Formelsammlung

Sammlung gegliedert nach Fach

Fabian Suter, 3. November 2023

https://github.com/FabianSuter/Formelsammlung.git

1 Mathematik

1.1 Reelle Zahlen

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, 4, ...\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$	ganze Zahlen inkl. 0
$\mathbb{Z}$	$\{\pm1, \pm2, \pm3\} \cup \{0\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Q}$	$\{\frac{p}{q} \| p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$		ergänzt $\mathbb{Q}$ durch irr. Zahlen wie $\sqrt{2}$, reelle Zahlen
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$		Irrationale Zahlen

1.1.1 Supremum und Infimum

sup(X)	kleinste obere Schranke Maximum ist immer auch Supremum
inf(X)	grösste untere Schranke Minimum ist immer auch Infimum

1.1.2 Binomischer Satz / Binomialkoeffizient

Pascal-Dreieck berechnen:	$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$
$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$	$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = 0$ wenn k $<$ 0 oder k $>$ n
$\binom{n}{0} = 1$	$\binom{n}{n} = 1$

1.1.3 Umgebung

Jedes offene Intervall, dass die Zahl a enthält, heisst eine Umgebung von a	U(a)
Es sei $\epsilon > 0$. Unter der ϵ-Umgebung von a versteht man das offene Intervall $(a-\epsilon, a+\epsilon)$	$U_\epsilon(a)$
Eine ϵ-Umgebung von a ohne die Zahl a selbst wird punktierte ϵ-Umgebung von a genannt	$\dot{U}_\epsilon(a) = U_\epsilon(a) \setminus a$

1.1.4 Spezielle endliche Reihen

arithmetisch: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

geometrisch: $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

1.1.5 Mittelwerte

Harmonisches Mittel (HM) : $\frac{1}{\frac{1}{n}(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n})}$

Geometrisches Mittel (GM) : $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$

Arithmetisches Mittel (AM) : $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$

1.1.6 Spezielle Ungleichungen

Bernoulli-Ungleichung:	$(1+a)^n > 1 + n \cdot a$ für $n \in N, n \geq 2, a \in R, a > -1, a \neq 0$
Binomische Ungleichung:	$\|a \cdot b\| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$
Mittelungleichung:	$HM \leq GM \leq AM$
Gleichheit:	$HM = GM = AM$ für $a_1 = a_2 = ... = a_n$
Dreiecksungleichungen:	$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ $\|a-b\| \leq \|a\| + \|b\|$ $\|a-b\| \geq \|\|a\| - \|b\|\|$

1.1.7 Vollständige Induktion

Verankerung VA:	Beweise Formel für a_0	
Vererbung VE:	(1) Annahme:	Formel gilt für a_n
	$\downarrow$	
	(2) Schritt:	Formel gilt auch für a_{n+1}

Mittels Berechnung soll bewiesen werden, dass (2) ebenso gilt wie (1)

Beispiel:

(VA) $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

(VE) (1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

(VE) (2) $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

1.2 Funktionen

Schreibweisen:
$f : D_f \to W_f$ mit $x \mapsto f(x)$
$f : x \mapsto f(x)$ mit $x \in D_f$
$y = f(x)$ mit $x \in D_f$

Monoton wachsend:	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqq f(x_2)$
Monoton sinkend:	$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqq f(x_2)$
Monoton streng ...:	Siehe oben, jedoch immer $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$
Beschränktheit:	Funktion besitzt obere oder untere Grenze, meist inf oder sup
Umkehrbarkeit:	Streng monotone Funktionen sind umkehrbar, pro x ein y und umgekehrt
Restriktion:	Nur einen Teil von D_f betrachten $\Rightarrow$ Umkehrbarkeit

1.2.1 Transformationen

1.	Streckung um **1/a** in x-Richtung Spiegelung an y-Achse bei **-a**	$y = f(a \cdot x)$
2.	Verschiebung nach links (**+b**) oder rechts (**-b**)	$y = f(x \pm b)$
3.	Streckung um **c** in y-Richtung Spiegelung an x-Achse bei **-c**	$y = c \cdot f(x)$
4.	Verschiebung nach oben (**+d**) oder unten (**-d**)	$y = f(x) \pm d$

1.2.2 Spezielle Funktionen

Identität

$f(x) = x$ y-Wert ist gleich dem x-Wert

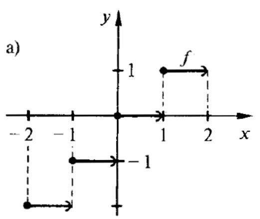
Signum-Funktion

Vorzeichenfunktion $f(x) = sgn(x)$

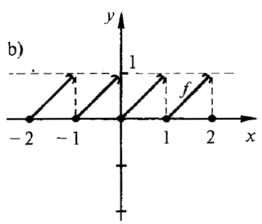
$$y = \begin{cases} \text{1, falls } x > 0 \\ \text{0, falls } x = 0 \\ \text{-1, falls } x < 0 \end{cases}$$

Floor-Funktion

Abrunden auf nächste ganze Zahl



Schreibweise: $[x]$



Schreibweise: $x - [x]$

1.2.3 Schwingungen

Sinus-Schwingung: $y = A \cdot \sin(\omega\, t + \phi)$

A Amplitude ω Frequenz $\frac{2\pi}{\text{sec}}$ φ Phase

Superposition von Schwingungen

$y = A \cdot \sin(\omega\, t + \varphi) = A_1 + A_2 \cdot \sin(\omega\, t + \varphi_1 + \varphi_2)$

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\, A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$

1.2.4 Verkettung oder mittelbare Funktion

g nach f:
$h(x) = g \circ f \Rightarrow h(x) = g(f(x)) \quad W_h = W_g \to D_h = D_f$

f nach g:
$h(x) = f \circ g \Rightarrow h(x) = f(g(x)) \quad W_h = W_f \to D_h = D_g$

1.2.5 Gerade / ungerade Funktionen

gerade:	$f(-x) = f(x)$	symmetrisch zu y-Achse
ungerade:	$f(-x) = -f(x)$	punktsymmetrisch
periodisch:	$f(x) = f(x \pm p)$	wiederholend mit Periode p

1.2.6 Ganzrationale Funtkionen (Polynome)

Aussehen: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Nullstellen bestimmen:
Quadratische Funktion: $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Faktorisierung mit Binomen / Hornerschema

Eine Funktion vom Grad n hat höchstens n verschiedene Nullstellen!

1.2.7 Gebrochenrationale Funktionen

Aussehen: $f(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$

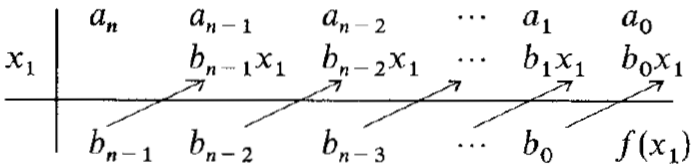
m	Zählergrad
n	Nennergrad
$m < n$	echt gebrochen
$m = n$	gleichgradig
$m > n$	unecht gebrochen

Jede unecht gebrochene Funktion lässt sich als Summe einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenen Funktion schreiben.
$\Rightarrow$ Polynomdivision

1.2.8 Hornerschema

Zerlegt eine ganzrationale Funktion vom Grad n in einen Linearfaktor (Nullstelle) und ein Polynom vom Grad n-1

1. Nullstelle x_0 raten
2. Von oben nach unten summieren
3. Diagonal nach rechts mit x_0 multiplizieren



Beispiel:

	1	0	-67	-126	
$x_1 = -2$		-2	4	$+126$	
	1	-2	-63		$0 = f(-2)$
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		
	b_2	b_1	b_0		

$f(x) = x^3 - 67x - 126$
$\Rightarrow f(x) = (x - x_1)(b_2x^2 + b_1x + b_0) = (x + 2)(x^2 - 2x - 63)$

1.2.9 Polynomdivision

Liefert Summe aus ganzrationaler Funktion und echt gebrochener Funktion

Beispiel:

$$\begin{array}{l} (-2x^2 \quad -x-1) \div (x-1) = -2x - 3 + \dfrac{-4}{x-1} \\ \underline{\;\;2x^2 - 2x\;\;} \\ \quad\quad -3x - 1 \\ \quad\quad \underline{\;\;3x - 3\;\;} \\ \quad\quad\quad -4 \end{array}$$

