

# Physik

## Zusammenfassung an der OST

Fabian Suter, 18. Dezember 2024

<https://github.com/FabianSuter/Physik.git>

## 1 Statik

### 1.1 Schwerkraft (Gewichtskraft)

$$\text{Allgemein: } F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$\text{Erde: } F_G = G \cdot \frac{m_E \cdot m}{r_E^2} = m \cdot g$$

$F_G$	Gewichtskraft	$[F_G] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = \text{N}$
$G$	Gravitationskonstante	$6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$
$m_i$	Massen der Körper	$[m] = \text{kg}$
$r$	Abstand der Massen	$[r] = \text{m}$
$g$	Erdbeschleunigung	$9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$m_E$	Masse der Erde	$5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
$r_E$	Erdradius	$6.378 \cdot 10^6 \text{ m}$

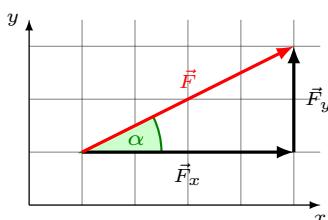
### 1.2 Normalkraft (Kontaktkraft)

(Sekundär-) Kraft, welche sich so anpasst, dass in Ruhe ein Kräftegleichgewicht herrscht:

$$F_G = -F_N \quad \Rightarrow \text{im Gleichgewicht auf horizontaler Oberfläche}$$

### 1.3 Zerlegung von Kräften

Kraftvektoren kann man komponentenweise aufteilen:



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_Z$$

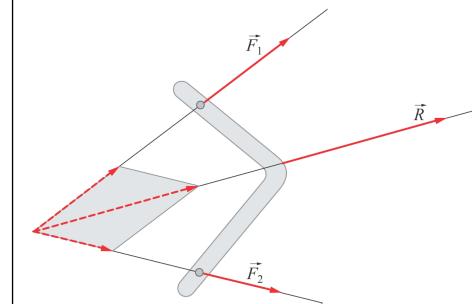
hilfreich beim Lösen von Aufgaben!

## 1.4 Gleichgewichtsbedingungen für Massepunkte

Der Massepunkt erfährt keine Beschleunigung  
⇒ Summe aller wirkenden Kräfte ist 0

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \text{komponentenweise}$$

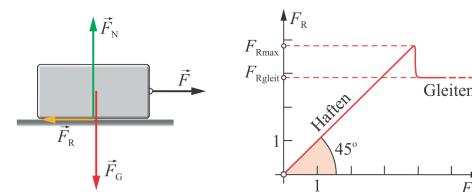
$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_x = \vec{0} \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_y = \vec{0} \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_z = \vec{0}$$



Dieses Verfahren kann auch mehrfach angewendet werden!

## 1.5 Haftriebung / Gleitreibung

### 1.5.1 Trockene Festkörperreibung



$$\text{Haftriebung: } \vec{F}_{R,max} = \mu_H \cdot \vec{F}_N$$

$$|\vec{F}_R| \leq |\vec{F}_{R,max}|$$

$$\text{Gleitreibung: } \vec{F}_{Gleit} \approx \mu_G \cdot \vec{F}_N$$

$\vec{F}_R$	Reibungskraft	$[\vec{F}_R] = \text{N}$
$\vec{F}_{R,max}$	Haftriebungskraft	$[\vec{F}_{R,max}] = \text{N}$
$\vec{F}_{Gleit}$	Gleitreibungskraft	$[\vec{F}_{Gleit}] = \text{N}$

### 1.5.2 Viskose Reibung

Sobald Schmiermittel zum Einsatz kommen, ist die Reibungskraft abhängig von der Grösse der Berührungsfläche:

Bei gleicher Normalkraft  $\vec{F}_N$  ist bei

- kleinerem Flächendruck die Reibung kleiner
- grösserem Flächendruck die Reibung grösser

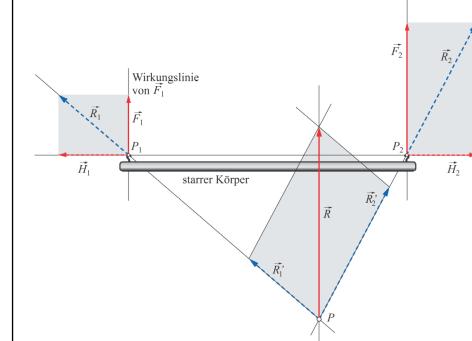
## 1.6 Starre Körper

- Ein starrer Körper wird durch angreifende Kräfte nicht deformiert
- Bei einem starren Körper kann die Kraft entlang ihrer Wirkungslinie beliebig verschoben werden

## 1.7 Addition von Kräften

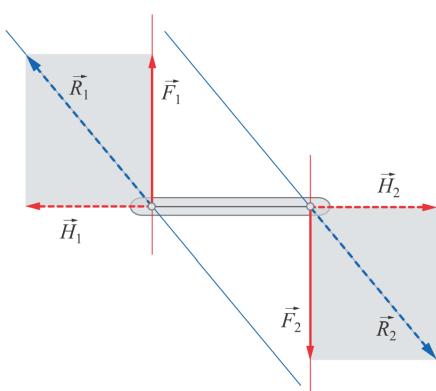
### 1.7.1 Spezialfall: Ebene Kräftegruppe für schiefe Wirkungslinie

Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie verschieben  
⇒ Im Schnittpunkt vektorielle Addition der Kräfte durchführen, um die resultierende Kraft zu erhalten.



### 1.7.3 Spezialfall: Ebene Kräftegruppe für parallel, entgegengesetz und gleich grosse Kräfte

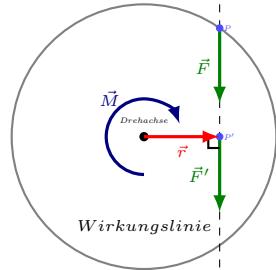
Kräftepaare können in andere Kräftepaare umgewandelt werden, aber niemals zu einer resultierenden Kraft R vereinfacht werden.



## 1.8 Drehmoment

Eine Drehwirkung auf einen starren Körper lässt sich auf zwei verschiedene Arten und Weisen erzeugen:

- Kräftepaar
- einzelne Kraft und Bezugspunkt (Drehzentrum)



$$\begin{aligned} \vec{M} & \text{ Drehmoment} & [M] &= \text{Nm} \\ \vec{r} & \text{ Abstandsvektor} & [r] &= \text{m} \\ \vec{F} & \text{ Angreifende Kraft} & [F] &= \text{N} \end{aligned}$$

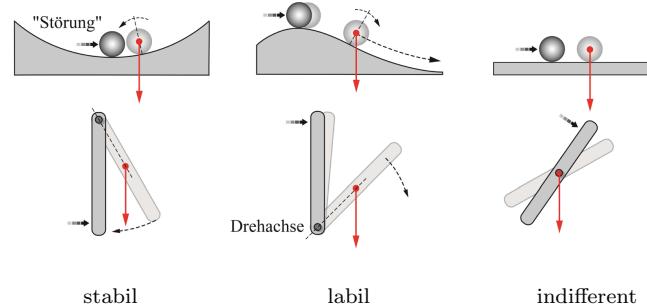
$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = a \cdot |\vec{F}|$$

Die Länge a muss **senkrecht** zur wirkenden Kraft sein!

## 1.9 Gleichgewichtsbedingungen für starre Körper

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad \sum_{i=1}^m \vec{M}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \text{komponentenweise}$$

## 1.10 Gleichgewichts-Arten



## 1.11 Deformierbare Körper

### 1.11.1 Spannungen

#### Zugspannung $\sigma$

senkrecht wirkende Kraft pro Flächeneinheit  
Wenn  $\sigma < 0$  spricht man von **Druck**

$$\sigma = \frac{F_{\perp}}{A} \quad [\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

#### Schubspannung $\tau$ (Scherung)

parallel wirkende Kraft pro Flächeneinheit

$$\tau = \frac{F_{\parallel}}{A} \quad [\tau] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

### 1.11.2 Dehnung $\epsilon$ (Hook'sches Gesetz)

$$\epsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma = \frac{1}{E} \cdot \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{\Delta l}{l}$$

$\epsilon$	Dehnung	$[\epsilon] = 1$
$E$	Elastizitätsmodul (Materialeigenschaft)	$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
$l$	Länge des Körpers vor Dehnung	$[l] = \text{m}$
$\Delta l$	Längenunterschied bei Dehnung	$[\Delta l] = \text{m}$
$\sigma$	Zugspannung	$[\sigma] = \text{N}$
$A$	Querschnittsfläche	$[A] = \text{m}^2$

⇒ Das Hook'sche Gesetz gilt nur, solange die Deformation linear-elastisch ist!

### 1.11.3 Querkontraktion $\epsilon_q$

Wird ein Stab gedehnt (länger), so wird er automatisch auch dünner

$$\epsilon_q = \frac{\Delta d}{d} = -\mu \epsilon \quad \mu \in (0; 0.5)$$

$\epsilon_q$	Querkontraktion	$[\epsilon_q] = 1$
$d$	Ursprüngliche Dicke des Materials	$[d] = \text{m}$
$\Delta d$	Dicken-Änderung	$[\Delta d] = \text{m}$
$\epsilon$	(Längs-) Dehnung	$[\epsilon] = 1$
$\mu$	Poisson-Zahl (Materialeigenschaft)	$[\mu] = 1$

### 1.11.4 Kompression $\frac{\Delta V}{V}$

Ein Körper wird von allen Seiten mit dem gleichen Druck belastet, sodass sich sein Volumen verkleinert

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \cdot \Delta p \quad (K = \frac{1}{\kappa})$$

$V$	Ursprüngliches Volumen des Körpers	$[V] = \text{m}^3$
$\Delta V$	Volumenänderung	$[\Delta V] = \text{m}^3$
$\kappa$	Kompressibilität	$[\kappa] = \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$
$\Delta p$	Druckänderung	$[\Delta p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$

$$\text{Würfel: } \Rightarrow \kappa = \frac{3}{E} (1 - 2\mu)$$

Völlig inkompressibler Körper:  $\kappa = 0$        $K = \infty$        $\mu = 0.5$

### 1.11.5 Schubbeanspruchung (Scherung)

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (\text{gilt für isotrope Materialien})$$

$\gamma$	Scherwinkel	$[\gamma] = {}^\circ$
$G$	Schubmodul; Gleitmodul; Torsionsmodul	$[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
$\tau$	Schubspannung	$[\tau] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
$E$	Elastizitätsmodul (Materialeigenschaft)	$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
$\mu$	Poisson-Zahl (Materialeigenschaft)	$[\mu] = 1$

### 1.11.6 Torsionsfeder

$$M = c \cdot \Phi \quad c = \frac{\pi G r^4}{2l}$$

$M$	Drehmoment	$[M] = \text{Nm}$
$c$	Auslenkkonstante	$[c] =$
$\Phi$	Auslenkwinkel	$[\Phi] = {}^\circ$
$G$	Schubmodul	$[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
$r$	Radius der Feder	$[r] = \text{m}$
$l$	Länge der Feder	$[l] = \text{m}$

### 1.11.7 Schraubenfeder

$$F = c \cdot \Delta l \quad c = \frac{Gr^4}{4nR^3}$$

$F$	Kraft	$[F] = \text{N}$
$c$	Auslenkkonstante	$[c] =$
$\Delta l$	Längenänderung	$[\Delta l] = \text{m}$
$G$	Schubmodul	$[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
$r$	Drahtradius der Feder	$[r] = \text{m}$
$R$	Windungsradius der Feder	$[R] = \text{m}$
$n$	Anzahl Windungen	$[n] =$

### 1.11.8 Zugfeder

$$F = k \cdot \Delta x = \frac{A \cdot E}{x_0} \cdot \Delta x$$

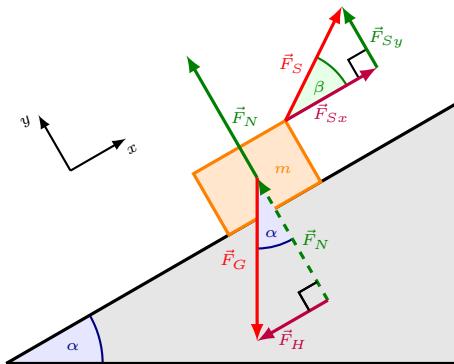
$F$	Kraft	$[F] = \text{N}$
$k$	Auslenkkonstante	$[k] =$
$\Delta x$	Längenänderung	$[\Delta x] = \text{m}$
$x_0$	Ruhelänge der Feder	$[x_0] = \text{m}$
$E$	Elastizitätsmodul (Materialeigenschaft)	$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
$A$	Querschnitt der Feder	$[A] = \text{m}^2$

## 1.11.9 Blattfeder

$$z = \frac{4l^3}{E \cdot b \cdot h^3} F$$

$F$	Kraft	$[F] = N$
$z$	Verbiegung	$[z] = m$
$l$	Längenänderung	$[l] = m$
$E$	Elastizitätsmodul	$[E] = \frac{N}{m^2}$
$b$	Breite des Querschnitts	$[b] = m$
$h$	Höhe des Querschnitts	$[h] = m$

## 1.12 Schiefe Ebene (mit Seil)



Wichtige Formeln und Zusammenhänge zur schiefen Ebene

$$F = m \cdot a \quad F_G = m \cdot g$$

$$F_N = m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \quad F_H = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

## 1.13 Rezept: Aufgaben zur Statik lösen

- Koordinatensystem festlegen
- Alle wirkenden Kräfte einzeichnen
- Bezugspunkt P (Drehpunkt) festlegen  
⇒ Da wo viele Kräfte (oder da wo sinnvoll)
- Kräfte komponentenweise aufschreiben:  $\sum \vec{F}_i = 0$
- Drehmomente M aufschreiben und gleichsetzen:  $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M}$

## 1.14 Abweichung Erdbeschleunigung

$$g(\phi, h) = 9.78032677 \cdot \frac{1 + 0.001931851 \cdot \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - 0.006694380 \cdot \sin^2 \phi}} - 3.086 \cdot 10^{-6} \cdot h$$

$g$	Erdbeschleunigung	$[g] = \frac{m}{s^2}$
$h$	Höhe über Meer	$[h] = m$
$\phi$	Breitengrad	$[\phi] = {}^\circ$

## 2 Kinematik

### 2.1 Geradlinige Bewegung (1D)

Die Bewegung erfolgt entlang einer Geraden (keine Richtungsänderung)

$$x(t) \quad \underbrace{\frac{d}{dt}}_{v(t)} \quad \underbrace{\frac{d}{dt}}_{a(t)} \quad x(t) \quad \underbrace{\int dt}_{v(t)} \quad \underbrace{\int dt}_{a(t)}$$

#### 2.1.1 Weg $x(t)$

Weg mit Zeit parametrisiert:  $x = x(t)$

#### 2.1.2 Geschwindigkeit $v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$$\text{momentane Geschw.: } \frac{d}{dt} x(t) = \dot{x}(t) \quad (\text{Tangente})$$

$$\text{mittlere Geschw.: } \bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (\text{Sekante})$$

#### 2.1.3 Beschleunigung $a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$$\text{momentane Beschleunigung: } \frac{d}{dt} v(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

$$\text{mittlere Beschleunigung: } \bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

#### 2.1.4 Ruck $j(t)$

Änderung der Beschleunigung pro Zeiteinheit:  $j(t) = \dot{a}(t) = \ddot{x}(t)$

### 2.2 Gleichförmige Bewegung $a(t) = 0$

$$a(t) = 0$$

$$v(t) = v_0 = \text{const}$$

$$x(t) = v_0 \cdot t + x_0$$

### 2.3 Gleichm. beschleunigte Bewegung $a(t) = \text{konst}$

Allgemein:

$$a(t) = a_0 = \text{const}$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

Anwendungsfall: Freier Fall

$$a(t) = -g = \text{const}$$

$$v(t) = -g \cdot t$$

$$x(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + h_0$$

#### 2.3.1 Höchsten Punkt $x_{max}$ finden (Extremum)

Im Extrempunkt gilt:  $\frac{d}{dt} x(t) = v(t) = 0$

$$0 = v(t_{max}) = -g \cdot t_{max} + v_0 \quad \Rightarrow t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

Durch einsetzen von  $t_{max}$  in  $x(t)$  erhält man die maximale Höhe:

$$x(t_{max}) = -\frac{1}{2} g \cdot t_{max}^2 + v_0 \cdot t_{max} + h_0 = -\frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0^2}{g} + h_0$$

## 2.4 Beliebige Bewegung (2D)

### 2.4.1 Geschwindigkeit (tangential zur Bahnkurve)

$$\text{momentane Geschw.: } \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \frac{d}{dt} \vec{r} = \dot{\vec{r}}$$

$$\text{mittlere Geschw.: } \bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\text{Betrag: } v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

### 2.4.2 Beschleunigung

$$\text{momentane Beschl.: } \vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\text{mittlere Beschl.: } \bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Die Beschleunigung kann ungleich null sein, auch wenn der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist

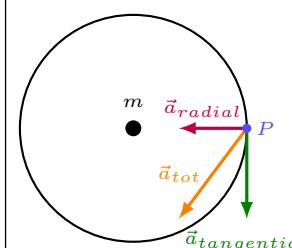
## 2.5 Bahnkurven

Die Geschwindigkeitsänderung in einer Bahnkurve wird in zwei Komponenten aufgeteilt:

$$\Delta \vec{v}_{\text{radial}} \text{ und } \Delta \vec{v}_{\text{tangential}}$$

Der tangentielle Anteil ändert ausschliesslich den Betrag der Geschwindigkeit  $|\vec{v}|$

Der radiale Anteil ändert ausschliesslich die Richtung der Geschwindigkeit  $\vec{v}$



$$a_{\text{tangential}} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

$$a_{\text{radial}} = \frac{v^2}{r}$$

$$F_{\text{zentripetal}} = m \frac{v^2}{r}$$

$$(F_{\text{zentri}})^2 + (F_{\text{bremsen}})^2 = (F_R)^2$$

Wenn  $a = 0 \Rightarrow F_{\text{Zentri}} = F_{\text{Haft}}$

### 2.6 Gleichförmige Bewegung $a_{\text{tangential}} = 0$

tangential (Tacho)

$$a_{\text{tangential}} = 0$$

$$v(t) = v_0 = \text{const}$$

$$s(t) = v_0 \cdot t + s_0$$

radial

$$a_{\text{radial}} = \frac{v^2}{r}$$

## 2.7 Gleichm. beschl. Bewegung $a_{tangential} = \text{konst}$

tangential (Tacho)

$$a_{tang} = a_0 = \text{const}$$

$$v(t) = a_{tang} \cdot t + v_0$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_{tang} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

radial

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = (\alpha \cdot t)^2 \cdot r$$

Die Gesamtbeschleunigung eines Systems  $\vec{a}_{tot} = \vec{a}_{tangential} + \vec{a}_{radial}$  muss nicht zwingend konstant sein! Bei Änderungen der Richtung ändert die Gesamtbeschleunigung.

## 2.8 Kreisbewegung

### 2.8.1 Winkel $\phi$ (zurückgelegter Weg)



### 2.8.2 Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\phi}{t}$

$$\omega := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$$

Der Betrag  $v$  der (Bahn-) Geschwindigkeit entspricht:  $v = r \cdot \omega$

Umlaufzeit, Periode  $T$

Umlaufzeit für vollständige Umdrehung

Drehzahl, Drehfrequenz  $f$       inverse Umlaufzeit  $f = \frac{1}{T}$

### Wichtige Umrechnungsformeln

$v = r \cdot \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{v}{r}$
$f = \frac{1}{T} \Leftrightarrow T = \frac{1}{f}$
$\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{f} \quad \omega = \frac{2\pi n}{60}$
$\omega = 2\pi f \Leftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \quad v = \frac{\pi d n}{60}$

### 2.8.3 Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{\omega}{t}$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\phi}{dt^2} \ddot{\phi}$$

$$a_{tangential} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} r \cdot \omega = r \cdot \alpha$$

## 2.9 Gleichförmige Kreisbewegung

$$\alpha(t) = 0$$

$$\omega(t) = \omega_0 = \text{const}$$

$$\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$$

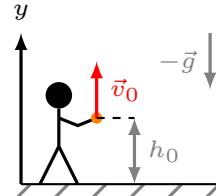
## 2.10 Gleichm. beschleunigte Kreisbewegung

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \text{const}$$

$$\omega(t) = \alpha_0 \cdot t + \omega_0$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \phi_0$$

## 2.11 Senkrechter Wurf



$$a = -g = \text{const}$$

$$v(t) = -g \cdot t + v_0$$

$$h(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0$$

### 2.11.1 Maximale Flughöhe $h_{max}$ bestimmen

Bei der maximalen Flughöhe  $h_{max}$  gilt:  $v(t) = 0$

$$v_0 - g \cdot t_{max} = 0 \Rightarrow t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

Nun wird  $t_{max}$  in  $h(t)$  eingesetzt:

$$h_{max} = h(t_{max}) = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} + v_0 \frac{v_0}{g} + h_0 = \frac{v_0^2}{2g} + h_0$$

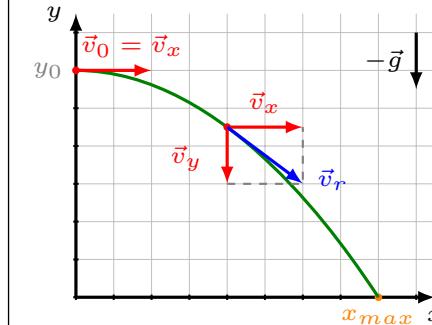
Hinweis: Die maximale Flughöhe kann auch über die potentielle und kinetische Energie berechnet werden!

$$E_{kin} = 0 \quad E_{pot} = m \cdot g \cdot h_{max}$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{m v^2}{2 m g} = \frac{v^2}{2g}$$

⇒ für abgeschlossene Systeme!

## 2.12 Horizontaler Wurf



Der horizontale Wurf muss komponentenweise beschrieben werden  
x-Achse: gleichförmige, unbeschleunigte Bewegung  
y-Achse: gleichmäßig beschleunigte Bewegung

x-Achse

$$a_x = 0$$

$$v_x = v_0$$

$$x = v_0 \cdot t + x_0$$

y-Achse

$$a_y = -g$$

$$v_y = -g \cdot t$$

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + y_0$$

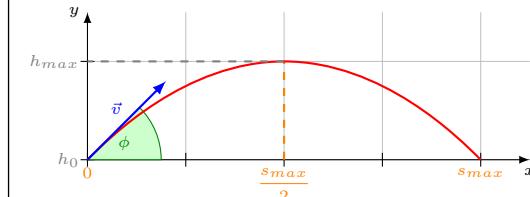
Tipp: Lege den Koordinatenursprung in den Abwurf-Ort

### 2.12.1 Beschreibung der Flugbahn (Eliminierung von $t$ )

Die y-Koordinate soll als Funktion der x-Koordinate ausgedrückt werden:  $y = f(x)$

$$x = v_0 t \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 = -\frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2} = y(x)$$

## 2.13 Schiefer Wurf



Der schiefe Wurf muss komponentenweise beschrieben werden  
x-Achse: gleichförmige, unbeschleunigte Bewegung  
y-Achse: gleichmäßig beschleunigte Bewegung

x-Achse

$$a_x = 0$$

$$v_x = v_0 \cdot \cos(\phi)$$

$$x = v_0 \cdot \cos(\phi) \cdot t + x_0$$

y-Achse

$$a_y = -g$$

$$v_y = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin(\phi)$$

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\phi) \cdot t + y_0$$

Tipp: Lege den Koordinatenursprung in den Abwurf-Ort

### 2.13.1 Beschreibung der Flugbahn (Eliminierung von $t$ )

Die  $y$ -Koordinate soll als Funktion der  $x$ -Koordinate ausgedrückt werden:  $y = f(x)$

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(\phi) \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\phi)}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2(\phi)} \cdot x^2 + \tan(\phi) \cdot x = y(x)$$

### 2.13.2 Ansätze zur Bestimmung von Extrema

$$\text{max. Wurfweite } s_{max} \quad y \stackrel{!}{=} 0 \quad (\phi \in \{45; 135\})$$

$$s_{max} = x_{max} \in \{0, \frac{2v_0^2}{g} \cos(\phi) \cdot \sin(\phi)\}$$

Elevationswinkel

$$\phi = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{g \cdot d}{v_0^2} \right) = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{g \cdot x_{max}}{v_0^2} \right)$$

max. Wurfhöhe

$$v_y \stackrel{!}{=} 0 \\ x_{maxHöhe} = h_{max} = s_{max} = \frac{x_{max}}{2} \\ y(x_{maxHöhe}) = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\phi)}{2g}$$

## 3 Dynamik

### 3.1 Newtonsche Gesetze

Gesetze, welche Bewegungen beschreiben.

#### 3.1.1 Erstes Newtonsches Gesetz: Trägheitsgesetz

Ein Körper verharrt in seine Zustand (Ruhe, gleichförmige geradlinige Bewegung), wenn er nicht durch eine Kraft gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Die **Trägheit** eines Körpers hängt von seiner (Trägheits-) Masse ab.

#### 3.1.2 Zweites Newtonsches Gesetz: Aktionsgesetz

$$\begin{array}{lll} \vec{F} & \text{Kraft} & [F] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N} \\ \vec{F} = m \cdot \vec{a} & m & (\text{Trägheits-}) \text{ Masse} \quad [m] = \text{kg} \\ & \vec{a} & \text{Beschleunigung} \quad [a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{array}$$

$\Rightarrow$  Anwendung erfolgt meist komponentenweise!

#### 3.1.3 Drittes Newtonsches Gesetz: Wechselwirkungsgesetz

Wirkt ein Körper A auf einen Körper B mit der Kraft  $\vec{F}_{AB}$ , so wirkt der Körper B auf A mit der Kraft  $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

## 3.2 Reibungskräfte

$$\text{Haftreibung: } \vec{F}_{R,max} = \mu_H \cdot \vec{F}_N \Rightarrow \text{treibende Kraft}$$

$$\text{Gleitreibung: } \vec{F}_{Gleit} \approx \mu_G \cdot \vec{F}_N$$

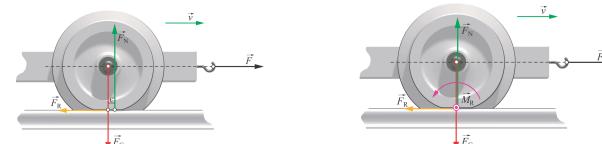
$$\text{Rollreibung: } \vec{F}_{Roll} \approx \mu_R \cdot \vec{F}_N \Rightarrow \text{bremsende Kraft}$$

$$\vec{F}_R \quad \text{Reibungskraft} \quad [\vec{F}_R] = \text{N}$$

$$\vec{F}_{R,max} \quad \text{Haftreibungskraft} \quad [\vec{F}_{R,max}] = \text{N}$$

$$\vec{F}_{Gleit} \quad \text{Gleitreibungskraft} \quad [\vec{F}_{Gleit}] = \text{N}$$

## 3.3 Rollreibungslänge e (Drehmoment)

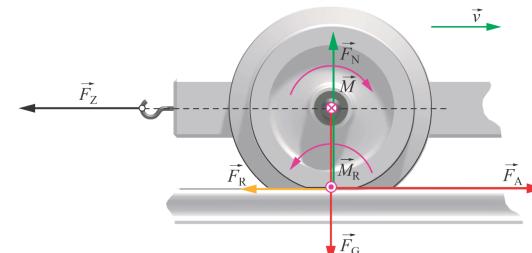


$$e = \frac{r \cdot F}{F_N} = \frac{r \cdot F_R}{F_N} = \frac{r \cdot \mu_R \cdot F_R}{F_N} = \mu_R \cdot r$$

$$M_R = e \cdot F_N = \mu_R \cdot r \cdot F_N = r \cdot F_R = r \cdot F$$

$e$	Rollreibungslänge	$[e] = \text{m}$
$r$	Radius des Rades	$[r] = \text{m}$
$F_R$	Rollreibungskraft	$[F_R] = \text{N}$
$F_N$	Normalkraft	$[F_N] = \text{N}$
$\mu_R$	Rollreibungskoeffizient	$[\mu_R] = 1$
$M_R$	Rollreibungsmoment	$[M_R] = \text{Nm}$

## 3.4 Angetriebenes Rad



$$\vec{F}_Z \quad \text{Zugkraft} \quad [F_Z] = \text{N}$$

$$\vec{F}_N \quad \text{Normalkraft} \quad [F_N] = \text{N}$$

$$\vec{F}_R \quad \text{Rollreibungskraft} \quad [F_R] = \text{N}$$

$$\vec{F}_A \quad \text{Haftreibungskraft} \quad [F_A] = \text{N}$$

### 3.4.1 Hinweise zu Reibung an Rädern

- Jedes Rad weist Rollreibung auf
- Zusätzlich zur Rollreibung weist ein angetriebenes Rad eine Haftreibung auf

## 3.5 Arbeit und Energie

### 3.5.1 Arbeit

Wird der Angriffspunkt einer Kraft  $\vec{F}$  um die Strecke  $d\vec{s}$  verschoben so leistet die Kraft die Arbeit  $W$

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} \quad (\text{Skalarprodukt})$$

Wenn die projizierte Kraft konstant ist:  $W = F \bullet s_{AB}$

$$\begin{array}{lll} W & \text{Arbeit} & [W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \\ F & \text{Kraft} & [F] = \text{N} \\ s & \text{Weg} & [s] = \text{m} \end{array}$$

### 3.5.2 Potentielle Energie $W_{pot}$

Beim Anheben eines Körpers gewinnt der Körper an potentieller Energie (Lageenergie)

$$W_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

$$\begin{array}{lll} W_{pot} & \text{Potentielle Energie} & [W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \\ m & \text{Masse des Körpers} & [m] = \text{kg} \\ g & \text{Erdbeschleunigung} & [g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ h & \text{Höhe der Körpers} & [h] = \text{m} \end{array}$$

### Beispiel: Spannen einer Feder

Federkraft als Funktion der Auslenkung  $x$   $F = -k \cdot x$

$$W_{pot} = \int_0^{x_0} -F \bullet d\vec{x} = \int_0^{x_0} k \cdot x \, dx = \frac{1}{2} k \cdot \Delta x^2$$

$$\begin{array}{lll} W_{pot} & \text{Potentielle Energie} & [W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \\ F & \text{Federkraft} & [F] = \text{N} \\ k & \text{Federkonstante} & [k] = \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ \Delta x & \text{Auslenkung der Feder} & [\Delta x] = \text{m} \end{array}$$

### 3.5.3 Kinetische Energie $W_{kin}$

$$W_{kin} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} = F \bullet s_{AB} = m \cdot a \cdot \frac{1}{2} t^2 = m \cdot \frac{a^2 \cdot t^2}{2} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$W_{kin}$	Kinetische Energie	$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$
$F$	Kraft	$[F] = \text{N}$
$s$	Wegstück (Kinematik)	$[s] = \text{m}$
$m$	Masse des Körpers	$[m] = \text{kg}$
$a$	Beschleunigung (Kinematik)	$[a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$v$	Geschwindigkeit (Kinematik)	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

### 3.6 Energieerhaltung (in abgeschlossenen Systemen)

Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ist unveränderlich!

