Resonanzkreisfrequenz	$[\omega_r] = \frac{rad}{s}$
ω	Kreisfrequenz der Störung (Erreger)	$[\omega] = \frac{rad}{s}$
$\frac{\kappa}{2}$	Abklingkonstante	$[\kappa] = \frac{1}{s}$
D	Dämpfungsgrad	$[D] = 1$
η	Dimensionslose Frequenz	$[\eta] = 1$
$k = c$	Federkonstante	$[k] = \frac{N}{m}$

2.10.2 Resonanz

Die Amplitude A wird maximal, wenn der Nenner von $A(\omega)$ minimal wird

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2}$$

$$A_r = \frac{u_0}{2D\sqrt{1 - D^2}}$$

2.10.3 Vergrößerungsfunktion / Phasenverschiebung

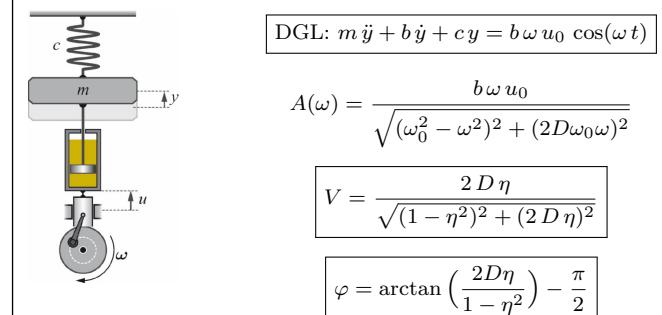
$$V = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1 - \eta^2}\right)$$

$$V_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_r^4}} \quad \text{mit } \eta_r = \sqrt{1 - 2D^2}$$

φ	Phasenverschiebung	$[\varphi] = rad$
V	Vergrößerungsfunktion	$[V] = 1$
V_r	Vergrößerungsfunktion	$[V_r] = 1$
η	Dimensionslose Frequenz	$[\eta] = 1$
D	Dämpfungsgrad	$[D] = 1$

2.11 Fremderregte Schwingungen - Dämpfererregung



$$\text{DGL: } m \ddot{y} + b \dot{y} + cy = b\omega u_0 \cos(\omega t)$$

$$A(\omega) = \frac{b\omega u_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

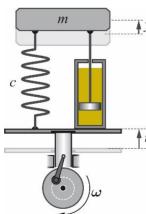
$$V = \frac{2D\eta}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1 - \eta^2}\right) - \frac{\pi}{2}$$

$A(\omega)$	Amplitude der Schwingung	$[A(\omega)] = m$
φ	Phasenverschiebung	$[\varphi] = rad$
V	Vergrößerungsfunktion	$[V] = 1$
η	Dimensionslose Frequenz	$[\eta] = 1$
D	Dämpfungsgrad	$[D] = 1$

2.12 Fremderregte Schwingungen - Stützenerregung

$$\text{DGL: } m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = -m\omega^2 u_0 \sin(\omega t) \quad \text{mit } q = y - u$$



$$A(\omega) = \frac{\omega^2 u_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

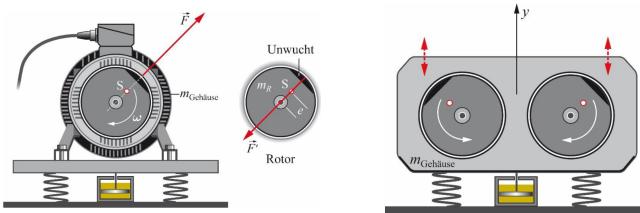
$$V = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right) - \pi$$

φ	Phasenverschiebung	$[\varphi] = \text{rad}$
V	Vergroßerungsfunktion	$[V] = 1$
η	Dimensionslose Frequenz	$[\eta] = 1$
D	Dämpfungsgrad	$[D] = 1$
ω_0	Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung	$[\omega_0] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
ω	Kreisfrequenz der Störung (Erreger)	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$A(\omega)$	Amplitude der Schwingung	$[A(\omega)] = \text{m}$

2.13 Fremderregte Schwingung - Unwuchterregung

Unwucht: Schwerpunkt S des Rotors der Masse m_R bewegt sich auf einem Kreis mit Radius e



$$\text{DGL in } y\text{-Richtung: } m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = -m_R\omega^2 \sin(\omega t)$$

Radiale Beschleunigung des Schwerpunkts des Rotors: $a_R = \omega^2 e$

Kraft des Rotors auf die Maschine: $F_U = m_R \cdot a_R = m_R \cdot \omega^2 e$

$$A(\omega) = \frac{m_R}{m} \frac{e\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

$$A_R = \frac{m_R}{m} \frac{e}{2D\sqrt{1-D^2}}$$

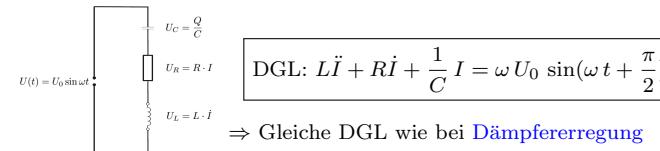
2.13.1 Kraft auf die Basis des Gehäuses

$$F_B = cy + b\dot{y} = F_{B0} \sin(\omega t - \varphi + \psi)$$

$$F_{B0} = \frac{m_R e \omega^2 \sqrt{1 + (2D\eta)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

m_R	Masse des Rotors	$[m_R] = \text{kg}$
a_R	Radiale Beschleunigung Schwerpunkt	$[a_R] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
e	Abstand Mittelpunkt - Schwerpunkt	$[e] = \text{m}$
φ	Phasenverschiebung	$[\varphi] = \text{rad}$
V	Vergrößerungsfunktion	$[V] = 1$
η	Dimensionslose Frequenz	$[\eta] = 1$
D	Dämpfungsgrad	$[D] = 1$
$A(\omega)$	Amplitude	$[A(\omega)] = \text{m}$
A_R	Resonanzamplitude	$[A_R] = \text{m}$

2.14 Fremderregte Schwingung - Schwingkreis



$$\text{DGL: } L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = \omega U_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

⇒ Gleiche DGL wie bei Dämpfererregung

$$\text{DGL: } m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = b\omega u_0 \cos(\omega t) \quad A(\omega) = \frac{b\omega u_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

$$I(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}} U_0 \quad \text{mit } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, D = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$V = \frac{U_{L0}}{U_0} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

2.14.1 Resonanz

Resonanzfrequenz

$$\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ω_0 Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung $[\omega_0] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

ω Kreisfrequenz der Störung (Erreger) $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

ω_r Resonanzfrequenz $[\omega_r] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