1.2.10 Partialbruchzerlegung

(1)	echt gebrochen ($m < n$)	
	Ja: $\rightarrow$ (2)	Nein: $\rightarrow$ Polynomdivision
(2)	Nenner faktorisieren	
	pro Faktor ein Teilbruch	
(3)	Berechnung Zählerkonstanten	
(3.1)	Gleichnahmig machen (kgV)	
(3.2)	Zählergleichung	
(3.3)	Einsetzen von "guten"x-Werten	

Beispiel PBZ

(1) $f(x) = \frac{1}{a^2-x^2}$

(2) $a^2 - x^2 = (a + x)(a - x)$

(3) $\frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x} = \frac{1}{a^2-x^2}$

(3.1) $\frac{A(a-x)+B(a+x)}{a^2-x^2} = \frac{1}{a^2-x^2}$

(3.2) $A(a - x) + B(a + x) = 1$

(3.3) $x = a \Rightarrow B(2a) = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2a}$
$x = -a \Rightarrow A(2a) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2a}$

Spezielle Ansätze PBZ

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{5x^2-37x+54}{x^3-6x^2+9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} \\ &= \frac{A(x-3)^2+Bx(x-3)+Cx}{x(x-3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1{,}5x}{x^3-6x^2+12x-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} \\ &= \frac{A(x-2)^2+B(x-2)+C}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-1}{x^3+2x^2-2x-12} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+6} \\ &= \frac{A(x^2+4x+6)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+4x+6)} \end{aligned}$$

1.2.11 Trigonometrie, Arcus

$\sin(x)$:	$D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\rightarrow$	$W_f = [-1, 1]$
$\cos(x)$:	$D_f = [0, \pi]$	$\rightarrow$	$W_f = [-1, 1]$
$\tan(x)$:	$D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\rightarrow$	$W_f = \mathbb{R}$
$\cot(x)$:	$D_f = (0, \pi)$	$\rightarrow$	$W_f = \mathbb{R}$
$\arcsin(x)$:	$D_f = [-1, 1]$	$\rightarrow$	$W_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos(x)$:	$D_f = [-1, 1]$	$\rightarrow$	$W_f = [0, \pi]$
$\arctan(x)$:	$D_f = \mathbb{R}$	$\rightarrow$	$W_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\text{arccot}(x)$:	$D_f = [-1, 1]$	$\rightarrow$	$W_f = (0, \pi)$

Umwandlung

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ $\quad$ $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$

Symmetrien

Sinus

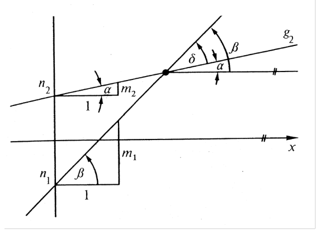
Punkt $(0|0) \rightarrow \sin(-x) = -\sin(x)$
Scheitelsymm. $\rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$
Punkt $\rightarrow \sin(\pi - x) = \sin(x)$

Cosinus

y-Achse $\rightarrow \cos(-x) = \cos(x)$
Scheitel $\rightarrow \cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$

1.2.12 Winkel zwischen beliebigen Geraden

Zwischenwinkel: $\tan(\alpha) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \rightarrow$ Winkel geg. Uhrzeiger



Senkr. Geraden: $m_1 \cdot m_2 = -1$

1.3 Folgen und Reihen

1.3.1 Spezielle Folgen und Reihen

Arithmetische Folge:	$a_{n+1} = a_n + d$	$d = a_{n+1} - a_n$
Geometrische Folge:	$a_{n+1} = q \cdot a_n$	$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$
Konstante Folge:	$a_{n+1} = a_n$	

1.3.2 Beschränktheit / Monotonie

Beschränktheit

$W_f \subset [a; b]$ und a, b $\in \mathbb{R}$

Monotonie

$f(x_1) \leq f(x_2)$	$x_1 < x_2$	monoton wachsend	$\uparrow$
$f(x_1) < f(x_2)$	$x_1 < x_2$	streng monoton wachsend	$\Uparrow$
$f(x_1) \geq f(x_2)$	$x_1 > x_2$	monoton fallend	$\downarrow$
$f(x_1) > f(x_2)$	$x_1 > x_2$	streng monoton fallend	$\Downarrow$

1.3.3 Konvergenz, Divergenz

Konvergenz

Es existiert ein Grenzwert g $\in \mathbb{R}$

Toleranzungleichung: $|a_n - g| < \epsilon$ mit $\epsilon > 0$

Gesucht ist ein n_0, ab welchem alle Werte von $n \geq n_0$ in $U_\epsilon(g)$ liegen

Bestimmt divergent gegen $+\infty$

Ungleichung: $f_n > K$ wenn $n \geq n_0$ für $K > 0$

Bestimmt divergent gegen $-\infty$

Ungleichung: $f_n < k$ wenn $n \geq n_0$ für $k < 0$

Unbestimmt divergent

Alles, was nicht konvergent oder bestimmt divergent ist

1.3.4 Grenzwerte gegen Unendlich

Vorgehen beim lösen von Grenzwerten

1. Naiven Ansatz ausprobieren $\rightarrow$ limit direkt bilden
2. Falls unbestimmte Form entsteht:
   Umformen gemäss folgenden Ansätzen

Arithmetik:	$+, -, *, :, \sqrt{\ldots}, \|\ldots\|$
Erweiterung:	erweitern mit $\frac{1}{x^n}$ n = höchste (Nenner-)Potenz
Erweiterung:	erweitern mit Gegentherm (3. Binom bilden)
Tabelle:	Bei Brüchen Tabelle aus Abschnitt 4.8 anschauen!

Beispiel Grenzwert n gegen Unendlich

$f(n) = \frac{-2n^2 + 4n - 5}{8n^2 - 3n + 7}$ $(n \rightarrow \infty)$

"Naiv": $\frac{-\infty + \infty + 5}{\infty - \infty + 7} \rightarrow \frac{-\infty + \infty}{\infty - \infty} \rightarrow \frac{?}{?}$

Algebra, Erweitern mit $\frac{1}{n^2}$: $f(n) = \frac{-2 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}}{8 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}} (n \rightarrow \infty) = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$

1.3.5 Rechnen mit Unendlich

Bestimmte Formen

$\infty + \infty = \infty$ $\quad -\infty - \infty = -\infty$ $\quad 0 \cdot [a, b] = 0 \cdot \text{beschränkt} = 0$

$g + \infty = \infty$ $\quad g - \infty = -\infty$ $\quad (\text{g} \in \mathbb{R})$

$\infty \cdot \infty = \infty$ $\quad -\infty \cdot (\infty) = -\infty$ $\quad g \cdot \infty = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases}$

$\frac{1}{\infty} = 0$ $\quad \frac{g}{\infty} = 0$ $\quad g \in \mathbb{R}$

$\frac{\infty}{0+} = \infty$ $\quad \frac{\infty}{0-} = -\infty$ $\quad \frac{\infty}{g} = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases}$

$\frac{1}{0+} = \infty$ $\quad \frac{1}{0-} = -\infty$ $\quad g \in \mathbb{R} - 0$

$\frac{g}{0+} = \begin{cases} \infty & g > 0 \\ -\infty & g < 0 \end{cases}$ $\quad \frac{g}{0-} = \begin{cases} -\infty & g > 0 \\ \infty & g < 0 \end{cases}$

Unbestimmte Formen

$\frac{0}{0} = ?$ $\quad \frac{\infty}{\infty} = ?$ $\quad \infty \cdot 0 = ?$

$0 \cdot \infty = ?$ $\quad \infty - \infty = ?$ $\quad 0^0 = ?$

$\infty^0 = ?$ $\quad 1^\infty = ?$

Ausser 1 ist eine Konstante, dann gilt $1^\infty = 1$

1.3.6 Einschliessung

Es existieren drei Folgen : O_n, f_n und U_n

Es gilt: $O_n \geq f_n \geq U_n$

WENN O_n gegen Grenzwert g konverviert UND U_n ebenfalls gegen g konvergiert, DANN konvergiert auch f_n gegen g

1.3.7 Wachstumsvergleich

(1) $\frac{n^k}{q^n}(n \to \infty) = 0$ (k $\in \mathbb{N}; q > 1$) $\quad \frac{\text{Potenz}}{\text{Exponentiell}} \to 0$

(2) $\frac{q^n}{n!}(n \to \infty) = 0$ (k $\in \mathbb{N}; q > 1$) $\quad \frac{\text{Exponentiell}}{\text{Fakultät}} \to 0$

(2) $\frac{ln(n)}{n^k}(n \to \infty) = 0$ (k $\in \mathbb{N}$) $\quad \frac{\text{Logarithmisch}}{\text{Potenz}} \to 0$

1.3.8 Bolzano-Prinzip

Jede beschränkte, monotone Zahlenfolge ist konvergent!

