

# Physik

Sammlung, gegliedert nach Modul

Fabian Suter, 1. Dezember 2023

<https://github.com/FabianSuter/Physik.git>

## 1 Statik

### 1.1 Schwerkraft (Gewichtskraft)

$$\text{Allgemein: } F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$\text{Erde: } F_G = G \cdot \frac{m_E \cdot m}{r_E^2} = m \cdot g$$

$F_G$	Gewichtskraft	$[F_G] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$
$G$	Gravitationskonstante	$6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$
$m_i$	Massen der Körper	$[m] = \text{kg}$
$r$	Abstand der Massen	$[r] = \text{m}$
$g$	Erdbeschleunigung	$9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$m_E$	Masse der Erde	$5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
$r_E$	Erdradius	$6.378 \cdot 10^6 \text{ m}$

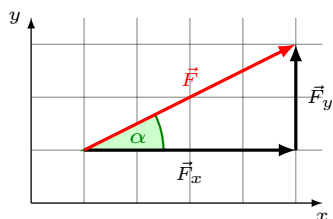
### 1.2 Normalkraft (Kontaktkraft)

(Sekundär-) Kraft, welche sich so anpasst, dass in Ruhe ein Kräftegleichgewicht herrscht:

$$F_G = -F_N \Rightarrow \text{im Gleichgewicht auf horizontaler Oberfläche}$$

### 1.3 Zerlegung von Kräften

Kraftvektoren kann man komponentenweise aufteilen:



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$$

hilfreich beim Lösen von Aufgaben!

## 1.4 Gleichgewichtsbedingungen für Massepunkte

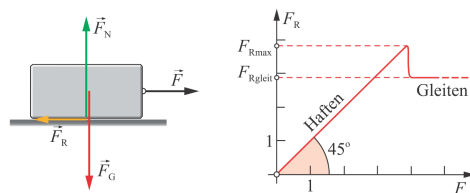
Der Massepunkt erfährt keine Beschleunigung  
 $\Rightarrow$  Summe aller wirkenden Kräfte ist 0

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \text{komponentenweise}$$

$$\sum_{i=1}^n F_x = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_y = 0 \quad \sum_{i=1}^n F_z = 0$$

## 1.5 Haftreibung / Gleitreibung

### 1.5.1 Trockene Festkörperreibung



$$\text{Haftreibung: } \vec{F}_{R,max} = \mu_H \cdot \vec{F}_N$$

$$|\vec{F}_R| \leq |\vec{F}_{R,max}|$$

$$\text{Gleitreibung: } \vec{F}_{Gleit} \approx \mu_G \cdot \vec{F}_N$$

$\vec{F}_R$	Reibungskraft	$[\vec{F}_R] = \text{N}$
$\vec{F}_{R,max}$	Haftreibungskraft	$[\vec{F}_{R,max}] = \text{N}$
$\vec{F}_{Gleit}$	Gleitreibungskraft	$[\vec{F}_{Gleit}] = \text{N}$

### 1.5.2 Viskose Reibung

Sobald Schmiermittel zum Einsatz kommen, ist die Reibungskraft abhängig von der Grösse der Berührungsfläche:

Bei gleicher Normalkraft  $\vec{F}_N$  ist bei

- kleinerem Flächendruck die Reibung kleiner
- grösserem Flächendruck die Reibung grösser

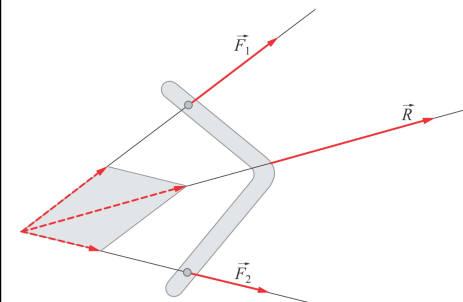
## 1.6 Starre Körper

- Ein starrer Körper wird durch angreifende Kräfte nicht deformiert
- Bei einem starren Körper kann die Kraft entlang ihrer Wirkungsline beliebig verschoben werden

## 1.7 Addition von Kräften

### 1.7.1 Spezialfall: Ebene Kräftegruppe für schiefe Wirkungsline

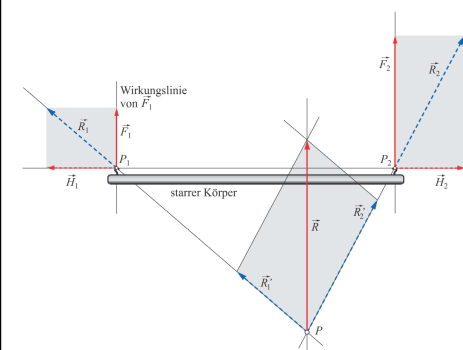
Kräfte entlang ihrer Wirkungsline verschieben  
 $\Rightarrow$  Im Schnittpunkt vektorielle Addition der Kräfte durchführen, um die resultierende Kraft zu erhalten.



Dieses Verfahren kann auch mehrfach angewendet werden!

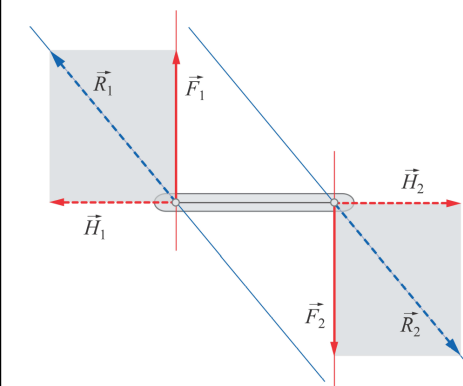
### 1.7.2 Spezialfall: Ebene Kräftegruppe für parallele Wirkungsline

Zwei sich zu null addierende Hilfskräfte hinzufügen ( $\vec{H}_1$ ,  $\vec{H}_2$ )



### 1.7.3 Spezialfall: Ebene Kräftegruppe für parallel, entgegengesetzt und gleich grosse Kräfte

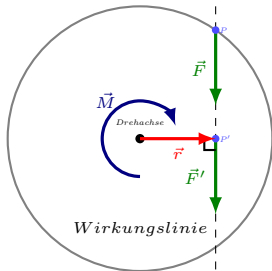
Kräftepaare können in andere Kräftepaare umgewandelt werden, aber niemals zu einer resultierenden Kraft  $\vec{R}$  vereinfacht werden.



## 1.8 Drehmoment

Eine Drehwirkung auf einen starren Körper lässt sich auf zwei verschiedene Arten und Weisen erzeugen:

- Kräftepaar
- einzelne Kraft und Bezugspunkt (Drehzentrum)



$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = a \cdot |\vec{F}|$$

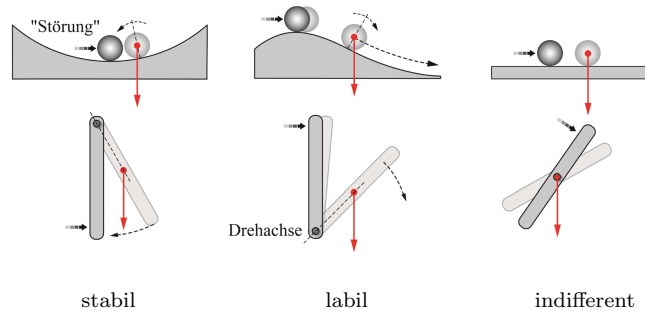
Die Länge  $a$  muss **senkrecht** zur wirkenden Kraft sein!