**abgeschlossen:** Es wird keine Masse hinzugefügt/entfernt und es wirken keine äusseren Kräfte!

$$W = \underbrace{m \cdot g \cdot h}_{\text{pot. Energie}} = m \cdot g \cdot \underbrace{\frac{1}{2} g \cdot t^2}_{h(t)} = \underbrace{\frac{1}{2} m \cdot v^2}_{\text{kin. Energie}}$$

Für nicht abgeschlossene Systeme kann eine Bilanzrechnung aufgestellt werden:

Die Energiezunahme im Gesamtsystem entspricht der von aussen zugeführten Energie.

Die Energieabnahme im Gesamtsystem entspricht der von aussen entzogenen Energie.

### 3.6.1 Energiesatz der Mechanik

$$E_{pot} + E_{kin} = E_{tot} = \text{const} \quad (\text{gilt zu jedem Zeitpunkt})$$

### 3.7 Leistung und Wirkungsgrad

#### 3.7.1 Leistung

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \bullet \Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

$P$	Leistung	$[P] = \text{W} = \frac{\text{J}}{\text{s}}$
$\Delta W$	geleistete Arbeit	$[W] = \text{J}$
$\Delta t$	verstrichene Zeit	$[t] = \text{s}$
$F$	Kraft	$[F] = \text{N}$
$\Delta s$	Wegstück	$[s] = \text{m}$

#### Pferdestärken

$$1 \text{ PS} = 75 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 735.5 \text{ W}$$

### 3.7.2 Wirkungsgrad $\eta$

Faustregel: Je grösser eine Maschine, desto besser ihr Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} \quad \eta < 1 \quad [\eta] = 1$$

### 3.8 Impuls $\vec{p}$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

2. Newton'sches Gesetz allgemeingültiger (relativistisch):

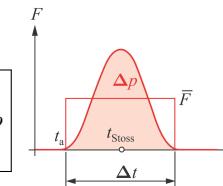
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d \vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{v}) = \frac{d \vec{p}}{dt}$$

$\vec{p}$	Impuls	$[\vec{p}] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$
$m$	Masse	$[m] = \text{kg}$
$\vec{v}$	Geschwindigkeit	$[\vec{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$F$	Kraft	$[F] = \text{N}$
$\vec{a}$	Beschleunigung	$[\vec{a}] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

#### 3.8.1 Kraftstoss $\Delta p$

Ein Kraftstoss entspricht einer Impulsänderung und kann über die mittlere Kraft beschrieben werden.

$$\int_{t_a}^{t_a + \Delta t} F(t) dt = \bar{F} \cdot \Delta t = \Delta p = p' - p$$



$F(t)$	Kraftverlauf	$[F] = \text{N}$
$\bar{F}$	mittlere Kraft	$[\bar{F}] = \text{N}$
$\Delta t$	Zeitdauer des Kraftstosses	$[\Delta t] = \text{s}$
$\Delta p$	Impulsänderung	$[\Delta p] = \text{Ns}$
$p$	Impuls vor dem Stoss	$[p] = \text{Ns}$
$p'$	Impuls nach dem Stoss	$[p'] = \text{Ns}$
$\vec{a}$	Beschleunigung	$[\vec{a}] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

### 3.9 Impulserhaltungssatz (Impulssatz)

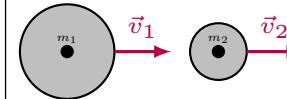
In einem **abgeschlossenen System** bleibt der Gesamtimpuls konstant  
abgeschlossenes System: es wirken keine externen Kräfte

$$\vec{p} = \int \underbrace{\frac{d \vec{p}}{dt}}_{F_{\text{außen}}=0} dt = c = \text{const}$$

### 3.10 Stösse

$$\text{Elastizitätszahl: } k = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} = -\frac{v'_{rel}}{v_{rel}} \geq 0$$

$$\text{Deformationsarbeit: } Q = (E_1 + E_2) - (E'_1 + E'_2) \geq 0$$



#### 3.10.1 Gerader, zentraler, total elastischer Stoss

Die beiden Stosspartner verformen sich nicht!

⇒ Für die Deformationsarbeit gilt:  $Q = 0$

$$\text{Impulssatz: } p \stackrel{!}{=} p' \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 \stackrel{!}{=} m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$\text{Energiesatz: } E_{kin} \stackrel{!}{=} E'_{kin} \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \\ v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \\ v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

#### 3.10.2 Gerader, zentraler, total inelastischer Stoss

Die beiden Stosspartner haften nach dem Stoss aneinander und haben die gleiche Geschwindigkeit.

⇒ Für die Deformationsarbeit gilt:  $Q \neq 0$

$$\text{Impulssatz: } p \stackrel{!}{=} p' \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 \stackrel{!}{=} (m_1 + m_2) v'$$

$$\text{Energiesatz: } E_{kin} \stackrel{!}{=} E'_{kin} \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 + Q$$

$$\text{Deformationsarbeit: } Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} \mu \cdot v_{rel}^2$$

$$\text{Relativgeschw.: } v_{rel} := |v_1 - v_2|$$

$$\text{Reduzierte Masse: } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

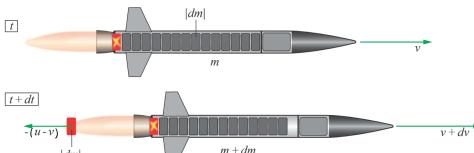
$k$	Elastizitätszahl	$[k] = 1$
$E_1, E_2$	Energien vor Stoss	$[E] = \text{J}$
$E'_1, E'_2$	Energien nach Stoss	$[E'] = \text{J}$
$m_1, m_2$	stossende Massen	$[m] = \text{kg}$
$v_1, v_2$	Geschwindigkeit vor Stoss	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$v'_1, v'_2$	Geschwindigkeit nach Stoss	$[v'] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$Q$	Deformationsarbeit	$[Q] = \text{J}$
$v_{rel}$	Relativgeschwindigkeit	$[v_{rel}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$\mu$	reduzierte Masse	$[\mu] = \text{kg}$

## 3.11 Rakete

### 3.11.1 Rakete im Flug

⇒ Masse ist hier veränderbar!  $m(t) = m = m_{Start} - \mu \cdot t$

Die Rakete verliert an Treibstoff, wodurch die Masse der Rakete abnimmt ( $dm < 0$ )



$$\text{Impulssatz: } m \cdot v(t) = (m+dm)(v(t)+dv) + dm(u-v) \quad dm < 0$$

$$\text{Raketengleichung: } v(t) = -u \cdot \ln(m) + v_0 + u \cdot \ln(m_0) = v_0 + u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

$$\text{Massenverhältnis: } \frac{\text{Startmasse}}{\text{Endmasse}}$$

$$\text{max. Geschwindigkeitsänderung: } \Delta v = v - v_0 = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

$$\text{Schubkraft: } F_{Schub} = \frac{dp}{dt} = -\frac{u \cdot dm}{dt} = \frac{dm}{dt}(-u) = \mu \cdot u$$

⇒ Hier wurde noch keine Erdbeschleunigung (Anziehung) berücksichtigt!

$u$	Strahlgeschwindigkeit der Rakete	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$m$	Zeitlich veränderbare Masse $m(t)$	$[m] = \text{kg}$
$m_0$	Masse zum Startzeitpunkt	$[m] = \text{kg}$
$v_0$	Startgeschwindigkeit	$[v_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$F_{Schub}$	Schubkraft der Rakete	$[F_{Schub}] = \text{N}$
$\mu$	Treibstoffverbrauch pro Zeit	$[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$

### 3.11.2 Aufstieg der Rakete im Schwerefeld

Konstante Erdbeschleunigung  $g$  wird berücksichtigt

$$\text{Veränderbare Masse: } m(t) = m = m_{Start} - \mu \cdot t$$

$$\text{Gesamtkraft: } m(t) \frac{dv}{dt} = m(t) \cdot a = F_{Schub} - F_G = \mu \cdot u - m \cdot g$$

$$\text{Beschleunigung: } a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{\mu \cdot u}{m_0 - \mu \cdot t} - g$$

$$\text{Raketengleichung: } v(t) = u \cdot \ln\left(\frac{m_{Start}}{m(t)}\right) - g \cdot t$$

$$\text{Spezifischer Impuls: } T = \frac{m(t)}{\mu} = \frac{u}{g}$$

$$\text{Steighöhe: } h_t = u \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 - \frac{u}{\mu} \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_t}\right) \cdot m_t$$

$u$	Strahlgeschwindigkeit der Rakete	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$m$	Zeitlich veränderbare Masse $m(t)$	$[m] = \text{kg}$
$m_0$	Masse zum Startzeitpunkt	$[m] = \text{kg}$
$v_0$	Startgeschwindigkeit	$[v_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$g$	Erdbeschleunigung	$[g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$\mu$	Treibstoffverbrauch pro Zeit	$[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$
$T$	spezifischer Impuls (Zeit von konstantem Schub)	$[T] = \text{s}$

### 3.12.5 Gravitationswirkung innerhalb einer Kugel

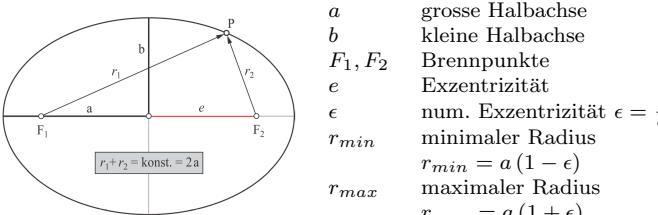
$$F_G = G \frac{m_{Kern}(r) m}{r^2} = G \frac{4\pi r^3 \rho m}{3r^2} = \frac{4\pi}{3} G \rho m r$$

$F_G$	Gravitationskraft	$[F_G] = \text{N}$
$G$	Gravitationskonstante	$[G] = \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$
$r$	Radius (Abstand vom Zentrum)	$[r] = \text{m}$
$\rho$	homogene Dichte der Kugel	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$m$	Masse vom Massepunkt	$[m] = \text{kg}$
$m_{Kern}$	Masse des Kugelkerns	$[m_{Kern}] = \text{kg}$

## 3.12 Gravitation

### 3.12.1 Erstes Kepler'sches Gesetz

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren Brennpunkt sich die Sonne befindet.



$a$	große Halbachse
$b$	kleine Halbachse
$F_1, F_2$	Brennpunkte
$e$	Exzentrizität
$\epsilon$	num. Exzentrizität $\epsilon = \frac{e}{a}$
$r_{min}$	minimaler Radius
$r_{max}$	maximaler Radius

### 3.12.2 Zweites Kepler'sches Gesetz

Der Fahrstrahl der Planeten überstreicht in der gleichen Zeit die gleiche Fläche.  
⇒ Bei kleinerem Abstand zur Sonne ist die Geschwindigkeit schneller!

### 3.12.3 Drittes Kepler'sches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der grossen Halbachsen.

$$a = \left(\frac{T}{T_{ref}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot a_{ref} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{a_{ref}}\right)^3 = \left(\frac{T}{T_{ref}}\right)^2$$

Als Referenz wird die Erde verwendet!

Astronomische Einheit:  $a_{ref} = 1 \text{ AE} = 149.6 \cdot 10^6 \text{ km}$

Referenzzeit:  $T_{ref} = 1 \text{ a} = 1 \text{ Jahr}$

$a$	große Halbachse gesuchter Planet	$[a] = \text{AE}$
$a_{ref}$	große Halbachse Erde	$[a_{ref}] = \text{AE}$
$T$	Umlaufzeit Planet	$[T] = \text{Jahre}$
$T_{ref}$	Umlaufzeit Erde	$[T] = \text{Jahre}$

### 3.12.4 Gravitationsgesetz

$$\text{Gravitationskraft: } F_G = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \text{mit } G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

### 3.12.6 Gravitationswirkung außerhalb einer Kugel

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$F_G$	Gravitationskraft	$[F_G] = \text{N}$
$G$	Gravitationskonstante	$[G] = \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$
$r$	Radius (Abstand vom Zentrum)	$[r] = \text{m}$
$m$	Masse vom Massepunkt	$[m] = \text{kg}$
$M$	Gesamtmasse der Kugel	$[M] = \text{kg}$

### 3.12.7 Gravitationspotential $\phi$

Wenn eine Masse in einem Gravitationsfeld bewegt wird, so wird Arbeit verrichtet.

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_G \bullet d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} G \cdot M \cdot m \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) dr$$

$$\text{potentielle Energie: } E_{pot}(r) = -G \frac{M m}{r}$$

$$\text{Gravitationspotential: } \phi = \frac{E_{pot}}{m} = -\frac{G \cdot M}{r}$$

Im Inneren eines homogenen Zentralkörpers gilt

$$F_G = \frac{4\pi \cdot G \cdot \rho \cdot m \cdot r}{3}$$

$$E_{pot} = -\frac{2\pi \cdot G \cdot \rho \cdot m}{3} r^2 + c'$$

$$\phi = -\frac{2\pi \cdot G \cdot \rho}{3} r^2 + c = -\frac{G \cdot M(r)}{2r} + c = -\frac{G \cdot M(r)}{2r} - \frac{G \cdot M}{2R}$$

$W$	Arbeit	$[W] = \text{J}$
$F_G$	Gravitationskraft	$[F_G] = \text{N}$
$E_{pot}$	potentielle Energie	$E_{pot} = \text{J}$
$G$	Gravitationskonstante	$[G] = \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$
$r$	Radius (Abstand vom Zentrum)	$[r] = \text{m}$
$\rho$	homogene Dichte der Kugel	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$m$	Masse vom Massepunkt	$[m] = \text{kg}$
$M$	Gesamtmasse der Kugel	$[M] = \text{kg}$
$R$	Radius der Kugeloberfläche	$[R] = \text{m}$

## 3.13 Bezugssysteme: Inertialsystem

Inertialsystem: unbeschleunigtes Bezugssystem

Wenn die Newton'schen Gesetze im Bezugssystem S gelten, so gelten sie auch im Bezugssystem S', solange dieses nicht beschleunigt ist und nicht rotiert.

⇒ In sämtlichen Inertialsystemen sind die mechanischen Gesetze identisch!

### 3.13.1 Galilei-Transformation

Bezugssystem S' bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0$ :

$$v_0 = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Transformation zwischen S und S'

$$\begin{aligned} x &= x' + v_x t \\ y &= y' + v_y t \\ z &= z' + v_z t \\ t &= t' \end{aligned}$$

## 3.14 Beschleunigte Bezugssysteme

In beschleunigten Bezugssystemen müssen Trägheitskräfte berücksichtigt werden!

### 3.14.1 Translatorisch beschleunigtes Bezugssystem

Beispiel: Zug beschleunigt auf gerader Schiene

Für einen Beobachter im beschleunigten System S' wirkt eine Trägheitskraft:

$$\text{Gesamtkraft: } \vec{F}' = \vec{F} - m \cdot \vec{a}_0 = \vec{F} + \vec{F}_{Trägheit}$$

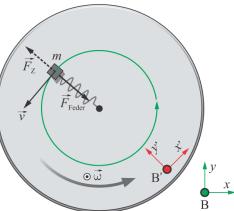
$\vec{F}'$	Gesamte im System wirkende Kraft	$[\vec{F}'] = \text{N}$
$\vec{F}$	Statisch wirkende Kräfte	$[\vec{F}] = \text{N}$
$\vec{F}_{Trägheit}$	Trägheitskraft	$[\vec{F}_{Trägheit}] = \text{N}$
$m$	Masse im System	$[m] = \text{kg}$
$\vec{a}_0$	Beschleunigung des Systems	$[\vec{a}_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

### 3.14.2 Gleichförmig rotierendes Bezugssystem (Scheinkräfte)

Fest verbundene Masse ⇒ Scheinkraft: Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_z = -m \cdot \vec{a}_z = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$$

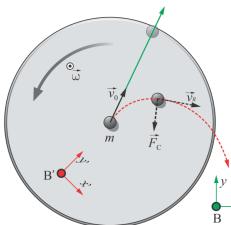
$$\vec{F}_{Zentrifugal} = -\vec{F}_{Zentripetal}$$



$\vec{F}_z$	Zentrifugalkraft (Trägheitskraft; Scheinkraft)	$[\vec{F}_z] = \text{N}$
$m$	Masse im System	$[m] = \text{kg}$
$\vec{a}_z$	Beschleunigung des Systems ( $a_{radial}$ )	$[\vec{a}_z] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\vec{r}$	Radius des Systems (nach innen zeigend)	$[\vec{r}] = \text{m}$

lose Masse ⇒ Scheinkraft: Corioliskraft

$$\vec{F}_c = -m \cdot \vec{a}_c = -m \cdot 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_R)$$



$\vec{F}_c$	Corioliskraft (Trägheitskraft; Scheinkraft)	$[\vec{F}_c] = \text{N}$
$m$	Masse im System	$[m] = \text{kg}$
$\vec{a}_c$	Coriolisbeschleunigung	$[\vec{a}_c] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\vec{v}_R$	Relativgeschwindigkeit	$[\vec{v}_R] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

### 3.14.3 D'Alembert'sches Prinzip

Wird ein Körper in einem mitbewegten Koordinatensystem betrachtet, so bleibt er in Ruhe:  $\vec{v}_R = 0$  und  $\vec{a}_R = 0$

$$\vec{F} + \underbrace{\vec{F}_z + \vec{F}_c}_{\text{Scheinkräfte}} = \vec{0}$$

⇒ Statisches Gleichgewichtsproblem

## 3.15 Rotation starrer Körper

Rotation:	Drehung um feste Achse
Kreisel:	Drehung um starren Punkt
Kreiselbewegung	Drehung eines völlig freien, starren Körpers um seinen Schwerpunkt

### 3.15.1 Dynamisches Grundgesetz der Rotation

Es ist nur die tangentiale Komponente der Kraft (des Drehmoments) eines rotierenden Körpers relevant!

$$dM_t = r \cdot dF_t = r \cdot dm \cdot a_t = dm \cdot r^2 \cdot \alpha$$

$$M = \int dM = \int r^2 \alpha \cdot dm = \alpha \underbrace{\int r^2 \cdot dm}_{J_{Scheibe} = m \cdot r^2}$$

$$\Rightarrow M = J \cdot \alpha = r \cdot F$$

$dM_t$	kleine Tan.-Komponente des Drehmoments	$[dM_t] = \text{Nm}$
$M$	(gesamtes) Drehmoment	$[M] = \text{Nm}$
$dF_t$	kleine Tangentialkomponente der Kraft	$[dF_t] = \text{N}$
$r$	Abstand Drehachse zu Massepunkt (Rand)	$[r] = \text{m}$
$dm$	kleines Massestück des Körpers	$dm = \text{kg}$
$a_t$	Tangentialbeschleunigung ( $a_t = r \cdot \alpha$ )	$[a_t] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$\alpha$	Winkelbeschleunigung	$[\alpha] = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$
$J$	(Massen-) Trägheitsmoment	$[J] = \text{kg m}^2$

### 3.15.2 Massenträgheitsmomente

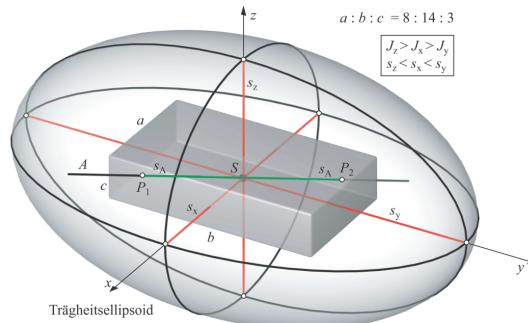
Körper	Trägheitsmoment
Vollzylinder	$\frac{mr^2}{2}$
Hohlzylinder	$\frac{m(r_a^2 + r_i^2)}{2}$
Kugel	$\frac{2}{5}mr^2$
Quader	$\frac{m(a^2 + b^2 + c^2)}{12}$
Ring:	$m \cdot r^2$

## 3.16 Trägheitsellipsoid

Trägheitsradius  $r_0$ : als ob ganze Masse eines Körpers nur einen Radius hätte

$$r_0 = \sqrt{\frac{J}{m}}$$

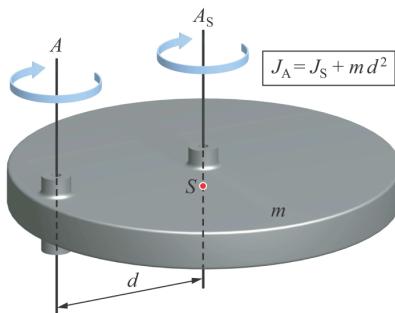
$r_0$	Trägheitsradius	$[r_0] = \text{m}$
$m$	Masse des Körpers	$[m] = \text{kg}$
$J$	(Massen-) Trägheitsmoment	$[J] = \text{kg m}^2$
$s_0$	reziproker Trägheitsradius	$[s_0] = \text{m}$



Hauptträgheits-Achsen (entsprechen immer Symmetrie-Achsen, falls vorhanden)  
beliebige Achse  $J_A$   $J_A = J_x \cdot \cos^2(\alpha) + J_y \cdot \cos^2(\beta) + J_z \cdot \cos^2(\gamma)$

## 3.17 Satz von Steiner

Beschreibt, wie man das Trägheitsmoment  $J$  berechnet, wenn die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt des rotierenden Körpers geht, sondern parallel dazu verläuft.



$J_S$	Trägheitsmoment (Rot. um Schwerp.)	$[J_S] = \text{kg m}^2$
$J_A$	Trägheitsmoment (Rot. um bel. Punkt)	$[J_A] = \text{kg m}^2$
$m$	Masse des Körpers	$[m] = \text{kg}$
$d$	Abstand zum Schwerpunkt	$[d] = \text{m}$

## 3.18 Arbeit und Leistung (Rotation)

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{s} = F_t \cdot ds = F_t \cdot r \cdot d\phi = M \cdot d\phi$$

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\phi}{dt} = M \cdot \omega$$

$F_t$	Tantentialer Kraftanteil der Rotation	$[F_t] = N$
$d\phi$	zurückgelegter Kreiswinkel	$[d\phi] = \text{rad}$
$P$	Leistung	$[P] = W$
$W$	Energie	$[W] = J$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$M$	Drehmoment	$[M] = \text{Nm}$

## 3.19 Rotationsenergie

Folgendes gilt nur für die Rotation um den Schwerpunkt eines Körpers!

Die totale kinetische Energie ist die Summe aller kinetischer Energien eines Körpers

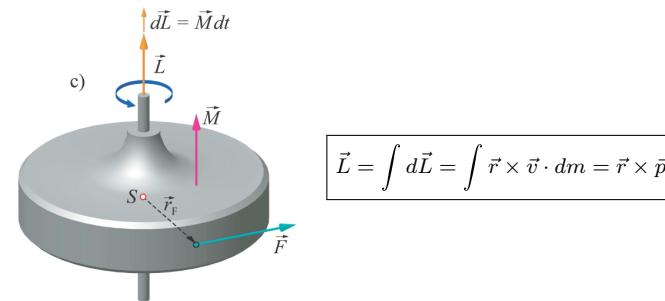
$$E_{kin} = \int \frac{1}{2} v^2 dm = E_{trans} + E_{rot}$$

$$E_{trans} = \frac{1}{2} m \cdot v_s^2$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J_s \cdot \omega^2$$

$E_{trans}$	Translationsenergie des Schwerpunkts	$[E_{trans}] = \text{J}$
$m$	Masse des Körpers	$[m] = \text{kg}$
$v_s$	Geschwindigkeit des Schwerpunkts	$[v_s] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$E_{rot}$	Rotationsenergie	$[E_{rot}] = \text{J}$
$J_s$	Trägheitsmoment (Rot. um Schwerp.)	$[J_s] = \text{kg m}^2$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

## 3.20 Drehimpuls $\vec{L}$ / Impulserhaltung (Rotation)



$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} \cdot dm = \vec{r} \times \vec{p}$$

$\vec{L}$  Drehimpuls

$\vec{r}$  Abstand Massenpunkt zu Rot-Achse

$[\vec{L}] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$

$[\vec{r}] = \text{m}$

$\vec{v}$  Rotationsgeschwindigkeit

$[\vec{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$dm$  kleines Masse-Stück

$[dm] = \text{kg}$

$\vec{p}$  Impuls

$[\vec{p}] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$

## 3.21 Rotation vs. Translation

Drehbewegung	$\Delta\theta$	$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	Lineare Bewegung
Winkelgeschwindigkeit	$\omega$			Verschiebung
Winkelbeschleunigung	$\alpha$			Geschwindigkeit
Gleichungen für den Fall konstanter Winkelbeschleunigung	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\Delta\theta = (\omega) \Delta t$ $\langle \omega \rangle = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha \Delta\theta$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\Delta\theta = (\omega) \Delta t$ $\langle \omega \rangle = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha \Delta\theta$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	$v = \frac{dx}{dt}$ $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
Drehmoment	$M$			Beschleunigung
Trägheitsmoment	$I$			$v = v_0 + at$ $\Delta x = \langle v \rangle \Delta t$ $\langle v \rangle = \frac{1}{2}(v_0 + v)$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ $v^2 = v_0^2 + 2 a \Delta x$
Arbeit		$dW = M d\theta$		$Gleichungen für den Fall konstanter Beschleunigung$
Kinetische Energie		$E_{kin} = \frac{1}{2} I \omega^2$		
Leistung		$P = M \omega$		
Drehimpuls		$L = I \omega$		
Zweites Newton'sches Axiom		$M_{ext} = I \alpha = \frac{dL}{dt}$		

## 4 Hydrostatik

### 4.1 Festkörper, Flüssigkeit, Gas

#### 4.1.1 Festkörper

- kein Fluid
- festes Volumen; feste Gestalt
- Moleküle / Atome befinden sich in regelmässiger Gitter-Anordnung
- inkompressibel (sehr schlecht komprimierbar)
- Kraft: Weiterleitung (längs ihrer Wirkungslinie)
- Druck: Verstärkung

#### 4.1.2 ideale Flüssigkeit

- Fluid
- festes Volumen; keine feste Gestalt
- Moleküle / Atome bewegen sich chaotisch aneinander vorbei
- Moleküle / Atome füllen den Raum aus / berühren sich
- inkompressibel (schlecht komprimierbar)
- reibungsfrei (keine Scherkräfte)
- Kraft: Verstärkung
- Druck: Weiterleitung (gleichmässig)

#### 4.1.3 Gas

- Fluid
- kein festes Volumen; keine feste Gestalt
- Moleküle / Atome fliegen mit hoher Geschwindigkeit durch den Raum
- Es gibt sehr viel Zwischenraum
- Moleküle / Atome führen bei Zusammenstoss unter sich oder mit Gefäßwand elestische Stöße aus
- kompressibel (gut komprimierbar)
- reibungsfrei (keine Scherkräfte)

## 4.2 Druck $p$ / Schubspannung $\tau$

Druck ist eine skalare Grösse (hat keine Richtung)

$$p = \frac{F_{\perp}}{A}$$

$$\tau = \frac{F_{\parallel}}{A}$$

$p$	Druck	$[p] = \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
$\tau$	Schubspannung (Scherkraft)	$[\tau] = \text{N}$
$F_{\perp}$	Kraft senkrecht zu A	$[F_{\perp}] = \text{N}$
$F_{\parallel}$	Kraft parallel zu A	$[F_{\parallel}] = \text{N}$
A	Fläche	$[A] = \text{m}^2$

In abgeschlossenen, miteinander verbundenen Systemen herrscht ein Druck-Gleichgewicht!

$$p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

### 4.2.1 Weitere Einheiten von Druck

- 1 bar =  $10^5$  Pa (Absolutdruck: Vergleich zu Vakuum)  
 1 hPa = 100 Pa = 1 mbar  
 1 at =  $1 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2} = 9.81 \cdot 10^4$  Pa  
 1 atü = 1 at (Überdruck; Vergleich zu normalem Luftdruck)  
 1 Torr =  $\frac{1}{760}$  at (1mm-Hg-Säule)  
 1 psi = 6894.76 Pa (Britisch)

## 4.3 Kompression

$$\text{Flüssigkeiten: } \Delta p = \frac{1}{\kappa} \cdot -\frac{\Delta V}{V} = K \cdot -\frac{\Delta V}{V}$$

$$\text{Gase: } \Delta p = p(h) - p_0 = \frac{1}{\kappa_T} \cdot -\frac{\Delta V}{V}$$

$\Delta p$	Druckerhöhung	$[\Delta p] = \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
$\kappa$	Kompressibilität (Flüssigkeit)	$[\kappa] = \frac{1}{\text{Pa}}$
$K = \frac{1}{\kappa}$	Kompressionsmodul	$[K] = \text{Pa}$
$\kappa_T$	Kompressibilität (Gas)	$[\kappa_T] = \frac{1}{\text{Pa}}$
$-\frac{\Delta V}{V}$	realtive Volumen-Abnahme	$[\frac{\Delta V}{V}] = 1$

## 4.4 Dichte $\rho$

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Leftrightarrow \quad m = \rho \cdot V$$

$$\begin{array}{ll} \rho & \text{Dichte} \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ m & \text{Masse} \quad [m] = \text{kg} \\ V & \text{Volumen} \quad [V] = \text{m}^3 \end{array}$$

#### 4.4.1 Wichtige Dichten

$$\begin{array}{ll} \rho_{Wasser} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ \rho_{Luft} = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{array}$$

## 4.5 Boyle-Mariotte

Das Gesetz von Boyle-Mariotte beschreibt die Kompressibilität von Gasen.  
 ⇒ Das Gesetz gilt nur bei konstanter Temperatur!

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$\begin{array}{ll} \rho_x & \text{Gas-Dichte} \quad [\rho_x] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ p_x & \text{Gas-Druck} \quad [p_x] = \text{Pa} \\ V_x & \text{Volumen} \quad [V_x] = \text{m}^3 \end{array}$$

## 4.6 Hydrostatischer Druck (Schweredruck)

Fluid inkompressibel!

$$p = \rho \cdot g \cdot h$$

$\rho$	Dichte der Flüssigkeit	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$g$	Erdbeschleunigung $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$[g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$h$	Höhe unter der Flüssigkeits-Oberfläche	$[h] = \text{m}$

Der Druck ist nur von der Höhe der darüberliegenden Flüssigkeit abhängig, nicht von deren Volumen oder Gewicht.

## 4.7 Barometrische Höhenformel (Gase)

Fluid kompressibel!