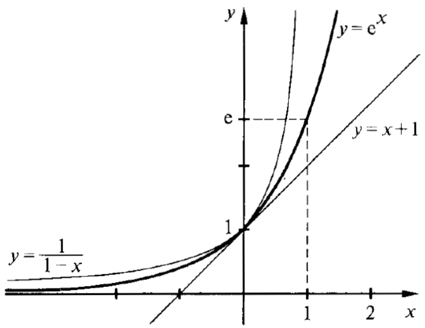
1. Monotonie beweisen
2. Beschränktheit vermuten und möglichen Grenzwert g mittels Grenzwertgleichung finden
3. Beschränktheit beweisen

3.1 a_1 ist obere/untere Schranke

3.2 Vermutete untere/obere Schranke mit voll. Induktion beweisen z.B. $a_{n+1} \leq a_n$ wobei a_{n+1} und a_n mit vermutetem Grenzwert ersetzt werden

1.3.9 Exponentialfunktion

$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$



Definitions- / Wertebereich:

$D_f = \mathbb{R} \to W_f = \mathbb{R}^+$

Einschliessung:

$e^x \geq 1 + x$ für x $\in \mathbb{R}$

$e^x \leq \frac{1}{1-x}$ für $x < 1$

1.3.10 Hyperbolische Funktionen

$e^x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sinh(x) + \cosh(x)$

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \mathbb{R} \to [1; \infty)$

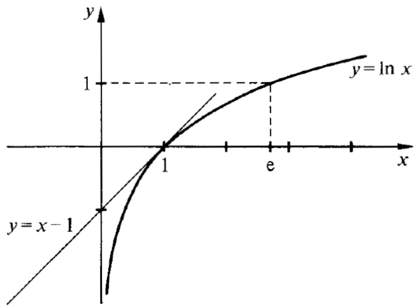
$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})} \quad \mathbb{R} \to (-1; 1)$

$|\sinh(x)| < \cosh(x)$

Area-Funktionen (Umkehrung Hyperbolische. F.)

arsinh(x) : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
arcosh(x) : $[1; \infty) \to \mathbb{R}_0^+$
artanh(x) : $|x| < 1 \to \mathbb{R}$

1.3.11 Logarithmusfunktion



Definitions- / Wertebereich:
$D_f = \mathbb{R}^+ \to W_f = \mathbb{R}$

Einschliessung:

$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$

1.4 Grenzwerte von Funktionen

Grenzwertsätze S. 56-57

1.4.1 Techniken zur Berechnung von Grenzwerten

Arithmetik:	$+, -, *, :, \sqrt{...}, \lvert ... \rvert$
Erweiterung:	erweitern mit $\frac{1}{x^n}$ n = höchste (Nenner-)Potenz
Erweiterung:	erweitern mit Gegentherm (3. Binom bilden)
Faktorisierung:	Zähler und Nenner faktoriesieren und kürzen
Trigo:	**Bronstein S. 57 1. C beachten**

1.4.2 Links- / Rechtsseitiger Grenzwert

Eine kritische Stelle x_0 kann von links und rechts angenähert werden.

linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g^-$

rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g^+$

$\Rightarrow$ Wenn $g^- = g^+ = g \to$ Konvergenz
$\Rightarrow$ Wenn $g^- \neq g^+ \to$ unbestimmte Divergenz

1.4.3 Konvergenz, Divergenz

Konvergenz von f(x)

$x \to \infty$	Toleranzungleichung: $\lvert f(x) - g \rvert < \epsilon$	wenn $x > M(\epsilon)$
$x \to -\infty$	Toleranzungleichung: $\lvert f(x) - g \rvert < \epsilon$	wenn $x < m(\epsilon)$
$x \to x_0$	Toleranzungleichung: $\lvert f(x) - g \rvert < \epsilon$	$x \in \dot{U}_\delta(x_0)$

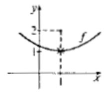
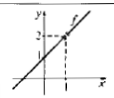
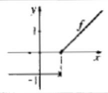
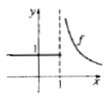
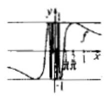
Bestimmte Divergenz von y = f(x)

Quadrant	Kriterium	Folgerung
I	$y \to \infty \ (x \to \infty)$	$y > K$ wenn $x > M(K)$
II	$y \to \infty \ (x \to -\infty)$	$y > K$ wenn $x < m(K)$
III	$y \to -\infty \ (x \to -\infty)$	$y < k$ wenn $x < m(k)$
IV	$y \to -\infty \ (x \to \infty)$	$y < k$ wenn $x > M(k)$
	$f(x) \to \infty$	$y > K > 0$ wenn $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$
	$f(x) \to -\infty$	$y < k < 0$ wenn $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$

1.4.4 Stetigkeit

Definition Stetigkeit: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Eine Funktion ist stetig, wenn der Funktionsgraph kann gezeichnet werden, ohne dass der Stift abgesetzt werden muss.

Art der Unstetigkeitsstelle	Bedingungen	Beispiel $f: x \mapsto f(x) =$	Graph von f
hebbare Unstetigkeitsstelle	$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$ und $g \neq f(x_0)$	$\begin{cases} \frac{1}{4}(x-1)^2+1 & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$	
	$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$ und $x_0 \notin D_f$	$\frac{x^2-1}{x-1}$	
Unstetigkeitsstelle 1. Art (Sprungstelle)	g^+ und g^- existieren in x_0, aber $g^+ \neq g^-$	$\begin{cases} x-1 & \text{für } x \geqq 1 \\ -1 & \text{für } x < 1 \end{cases}$	
Unstetigkeitsstelle 2. Art	mindestens g^+ oder g^- existieren in x_0 nicht	$\begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{für } x > 1 \\ 1 & \text{für } x \leqq 1 \end{cases}$	
	f ist für $x \uparrow x_0$ und $x \downarrow x_0$ unbestimmt divergent (Oszilationsstelle)	$\sin \frac{1}{x}$	

1.4.5 Übertragungsprinzip (Folgenprinzip)

f bestitz an der Stelle x_0 Grenzwert g, wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge $< x_n >$ gilt: $\lim_{x \to \infty} f(x_n) = g$

Beispiel

$f(x) = \frac{|x+2|}{2x+4}$ und $x_0 = -2$

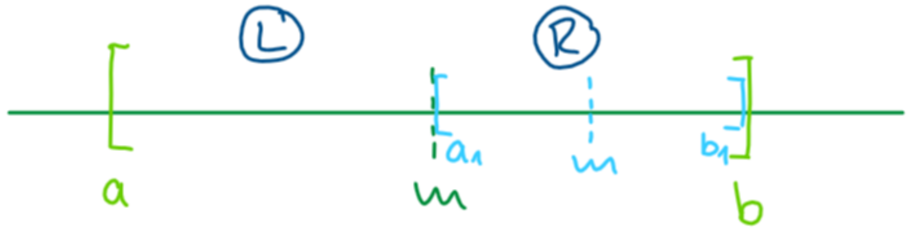
linksseitig: $x_n = x_0 - \frac{1}{n}$ für jedes x in f(x) einsetzen; Grenzwert g^- gegen ∞ bestimmen

rechtsseitig: $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$ für jedes x in f(x) einsetzen; Grenzwert g^+ gegen ∞ bestimmen

1.4.6 Nullstellen bestimmen gemäss Bolzano

$f(x)$ auf Intervall $[a; b]$ stetig und $f(a)$ und $f(b)$ versch. Vorzeichen
$\to$ Es existiert (mindestens) eine Nullstelle ξ
NS mittels Bisektion (Intervallschachtelung) näherungsweise berechnen:

(1) $I_0 = [a; b] = [a_0; b_0]$ gesamtes Intervall
(2) I_0 halbieren $\to m = \frac{a_0 + b_0}{2}$
(3) Teil-Intervall mit Vorzeichenwechsel bestimmen:
links: $f(a) \cdot f(m) < 0$; rechts: $f(a) \cdot f(m) > 0$
(4) Teil-Intervall mit Vorzeichenwechsel: $I_1 = [a_1; b_1]$
(5) Schritt (2) - (4) n mal wiederholen: $I_{n+1} \in I_n$
(6) ... $\xi \in (a; b)$ mit $f(\xi) = 0$ (Nullstelle)



1.4.7 Spezielle Grenzwerte

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ $\quad \lim_{x \to \infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln(a)}$