I_{0r} Strom-Amplitude @ Resonanz $[I_{0r}] = \text{A}$

U_0 Amplitude der Erregerspannung $[U_0] = \text{V}$

U_{L0} Amplitude Spulenspannung $[U_{L0}] = \text{V}$

$A(\omega)$ Amplitude der Schwingung $[A(\omega)] = \text{m}$

V Vergrößerungsfunktion $[V] = 1$

η Dimensionslose Frequenz $[\eta] = 1$

D Dämpfungsgrad $[D] = 1$

$$I_{0r} = \frac{U_0}{R}$$

ω_k $\omega_k = \sqrt{\omega^2 + 2k}$

Symm: $\ddot{\Phi}_+ = -\omega^2 \Phi_+$

Antisymm: $\ddot{\Phi}_- = -(w^2 + 2k)\Phi_-$

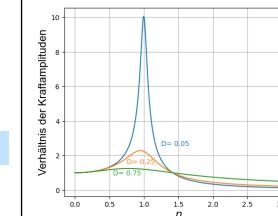
2.15 Fremderregte Schwingung - Güte Q

2.15.1 Definition

Die relative Abnahme der Schwingungsenergie $E(t)$ pro Schwingdauer wird als **Güte** oder **Gütefaktor** bezeichnet

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}$$

2.15.2 Beziehungen



$$\text{Breite der Resonanzkurve bei } U_0 = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

Breite Kurve ⇒ tiefe Güte

$$Q = \frac{1}{2D}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

2.16 Gekoppelte Pendel

Zwei Pendel sind durch eine Feder miteinander verbunden.
Die Bewegung eines Pendels hat Auswirkungen auf die Bewegung des anderen Pendels.

Gesucht ist eine Beschreibung der Bewegung des Pendels.

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = -m_1 g a_1 \varphi_1 + c \cdot h^2 (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 = -m_2 g a_2 \varphi_2 + c \cdot h^2 (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Spezialfall $J_1 = J_2 = J$ und $m_1 = m_2 = m$

$$\ddot{\varphi}_1 = -\omega^2 \varphi_1 + k (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -\omega^2 \varphi_2 - k (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\text{mit } \Phi_+ = \varphi_1 + \varphi_2 \quad \Phi_- = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\omega^2 = \frac{mg}{J} \quad k = \frac{c \cdot h}{J} \quad \omega_k = \sqrt{\omega^2 + 2k}$$

$$\text{Symm: } \ddot{\Phi}_+ = -\omega^2 \Phi_+ \quad \varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \frac{\Phi_0}{2} \cos \omega t$$

$$\text{Antisymm: } \ddot{\Phi}_- = -(\omega^2 + 2k)\Phi_- \quad \varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \frac{\Phi_0}{2} \cos \omega_k t$$

Allgemeine Lösung des gekoppelten Systems:

Lineare Kombination der symmetrischen und asymmetrischen Lösung

$$\varphi_1(t) = \Phi \sin(\Omega t) \cdot \cos(\bar{\omega} t) \quad \Omega = \frac{\omega_k - \omega}{2}$$

$$\varphi_2(t) = \Phi \cos(\Omega t) \cdot \sin(\bar{\omega} t) \quad \bar{\omega} = \frac{\omega + \omega_k}{2}$$

$$k \quad \text{Kopplungsfaktor} \quad [k] = 1$$

$$h \quad \text{Abstand zur Aufhängung} \quad [h] = \text{m}$$

$$J \quad \text{Massenträgheitsmoment} \quad [J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$c \quad \text{Federkonstante} \quad [c] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

3 Wellen

3.1 Definition

Eine Welle ist eine **Störung eines Gleichgewichtszustandes**, die sich im **Raum ausbreitet**.

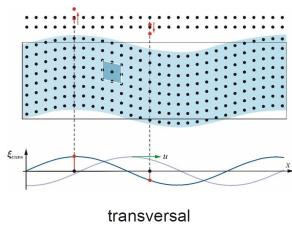
3.1.1 Bemerkungen zur Definition

- Voraussetzung für die **Ausbreitung** einer Welle ist die **Kopplung** benachbarter Teilchen.
- Eine Welle **transportiert Energie** (**keine Materie**)
- Die Störung kann von ganz unterschiedlicher Natur sein:
 - Druck in Luft
 - Auslenkung einer Position entlang einem Seil (Saite)
 - Elektrische Signale

Die Störung wird mit ξ beschrieben: $\xi = \xi(x, y, z, t)$

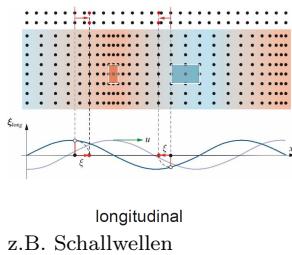
3.2 Klassifizierung von Wellen

Welle breitet sich **senkrecht** zur Störung aus



z.B. Lichtwellen

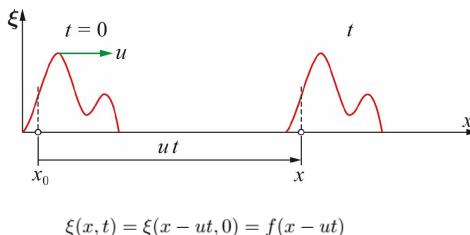
Welle breitet sich **parallel** zur Störung aus



z.B. Schallwellen

3.3 Wellengeschwindigkeit / Phasengeschwindigkeit u

Die Störung an der Position x_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ breite sich mit der Geschwindigkeit u aus und erreicht nach einer Zeit t die Position x



$$\xi(x, t) = \xi(x - ut, 0) = f(x - ut)$$

In einem Medium mit **grösserer Dichte** breiten sich Wellen **schneller aus!** \Rightarrow Bessere Kopplung der Moleküle

Man schaut bei der Beschreibung der Fortbewegung auf den Ort. Die Verschiebung des Ortes wird mit der Zeit hineingebracht

3.3.1 Verschiedene Wellengeschwindigkeiten

Schallwellen in Fluiden:

$$u = \sqrt{\frac{1}{\rho \kappa}}$$

Schallwellen in Gasen:

$$u = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

Elastische Longitudinalwellen in einem schlanken Stab

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Elastische Transversalwellen

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Transversalwellen auf einem Seil oder einer Saite

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

Elektromagnetische Wellen (transversal) (z.B. Lichtwellen)

$$u = \frac{c}{n}$$

u	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
A	Querschnittsfläche	$[A] = \text{m}^2$
E	Elastizitätsmodul	$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$
F	Spannkraft des Seils / der Saite	$[F] = \text{N}$
G	Schubmodul	$[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$
M	Molmasse	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
p	Druck	$[p] = \text{Pa}$
R	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
T	Absolut-Temperatur (in K)	$[T] = \text{K}$
κ	Kompressibilität	$[\kappa] = \frac{1}{\text{Pa}}$
γ	Adiabatenexponent	$[\gamma] = 1$
ρ	Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
n	Brechungsindex	$[n] = 1$
c	Lichtgeschwindigkeit: $c = 300 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$[c] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.4 Wellengleichungen

Die Wellengleichungen stellen eine **Verbindung zwischen Zeit und Ort** her

Eindimensional
Welle breite sich in 1D aus

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Zweidimensional
Welle breite sich in 2D aus

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Dreidimensional
Welle breite sich in 3D aus

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

3.4.1 Wichtige Lösung der Wellengleichung (1D)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Ansatz: $\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \sin(\omega t - k x)$