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{p_0}{p_0} \cdot g \cdot h}$$

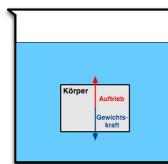
$p(h)$	Schweredruck des Gases bei Höhe $h$	$[p(h)] = \text{Pa}$
$p_0$	Luftdruck auf Meereshöhe $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$	$[p_0] = \text{Pa}$
$\rho_0$	Luft-Dichte auf Meereshöhe $\rho_0 = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$[\rho_0] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$g$	Erdbeschleunigung $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$[g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$h$	Höhe über Meer	$[h] = \text{m}$

## 4.8 Statischer Auftrieb (Fluid)

Der Auftrieb eines Körpers entspricht dem Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit (Archimedes).

$$F_A = \rho_{Fl} \cdot V_K \cdot g$$

$$F_A = F_{G,Fl} = m_{Fl} \cdot g = \rho_{Fl} \cdot V_K \cdot g$$



$F_A$	Auftriebskraft	$[F_A] = \text{N}$
$\rho_{Fl}$	Dichte verdrängtes Fluid	$[\rho_{Fl}] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$V_K$	verdrängtes Fluid-Volumen	$[V_K] = \text{m}^3$
$g$	Erdbeschleunigung $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$[g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$m_{Fl}$	Masse des verdrängten Fluids	$[m_{Fl}] = \text{kg}$
$F_{G,Fl}$	Gewichtskraft verdrängtes Fluid	$[F_{G,Fl}] = \text{N}$

## 4.9 Oberflächenspannung $\sigma$

$$\sigma := \frac{F}{l}$$

$\sigma$	Oberflächenspannung	$[\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$
$F$	Kraft	$[F] = \text{N}$
$l$	Länge	$[l] = \text{m}$

Die Länge  $l$  entspricht der gesamten Berührungsfläche zwischen Flüssigkeit und Festkörper / Gas

Zylinder  $l = 2\pi r$

Lamellen  $l = 2b$  (beidseitig!)

## 4.10 Grenzflächenspannung

$$\sigma_{sl} + \sigma_{lg} \cdot \cos\varphi = \sigma_{sg}$$

Benetzung

$\varphi < 90^\circ$

Nichtbenetzung

$\varphi > 90^\circ$

## 4.11 Kapillarität $h$

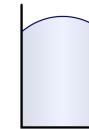
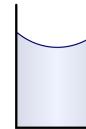
$$h = \frac{2 \cdot \sigma}{\rho \cdot g \cdot r} = \frac{\sigma}{\rho \cdot g \cdot d}$$

$\sigma$  Totale Grenzflächenspannung  $[\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$

$\rho$  Dichte der Flüssigkeit  $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$r$  Radius der Kapillare  $[r] = \text{m}$

$d$  Durchmesser der Kapillare  $[r] = \text{m}$



benetzend

nicht benetzend

## 4.12 Druck in Seifenblase $p$

$$p = \frac{2 \cdot \sigma}{r}$$

$\sigma$  Oberflächenspannung  $[\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$

$r$  Radius der Seifenblase  $[r] = \text{m}$

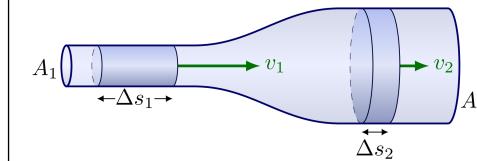
## 5 Hydrodynamik - Ideale Fluide

Ideale Fluide nehmen keine Scherkräfte auf (keine Reibung) und sind inkompressibel.

### 5.1 Stromlinien-Modell

- Stromlinien zeigen Geschwindigkeit des Fluids
- Dicke Stromlinien bedeutet hohe Geschwindigkeit
- Dünne Stromlinien bedeutet niedrige Geschwindigkeit
- Stationär: Stromlinien = Bahnlinien  $\Rightarrow$  schneiden sich nicht

## 5.2 Kontinuitätsgleichung



$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \dot{V} = A \cdot v = \text{const}$$

$$\Leftrightarrow A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \dot{V}$$

$\Delta V$  Volumenänderung

$[\Delta V] = \text{m}^3$

$\Delta t$  Zeitänderung

$[\Delta t] = \text{s}$

$\dot{V}$  Volumenstrom (Volumen pro Zeit)

$[\dot{V}] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

$A_x$  Querschnittsfläche

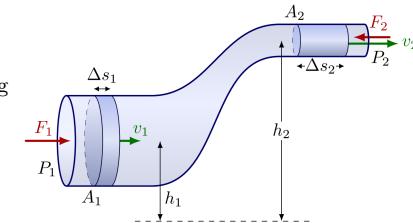
$[A_x] = \text{m}^2$

$v_x$  Geschwindigkeit der Flüssigkeit

$[v_x] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$\Rightarrow$  Gilt auch für Gase, wenn  $v \ll v_{Schall}$

## 5.3 Bernoulli-Gleichung



Die Bernoulli-Gleichung beschreibt ein bewegtes Fluid

$$p + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{const}$$

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$$

### 5.3.1 Spezialfall: Horizontal

$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{const}$$

### 5.3.2 Spezialfall: Statik

$$p + \rho \cdot g \cdot h = \text{const}$$

### 5.3.3 Hydrodynamisches Paradoxon

Je grösser die Strömungsgeschwindigkeit, desto kleiner der Druck

## 5.4 Bernoulli-Gleichung und Energieerhaltung

Die in der Bernoulli-Gleichung vorkommenden Terme können als Energie pro Volumen betrachtet werden

$$\begin{aligned} E_{\text{Mech}} &= \text{elast. Energie} + \text{pot. Energie} + \text{kin. Energie} \\ &= p \cdot V + m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \text{const} \end{aligned}$$

Wenn durch das Volumen dividiert wird erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{Mech}}}{Volumen} &= \frac{\text{elastische Energie}}{\text{Volumen}} + \frac{\text{pot. Energie}}{\text{Volumen}} + \frac{\text{kin. Energie}}{\text{Volumen}} \\ &= p + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{const} \end{aligned}$$

Bei einer horizontalen Strömung entfällt die pot. Energie (pro Volumen)

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{Mech}}}{Volumen} &= \frac{\text{elastische Energie}}{\text{Volumen}} + \frac{\text{kin. Energie}}{\text{Volumen}} \\ &= p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{const} \end{aligned}$$

## 6 Hydrodynamik - Reale Fluide

Reale Fluide nehmen Scherkräfte auf (Reibung)

### 6.1 Newton'sches Reibungs-Gesetz

Ein reales Fluid erfährt Reibung

$$\tau = \eta \cdot \frac{v}{d} \quad \tau = \eta \cdot \frac{dv}{dz}$$

$\tau$	Schubspannung	$[\tau] = \text{N}$
$\eta$	dynmische Zähigkeit (Viskosität)	$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$
$v$	Geschwindigkeitsdifferenz zw. Auflagen	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$z$	Richtung senkrecht zur Verschiebung	$[z] = \text{m}$
$d$	Distanz zwischen den Auflagen	$[d] = \text{m}$
$\frac{dv}{dz}$	Geschwindigkeits-Gradient in z-Richtung	$[\frac{dv}{dz}] = \frac{1}{\text{s}}$

Beispiele: Werte für  $\eta$

$$\begin{aligned} \eta_{\text{Luft}} &:= 17 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s} \\ \eta_{\text{Wasser}}(20^\circ\text{C}) &:= 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s} \\ \eta_{\text{Öl}} &:= 0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s} \text{ bis } 1 \text{ Pa} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

#### 6.1.1 Kinematische Zähigkeit $\nu$

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

$$\begin{aligned} \nu &\quad \text{kinematische Zähigkeit} \quad [\nu] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \\ \rho &\quad \text{Dichte} \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{aligned}$$

## 6.2 Stokes'sche Reibung $F_R$

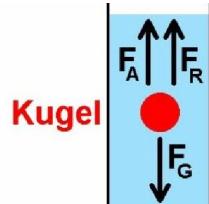
Z.B. für Kugel in Öl oder fallende Wassertropfen

$$F_R = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R \cdot v$$

$F_R$	Reibungskraft	$[F_R] = \text{N}$
$\eta$	Dynamische Zähigkeit (Viskosität)	$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$
$R$	Kugelradius	$[R] = \text{m}$
$v$	Geschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

### 6.2.1 Kugelfall-Viskosimeter

Auf eine Kugel, welche in einer Flüssigkeit hinabgleitet wirken folgende Kräfte:



$F_G$	Gewichtskraft
$F_A$	statischer Auftrieb
$F_R$	Stokes'sche Reibung

Ansatz zum Lösen von Aufgaben:  
Kräftegleichgewicht

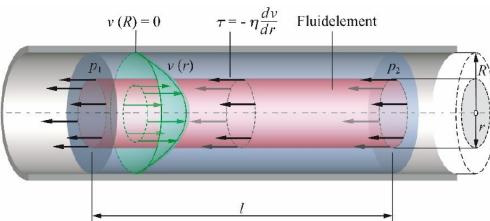
## 6.3 Hagen-Poiseuille

Beschreibung von laminaren Strömungen in einem runden Rohr  
⇒ Schichtströmung

### 6.3.1 Gesetz von Hagen-Poiseuille

$$\dot{V} = \frac{\pi \cdot \Delta p \cdot R^4}{8 \cdot \eta \cdot l}$$

### 6.3.2 Geschwindigkeitsverteilung von $r = 0$ bis $R$



$$v(r) = \frac{1}{4 \cdot \eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} (R^2 - r^2)$$

$v(r)$	Fliessgeschwindigkeit beim Radius $r$	$[v(r)] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$r$	betrachteter Radius	$[r] = \text{m}$
$\eta$	Dynamische Zähigkeit (Viskosität)	$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$
$R$	Rohr-(Innen)Radius	$[R] = \text{m}$
$\Delta p$	Druckdifferenz	$[\Delta p] = \text{Pa}$
$\dot{V} = \frac{dV}{dt}$	Volumenstrom	$[\dot{V}] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$
$l$	Länge des Rohrs	$[l] = \text{m}$

## 6.4 Reynolds-Zahl $Re$

Gibt ein Richtmaß für die Wirbelbildung

- Druck-Differenz (Bernoulli) begünstigt Wirbelbildung
- Innere Reibung (Schubspannung) verhindert Wirbelbildung

$$Re = \frac{\Delta p}{\tau} = \frac{\rho \cdot \bar{v} \cdot d}{\eta} \quad \text{mit } \bar{v} = \frac{\dot{V}}{A}$$

$Re$	Reynolds-Zahl	$[Re] = 1$
$\eta$	Dynamische Zähigkeit (Viskosität)	$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$
$\bar{v}$	Mittlere Geschwindigkeit	$[\bar{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$d$	Typische Dimension (Rohrdurchmesser)	$[d] = \text{m}$
$\Delta p$	Druckdifferenz	$[\Delta p] = \text{Pa}$
$\tau$	Schubspannung	$[\tau] = \text{N}$

Sobald die Reynolds-Zahl  $Re$  grösser ist als ein kritischer Wert bilden sich Wirbel

⇒ Rohr:  $Re_{\text{kritisch}} \approx 2320$

### 6.4.1 Ähnlichkeitsgesetz

Reynolds-Zahl dient auch richtigem Vergleich von Modellversuchen.

⇒ Gleiche Reynolds-Zahl bedeutet gleiches Verhalten

⇒ Gleiche Reynolds-Zahl bedeutet auch gleiche Relative Grenzschicht-Dicke  $D$  (siehe 6.6)

## 6.5 Turbulente / Laminare Rohrströmung

### 6.5.1 Hilfe, um Reynoldszahl zu bestimmen (laminar)

$$\Delta p = 32 \cdot \eta \cdot l \cdot \frac{v}{d^2}$$

### 6.5.2 Druckunterschied in laminare / turbulente Strömung

$$\lambda_{turbulent} = \frac{0.316}{\sqrt{Re}} \quad \lambda_{laminar} = \frac{64}{Re}$$

$$\Rightarrow \Delta p_x = \lambda_x \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2$$

$\Delta p_x$	Druckdifferenz (laminar/turbulent)	$[\Delta p] = \text{Pa}$
$\eta$	Dynamische Zähigkeit (Viskosität)	$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$
$l$	Rohr-Länge	$[l] = \text{m}$
$v$	Fliess-Geschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$d$	Rohr-Durchmesser	$[d] = \text{m}$
$\rho$	Dichte des Fluids	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$Re$	Reynolds-Zahl	$[Re] = 1$

### 6.5.3 Unbekannt / Gemischt (Pratische Anwendung)

Vorgehen, wenn man nicht weiss, ob sich Wirbel bilden oder nicht

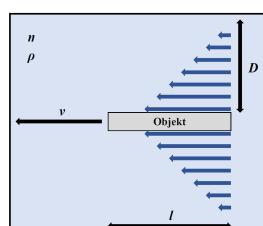
1. Laminar rechnen (um fehlenden Parameter  $\rho$ ,  $v$ ,  $d$ , oder  $\eta$  zu bestimmen)
2. Aus Resultat Reynolds-Zahl berechnen
3. Mit kritischer Reynolds-Zahl vergleichen
4. Beim **Überschreiten**  $\Rightarrow$  Turbulent rechnen!

## 6.6 Prandl'sche Grenzschicht-Dicke $D$

Prandl'sche Grenzschicht-Dicke  $D$  beschreibt, in welcher **Distanz** die **Geschwindigkeit** eines laminar bewegten Teils (z.B. ein Flugzeugflügel) Null ist.

$$D = \sqrt{\frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{l}{v}}$$

$D$	Prandl'sche Grenzschicht-Dicke	$[D] = \text{m}$
$\eta$	Dynamische Zähigkeit (Viskosität)	$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$
$\rho$	Dichte des Fluids	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$l$	Länge des bewegten Teils (in Richtung von $v$ )	$[l] = \text{m}$
$v$	Geschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$



Die Geschwindigkeit innerhalb der Grenzschicht  $D$  nimmt vom Teil bis hin zum äussersten Rand **linear** ab.

## 6.7 Bernoulli-Gleichung mit innerer Reibung

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \alpha_2 \cdot \rho \cdot v_2^2 + \Delta p_v$$

Korrekturfaktoren	turbulent	laminar
	$\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 2$	$\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$
Druckverlust $\Delta p_v$	$\Delta p_v = \lambda_x \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2$	

$$\lambda_{turbulent} = \frac{0.316}{\sqrt{Re}} \quad \lambda_{laminar} = \frac{64}{Re}$$

$$\begin{aligned} \Gamma & \text{ Zirkulation} \\ \vec{v} \bullet d\vec{s} & \text{ Geschwindigkeit entlang dem Weg} \\ (\text{Skalarprodukt: } \vec{v} \bullet d\vec{s}) & = a \cdot b \cdot \cos(\varphi) \end{aligned}$$

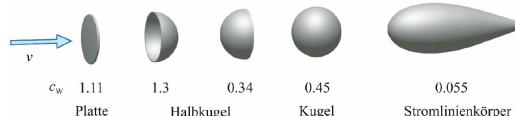
$$\begin{aligned} [\Gamma] &= \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \\ [\vec{v}] &= \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

**Rotierender Zylinder:**

$$\Gamma = 2\pi r v_{Zyl} = 4\pi^2 r^2 f$$

## 6.8 Druckwiderstand $F_D$

Bezeichnet die turbulente Luftreibungskraft  $F_D$  und wird meist als Luftwiderstand bezeichnet



$$F_D = \Delta p \cdot A_s = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_s \cdot c_w$$

$F_D$	Druckwiderstand	$[F_D] = \text{N}$
$\Delta p$	Druckdifferenz	$[\Delta p] = \text{Pa}$
$\rho$	Luft-Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$v$	Strömungs-Geschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$c_w$	Widerstandsbeiwert / Widerstandszahl	$[c_w] = 1$
$A_s$	projizierte Fläche senkrecht zur Strömung	$[A_s] = \text{m}^2$

Der Widerstandsbeiwert  $c_w$  ist **geometrieabhängig**!

## 6.9 Auftriebskraft $F_A$ nach Kutta-Jukowski

Beschreibt Proportionalität zwischen dynamischem Auftrieb und Zirkulation

$$F_A = \rho \cdot v \cdot l \cdot \Gamma$$

$F_A$	dynamischer Auftrieb	$[F_A] = \text{N}$
$\rho$	Dichte des Fluids	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$v$	Geschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$l$	Länge quer zur Strömung	$[l] = \text{m}$
$\Gamma$	Zirkulation	$[\Gamma] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

### 6.9.1 Zirkulation $\Gamma$

Die Zirkulation ist ein Mass für die **Rotation** im Strömungsfeld

$$\Gamma = \oint \vec{v} \bullet d\vec{s}$$

$F_A$	dynamischer Auftrieb	$[F_A] = \text{N}$
$c_A$	Auftriebskoeffizient	$[c_A] = 1$
$\rho$	Luft-Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$v$	Strömungsgeschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$A_{  }$	Projizierte Fläche parallel zur Strömung	$[A_{  }] = \text{m}^2$

$$\begin{aligned} [F_A] &= \text{N} \\ [c_A] &= 1 \\ [\rho] &= \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ [v] &= \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ [A_{||}] &= \text{m}^2 \end{aligned}$$

### 6.10.1 Wissenswertes zum dynamischen Auftrieb

Ein gerade ausgerichtetes, symmetrisches Stromlinienprofil erzeugt **keinen** dynamischen Auftrieb

An einem asymmetrischen Flügelprofil entsteht dynamischer Auftrieb

## 6.11 Induzierter Widerstand $F_W$

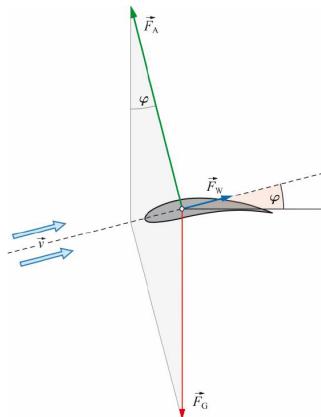
Kommt durch Energieverlust (Wirbelbildung) zu Stande, welcher entsteht, wenn die Umgebungsluft in Bewegung gesetzt wird

$$F_W = c_W^* \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_{||}$$

$F_W$	Induzierter Widerstand	$[F_W] = \text{N}$
$c_W^*$	Widerstands-Koeffizient	$[c_W^*] = 1$
$\rho$	Luft-Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$v$	Strömungsgeschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$A_{  }$	Projizierte Fläche parallel zur Strömung	$[A_{  }] = \text{m}^2$

## 6.12 Gleitwinkel $\varphi$

Gibt die zurückgelegte Strecke pro verbrauchte Höhe an  
Im Luft-Kanal ist dies der Anstell-Winkel



$$\tan(\varphi) = \frac{F_W}{F_A} = \frac{c_W^*}{c_A} = \frac{v_V}{v_H}$$

$\varphi$	Gleitwinkel	$[\varphi] = {}^\circ$
$F_W$	Widerstandskraft	$[F_W] = \text{N}$
$F_A$	Auftriebskraft	$[F_A] = \text{N}$
$c_W^*$	Widerstands-Koeffizient	$[c_W^*] = 1$
$c_A$	Auftriebs-Koeffizient	$[c_A] = 1$
$v_V$	Vertikal-Geschwindigkeit	$[v_V] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$v_H$	Horizontal-Geschwindigkeit	$[v_H] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

## 6.12.1 Gängige Gleitzahlen

Flugobjekt	Gleitzahl
Hängegleiter	10 bis 15
Boeing 747	15
Airbus A380	20
Segelflugzeug	40 (Rekord 70)

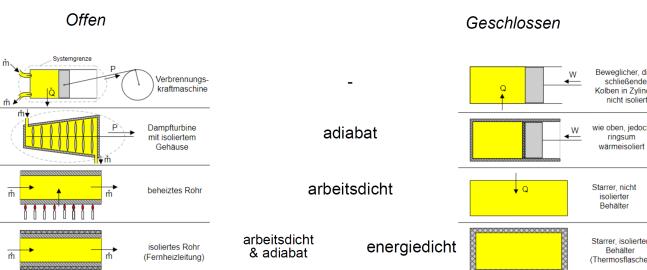
## 6.13 Helmholtz'sche Wirbelsätze

1. Wirbel hat kein Anfang und kein Ende
2. Wirbel besteht immer aus denselben Fluidteilchen
3. Zirkulation zeitlich konstant

## 7 Thermodynamik

### 7.1 Terminologie

System ist ↓	Materietausch	Energietausch		
		Arbeit	Wärme	
offen	erlaubt	- adiabatisch arbeitsdicht beides	erlaubt erlaubt Nein Nein Nein	erlaubt Nein erlaubt Nein Nein
geschlossen	Nein	-	möglich möglich Nein möglich Nein	möglich Nein möglich Nein Nein



### 7.2 Absolute Temperatur $T$

$$T = \theta + 273.15 \text{ K} = \theta - \theta_0$$

- $T$  Absolute Temperatur gemessen in Kelvin  $[T] = \text{K}$   
 $\theta$  Temperatur gemessen in  ${}^\circ\text{C}$   $[\theta] = {}^\circ\text{C}$   
 $\theta_0$  Absoluter Nullpunkt:  $= -273.15 {}^\circ\text{C} = 0 \text{ K}$

## 7.3 Thermische Ausdehnung

### 7.3.1 Längenausdehnung $\Delta l$

$$l' = l + \Delta l = l + \alpha \cdot l \cdot \Delta T = l (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

$l'$	Länge nach Ausdehnung	$[l'] = \text{m}$
$l$	Anfangslänge	$[l] = \text{m}$
$\Delta l$	Längenänderung	$[\Delta l] = \text{m}$
$\alpha$	Längenausdehnungskoeffizient	$[\alpha] = \frac{1}{\text{K}}$
$\Delta T$	Temperaturänderung	$[\Delta T] = \text{K}$

### 7.3.2 Flächenausdehnung $\Delta A$

$$A' = A + \Delta A = A + \underbrace{\beta}_{\approx 2\alpha} \cdot A \cdot \Delta T = A (1 + \beta \cdot \Delta T)$$

$A'$	Fläche nach Ausdehnung	$[A'] = \text{m}^2$
$A$	Anfangsfläche	$[A] = \text{m}^2$
$\Delta A$	Flächenänderung	$[\Delta A] = \text{m}^2$
$\beta$	Flächenausdehnungskoeffizient	$[\beta] = \frac{1}{\text{K}}$
$\Delta T$	Temperaturänderung	$[\Delta T] = \text{K}$

### 7.3.3 Volumenausdehnung $\Delta V$

$$V' = V + \Delta V = V + \underbrace{\gamma}_{\approx 3\alpha} \cdot V \cdot \Delta T = V (1 + \gamma \cdot \Delta T)$$

$V'$	Volumen nach Ausdehnung	$[V'] = \text{m}^3$
$V$	Anfangsvolumen	$[V] = \text{m}^3$
$\Delta V$	Volumenänderung	$[\Delta V] = \text{m}^3$
$\gamma$	Volumenausdehnungskoeffizient	$[\gamma] = \frac{1}{\text{K}}$
$\Delta T$	Temperaturänderung	$[\Delta T] = \text{K}$

Material	Koeffizient ( $10^{-6} \text{ K}^{-1}$ )
Aluminium	23
Eisen	12
Stahl, unlegiert	11 ... 13
Diamant	1.3
Silizium	2
Gummi	220
Beton	12
Polyesterol	70
Zerodur	$0 \pm 0.007$

### 7.4 Thermische Spannung $\sigma$

$$p = \sigma = \varepsilon \cdot E = E \cdot \frac{\Delta l}{l} = E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$\sigma$	Thermische Spannung	$[\sigma] = \text{Pa}$
$\varepsilon$	Dehnung	$[\varepsilon] = 1$
$E$	Elastizitätsmodul	$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
$\alpha$	Längenausdehnungskoeffizient	$[\alpha] = \frac{1}{\text{K}}$
$\Delta T$	Temperaturänderung	$[\Delta T] = \text{K}$
$p$	Druck	$[p] = \text{Pa}$

## 8 Ideales Gas

### 8.1 Modell des idealen Gases

Jedes Gas ist gleich!

1. Moleküle sind Massenpunkte (keine Ausdehnung)
2. Stöße sind elastisch (keine zwischenmolekularen Kräfte)  
Kein Volumen bei  $T = 0$   
Kein Druck bei  $T = 0$

### 8.1.1 Thermische Ausdehnung von Gasen

- Ausdehnung von Gasen ist sehr gross
- Bei allen Gasen ist die Ausdehnung **gleich**
- Volumen beim Nullpunkt ist **Null**

## 8.2 Universelle Gasgleichung

Alle Gase verhalten sich gleich, insbesondere bei gleicher Anzahl Moleküle

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{const} \Rightarrow \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

$p_x$	<b>Absolut-Druck</b>	$[p_x] = \text{Pa}$
	Absolut-Druck: $p_0 + p$	
$V_x$	Volumen	$[V_x] = \text{m}^3$
$T_x$	<b>Absolut-Temperatur (in K)</b>	$[T] = \text{K}$

### 8.2.1 Boyle-Mariotte

Das Gesetz gilt nur bei konstanter Temperatur!  
⇒ Isotherme Zustandsänderung

$$p \cdot V = \text{const} \Rightarrow p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

### 8.2.2 Gay-Lussac

Das Gesetz gilt nur bei konstantem Druck!  
⇒ Isobare Zustandsänderung

$$\frac{V}{T} = \text{const} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

### 8.2.3 Gay-Lussac und Amontons

Das Gesetz gilt nur bei konstantem Volumen!  
⇒ Isochore Zustandsänderung

$$\frac{p}{T} = \text{const} \Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

## 8.3 Universelle Gasgleichung für ideale Gase

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T = N \cdot k \cdot T$$

$p$	<b>Absolut-Druck</b>	$[p] = \text{Pa}$
	Absolut-Druck: $p_0 + p$	
$V$	Volumen	$[V] = \text{m}^3$
$n$	Mol-Zahl	$[n] = \text{mol}$
$R$	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
$T$	<b>Absolut-Temperatur (in K)</b>	$[T] = \text{K}$
$N$	Anzahl Moleküle	$[N] = 1$
$k$	Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$	$[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$

### 8.3.1 Zusammenhänge zwischen den Konstanten

$$R = k \cdot N_A = \frac{N \cdot k}{n}$$

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M} = \frac{N \cdot k}{R}$$

$R$	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
$k$	Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$	$[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$
$N$	Anzahl Moleküle	$[N] = 1$
$N_A$	Avogadrokonstante: $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$	$[N_A] = \frac{1}{\text{mol}}$
$n$	Mol-Zahl	$[n] = \text{mol}$
$m$	Masse	$[m] = \text{kg}$
$M$	Mol-Masse	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$

## 8.4 Mechanische Arbeit $\Delta W$ von Gasen

Folgende Formel ist für Flüssigkeiten **nicht** gültig, da diese inkompressibel sind ( $\Delta V = 0$ )

$$\Delta W = F \cdot \Delta s = p \cdot A \cdot \Delta s = p \cdot \Delta V$$

$\Delta W$	Mechanische Arbeit von Gas	$[\Delta W] = \text{J}$
$F$	Kraft	$[F] = \text{N}$
$\Delta s$	Wegänderung	$[\Delta s] = \text{m}$
$p$	Druck	$[p] = \text{Pa}$
$A$	Fläche	$[A] = \text{m}^2$
$\Delta V$	Volumenänderung	$[\Delta V] = \text{m}^3$

## 8.5 Gesetz von Avogadro

Ein Mol eines Gases nimmt bei Normalbedingungen immer das gleiche Volumen ein (=Molvolumen)

Ideale Gase enthalten bei gleichem Druck  $p$  und gleicher Temperatur  $T$  immer gleich viele Moleküle (im Molvolumen)

## 8.6 Molmasse $M$ , Molvolumen $V_m$

Siehe auch 8.3

Molmasse ist die **Ordnungszahl** im Periodensystem

$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$$

Molvolumen:

$$V_m = \frac{V}{n}$$

$p$	<b>Absolut-Druck</b>	$[p] = \text{Pa}$
$V$	Volumen	$[V] = \text{m}^3$
$R$	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
$T$	<b>Absolut-Temperatur (in K)</b>	$[T] = \text{K}$
$N_A$	Avogadrokonstante: $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$	$[N_A] = \frac{1}{\text{mol}}$
$k$	Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$	$[k] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$
$n$	Mol-Zahl	$[n] = \text{mol}$
$m$	Masse	$[m] = \text{kg}$
$M$	Mol-Masse	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
$N$	Anzahl Moleküle	$[N] = 1$
$V_m$	Mol-Volumen	$[V_m] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$

## 8.7 Dichte eines Gases $\rho$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M}{V_m} = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}$$

$\rho$	Gas-Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$m$	Masse	$[m] = \text{kg}$
$V$	Volumen	$[V] = \text{m}^3$
$M$	Mol-Masse	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
$V_m$	Mol-Volumen (22.4 L bei 0 °C und 1000 hPa)	$[V_m] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$
$p$	<b>Absolut-Druck</b>	$[p] = \text{Pa}$
$R$	Absolut-Druck: $p_0 + p$	
$T$	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
	<b>Absolut-Temperatur (in K)</b>	$[T] = \text{K}$

## 8.8 Phänomene von idealen Gasen

### 8.8.1 Anomalie des Wassers

Die feste Form (Eis) ist leichter als die flüssige Form (Wasser). Die **größte Dichte** weist Wasser bei 4 °C auf, nicht beim Gefrierpunkt von 0 °C

⇒ Ein See gefriert somit nur an der Oberfläche. Am Grund des Sees beträgt die Wassertemperatur 4 °C

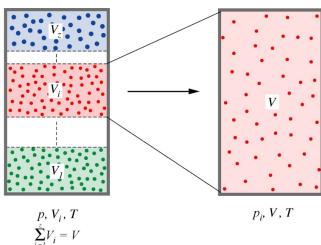
### 8.8.2 Osmotischer Druck (Zelldruck)

Große Moleküle innerhalb von vielen kleinen Molekülen in einer Flüssigkeit verhalten sich ähnlich wie die Moleküle eines idealen Gases, wenn die Flüssigkeit von einer für die Moleküle halbdurchlässigen (semi-permeable) Membran umgeben ist.

Osmotischer Druck:  $p = \frac{n}{V} \cdot R \cdot T$  (ideale Gasgleichung)

## 8.9 Partialdruck $p_i$

Ausgangslage: Gasgemisch (z.B. Luft: Sauerstoff-Stickstoff)



Der Partialdruck  $p_i$  ist der Druck, welcher die i-te Gaskomponente erzeugen würde, wenn ihr das gesamte Volumen zur Verfügung stehen würde.