$\lim_{x \to 1} \frac{x}{1-e^{-x}} = 1$ $\quad \lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{x} = 1$ $\quad \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$

$\lim_{x \to \infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$ $\quad \lim_{x \to 0+} x \cdot \ln(x) = 0$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{(a+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ $\quad \lim_{z \to 0+} z^z = 1$

$\lim_{x \to 0+} x^{\sin(x)} = 1$ $\quad \lim_{x \to 0+} y^\beta (\ln(y))^\alpha = 0$

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{a^{\beta x}} = 0 \ (a > 1; \alpha, \beta > 0)$ $\quad \lim_{x \to \infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \infty & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \end{cases}$

1.4.8 Asymptotenbestimmung

Asymptote einer gebrochen rationalen Funktion $f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}$ bestimmen gemäss:

	$m > n$	$m = n$	$m < n$
$\lim_{x \to \pm\infty} r(x)$	0	$\frac{a_n}{b_m}$	∞ oder $-\infty$
Asymptote	x-Achse	Parallel zur x-Achse $y = g(x) = \frac{a_m}{b_n}$	ganzrat. Teil der Polynomdivision
Konv./Div.	Konvergenz	Konvergenz	Divergenz

1.4.9 Grenzwerte von rekursiven Folgen

Anwendung des Bolzano-Prinzips! Beispiel: $a_1 = \frac{1}{4}$; $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$

1. Monotonie
   beweisen mit Ansatz $a_{n+1} \geq a_n$ bzw. $a_{n+1} \leq a_n$

2. Beschränktheit
   erste Schranke = erster Wert der Reihe
   Zweite Schranke: Annahme, es gibt Grenzwert g und er ist
   sup / inf

   Grenzwertgleichung: $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$ $(n \to \infty) \Rightarrow g = g^2 + \frac{1}{4}$
   Gleichung nach g auflösen
   $\Rightarrow$ Wenn es ein sup / inf gibt, dann ist es das berechnete g $\in \mathbb{R}$

3. Beweisen (oder widerlegen), dass g sup / inf ist
   Ansatz: $a_n \leq g$ bzw. $a_n \geq g$ mit vollst. Induktion beweisen

2 Physik

2.1 Statik

2.1.1 Schwerkraft (Gewichtskraft)

$$\boxed{\text{Allgemein:}\quad F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$

$$\boxed{\text{Erde:}\quad F_G = G \cdot \frac{m_E \cdot m}{r_E^2} = m \cdot g}$$

F_G	Gewichtskraft	$[F_G] = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{N}$
G	Gravitationskonstante	$6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$
m_i	Massen der Körper	$[m] = \mathrm{kg}$
r	Abstand der Massen	$[r] = \mathrm{m}$
g	Erdbeschleunigung	$9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
m_E	Masse der Erde	$5.972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
r_E	Erdradius	$6.378 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$

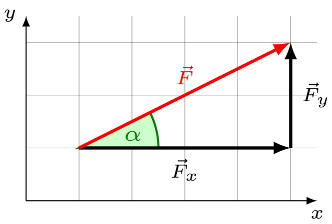
2.1.2 Normalkraft (Kontaktkraft)

(Sekundär-) Kraft, welche sich so anpasst, dass in Ruhe ein Kräftegleichgewicht herrscht:

$\boxed{F_G = -F_N}$ $\Rightarrow$ im Gleichgewicht auf horizontaler Oberfläche

2.1.3 Zerlegung von Kräften

Kraftvektoren kann man komponentenweise aufteilen:



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_Z$$

hilfreich beim Lösen von Aufgaben!

2.1.4 Gleichgewichtsbedingungen für Massepunkte

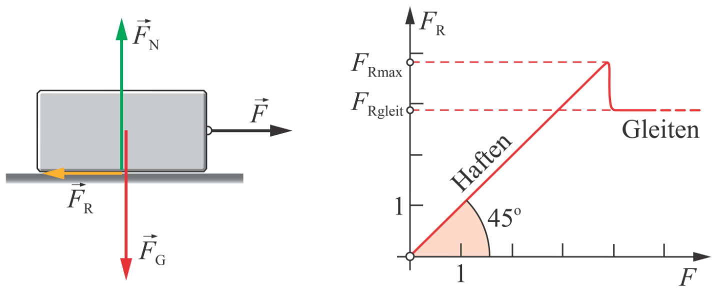
Der Massepunkt erfährt keine Beschleunigung
$\Rightarrow$ Summe aller wirkenden Kräfte ist 0

$$\boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \qquad \Rightarrow \text{komponentenweise}}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_x = \vec{0} \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_y = \vec{0} \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_z = \vec{0}}$$

2.1.5 Haftreibung / Gleitreibung

Trockene Festkörperreibung



$$\boxed{\text{Haftreibung:}\quad \vec{F}_{R,max} = \mu_H \cdot \vec{F}_N}$$

$$\boxed{|\vec{F}_R| \leq |\vec{F}_{R,max}|}$$

$$\boxed{\text{Gleitreibung:}\quad \vec{F}_{Gleit} \approx \mu_G \cdot \vec{F}_N}$$

$\vec{F}_R$	Reibungskraft	$[\vec{F}_R] = \mathrm{N}$
$\vec{F}_{R,max}$	Haftreibungskraft	$[\vec{F}_{R,max}] = \mathrm{N}$
$\vec{F}_{Gleit}$	Gleitreibungskraft	$[\vec{F}_{Gleit}] = \mathrm{N}$

Viskose Reibung

Sobald Schmiermittel zum Einsatz kommen, ist die Reibungskraft abhängig von der Grösse der Berührungsfläche:

Bei gleicher Normalkraft $\vec{F}_N$ ist bei

- kleinerem Flächendruck die Reibung kleiner
- grösserem Flächendruck die Reibung grösser

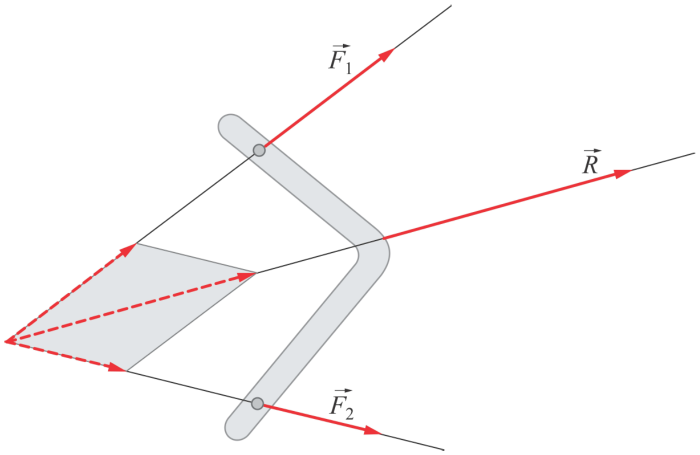
2.1.6 Starre Körper

- Ein starrer Körper wird durch angreifende Kräfte nicht deformiert
- Bei einem starren Körper kann die Kraft entlang ihrer Wirkungslinie beliebig verschoben werden

2.1.7 Addition von Kräften

Spezialfall: Ebene Kräftegruppe für schiefe Wirkungslinie

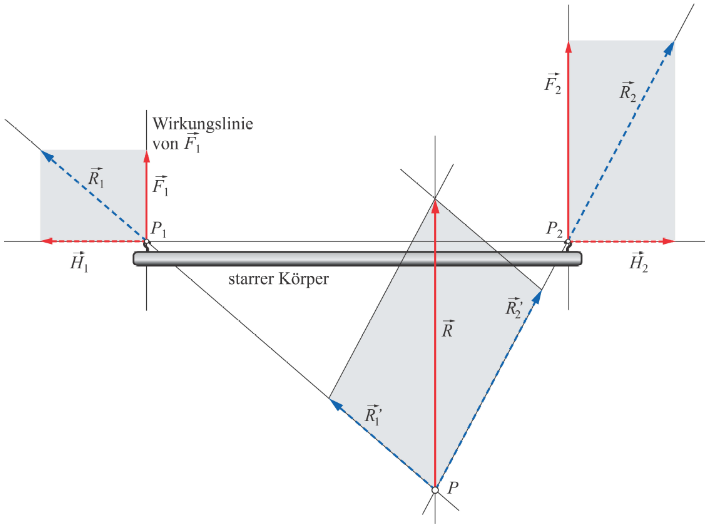
Kräfte entlang ihrer Wikungslinie verschieben
$\Rightarrow$ Im Schnittpunkt vektorielle Addition der Kräfte durchführen, um die resultierende Kraft zu erhalten.