$\vec{M}$	Drehmoment	$[M] = \text{Nm}$
$\vec{r}$	Abstandsvektor	$[r] = \text{m}$
$\vec{F}$	Angreifende Kraft	$[F] = \text{N}$

## 1.9 Gleichgewichtsbedingungen für starre Körper

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \quad \sum_{i=1}^m \vec{M}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \text{komponentenweise}$$

## 1.10 Gleichgewichts-Arten



## 1.11 Deformierbare Körper

### 1.11.1 Spannungen

#### Zugspannung $\sigma$

senkrecht wirkende Kraft pro Flächeneinheit  
Wenn  $\sigma < 0$  spricht man von **Druck**

$$\sigma = \frac{F_{\perp}}{A} \quad [\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

#### Schubspannung $\tau$ (Scherung)

parallel wirkende Kraft pro Flächeneinheit

$$\tau = \frac{F_{\parallel}}{A} \quad [\tau] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

### 1.11.2 Dehnung $\epsilon$ (Hook'sches Gesetz)

$$\epsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma = \frac{1}{E} \cdot \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{\Delta l}{l}$$

$\epsilon$	Dehnung	$[\epsilon] = 1$
$E$	Elastizitätsmodul (Materialeigenschaft)	$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
$l$	Länge des Körpers vor Dehnung	$[l] = \text{m}$
$\Delta l$	Längenunterschied bei Dehnung	$[\Delta l] = \text{m}$
$\sigma$	Zugspannung	$[\sigma] = \text{N}$
$A$	Querschnittsfläche	$[A] = \text{m}^2$

$\Rightarrow$  Das Hook'sche Gesetz gilt nur, solange die Deformation linear-elastisch ist!

### 1.11.3 Querkontraktion $\epsilon_q$

Wird ein Stab gedehnt (länger), so wird er automatisch auch dünner

$$\epsilon_q = \frac{\Delta d}{d} = -\mu \epsilon \quad \mu \in (0; 0.5)$$

$\epsilon_q$	Querkontraktion	$[\epsilon_q] = 1$
$d$	Ursprüngliche Dicke des Materials	$[d] = \text{m}$
$\Delta d$	Dicken-Änderung	$[\Delta d] = \text{m}$
$\epsilon$	(Längs-) Dehnung	$[\epsilon] = 1$
$\mu$	Poisson-Zahl (Materialeigenschaft)	$[\mu] = 1$

### 1.11.4 Kompression $\frac{\Delta V}{V}$

Ein Körper wird von allen Seiten mit dem gleichen Druck belastet, sodass sich sein Volumen verkleinert

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \cdot \Delta p \quad \left(K = \frac{1}{\kappa}\right)$$

$V$	Ursprüngliches Volumen des Körpers	$[V] = \text{m}^3$
$\Delta V$	Volumenänderung	$[\Delta V] = \text{m}^3$
$\kappa$	Kompressibilität	$[\kappa] = \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$
$\Delta p$	Druckänderung	$[\Delta p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$

$$\text{Würfel: } \Rightarrow \kappa = \frac{3}{E}(1 - 2\mu)$$

Völlig inkompressibler Körper:  $\kappa = 0 \quad K = \infty \quad \mu = 0.5$

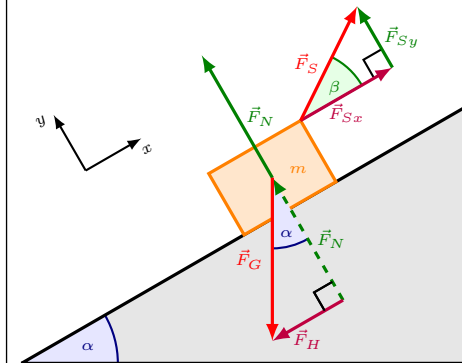
### 1.11.5 Schubbeanspruchung (Scherung)

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (\text{gilt für isotrope Materialien})$$

$\gamma$	Scherwinkel	$[\gamma] = ^\circ$
$G$	Schubmodul; Gleitmodul; Torsionsmodul	$[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
$\tau$	Schubspannung	$[\tau] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
$E$	Elastizitätsmodul (Materialeigenschaft)	$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
$\mu$	Poisson-Zahl (Materialeigenschaft)	$[\mu] = 1$

## 1.12 Schiefe Ebene (mit Seil)



Wichtige Formeln und Zusammenhänge zur schiefen Ebene

$$F = m \cdot a \quad F_G = m \cdot g$$

$$F_N = m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \quad F_H = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

## 1.13 Rezept: Aufgaben zur Statik lösen

1. Koordinatensystem festlegen
2. Alle wirkenden Kräfte einzeichnen
3. Bezugspunkt P (Drehpunkt) festlegen  
 $\Rightarrow$  **Da wo viele Kräfte** (oder da wo sinnvoll)
4. Kräfte komponentenweise aufschreiben:  $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$
5. Drehmomente M aufschreiben und gleichsetzen:  $\sum \vec{M} = \vec{0}$

## 2 Kinematik

### 2.1 Geradlinige Bewegung (1D)

Die Bewegung erfolgt entlang einer Gerade (keine Richtungsänderung)

$$x(t) \quad \frac{d}{dt} \quad v(t) \quad \frac{d}{dt} \quad a(t) \quad x(t) \quad \int dt \quad v(t) \quad \int dt \quad a(t)$$

#### 2.1.1 Weg $x(t)$

Weg mit Zeit parametrisiert:  $x = x(t)$

#### 2.1.2 Geschwindigkeit $v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

momentane Geschw.:  $\frac{d}{dt} x(t) = \dot{x}(t)$  (Tangente)

mittlere Geschw.:  $\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$  (Sekante)

#### 2.1.3 Beschleunigung $a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

momentane Beschleunigung:  $\frac{d}{dt} v(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$

mittlere Beschleunigung:  $\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$

#### 2.1.4 Ruck $j(t)$

Änderung der Beschleunigung pro Zeiteinheit:  $j(t) = \dot{a}(t) = \ddot{v}(t)$

### 2.2 Gleichförmige Bewegung $a(t) = 0$

$$a(t) = 0$$

$$v(t) = v_0 = \text{const}$$

$$x(t) = v_0 \cdot t + x_0$$

### 2.3 Gleichm. beschleunigte Bewegung $a(t) = \text{const}$

Allgemein:

Anwendungsfall: Freier Fall

$$a(t) = a_0 = \text{const}$$

$$a(t) = -g = \text{const}$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0$$

$$v(t) = -g \cdot t$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

$$x(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + h_0$$

#### 2.3.1 Höchsten Punkt $x_{max}$ finden (Extremum)

Im Extrempunkt gilt:  $\frac{d}{dt} x(t) = v(t) \stackrel{!}{=} 0$

$$0 \stackrel{!}{=} v(t_{max}) = -g \cdot t_{max} + v_0 \Rightarrow t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

Durch einsetzen von  $t_{max}$  in  $x(t)$  erhält man die maximale Höhe:

$$x(t_{max}) = -\frac{1}{2} g \cdot t_{max}^2 + v_0 \cdot t_{max} + h_0 = -\frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0^2}{g} + h_0$$

### 2.4 Beliebige Bewegung (2D)

#### 2.4.1 Geschwindigkeit (tangential zur Bahnkurve)

$$\text{momentane Geschw.: } \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$\text{mittlere Geschw.: } \bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\text{Betrag: } v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

#### 2.4.2 Beschleunigung

$$\text{momentane Beschl.: } \vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\text{mittlere Beschl.: } \bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Die Beschleunigung kann ungleich null sein, auch wenn der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist

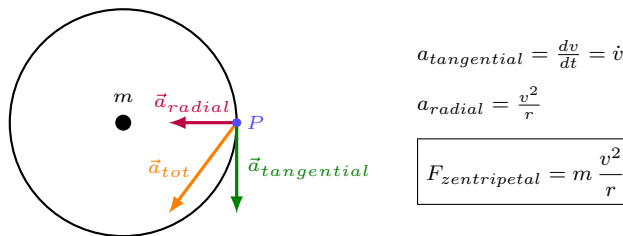
### 2.5 Bahnkurven

Die Geschwindigkeitsänderung in einer Bahnkurve wird in zwei Komponenten aufgeteilt:

$\Delta \vec{v}_{radial}$  und  $\Delta \vec{v}_{tangential}$

Der tangentielle Anteil ändert ausschliesslich den Betrag der Geschwindigkeit  $|\vec{v}|$

Der radiale Anteil ändert ausschliesslich die Richtung der Geschwindigkeit  $\vec{v}$



### 2.6 Gleichförmige Bewegung $a_{tangential} = 0$

tangential (Tacho)

radial

$$a_{tangential} = 0$$

$$a_{radial} = \frac{v^2}{r}$$

$$v(t) = v_0 = \text{const}$$

$$s(t) = v_0 \cdot t + s_0$$

### 2.7 Gleichm. beschl. Bewegung $a_{tangential} = \text{const}$

tangential (Tacho)

radial

$$a_{tangential} = a_0 = \text{const}$$

$$a_{radial} = \frac{v^2}{r}$$

$$v(t) = a_{tangential} \cdot t + v_0$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_{tangential} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Die Gesamtbeschleunigung eines Systems  $\vec{a}_{tot} = \vec{a}_{tangential} + \vec{a}_{radial}$  muss nicht zwingend konstant sein! Bei Änderungen der Richtung ändert die Gesamtbeschleunigung.