## 8.10 Gesetz von Dalton

In einem Gas ist die Summe der Partialdrücke  $p_i$  gleich dem Gesamtdruck

$$\sum_{i=1}^n p_i = p$$

$$\begin{array}{ll} p_i & \text{Partialdruck} & [p_i] = \text{Pa} \\ p & (\text{Gesamt-}) \text{Druck} & [p] = \text{Pa} \end{array}$$

## 8.11 Volumen- und Massenkonzentration (Gasgemisch)

### 8.11.1 Volumen-Konzentrationen (Volumen-Anteile)

$$q_i = \frac{V_i}{V} = \frac{n_i}{n} = \frac{p_i}{p}$$

$$\begin{array}{ll} q_i & \text{Volumen-Konzentration} & [q_i] = 1 \\ V_i & \text{Volumen der i-ten Gas-Komponente} & [V_i] = \text{m}^3 \\ V & \text{Gesamt-Volumen} & [V] = \text{m}^3 \\ n_i & \text{Molzahl der i-ten Gas-Komponente} & [n_i] = \text{mol} \\ n & \text{Gesamt-Molzahl des Gemisches} & [n] = \text{mol} \\ p_i & \text{Partialdruck der i-ten Gaskomponente} & [p_i] = \text{Pa} \\ p & \text{Druck des Gemischs} & [p] = \text{Pa} \end{array}$$

### 8.11.2 Massen-Konzentration (Massen-Anteile)

$$\mu_i = \frac{m_i}{m} = \frac{M_i}{M} \cdot q_i$$

$$\begin{array}{ll} \mu_i & \text{Volumen-Konzentrationen} & [\mu_i] = 1 \\ m_i & \text{Masse der i-ten Gas-Komponente} & [m_i] = \text{kg} \\ m & \text{Masse der Gemischs} & [m] = \text{kg} \\ M_i & \text{Mol-Masse der i-ten Gas-Komponente} & [M_i] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \\ M & \text{Mol-Masse des Gemischs} & [M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \\ q_i & \text{Volumen-Konzentration} & [q_i] = 1 \end{array}$$

## 8.12 Mol-Masse Gasgemisch

Die Mol-Masse des Gas-Gemisches kann als gewichteter Mittelwert berechnet werden, gewichtet mit den jeweiligen Volumen-Anteilen

$$M = \sum_{i=1}^n q_i \cdot M_i$$

$$\begin{array}{ll} M & \text{Mol-Masse Gasgemisch} & [M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \\ q_i & \text{Volumen-Konzentration} & [q_i] = 1 \\ M_i & \text{Mol-Masse der i-ten Gas-Komponente} & [M_i] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \end{array}$$

## 9 Reales Gas

Im Vergleich zum idealen Gas müssen zwei Dinge berücksichtigt werden:

Eigen-Volumen:

Ideales Gas hat **kleineres** Volumen als gemessen  
(Ideal-Gas-Volumen um das Molekül-Eigenvolumen reduzieren)

Binnen-Druck:

Ideales Gas hat **grösseren** Druck als gemessen  
(Ideal-Gas-Druck um Binnendruck erhöhen)

## 9.1 Van der Waals-Gleichung (1 Mol)

⇒ Für nicht-ideale Gase!

$$p' \cdot V'_m = R \cdot T$$

$$p' = p + \frac{a}{V_m^2}$$

$$V'_m = V_m - b$$

$$\begin{array}{ll} p' & \text{Korrigierter Druck} & [p'] = \text{Pa} \\ V'_m & \text{Korrigiertes Mol-Volumen} & [V_m] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \\ R & \text{Universelle Gaskonstante: } R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} & [R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \\ T & \text{Absolut-Temperatur (in K)} & [T] = \text{K} \\ p & \text{Druck des Gemischs} & [p] = \text{Pa} \\ a & \text{Eigenvolumen} & [a] = \frac{\text{J} \cdot \text{m}^3}{\text{mol}^2} \\ b & \text{Binnendruck} & [b] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \\ V_m & \text{Mol-Volumen} & [V_m] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \end{array}$$

## 9.2 Van der Waals-Gleichung (n Mol)

$$\left( p + \frac{n^2 \cdot a}{V^2} \right) \cdot (V - n \cdot b) = n \cdot R \cdot T$$

$p$  Druck des Gemisches

$n$  Mol-Zahl

$a$  Eigenvolumen

$V$  Volumen

$b$  Binnendruck

$R$  Universelle Gaskonstante:  $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

$T$  Absolut-Temperatur (in K)

$[p] = \text{Pa}$

$[n] = \text{mol}$

$[a] = \frac{\text{J} \cdot \text{m}^3}{\text{mol}^2}$

$[V] = \text{m}^3$

$[b] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$

$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

$[T] = \text{K}$

## 9.2.1 Van der Waals-Parameter

$$a = \frac{9}{8} \cdot R \cdot T_k \cdot V_{mk} = \frac{27R^2 T_k^2}{64 \cdot p_k}$$

$$b = \frac{V_{mk}}{3} = \frac{RT_k}{8 \cdot p_k}$$

$$V_{mk} = 3 \cdot b$$

$$T_k = \frac{8 \cdot a}{27 \cdot R \cdot b}$$

$$p_k = \frac{a}{27 \cdot b^2}$$

$a$  Eigenvolumen

$[a] = \frac{\text{J} \cdot \text{m}^3}{\text{mol}^2}$

$R$  Universelle Gaskonstante:  $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

$T_k$  Kritische Absolut-Temperatur

$[T_k] = \text{K}$

$V_{mk}$  Kritisches Mol-Volumen

$[V_{mk}] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$

$b$  Binnendruck

$[b] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$

$p_k$  Kritischer Druck

$[p_k] = \text{Pa}$

## 10 Wärmelehre

### 10.1 Wärme Q

Wärme ist Energie, welche stets (von allein) von höherer zu niedrigerer Temperatur fliesst

$$\Delta U \xleftarrow[2 \cdot H_S 100\%]{1 \cdot H_S 100\%} \Delta W + \Delta Q$$

## 10.2 Erster Hauptsatz der Wärmelehre

Nicht nur durch Wärmezufuhr, sondern auch durch mechanische Arbeit lässt sich die Temperatur und damit die innere Energie  $U$  erhöhen

$$\Delta U = \Delta W + \Delta Q$$

$\Delta U$	Zu-/Abgeföhrte Innere Energie	$[\Delta U] = \text{J}$
$\Delta W$	Zu-/Abgeföhrte Arbeit	$[\Delta W] = \text{J}$
	z.B. $E_{kin}$ , $E_{pot}$ , $W_{Gas}$ , $W_{reib}$	
$\Delta Q$	Zu-/Abgeföhrte Wärme	$[\Delta Q] = \text{J}$

### 10.2.1 Ansätze für 1. HS

$$\Delta Q = E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$\Delta Q = E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

$$\Delta \dot{Q} = \Delta P$$

### 10.2.2 Mechanische Arbeit eines Gases

Für mehr Details, siehe Abschnitt 8.4

$$\Delta W = p \cdot \Delta V$$

## 10.3 Mechanische Wärmeäquivalente

1 Kalorie = 4,1868 J (cal)

⇒ Energie, um 1 Gramm Wasser um 1 Grad zu erwärmen

1 kcal = 4186,8 J

⇒ Energie, um 1 Kilogramm Wasser um 1 Grad zu erwärmen

### 10.3.1 Elektrisches Wärmeäquivalent $c$

Elektrische Energie = Wärme

$$U \cdot I \cdot t = c \cdot m \cdot \Delta T \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{U \cdot I \cdot t}{m \cdot \Delta T}$$

$c$	Elektrisches Wärmeäquivalent	$[c] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$
$U$	Spannung	$[U] = \text{V}$
$I$	Strom	$[I] = \text{A}$
$t$	Zeit	$[t] = \text{s}$
$m$	Masse	$[m] = \text{kg}$
$\Delta T$	Temperaturänderung	$[\Delta T] = \text{K}$

## 10.4 Wärmekapazität

Die Wärmekapazität drückt das Energiespeicher-Vermögen aus.

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T = n \cdot c_M \cdot \Delta T = C \cdot \Delta T$$

### 10.4.1 Absolute Wärmekapazität $C$

Energiespeicher-Vermögen eines Gegenstands

$$\Delta Q = C \cdot \Delta T \quad C \frac{\Delta T}{\Delta t} = \dot{Q}$$

### 10.4.2 Spezifische Wärmekapazität $c$

Energiespeicher-Vermögen einer Substanz

Substanz	$c$ bei 20°C
Wasser	4182
Ethanol	2430
Glyzerin	2390
Quecksilber	139
Gold	129
Stahl	480

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$

### 10.4.3 Molare Wärmekapazität $c_M$

Energiespeicher-Vermögen einer Anzahl Moleküle

$$c_M = \frac{c}{n} = M \cdot c$$

$$\Delta Q = \text{Zu-/Abgeföhrte Wärme} \quad [\Delta Q] = \text{J}$$

$$c = \text{spezifische Wärmekapazität} \quad [c] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$c_M = \text{molare Wärmekapazität} \quad [c_M] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$C = \text{absolute Wärmekapazität} \quad [C] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$m = \text{Masse} \quad [m] = \text{kg}$$

$$\Delta T = \text{Temperaturänderung} \quad [\Delta T] = \text{K}$$

$$n = \text{Mol-Zahl} \quad [n] = \text{mol}$$

$$M = \text{Mol-Masse} \quad [M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$$

### 10.4.4 Molare Wärmekapazität von Gasen

$$C_{mp} - C_{mV} = R$$

$$C_{mp} = \text{isobare Wärme-Kapazität} \quad (p = \text{const}) \quad [C_{mp}] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$C_{mV} = \text{isochore Wärme-Kapazität} \quad (V = \text{const}) \quad [C_{mV}] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$R = \text{Universelle Gaskonstante} \quad R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \quad [R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

### 10.4.5 Molare Wärmekapazität von Festkörpern

$$T > \Theta_D : \quad C_m \approx 3R \approx 25 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \quad (\text{Dulong} - \text{Petit})$$

$$T \ll \Theta_D : \quad C_m = \frac{12 \cdot \pi^4}{5} \cdot R \cdot \left( \frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \quad (\text{Debye})$$

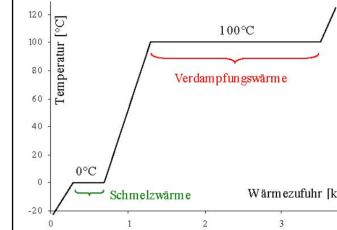
$$T = \text{Absolut-Temperatur} \quad (in \text{ K}) \quad [T] = \text{K}$$

$$\Theta_D = \text{Debye-Temperatur} \quad \Theta_D \approx 200 \text{ K} \quad [\Theta_D] = \text{K}$$

$$C_m = \text{molare Wärmekapazität} \quad [C_m] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$R = \text{Universelle Gaskonstante:} \quad R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \quad [R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

## 10.5 Latente Wärme, Enthalpie (Schmelz-/ Verdampfungswärme)



Beim Schmelzen und Verdampfen findet **keine** Temperaturerhöhung statt

Beim Gefrieren und oder Kondensieren wird diese versteckte Wärme wieder frei, **ohne** Abnahme der Temperatur

Die Schmelz-/ Verdampfungswärme ist stark druckabhängig

$$Q_f = q_f \cdot m$$

$$q_{Wasser} := 334 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$Q_s = q_s \cdot m$$

$$q_{Wasser} := 2256 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$Q_f = \text{Schmelz-/Erstarrungs-Wärme} \quad [Q_f] = \text{J}$$

$$q_f = \text{Spezifische Schmelzwärme} \quad [q_f] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$Q_s = \text{Verdampfungs-/Kondensations-Wärme} \quad [Q_s] = \text{J}$$

$$q_s = \text{Spezifische Verdampfungs-Wärme} \quad [q_s] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$m = \text{Masse} \quad [m] = \text{kg}$$

## 10.6 Wärmebilanz

Wärmeaustausch zwischen verschiedenen Materialien

In einem abgeschlossenen System (nach aussen isoliert) muss gelten:  
**Zugeführte Wärme = Abgeführte Wärme**

$$\sum_{i=1}^n (\Delta Q_i + \Delta Q_{fi} + \Delta Q_{si}) = 0$$

$$\Delta Q_i = \text{i-te Wärme-Menge aus Temperatur-Zu-/Abnahme} \quad [\Delta Q_i] = \text{J}$$

$$\Delta Q_{fi} = \text{i-te Wärme-Menge aus Schmelz-/Erstarrungs-Vorgang} \quad [\Delta Q_{fi}] = \text{J}$$

$$\Delta Q_{si} = \text{i-te Wärme-Menge aus Verdampfungs-/Kondensations-Vorgang} \quad [\Delta Q_{si}] = \text{J}$$

$$+ \text{zugeführte Wärme-Menge} \\ - \text{abgeführter Wärme-Menge}$$

## 11 Phasen und Phasenübergänge

### 11.1 Phasen

- Fest**  
feste Gestalt; festes Volumen
- Flüssig**  
keine feste Gestalt; festes Volumen
- Gasförmig**  
keine feste Gestalt; kein festes Volumen
- Plasma**  
Bei sehr hoher Temperatur ist Materie ionisiert (Elektronengas)
- Mischung / Dispersion:**

	flüssig	gasförmig
fest	Suspension (Sol)	Aerosol (Rauch)
flüssig	Emulsion	Aerosol (Nebel)
gasförmig	Schaum	-

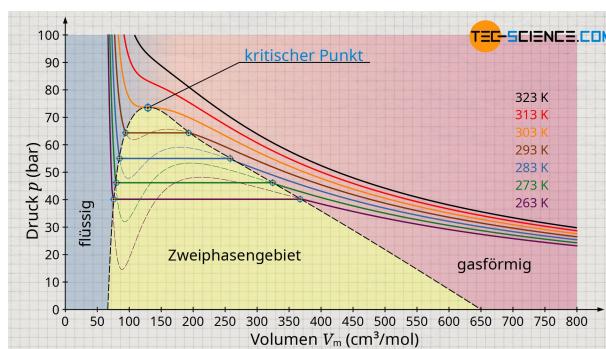
### 11.2 Dampfdruck $p_s(T)$

Der Dampfdruck bedeutet das Gleichgewicht der Flüssigkeit mit ihrer Dampfphase

Der Dampfdruck ist das Niveau des kontanten Drucks im 2-Phasengebiet eines realen Gases nach van der Waals.

Der Dampfdruck ist nur **temperaturabhängig**

Bei Kompression oder Expansion ändert sich der Dampfdruck nicht, sondern der Anteil Flüssigkeit zu Gas muss ändern



**Verdunsten** ⇒ Schnellste Teilchen treten aus Flüssigkeit aus

**Sieden/Verdampfen** Dampfdruck = Umgebungsdruck

### 11.3 Dampfdruck-Kurve (Clausius-Clapeyron)

Kondensieren ⇔ Verdampfen      flüssig ⇔ gasförmig

$$\frac{dp_s}{dT} = \frac{q_s}{T \cdot \left( \frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_f} \right)}$$

#### 11.3.1 Dampfdruck $p_s(T)$ von Wasser (Clausius-Clapeyron)

$$p_s(T) = p_{s0} \cdot e^{\frac{q_s \cdot M_W}{R} \cdot \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)}$$

$$p_{s0} = 610.7 \text{ Pa} \quad T_0 = 273 \text{ K} \quad q_s = 2420 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \quad M_W = 18.02 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

### 11.4 Schmelzdruck-Kurve (Clausius-Clapeyron)

Erstarren ⇔ Schmelzen      fest ⇔ flüssig

$$\frac{dp_f}{dT} = \frac{q_f}{T \cdot \left( \frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_s} \right)}$$

### 11.5 Gasdruck-Kurve (Clausius-Clapeyron)

Desublimieren ⇔ Sublimieren      fest ⇔ gasförmig

$$\frac{dp_{sub}}{dT} = \frac{q_s + q_f}{T \cdot \left( \frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_s} \right)}$$

$q_s$	spezifische Verdampfungs-Wärme	$[q_s] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$
$q_f$	spezifische Schmelz-Wärme	$[q_f] = \frac{\text{J}}{\text{kg}}$
$q_s + q_f$	spezifische Sublimations-Wärme	
$p_s$	Dampfdruck	$[p_s] = \text{Pa}$
$p_f$	Schmelzdruck	$[p_f] = \text{Pa}$
$p_g$	Schmelzdruck	$[p_g] = \text{Pa}$
$\rho_g$	Dichte Gas	$[\rho_g] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$\rho_f$	Dichte Flüssigkeit	$[\rho_f] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$\rho_s$	Dichte Festkörper	$[\rho_s] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$T$	Temperatur	$[T] = \text{K}$
$M$	Molare Masse	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
$R$	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

### 11.6 Formeln von Magnus

Die Formeln von Magnus dienen der vereinfachten Berechnung des Dampfdrucks von Wasser = Sättigungsdruck

#### 11.6.1 Dampfdruck von Wasser $p_s(\theta)$ ( $\theta \geq 0^\circ\text{C}$ )

$$p_s(\theta) = p_{s0} \cdot 10^{\frac{7.5 \cdot \theta}{\theta + 237}}$$

#### 11.6.2 Schmelzdruck von Wasser $p_s(\theta)$ ( $\theta \leq 0^\circ\text{C}$ )

$$p_s(\theta) = p_{s0} \cdot 10^{\frac{9.5 \cdot \theta}{\theta + 265.5}}$$

#### 11.6.3 WMO erweiterte Lösung $p_s(\theta)$ ( $-40^\circ\text{C} < \theta < 50^\circ\text{C}$ )

$$p_s(\theta) = p_{s0} \cdot e^{\left( \frac{17.62 \cdot \theta}{243.04 + \theta} \right)}$$

$p_s$  Dampfdruck / Schmelzdruck       $[p_s] = \text{Pa}$   
 $p_{s0}$  Dampfdruck bei  $0^\circ\text{C}$        $p_{s0} = 610.7 \text{ Pa}$        $[p_{s0}] = \text{Pa}$   
 $\theta$  Temperatur       $[\theta] = {}^\circ\text{C}$

### 11.7 Umkehrformeln von Magnus

#### 11.7.1 $\theta(p_s)$ für $p_s \geq p_{s0}$

$$\theta(p_s) = \frac{237 \cdot \log\left(\frac{p_s}{6.107}\right)}{7.5 - \log\left(\frac{p_s}{6.107}\right)}$$

#### 11.7.2 $\theta(p_s)$ für $p_s \leq p_{s0}$

$$\theta(p_s) = \frac{265.5 \cdot \log\left(\frac{p_s}{p_{s0}}\right)}{9.5 - \log\left(\frac{p_s}{p_{s0}}\right)}$$

### 11.8 Luftfeuchtigkeit

#### 11.8.1 Absolute Luftfeuchtigkeit $f$

$$f = \frac{m_W}{V}$$

#### 11.8.2 Relative Luftfeuchtigkeit $f_r$

$$f_r = \frac{m_W}{m_S} = \frac{p_D}{p_S} = \frac{p_D}{p_S(\theta)}$$

$f$	Absolute Luftfeuchtigkeit	$[f] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$f_r$	Relative Luftfeuchtigkeit	$[f_r] = 1$
$m_W$	Masse Wasserdampf	$[m_W] = \text{kg}$
$m_S$	Masse Wasserdampf bei Sättigung	$[m_S] = \text{kg}$
$V$	Volumen	$[V] = \text{m}^3$
$p_D$	Partialdruck Wasserdampf	$[p_D] = \text{Pa}$
$p_S$	Dampfdruck = Sättigungsdruck Wasserdampf	$[p_s] = \text{Pa}$
$\theta$	Temperatur	$[\theta] = {}^\circ\text{C}$

### 11.8.3 Feuchte vs. trockene Luft

Feuchte Luft ist leichter als trockene Luft!

$$\rho_f = \rho_t + \frac{p_D}{RT} (M_W - M_L)$$

$\rho_f$	Dichte feuchte Luft	$[\rho_f] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$\rho_t$	Dichte trockene Luft ( $\frac{p_0 M_L}{RT}$ )	$[\rho_t] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$p_D$	Partialdruck Wasserdampf	$[p_D] = \text{Pa}$
$T$	Temperatur	$[T] = K$
$M_W$	Molmasse $H_2O$ (18g/mol)	$[M_W] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
$M_L$	Molmasse Luft (28.949g/mol)	$[M_L] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
$R$	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

### 11.9 Taupunkts-Temperatur $\theta_d$

Temperatur, bei welcher 100% Luftfeuchtigkeit herrscht.

Wenn die Taupunkt-Temperatur **unterschritten** wird, dann kondensiert Wasser.

$$\theta_d(\theta, f_r) = \frac{237 \cdot (\log(f_r) + \frac{7.5 \cdot \theta}{\theta + 237})}{7.5 - (\log(f_r) + \frac{7.5 \cdot \theta}{\theta + 237})}$$

$$\theta_d(x) = \frac{237 \cdot x}{7.5 - x} \quad \text{mit} \quad x(\theta, f_r) = \log(f_r) + \frac{7.5 \cdot \theta}{\theta + 237}$$

$\theta_d$	Taupunkts-Temperatur	$[\theta_d] = {}^\circ\text{C}$
$f_r$	relative Luftfeuchtigkeit	$[f_r] = 1$
$\theta$	Temperatur	$[\theta] = {}^\circ\text{C}$

### 11.10 Relative Innen-Feuchte $f_{ri}$

$$f_{ri} = \frac{p_s(\theta_a)}{p_s(\theta_i)} \cdot f_{ra}$$

$f_{ri}$	relative Feuchte im Inneren	$[f_{ri}] = 1$
$f_{ra}$	relative Feuchte der Aussenluft	$[f_{ra}] = 1$
$p_s(\theta_i)$	Dampfdruck bei Innentemperatur	$[p_s(\theta_i)] = \text{Pa}$
$p_s(\theta_a)$	Dampfdruck bei Aussentemperatur	$[p_s(\theta_a)] = \text{Pa}$

## 12 Kinetische Gas-Theorie

### 12.1 Aequipartitionsgesetz

Mittlere kinetische Energie

Idealisierte Annahmen:

1. Moleküle = Massenpunkte
2. Keine (bzw.) elastische Zusammenstöße
3. Keine Kräfte zwischen den Molekülen
4. Elastischer Stoss gegen Wand
5. Alle Moleküle haben gleiche Geschwindigkeit
6. 1/6 aller Moleküle fliegen gegen eine einzelne Wand

$$\bar{E} = f \cdot \frac{k \cdot T}{2}$$

- |         |                |
|---------|----------------|
| $f = 3$ | 1-atomiges Gas |
| $f = 5$ | 2-atomiges Gas |
| $f = 6$ | 3-atomiges Gas |

$\bar{E}$	Mittlere kinetische Energie	$[\bar{E}] = J$
$f$	Freiheitsgrade	$[f] = 1$
$k$	Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$	$[k] = \frac{J}{K}$
$T$	Absolute Temperatur	$[T] = K$

### 12.2 Geschwindigkeiten

#### 12.2.1 Mittlere quadratische Geschwindigkeit $u$

$$u = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}}$$

#### 12.2.2 Mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 \cdot k \cdot T}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi M}}$$

#### 12.2.3 Wahrscheinlichste Geschwindigkeit $v_0$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot T}{M}}$$

$k$	Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$	$[k] = \frac{J}{K}$
$T$	absolute Temperatur	$[T] = K$
$m$	Masse des Teilchens	$[m] = \text{kg}$
$M$	Molmasse	$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
$R$	Universelle Gaskonstante: $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	$[R] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

### 12.3 Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$f(m, T, v) = \sqrt{\frac{2 \cdot m^3}{\pi \cdot k^3 \cdot T^3}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k \cdot T}}$$

$m$	Masse des Teilchens	$[m] = \text{kg}$
$k$	Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$	$[k] = \frac{J}{K}$
$T$	absolute Temperatur	$[T] = K$
$v$	Geschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

### 12.4 Mittlere freie Weglänge $\bar{\lambda}$

Gibt an, um welche Strecke sich ein Molekül im Mittel bis zum nächsten Zusammenstoß fortbewegen kann.

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n \cdot (\pi \cdot d^2)}$$

mit Wirkungsquerschnitt  $\sigma = \pi \cdot d^2$

$$\begin{aligned} n & \text{ Molekül-Dichte} \\ d & \text{ Molekül-Durchmesser} \end{aligned} \quad \begin{aligned} [n] &= \frac{1}{\text{m}^3} \\ [d] &= \text{m} \end{aligned}$$

### 12.5 Dichtefunktion

Verteilungsfunktion der mittleren, freien Weglänge

$$f(x) = \frac{1}{\bar{\lambda}} \cdot e^{-\frac{x}{\bar{\lambda}}}$$

### 12.6 Transportvorgänge

#### 12.6.1 Wärmeleitung

Transport von **kinetischer Energie** (als Wärme wahrgenommen)

$$j_Q = -\lambda_Q \cdot \frac{dT}{dx} \quad \lambda_Q = \frac{1}{6} \cdot n \cdot \bar{v} \cdot \bar{\lambda} \cdot f \cdot k$$

#### 12.6.2 Diffusion

Transport von **Masse**

$$j_D = -D \cdot \frac{dn}{dx} \quad D = \frac{1}{3} \cdot \bar{v} \cdot \bar{\lambda}$$

#### 12.6.3 Viskosität ( $v \ll v_{therm}$ )

Transport von **Impuls**

$$\tau = -\eta \cdot \frac{dv}{dx} \quad \eta = \frac{1}{3} \cdot \bar{v} \cdot \bar{\lambda} \cdot \rho$$

$j_Q$	Wärmestrom	$[j_Q] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
$\lambda_Q$	Wärmeleitfähigkeit	$[\lambda_Q] = \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$
$j_D$	Diffusionsstrom	$[j_D] = ?$
$D$	Diffusionskonstante	$[D] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
$\tau$	Schubspannung	$[\tau] = \text{N}$
$\eta$	Viskosität	$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$
$n$	Molekül-Dichte	$[n] = \frac{1}{\text{m}^3}$
$\bar{v}$	Mittlere Geschwindigkeit	$[\bar{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$\bar{\lambda}$	Mittlere freie Weglänge	$[\bar{\lambda}] = \text{m}$
$f$	Anzahl Freiheitsgrade	$[f] = 1$
$k$	Boltzmann-Konstante $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$	$[k] = \frac{J}{K}$
$T$	absolute Temperatur	$[T] = K$
$\rho$	Dichte	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

## 13 Temperaturstrahlung

- Wärmestahlung = Berührungslose Übertragung von Wärme
- In Form von elektromagnetischen Wellen ( $\lambda @ \text{IR}$ )
- Körper absorbiert elektromagn. Strahlung und erhöht seine Temperatur  
Jeder Körper mit  $T > 0 \text{ K}$  strahlt Wärme ab (Temp-strahlung)
- Für jede Wellenlänge muss ein Körper gleich viel Energie abstahlen, wie er zuvor aufgenommen hat!

## 13.1 Strahlungs-Gesetze

### 13.1.1 Stefan-Boltzmann-Gesetz

- Ideal schwarzer Körper (Hohlraum) absorbiert alle Wellenlängen zu 100 %
- Je mehr ein Körper absorbiert, desto mehr muss er emmitieren (Energie-Gleichgewicht)

Ein schwarzer Körper (=Hohlraumstrahler) der Temperatur  $T$  hat eine totale Abstrahlungs-Leistung pro Oberfläche  $K_S$  von:

$$K_S = \sigma \cdot T^4$$

$$\begin{aligned} K_S &\quad \text{Schwarzkörper-Emission} \quad [K_S] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ \sigma &\quad \text{Stefan-Boltzmann-Konstante} \quad [\sigma] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \\ \sigma &= 5.671 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \end{aligned}$$

$$T \quad \text{Temperatur} \quad [T] = \text{K}$$

### 13.1.2 Wien'sches Verschiebungsgesetz

Verschiebung der maximalen Wellenlänge:

$$\lambda_{max} \cdot T = \text{const} = b$$

$$\begin{aligned} \lambda_{max} &\quad \text{Wellenlängen-Maximum (Planck)} \quad [\lambda_{max}] = \text{m} \\ T &\quad \text{Temperatur} \quad [T] = \text{K} \\ b &\quad \text{Konstante: } b = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad [b] = \text{m} \cdot \text{K} \end{aligned}$$

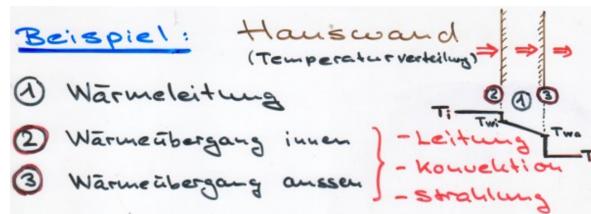
### 13.1.3 Planck'sches Gesetz der Quantenmechanik

Ein Oszillator, welcher auf ein anderes Energieniveau (=Elektronen-Kreisbahnen nach Bohr) wechselt, setzt die Energiedifferenz  $\Delta E$  in ein Lichtquant (Photon) mit entsprechender Frequenz  $f$  um.  
Je nach Vorzeichen von  $\Delta E$  wird das Photon emmitiert oder absorbiert.

$$\Delta E = h \cdot f$$

$$\begin{aligned} \Delta E &\quad \text{spektrale Abstrahlung (Energie)} \quad [\Delta E] = \text{J} \\ h &\quad \text{Planck'sches Wirkungsquantum} \quad [h] = \text{J} \cdot \text{s} \\ h &= 6.628 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ f &\quad \text{Frequenz des Photons} \quad [f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz} \end{aligned}$$

## 13.2 Wärmetransport (an Beispiel Hauswand)



### 13.2.1 Wärmeleitung

$$j = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx}$$

$$\begin{aligned} j &\quad \text{Wärmestromdichte} & [j] &= \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ \lambda &\quad \text{Wärmeleitfähigkeit} & [\lambda] &= \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \\ \frac{dT}{dx} &\quad \text{Wärmeabnahme / Gradient} & [\frac{dT}{dx}] &= \frac{\text{T}}{\text{m}} \end{aligned}$$

### 13.2.2 Wärmeübergang

$$\text{innen: } j = \alpha_i \cdot (T_i - T_{wi}) \quad \text{mit } \alpha_i = 8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

$$\text{außen: } j = \alpha_a \cdot (T_{wa} - T_a) \quad \text{mit } \alpha_a = 20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

### 13.2.3 Wärmedurchgang

Material + Dicke zusammengefasst (Bereich von  $k$  beachten!!)

$$j = k \cdot (T_i - T_a) = k \cdot \Delta T \quad \text{mit } k = \frac{\lambda}{d}$$

$$\begin{aligned} j &\quad \text{Wärmestromdichte} & [j] &= \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ \lambda &\quad \text{Wärmeleitfähigkeit} & [\lambda] &= \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \\ \frac{dT}{dx} &\quad \text{Wärmeabnahme / Gradient} & [\frac{dT}{dx}] &= \frac{\text{T}}{\text{m}} \\ \alpha_i &\quad \text{Wärmeübergangszahl innen} & [\alpha_i] &= \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \\ \alpha_a &\quad \text{Wärmeübergangszahl aussen} & [\alpha_a] &= \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \\ T_{wa} &\quad \text{Temperatur Wand aussen} & [T_{wa}] &= \text{K} \\ T_a &\quad \text{Aussentemperatur} & [T_a] &= \text{K} \\ T_{wi} &\quad \text{Temperatur Wand innen} & [T_{wi}] &= \text{K} \\ T_i &\quad \text{Innentemperatur} & [T_i] &= \text{K} \\ k &\quad \text{Wärmedurchgangszahl} & [k] &= \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \\ d &\quad \text{Dicke der Wand} & [d] &= \text{m} \end{aligned}$$

$$P = \dot{Q} = j \cdot A \quad \text{siehe auch 13.3}$$

### 13.2.4 Wärmedurchgang komplett

Der komplett Wärmedurchgang leitet sich her durch die Erhaltung der Wärmestrondichte  $j$  und errechnet sich mit:

$$\text{n Schichten: } \frac{1}{k_{tot}} = \frac{1}{\alpha_i} + \sum_x \frac{1}{k_x} + \frac{1}{\alpha_a}$$

$$\text{zylindrisch: } \frac{1}{k_{tot}} = r_a \left( \frac{1}{\alpha_i \cdot r_i} + \sum_x \frac{1}{\lambda_x} \cdot \ln \left( \frac{r_{xa}}{r_{xi}} \right) + \frac{1}{\alpha_a \cdot r_a} \right)$$

$k_x$	Wärmedurchgangszahl x-te Schicht	$[k_x] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$
$\alpha_i$	Wärmeübergangszahl innen	$[\alpha_i] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$
$\alpha_a$	Wärmeübergangszahl aussen	$[\alpha_a] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$
$r_i$	Innenradius Rohr	$[r_i] = \text{m}$
$r_a$	Aussenradius Rohr	$[r_a] = \text{m}$
$\lambda_x$	Wärmeleitfähigkeit	$[\lambda] = \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$

## 13.3 Wärme-Bedarf (Heizleistung)

Der Wärme-Bedarf (=Heizleistung) setzt sich zusammen aus Wärmeverlust durch Wärmeleitung und durch Wärmeverlust durch Luftaustausch:

$$\underbrace{\dot{Q}_{tot}}_{\dot{Q}} = \underbrace{Heizleistung}_{P}$$

$$P = \dot{Q}_{tot} = \dot{Q}_W + \dot{Q}_L$$

$$\dot{Q}_W = A \cdot j = A \cdot k \cdot \Delta T$$

$$\dot{Q}_L = c_L \cdot \rho_L \cdot \dot{V} \cdot \Delta T$$

$$\text{allgemein: } \dot{Q}_{tot} = \sum_{i=1}^n [(A_i \cdot k_i + c_L \cdot \rho_L \cdot \dot{V}) \cdot \Delta T]$$

$\dot{Q}_{tot}$	Totaler Wärmeverlust	$[\dot{Q}_{tot}] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$
$\dot{Q}_W$	Wärmeleitung	$[\dot{Q}_W] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$
$\dot{Q}_L$	Luftaustausch	$[\dot{Q}_L] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$
$k_i$	Wärmedurchgangszahl i-te Schicht	$[k_i] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$
$\dot{V}$	Volumenstrom ( $\dot{V} = \frac{V}{t}$ )	$[\dot{V}] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$
$\rho_L$	Dichte der Luft: $\rho_L = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$[\rho_L] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$c_L$	Wärmekapazität Luft: $c_L = 1000 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$	$[c_L] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$
$A$	Fläche der Wärmeleitung	$[A] = \text{m}^2$
$\Delta T$	Temperaturdifferenz	$[\Delta T] = \text{K}$

## 13.4 Wärmeverlust durch Abstrahlung

Durch Strahlung kann auch Wärme übertragen werden.

$$j_{12} = c_{12} \cdot (T_1^4 - T_2^4) = \sigma \cdot \varepsilon \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

$j_{12}$	W-Transport durch Strahlungsaustausch	$[j_{12}] = \frac{W}{m^2}$
$c_{12}$	Strahlungsaustauschzahl	$[c_{12}] = \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$
$\sigma$	Stefan-Boltzmann-Konstante	$[\sigma] = \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$
		$\sigma = 5.671 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$
$\varepsilon$	Emissionsverhältnis	$[\varepsilon] = 1$

## 13.5 Zustandsänderungen

Erinnerung 1. Hauptsatz:  $\Delta U = \Delta W + \Delta Q$

### 13.5.1 Isotherm

bei konstanter Temperatur

$$W_{ab} = n \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

$$\Delta Q_{zu} = W \quad (\Delta U = 0)$$

### 13.5.2 Isobar

bei konstantem Druck

$$W_{ab} = p \cdot (V_2 - V_1)$$

$$\Delta Q_{zu} = n \cdot C_{mp} \cdot \Delta T$$

### 13.5.3 Isochor

bei konstantem Volumen

$$W = 0$$

$$\Delta Q_{zu} = n \cdot C_{mV} \cdot \Delta T \quad (\Delta U = \Delta Q)$$

### 13.5.4 Adiabatisch

ohne Wärme-Austausch

$$W_{ab} = n \cdot C_{mV} \cdot \Delta T = c \cdot m \cdot \Delta T$$

$$\Delta Q = 0$$

## 14 Rückwandlung innerer Energie

### 14.1 Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre

Innere Energie kann **nicht zu 100 %** in Arbeit umgesetzt werden  
 ⇒ Carnot-Wirkungsgrad ist der theoretisch höchstmögliche.