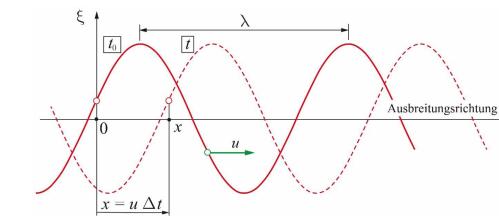
$$\underbrace{-k^2 A \sin(\omega t - k x)}_{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}} = -\frac{1}{u^2} \cdot \underbrace{\omega^2 A \sin(\omega t - k x)}_{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

$$\text{mit Lsgng } u^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

3.5 Harmonische Wellen

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \sin(\omega t - k x + \varphi)$$

3.5.1 Terminologie



ξ_0	Amplitude	$[\xi_0]$
ω	Kreisfrequenz	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
T	Periodendauer	$[T] = \text{s}$
k	Wellenzahl	$[k] = \frac{1}{\text{m}}$
λ	Wellenlänge	$\lambda = \text{m}$
u	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
φ	Phasenverschiebung	$[\varphi] = \text{rad}$

3.5.2 Zusammenhänge

Grösse \rightarrow	k	ω	f	u	T	λ
ausgedrückt mit \downarrow						
k			$\frac{ku}{2\pi}$	$\frac{\omega}{k}$	$\frac{2\pi}{k \cdot u}$	$\frac{2\pi}{k}$
ω	$\frac{\omega}{u}$				$\frac{\omega}{k}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
f	$\frac{2\pi f}{u}$		$2\pi f$		$\frac{2\pi f}{k}$	$\frac{1}{f}$
u	$\frac{\omega}{u}$		ku	$\frac{u}{\lambda}$		$\frac{\lambda}{u}$
T	$\frac{2\pi}{u \cdot T}$		$\frac{1}{T}$		$\frac{2\pi}{k \cdot T}$	
λ	$\frac{2\pi}{\lambda}$		$\frac{2\pi}{\lambda} u$	$\frac{u}{\lambda}$	$\frac{\lambda}{T}$	$\frac{\lambda}{u}$

3.6 Wellenflächen / Wellenfronten

Die Gesamtheit aller Punkte, die zu einer bestimmten Zeit im gleichen Schwingungszustand sind, bilden eine Fläche im Raum. Diese **Flächen mit gleicher Phase** werden als **Wellenflächen** oder **Wellenfronten** genannt.

Eine Welle kann sich in 3 Dimensionen ausbreiten und dabei **verschiedene Wellenflächen** zeigen.

3.7 Wellenausbreitung

Wellengleichung
(3D)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Lösungsansatz

$$\xi = \xi_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

mit Wellenvektor $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$ und Ortsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$

3.7.1 Ebene Wellen

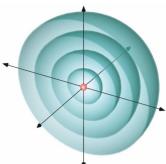
- Wellenfronten sind Ebenen im Raum
- Wellenvektor \vec{k} steht senkrecht auf der Ebenen
- **Abstand** zw. zwei Wellenfronten ist λ

Die Ebenen bewegen sich mit der Wellengeschwindigkeit

$$u = \frac{\omega}{k} \text{ mit } k = \|\vec{k}\| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

in die **Richtung**, die durch den **Wellenvektor** \vec{k} gegeben ist.

3.7.2 Kugelwellen



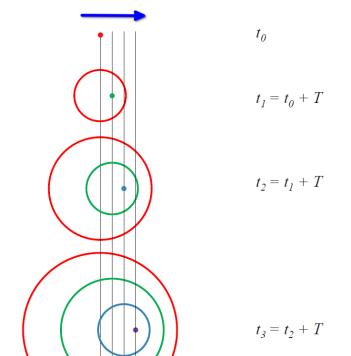
- Wellenfronten sind Kugeln
- Wellenvektor \vec{k} steht senkrecht auf Wellenfronten
- Wellenfronten bewegen sich mit der Wellengeschwindigkeit vom Zentrum weg
- Amplitude nimmt mit $\frac{1}{r}$ ab

Für eine **punktförmige Quelle** und keine Winkelabhängigkeit gilt:

$$\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{2}{r} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2}$$

mit Lösungsansatz $\xi(t, r) = \frac{1}{r} \xi_0 e^{j(\omega t - k r)}$

3.8 Bewegte Quellen



Die Quelle bewegt sich mit der **Geschwindigkeit** v_Q in eingezeichneter Richtung fort

Die Quelle verschiebt sich in der Zeit T um

$$\Delta x = v_Q \cdot T$$

3.8.1 Frequenzverschiebung durch Bewegung der Quelle

Die Quelle sendet eine Frequenz f aus. Durch die Bewegung der Quelle ändert sich die Wellenlänge λ und somit ergibt sich eine neue Frequenz f' , welche ein statischer Beobachter wahrnimmt.

$$\lambda' = \lambda - v_Q \cdot T$$

$$\lambda' = \lambda - v_Q \frac{\lambda}{u}$$

$$\lambda' = \lambda \left(1 - \frac{v_Q}{u}\right)$$

$$f' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda \left(1 - \frac{v_Q}{u}\right)} = \frac{f}{\left(1 - \frac{v_Q}{u}\right)}$$

$$f' = \frac{1}{\left(1 \mp \frac{v_Q}{u}\right)} f$$

- + Quelle bewegt sich vom Beobachter weg
- Quelle bewegt sich zum Beobachter hin

λ Wellenlänge der aussendeten Welle

λ' Wellenlänge der wahrgenommenen Welle

v_Q Geschwindigkeit der bewegten Quelle

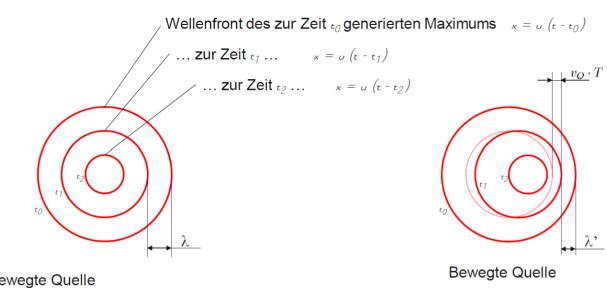
u Wellengeschwindigkeit

f Frequenz der ausgesendeten Wellen

f' Frequenz der wahrgenommenen Wellen

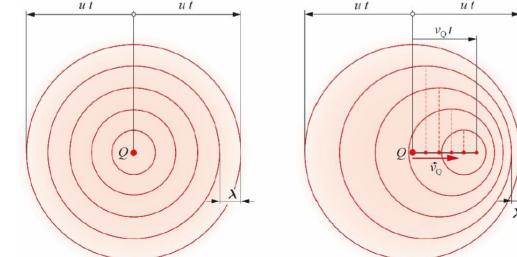
T Periodendauer (Dauer der Ausbreitung)

3.8.2 Bewegte Quelle vs. unbewegte Quelle



3.9 Doppler Effekt

Die **Veränderung** der **Wellenlänge** λ der von einer **bewegten Quelle** ausgesandten Wellen ist als **Doppler Effekt** bekannt.