Dieses Verfahren kann auch mehrfach angewendet werden!

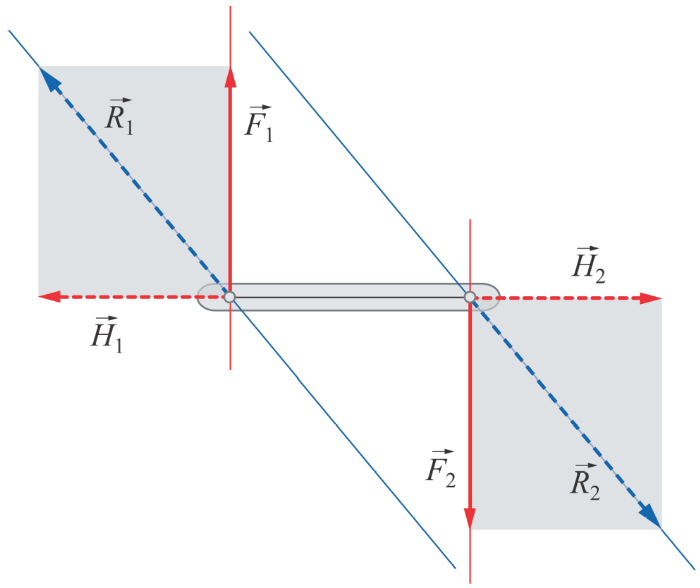
Spezialfall: Ebene Kräftegruppe für parallele Wirkungslinie

Zwei sich zu null addierende Hilfskräfte hinzufügen ($\vec{H}_1$, $\vec{H}_2$)



Spezialfall: Ebene Kräftegruppe für parallel, entgegengesetzt und gleich grosse Kräfte

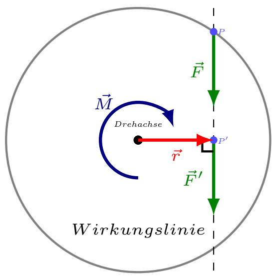
Kräftepaare können in andere Kräftepaare umgewandelt werden, aber <u>niemals zu einer</u> resultierenden Kraft $\vec{R}$ vereinfacht werden.



2.1.8 Drehmoment

Eine Drehwirkung auf einen starren Körper lässt sich auf zwei verschiedene Arten und weisen erzeugen:

- Kräftepaar
- einzelne Kraft und Bezugspunkt (Drehzentrum)



$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = a \cdot |\vec{F}|$$

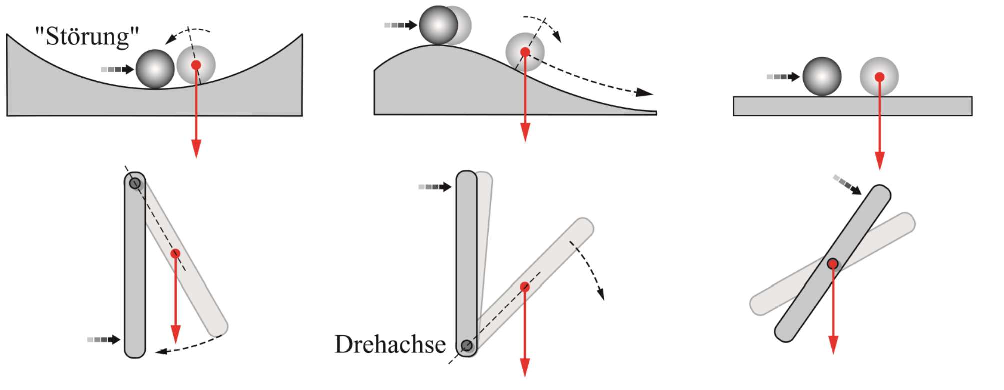
Die Länge a muss **senkrecht** zur wirkenden Kraft sein!

$\vec{M}$	Drehmoment	$[M] = \mathrm{Nm}$
$\vec{r}$	Abstandsvektor	$[r] = \mathrm{m}$
$\vec{F}$	Angreifende Kraft	$[F] = \mathrm{N}$

2.1.9 Gleichgewichtsbedungungen für starre Körper

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \qquad \sum_{i=1}^{m} \vec{M}_i = \vec{0} \qquad \Rightarrow \text{komponentenweise}$$

2.1.10 Gleichgewichts-Arten



stabil labil indifferent

2.1.11 Deformierbare Körper

Spannungen

Zugspannung σ

senkrecht wirkende Kraft pro Flächeneinheit
Wenn $\sigma < 0$ spricht man von **Druck**

$$\boxed{\sigma = \frac{F_\perp}{A}} \qquad [\sigma] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Schubspannung τ (Scherung)

parallel wirkende Kraft pro Flächeneinheit

$$\boxed{\tau = \frac{F_\parallel}{A}} \qquad [\tau] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Dehnung ϵ (Hook'sches Gesetz)

$$\boxed{\epsilon = \frac{1}{E}\cdot\sigma = \frac{1}{E}\cdot\frac{F_\perp}{A} = \frac{\Delta\, l}{l}}$$

ϵ	Dehnung	$[\epsilon] = 1$
E	Elastizitätsmodul (Materialeigenschaft)	$[E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$
l	Länge des Körpers vor Dehnung	$[l] = \mathrm{m}$
$\Delta\, l$	Längenunterschied bei Dehnung	$[\Delta\, l] = \mathrm{m}$
σ	Zugspannung	$[\sigma] = \mathrm{N}$
A	Querschnittsfläche	$[A] = \mathrm{m}^2$

$\Rightarrow$ Das Hook'sche Gesetz gilt nur, solange die Deformation linear-elastisch ist!

Querkontraktion ϵ_q

Wird ein Stab gedehnt (länger), so wird er automatisch auch dünner

$$\boxed{\epsilon_q = \frac{\Delta\, d}{d} = -\mu\,\epsilon} \qquad \mu \in (0\,;\,0.5)$$

ϵ_q	Querkontraktion	$[\epsilon_q] = 1$
d	Ursprüngliche Dicke des Materials	$[d] = \mathrm{m}$
Δd	Dicken-Änderung	$[\Delta\, d] = \mathrm{m}$
ϵ	(Längs-) Dehnung	$[\epsilon] = 1$
μ	Poisson-Zahl (Materialeigenschaft)	$[\mu] = 1$

Kompression $\frac{\Delta\, V}{V}$

Ein Körper wird von allen Seiten mit dem gleichen Druck belastet, sodass sich sein Volumen verkleinert

$$\boxed{\frac{\Delta\, V}{V} = -\kappa\cdot\Delta\, p} \qquad \left(K = \frac{1}{\kappa}\right)$$

V	Ursprüngliches Volumen des Körpers	$[V] = \mathrm{m}^3$
ΔV	Volumenänderung	$[\Delta V] = \mathrm{m}^3$
κ	Kompressibilität	$[\kappa] = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{N}}$
$\Delta\, p$	Druckänderung	$[\Delta\, p] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}$

$$\boxed{\text{Würfel:} \quad \Rightarrow \kappa = \frac{3}{E}(1 - 2\,\mu)}$$

Völlig inkompressibler Körper: $\kappa = 0 \qquad K = \infty \qquad \mu = 0.5$

Schubbeanspruchung (Scherung)

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{G}\tau}$$

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad \text{(gilt für isotrope Materialen)}}$$

γ	Scherwinkel	$[\gamma] = {}^\circ$
G	Schubmodul; Gleitmodul; Torsionsmodul	$[G] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$
τ	Schubspannung	$[\tau] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$
E	Elastizitätsmodul (Materialeigenschaft)	$[E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$
μ	Poisson-Zahl (Materialeigenschaft)	$[\mu] = 1$

2.1.12 Beispiele

Torsionsfeder

$$\boxed{M = c \cdot \phi} \quad c = \frac{\pi G r^4}{2l}$$

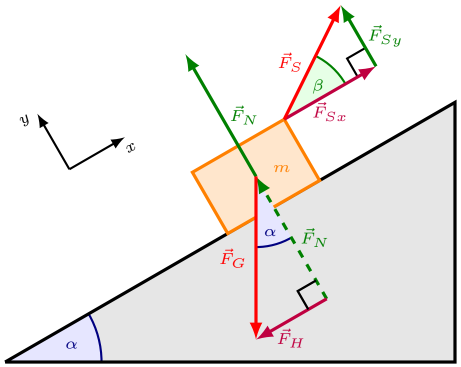
M	Drehmoment	$[M] = Nm$
c	Auslenkkonstante	$[c] = 1$
ϕ	Auslenkwinkel	$[\phi] = {}^\circ$
G	Schubmodul	$[G] = 1$
r	Radius	$[r] = m$
l	Länge der Feder	$[l] = m$