### 2.8 Kreisbewegung

#### 2.8.1 Winkel $\phi$ (zurückgelegter Weg)



#### 2.8.2 Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\phi}{t}$

$$\omega := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$$

Der Betrag  $v$  der (Bahn-) Geschwindigkeit entspricht:  $v = r \cdot \omega$

Umlaufzeit, Periode  $T$  Umlaufzeit für vollständige Umdrehung

Drehzahl, Drehfrequenz  $f$  inverse Umlaufzeit  $f = \frac{1}{T}$

#### Wichtige Umrechnungsformeln

$$\begin{aligned} v &= r \cdot \omega & \Leftrightarrow & \omega = \frac{v}{r} \\ f &= \frac{1}{T} & \Leftrightarrow & T = \frac{1}{f} \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} & \Leftrightarrow & T = \frac{2\pi}{f} \\ \omega &= 2\pi f & \Leftrightarrow & f = \frac{\omega}{2\pi} \end{aligned}$$

#### 2.8.3 Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{\omega}{t}$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2 \phi}{dt^2}$$

$$a_{tangential} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} r \cdot \omega = r \cdot \alpha$$

## 2.9 Gleichförmige Kreisbewegung

$$\alpha(t) = 0$$

$$\omega(t) = \omega_0 = \text{const}$$

$$\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$$

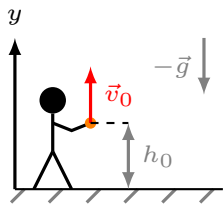
## 2.10 Gleichm. beschleunigte Kreisbewegung

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \text{const}$$

$$\omega(t) = \alpha_0 \cdot t + \omega_0$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \phi_0$$

## 2.11 Senkrechter Wurf



$$a = -g = \text{const}$$

$$v(t) = -g \cdot t + v_0$$

$$h(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0$$

### 2.11.1 Maximale Flughöhe $h_{max}$ bestimmen

Bei der maximalen Flughöhe  $h_{max}$  gilt:  $v(t) \stackrel{!}{=} 0$

$$v_0 - g \cdot t_{max} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

Nun wird  $t_{max}$  in  $h(t)$  eingesetzt:

$$h_{max} = h(t_{max}) = -\frac{g}{2} \frac{v_0^2}{g^2} + v_0 \frac{v_0}{g} + h_0 = \frac{v_0^2}{2g} + h_0$$

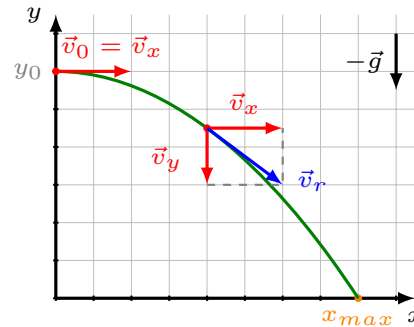
**Hinweis:** Die maximale Flughöhe kann auch über die potentielle und kinetische Energie berechnet werden!

$$E_{kin} \stackrel{!}{=} 0 \quad E_{pot} \stackrel{!}{=} m \cdot g \cdot h_{max}$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h_{max} \quad \Rightarrow \quad h_{max} = \frac{m v^2}{2 m g} = \frac{v^2}{2g}$$

$\Rightarrow$  für abgeschlossene Systeme!

## 2.12 Horizontaler Wurf



Der horizontale Wurf muss komponentenweise beschrieben werden  
x-Achse: gleichförmige, unbeschleunigte Bewegung  
y-Achse: gleichmäßig beschleunigte Bewegung

**x-Achse**

$$a_x = 0$$

$$v_x = v_0$$

$$x = v_0 \cdot t + x_0$$

**y-Achse**

$$a_y = -g$$

$$v_y = -g \cdot t$$

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + y_0$$

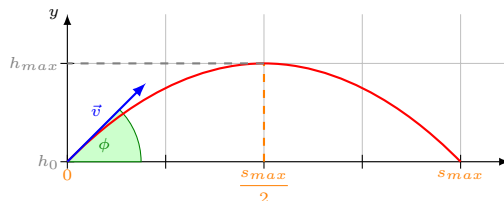
**Tipp:** Lege den Koordinatenursprung in den Abwurf-Ort

### 2.12.1 Beschreibung der Flugbahn (Eliminierung von $t$ )

Die y-Koordinate soll als Funktion der x-Koordinate ausgedrückt werden:  $y = f(x)$

$$x = v_0 t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{x}{v_0} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 = -\frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2} = y(x)$$

## 2.13 Schiefer Wurf



Der schiefe Wurf muss komponentenweise beschrieben werden  
x-Achse: gleichförmige, unbeschleunigte Bewegung  
y-Achse: gleichmäßig beschleunigte Bewegung

**x-Achse**

$$a_x = 0$$

$$v_x = v_0 \cdot \cos(\phi)$$

$$x = v_0 \cdot \cos(\phi) \cdot t + x_0$$

**y-Achse**

$$a_y = -g$$

$$v_y = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin(\phi)$$

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\phi) \cdot t + y_0$$

**Tipp:** Lege den Koordinatenursprung in den Abwurf-Ort

### 2.13.1 Beschreibung der Flugbahn (Eliminierung von $t$ )

Die y-Koordinate soll als Funktion der x-Koordinate ausgedrückt werden:  $y = f(x)$

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(\phi) \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\phi)}$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cdot \cos^2(\phi)} \cdot x^2 + \tan(\phi) \cdot x = y(x)$$

### 2.13.2 Ansätze zur Bestimmung von Extrema

$$\text{max. Wurfweite } s_{max} \quad y \stackrel{!}{=} 0 \quad (\phi \in \{45; 135\})$$

$$s_{max} = x_{max} \in \{0, \frac{2 v_0^2}{g} \cos(\phi) \cdot \sin(\phi)\}$$

$$\text{Elevationswinkel} \quad \phi = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{g \cdot d}{v_0^2}\right) = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{g \cdot x_{max}}{v_0^2}\right)$$

$$\text{max. Wurfhöhe} \quad v_y \stackrel{!}{=} 0$$

$$x_{max \text{ Höhe}} = h_{max} = \frac{s_{max}^2}{2} = \frac{x_{max}^2}{2}$$

$$y(x_{max \text{ Höhe}}) = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\phi)}{2g}$$

## 3 Dynamik

### 3.1 Newtonsche Gesetze

Gesetze, welche Bewegungen beschreiben.

#### 3.1.1 Erstes Newtonsches Gesetz: Trägheitsgesetz

Ein Körper verharrt in seine Zustand (Ruhe, gleichförmige geradlinige Bewegung), wenn er nicht durch eine Kraft gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Die **Trägheit** eines Körpers hängt von seiner (Trägheits-) Masse ab.