3.10 Bewegte Quelle mit Winkel

Die Quelle bewegt sich nicht direkt auf den Beobachter zu, sondern sie bewegt sich am **Beobachter vorbei**



$$f' = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{u} \cos(v_Q)} f$$

v_Q Geschwindigkeit der bewegten Quelle

$$[v_Q] = \frac{m}{s}$$

u Wellengeschwindigkeit

$$[u] = \frac{m}{s}$$

f Frequenz der ausgesendeten Wellen

$$[f] = \text{Hz}$$

f' Frequenz der wahrgenommenen Wellen

$$[f'] = \text{Hz}$$

3.10.1 Beispiel Winkel zw. Quelle und Beobachter

Gegeben: v_Q, θ, u, d, l
 Gesucht: $\frac{f'}{f}$

$$f' = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{u} \cdot \cos(\theta)}$$

$$\tan(\theta) = \frac{d}{l} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$$\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$$

$$\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{d}{l} = \frac{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}{\cos(\theta)}$$

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = \frac{d^2}{l^2} + 1$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{1 + \frac{d^2}{l^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{u} \cdot \sqrt{\frac{l^2}{l^2+d^2}}}$$

3.11 Bewegter Beobachter

$$f' = \left(1 \pm \frac{v_B}{u}\right) f$$

- + Beobachter geht auf Quelle zu
- Beobachter geht von Quelle weg

v_B	Geschwindigkeit des bewegten Beobachters	$[v_B] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
v_Q	Geschwindigkeit der bewegten Quelle	$[v_Q] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
u	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
f_B	Frequenz, welche Beobachter wahrnimmt	$[f_B] = \text{Hz}$
f_Q	Frequenz, welche Quelle 'aussendet'	$[f_Q] = \text{Hz}$

3.12 Bewegte Quelle und bewegter Beobachter

$$f_B = \frac{u + v_B \cos(\vartheta_B)}{u - v_Q \cos(\vartheta_Q)} f_Q$$

$\vartheta_B = \theta_B$	siehe Skizze	$[\vartheta_B] = {}^\circ$
v_B	Geschwindigkeit bewegter Beobachter	$[v_B] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$\vartheta_Q = \theta_Q$	siehe Skizze	$[\vartheta_Q] = {}^\circ$
v_Q	Geschwindigkeit bewegte Quelle	$[v_Q] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
u	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
f_B	Frequenz beim bewegten Beobachter	$[f_B] = \text{Hz}$
f_Q	Frequenz bei der bewegten Quelle	$[f_Q] = \text{Hz}$

3.12.1 Optischer Doppler Effekt

Wird verwendet, wenn die Wellengeschwindigkeit u gleich der Lichtgeschwindigkeit c ist!
 Es spielt nur die relative Bewegung von Beobachter und Quellen eine Rolle

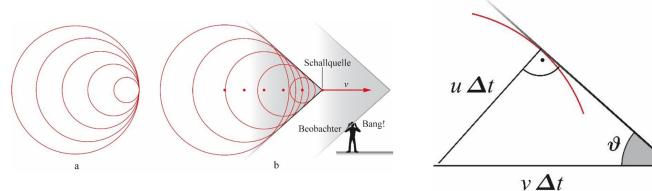
$$f' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos(\vartheta)} f \text{ mit } \beta = \frac{v}{c}$$

$$\text{für } \beta \ll 1 \quad f' \simeq \frac{1}{1 - \beta \cdot \cos(\theta)} \cdot f$$

$$\text{für } \beta \ll 1 \text{ und } \theta \approx \frac{\pi}{2} \quad f' \simeq \frac{1}{1 - \beta} \cdot f$$

3.12.2 Mach'scher Kegel

Wenn sich die Quelle schneller fortbewegt als die Wellengeschwindigkeit, dann entsteht ein Mach'scher Kegel



$$\sin(\vartheta) = \frac{u \Delta t}{v \Delta t} = \frac{u}{v}$$

$$M = \frac{v}{u}$$

v	Geschwindigkeit der Quelle	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
u	Wellengeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit)	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
M	Machzahl	$[M] = 1$

3.13 Wellenwiderstand, Energietransport - Schallwellen

3.13.1 Terminologie Wellenwiderstand

Der **Wellenwiderstand Z** (auch **Impedanz** genannt) beschreibt, wie ein Medium den Fluss von Energie beeinflusst.

⇒ 'Wie gut können sich Wellen in einem Medium ausbreiten?'

$$Z = \rho \cdot u = \frac{\Delta p_0}{v_0}$$

Z	Wellenwiderstand bzw. Impedanz	$[Z] = \Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}$
ρ	Dichte des Mediums	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
u	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Δp_0	Druckamplitude	$[\Delta p_0] = \text{Pa}$
v_0	Schnellenamplitude	$[v_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.13.2 Weitere Terminologien

Schalldruck	$p = \Delta p_0 \cos(\omega t - k x)$	$[p] = \text{Pa}$
Druckamplitude	$\Delta p_0 = \rho u v_0$	
Schallschnelle (Schnelle)	$v = v_0 \cos(\omega t - k x)$	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Schnellenamplitude	$v_0 = \omega \xi_0$	

3.13.3 Intensität der Schallwelle

Intensität = gemittelte Energieflossdichte

$$E_{kin} = \frac{\rho \cdot v^2}{4} = \frac{\rho \cdot v_0^2}{4}$$

$$E_{pot} = \frac{p^2 - p_0^2}{2 \rho u^2} = \frac{\rho \cdot v_0^2}{4}$$

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{\rho \cdot v_0^2}{2}$$

$$I = u \cdot \bar{w} = \frac{1}{2} \rho v_0^2 u = \frac{1}{2} \rho (\omega \xi_0)^2 u = \frac{(\Delta p_0)^2}{2 Z} = \frac{P}{A}$$

I	Schallintensität	$[I] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
\bar{w}	Energieflossdichte	$[\bar{w}] = \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$
Pot. Energie	→ 'Kompression Gas'	
Kin. Energie	→ 'Geschw. Teilchen'	
ρ	Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
v_0	Schnellenamplitude	$[v_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
ξ_0	Amplitude	$[\xi_0]$
u	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Δp_0	Druckamplitude	$[\Delta p_0] = \text{Pa}$
Z	Wellenwiderstand bzw. Impedanz	$[Z] = \Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}$
P	Leistung	$[P] = \text{W}$
A	(Abstrahl-) Fläche	$[A] = \text{m}^2$

3.14 Dispersion

Die Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit von der Wellenlänge wird als Dispersion bezeichnet.

⇒ Siehe Beispiel Optik Abschnitt 1.9

3.14.1 Dispersion bei Wasserwellen

$$u(\lambda) = \sqrt{\left(\frac{g \cdot \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi \cdot \sigma}{\rho \cdot \lambda}\right) \cdot \tanh\left(\frac{2\pi \cdot h}{\lambda}\right)}$$

tiefes Wasser ($\lambda \ll h$)

$$u(\lambda) = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi}}$$

flaches Wasser ($\lambda \gg h$)

$$u = \sqrt{g \cdot h}$$

g	Erdbeschleunigung $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$[g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
λ	Wellenlänge	$[\lambda] = \text{m}$
σ	Oberflächenspannung	$[\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$
h	Wassertiefe	$[h] = \text{m}$
ρ	Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

4 Superposition von Wellen

Superposition beschreibt die Überlagerung (Addition) von Wellen

- Linearität der Wellengleichung
- Die Summe zweier Lösungen der Wellengleichung ist auch eine Lösung der Wellengleichung.