Wärme kann niemals von selbst von einem kälteren Ort zu einem wärmeren Ort fließen (Clausius)

Es gibt keine periodisch wirkende Maschine, die nichts anderes bewirkt als Erzeugung mechanischer Arbeit und Abkühlung eines

Wärme-Reservoirs (Kelvin)

⇒ Es gibt kein Perpetuum mobile 2. Art

## 14.2 Kreisprozess (reversibler Prozess)

Anfangszustand = Endzustand

Rechtslaufender Kreisprozess

- Gibt Arbeit ab
- Wärmekraftmaschine**
- Bei hoher  $T$  wird Wärme aus Prozess **zugeführt**
- Nur Bruchteil der Wärme in Arbeit verwandelbar
- Obergrenze: Carnot-Wirkungsgrad
- Verbraucht Arbeit
- Wärmepumpe**
- Bei hoher  $T$  wird dem Prozess Wärme **abgeführt**
- Erzeugt mehrfaches an Wärme
- Obergrenze: Inv. Carnot-Wirkungsgrad

## 14.3 Carnot-Wirkungsgrad

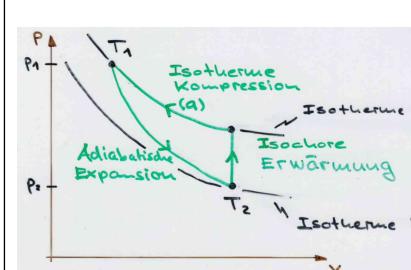
$$\text{Wärmekraftmaschine: } n_C = \frac{W_{ab}}{Q_{zu}} = \frac{T_{hoch} - T_{tiefl}}{T_{hoch}}$$

$$\text{Wärmepumpe: } n_{iC} = \frac{Q_{zu}}{W_{ab}} = \frac{T_{hoch}}{T_{hoch} - T_{tiefl}}$$

$n_C$	Carnot-Wirkungsgrad	$[n_C] = 1$
$n_{iC}$	Inverser Carnot-Wirkungsgrad	$[n_{iC}] = 1$
$T_{tiefl}$	Temperatur des Warm-Reservoirs	$[T_{tiefl}] = K$
$T_{hoch}$	Temperatur des Kalt-Reservoirs	$[T_{hoch}] = K$
$Q_{zu}$	zugeführte Wärme	$[Q_{zu}] = J$
$W_{ab}$	abgeführte Energie	$[W_{ab}] = J$

## 14.4 Adiabaten-Gleichung (Kreisprozess)

Adiabate wird beschrieben im pV- / TV- / Tp-Diagramm



$$p \cdot V^\kappa = \text{const}$$

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const}$$

$$T^\kappa \cdot p^{1-\kappa} = \text{const}$$

$$\kappa = \frac{C_{mp}}{C_{mV}}$$

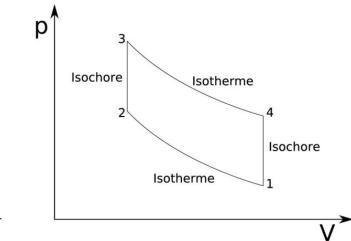
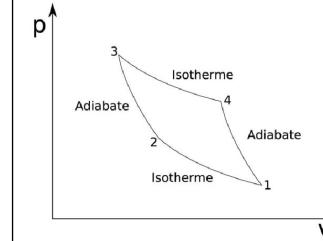
$$C_{mp} - C_{mV} = R$$

$C_{mp}$	Molare Wärmekapazität @ $p = \text{const}$	$[C_{mp}] = \frac{J}{\text{mol} \cdot K}$
$C_{mV}$	Molare Wärmekapazität @ $V = \text{const}$	$[C_{mV}] = \frac{J}{\text{mol} \cdot K}$
$\kappa$	Adiabaten-Exponent	$[\kappa] = 1$
$R$	Universelle Gaskonstante $R = 8.314 \frac{J}{\text{mol} \cdot K}$	$[R] = \frac{J}{\text{mol} \cdot K}$

## 14.5 Kreisprozesse (Vorgänge)

isotherme Expansion	liefert Wärme	benötigt Energie
isotherme Kompression	benötigt Wärme	liefert Energie
adiabatische Expansion	liefert Arbeit	ohne Wärme
adiabatische Kompression	benötigt Arbeit	ohne Wärme
isochore Erwärmung	ohne Arbeit	benötigt Wärme
isochore Abkühlung	ohne Arbeit	liefert Wärme

## 14.6 Beispiel Kreisprozess



## 14.7 Entropie-Zunahme

### 14.7.1 Definition der Entropie-Zunahme

$$\Delta S = S_1 + S_2 = \int \frac{1}{T} dQ$$

### 14.7.2 Boltzmann-Gleichung für Entropie-Zunahme

$$\Delta S = k \cdot \ln(W)$$

$\Delta S$  Entropie

$k$  Boltzmann-Konstante  $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

$W$  Wahrscheinlichkeit eines Zustands

$$[\Delta S] = \frac{J}{K}$$

$$[k] = \frac{J}{K}$$

$$[W] = 1$$

### 14.7.3 Abgeschlossenes System

$\Delta S \geq 0$  Entropie kann nur zunehmen in abgeschl. System

$\Delta S > 0$  Irreversibler Prozess

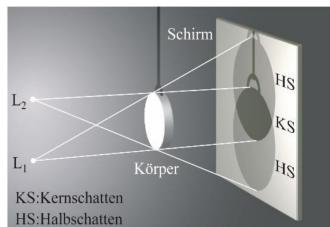
$\Delta S = 0$  Reversibler Prozess

## 15 Optik

### 15.1 Licht

Licht kann auf mehrere Arten beschrieben werden:

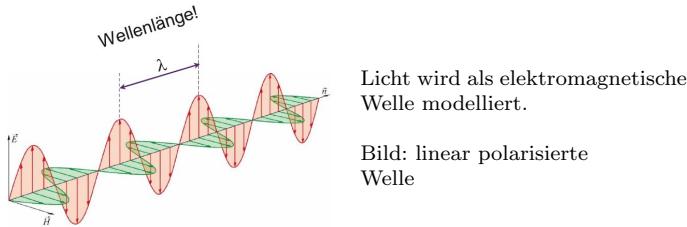
#### 15.1.1 Lichtstrahlen



Die **geometrische Optik** oder **Strahlenoptik** geht davon aus, dass sich das Licht im Vakuum als **geradliniger Strahl** ausbreitet.

Mit der geometrischen Optik können die Phänomene Reflexion und Brechung erklärt werden.

#### 15.1.2 Lichtwellen



#### Lichtfarben und ihre Frequenzen / Wellenlängen

Farbe	Wellenlänge in nm
violett	380 ... 435
blau	435 ... 465
blaugrün	465 ... 485
grün	485 ... 565
gelb	565 ... 590
orange	590 ... 630
rot	630 ... 780

$\lambda$  Wellenlänge

$c$  Lichtgeschw.  $c = 299'792'458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$f$  Frequenz

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$$[\lambda] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$[c] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$[f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$$

#### 15.1.3 Lichtteilchen

Modellvorstellung des Lichts als ein Fluss von Lichtteilchen (**Photonen**)

$$E = h \cdot f$$

$E$  Energie eines Photons

$h$  Planck'sche Konstante  $6.626 \cdot 10^{-34} \frac{\text{J}}{\text{Hz}}$

$f$  Frequenz

$$[E] = \text{J}$$

$$[h] = \frac{\text{J}}{\text{Hz}}$$

$$[f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$$

## 15.2 Lichtquellen

### 15.2.1 Thermische Strahler

**Schwarzkörper-Modell:** Modell eines Körpers, der in alle Richtungen abstrahlt (und energetisch im Gleichgewicht ist)

Ein Schwarzkörper strahlt **alle** Lichtfarben ab. (auch die für den Mensch nicht sichtbaren.)

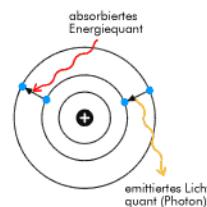
#### Glühbirnen

Muss auf allen Wellenlängen angeregt werden, um schliesslich sichtbares Licht abzustrahlen.  
⇒ Es wird viel Energie nicht nutzbar 'verheizt'

#### LEDs

Können mit einer bestimmten Frequenz angeregt werden und strahlen nur gewünschtes Licht ab.  
⇒ energieeffizient

### 15.2.2 Lumineszenz



Elektronen werden angeregt und steigen in energetisch höheren Zustand. Sobald die Elektronen wieder in ihren Grundzustand zurückkehren wird ein Lichtquant (Photon) abgestrahlt. Die Leuchtfarbe wird durch die Frequenz der Anregung bestimmt.

**Fluoreszenz:** kein Nachleuchten

**Phosphoreszenz:** mit Nachleuchten

## 15.3 Messgrößen

### 15.3.1 Radiometrie

Physikalische Messgrößen der elektromagnetischen Strahlung

### 15.3.2 Photometrie

Radiometrische Größen, gewichtet mit dem photometrischen Strahlungsäquivalent  $K$ , welches die **Empfindlichkeit des menschlichen Auges** angibt.

#### Photometrischen Strahlungsäquivalent $K$

Gibt die Empfindlichkeit des menschlichen Auges wieder und ist eine empirisch genormte Kurve  
⇒ Das menschliche Auge ist bei einer Wellenlänge von 555 nm (grüne Farbe) am empfindlichsten. ( $638 \frac{\text{nm}}{\text{W}}$ )

## 15.4 Gegenüberstellung

Radiometrie			Photometrie		
Quellen	Einheit	Symbol	Grösse	Symbol	Einheit
Quellen	W	$\Phi_e$	Strahlungsfluss (Radiant flux)	Lichtstrom (Luminous flux)	$\Phi_v = \int K(\lambda) \frac{d\Phi_e}{d\lambda} d\lambda$ lumen, lm
Quellen	$W \text{ sr}^{-1}$	$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega}$	Strahlstärke (Radiant intensity)	Lichtstärke (Luminous intensity)	$I_v = \frac{d\Phi_v}{d\Omega}$ cd = lm sr <sup>-1</sup>
Empfänger	$W \text{ m}^{-2}$	$E_e = \frac{d\Phi_e}{dA}$	Bestrahlungsstärke (Irradiance)	Beleuchtungsstärke (Illuminance)	$E_v = \frac{d\Phi_v}{dA}$ lx = lm m <sup>-2</sup>

## 15.5 Raumwinkel

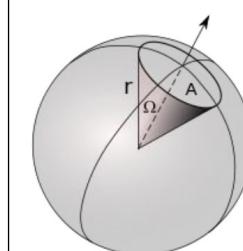
### 15.5.1 Winkel in der Ebene (Radian)

Länge des Bogens auf einem Kreis mit  $r = 1 \text{ m}$

$$\alpha = \frac{L}{r}$$

Vollkreis:  $2\pi$        $[\alpha] = \text{rad}$

### 15.5.2 Winkel im Raum (Steradian)

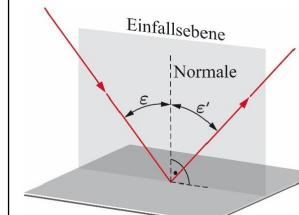


Aufgespannte Fläche, projiziert auf eine Kugel mit  $r = 1 \text{ m}$

$$\Omega = \frac{A}{r^2} = \frac{A}{1\text{m}^2}$$

Kugel:  $4\pi$        $[\Omega] = \text{sr}$

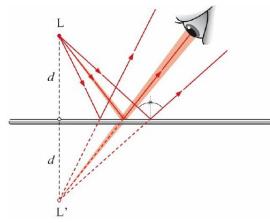
## 15.6 Reflexionsgesetz



Einfallswinkel = Ausfallwinkel

$$\varepsilon = \varepsilon'$$

## 15.6.1 Grenzflächen von Reflexionen

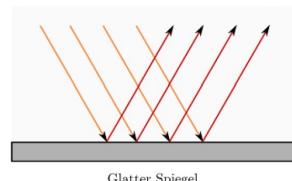


**L** **reelles Bild**

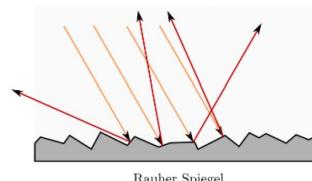
Bild, welches auf Schirm abgebildet werden kann

**L'**

**virtuelles Bild** (Spiegelbild von L)  
Bild, welches nicht auf Schirm abgebildet werden kann



Glatter Spiegel  
Direkte Reflexion



Rauer Spiegel  
Diffuse Reflexion

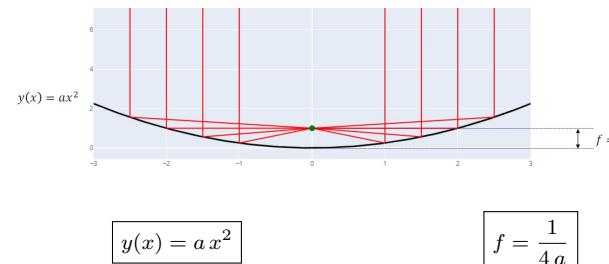
## 15.7 Reflexionen - Spezialfälle

**Brennpunkt F** Brennpunkt (Fokus) ist der Punkt, in dem parallel zur optischen Achse auf einen Spiegel oder eine Linse einfallende Stahlen sich schneiden

**Brennweite f** Abstand des Brennpunktes von der Linse bzw. dem Spiegel

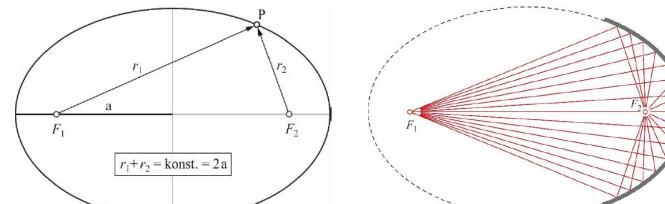
### 15.7.1 Parabolspiegel

Parallel einfallende Strahlen werden in einem Punkt fokussiert



### 15.7.2 Elliptischer Spiegel

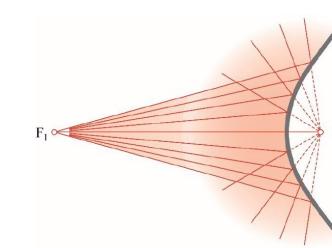
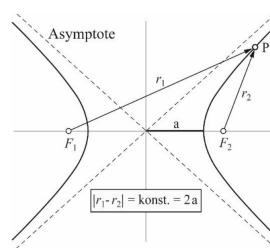
Konzentration von Energie in einem nicht zugänglichen Punkt



$$y(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

### 15.7.3 Hyperbolischer Spiegel

Objekt in Spiegel versetzen

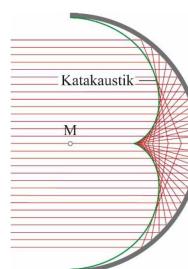


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

### 15.7.4 Sphärische Spiegel

Paralell einfallende Stahlen werden nicht mehr in einem Punkt fokussiert (Katakaustik)

Da die achsnahen Strahlen nach der Reflexion annähernd durch einen Punkt gehen, wird dieser Punkt wieder Brennpunkt F genannt.



$$f = \frac{r}{2}$$

**f** Brennweite

**r** Krümmungsradius des Spiegels

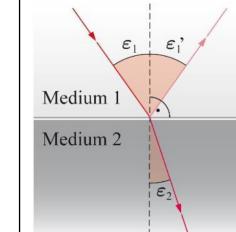
$[f] = \text{m}$

$[r] = \text{m}$

## 15.8 Brechung

Fällt ein Lichtstrahl auf die Grenzfläche zweier Medien, so dringt ein Teil des einfallenden Lichtes in das zweite Medium ein. Die auftretende Richtungsänderung wird als **Brechung** bezeichnet. Der in das zweite Medium eindringende Strahl wird **gebrochener Strahl** genannt.

### 15.8.1 Brechungsgesetz / Geschwindigkeit



$$\frac{\sin(\varepsilon_1)}{\sin(\varepsilon_2)} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$v_i = \frac{c}{n_i}$$

Je grösser  $n$ , desto grösser die Ablenkung und desto kleiner  $\varepsilon$

$\varepsilon_i$  Winkel zur Normalen

$n_i$  Brechungsindex

$v_i$  Geschwindigkeit im Medium  $n_i$

$c$  Lichtgeschwindigkeit  $c = 300 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$[\varepsilon_i] = ^\circ$$

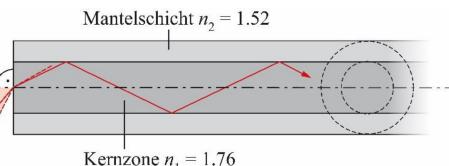
$$[n_i] = 1$$

$$[v_i] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

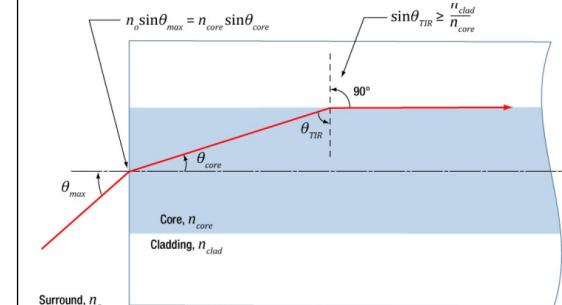
$$[c] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### 15.8.2 Anwendung: Glasfaser

Der Lichtstrahl bleibt in der Kernzone (Medium 1) gefangen, da diese einen grösseren Brechungsindex hat als die Mantelschicht (Medium 2)



**Extremfall (Numerical Aperture NA =  $n \sin \theta_{max}$ ):**



$$n_0 \sin \theta_{max} = \sqrt{n_{core}^2 - n_{clad}^2 \tan^2 \theta_{core}}$$

### 15.8.3 Totalreflexion

Der Einfallswinkel  $\varepsilon_1$  kann nicht grösser als  $90^\circ$  sein.  
Für  $\varepsilon_1 = 90^\circ$  berechnet sich  $\varepsilon_2 = \varepsilon_g$  aus:

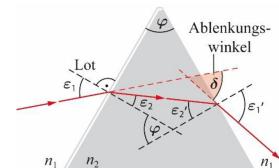
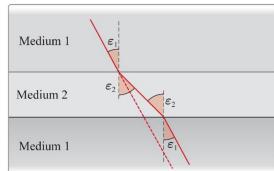
$$\varepsilon_g = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$$

Für den Grenzfall von  $\varepsilon_1 > 90^\circ$  wird der gesamte Stahl reflektiert.



### 15.8.4 Brechung an ebenen Grenzflächen

Ein Lichtstrahl wird verschoben bzw. in eine beliebige Richtung geändert

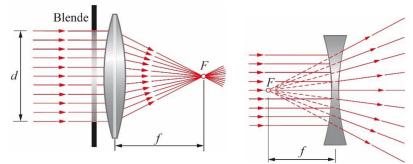


$$n = \frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{\sin \frac{\varphi+\delta}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

### 15.8.5 Brechung an gekrümmten Flächen

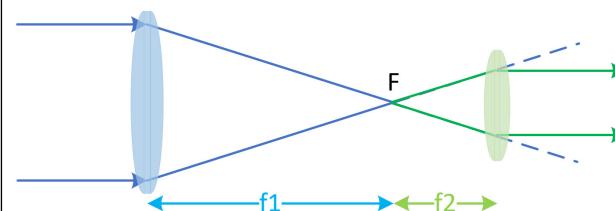
DIE Anwendung der Brechung ist eine Linse.

### 15.8.6 Linsentypen



**Fresnellinse:** Es kann vermieden werden, dass die Linse eine übermässige Dicke aufweist.

### 15.8.7 Beispiel mit zwei Linsen



Rechts gibt es ein kleineres Bild als links.

### 15.8.8 Typische Brechungswerte

Material	Brechungsindex n für $\lambda = 589 \text{ nm}$
Luft (Normalbed.)	1.000'292
Helium (Normalbed.)	1.000'034'911
Wasser (20°C)	1.33
Glycerin	1.47
Quarzglas	1.54
Plexiglas	1.51
Kronglas	1.52
Brillenglas (Kunststoff)	bis 1.76
Diamant	2.42

## 15.9 Dispersion

Der Brechungsindex eines Mediums ist eine **Funktion der Wellenlänge**:  $n = n(\lambda)$

Diese Wellenlängenabhängigkeit wird als **Dispersion** bezeichnet

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{A}{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}}$$

$$n^2(f) = 1 + \frac{A'}{f_0^2 - f^2}$$

### 15.9.1 Abbe Zahl V

Gibt an, wie stark dispersiv ein Material ist  
Große Abbe-Zahl  $\rightarrow$  wenig dispersives Material

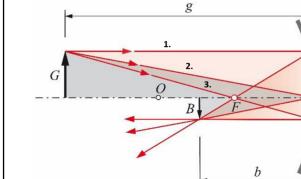
## 15.10 Abbildungen

### 15.10.1 Konstruktions-Anweisung

Man benutzt zwei der drei Hauptstrahlen:

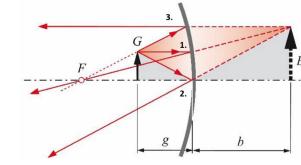
1. Paralleler Strahl  $\rightarrow$  Brennpunkt
2. Mittelpunkt-Strahl  $\rightarrow$  mit gleichem Winkel zurück
3. Brennpunkt-Strahl  $\rightarrow$  Paralleler Strahl

### reelles Bild



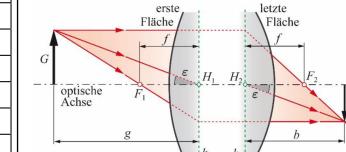
B wird als **reeller Bildpunkt** bezeichnet, wenn sich die austretenden Strahlen schneiden.

### virtuelles Bild



B wird als **virtueller Bildpunkt** bezeichnet, wenn sich nur die Verlängerungen der austretenden Strahlen schneiden.

### 15.10.2 Terminologie



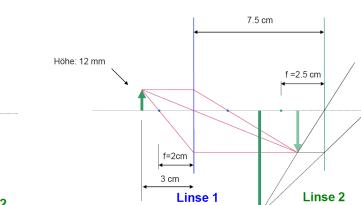
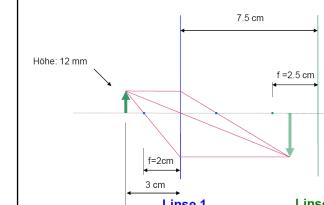
$h_1$  Vordere Hauptebene  
 $h_2$  Hintere Hauptebene  
 $H_1$  Vorderer Hauptpunkt  
 $H_2$  Hinterer Hauptpunkt

$f$  Brennweite  
 $g$  Gegenstandsweite  
 $b$  Bildweite

Die **Öffnungsblende** oder **Aperturblende** begrenzt das in das System einfallende Lichtbündel (Irisblenden, Linsenfassungen)

Die **Feldblende** begrenzt das Bildfeld. Sie legt den Ausschnitt der Objektebene fest, der abgebildet wird. (Foto-, Filmkamera: Formatarahmen)

### 15.10.3 Beispiel: Abbildungen bei zwei Sammellinsen



## 15.11 Abbildungsgleichungen

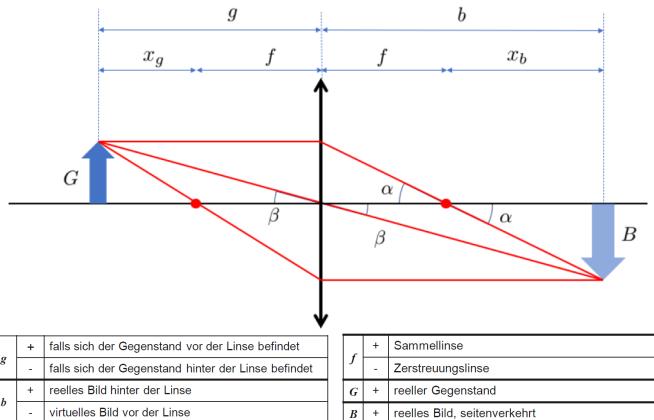
Ein Bild ist scharf dargestellt, wenn die **Abbildungsgleichung** erfüllt ist!

Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$$

Newton'sche Abb.-Gleichung

$$x_b \cdot x_g = f^2$$



Hinweis: Ein Spiegel hat eine Brennweite von  $f = \infty$   
 ⇒ Vereinfachung der Abbildungsgleichung!

### 15.11.1 Vergrösserungsverhältnis

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

$$V_{tot} = V_1 \cdot V_2$$

$V$	Vergrösserungsverhältnis	$[V] = 1$
$b$	Bildweite	$[b] = m$
$g$	Gegenstandsweite	$[g] = m$
$B$	Bildgrösse	$[B] = m$
$G$	Gegenstandsgrösse	$[G] = m$
$f$	Brennweite	$[f] = m$

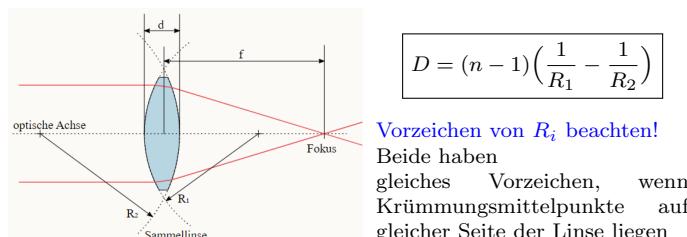
### 15.12 Brechkraft $D$

Die Optiker benutzen nicht die Brennweite sondern die Brechkraft in Dioptrie

Es gilt:  $1 \text{ dpt} = 1 \text{ m}^{-1}$

$$D = \frac{1}{f}$$

### 15.13 Linsenschleifergleichung



### 15.13.1 Symmetrische Linsen ( $R_1 = R_2$ )

Für symmetrische Linsen gilt:

$$D = (n - 1) \frac{2}{R}$$

$D$	Brechkraft	$[D] = \text{dpt}$
$f$	Brennweite	$[f] = \frac{1}{s} = \text{Hz}$
$R_i$	Linsenradius	$[R_i] = \text{m}$
$n$	Brechungsindex	$[n] = 1$

$$f = \frac{1}{D} = \frac{R}{2(n-1)}$$

### 15.13.2 Kombination von zwei Linsen

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d}$$

### 15.13.3 Kombination von zwei dünnen Linsen ohne Zwischenraum

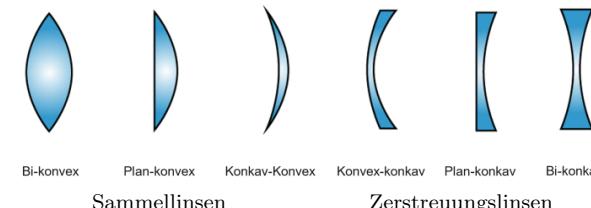
Die Kombination von zwei dünnen Linsen ohne Zwischenraum ist wie folgt definiert:

$$D = D_1 + D_2$$

### 15.14 Konvexe und Konkave Linsen

Konvex: nach aussen gewölbt

Konkav: nach innen gewölbt

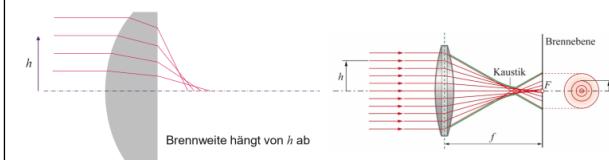


Sammellinsen

Zerstreuungslinsen

### 15.15 Aberration

Unter dem Begriff Aberration versteht man die Abweichung vom idealisierten Fall.