#### 3.1.2 Zweites Newtonsches Gesetz: Aktionsgesetz

$\vec{F}$	Kraft	$[F] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$
$m$	(Trägheits-) Masse	$[m] = \text{kg}$
$\vec{a}$	Beschleunigung	$[a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$\Rightarrow$  Anwendung erfolgt meist komponentenweise!

#### 3.1.3 Drittes Newtonsches Gesetz: Wechselwirkungsgesetz

Wirkt ein Körper A auf einen Körper B mit der Kraft  $\vec{F}_{AB}$ , so wirkt der Körper B auf A mit der Kraft  $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

### 3.2 Reibungskräfte

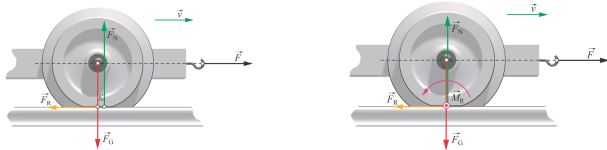
$$\text{Haftreibung: } \vec{F}_{R,max} = \mu_H \cdot \vec{F}_N$$

$$\text{Gleitreibung: } \vec{F}_{Gleit} \approx \mu_G \cdot \vec{F}_N$$

$$\text{Rollreibung: } \vec{F}_{Roll} \approx \mu_R \cdot \vec{F}_N$$

$\vec{F}_R$	Reibungskraft	$[\vec{F}_R] = \text{N}$
$\vec{F}_{R,max}$	Haftreibungskraft	$[\vec{F}_{R,max}] = \text{N}$
$\vec{F}_{Gleit}$	Gleitreibungskraft	$[\vec{F}_{Gleit}] = \text{N}$

### 3.3 Rollreibungslänge $e$ (Drehmoment)

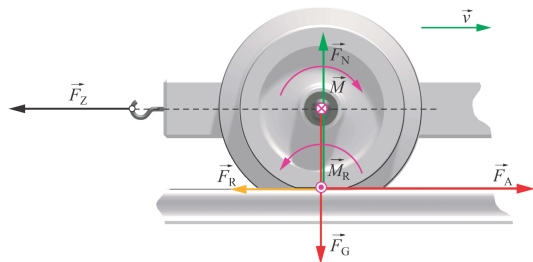


$$e = \frac{r \cdot F}{F_N} = \frac{r \cdot F_R}{F_N} = \frac{r \cdot \mu_R \cdot F_R}{F_N} = \mu_R \cdot r$$

$$M_R = e \cdot F_N = \mu_R \cdot r \cdot F_N = r \cdot F_R = r \cdot F$$

$e$	Rollreibungslänge	$[e] = \text{m}$
$r$	Radius des Rades	$[r] = \text{m}$
$F_R$	Rollreibungskraft	$[F_R] = \text{N}$
$F_N$	Normalkraft	$[F_N] = \text{N}$
$\mu_R$	Rollreibungskoeffizient	$[\mu_R] = 1$
$M_R$	Rollreibungsmoment	$[M_R] = \text{Nm}$

### 3.4 Angetriebenes Rad



$\vec{F}_Z$	Zugkraft	$[F_Z] = \text{N}$
$\vec{F}_N$	Normalkraft	$[F_N] = \text{N}$
$\vec{F}_R$	Rollreibungskraft	$[F_R] = \text{N}$
$\vec{F}_A$	Haftreibungskraft	$[F_A] = \text{N}$

#### 3.4.1 Hinweise zu Reibung an Rädern

- Jedes Rad weist Rollreibung auf
- Zusätzlich zur Rollreibung weist ein angetriebenes Rad eine Haftreibung auf

### 3.5 Arbeit und Energie

#### 3.5.1 Arbeit

Wird der Angriffspunkt einer Kraft  $\vec{F}$  um die Strecke  $d\vec{s}$  verschoben, so leistet die Kraft die Arbeit  $W$

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (\text{Skalarprodukt})$$

Wenn die projizierte Kraft konstant ist:  $W = F \cdot s_{AB}$

$W$	Arbeit	$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$
$F$	Kraft	$[F] = \text{N}$
$s$	Weg	$[s] = \text{m}$

#### 3.5.2 Potentielle Energie $W_{pot}$

Beim Anheben eines Körpers gewinnt der Körper an potentieller Energie (Lageenergie)

$$W_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

$W_{pot}$	Potentielle Energie	$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$
$m$	Masse des Körpers	$[m] = \text{kg}$
$g$	Erdbeschleunigung	$[g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$h$	Höhe des Körpers	$[h] = \text{m}$

#### Beispiel: Spannen einer Feder

Federkraft als Funktion der Auslenkung  $x$   $F = -k \cdot x$

$$W_{pot} = \int_0^{x_0} -\vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^{x_0} k \cdot x \, dx = \frac{1}{2} k \cdot x_0^2$$

$W_{pot}$	Potentielle Energie	$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$
$F$	Federkraft	$[F] = \text{N}$
$k$	Federkonstante	$[k] = \frac{\text{N}}{\text{m}}$
$x_0$	Auslenkung der Feder	$[x_0] = \text{m}$

#### 3.5.3 Kinetische Energie $W_{kin}$

$$W_{kin} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot s_{AB} = m \cdot a \cdot \frac{a}{2} t^2 = m \frac{a^2 \cdot t^2}{2} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$W_{kin}$	Kinetische Energie	$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$
$F$	Kraft	$[F] = \text{N}$
$s$	Wegstück (Kinematik)	$[s] = \text{m}$
$m$	Masse des Körpers	$[m] = \text{kg}$
$a$	Beschleunigung (Kinematik)	$[a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$v$	Geschwindigkeit (Kinematik)	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

### 3.6 Energieerhaltung (in abgeschlossenen Systemen)

Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ist unveränderlich!

**abgeschlossen:** Es wird keine Masse hinzugefügt/entfernt und es wirken keine äusseren Kräfte!

$$W = \underbrace{m \cdot g \cdot h}_{\text{pot. Energie}} = m \cdot g \cdot \underbrace{\frac{1}{2} g \cdot t^2}_{h(t)} = \underbrace{\frac{1}{2} m \cdot v^2}_{\text{kin. Energie}}$$

Für nicht abgeschlossene Systeme kann eine Bilanzrechnung aufgestellt werden:

Die Energiezunahme im Gesamtsystem entspricht der von aussen zugeführten Energie.

Die Energieabnahme im Gesamtsystem entspricht der von aussen entzogenen Energie.

#### 3.6.1 Energiesatz der Mechanik

$$E_{pot} + E_{kin} = E_{tot} = \text{const} \quad (\text{gilt zu jedem Zeitpunkt})$$

### 3.7 Leistung und Wirkungsgrad

#### 3.7.1 Leistung

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$P$	Leistung	$[P] = \text{W} = \frac{\text{J}}{\text{s}}$
$\Delta W$	geleistete Arbeit	$[W] = \text{J}$
$\Delta t$	verstrichene Zeit	$[t] = \text{s}$
$F$	Kraft	$[F] = \text{N}$
$\Delta s$	Wegstück	$[s] = \text{m}$

#### Pferdestärken

$$1 \text{ PS} = 75 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 735.5 \text{ W}$$

### 3.7.2 Wirkungsgrad $\eta$

Faustregel: Je grösser eine Maschine, desto besser ihr Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} \quad \eta < 1 \quad [\eta] = 1$$

### 3.8 Impuls $\vec{p}$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

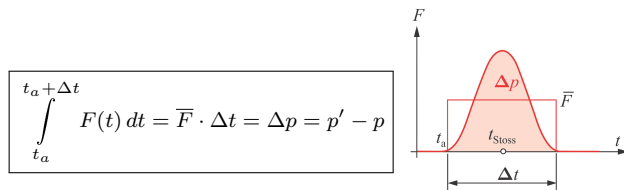
2. Newton'sches Gesetz allgemeingültiger (relativistisch):

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$\vec{p}$	Impuls	$[\vec{p}] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$
$m$	Masse	$[m] = \text{kg}$
$\vec{v}$	Geschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$F$	Kraft	$[F] = \text{N}$
$\vec{a}$	Beschleunigung	$[\vec{a}] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

#### 3.8.1 Kraftstoss $\Delta p$

Ein Kraftstoss entspricht einer Impulsänderung und kann über die mittlere Kraft beschrieben werden.