Das Superpositionsprinzip erlaubt die Darstellung von periodischen Wellen als eine Summe von harmonischen Wellen.

4.1 Schwebung

Superposition von Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen
⇒ Hörbar als ein 'Flattern'

$$f_{\text{Schwebung}} = f_2 - f_1$$

$$\xi_1 = A \cdot \sin(\omega_1 t)$$

$$\xi_2 = A \cdot \sin(\omega_2 t)$$

$$\xi = 2A \cdot \sin(\bar{\omega} t) \cdot \cos(\Omega t)$$

$$\text{mit } \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \text{ und } \Omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

4.2 Interferenz

Superposition von Wellen mit gleichen Frequenzen



$$\xi_1 = A \cdot \sin(\omega t - k r_1)$$

$$\xi_2 = A \cdot \sin(\omega t - k r_2)$$

$$\xi = 2A \cdot \sin\left(\omega t - \frac{k(r_1 + r_2)}{2}\right) \cos\left(k \frac{r_2 - r_1}{2}\right)$$

⇒ Der cos-Term hängt nur vom Ort ab!

⇒ Es gibt Orte, an denen Welle sich auslöscht!

4.3 Kohärenz

Zwei Wellen werden als kohärent bezeichnet, wenn eine **feste Phasendifferenz** zwischen den beiden Wellen besteht.

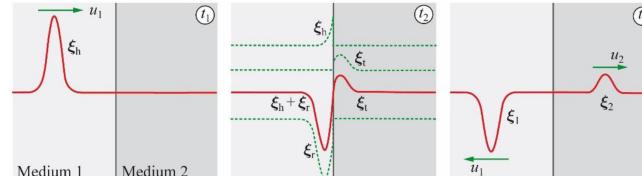
Kohärenzlänge ist eine **Vorbedingung**, damit sich eine **Interferenz** bilden kann.

Kohärenzlänge ist der **maximale Streckenunterschied**, den zwei Wellen haben dürfen, damit eine (stabile) Interferenz beobachtet werden kann.

4.4 Reflexion und Transmission

4.4.1 Verhalten von Wellen an Grenzflächen von zwei Medien

Ein Teil der Welle wird reflektiert und ein Teil wird transmittiert

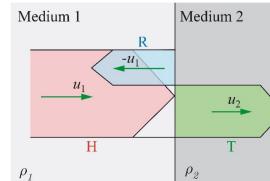


Physikalische Bedingung

Stetigkeit der Wellenfunktion und der Ableitung an der Grenzfläche

$$\xi_1(0) = \xi_2(0) \quad \dot{\xi}_1(0) = \dot{\xi}_2(0)$$

4.4.2 Intensität von Reflexion und Transmission



$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

$$T = \frac{4, Z_1 \cdot Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

R Reflexionskoeffizient

$[R] = 1$

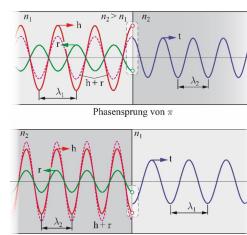
T Transmissionskoeffizient

$[T] = 1$

Z_i Wellenwiderstand im Medium i

$[Z] = \Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}$

4.4.3 Phasensprünge bei Reflexionen



Reflexion an 'dichtem' Material
⇒ **Phasensprung**

dicht: $n_2 > n_1$
kleinere Wellengeschwindigkeit,
größerer Wellenwiderstand

Reflexion an 'dünnem' Material
⇒ **kein Phasensprung**

4.5 Anwendung: Elektromagnetische Wellen

4.5.1 Elektromagnetische Wellen in Doppelleiter

$$U_r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} U_h$$

$$U_t = \frac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2} U_h$$

$$I_r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} I_h$$

$$I_t = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2} I_h$$

Kabel mit kurzgeschlossenem Ende $Z_2 = 0$

$$U_r = -U_h$$

$$U_1 = U_h + U_r = U_h - U_h = 0$$

Kabel mit offenem Ende $Z_2 = \infty$

$$I_r = -I_h$$

$$I_1 = I_r + I_h = I_r - I_r = 0$$

U_r Reflektierte Spannung

$[U_r] = \text{V}$

U_h Eintreffende Spannung

$[U_h] = \text{V}$

I_r Reflektierter Strom

$[I_r] = \text{A}$

I_h Eintreffender Strom

$[I_h] = \text{A}$

Z_i Wellenwiderstand im Medium i

$[Z] = \Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}$

4.5.2 Elektromagnetische Wellen in homogenem Milieu

$$Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} Z_0 = Z_0 \frac{c}{n}$$

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

R Reflexionskoeffizient

$[R] = 1$

Z_i Wellenwiderstand im Medium i

$[Z] = \Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}$

μ_r Permeabilitätszahl

$[\mu_r] = 1$

ϵ Dielektrizitätszahl

$[\epsilon_r] = 1$

n_i Brechungsindex von Medium i

$[n_i] = 1$

ϵ_0 Ele. Feldkonstante $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$

$[\epsilon_0] = 1$

μ_0 Magn. Feldkonstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$

$[\mu_0] = 1$

Z_0 Wellenwiderstand Vakuum $Z_0 \approx 376.73 \Omega$

$[\Omega] = 1$

c Lichtgeschwindigkeit $c = 300 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

5 Stehende Wellen

5.0.1 Terminologie

Eine **stehende Welle** ist eine Welle, bei der Orte maximaler Auslenkung (oder minimaler Auslenkungen) sich **nicht fortbewegen**

- Ort- und Zeitabhängigkeit sind separiert
- Die Welle bewegt sich nicht im Raum ('Muster bleibt stehen')

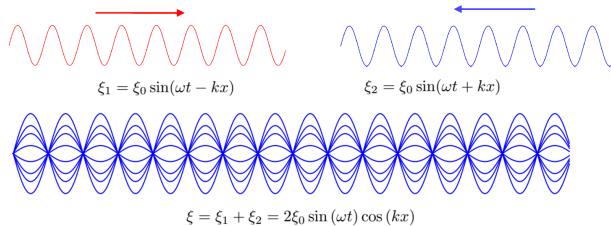
$$\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(kx)$$

⇒ sin()-Terme sind auch erlaubt!

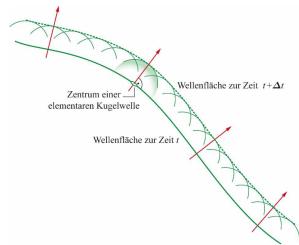
Orte, wo die Welle für alle Zeit = 0 ist heißen **Wellenknoten**
⇒ **Zwei benachbarte Knoten sind $\frac{\lambda}{2}$ auseinander**

Orte, wo die Welle eine maximale Auslenkung erreicht, heißen **Wellenbauch**
⇒ **Zwei benachbarte Bäuche sind $\frac{\lambda}{2}$ auseinander**

5.1 Entstehung von stehenden Wellen



5.2 Prinzip von Huygens



Jedes Flächenelement auf einer Wellenfläche kann als Zentrum einer Kugelwelle betrachtet werden.