### 15.15.1 Astigmatismus



Meridionalaberration (auf Bild vertikal)  
 Sagittalaufschärfe (auf Bild horizontal)

Astigmatismus  
 Meridionale Krümmung ≠ Sagittale Krümmung

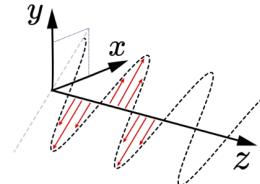
Krümmungen unterschiedlich → Brennweiten unterschiedlich

## 15.16 Polarisation

### 15.16.1 Lineare Polarisation

$E_x$  und  $E_y$  können unterschiedliche Amplituden haben.  
 Die Phasen müssen gleich sein.

EM-Wellen können mit dem Herzsches Gitter oder mit dem Brewster Winkel linear polarisiert werden.



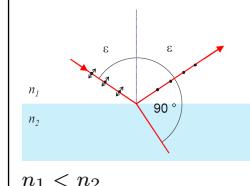
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{E}$  kann zu  $\vec{0}$  werden

### 15.16.2 Brewster Winkel

Unter dem Brewster Winkel wird nur linear polarisiertes Licht zurückgeworfen.

Der ins Medium 2 eindringende Strahl steht dabei senkrecht auf dem reflektierten Strahl

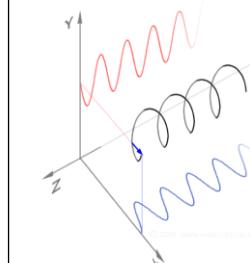


$$\tan(\epsilon) = \frac{n_2}{n_1}$$

### 15.16.3 Zirkulare Polarisation

$x$  und  $y$  Komponenten haben die gleiche Amplitude und eine Phasendifferenz von  $90^\circ$

Positive zirkulare Polarisation  $\sigma^+$   
 Negative zirkulare Polarisation  $\sigma^-$



$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(2\pi ft - kz) \\ E_0 \sin(2\pi ft - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{E}$  kann nicht zu  $\vec{0}$  werden

## 15.16.4 Elliptische Polarisation

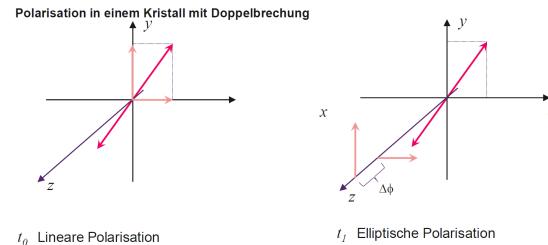
$x$  und  $y$  Komponenten haben unterschiedliche Amplituden und eine beliebige Phasendifferenz.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(2\pi ft - kz) \\ E_0 \cos(2\pi ft - kz + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 15.16.5 Doppelbrechung

Doppelbrechung ist eine anisotropische Eigenschaft von Kristallen. Diese Kristalle haben unterschiedliche Brechungsindizes in unterschiedliche Richtungen.

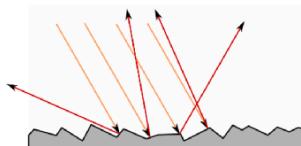
Nach einer gewissen Zeit  $t$  haben die  $x$ - und  $y$ -Komponente einen Phasenunterschied.  $\Rightarrow x$  und  $y$  bewegen sich unterschiedlich schnell fort



## 15.17 Streuung

### 15.17.1 Diffuse Streuung

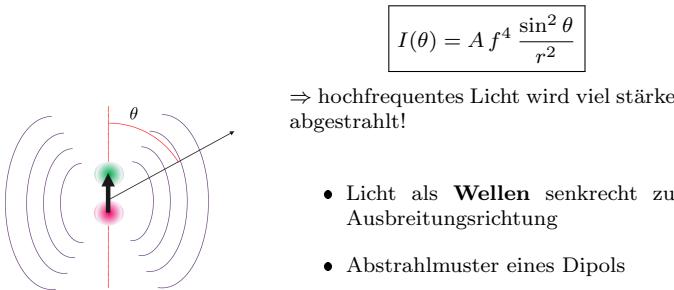
Streuung des Lichts an Teilchen von Dimensionen  $d \gg \lambda$



- Licht als **Strahlen**
- Reflexion in alle Richtungen
- Keine bevorzugte Richtung, unabhängig von  $\lambda$
- Beispiele:
  - Wolken, Nebel
  - milchige Lösungen

### 15.17.2 Rayleigh-Streuung

Streuung des Lichts an Teilchen von Dimensionen  $d < \lambda$  (atomare Grösse)



$$I(\theta) = A f^4 \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

$\Rightarrow$  hochfrequentes Licht wird viel stärker abgestrahlt!

- Licht als **Wellen** senkrecht zur Ausbreitungsrichtung
- Abstrahlmuster eines Dipols
- Himmel tagsüber blau
- Himmel abends rötlich

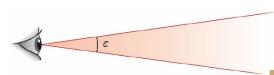
## 15.18 Abbildungssysteme - Auge

Brechzahl Augenlinse: 1.3

Tiefe:  $\sim 25\text{mm}$

### 15.18.1 Terminologie des Auges

Sehwinkel  $\varepsilon$



Die Grösse, in der ein Gegenstand dem betrachtenden Auge erscheint (**in Bogenminuten**)

$1^\circ \Leftrightarrow 60'$

Auflösung

Minimaler Winkelabstand  $\varepsilon_{min}$ , den zwei Punkte haben müssen, damit sie noch getrennt wahrgenommen werden.

Normalsichtiges Auge: Auflösung ca. 1 Bogenminute ( $1'$ )

Sehschärfe

Reziproker Wert der Auflösung

$$S = \frac{1}{\varepsilon_{min}} \quad \text{beim Menschen also } S = 1$$

Deutliche Sehweite  $s$  (normierte Betrachtungsdistanz)

Damit die Vergrösserungen von Luren und Mikroskopen eindeutig bestimmt werden können, wird eine **deutliche Sehweite** definiert:

$$s = 25\text{ cm} = 0.25\text{ m}$$

### 15.18.2 Kurzsichtigkeit vs. Weitsichtigkeit

Kurzsichtigkeit

- Augapfel zu lang
- Konkave Streulinse als Korrektur
- Brille rückt Gegenstand näher heran

Weitsichtigkeit

- Augapfel zu kurz
- Konvexe Sammellinse als Korrektur
- Brille rückt Gegenstand weiter weg

## 15.19 Abbildungssysteme - Fotoapparat

Bildgrösse  $B[m]$

Die Bildweite  $b$  ist normalerweise viel kleiner als die Gegenstandsweite  $g$  und daraus folgt:

$$B = \frac{f}{g} G$$

Lichtstärke  $H[\frac{W}{m^2}]$

Die Intensität des Lichts auf dem Film ist gegeben durch

$$H = \left(\frac{d}{f}\right)^2 = q^2$$

Blendenzahl  $Z$

z.B.: 1, 1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, ...

$$Z = \frac{1}{q} = \frac{1}{\sqrt{H}}$$

Belichtung  $E$ , Belichtungszeit  $t$

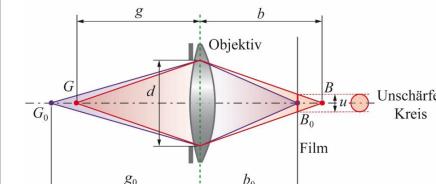
$$E = Ht \approx q^2 t$$

$$t = \frac{G}{v} = \frac{g B}{f v}$$

Schärfentiefe

In der Filmebene ergibt sich vom Punkt  $G$  kein scharfer Bildpunkt, sondern ein **Unschärfekreis** mit dem Durchmesser  $u$ .

Es wird folgende Gegenstandsweite  $g$  in den Unschärfekreis abgebildet:



$$\frac{1}{g} = \frac{1}{g_0} \pm \frac{u}{q f^2}$$

$b$  Bildweite

$b_0$  Bilddistanzo

$B$  Bildgrösse

$B_0$  Bild<sub>0</sub>

$g$  Gegenstandsweite ( $G$  zu Objektiv)

$g_0$  Gegenstandsdistanz<sub>0</sub> ( $G_0$  zu Objektiv)

$G$  Gegenstandsgrösse

$G_0$  Gegenstandsgrösse<sub>0</sub>

$f$  Brennweite

$u$  Durchmesser Unschärfekreis

$d$  Durchmesser Blendenöffnung

$v$  Geschw. des zu fotograf. Objekts

$[b] = \text{m}$

$[b_0] = \text{m}$

$[B] = \text{m}$

$[B_0] = \text{m}$

$[g] = \text{m}$

$[g_0] = \text{m}$

$[G] = \text{m}$

$[G_0] = \text{m}$

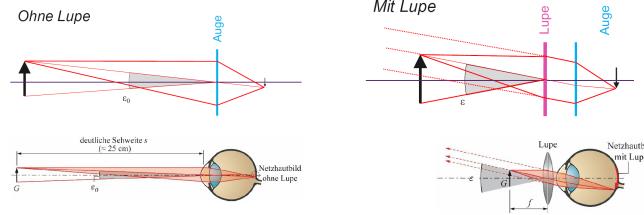
$[f] = \text{m}$

$[d] = \text{m}$

$[d] = \text{m}$

$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

## 15.20 Abbildungssysteme - Lupe



$$\tan(\varepsilon_0) = \frac{G}{s}$$

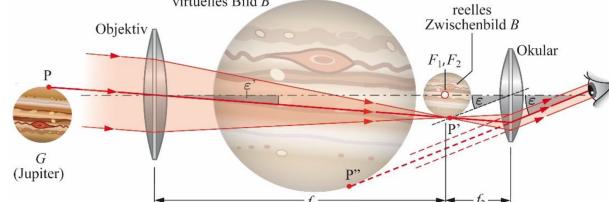
$$\tan(\varepsilon) = \frac{G}{f}$$

$$V = \frac{\tan(\varepsilon)}{\tan(\varepsilon_0)} = \frac{s}{f}$$

$\varepsilon_i$	Sehwinkel	$[\varepsilon_i] = {}^\circ$
$s$	Deutliche Schweite $s = 0.25 \text{ m}$	$[s] = \text{m}$
$f$	Brennweite	$[f] = \text{m}$
$V$	Vergrösserung	$[V] = 1$

## 15.21 Abbildungssysteme - Fernrohr

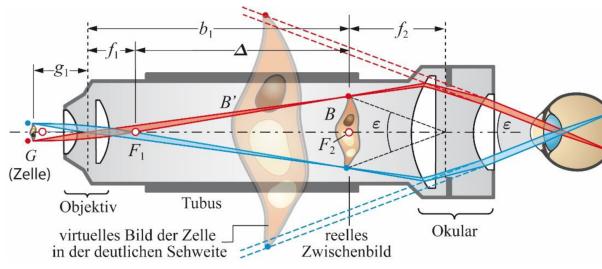
Es wird zuerst ein vergrößertes Bild erzeugt, welches selber wiederum mit einer Lupe betrachtet wird.



$$V = \frac{\tan(\varepsilon)}{\tan(\varepsilon')} = \frac{B}{B'} = \frac{f_1}{f_2}$$

## 15.22 Abbildungssysteme - Mikroskop

Es wird zuerst ein vergrößertes Bild erzeugt, welches selber wiederum mit einer Lupe betrachtet wird.



$$V = \frac{\Delta \cdot s}{f_1 \cdot f_2} = \frac{\tan(\varepsilon)}{\tan(\varepsilon_0)} = \frac{B}{f_2} = \frac{B}{G} \frac{s}{f_2} = \frac{b_1}{g_1} \frac{s}{f_2}$$

$\varepsilon_i$	Sehwinkel	$[\varepsilon_i] = {}^\circ$
$s$	Deutliche Schweite $s = 0.25 \text{ m}$	$[s] = \text{m}$
$f_i$	Brennweite	$[f_i] = \text{m}$
$V$	Vergrösserung	$[V] = 1$
$\Delta$	optische Tubuslänge (Abstand der Brennpunkte)	$[\Delta] = \text{m}$
$b_1$	Bildweite	$[b_1] = \text{m}$
$g_1$	Gegenstandsweite	$[g_1] = \text{m}$
$B$	Bildgrösse	$[B] = \text{m}$
$G$	Gegenstandsgrösse	$[G] = \text{m}$

## 15.23 Farbentheorie

Spektralfarben:

Mischfarben:

Grundfarben:

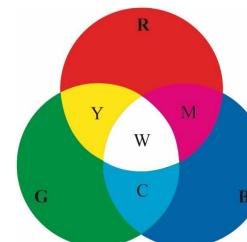
Komplementärfarben:

Monochromatisches Licht:

### 15.23.1 Farbmischungen

Additive Farbmischung

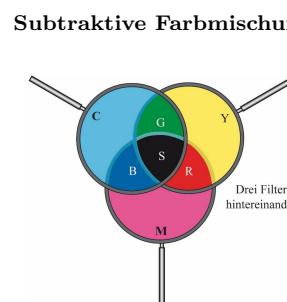
Subtraktive Farbmischung



Die gesamten Lichtfarben  
Mischung von versch. Spektralfarben  
Ein Set, um alle Mischfarben zu erzeugen

Mischfarbe, die bleibt, wenn von weissem Licht eine Farbe ausgeblendet wird

Nur eine einzige Wellenlänge (Farbe)



## 16 Schwingungen

### Freie Schwingung

Wird ein schwingungsfähiges System aus dem Gleichgewichtszustand gebracht und dann sich selbst überlassen, so führt es *freie Schwingungen* oder *Eigenschwingungen* aus.

### Erzwungene Schwingung

Wird ein System von außen durch periodische oder auch nichtperiodische Störungen zum Schwingen veranlasst, wird von *fremderregten Schwingungen* gesprochen.

### Selbsterregte Schwingung

Ein schwingungsfähiges System kann unter Umständen einer Energiequelle Energie entziehen und diese der eigenen Schwingung selbst zuführen, so dass die Schwingung trotz einer eventuell vorhandenen Dämpfung nicht abklingt.

## 16.1 Freie Schwingungen

### 16.1.1 Terminologie

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$y(t) = v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad \ddot{y}(t) = a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$y(t)$	Position zum Zeitpunkt $t$	$[y(t)] = \text{m}$
$\dot{y}(t)$	Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t$	$[\dot{y}(t)] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$\ddot{y}(t)$	Beschleunigung zum Zeitpunkt $t$	$[\ddot{y}(t)] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$A$	Amplitude	$[A] = \text{m}$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\varphi$	Phase	$[\varphi] = \text{rad}$
$T$	Periodendauer	$[T] = \text{s}$
$f$	Frequenz	$[f] = \frac{1}{\text{s}}$

## 16.2 Beispiel - Federpendel

$$F_{res} = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$

$$F_{Feder} = -k \cdot x$$

Kräftegleichgewicht:  $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$

$$\text{DGL: } \ddot{x} = -\omega^2 \cdot x \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Allgemeine Lösung:  $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

$m$	Masse	$[m] = \text{m}$
$k = c$	Federkonstante	$[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$

## 16.2.1 Harmonische Schwingung - Energiebetrachtung

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

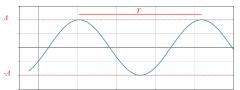
$$\dot{x}(t) = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} E_{tot} &= E_{pot} + E_{kin} = \frac{k \cdot x^2}{2} + \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} \\ &= \frac{k}{2} A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{m}{2} \omega^2 A^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{kA^2}{2} (\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)) \end{aligned}$$

$$E_{tot} = \frac{k \cdot A^2}{2}$$

## 16.3 Beschreibung einer 1D-Schwingung

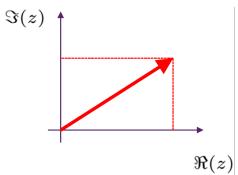
### 16.3.1 Zeitbreich



Auslenkung in Abhängigkeit der Zeit  
Beispiel: Oszilloskop

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

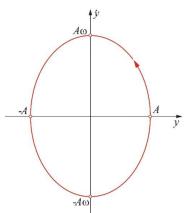
### 16.3.2 Zeigerdarstellung



Auslenkung als Zeiger (komplexe Zahl),  
der um den Ursprung rotiert

$$z(t) = x(t) + i y(t)$$

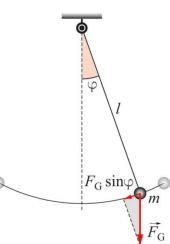
### 16.3.3 Phasenraum



Darstellung der Position  $y$  und der Ableitung (Geschwindigkeit)

## 16.4 Pendel

### 16.4.1 Fadenpendel



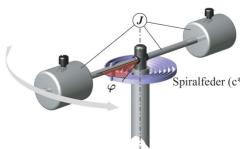
$$F_R = F_G \cdot \sin(\varphi) = m \cdot g \cdot \sin(\varphi) \approx m \cdot g \cdot \varphi$$

$$\begin{aligned} x &= \varphi \cdot l \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{x}{l} \\ \Rightarrow F_G &= m \cdot g \cdot \frac{x}{l} \end{aligned}$$

$$\text{Kräftegleichgewicht: } F = m \cdot \ddot{x} = -m \cdot g \frac{x}{l}$$

$$\text{DGL: } \ddot{x} = -\omega^2 \cdot x \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{g}{l}$$

### 16.4.2 Drehpendel



Analogie ohne Rotation:

$$F = -k \cdot x \quad F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$

$$M = -c^* \varphi \quad M = J \cdot \ddot{\varphi}$$

Gleichgewicht:  $J \cdot \ddot{\varphi} = -c^* \varphi$

$$\text{DGL: } \ddot{\varphi} = -\omega^2 \cdot \varphi \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{c^*}{J}$$

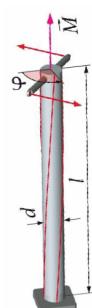
$\varphi$  folgt der gleichen DGL wie  $x$  im Fall des Federpendels

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega t + \delta)$$

$$J \quad \text{Trägheitsmoment} \quad [J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$c^* \quad \text{Winkelrichtgrösse} \quad [c^*] = \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$$

### 16.4.3 Torsionspendel



Variante des Drehpendels mit der Winkelrichtgrösse

$$c^* = \frac{\pi r^4 G}{2l}$$

$$\begin{aligned} G &\quad \text{Torsionsmodul} \\ l &\quad \text{Länge} \\ r = \frac{d}{2} &\quad \text{Radius} \end{aligned}$$

## 16.4.4 Physikalisches Pendel

$$M = -a \cdot \sin(\varphi) \cdot F_G = -a \cdot m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$$

Bewegungsgleichung:  $M = J_A \cdot \ddot{\varphi}$

Gleichgewicht:  $-a \cdot m \cdot g \cdot \sin(\varphi) = J_A \cdot \ddot{\varphi}$

Kleine Winkel:  $-a \cdot m \cdot g \cdot \varphi = J_A \cdot \ddot{\varphi}$

$$\text{DGL: } \ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{g \cdot a \cdot m}{L^*} = \frac{g \cdot a \cdot m}{J_A}$$

$$L^* = \frac{J_A}{a \cdot m} \quad J_A = J_s + m \cdot a^2$$

$\varphi$  folgt der gleichen DGL wie  $x$  im Fall des Federpendels

Auch gültig für mehrere Massen:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{A1} + J_{A2}}{(a_1 \cdot m_1 + a_2 \cdot m_2) \cdot g}}$$

⇒ J-Tabelle im Anhang Abschnitt 22.1

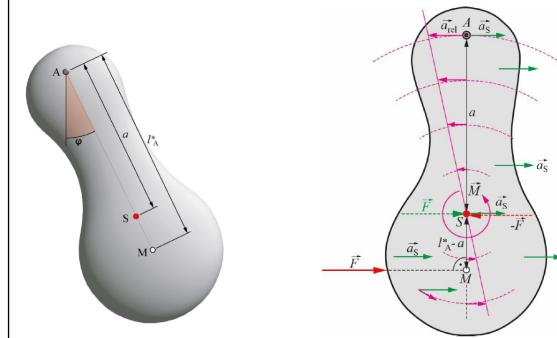
$S$	Schwerpunkt des Körpers
$J_s$	Trägheitsmoment bzgl. $S$
$a$	Abstand Schwerpunkt - Drehpunkt
$L^*$	Reduzierte Länge
$J_A$	Trägheitsmoment um Aufhängepunkt

$[J_S] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$   
 $[a] = \text{m}$   
 $[L^*] = \text{m}$   
 $[J_A] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$

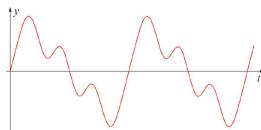
## 16.5 Perkussionszentrum

**Frage:** Wie weit vom Drehpunkt  $A$  muss ein Impuls auf einen Körper ausgeübt werden, damit keine Kraft auf die Achse ausgeübt wird?

**Antwort:** Auf Höhe der reduzierten Länge  $L^* = \frac{J_A}{a \cdot m}$



## 16.6 Periodische Schwingung



Muster wiederholt sich

$$f(t) = f(t - T)$$

Periodische Schwingungen können im **Frequenzbereich** in eine **Grundschwingung** und **Oberschwingungen (Harmonische)** zerlegt werden.

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n \cdot \omega + \varphi_n)$$

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{2\pi}{T} && \text{Grundschwingung} \\ \omega_n &= n \cdot \omega_0 && \text{n-te Harmonische} \end{aligned}$$

### 16.6.1 Fourier-Analyse

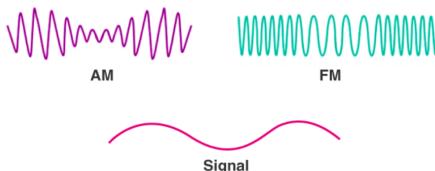
$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt & A_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \end{aligned}$$

## 16.7 Signalmodulationen

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Amplitudenmodulation (AM) Veränderung von  $A$   
Frequenzmodulation (FM) Veränderung von  $\omega$

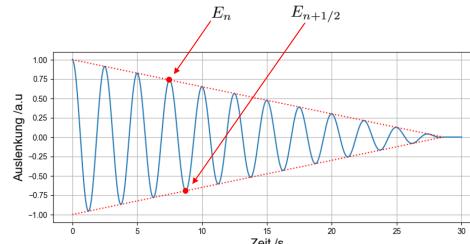


## 16.8 Gedämpfte Schwingungen

### 16.8.1 Gedämpfte Schwingung - Konstante Reibungskraft

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \mu F_N \quad \text{für } \ddot{x}(t) > 0$$

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) + \mu F_N \quad \text{für } \ddot{x}(t) < 0$$



$$E = \frac{k A^2}{2}$$

$$\Delta A = 4 \frac{F_R}{k}$$

$E$	Energie bei max. Auslenkung	$[E] = \text{J}$
$k = c$	Federkonstante	$[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$
$A$	Amplitude bei max. Auslankung	$[A] = \text{m}$
$\Delta A$	Amplitudeneänderung pro Periode	$[\Delta A] = \text{m}$
$F_R$	Reibungskraft	$[F_R] = \text{N}$

### 16.8.2 Gedämpfte Schwingungen - Dämpfung proportional zur Geschwindigkeit

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad D = \frac{\delta}{\omega}, \quad f = \frac{\Omega}{2\pi}$$

1. Fall:	$\delta^2 - \omega^2 > 0, D > 1$	$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$	Aperiod. Schwingung
2. Fall:	$\delta^2 - \omega^2 < 0, D < 1$	$x(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\Omega t + \varphi)$	Period. Schwingung
3. Fall:	$\delta^2 - \omega^2 = 0, D = 1$	$x(t) = (A + Bt)e^{-\delta t}$	Grenzfall ( $\lambda = -\delta$ )

$$\lambda_{1,2} = -\omega(D \pm \sqrt{D^2 - 1})$$

$$z \cdot \Lambda = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+z}}\right) = z \cdot \delta T$$

$\frac{\kappa}{2} = \delta$	Abklingkonstante	$[\kappa = \delta] = \frac{1}{\text{s}}$
$\omega$	Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$D$	Dämpfungsgrad	$[D] = 1$
$\Omega$	Kreisfrequenz gedämpfte Schwingung	$[\Omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\Lambda$	Logarithmisches Dekrement	$[\Lambda] = 1$
$A_n$	Amplitude zum Zeitpunkt $t$	$[A_n] = \text{m}$
$A_{n+z}$	Amplitude zum Zeitpunkt $t + z \cdot T$	$[A_{n+z}] = \text{m}$
$z$	Anzahl verstrichene Schwingungen	$[z] = 1$
$T$	Periodendauer	$[T] = \text{s}$
$f$	Frequenz der gedämpften Schwingung	$[f] = \text{Hz}$

## 16.9 Fremderregte Schwingung

### 16.9.1 Definition

Erzwungene Schwingungen sind Schwingungen, die durch eine **periodische Störung** verursacht werden. (EN: *driven oscillation*)

### 16.9.2 Übersicht über Hilfsgrößen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \delta = \frac{\kappa}{2} = \frac{b}{2m}, \quad D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\kappa}{2\omega_0}$$

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \Omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$$

$\omega_0$	Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung	$[\omega_0] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\Omega_d$	Kreisfrequenz gedämpfte Eigenfrequenz	$[\Omega_d] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\omega_r$	Resonanzkreisfrequenz	$[\omega_r] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\omega$	Kreisfrequenz der Störung (Erreger)	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\frac{\kappa}{2} = \delta$	Abklingkonstante	$[\kappa] = \frac{1}{\text{s}}$
$D$	Dämpfungsgrad	$[D] = 1$
$\eta$	Dimensionslose Frequenz	$[\eta] = 1$
$k = c$	Federkonstante	$[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$

### 16.9.3 Resonanz

Die Amplitude  $A$  wird maximal, wenn der Nenner von  $A(\omega)$  minimal wird

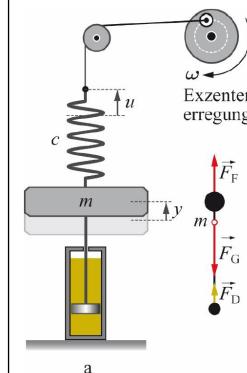
Resonanzkreisfrequenz:

Resonanzamplitude:

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2}$$

$$A_r = \frac{u_0}{2D\sqrt{1 - D^2}}$$

## 16.10 Fremderregte Schwingungen - Krafterregung



$$\text{DGL: } m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = F_0 \sin(\omega t)$$

$$y(t) = \underbrace{A(\omega) \sin(\omega t - \varphi)}_{y_p(t)} + \underbrace{B e^{-\delta t} \sin(\Omega_d t + \varphi_0)}_{y_h(t)}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

$A(\omega)$  Amplitudenverlauf  $[A(\omega)] = \text{m}$   
 $\varphi$  Phasenverschiebung  $[\varphi] = \text{rad}$

### 16.10.1 Vergrößerungsfunktion / Phasenverschiebung

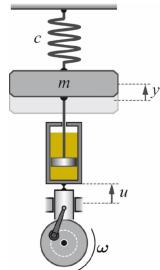
$$V = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1 - \eta^2}\right)$$

$$V_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_r^4}} \quad \text{mit } \eta_r = \sqrt{1 - 2D^2}$$

$\varphi$  Phasenverschiebung  $[\varphi] = \text{rad}$   
 $V$  Vergrößerungsfunktion  $[V] = 1$   
 $V_r$  Vergrößerungsfunktion  $[V_r] = 1$   
 $\eta$  Dimensionslose Frequenz  $[\eta] = 1$   
 $D$  Dämpfungsgrad  $[D] = 1$

### 16.11 Fremderregte Schwingungen - Dämpfererregung



$$\text{DGL: } m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = b\omega u_0 \cos(\omega t)$$

$$A(\omega) = \frac{b\omega u_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

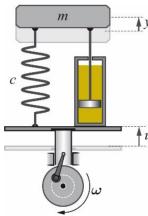
$$V = \frac{2D\eta}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1 - \eta^2}\right) - \frac{\pi}{2}$$

$A(\omega)$  Amplitude der Schwingung  $[A(\omega)] = \text{m}$   
 $\varphi$  Phasenverschiebung  $[\varphi] = \text{rad}$   
 $V$  Vergrößerungsfunktion  $[V] = 1$   
 $\eta$  Dimensionslose Frequenz  $[\eta] = 1$   
 $D$  Dämpfungsgrad  $[D] = 1$

### 16.12 Fremderregte Schwingungen - Stützenerregung

$$\text{DGL: } m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = -m\omega^2 u_0 \sin(\omega t) \quad \text{mit } q = y - u$$



$$A(\omega) = \frac{\omega^2 u_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

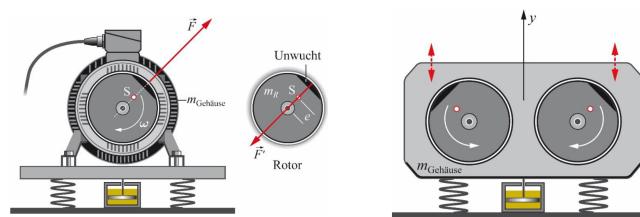
$$V = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1 - \eta^2}\right) - \pi$$

$\varphi$  Phasenverschiebung  $[\varphi] = \text{rad}$   
 $V$  Vergrößerungsfunktion  $[V] = 1$   
 $\eta$  Dimensionslose Frequenz  $[\eta] = 1$   
 $D$  Dämpfungsgrad  $[D] = 1$   
 $\omega_0$  Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung  $[\omega_0] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$   
 $\omega$  Kreisfrequenz der Störung (Erreger)  $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$   
 $A(\omega)$  Amplitude der Schwingung  $[A(\omega)] = \text{m}$

### 16.13 Fremderregte Schwingung - Unwuchterregung

**Unwucht:** Schwerpunkt  $S$  des Rotors der Masse  $m_R$  bewegt sich auf einem Kreis mit Radius  $e$



$$\text{DGL in } y\text{-Richtung: } m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = -m_R \omega^2 e \sin(\omega t)$$

Radiale Beschleunigung des Schwerpunkts des Rotors:  $a_R = \omega^2 e$

Kraft des Rotors auf die Maschine:  $F_U = m_R \cdot a_R = m_R \cdot \omega^2 e$

$$A(\omega) = \frac{m_R}{m} \frac{e\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

$$A_R = \frac{m_R}{m} \frac{e}{2D\sqrt{1 - D^2}}$$

#### 16.13.1 Kraft auf die Basis des Gehäuses

$$F_B = cy + b\dot{y} = F_{B0} \sin(\omega t - \varphi + \psi)$$

$$F_{B0} = \frac{m_R e \omega^2 \sqrt{1 + (2D\eta)^2}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$m_R$  Masse des Rotors

$a_R$  Radiale Beschleunigung Schwerpunkt

$[m_R] = \text{kg}$

$[a_R] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$e$  Abstand Mittelpunkt - Schwerpunkt

$[e] = \text{m}$

$\varphi$  Phasenverschiebung

$[\varphi] = \text{rad}$

$\eta$  Dimensionslose Frequenz

$[\eta] = 1$

$D$  Dämpfungsgrad

$[D] = 1$

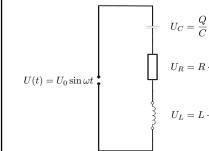
$A(\omega)$  Amplitude

$[A(\omega)] = \text{m}$

$A_R$  Resonanzamplitude

$[A_R] = \text{m}$

### 16.14 Fremderregte Schwingung - Schwingkreis



$$\text{DGL: } L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = \omega U_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

⇒ Gleiche DGL wie bei Dämpfererregung

$$\text{DGL: } m\ddot{y} + by + cy = b\omega u_0 \cos(\omega t), A(\omega) = \frac{b\omega u_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}}$$

$$I(\omega) = \frac{\omega}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D\omega_0\omega)^2}} U_0, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, D = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$V = \frac{U_{L0}}{U_0} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

#### 16.14.1 Resonanz

Resonanzfrequenz

Amplitude @ Resonanz

$$\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$I_{0r} = \frac{U_0}{R}$$

$\omega_0$  Kreisfrequenz ungedämpfte Schwingung  $[\omega_0] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$\omega$  Kreisfrequenz der Störung (Erreger)  $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$\omega_r$  Resonanzfrequenz  $[\omega_r] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$I_{0r}$  Strom-Amplitude @ Resonanz  $[I_{0r}] = \text{A}$

$U_0$  Amplitude der Erregerspannung  $[U_0] = \text{V}$

$U_{L0}$  Amplitude Spulenspannung  $[U_{L0}] = \text{V}$

$A(\omega)$  Amplitude der Schwingung  $[A(\omega)] = \text{m}$

$V$  Vergrößerungsfunktion  $[V] = 1$

$\eta$  Dimensionslose Frequenz  $[\eta] = 1$

$D$  Dämpfungsgrad  $[D] = 1$

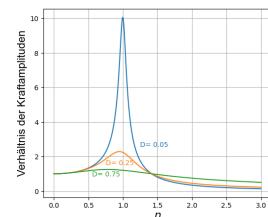
### 16.15 Fremderregte Schwingung - Güte $Q$

#### 16.15.1 Definition

Die relative Abnahme der Schwingungsenergie  $E(t)$  pro Schwingdauer wird als **Güte** oder **Gütfaktor** bezeichnet

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}$$

## 16.15.2 Beziehungen



$$Q = \frac{1}{2D}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Breite der Resonanzkurve bei  $U_0 = \frac{U_{0r}}{\sqrt{2}}$

**breite Kurve** ⇒ **tiefe Güte**

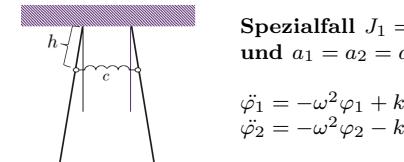
## 16.16 Gekoppelte Pendel

Zwei Pendel sind durch eine Feder miteinander verbunden.