$F(t)$	Kraftverlauf	$[F] = \text{N}$
$\bar{F}$	mittlere Kraft	$[\bar{F}] = \text{N}$
$\Delta t$	Zeitdauer des Kraftstosses	$[\Delta t] = \text{s}$
$\Delta p$	Impulsänderung	$[\Delta p] = \text{Ns}$
$p$	Impuls vor dem Stoss	$[p] = \text{Ns}$
$p'$	Impuls nach dem Stoss	$[p'] = \text{Ns}$
$\vec{a}$	Beschleunigung	$[\vec{a}] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

### 3.9 Impulserhaltungssatz (Impulssatz)

In einem **abgeschlossenen System** bleibt der Gesamtimpuls konstant

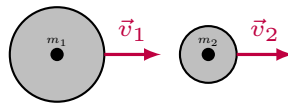
abgeschlossenes System: es wirken keine externen Kräfte

$$\vec{p} = \int \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{F_{\text{aussen}}=0} dt = c = \text{const}$$

### 3.10 Stösse

$$\text{Elastizitätszahl: } k = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} = -\frac{v'_{rel}}{v_{rel}} \geq 0$$

$$\text{Deformationsarbeit: } Q = (E_1 + E_2) - (E'_1 + E'_2) \geq 0$$



#### 3.10.1 Gerader, zentraler, total elastischer Stoss

Die beiden Stosspartner verformen sich nicht!

⇒ Für die Deformationsarbeit gilt:  $Q = 0$

$$\begin{aligned} \text{Impulssatz: } p &\stackrel{!}{=} p' \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &\stackrel{!}{=} m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \text{Energiesatz: } E_{kin} &\stackrel{!}{=} E'_{kin} \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \\ v'_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \\ v'_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \end{aligned}$$

#### 3.10.2 Gerader, zentraler, total inelastischer Stoss

Die beiden Stosspartner haften nach dem Stoss aneinander und haben die gleiche Geschwindigkeit.

⇒ Für die Deformationsarbeit gilt:  $Q \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{Impulssatz: } p &\stackrel{!}{=} p' \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &\stackrel{!}{=} (m_1 + m_2) v' \\ \text{Energiesatz: } E_{kin} &\stackrel{!}{=} E'_{kin} \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 + Q \\ \text{Deformationsarbeit: } Q &= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} \mu \cdot v_{rel}^2 \\ \text{Relativgeschw.: } v_{rel} &:= |v_1 - v_2| \\ \text{Reduzierte Masse: } \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

$k$	Elastizitätszahl	$[k] = 1$
$E_1, E_2$	Energien vor Stoss	$[E] = \text{J}$
$E'_1, E'_2$	Energien nach Stoss	$[E'] = \text{J}$
$m_1, m_2$	stossende Massen	$[m] = \text{kg}$
$v_1, v_2$	Geschwindigkeit vor Stoss	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$v'_1, v'_2$	Geschwindigkeit nach Stoss	$[v'] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$Q$	Deformationsarbeit	$[Q] = \text{J}$
$v_{rel}$	Relativgeschwindigkeit	$[v_{rel}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$\mu$	reduzierte Masse	$[\mu] = \text{kg}$

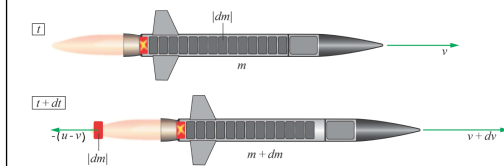
### 3.11 Rakete

Anwendungsbeispiel für den Impulssatz

#### 3.11.1 Rakete im Flug

⇒ Masse ist hier veränderbar!  $m(t) = m = m_{\text{Start}} - \mu \cdot t$

Die Rakete verliert an Treibstoff, wodurch die Masse der Rakete abnimmt ( $dm < 0$ )



$$\text{Impulssatz: } m \cdot v(t) = (m + dm)(v(t) + dv) + dm(u - v) \quad dm < 0$$

$$\text{Raketengleichung: } v(t) = -u \cdot \ln(m) + v_0 + u \cdot \ln(m_0) = v_0 + u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

$$\text{Massenverhältnis: } \frac{\text{Startmasse}}{\text{Endmasse}}$$

$$\text{max. Geschwindigkeitsänderung: } \Delta v = v - v_0 = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

$$\text{Schubkraft: } F_{Schub} = \frac{dp}{dt} = -\frac{u \cdot dm}{dt} = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{\mu} (-u) = \mu \cdot u$$

⇒ Hier wurde noch keine Erdbeschleunigung (Anziehung) berücksichtigt!

$u$	Strahlgeschwindigkeit der Rakete	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$m$	Zeitlich veränderbare Masse $m(t)$	$[m] = \text{kg}$
$m_0$	Masse zum Startzeitpunkt	$[m] = \text{kg}$
$v_0$	Startgeschwindigkeit	$[v_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$F_{Schub}$	Schubkraft der Rakete	$[F_{Schub}] = \text{N}$
$\mu$	Treibstoffverbrauch pro Zeit	$[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$

3.11.2 Aufstieg der Rakete im Schwerfeld

Konstante Erdbeschleunigung  $g$  wird berücksichtigt

Veränderbare Masse:  $m(t) = m = m_{Start} - \mu \cdot t$

Gesamtkraft:  $m(t) \frac{dv}{dt} = m(t) \cdot a = F_{Schub} - F_G = \mu \cdot u - m \cdot g$

Beschleunigung:  $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{\mu \cdot u}{m_0 - \mu \cdot t} - g$

Raketengleichung:  $v(t) = u \cdot \ln\left(\frac{m_{Start}}{m(t)}\right) - g \cdot t$

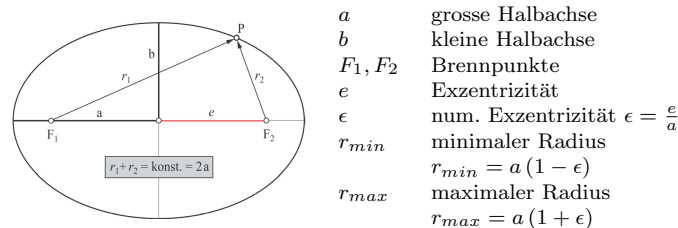
Spezifischer Impuls:  $T = \frac{m(t)}{\mu} = \frac{u}{g}$

$u$	Strahlgeschwindigkeit der Rakete	$[u] = \frac{m}{s}$
$m$	Zeitlich veränderbare Masse $m(t)$	$[m] = kg$
$m_0$	Masse zum Startzeitpunkt	$[m] = kg$
$v_0$	Startgeschwindigkeit	$[v_0] = \frac{m}{s}$
$g$	Erdbeschleunigung	$[g] = \frac{m}{s^2}$
$\mu$	Treibstoffverbrauch pro Zeit	$[\mu] = \frac{kg}{s}$
$T$	spezifischer Impuls (Zeit von konstantem Schub)	$[T] = s$

3.12 Gravitation

3.12.1 Erstes Kepler'sches Gesetz

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren Brennpunkt sich die Sonne befindet.



3.12.2 Zweites Kepler'sches Gesetz

Der Fahrstrahl der Planeten überstreicht in der gleichen Zeit die gleiche Fläche.

⇒ Bei kleinerem Abstand zur Sonne ist die Geschwindigkeit schneller!

3.12.3 Drittes Kepler'sches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der grossen Halbachsen.

$$a = \left(\frac{T}{T_{ref}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot a_{ref} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{a_{ref}}\right)^3 = \left(\frac{T}{T_{ref}}\right)^2$$

Als Referenz wird die Erde verwendet!