Die Wellenfläche zu einem späteren Zeitpunkt ist die Eihüllende all dieser Elementarwellen.

5.3 Eigenschwingungen - 1D

$$f_n = \frac{n}{2l} \cdot u = \frac{u}{\lambda_n}$$

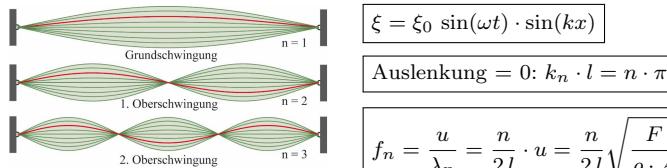
$$\text{Auslenkung } 0: k_n \cdot l = n \cdot \pi$$

$$\text{Auslenkung max: } k_n \cdot l = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

5.3.1 Saite

- Reflexion an einer Grenzfläche → Stehende Welle
- Die stehende Welle muss in den vorhandenen Raum passen
→ Geometrische Bedingung

• Knoten an beiden Enden



$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t) \cdot \sin(kx)$$

$$\text{Auslenkung } 0: k_n \cdot l = n \cdot \pi$$

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{n}{2l} \cdot u = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}}$$

k_n Wellenzahl

l Länge der Saite

u Wellengeschwindigkeit

λ_n Wellenlänge

n Ganze Zahl

ω Kreisfrequenz

A Querschnitt der Saite

$$[k_n] = \frac{1}{m}$$

$$[l] = m$$

$$[u] = \frac{m}{s}$$

$$[\lambda_n] = m$$

$$[n] = 1$$

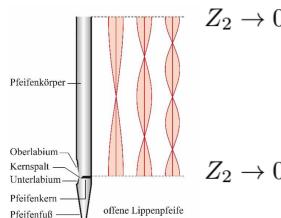
$$[\omega] = \frac{rad}{s}$$

$$[A] = m^2$$

5.3.2 Pfeiffen

Offene Pfeiffe

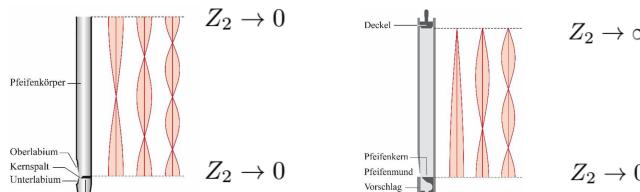
Länge $l = \frac{\lambda}{2}$



Auslenkung an Enden:
Wellenbauch

Gedackte Pfeiffe

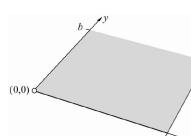
Länge $l = \frac{\lambda}{4}$



Auslenkung offenes Ende:
Wellenbauch
Auslenkung gedacktes Ende:
Knoten (max. Auslenkung)

5.4 Eigenschwingungen - 2D

5.4.1 Rechteckige Membrane



$$\xi(x, y, t) = \xi_0 \sin(\omega t) \sin(k_x x) \sin(k_y y)$$

$$\text{Wellenvektor: } k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

$$u^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

Randbedingungen:

$$\text{Auslenkung } 0$$

$$k_x = \frac{n\pi}{a}$$

$$k_y = \frac{m\pi}{b}$$

6 Beugung

6.0.1 Terminologie

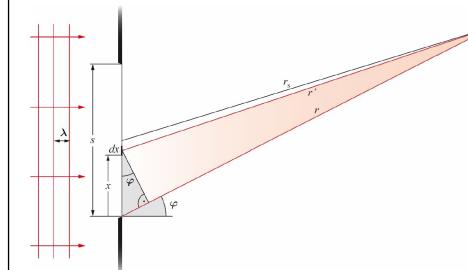
Die **Richtungsänderungen** der Wellenausbreitung in einem homogenen Medium durch **Hindernisse** wird als **Beugung** (**Diffraction**) bezeichnet.

- Das Hindernis kann eine Kante, ein Spalt oder ein kleines Objekt sein
- Beugung tritt auf, wenn das **Hindernis von ähnlicher Grösse** ist, wie die **Wellenlänge**
- ⇒ **Beugung tritt auf, wenn eine Welle limitiert wird!**

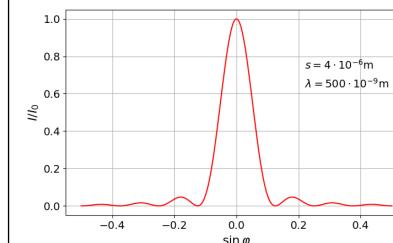
Dies gilt insbesondere für:
Spalt, Kante, Loch (Pinhole), Objektiv-Öffnung

6.1 Beugung - Spalt

6.1.1 Beschreibung Setup



6.1.2 Intensität nach dem Spalt



$$I_s \propto \frac{A^2}{r^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi \cdot s \cdot \sin(\varphi)}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot s \cdot \sin(\varphi)}{\lambda}\right)^2}$$

Minima der Intensität

$$\sin(\varphi) = n \frac{\lambda}{s}$$

$$[I_s] = \frac{W}{m^2}$$

$$[s] = \text{m}$$

$$[\lambda] = \text{m}$$

$$[n] = 1$$

$$[A] = \text{m}$$

$$[r] = \text{m}$$

$$[\varphi] = ^\circ$$

I_s Intensität

s Länge des Spalts

λ Wellenlänge

n Ordnung (typ. 1)

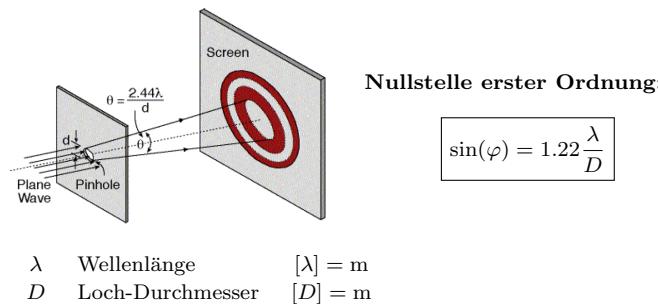
A Amplitude

r siehe Bild Abschnitt 6.1.1

φ Einfallsinkel der Welle zum Spalt

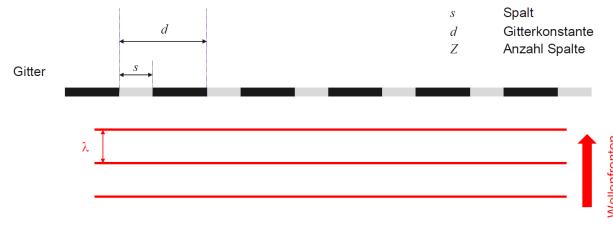
Hinweis: Oft muss gegebenes φ durch 2 geteilt werden!