**Die Bewegung eines Pendels hat Auswirkungen auf die Bewegung des anderen Pendels.**

Gesucht ist eine Beschreibung der Bewegung des Pendels.

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 &= -m_1 g a_1 \varphi_1 + c \cdot h^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 &= -m_2 g a_2 \varphi_2 - c \cdot h^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$



**Spezialfall**  $J_1 = J_2 = J$  und  $m_1 = m_2 = m$  und  $a_1 = a_2 = a$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= -\omega^2 \varphi_1 + k (\varphi_2 - \varphi_1) \\ \ddot{\varphi}_2 &= -\omega^2 \varphi_2 - k (\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \omega^2 = \frac{mga}{J} \quad k = \frac{c \cdot h^2}{J} \quad \omega_k = \sqrt{\omega^2 + 2k}$$

$$\text{mit } \Phi_+ = \varphi_1 + \varphi_2 \quad \Phi_- = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\begin{array}{ll} \text{Symm: } \ddot{\Phi}_+ = -\omega^2 \Phi_+ & \varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \frac{\Phi_0}{2} \cos \omega t \\ \text{Antisymm: } \ddot{\Phi}_- = -(\omega^2 + 2k) \Phi_- & \varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \frac{\Phi_0}{2} \cos \omega_k t \end{array}$$

**Allgemeine Lösunge des gekoppelten Systems:**

Lineare Kombination der symmetrischen und asymmetrischen Lösung

$$\varphi_1(t) = \Phi \sin(\Omega t) \cdot \cos(\bar{\omega} t) \quad \Omega = \frac{\omega_k - \omega}{2}$$

$$\varphi_2(t) = \Phi \cos(\Omega t) \cdot \sin(\bar{\omega} t) \quad \bar{\omega} = \frac{\omega + \omega_k}{2}$$

$$k \text{ Kopplungsfaktor} \quad [k] = 1$$

$$h \text{ Abstand zur Aufhängung} \quad [h] = \text{m}$$

$$J \text{ Massenträgheitsmoment} \quad [J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$c \text{ Federkonstante} \quad [c] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

## 17 Wellen

### 17.1 Definition

Eine Welle ist eine **Störung eines Gleichgewichtszustandes**, die sich im **Raum ausbreitet**.

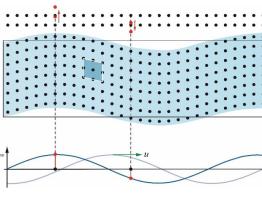
### 17.1.1 Bemerkungen zur Definition

- Voraussetzung für die **Ausbreitung** einer Welle ist die **Kopplung** benachbarter Teilchen.
- Eine Welle transportiert Energie (keine Materie)**
- Die Störung kann von ganz unterschiedlicher Natur sein:
  - Druck in Luft
  - Auslenkung einer Position entlang einem Seil (Saite)
  - Elektrische Signale

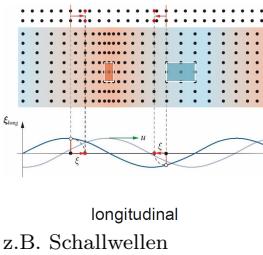
Die Störung wird mit  $\xi$  beschrieben:  $\xi = \xi(x, y, z, t)$

## 17.2 Klassifizierung von Wellen

Welle breitet sich **senkrecht** zur Störung aus

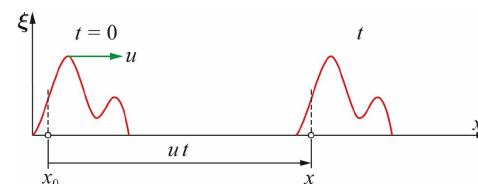


Welle breitet sich **parallel** zur Störung aus



## 17.3 Wellengeschwindigkeit / Phasengeschwindigkeit $u$

Die Störung an der Position  $x_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  breite sich mit der Geschwindigkeit  $u$  aus und erreicht nach einer Zeit  $t$  die Position  $x$



$$\xi(x, t) = \xi(x - ut, 0) = f(x - ut)$$

In einem Medium mit **grösserer Dichte** breiten sich Wellen **schneller aus!** ⇒ Bessere Kopplung der Moleküle

Man schaut bei der Beschreibung der Fortbewegung auf den Ort. Die Verschiebung des Ortes wird mit der Zeit hineingebracht

### 17.3.1 Verschiedene Wellengeschwindigkeiten

Schallwellen in Fluiden:

$$u = \sqrt{\frac{1}{\rho \kappa}}$$

Schallwellen in Gasen:

$$u = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa R T}{M}}$$

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

$$u = \frac{c}{n}$$

Transversalwellen auf einem Seil oder einer Saite

Elektromagnetische Wellen  
(transversal)  
(z.B. Lichtwellen)

$$u \text{ Wellengeschwindigkeit}$$

$$[A] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$$

$$[F] = \text{N}$$

$$[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$$

$$[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$$

$$[p] = \text{Pa}$$

$$R \text{ Universelle Gaskonstante: } R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$T \text{ Absolut-Temperatur (in K)}$$

$$\kappa \text{ Kompressibilität}$$

$$[\kappa] = \frac{1}{\text{Pa}}$$

$$\varkappa \text{ Adiabatenexponent}$$

$$[\varkappa] = 1$$

$$\rho \text{ Dichte}$$

$$[n] = 1$$

$$c \text{ Lichtgeschwindigkeit: } c = 300 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$[c] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

## 17.4 Wellengleichungen

Die Wellengleichungen stellen eine **Verbindung zwischen Zeit und Ort** her

Eindimensional  
Welle breitet sich in 1D aus

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Zweidimensional  
Welle breitet sich in 2D aus

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Dreidimensional  
Welle breitet sich in 3D aus

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

### 17.4.1 Wichtige Lösung der Wellengleichung (1D)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Ansatz:  $\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \sin(\omega t - k x)$

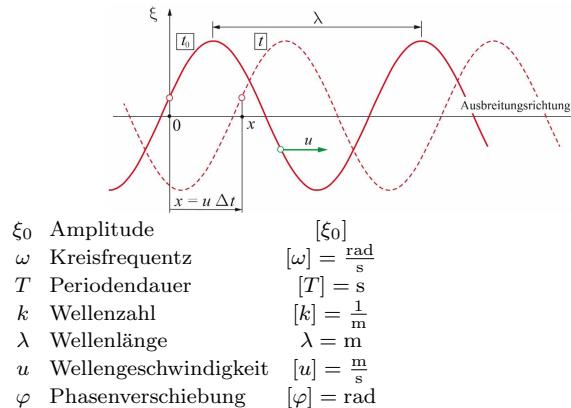
$$\underbrace{-k^2 A \sin(\omega t - k x)}_{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}} = -\frac{1}{u^2} \cdot \underbrace{\omega^2 A \sin(\omega t - k x)}_{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

mit Lösung  $u^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$

### 17.5 Harmonische Wellen

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \sin(\omega t - k x + \varphi)$$

#### 17.5.1 Terminologie



#### 17.5.2 Zusammenhänge

Grösse →	$k$	$\omega$	$f$	$u$	$T$	$\lambda$
ausgedrückt mit ↓		$k \cdot u$	$\frac{ku}{2\pi}$	$\frac{\omega}{k}$	$\frac{2\pi}{k \cdot u}$	$\frac{2\pi}{k}$
$\omega$	$\frac{\omega}{u}$		$\frac{\omega}{2\pi}$	$\frac{\omega}{k}$	$\frac{2\pi u}{\omega}$	$\frac{2\pi u}{\omega}$
$f$	$\frac{2\pi f}{u}$	$2\pi f$		$\frac{2\pi f}{k}$	$\frac{1}{f}$	$\frac{u}{f}$
$u$	$\frac{\omega}{u}$	$ku$	$\frac{u}{\lambda}$		$\frac{\lambda}{u}$	$\frac{u}{f}$
$T$	$\frac{2\pi}{u \cdot T}$	$\frac{2\pi}{T}$	$\frac{1}{T}$	$\frac{2\pi}{k \cdot T}$		$u \cdot T$
$\lambda$	$\frac{2\pi}{\lambda}$	$\frac{2\pi u}{\lambda}$	$\frac{u}{\lambda}$	$\frac{\lambda}{T}$	$\frac{\lambda}{u}$	

### 17.6 Wellenflächen / Wellenfronten

Die Gesamtheit aller Punkte, die zu einer bestimmten Zeit im gleichen Schwingungszustand sind, bilden eine Fläche im Raum.

Diese **Flächen mit gleicher Phase** werden als **Wellenflächen** oder **Wellenfronten** genannt.

Eine Welle kann sich in 3 Dimensionen ausbreiten und dabei **verschiedene Wellenflächen** zeigen.

### 17.7 Wellenausbreitung

Wellengleichung (3D)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

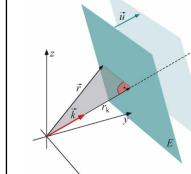
Lösungsansatz

$$\xi = \xi_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

mit Wellenvektor  $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$  und Ortsvektor  $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$

#### 17.7.1 Ebene Wellen

- Wellenfronten sind Ebenen im Raum
- Wellenvektor  $\vec{k}$  steht senkrecht auf den Ebenen
- Abstand** zw. zwei Wellenfronten ist  $\lambda$

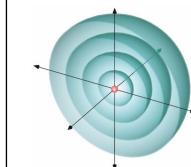


Die Ebenen bewegen sich mit der Wellengeschwindigkeit

$$u = \frac{\omega}{k} \text{ mit } k = \|\vec{k}\| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

in die **Richtung**, die durch den **Wellenvektor**  $\vec{k}$  gegeben ist.

#### 17.7.2 Kugelwellen



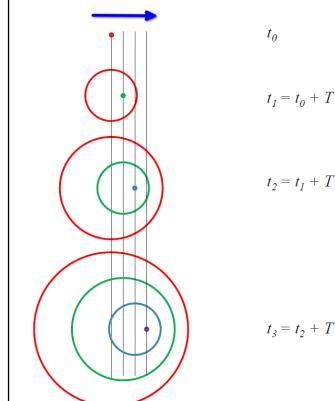
- Wellenfronten sind Kugeln
- Wellenvektor  $\vec{k}$  steht senkrecht auf den Kugelflächen
- Wellenfronten bewegen sich mit der Wellengeschwindigkeit vom Zentrum weg
- Amplitude nimmt mit  $\frac{1}{r}$  ab

Für eine **punktförmige Quelle** und **keine Winkelabhängigkeit** gilt:

$$\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{2}{r} \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2}$$

$$\text{mit Lösungsansatz } \xi(t, r) = \frac{1}{r} \xi_0 e^{j(\omega t - k r)}$$

### 17.8 Bewegte Quellen



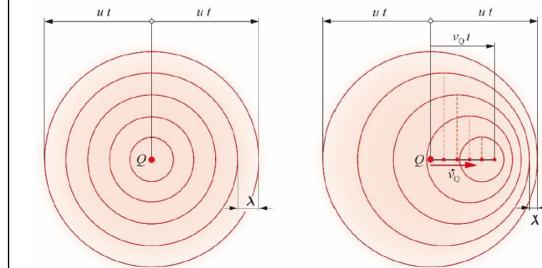
Die Quelle bewegt sich mit der **Geschwindigkeit**  $v_Q$  in eingezeichneteter Richtung fort

Die Quelle verschiebt sich in der Zeit  $T$  um

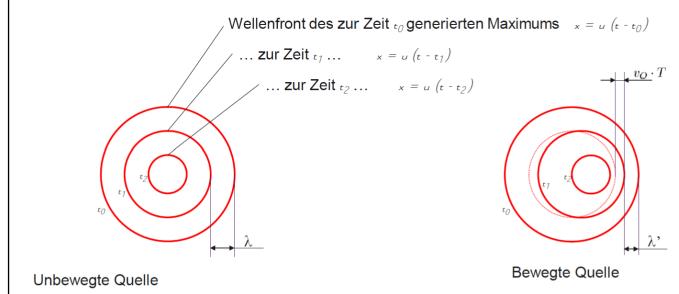
$$\Delta x = v_Q \cdot T$$

#### 17.8.1 Doppler Effekt

Die **Veränderung der Wellenlänge**  $\lambda$  der von einer **bewegten Quelle** ausgesandten Wellen ist als **Doppler Effekt** bekannt.



#### 17.8.2 Bewegte Quelle vs. unbewegte Quelle



## 17.9 Frequenzverschiebung durch Bewegung

Die Quelle sendet eine Frequenz  $f$  aus. Durch die Bewegung der Quelle ändert sich die Wellenlänge  $\lambda$  und somit ergibt sich eine neue Frequenz  $f'$ , welche ein statischer Beobachter wahrnimmt.

Falls  $v$  nicht parallel zur Beobachtungsrichtung ist, siehe 17.11

$$\lambda' = \lambda - v_{Q\parallel} \cdot T$$

$$\lambda' = \lambda - v_{Q\parallel} \frac{\lambda}{u}$$

$$\lambda' = \lambda \left( 1 - \frac{v_{Q\parallel}}{u} \right)$$

$$f' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda \left( 1 - \frac{v_{Q\parallel}}{u} \right)} = \frac{f}{\left( 1 - \frac{v_{Q\parallel}}{u} \right)}$$

## 17.10 Bewegte Quelle oder bewegter Beobachter

Bewegte Quelle:

$$f' = \frac{1}{\left( 1 \mp \frac{v_{Q\parallel}}{u} \right)} f$$

Bewegter Beobachter:

$$f' = \left( 1 \pm \frac{v_{B\parallel}}{u} \right) f$$

- + Quelle bewegt sich weg / Beobachter bewegt sich hin
- Quelle bewegt sich hin / Beobachter bewegt sich weg

$\lambda$	Wellenlänge der aussendeten Welle	$[\lambda] = \text{m}$
$\lambda'$	Wellenlänge der wahrgenommenen Welle	$[\lambda'] = \text{m}$
$v_{Q\parallel}$	Geschwindigkeit der bewegten Quelle	$[v_{Q\parallel}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$v_{B\parallel}$	Geschwindigkeit des bewegten Beobachters	$[v_{B\parallel}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$u$	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$f$	Frequenz der ausgesendeten Wellen	$[f] = \text{Hz}$
$f'$	Frequenz der wahrgenommenen Wellen	$[f'] = \text{Hz}$
$T$	Periodendauer (Dauer der Ausbreitung)	$[T] = \text{s}$

## 17.11 Bewegte Quelle mit Winkel

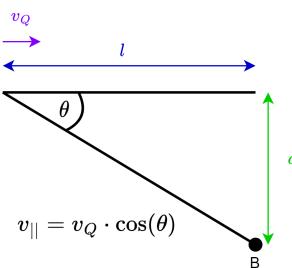
Die Quelle bewegt sich nicht direkt auf den Beobachter zu, sondern sie bewegt sich am **Beobachter vorbei**



$$f' = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{u} \cdot \cos(\vartheta_Q)} f$$

$v_Q$	Geschwindigkeit der bewegten Quelle	$[v_Q] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$u$	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$f$	Frequenz der ausgesendeten Wellen	$[f] = \text{Hz}$
$f'$	Frequenz der wahrgenommenen Wellen	$[f'] = \text{Hz}$

## 17.11.1 Beispiel Winkel zw. Quelle und Beobachter



Gegeben:  $v_Q, \theta, u, d, l$

Gesucht:  $\frac{f'}{f}$

$$f' = \frac{1}{1 - \frac{v}{u} \cdot \cos(v_Q)}$$

$$\tan(\theta) = \frac{d}{l} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$$\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$$

$$\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{d}{l} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\theta)}}{\cos(\theta)}$$

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = \frac{d^2}{l^2} + 1$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{1 + \frac{d^2}{l^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{u} \cdot \sqrt{\frac{l^2}{l^2 + d^2}}}$$

## 17.12 Bewegte Quelle und bewegter Beobachter



$$f_B = \frac{u + v_B \cos(\vartheta_B)}{u - v_Q \cos(\vartheta_Q)} f_Q$$

$\vartheta_B = \theta_B$  siehe Skizze

$[\vartheta_B] = {}^\circ$

$v_B$  Geschwindigkeit bewegter Beobachter

$[v_B] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$\vartheta_Q = \theta_Q$  siehe Skizze

$[\vartheta_Q] = {}^\circ$

$v_Q$  Geschwindigkeit bewegte Quelle

$[v_Q] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$u$  Wellengeschwindigkeit

$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$f_B$  Frequenz beim bewegten Beobachter

$[f_B] = \text{Hz}$

$f_Q$  Frequenz bei der bewegten Quelle

$[f_Q] = \text{Hz}$

## 17.12.1 Optischer Doppler Effekt

Wird verwendet, wenn die Wellengeschwindigkeit  $u$  gleich der Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist!

Es spielt nur die **relative** Bewegung von Beobachter und Quellen eine Rolle

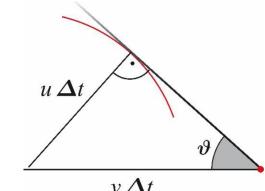
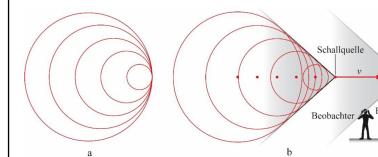
$$f' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos(\vartheta)} f \quad \text{mit } \beta = \frac{v}{c}$$

$$\text{für } \beta \ll 1 \quad f' \approx \frac{1}{1 - \beta \cdot \cos(\theta)} \cdot f$$

$$\text{für } \beta \ll 1 \text{ und } \theta \approx \frac{\pi}{2} \quad f' \approx \frac{1}{1 - \beta} \cdot f$$

## 17.12.2 Mach'scher Kegel

Wenn sich die Quelle schneller fortbewegt als die Wellengeschwindigkeit, dann entsteht ein Mach'scher Kegel



$$\sin(\vartheta) = \frac{u \Delta t}{v \Delta t} = \frac{u}{v}$$

$$M = \frac{v}{u}$$

$v$  Geschwindigkeit der Quelle

$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$u$  Wellengeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit)

$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$M$  Machzahl

$[M] = 1$

## 17.13 Wellenwiderstand, Energietransport - Schallwellen

### 17.13.1 Terminologie Wellenwiderstand

Der **Wellenwiderstand**  $Z$  (auch **Impedanz** genannt) beschreibt, wie ein Medium den Fluss von Energie beeinflusst.

⇒ 'Wie gut können sich Wellen in einem Medium ausbreiten?'

$$Z = \rho \cdot u = \frac{\Delta p_0}{v_0}$$

$Z$  Wellenwiderstand bzw. Impedanz  $[Z] = \Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$

$\rho$  Dichte des Mediums

$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$u$  Wellengeschwindigkeit

$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$\Delta p_0$  Druckamplitude

$[\Delta p_0] = \text{Pa}$

$v_0$  Schnellenamplitude

$[v_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

### 17.13.2 Weitere Terminologien

Schalldruck

$p = \Delta p_0 \cos(\omega t - k x)$   $[p] = \text{Pa}$

Druckamplitude

$\Delta p_0 = \rho u v_0$

Schallschnelle (Schnelle)  $v = v_0 \cos(\omega t - k x)$   $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Schnellenamplitude  $v_0 = \omega \xi_0$

### 17.13.3 Intensität der Schallwelle (siehe auch 21.1)

Intensität = gemittelte Energieflussdichte

$$E_{kin} = \frac{\rho \cdot v^2}{4} = \frac{\rho \cdot v_0^2}{4}$$

$$E_{pot} = \frac{p^2 - p_0^2}{2\rho u^2} = \frac{\rho \cdot v_0^2}{4}$$

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{\rho \cdot v_0^2}{2}$$

$$I = u \cdot \bar{w} = \frac{1}{2} \rho v_0^2 u = \frac{1}{2} \rho (\omega \xi_0)^2 u = \frac{(\Delta p_0)^2}{2 Z} = \frac{P}{A}$$

$I$	Schallintensität	$[I] = \frac{W}{m^2}$
$\bar{w}$	Energieflussdichte	$[\bar{w}] = \frac{W}{m^2}$
Pot. Energie	→ 'Kompression Gas'	
Kin. Energie	→ 'Geschw. Teilchen'	
$\rho$	Dichte	$[\rho] = \frac{kg}{m^3}$
$v_0$	Schnellenamplitude	$[v_0] = \frac{m}{s}$
$\xi_0$	Amplitude	$[\xi_0] = \frac{m}{s}$
$u$	Wellengeschwindigkeit	$[u] = \frac{m}{s}$
$\Delta p_0$	Druckamplitude	$[\Delta p_0] = Pa$
$Z$	Wellenwiderstand bzw. Impedanz	$[Z] = \Omega = \frac{Pa}{m/s} = \frac{Ns}{m^3}$
$P$	Leistung	$[P] = W$
$A$	(Abstrahl-) Fläche	$[A] = m^2$

### 17.14 Dispersion

Die Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit von der Wellenlänge wird als Dispersion bezeichnet.

⇒ Siehe Beispiel Optik Abschnitt 15.9

#### 17.14.1 Dispersion bei Wasserwellen

$$u(\lambda) = \sqrt{\left( \frac{g \cdot \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi \cdot \sigma}{\rho \cdot \lambda} \right) \cdot \tanh\left(\frac{2\pi \cdot h}{\lambda}\right)}$$

tiefes Wasser ( $\lambda \ll h$ )

flaches Wasser ( $\lambda \gg h$ )

$$u(\lambda) = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi}}$$

$$u = \sqrt{g \cdot h}$$

$g$	Erdbeschleunigung	$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$	$[g] = \frac{m}{s^2}$
$\lambda$	Wellenlänge	$[\lambda] = m$	
$\sigma$	Oberflächenspannung	$[\sigma] = \frac{N}{m}$	
$h$	Wassertiefe	$[h] = m$	
$\rho$	Dichte	$[\rho] = \frac{kg}{m^3}$	

### 18 Superposition von Wellen

Superposition beschreibt die Überlagerung (Addition) von Wellen

• Linearität der Wellengleichung

• Die Summe zweier Lösungen der Wellengleichung ist auch eine Lösung der Wellengleichung.

Das Superpositionsprinzip erlaubt die Darstellung von periodischen Wellen als eine Summe von harmonischen Wellen.

### 18.1 Schwebung

Superposition von Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen  
⇒ Hörbar als ein 'Flattern'

$$f_{Schwebung} = f_2 - f_1$$

$$\xi_1 = A \cdot \sin(\omega_1 t)$$

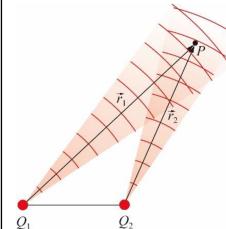
$$\xi_2 = A \cdot \sin(\omega_2 t)$$

$$\xi = 2 A \cdot \sin(\bar{\omega} t) \cdot \cos(\Omega t)$$

mit  $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  und  $\Omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$

### 18.2 Interferenz

Superposition von Wellen mit gleichen Frequenzen



$$\xi_1 = A \cdot \sin(\omega t - k r_1)$$

$$\xi_2 = A \cdot \sin(\omega t - k r_2)$$

$$\xi = 2 A \cdot \sin\left(\omega t - \frac{k(r_1 + r_2)}{2}\right) \cos\left(k \frac{\Delta r}{2}\right)$$

⇒ Der cos-Term hängt nur vom Ort ab!

⇒ Es gibt Orte, an denen Welle sich auslöscht!

### 18.3 Kohärenz

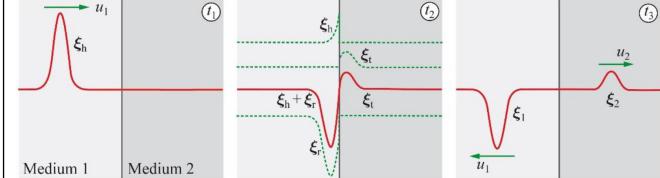
Zwei Wellen werden als kohärent bezeichnet, wenn eine **feste Phasendifferenz** zwischen den beiden Wellen besteht.

Kohärenzlänge ist der **maximale Streckenunterschied**, den zwei Wellen haben dürfen, damit eine (stabile) Interferenz beobachtet werden kann.

### 18.4 Reflexion und Transmission

#### 18.4.1 Verhalten von Wellen an Grenzflächen von zwei Medien

Ein Teil der Welle wird reflektiert und ein Teil wird transmittiert

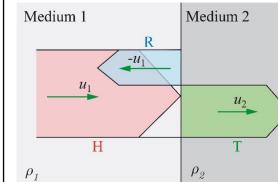


#### Physikalische Bedingung

Stetigkeit der Wellenfunktion und der Ableitung an der Grenzfläche

$$\xi_1(0) = \xi_2(0) \quad \dot{\xi}_1(0) = \dot{\xi}_2(0)$$

#### 18.4.2 Intensität von Reflexion und Transmission



$$R = \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

$$T = \frac{4 \cdot Z_1 \cdot Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

$R$  Reflexionskoeffizient

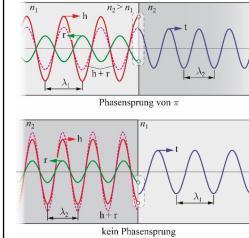
$$[R] = 1$$

$T$  Transmissionskoeffizient

$$[T] = 1$$

$Z_n$  Wellenwiderstand im Medium  $n$   $[Z] = \Omega = \frac{Pa}{m/s} = \frac{Ns}{m^3}$

#### 18.4.3 Phasensprünge bei Reflexionen



Reflexion an 'dichtem' Material  
⇒ **Phasensprung**

dicht:  $n_2 > n_1$   
kleinere Wellengeschwindigkeit,  
grösserer Wellenwiderstand  $Z$

Reflexion an 'dünnem' Material  
⇒ **kein Phasensprung**

## 18.5 Anwendung: Elektromagnetische Wellen

### 18.5.1 Elektromagnetische Wellen in Doppelleiter

$$u_r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} u_h$$

$$i_r = -\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} i_h$$

$$u_t = \frac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2} u_h$$

$$i_t = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2} i_h$$

Kabel mit kurzgeschlossenem Ende  $Z_2 = 0$

$$u_r = -u_h$$

$$u_1 = u_h + u_r = u_h - u_h = 0$$

Kabel mit offenem Ende  $Z_2 = \infty$

$$i_r = -i_h$$

$$i_1 = i_r + i_h = i_r - i_r = 0$$

$u_r$	Reflektierte Spannung	$[u_r] = V$
$u_h$	Eintreffende Spannung	$[u_h] = V$
$i_r$	Reflektierter Strom	$[i_r] = A$
$i_h$	Eintreffender Strom	$[i_h] = A$
$Z_n$	Wellenwiderstand im Medium $n$	$[Z] = \Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}$

### 18.5.2 Elektromagnetische Wellen in homogenem Milieu

$$Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} Z_0 = Z_0 \frac{c}{n}$$

$$R = \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$R$  Reflexionskoeffizient

$Z_n$  Wellenwiderstand im Medium  $n$   $[Z] = \Omega = \frac{\text{Pa}}{\text{m/s}} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}$

$\mu_r$  Permeabilitätszahl

$\epsilon$  Dielektrizitätszahl

$n_n$  Brechungsindex von Medium  $n$   $[n_1] = 1$

$\epsilon_0$  El. Feldkonstante  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$

$\mu_0$  Magn. Feldkonstante  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$

$Z_0$  Wellenwiderstand Vakuum  $Z_0 \approx 376.73 \Omega$

$c$  Lichtgeschwindigkeit  $c = 300 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

## 19 Stehende Wellen

### 19.0.1 Terminologie

Eine **stehende Welle** ist eine Welle, bei der Orte maximaler Auslenkung (oder minimaler Auslenkungen) sich **nicht fortbewegen**

- Ort- und Zeitabhängigkeit sind separiert
- Die Welle bewegt sich nicht im Raum ('Muster bleibt stehen')

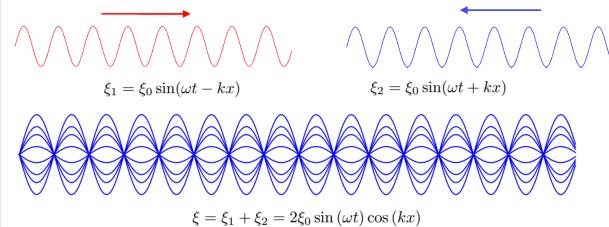
$$\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(kx)$$

$\Rightarrow \sin()$ -Terme sind auch erlaubt!