Astronomische Einheit:  $a_{ref} = 1 \text{ AE} = 149.6 \cdot 10^6 \text{ km}$

Referenzzeit:  $T_{ref} = 1 \text{ a} = 1 \text{ Jahr}$

$a$	grosse Halbachse gesuchter Planet	$[a] = \text{AE}$
$a_{ref}$	grosse Halbachse Erde	$[a_{ref}] = \text{AE}$
$T$	Umlaufzeit Planet	$[T] = \text{Jahre}$
$T_{ref}$	Umlaufzeit Erde	$[T] = \text{Jahre}$

3.12.4 Gravitationsgesetz

$$\text{Gravitationskraft: } F_G = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \text{mit } G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

3.12.5 Gravitationswirkung innerhalb einer Kugel

$$F_G = G \frac{m_{Kern}(r) m}{r^2} = G \frac{4 \pi r^3 \rho m}{3 r^2} = \frac{4 \pi}{3} G \rho m r$$

$F_G$	Gravitationskraft	$[F_G] = \text{N}$
$G$	Gravitationskonstante	$[G] = \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$
$r$	Radius (Abstand vom Zentrum)	$[r] = \text{m}$
$\rho$	homogene Dichte der Kugel	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$m$	Masse vom Massepunkt	$[m] = \text{kg}$
$m_{Kern}$	Masse des Kugelkerns	$[m_{Kern}] = \text{kg}$

3.12.6 Gravitationswirkung ausserhalb einer Kugel

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$F_G$	Gravitationskraft	$[F_G] = \text{N}$
$G$	Gravitationskonstante	$[G] = \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$
$r$	Radius (Abstand vom Zentrum)	$[r] = \text{m}$
$m$	Masse vom Massepunkt	$[m] = \text{kg}$
$M$	Gesamtmasse der Kugel	$[M] = \text{kg}$

3.12.7 Gravitationspotential  $\phi$

Wenn eine Masse in einem Gravitationsfeld bewegt wird, so wird Arbeit verrichtet.

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_G \bullet d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} G \frac{M \cdot m}{r^2} dr = G \cdot M \cdot m \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$\text{potentielle Energie: } E_{pot}(r) = -G \frac{M m}{r}$$

$$\text{Gravitationspotential: } \phi = \frac{E_{pot}}{m} = -\frac{G \cdot M}{r}$$

Im Inneren eines homogenen Zentralkörpers gilt

$$F_G = \frac{4 \pi \cdot G \cdot \rho \cdot m \cdot r}{3}$$

$$E_{pot} = -\frac{2 \pi \cdot G \cdot \rho \cdot m}{3} r^2 + c'$$

$$\phi = -\frac{2 \pi \cdot G \cdot \rho}{3} r^2 + c = -\frac{G \cdot M(r)}{2 r} + c = -\frac{G \cdot M(r)}{2 r} - \frac{G \cdot M}{2 R}$$

$W$	Arbeit	$[W] = \text{J}$
$F_G$	Gravitationskraft	$[F_G] = \text{N}$
$E_{pot}$	potentielle Energie	$E_{pot} = \text{J}$
$G$	Gravitationskonstante	$[G] = \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$
$r$	Radius (Abstand vom Zentrum)	$[r] = \text{m}$
$\rho$	homogene Dichte der Kugel	$[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$m$	Masse vom Massepunkt	$[m] = \text{kg}$
$M$	Gesamtmasse der Kugel	$[M] = \text{kg}$
$R$	Radius der Kugeloberfläche	$[R] = \text{m}$



### 3.13 Bezugssysteme: Inertialsystem

Inertialsystem: **unbeschleunigtes** Bezugssystem

Wenn die Newton'schen Gesetze im Bezugssystem S gelten, so gelten sie auch im Bezugssystem S', solange dieses nicht beschleunigt ist und nicht rotiert.

⇒ **In sämtlichen Inertialsystemen sind die mechanischen Gesetze identisch!**

#### 3.13.1 Galilei-Transformation

Bezugssystem S' bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0$ : Transformation zwischen S und S'

$$v_0 = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= x' + v_x t \\ y &= y' + v_y t \\ z &= z' + v_z t \\ t &= t' \end{aligned}$$

### 3.14 Beschleunigte Bezugssysteme

In beschleunigten Bezugssystemen müssen **Trägheitskräfte** berücksichtigt werden!

#### 3.14.1 Translatorisch beschleunigtes Bezugssystem

Beispiel: Zug beschleunigt auf gerader Schiene

Für einen Beobachter **im beschleunigten System S'** wirkt eine Trägheitskraft:

$$\text{Gesamtkraft: } \vec{F}' = \vec{F} - m \cdot \vec{a}_0 = \vec{F} + \vec{F}_{\text{Trägheit}}$$

$\vec{F}'$	Gesamte im System wirkende Kraft	$[\vec{F}'] = \text{N}$
$\vec{F}$	Statisch wirkende Kräfte	$[\vec{F}] = \text{N}$
$\vec{F}_{\text{Trägheit}}$	Trägheitskraft	$[\vec{F}_{\text{Trägheit}}] = \text{N}$
$m$	Masse im System	$[m] = \text{kg}$
$\vec{a}_0$	Beschleunigung des Systems	$[\vec{a}_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

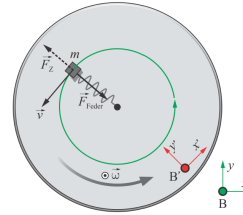
#### 3.14.2 Gleichförmig rotierendes Bezugssystem (Scheinkräfte)

**Fest verbundene Masse ⇒ Scheinkraft: Zentrifugalkraft**

$$\vec{F}_z = -m \vec{a}_z = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$$

$$\vec{F}_{\text{Zentrifugal}} \stackrel{!}{=} -\vec{F}_{\text{Zentripetal}}$$

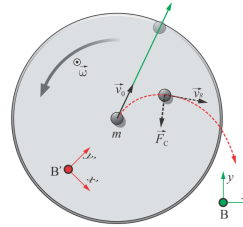
$\vec{F}_z$	Zentrifugalkraft (Trägheitskraft; Scheinkraft)	$[\vec{F}_z] = \text{N}$
$m$	Masse im System	$[m] = \text{kg}$
$\vec{a}_z$	Beschleunigung des Systems ( $a_{\text{radial}}$ )	$[\vec{a}_z] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\vec{r}$	Radius des Systems (nach innen zeigend)	$[\vec{r}] = \text{m}$



**lose Masse ⇒ Scheinkraft: Corioliskraft**

$$\vec{F}_c = -m \cdot \vec{a}_c = -m \cdot 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_R)$$

$\vec{F}_c$	Corioliskraft (Trägheitskraft; Scheinkraft)	$[\vec{F}_c] = \text{N}$
$m$	Masse im System	$[m] = \text{kg}$
$\vec{a}_c$	Coriolisbeschleunigung	$[\vec{a}_c] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\vec{v}_R$	Relativgeschwindigkeit	$[\vec{v}_R] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$



#### 3.14.3 D'Alembert'sches Prinzip

Wird ein Körper in einem mitbewegten Koordinatensystem betrachtet, so bleibt er in Ruhe:  $\vec{v}_R = 0$  und  $\vec{a}_R = 0$

$$\vec{F} + \underbrace{\vec{F}_z + \vec{F}_c}_{\text{Scheinkräfte}} = \vec{0}$$

⇒ Statisches Gleichgewichtsproblem

### 3.15 Rotation starrer Körper

Rotation:	Drehung um feste Achse
Kreisel:	Drehung um starren Punkt
Kreiselbewegung:	Drehung eines völlig freien, starren Körpers um seinen Schwerpunkt

#### 3.15.1 Dynamisches Grundgesetz der Rotation

Es ist **nur die tangentielle Komponente** der Kraft (des Drehmoments) eines rotierenden Körpers relevant!