6.2 Beugung - Runde Öffnung (2D)

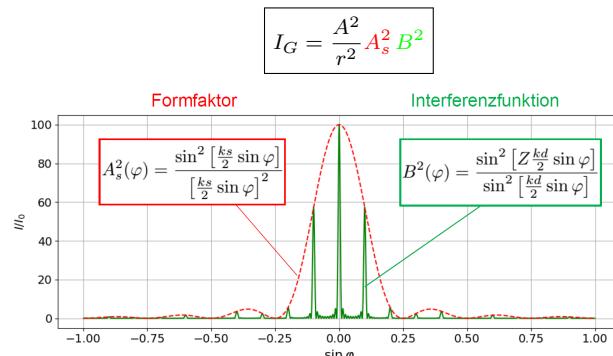


6.3 Beugung - Gitter

6.3.1 Beschreibung Setup



6.3.2 Intensität nach dem Gitter

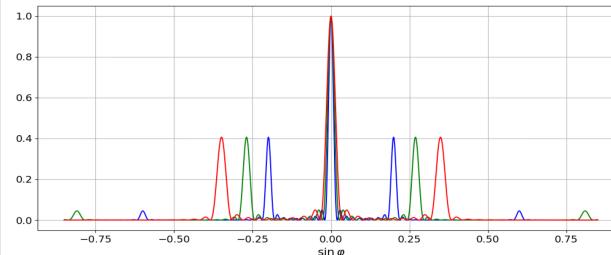


$A_s^2(\varphi)$ hat Nullstellen bei $n \frac{\lambda}{s}$ (hängt von s ab)
 $B^2(\varphi)$ hat Hauptmaxima bei $n \frac{\lambda}{d}$ und $Z - 2$ Nebenmaxima dazwischen (hängt von Z und d ab)

I_G Intensität nach Gitter $[I_G] = \frac{W}{\text{m}^2}$
 k Wellenzahl $[k] = \frac{1}{\text{m}}$
 s Spalt $[s] = \text{m}$
 d Gitterkonstante $[d] = \text{m}$
 Z Anzahl Spalte $[Z] = 1$

6.3.3 Auflösungsvermögen

Verschiedene Wellenlängen können getrennt (aufgelöst) werden



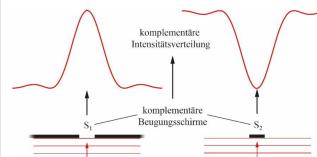
Kriterium

Zwei Wellenlängen werden gerade noch aufgelöst, wenn das Hauptmaximum von λ_2 mit dem Minimum von λ_1 zusammenfällt

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = n Z$$

λ Wellenlänge $[\lambda] = \text{m}$
 $\Delta\lambda$ Unterschied der Wellenlängen $[\Delta\lambda] = \text{m}$
 n Ordnung der Beugung (typ. 1) $[n] = 1$
 Z Anzahl der Spalten $[Z] = 1$

6.4 Babinet-Prinzip



Ausserhalb des Bereichs geometrisch-optischer Abbildung produzieren komplementäre Beugungsschirme gleiche Beugungsbilder

7 Akustik

7.0.1 Terminologie

Ton

Eine harmonische Schallwelle wird als **Ton** bezeichnet. Ein (reiner) Ton entspricht also einer **Schallschwingung**, die eine **einige Frequenz** enthält.

Klang

Eine **Überlagerung** von harmonischen Schwingungen, deren **Frequenzen** in einem **ganzzahligen Verhältnis** zur tiefsten Frequenz, zur Frequenz des **Grundtons**, stehen, wird **Klang** genannt.

Geräusch

Bei einem **Geräusch** besteht das Frequenzspektrum nicht mehr aus einzelnen diskreten Linien, sondern weist in einem bestimmten Frequenzbereich eine **kontinuierliche Verteilung** auf.

7.1 Pegel

'Einheit': Bel

$$\text{Pegel} = \log \left(\frac{x}{b_0} \right)$$

$$x = b_0 \cdot 10^{\text{Pegel}}$$

Pegel Dimensionslose Grösse

x Zu vergleichende Grösse

b_0 Basisgrösse

'Einheit': Dezibel

$$\text{Pegel} = 10 \cdot \log \left(\frac{x}{b_0} \right)$$

$$x = b_0 \cdot 10^{\left(\frac{\text{Pegel}}{10} \right)}$$

[Pegel] = 1

[x]

[b_0] = [x]

7.2 Schallintensität

$$L_I = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

$$L_p = 20 \cdot \log \left(\frac{p_{eff}}{p_{eff0}} \right)$$

$$p_{eff} = \frac{\Delta p_0}{\sqrt{2}}$$

L_I Schallintensitätspegel

[L_I] = dB

L_p Schalldruckpegel

[L_p] = dB

I Intensität

[I] = $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

p_{eff} Schalldruck (Effektivwert)

[p_{eff}] = Pa

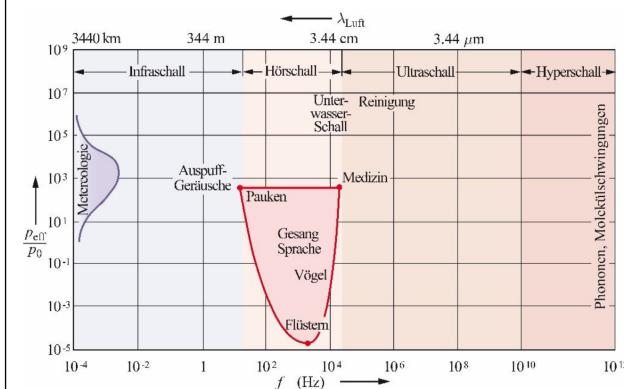
Δp_0 Druckamplitude

[Δp_0] = Pa

I_0 Bezugsintensität $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

p_{eff0} Bezugsschalldruck $p_{eff0} = 2 \cdot 10^{-5} \text{Pa}$

7.3 Verschiedene Schallquellen



7.4 Intensität bei Kugelwellen (ohne Dämpfung)

Energieerhaltung

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Verhältnis

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Pegel

$$L_2 = L_1 - 20 \cdot \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

$I(r)$ Intensität

$$[I(r)] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

P Leistung

$$[P] = \text{W}$$

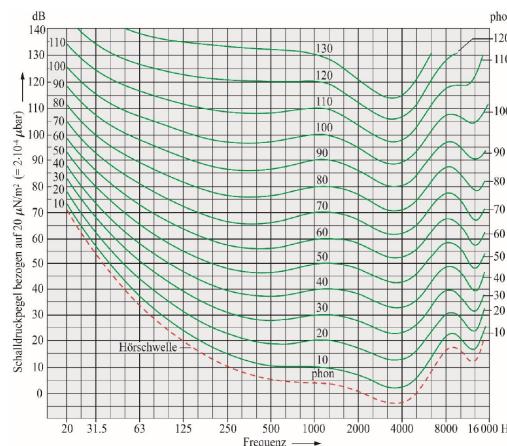
r_i Abstand (Radius) zum Wellenursprung

$$[r_i] = \text{m}$$

L_i Pegel

$$[P_i] = \text{dB}$$

7.5 PHON-Skala



7.6 Schalldämpfung / Schalldämmung

7.6.1 Schalldämpfung

Schalldämpfung bedeutet eine **Abschwächung** der Schallwellen durch **Absorption**.