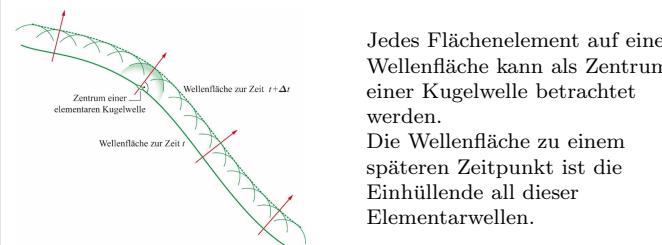
Orte, wo die Welle für alle Zeit = 0 ist heißen **Wellenknoten**  
 $\Rightarrow$  **Zwei benachbarte Knoten sind  $\frac{\lambda}{2}$  auseinander**

Orte, wo die Welle eine maximale Auslenkung erreicht, heißen **Wellenbauch**  
 $\Rightarrow$  **Zwei benachbarte Bäuche sind  $\frac{\lambda}{2}$  auseinander**

## 19.1 Entstehung von stehenden Wellen



## 19.2 Prinzip von Huygens



Jedes Flächenelement auf einer Wellenfläche kann als Zentrum einer Kugelwelle betrachtet werden.  
 Die Wellenfläche zu einem späteren Zeitpunkt ist die Eihüllende all dieser Elementarwellen.

## 19.3 Eigenschwingungen - 1D

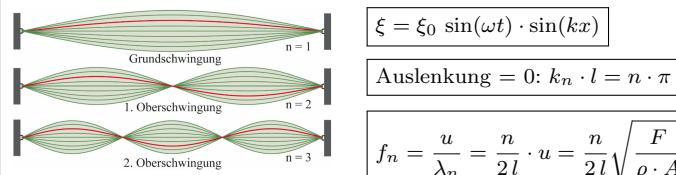
$$f_n = \frac{n}{2l} \cdot u = \frac{u}{\lambda_n}$$

$$\text{Auslenkung} = 0: k_n \cdot l = n \cdot \pi$$

$$\text{Auslenkung max: } k_n \cdot l = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

### 19.3.1 Saite

- Reflexion an einer Grenzfläche  $\rightarrow$  Stehende Welle
- Die stehende Welle muss in den vorhandenen Raum passen  
 $\rightarrow$  Geometrische Bedingung
- **Knoten an beiden Enden**



$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t) \cdot \sin(kx)$$

$$\text{Auslenkung} = 0: k_n \cdot l = n \cdot \pi$$

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{n}{2l} \cdot u = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}}$$

$k_n$  Wellenzahl

$l$  Länge der Saite

$u$  Wellengeschwindigkeit

$\lambda_n$  Wellenlänge

$n$  Ganze Zahl

$\omega$  Kreisfrequenz

$A$  Querschnitt der Saite

$$[k_n] = \frac{1}{\text{m}}$$

$$[l] = \text{m}$$

$$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$[\lambda_n] = \text{m}$$

$$[n] = 1$$

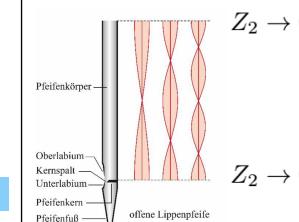
$$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$[A] = \text{m}^2$$

### 19.3.2 Pfeifen

#### Offene Pfeife

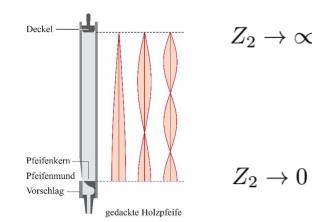
Länge  $l = \frac{\lambda}{2}$



Auslenkung an Enden:  
 Wellenbauch

#### Gedackte Pfeife

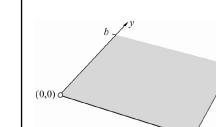
Länge  $l = \frac{\lambda}{4}$



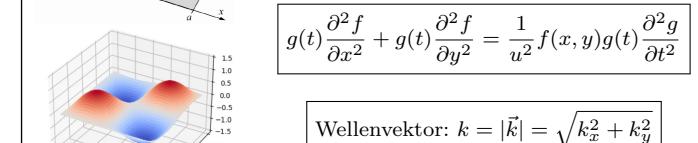
Auslenkung offenes Ende:  
 Wellenbauch  
 Auslenkung gedacktes Ende:  
 Knoten (max. Auslenkung)

## 19.4 Eigenschwingungen - 2D

### 19.4.1 Rechteckige Membrane



$$\xi(x, y, t) = \xi_0 \sin(\omega t) \sin(k_x x) \sin(k_y y)$$



$$g(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + g(t) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{u^2} f(x, y, g(t)) \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

**Randbedingungen:**

$$\text{Auslenkung} = 0 \quad k_x = \frac{n \pi}{a} \quad k_y = \frac{m \pi}{b}$$

$$u^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

## 20 Beugung

### 20.0.1 Terminologie

Die **Richtungsänderungen** der Wellenausbreitung in einem homogenen Medium durch **Hindernisse** wird als **Beugung (Diffraction)** bezeichnet.

- Das Hindernis kann eine Kante, ein Spalt oder ein kleines Objekt sein
- Beugung tritt auf, wenn das **Hindernis von ähnlicher Grösse** ist, wie die **Wellenlänge**

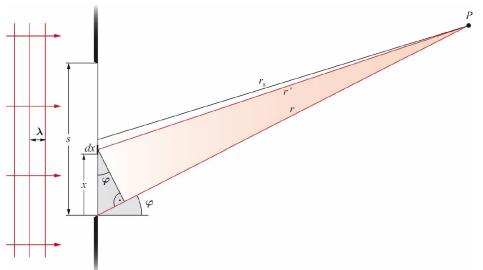
⇒ Beugung tritt auf, wenn eine Welle limitiert wird!

Dies gilt insbesondere für:

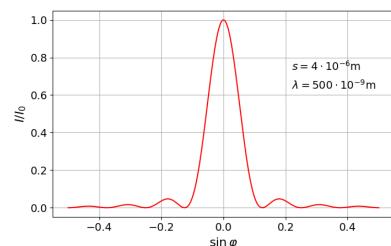
Spalt, Kante, Loch (Pinhole), Objektiv-Öffnung

## 20.1 Beugung - Spalt

### 20.1.1 Beschreibung Setup



### 20.1.2 Intensität nach dem Spalt



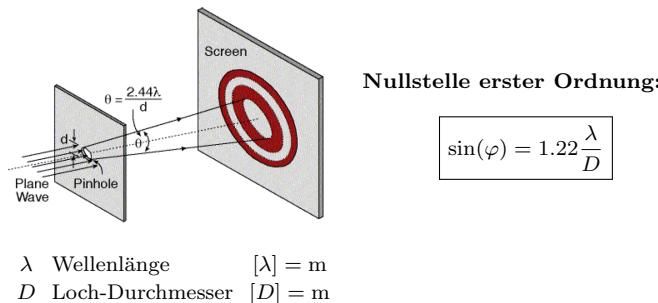
$$I_s \propto \frac{A^2}{r^2} \frac{\sin^2\left(\frac{k \cdot s \cdot \sin(\varphi)}{2}\right)}{\left(\frac{k \cdot s \cdot \sin(\varphi)}{2}\right)^2}$$

$$\text{Minima der Intensität} \\ \sin(\varphi) = n \frac{\lambda}{s}$$

- $I_s$  Intensität  
 $s$  Länge des Spalts  
 $\lambda$  Wellenlänge  
 $n$  Ordnung (typ. 1)  
 $A$  Amplitude  
 $r$  siehe Bild Abschnitt 20.1.1  
 $\varphi$  Einfallswinkel der Welle zum Spalt  
**Hinweis:** Oft muss gegebenes  $\varphi$  durch 2 geteilt werden!

$$[I_s] = \frac{W}{m^2} \\ [s] = m \\ [\lambda] = m \\ [n] = 1 \\ [A] \\ [r] = m \\ [\varphi] = {}^\circ$$

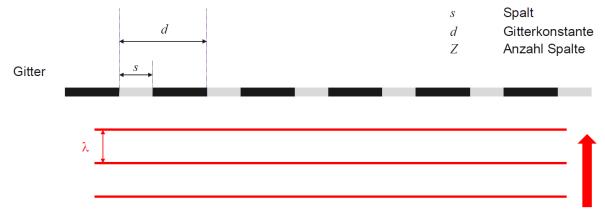
## 20.2 Beugung - Runde Öffnung (Pinhole)



$$\text{Nullstelle erster Ordnung:} \\ \sin(\varphi) = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

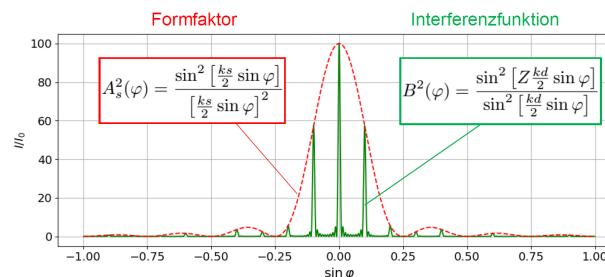
## 20.3 Beugung - Gitter

### 20.3.1 Beschreibung Setup



### 20.3.2 Intensität nach dem Gitter

$$I_G = \frac{A^2}{r^2} A_s^2 B^2$$

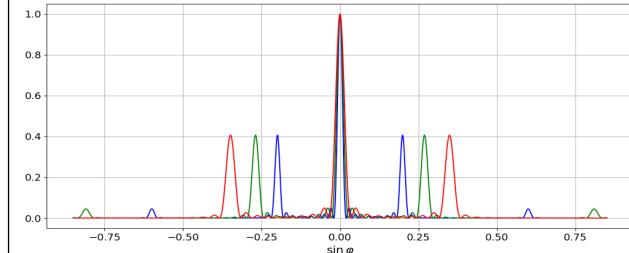


$A_s^2(\varphi)$  hat Nullstellen bei  $n \frac{\lambda}{s}$  (hängt von  $s$  ab)  
 $B^2(\varphi)$  hat Hauptmaxima bei  $n \frac{\lambda}{d}$  und  $Z - 2$  Nebenmaxima dazwischen (hängt von  $Z$  und  $d$  ab)

- $I_G$  Intensität nach Gitter  $[I_G] = \frac{W}{m^2}$   
 $k$  Wellenzahl  $[k] = \frac{1}{m}$   
 $s$  Spalt  $[s] = m$   
 $d$  Gitterkonstante  $[d] = m$   
 $Z$  Anzahl Spalte  $[Z] = 1$

### 20.3.3 Auflösungsvermögen

Verschiedene Wellenlängen können getrennt (aufgelöst) werden



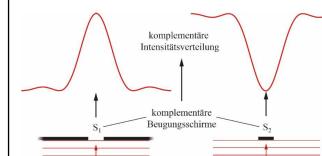
### Kriterium

Zwei Wellenlängen werden gerade noch aufgelöst, wenn das Hauptmaximum von  $\lambda_2$  mit dem Minimum von  $\lambda_1$  zusammenfällt

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = n Z$$

- $\lambda$  Wellenlänge  $[\lambda] = m$   
 $\Delta\lambda$  Unterschied der Wellenlängen  $[\Delta\lambda] = m$   
 $n$  Ordnung der Beugung (typ. 1)  $[n] = 1$   
 $Z$  Anzahl der Spalte  $[Z] = 1$

## 20.4 Babinet-Prinzip



Ausserhalb des Bereichs geometrisch-optischer Abbildung produzieren komplementäre Beugungsschirme gleiche Beugungsbilder

## 21 Akustik

### 21.0.1 Terminologie

#### Ton

Eine harmonische Schallwelle wird als **Ton** bezeichnet. Ein (reiner) Ton entspricht also einer **Schallschwingung**, die eine **einige Frequenz** enthält.

#### Klang

Eine Überlagerung von harmonischen Schwingungen, deren **Frequenzen** in einem **ganzzahligen Verhältnis** zur tiefsten Frequenz, zur Frequenz des **Grundtons**, stehen, wird **Klang** genannt.

#### Geräusch

Bei einem **Geräusch** besteht das Frequenzspektrum nicht mehr aus einzelnen diskreten Linien, sondern weist in einem bestimmten Frequenzbereich eine **kontinuierliche Verteilung** auf.

## 21.1 Pegel

'Einheit': Bel

$$\text{Pegel} = \log\left(\frac{x}{b_0}\right)$$

$$x = b_0 \cdot 10^{\text{Pegel}}$$

Pegel Dimensionslose Grösse [Pegel] = 1  
 $x$  Zu vergleichende Grösse [x]  
 $b_0$  Basisgrösse  $[b_0] = [x]$

'Einheit': Dezibel

$$\text{Pegel} = 10 \cdot \log\left(\frac{x}{b_0}\right)$$

$$x = b_0 \cdot 10^{\left(\frac{\text{Pegel}}{10}\right)}$$

## 21.2 Schallintensität

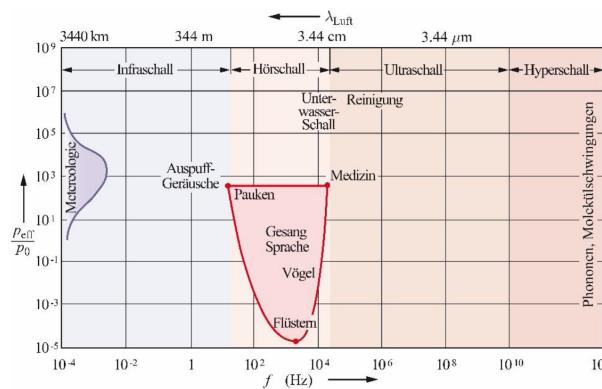
$$L_I = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$L_p = 20 \cdot \log\left(\frac{p_{eff}}{p_{eff0}}\right)$$

$$p_{eff} = \frac{\Delta p_0}{\sqrt{2}}$$

$L_I$  Schallintensitätspegel  $[L_I] = \text{dB}$   
 $L_p$  Schalldruckpegel  $[L_p] = \text{dB}$   
 $I$  Intensität  $[I] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$   
 $p_{eff}$  Schalldruck (Effektivwert)  $[p_{eff}] = \text{Pa}$   
 $\Delta p_0$  Druckamplitude  $[\Delta p_0] = \text{Pa}$   
 $I_0$  Bezugssintensität  $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$   
 $p_{eff0}$  Bezugsschalldruck  $p_{eff0} = 2 \cdot 10^{-5} \text{Pa}$

## 21.3 Verschiedene Schallquellen



## 21.4 Intensität bei Kugelwellen (ohne Dämpfung)

Energieerhaltung

$$I(r) = \frac{P}{4 \pi r^2}$$

Verhältnis

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Pegel

$$L_2 = L_1 - 20 \cdot \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$I(r)$  Intensität

$$[I(r)] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$P$  Leistung

$$[P] = \text{W}$$

$r_i$  Abstand (Radius) zum Wellenursprung

$$[r_i] = \text{m}^2$$

$L_i$  Pegel

$$[L_i] = \text{dB}$$

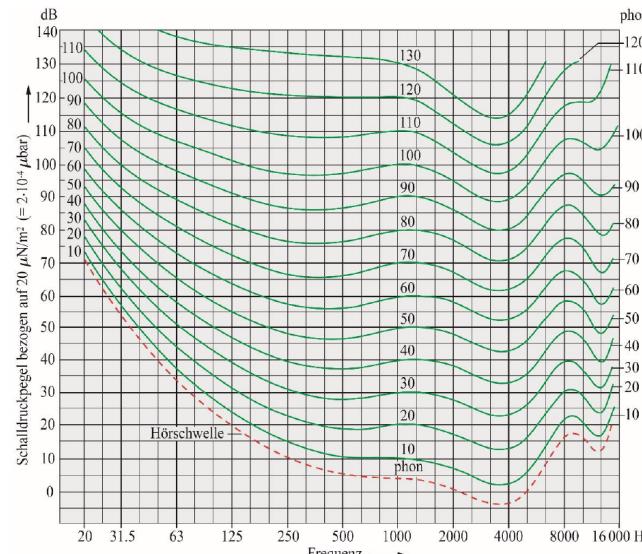
- Plattenresonator

- Helmholtz-Resonator

## 21.6.2 Schalldämmung

Schalldämmung ist die **Behinderung der Schallausbreitung** durch **reflektierende Hindernisse**. Mauern, Türen und Fenster bewirken eine Schalldämmung für den von aussen in das Gebäude eindringenden Schall. Auch die Ausbreitung von Schall innerhalb eines Gebäudes wird durch die Schalldämmung von Zwischenwänden und Türen abgeschwächt. Im Freien wird durch Schallschutzwände eine Schalldämmung für die dahinterliegenden Gebäude erreicht.

## 21.5 PHON-Skala



## 21.6 Schalldämpfung / Schalldämmung

### 21.6.1 Schalldämpfung

Schalldämpfung bedeutet eine **Abschwächung** der Schallwellen durch **Absorption**.

Schallenergie wird in '**Wärme**' umgewandelt, d.h. durch die Absorption von Energie werden das von den Schallwellen durchdringende Medium oder die das Schallfeld begrenzenden Körper erwärmt.

**Verschiedene Arten von Absorption für Schalldämpfung Innen**

- Poröse Schicht (mit oder ohne perforierte Abdeckung)
- Akustikplatte

- Plattenresonator

- Helmholtz-Resonator

## 21.7 Intensität bei Kugelwellen (mit Dämpfung)

Energieerhaltung

$$I(r) = \frac{P}{4 \pi r^2} e^{-\alpha r}$$

Verhältnis

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} e^{-\alpha(r_2-r_1)}$$

Pegel

$$L_2 = L_1 - 20 \cdot \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - K(r_2 - r_1)$$

$I(r)$  Intensität

$$[I(r)] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$P$  Leistung

$$[P] = \text{W}$$

$r_i$  Abstand (Radius) zum Wellenursprung

$$[r_i] = \text{m}^2$$

$L_i$  Pegel

$$[L_i] = \text{dB}$$

$\alpha$  Dämpfung

$$[\alpha] = 1$$

$K$  Dämpfung

$$[K] = \frac{\text{dB}}{\text{m}}$$

## 21.8 Schalldämmung / Schalldämm-Mass

Bei der Schallübertragung muss zwischen **Luftschall** und **Körperschall** unterschieden werden.

### 21.8.1 Luftschalldämmung

Es gibt Schallquellen, die ihre Schallenergie (fast) ausschliesslich in die Luft abstrahlen.

Beispiele: menschliche Stimme, Geigen, Lautsprecher und Blasinstrumente

### 21.8.2 Körperschalldämmung

Andere Schallerzeuger übertragen die Schallschwingungen nicht nur auf die Luft, sondern auch direkt auf feste Körper. Streichinstrumente, wie Cello oder Bassgeige, und Klavier oder Flügel übertragen die Schallschwingungen auch direkt auf den Fussboden. Wird ein Nagel in die Wand geschlagen, so wird ein grosser Anteil des erzeugten Schalls als Körperschall übertragen. Beispiele: Trittschall, Wasserleitungsgerausche

## 21.9 Schalldämm-Mass

$$\mathcal{R} = 10 \cdot \log \left( \frac{P_1}{P_2} \right)$$

## 21.10 Anhall / Nachhall

### 21.10.1 Anhall

Es dauert eine gewisse Zeit, bis sich eine konstante Energiedichte der Schallwellen im Raum aufgebaut hat. Dieser Vorgang wird Anhall genannt. Wegen der logarithmischen Empfindlichkeit des Ohrs wird er praktisch nicht wahrgenommen.

### 21.10.2 Nachhall

Die von den Begrenzungsflächen des Raumes mehrfach reflektierten Wellen bewirken andererseits, dass beim plötzlichen Abschalten einer Schallquelle der Schall nicht sofort verschwindet, sondern allmählich abklingt. Dieses Phänomen wird Nachhall genannt und ist im Gegensatz zum Anhall deutlich wahrnehmbar.

**Per Definition ist die Nachhallzeit jene Zeitspanne, in welcher der Schallpegel im Raum um 60 dB sinkt.**

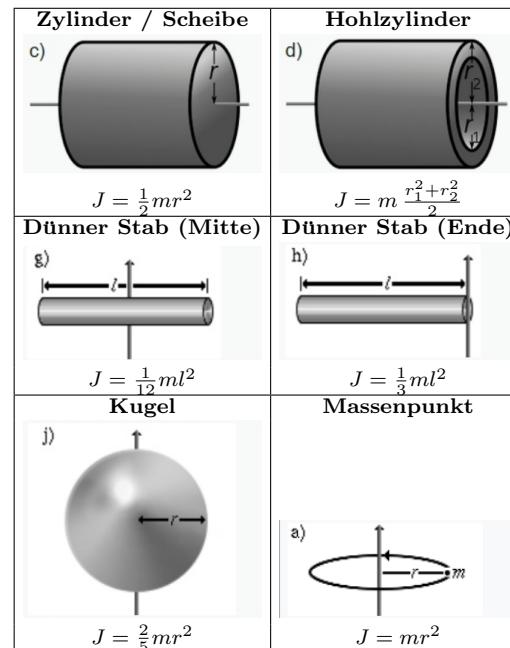
### 21.10.3 Nachhallzeit $T_N$

$$T_N = 0.16 \frac{s}{m} \frac{V}{\sum_i \alpha_i A_i}$$

$T_N$	Nachhallzeit	$[T_N] = s$
$V$	Raumvolumen	$[V] = m^3$
$\alpha_i$	Absorptionsgrad	$[\alpha_i] = 1$
$A_i$	Teilfläche der Raumbegrenzung mit Absorption $\alpha_i$	$[A_i] = m^2$

## 22 Anhang

### 22.1 Massenträgheitsmomente



### 22.2 Messunsicherheit

Abhängigkeit der Messgröße:  $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\text{Unsicherheit der Messgröße: } \Delta y = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \Delta x_i^2}$$

Beispiel:  $f = \frac{c}{\lambda}$

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial c} \right)^2 \Delta c^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)^2 \Delta \lambda^2} \\ &= \sqrt{\left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 \Delta c^2 + \left( -\frac{c}{\lambda^2} \right)^2 \Delta \lambda^2} \end{aligned}$$

## 22.3 Trigonometrie

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$a^\circ$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$-\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

### 22.3.1 Beziehungen zwischen $\sin(x)$ und $\cos(x)$

$$\begin{aligned} \sin(-a) &= -\sin(a) & \cos(-a) &= \cos(a) \\ \sin(\pi - a) &= \sin(a) & \cos(\pi - a) &= -\cos(a) \\ \sin(\pi + a) &= -\sin(a) & \cos(\pi + a) &= -\cos(a) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a) & \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \end{aligned}$$

### 22.3.2 Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(a \pm b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b) \\ \cos(a \pm b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b) \\ \tan(a \pm b) &= \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)} \end{aligned}$$

### 22.3.3 Summen und Differenzen

$$\begin{aligned} \sin(a) + \sin(b) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) - \sin(b) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \cos(a) + \cos(b) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(a) - \cos(b) &= -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \tan(a) \pm \tan(b) &= \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a) \cdot \cos(b)} \end{aligned}$$

### 22.3.4 Produkte

$$\begin{aligned} \sin(a) \cdot \sin(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \cos(a) \cdot \cos(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b)) \\ \sin(a) \cdot \cos(b) &= \frac{1}{2} (\sin(a-b) + \sin(a+b)) \end{aligned}$$

### 22.3.5 Winkelvielfache und Halbwinkel

$$\begin{aligned} \sin(2a) &= 2 \sin(a) \cdot \cos(a) \\ \sin(3a) &= 3 \sin(a) - 4 \sin^3(a) \\ \sin(4a) &= 8 \cos^3(a) \cdot \sin(a) - 4 \cos(a) \cdot \sin(a) \\ \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ \cos(3a) &= 4 \cos^3(a) - 3 \cos(a) \\ \cos(4a) &= 8 \cos^4(a) - 8 \cos^2(a) + 1 \\ \sin\left(\frac{a}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(a))} & \cos\left(\frac{a}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(a))} \end{aligned}$$

### 22.3.6 Potenzen

$$\begin{aligned}\sin^2(a) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2a)) \\ \sin^3(a) &= \frac{1}{4}(3 \sin(a) - \sin(3a)) \\ \sin^4(a) &= \frac{1}{8}(\cos(4a) - 4 \cos(2a) + 3) \\ \cos^2(a) &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2a)) \\ \cos^3(a) &= \frac{1}{4}(\cos(3a) + 3 \cos(a)) \\ \cos^4(a) &= \frac{1}{8}(\cos(4a) + 4 \cos(2a) + 3)\end{aligned}$$

## 23 Vektorrechnung

### 23.1 Betrag eines Vektors

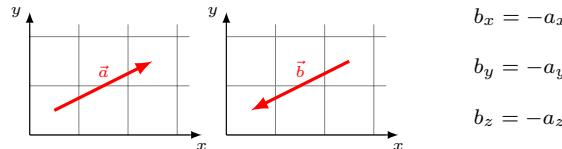
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

### 23.2 Gleichheit zweier Vektoren

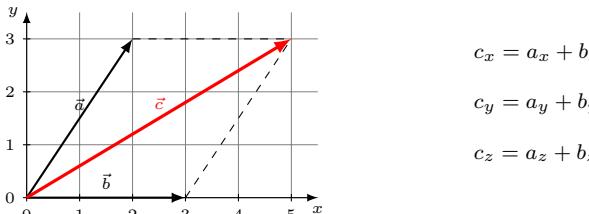
Zwei Vektoren sind gleich, wenn alle Komponenten identisch sind

$$\begin{array}{lll} A_x = B_x & A_y = B_y & A_z = B_z \end{array}$$

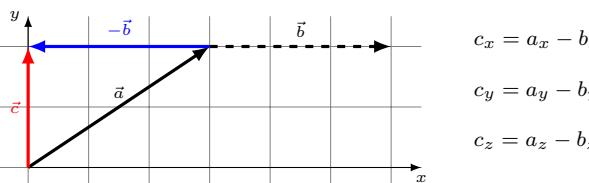
### 23.3 Negative eines Vektors



### 23.4 Addition zweier Vektoren



### 23.5 Subtraktion zweier Vektoren



### 23.6 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

$$\begin{aligned}\vec{b} &= s \vec{a} & |\vec{B}| &= |s| \cdot |\vec{a}| \\ b_x &= s \cdot a_x \\ b_y &= s \cdot a_y \\ b_z &= s \cdot a_y\end{aligned}$$

### 23.7 Skalarprodukt

$$c = \vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi)$$

### 23.8 Kreuzprodukt (nur in 3D)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

## 24 Statistik

### 24.1 Arithmetisches Mittel $\bar{x}_{arith}$

$$\bar{x}_{arith} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

### 24.2 Geometrisches Mittel $\bar{x}_{geom}$

Nur für positive Zahlenreihen  $x_i$  definiert!

$$\bar{x}_{geom} := \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N x_i} \quad \Rightarrow \bar{x}_{geom} \leq \bar{x}_{arith}$$

### 24.3 Quadratisches Mittel QMW (RMS)

Wechselstromtechnik; Effektivwert

$$QMW := \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}$$

### 24.4 Harmonisches Mittel $\bar{x}_{harm}$

$$\bar{x}_{harm} := \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i}}$$

Kann sinnvoll eingesetzt werden, wenn man für die  $i$ -te Teilstrecke  $s_i$  eine Zeit  $t_i$  benötigt (also eine Durchschnittsgeschwindigkeit von  $v_i = \frac{s_i}{t_i}$ ) und eine Durchschnittsgeschwindigkeit über  $N$  Teilstrecken ermitteln will:

$$\bar{v}_{harm} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i}{\sum_{i=1}^N t_i} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i}{\sum_{i=1}^N \frac{s_i}{v_i}} \quad \text{gewichtetes harm. Mittel}$$

### 24.5 Standardabweichung $\sigma$

$$\begin{aligned}\text{Varianz: } \sigma^2 &:= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_{arith})^2 \\ \text{Standardabweichung: } \sigma &:= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_{arith})^2}\end{aligned}$$

### 24.6 Standardabweichung des Mittelwerts

Gilt nur, wenn eine Normalverteilung vorliegt!

Beschreibt nur statistische Fehler

$$\sigma(\bar{x}_{arith}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

## 25 Mathematik-Hilfe

### 25.1 Trigonometrie

Sinus	Cosinus	Tangens
$\frac{GK}{H}$	$\frac{AK}{H}$	$\frac{AK}{GK}$

### 25.2 Schwerpunkt

Die Koordinaten des Schwerpunkts müssen komponentenweise berechnet werden:

$$x_s = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{M} \quad y_s = \frac{\sum y_i \cdot m_i}{M} \quad z_s = \frac{\sum z_i \cdot m_i}{M}$$

$x_s, y_s, z_s$  Koordinaten des Schwerpunkts

$x_i, y_i, z_i$  Koordinaten von kleinen Massenpunkten

$m_i$  Kleine Massenpunkte an entsprechenden Koordinaten  
 $M$  Gesamtmasse des Körpers

### 25.3 Polarkoordinaten (Kreisbewegung)

$$\text{polar} \rightarrow \text{kartesisch} \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\phi) \\ r \cdot \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\text{kartesisch} \rightarrow \text{polar} \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\left(\frac{x}{y}\right) \end{pmatrix}$$

### 25.4 Ableitungsregeln S .445-448

#### 25.4.1 Elementare Regeln

$$\begin{array}{ll} \text{Potenzen: } f(x) = x^3 & f'(x) = 3x^2 \\ f(x) = x^\alpha & f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \end{array}$$

$$\text{Linearität: } f(x) = c \cdot x^2 \quad f'(x) = c \cdot 2x$$

$$\text{Summe: } (u(x) + v(x) - w(x))' = u'(x) + v'(x) - w'(x)$$

$$\text{Konstanten: } c = const \rightarrow c' = 0$$

#### 25.4.2 Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

#### 25.4.3 Quotientenregel

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \rightarrow \text{als Produkt schreiben}$$
$$u(x) \cdot \left(\frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \frac{-v'(x)}{v(x)^2}$$

#### 25.4.4 Kettenregel

$$g(f(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

#### 25.4.5 Umkehrfunktion

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

### 25.5 Allgemeine Logarithmus-Ableitung

$$(\log_b(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)}\right)' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot (\ln(x))' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}$$

### 25.6 Integrationsregeln S. 494-496

Linearität:  $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$

#### 25.6.1 Rechenregeln mit Integralen S. 508-510

Zerlegung:  $\int_a^b f_1(x) dx + f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Grenzen tauschen:  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

Gleiche Grenzen:  $\int_a^a f(x) dx = 0$

### 25.7 Wichtige Integrale S. 495

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \quad \int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\int_a^b 1 dx = b - a \text{ (Rechteck)}$$