$$dM_t = r \cdot dF_t = r \cdot dm \cdot a_t = dm \cdot r^2 \cdot \alpha$$

$$M = \int dM = \int r^2 \alpha \cdot dm = \alpha \underbrace{\int r^2 \cdot dm}_{J_{\text{Scheibe}} = m \cdot r^2}$$

$$\Rightarrow M = J \cdot \alpha$$

$dM_t$	kleine Tan.-Komponente des Drehmoments	$[dM_t] = \text{Nm}$
$M$	(gesamtes) Drehmoment	$[M] = \text{Nm}$
$dF_t$	kleine Tangentialkomponente der Kraft	$[dF_t] = \text{N}$
$r$	Abstand Drehachse zu Massepunkt (Rand)	$[r] = \text{m}$
$dm$	kleines Massestück des Körpers	$dm = \text{kg}$
$a_t$	Tangentialbeschleunigung ( $a_t = r \cdot \alpha$ )	$[a_t] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$\alpha$	Winkelbeschleunigung	$[\alpha] = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$
$J$	(Massen-) Trägheitsmoment	$[J] = \text{kg m}^2$

#### 3.15.2 Massenträgheitsmomente

Körper		Trägheitsmoment
Vollzylinder		$\frac{m r^2}{2}$
Hohlzylinder		$\frac{m(r_a^2 + r_i^2)}{2}$
Kugel		$\frac{2}{5} m r^2$
Quader		$\frac{m(a^2 + b^2)}{12}$



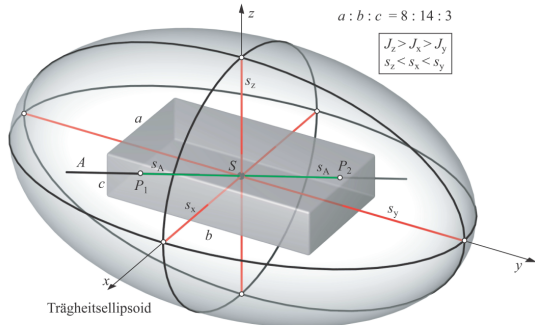
### 3.16 Trägheitsellipsoid

Trägheitsradius  $r_0$ : als ob ganze Masse eines Körpers nur einen Radius hätte

$$r_0 = \sqrt{\frac{J}{m}}$$

$$s_0 = \frac{1}{r_0}$$

$r_0$	Trägheitsradius	$[r_0] = \text{m}$
$m$	Masse des Körpers	$[m] = \text{kg}$
$J$	(Massen-) Trägheitsmoment	$[J] = \text{kg m}^2$
$s_0$	reziproker Trägheitsradius	$[s_0] = \text{m}$

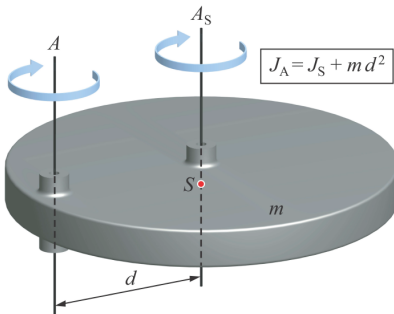


**Hauptträgheits-Achsen** (entsprechen immer Symmetrie-Achsen, falls vorhanden)

**beliebige Achse  $J_A$**   $J_A = J_x \cdot \cos^2(\alpha) + J_y \cdot \cos^2(\beta) + J_z \cdot \cos^2(\gamma)$

### 3.17 Satz von Steiner

Beschreibt, wie man das Trägheitsmoment  $J$  berechnet, wenn die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt des rotierenden Körpers geht, sondern **parallel** dazu verläuft.



$J_S$	Trägheitsmoment (Rot. um Schwerp.)	$[J_S] = \text{kg m}^2$
$J_A$	Trägheitsmoment (Rot. um bel. Punkt)	$[J_A] = \text{kg m}^2$
$m$	Masse des Körpers	$[m] = \text{kg}$
$d$	Abstand zum Schwerpunkt	$[d] = \text{m}$

### 3.18 Arbeit und Leistung (Rotation)

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_t \cdot ds = F_t \cdot r \cdot d\phi = M \cdot d\phi$$

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\phi}{dt} = M \cdot \omega$$

$F_t$	<b>Tangentieller</b> Kraftanteil der Rotation	$[F_t] = \text{N}$
$d\phi$	zurückgelegter Kreiswinkel	$[d\phi] = \text{rad}$
$P$	Leistung	$[P] = \text{W}$
$W$	Energie	$[W] = \text{J}$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$M$	Drehmoment	$[M] = \text{Nm}$

### 3.19 Rotationsenergie

**Foldenes gilt nur für die Rotation um den Schwerpunkt eines Körpers!**

Die totale kinetische Energie ist die Summe aller kinetischer Energien eines Körpers

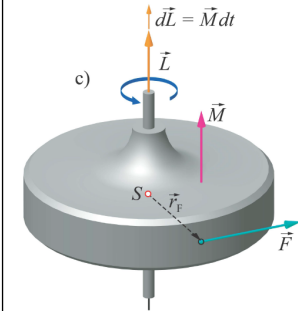
$$E_{kin} = \int \frac{1}{2} v^2 dm = E_{trans} + E_{rot}$$

$$E_{trans} = \frac{1}{2} m \cdot v_s^2$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J_s \cdot \omega^2$$

$E_{trans}$	Translationsenergie des Schwerpunkts	$[E_{trans}] = \text{J}$
$m$	Masse des Körpers	$[m] = \text{kg}$
$v_s$	Geschwindigkeit des Schwerpunkts	$[v_s] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$E_{rot}$	Rotationsenergie	$[E_{rot}] = \text{J}$
$J_S$	Trägheitsmoment (Rot. um Schwerp.)	$[J_S] = \text{kg m}^2$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

### 3.20 Drehimpuls $\vec{L}$ / Impulserhaltung (Rotation)



$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} \cdot dm = \vec{r} \times \vec{p}$$

$\vec{L}$	Drehimpuls	$[\vec{L}] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$
$\vec{r}$	Abstand Massepunkt zu Rot-Achse	$[\vec{r}] = \text{m}$
$\vec{v}$	Rotationsgeschwindigkeit	$[\vec{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$dm$	kleines Masse-Stück	$[dm] = \text{kg}$
$\vec{p}$	Impuls	$[\vec{p}] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$

#### 3.20.1 Drehmoment $\vec{M}$ vs. Drehimpuls $\vec{L}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d}{dt} \vec{L} = \dot{\vec{L}}$$

**In einem abgeschlossenen System ( $\vec{M} = 0$ ) bleibt der Gesamtdrehimpuls erhalten**

$\Rightarrow \vec{L} = \text{const}$

$$\text{Impulserhaltung: } L \stackrel{!}{=} L' \\ J_1 \cdot \omega + J_2 \cdot \omega \stackrel{!}{=} J_1 \cdot \omega'_1 + J_2 \cdot \omega'_2$$

$$\text{Energiesatz: } E_{rot} \stackrel{!}{=} E'_{rot} + Q \\ \frac{1}{2} J_1 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \cdot \omega_2^2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} J_1 \cdot \omega_1'^2 + \frac{1}{2} J_2 \cdot \omega_2'^2 + Q$$

$\vec{M}$	Drehmoment	$[\vec{M}] = \text{Nm}$
$\vec{r}$	Abstand Massepunkt zu Rot-Achse	$[\vec{r}] = \text{m}$
$\vec{F}$	Kraft, welche Drehmoment bewirkt	$[\vec{F}] = \text{N}$
$\vec{p}$	Impuls	$[\vec{p}] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$
$\vec{L}$	Drehimpuls	$[\vec{L}] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$
$J$	Massenträgheitsmoment	$[J] = \text{kg m}^2$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{1}{\text{s}}$
$Q$	Deformationsarbeit	$[Q] = \text{J}$