Schraubenfeder

$$\boxed{F = c\Delta l} \quad c = \frac{Gr^4}{4nR^3}$$

F	Zugkraft / Druckkraft	$[F] = N$
c	Federkonstante	$[c] = 1$
l	Längenänderung	$[l] = m$
G	Schubmodul	$[G] = 1$
r	Drahtradius	$[r] = m$
R	Windungsradius	$[R] = m$
n	Anzahl Windungen	$[n] =$

2.1.13 Schiefe Ebene (mit Seil)



Wichtige Formeln und Zusammenhänge zur schiefen Ebene

$F = m \cdot a \qquad F_G = m \cdot g$

$F_N = m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \qquad F_H = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$

2.1.14 Rezept: Aufgaben zur Statik lösen

1. Koordinatensystem festlegen
2. Alle wirkenden Kräfte einzeichnen
3. Bezugspunkt P (Drehpunkt) festlegen
   $\Rightarrow$ **Da wo viele Kräfte** (oder da wo sinnvoll)
4. Kräfte komponentenweise aufschreiben: $\sum \vec{F}_i = 0$
5. Drehmomente M aufschreiben und gleichsetzen: $\overleftarrow{M} = \overrightarrow{M}$

2.2 Kinematik

2.2.1 Bewegung

a	Beschleunigung	$[a] = \frac{m}{s^2}$
v	Geschwindigkeit	$[v] = \frac{m}{s}$
x	Strecke	$[x] = m$
t	Zeit	$[\mathrm{t}] = \mathrm{s}$

Gleichmässige Bewegung

$$a_{(t)} = 0$$
$$v_{(t)} = v_0$$
$$x_{(t)} = v_0 \cdot t + x_0$$

Gleichmässige Beschleunigung

$$a_{(t)} = a_0$$
$$v_{(t)} = a_0 \cdot t + v_0$$
$$x_{(t)} = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

Freier Fall

Geschwindigkeit:	$v_{(t)} = -g \cdot t + v_0$
Ort:	$x_{(t)} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$
Umkehrzeit:	$t_{max} = \frac{v_0}{g}$
max. Flughöhe:	$x_{t_{max}} = -\frac{1}{2}gt_{max}^2 + v_0 \cdot t_{max} + h_0$

Koordinatensystem (Kartesisch / Polar)

Kartesisch:	$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot cos(\varphi) \\ r \cdot sin(\varphi) \end{pmatrix}$
Polar:	$\vec{P} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lvert\sqrt{x^2 + y^2}\rvert \\ tan(\frac{y}{x}) \end{pmatrix}$

3 Analog / Digital

Unsere Welt ist analog!
Die Analogtechnik bildet daher die 'Schale' (Schnittstelle) um den digitalen Kern.

3.1 Analog

Analoge Systeme sind:

- zeitkontinutierlich (unendlich viele Werte möglich)
- wertkontinuierlich (unendlich viele Werte möglich)

3.1.1 Vorteile / Nachteile

+ Resultat steht praktisch instantan zur Verfügung (schneller)
+ auch für hohe Frequenzen geeignet

- in vielen Anwendungen werden Systeme rasch komplex
- anfällig auf Störsignale
- Entwurf von System nur ansatzweise automatisierbar

3.2 Digital

Digitale Systeme sind:

- zeitdiskret (endliche Anzahl Abtastungen) $\Rightarrow$ Abtastrate
- amplitudendiskret (endliche Anzahl Werte) $\Rightarrow$ Dynamik

3.2.1 Vorteile / Nachteile

+ einfacher, weitgehend automatisierbarer Entwurf (CAD)
+ Reproduzierbar in Herstellung und Test
+ Störsicher im Betrieb (keine Fehlerfortpflanzung)

- Resultate nicht instantan (mehrere Rechenzyklen)
- Technologischer Aufwand für Realisierung grösser
- weniger hohe Frequenzen möglich

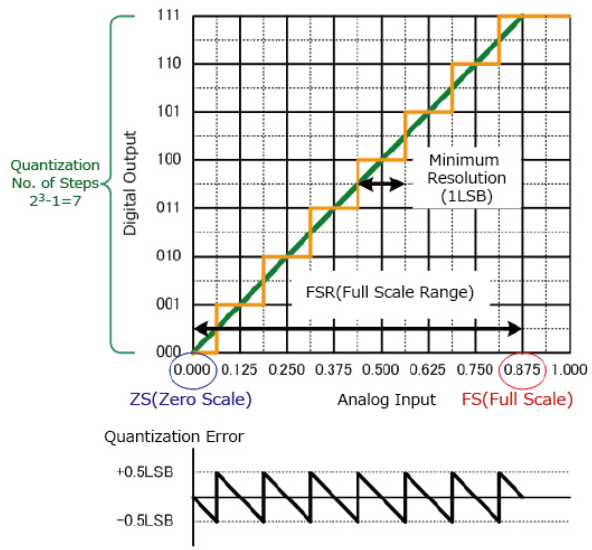
3.2.2 Amplitudenauflösung / Dynamik / Quantisierungsfehler

Amplitudenauflösung (LSB): $\Delta = \frac{V_{max} - V_{min}}{n_q}$
Quantisierungsstufen: $n_q = \frac{V_{max} - V_{min}}{\Delta}$

Dynamik: 6 dB $\cdot$ # Bits

Digitalisierter Wert: Digits $= \frac{2^{\# Bits} - 1}{V_{CC}} V_{IN}$

Quantisierungsfehler: Ideale Transition - Reale Transition



Lineare Quantisierung:
max. Fehler: $\pm\frac{1}{2}$ **LSB**

3.2.3 Abtasttheorem von Shannon-Nyquist

Um ein Signal ohne Informationsverlust beliebig zu approximieren muss ein Signal mit einer Abtastfrequenz $f_{abtast} > 2 \cdot f_{sigmax}$
abgetastet werden.

4 Zahlensysteme

4.1 Rechnungen in den Zahlensysteme (Beispiele)

Kommas bleiben IMMER am Ort!
Genauigkeit: $\#Bits = log_2(2 \cdot Genauigkeit \cdot Zahl)$ $\Rightarrow$ aufrunden

4.1.1 Binär ⇒ Dezimal / Hex ⇒ Dezimal / Oktal ⇒ Dezimal

Binär: $0b1001 \Rightarrow 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = 1 + 8 = 9$

Hex: $18B,2C_{16} = 1 \cdot 16^2 + 8 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0, \frac{2}{16^1} + \frac{12}{16^2}$

Oktal: $257_8 = 2 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 157_{10}$

4.1.2 Binär ⇔ Hex / Binär ⇔ Oktal

Hex: 4er-Gruppen

$0b001111000101 \Leftrightarrow 3C5_{16}$

$0b00101101,10110100 \Leftrightarrow 2D,B4_{16}$

Oktal: 3er-Gruppen

$0b101101,101101 \Leftrightarrow 55,55_8$

Gruppierung in beide Richtungen beginnt immer beim Komma!

4.1.3 Dezimal ⇒ Binär / Dezimal ⇒ Okal

(Modulo 2 mit Rest)

			Rest
13 : 2	=	6	1
6 : 2	=	3	0
3 : 2	=	1	1
1 : 2	=	0	1

			Ganzzahl
$0.4375 \cdot 2$	=	0.875	0
$0.875 \cdot 2$	=	1.75	1
$0.75 \cdot 2$	=	1.5	1
$0.5 \cdot 2$	=	1	1

$13{,}4375_{10} = 1101{,}0111$

(Modulo 8 mit Rest)

Zahl	Quotient	Rest
34	4	2
4	0	4

$34_{10} = 42_8$

4.2 Darstellung negativer Zahlen (binär)

Positive Zahlen werden nicht verändert!