Schallenergie wird in '**Wärme**' umgewandelt, d.h. durch die Absorption von Energie werden das von den Schallwellen durchdrungene Medium oder die das Schallfeld begrenzenden Körper erwärmt.

Verschiedene Arten von Absorption für Schalldämpfung Innen

- Poröse Schicht (mit oder ohne perforierte Abdeckung)
- Akustikplatte
- Plattenresonator
- Helmholtz-Resonator

7.6.2 Schalldämmung

Schalldämmung ist die **Behinderung** der **Schallausbreitung** durch **reflektierende** Hindernisse. Mauern, Türen und Fenster bewirken eine Schalldämmung für den von aussen in das Gebäude eindringenden Schall. Auch die Ausbreitung von Schall innerhalb eines Gebäudes wird durch die Schalldämmung von Zwischenwänden und Türen abgeschwächt. Im Freien wird durch Schallschutzwände eine Schalldämmung für die dahinterliegenden Gebäude erreicht.

7.7 Intensität bei Kugelwellen (mit Dämpfung)

Energieerhaltung

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2} e^{-\alpha r}$$

Verhältnis

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} e^{-\alpha(r_2-r_1)}$$

Pegel

$$L_2 = L_1 - 20 \cdot \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right) - K(r_2 - r_1)$$

$I(r)$ Intensität

$$[I(r)] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

P Leistung

$$[P] = \text{W}$$

r_i Abstand (Radius) zum Wellenursprung

$$[r_i] = \text{m}$$

L_i Pegel

$$[P_i] = \text{dB}$$

α Dämpfung

$$[\alpha] = 1$$

K Dämpfung

$$[K] = \frac{\text{dB}}{\text{m}}$$

7.8 Schalldämmung / Schalldämm-Mass

Bei der Schallübertragung muss zwischen **Luftschall** und **Körperschall** unterschieden werden.

7.8.1 Luftschalldämmung

Es gibt Schallquellen, die ihre Schallenergie (fast) ausschliesslich in die Luft abstrahlen.

Beispiele: menschliche Stimme, Geigen, Lautsprecher und Blasinstrumente

7.8.2 Körperschalldämmung

Andere Schallerzeuger übertragen die Schallschwingungen nicht nur auf die Luft, sondern auch direkt auf feste Körper.

Streichinstrumente, wie Cello oder Bassgeige, und Klavier oder Flügel übertragen die Schallschwingungen auch direkt auf den Fussboden. Wird ein Nagel in die Wand geschlagen, so wird ein grosser Anteil des erzeugten Schalls als Körperschall übertragen.

Beispiele: Trittschall, Wasserleitungsräusche

7.9 Schalldämm-Mass

$$\mathcal{R} = 10 \cdot \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

7.10 Anhall / Nachhall

7.10.1 Anhall

Es dauert eine gewisse Zeit, bis sich eine konstante Energiedichte der Schallwellen im Raum aufgebaut hat. Dieser Vorgang wird Anhall genannt. Wegen der logarithmischen Empfindlichkeit des Ohrs wird er praktisch nicht wahrgenommen.

7.10.2 Nachhall

Die von den Begrenzungsfächen des Raumes mehrfach reflektierten Wellen bewirken andererseits, dass beim plötzlichen Abschalten einer Schallquelle der Schall nicht sofort verschwindet, sondern allmählich abklingt. Dieses Phänomen wird Nachhall genannt und ist im Gegensatz zum Anhall deutlich wahrnehmbar.

Per Definition ist die **Nachhallzeit** jene Zeitspanne, in welcher der Schallpegel im Raum um 60 dB sinkt.

7.10.3 Nachhallzeit T_N

$$T_N = 0.16 \frac{\text{s}}{\text{m} \sum_i \alpha_i A_i}$$

T_N Nachhallzeit

$$[T_N] = \text{s}$$

V Raumvolumen

$$[V] = \text{m}^3$$

α_i Absorptionsgrad

$$[\alpha_i] = 1$$

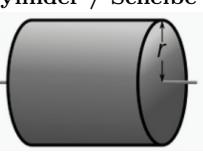
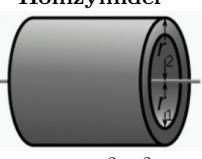
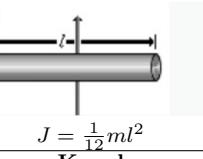
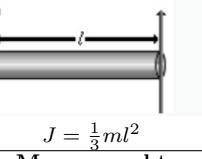
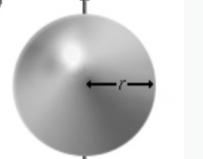
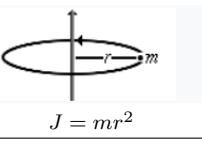
A_i Teilfläche der Raumbegrenzung

$$[A_i] = \text{m}^2$$

mit Absorption α_i

8 Anhang

8.1 Massenträgheitsmomente

Zylinder / Scheibe c)  $J = \frac{1}{2}mr^2$	Hohlzylinder d)  $J = m \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}$
Dünner Stab (Mitte) g)  $J = \frac{1}{12}ml^2$	Dünner Stab (Ende) h)  $J = \frac{1}{3}ml^2$
Kugel j)  $J = \frac{2}{5}mr^2$	Massenpunkt a)  $J = mr^2$

8.2 Trigonometrie

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
a°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

8.2.1 Beziehungen zwischen $\sin(x)$ und $\cos(x)$

$$\sin(-a) = -\sin(a)$$

$$\sin(\pi - a) = \sin(a)$$

$$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \sin(\frac{\pi}{2} + a) = \cos(a)$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - a) = -\cos(\frac{\pi}{2} + a) = \sin(a)$$

$$\cos(-a) = \cos(a)$$

$$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$$

$$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin(a)$$

8.2.2 Additionstheoreme

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}$$

8.2.3 Summen und Differenzen

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\tan(a) \pm \tan(b) = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a) \cdot \cos(b)}$$

8.2.4 Produkte

$$\sin(a) \cdot \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

$$\sin(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

8.2.5 Winkelvielfache und Halbwinkel

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cdot \cos(a)$$

$$\sin(3a) = 3 \sin(a) - 4 \sin^3(a)$$

$$\sin(4a) = 8 \cos^3(a) \cdot \sin(a) - 4 \cos(a) \cdot \sin(a)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

$$\cos(3a) = 4 \cos^3(a) - 3 \cos(a)$$

$$\cos(4a) = 8 \cos^4(a) - 8 \cos^2(a) + 1$$

$$\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(a))} \quad \cos\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(a))}$$

8.2.6 Potenzen

$$\sin^2(a) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$$

$$\sin^3(a) = \frac{1}{4}(3 \sin(a) - \sin(3a))$$

$$\sin^4(a) = \frac{1}{8}(\cos(4a) - 4 \cos(2a) + 3)$$

$$\cos^2(a) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$$

$$\cos^3(a) = \frac{1}{4}(\cos(3a) + 3 \cos(a))$$

$$\cos^4(a) = \frac{1}{8}(\cos(4a) + 4 \cos(2a) + 3)$$