3.20.2 Drehimpuls  $\vec{L}$  vs. Winkelgeschwindigkeit  $\omega$

$$L = \int dL = \int r^2 \omega \, dm = \omega \int r^2 \, dm = J \omega$$

$L$	Drehimpuls	$[L] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$
$r$	Abstand Massepunkt zu Rot-Achse	$[r] = \text{m}$
$dm$	kleines Masse-Stück	$[dm] = \text{kg}$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$J$	(Massen-) Trägheitsmoment (hier Tensor)	$[J] = \text{kg m}^2$

3.21 Rotation vs. Translation

	Drehbewegung	Lineare Bewegung	
Drehwinkel	$\Delta\theta$	Verschiebung	$\Delta x$
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	Geschwindigkeit	$v = \frac{dx}{dt}$
Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	Beschleunigung	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
Gleichungen für den Fall konstanter Winkelbeschleunigung	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\Delta\theta = \langle\omega\rangle \Delta t$ $\langle\omega\rangle = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha \Delta\theta$	Gleichungen für den Fall konstanter Beschleunigung	$v = v_0 + at$ $\Delta x = \langle v \rangle \Delta t$ $\langle v \rangle = \frac{1}{2}(v_0 + v)$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$
Drehmoment	$M$	Kraft	$F$
Trägheitsmoment	$I$	Masse	$m$
Arbeit	$dW = M d\theta$	Arbeit	$dW = F ds$
Kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I \omega^2$	Kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$
Leistung	$P = M \omega$	Leistung	$P = F v$
Drehimpuls	$L = I \omega$	Impuls	$p = m v$
Zweites Newton'sches Axiom	$M_{\text{ext}} = I \alpha = \frac{dL}{dt}$	Zweites Newton'sches Axiom	$F_{\text{ext}} = m a = \frac{dp}{dt}$

4 Vektorrechnung

4.1 Betrag eines Vektors

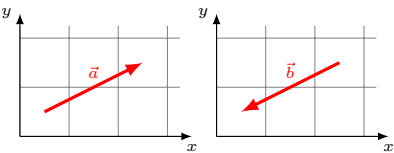
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

4.2 Gleichheit zweier Vektoren

Zwei Vektoren sind gleich, wenn alle Komponenten identisch sind:

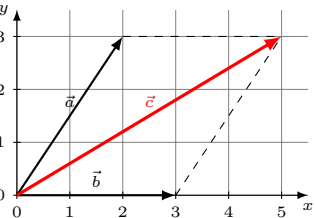
- $A_x = B_x$
- $A_y = B_y$
- $A_z = B_z$

4.3 Negative eines Vektors



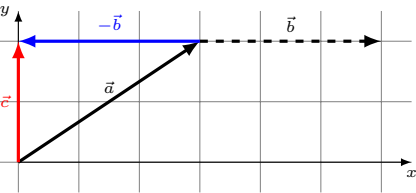
$$\begin{aligned} b_x &= -a_x \\ b_y &= -a_y \\ b_z &= -a_z \end{aligned}$$

4.4 Addition zweier Vektoren



$$\begin{aligned} c_x &= a_x + b_x \\ c_y &= a_y + b_y \\ c_z &= a_z + b_z \end{aligned}$$

4.5 Subtraktion zweier Vektoren



$$\begin{aligned} c_x &= a_x - b_x \\ c_y &= a_y - b_y \\ c_z &= a_z - b_z \end{aligned}$$

4.6 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

$$\vec{b} = s \vec{a} \quad |\vec{B}| = |s| \cdot |\vec{a}|$$

$$\begin{aligned} b_x &= s \cdot a_x \\ b_y &= s \cdot a_y \\ b_z &= s \cdot a_z \end{aligned}$$

## 4.7 Skalarprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi)$$

## 4.8 Kreuzprodukt (nur in 3D)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

## 5 Statistik

### 5.1 Arithmetisches Mittel $\bar{x}_{arith}$

$$\bar{x}_{arith} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

### 5.2 Geometrisches Mittel $\bar{x}_{geom}$

Nur für positive Zahlenreihen  $x_i$  definiert!

$$\bar{x}_{geom} := \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N x_i} \Rightarrow \bar{x}_{geom} \leq \bar{x}_{arith}$$

### 5.3 Quadratisches Mittel QMW (RMS)

Wechselstromtechnik; Effektivwert

$$QMW := \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}$$

### 5.4 Harmonisches Mittel $\bar{x}_{harm}$

$$\bar{x}_{harm} := \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i}}$$

Kann sinnvoll eingesetzt werden, wenn man für die  $i$ -te Teilstrecke  $s_i$  eine Zeit  $t_i$  benötigt (also eine Durchschnittsgeschwindigkeit von  $v_i = \frac{s_i}{t_i}$  und eine Durchschnittsgeschwindigkeit über  $N$  Teilstrecken ermitteln will:

$$\bar{v}_{harm} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i}{\sum_{i=1}^N t_i} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i}{\sum_{i=1}^N \frac{s_i}{v_i}} \quad \text{gewichtetes harm. Mittel}$$

## 5.5 Standardabweichung $\sigma$

$$\text{Varianz:} \quad \sigma^2 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_{arith})^2$$

$$\text{Standardabweichung:} \quad \sigma := \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_{arith})^2}$$

## 5.6 Standardabweichung des Mittelwerts

**Gilt nur, wenn eine Normalverteilung vorliegt!**

Beschreibt nur statistische Fehler

$$\sigma(\bar{x}_{arith}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

## 6 Mathematik-Hilfe

### 6.1 Trigonometrie

Sinus	Cosinus	Tangens
$\frac{GK}{H}$	$\frac{AK}{H}$	$\frac{AK}{GK}$

### 6.2 Schwerpunkt

Die Koordinaten des Schwerpunkts müssen komponentenweise berechnet werden:

$$x_s = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{M} \quad y_s = \frac{\sum y_i \cdot m_i}{M} \quad z_s = \frac{\sum z_i \cdot m_i}{M}$$

$x_s, y_s, z_s$  Koordinaten des Schwerpunkts  
 $x_i, y_i, z_i$  Koordinaten von kleinen Massepunkten  
 $m_i$  Kleine Massepunkte an entsprechenden Koordinaten  
 $M$  Gesamtmasse des Körpers

### 6.3 Polarkoordinaten (Kreisbewegung)

$$\text{polar} \rightarrow \text{kartesisch} \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\phi) \\ r \cdot \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\text{kartesisch} \rightarrow \text{polar} \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix}$$

### 6.4 Ableitungsregeln S. 445-448

#### 6.4.1 Elementare Regeln

$$\text{Potenzen:} \quad f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 \\ f(x) = x^\alpha \quad f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$\text{Linearität:} \quad f(x) = c \cdot x^2 \quad f'(x) = c \cdot 2x$$

$$\text{Summe:} \quad (u(x) + v(x) - w(x))' = u'(x) + v'(x) - w'(x)$$

$$\text{Konstanten:} \quad c = \text{const} \rightarrow c' = 0$$

#### 6.4.2 Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

#### 6.4.3 Quotientenregel

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \rightarrow \text{als Produkt schreiben}$$

$$u(x) \cdot \left(\frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \frac{-v'(x)}{v(x)^2}$$

#### 6.4.4 Kettenregel

$$g(f(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

#### 6.4.5 Umkehrfunktion

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

### 6.5 Allgemeine Logarithmus-Ableitung

$$(\log_b(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)}\right)' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot (\ln(x))' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}$$

### 6.6 Integrationsregeln S. 494-496

$$\text{Linearität:} \quad \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

#### 6.6.1 Rechenregeln mit Integralen S. 508-510

$$\text{Zerlegung:} \quad \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$\text{Grenzen tauschen:} \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\text{Gleiche Grenzen:} \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

### 6.7 Wichtige Integrale S. 495

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \quad \int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\int_a^b 1 dx = b - a \quad (\text{Rechteck})$$