4.2.1 Sign-Magnitude

MSB als Vorzeichenbit; sonst normale Binärdarstellung der pos. Zahl
Nachteil: Zwei NS (+0 / -0) ; Arithmetik komplex (Falluntersch.)
Wertebereich: $-2^{n-1} - 1 \ldots -0,\ +0 \ldots 2^{n-1} - 1$

4.2.2 Einerkomplement

Alle Bits der positiven Zahl invertieren
Nachteil: Zwei NS (+0 / -0) ; Arithmetik komplex (Falluntersch.)
Wertebereich: $-2^{n-1} - 1 \ldots -0,\ +0 \ldots 2^{n-1} - 1$

4.2.3 Zweierkomplement

Alle Bits der positiven Zahl invertieren und 1 addieren
Wertebereich: $-2^{n-1} \ldots 0 \ldots 2^{n-1} - 1$

4.3 Addition / Subtraktion

7_{10}	0	1	1	1
-4_{10}	1	1	0	0
Carry	1 1	0	0	
=	0	0	1	1

Addition:
identisch zum Dezimalsystem

Subtraktion:
identisch zum Dezimalsystem; höchsten Übertrag ignorieren!

Wenn Resultat positiv ist, ist keine Rückwandlung nötig!

Die beiden letzten Carrys (rot) zeigen an, ob das Resultat korrekt ist oder nicht:

	Korrekt	Überlauf
A + B	$c_n = 0, c_{n-1} = 0$	$c_n = 0, c_{n-1} = 1$
A - B	$c_n = c_{n-1}$	nicht möglich
-A - B	$c_n = 1, c_{n-1} = 1$	$c_n = 1, c_{n-1} = 0$

5 Schaltalgebra

5.1 Boolsche Algebra

AND	OR	NOT	XOR
$A \cdot B$	$A + B$	$\overline{A}$	$A \,\$\, B$
$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$	$A \oplus B$

5.1.1 Grundlegende Rechenregeln

OR	AND	XOR
$A + 0 = A$	$A \cdot 0 = 0$	$A \,\$\, 0 = A$
$A + 1 = 1$	$A \cdot 1 = A$	$A \,\$\, 1 = \overline{A}$
$A + A = A$	$A \cdot A = A$	$A \,\$\, A = 0$
$A + \overline{A} = 1$	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A \,\$\, \overline{A} = 1$

5.1.2 Kommutativ / Assoziativ / Distributiv

	Kommutativ	Assoziativ
OR	$A + B = B + A$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
AND	$A \cdot B = B \cdot A$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
XOR	$A \,\$\, B = B \,\$\, A$	$(A \,\$\, B) \,\$\, C = A \,\$\, (B \,\$\, C)$

	Distributiv
OR	$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
AND	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
XOR	$A \cdot (B \,\$\, C) = (A \cdot B) \,\$\, (A \cdot C)$

5.1.3 Vereinfachungsregel / Minimierung

Vereinfachung	$A + (A \cdot B) = A$	$A \cdot (A + B) = A$
	$(A + \overline{B}) \cdot B = A \cdot B$	$(A \cdot \overline{B}) + B = A + B$
	$(A \,\$\, \overline{B}) \cdot B = A \cdot B$	$(A \cdot \overline{B}) \,\$\, B = A + B$
Minimierung	$(A \cdot B) + (A \cdot \overline{B}) = A$	$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$

5.1.4 DeMorgan (Gatter ändern) / Shannon (Schaltung invertieren)

DeMorgan

Alle Eingänge und Ausgang invertieren;
Operator tauschen

$(x_0 + x_1) = \overline{(\overline{x_0} \cdot \overline{x_1})}$

$(x_0 \cdot x_1) = \overline{(\overline{x_0} + \overline{x_1})}$

Shannon

Alle Eingänge der ganzen Schaltung plus Ausgang invertieren;
Operatoren tauschen

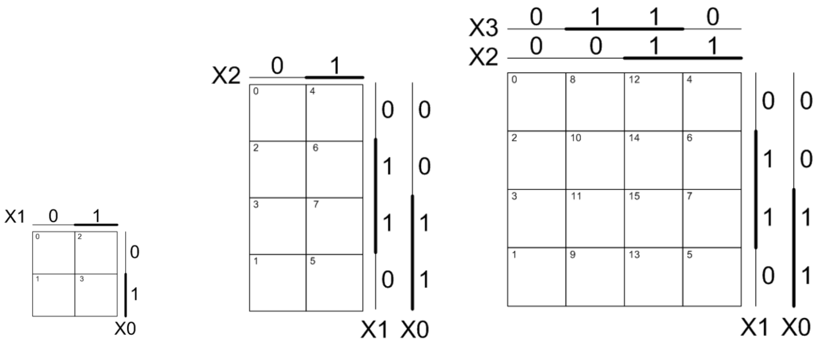
$\overline{f(x_0,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k;\, +,\, *)}$

$= f(\overline{x_0},\, \overline{x_1},\, \overline{x_2},\, \ldots,\, \overline{x_k};\, *,\, +)$

5.2 Karnaugh-Diagramme

- ein Diagramm pro Ausgangssignal
- möglichst grosse Gruppen aus Vielfachheiten von 2
- Gruppen dürfen über Rand hinaus gehen
- Feld darf mehrfach verwendet werden

5.2.1 Vorlagen KV-Diagramme



5.3 KKNF / KDNF

KKNF: Kanonische Konjunktive Normalform 0er Gruppen
Eingangssignal 0 → positiv

KDNF: Kanonische Disjunktive Normalform 1er Gruppen
Eingangssignal 1 → positiv

Minterm (KDNF): Konjunktion (AND-Verknüpfung) aller Eingangsvariablen in einer Zeile der WHT

Maxterm (KKNF): Disjunktions (OR-Verknüpfung) aller Eingangsvariablen in einer Zeile der WHT

5.3.1 Beispiel KV-Diagramme / WHT / KNF / DNF

KDNF:
OR – Verknüpfung der Minterme

KKNF:
AND – Verknüpfung der Maxterme

A	B	C	Ergebnis	Term
0	0	0	0	$A+B+C$
0	0	1	0	$A+B+\overline{C}$
0	1	0	1	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$
0	1	1	1	$\overline{A}\cdot B\cdot C$
1	0	0	0	$\overline{A}+B+C$
1	0	1	1	$A\cdot\overline{B}\cdot C$
1	1	0	0	$\overline{A}+\overline{B}+C$
1	1	1	1	$A\cdot B\cdot C$

$$DNF:(\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C})+(\overline{A}\cdot B\cdot C)+(A\cdot\overline{B}\cdot C)+(A\cdot B\cdot C)$$

$$KNF:(A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

Schaltungsrealisierung

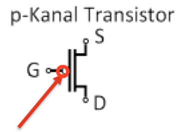
Zweistufige Logik:

- KDNF: 1. Stufe AND / 2. Stufe OR
- KKNF: 1. Stufe OR / 2. Stufe AND

6 CMOS-Technologie

6.1 Grundbausteine

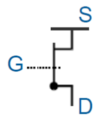
p-Kanal Transistor (p-FET)



(FET: Field Effect Transistor)

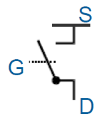
Schalter leitend (geschl.) für Logikpegel L am Eingang

Logikpegel:
G = L
D = H

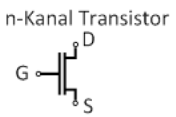


Schalter sperrt (offen) für Logikpegel H am Eingang

Logikpegel:
G = H
D = U

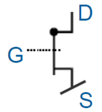


n-Kanal Transistor (n-FET)



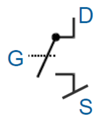
Schalter leitend (geschl.) für Logikpegel H am Eingang

Logikpegel:
G = H
D = L



Schalter sperrt (offen) für Logikpegel L am Eingang.

Logikpegel:
G = L
D = U



6.2 Vorteile / Nachteile CMOS-Gatter

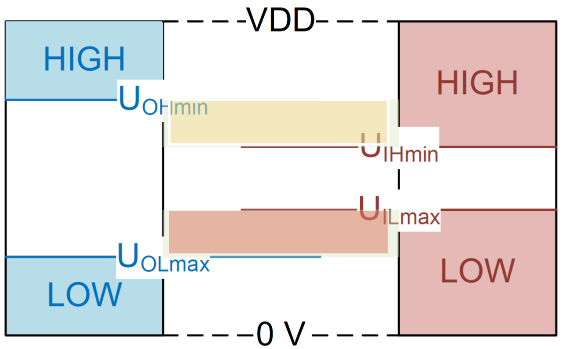
- \+ Kein statischer Stromverbrauch
- \+ Symmetrisches Schaltverhalten
- \+ Hohe Störsicherheit (⇒ Störabstand)
- \+ Heute gebräuchliche und ideale Form für Hochintegration
- (−) Braucht mehr Transistoren als z.B. n-MOS

6.3 Eigenschaften von CMOS-Gattern

6.3.1 Gatteräquivalente

Mass für Komplexität eines Gatters / einer Schaltung
1 Gatteräquivalent entspricht 4 Transistoren

6.3.2 Pegelbereiche

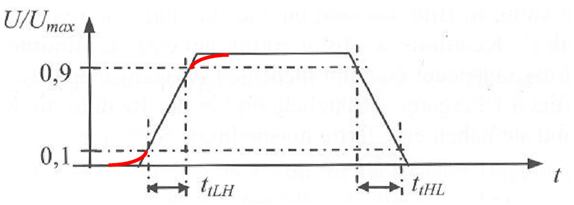


Störabstand

$U_{nH} = U_{OH\,min} - U_{IH\,min}$

$U_{nL} = U_{IL\,max} - U_{OL\,max}$

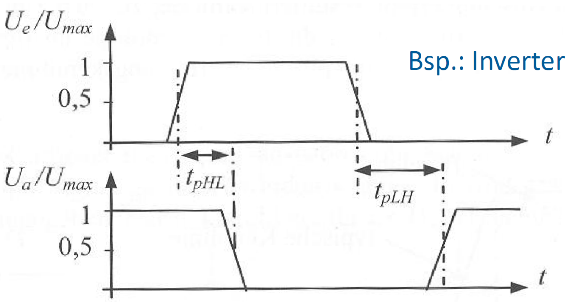
6.3.3 Schaltzeit t_t (transition time)



Zeit zwischen 10% und 90% von V_{max} am Ausgang

t_{tLH}: LOW to HIGH
t_{tHL}: HIGH to LOW

6.3.4 Verzögerungszeit t_p (propagation delay)



Zeit zwischen 50% von V_{max} am Eingang und 50% von V_{max} am Ausgang

6.3.5 Fan Out

Anzahl Gatter, die mit dem Ausgang eines Gatters verbunden werden darf ohne die Spezifikationen zu verletzen.

7 Sequentielle Systeme

- Zustandsbehaftet (Speicher, um aktuellen Zustand zu merken)
- Vergangenes Verhalten **und** Eingänge bestimmen momentanen Zustand und Ausgänge

7.1 Takt = clock (clk)

Koordination der Funktionen einer sequentiellen Schaltung

Periode T	$T = T_{ON} + T_{OFF}$	T_{ON} = Impulsdauer
Frequenz f	$f = \frac{1}{T}$	
Duty Cycle	$\frac{T_{ON}}{T}$	häufig in % angegeben

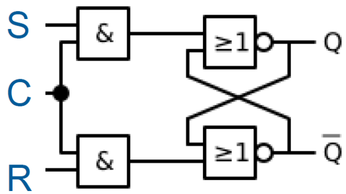
7.1.1 synchron vs. asynchron

synchron:	Zustandswechsel findet mit **Flanke** von clk statt
asynchron:	Zustandswechsel kann jederzeit stattfinden (solange clk-Eingang aktiv ist)

7.2 Hardware Grundelemente

7.2.1 Taktzustandsgesteuertes RS-Latch

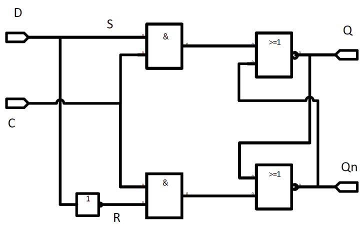
Solange Clock-Eingang C HIGH ist:



R	S	Q_{n+1}	$\overline{Q_{n+1}}$	Kommentar
0	0	Q_n	$\overline{Q_n}$	speichern
0	1	1	0	setzen
1	0	0	1	löschen
1	1	0	0	undefiniert

7.2.2 D-Latch

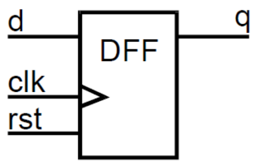
Verunmöglichung des undefinierten Zustands



rst	d	clk	Q_{n+1}	Kommentar
0	X	0	Q_n	speichern
0	0	1	0	löschen
0	1	1	1	setzen
1	X	X	0	Reset asynch.

7.2.3 D-FlipFlop

Taktflankengesteuertes D-FlipFlop (speichert 1 Bit)
Aus Master-Slave Strukturen mit Transmission Gates aufgebaut



rst	d	clk	Q_{n+1}	Kommentar
0	X	(↓)	Q_n	speichern
0	0	↑	0	löschen
0	1	↑	1	setzen
1	X	X	0	Reset asynch.

7.3 Speicher Grundelemente

Speicher sind generell als zweidimensionale Arrays aufgebaut

- ROM (Read only Memory) → Fest verdrahtete WHT
- RAM (Random Access Memory) → lesen und schreiben
  - SRAM (Static RAM) → speichert solange Speisung
  - DRAM (Dynamic RAM) → regelmässige Auffrischung

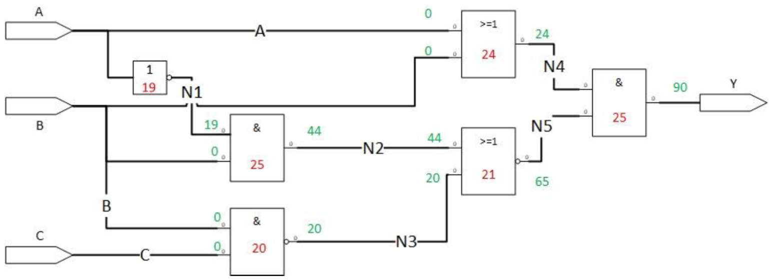
7.4 Setup-Time t_{su} / Hold-Time t_h

t_{su} min. Zeitspanne, während der ein Datensignal vor einer aktiven clk-Flanke stabil sein muss

t_h min. Zeitspanne, während der ein Datensignal nach einer aktiven clk-Flanke noch stabil bleiben muss

7.5 Längsten Pfad ermitteln (Signallaufzeit)

1. Eingänge mit Zeit 0 beschriften; t_p in Gates schreiben
2. Gates mit beschrifteten Eingängen: Ausgang des Gates mit $\max\{Eingang\} + t_p$ beschriften
3. wenn noch unbeschriftete Eingänge vorhanden: Schritt 2
4. $t_{längsterPfad} = max\{Ausgänge\}$
   sequentielle Schaltung: Ausgang 1. FF bis Eingang letztes FF



7.5.1 maximale Taktfrequenz f_{clkMAX} (sequentielle Schaltungen)

$T_{Zyklus} = t_{p(FFanfang)} + t_{LängsterPfad} + t_{su(FFausgang)}$

$f_{clkMAX} = \frac{1}{T_{Zyklus}}$

7.6 Zustandscodierungen

7.6.1 Binäre Codierung

Zustände werden der Reihe nach binär durchnummeriert
Spezielfall Grey-Code: Es wechselt immer nur ein Bit

# Speicherstellen k	$k = \lceil \log_2(p) \rceil = \lceil \frac{\log_{10}(p)}{\log_{10}(2)} \rceil$
# Zustände p	$p \leq 2^k$
# mögl. Zustandscodierungen q	$q = \frac{(2^k)!}{(2^k-p)!}$

7.6.2 ONE-HOT Codierung

Pro Code hat genau ein Bit den Wert 1. Alle anderen Bits sind 0

# Speicherstellen k (Zustände p)	$k = p$
# mögl. Zustandscodierungen q	$q = p!$

7.6.3 ONE-COLD Codierung

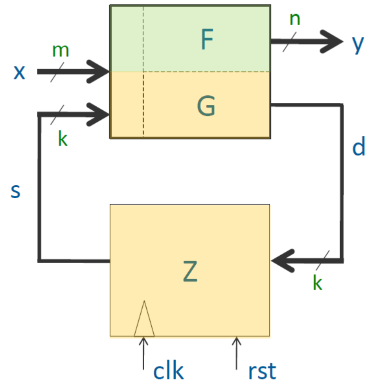
Pro Code hat genau ein Bit den Wert 0. Alle anderen Bits sind 1
⇒ ONE-HOT und ONE-COLD Coldierungen werden vor allem bei zeitkritischen Systemen (FPGA) eingesetzt

8 Finite State Machine (endl. Zustandsautomaten)

Endliche Anzahl Zustände, Zustandsübergänge und Aktionen.

8.1 Grundstruktur FSM

Signale:
Eingangsvektor: x (primäre Eingänge)
Anzahl Eingänge: m
Ausgangsvektor: y
Anzahl Ausgänge: n
Zustandsvektor: s
Folgezustand: d
Memory:
Zustandsspeicher: Z
Anzahl Speicherstellen: k
Kombinatorische Logik:
Funktion für Ausgänge: F
Funktion für Speicheransteuerung: G

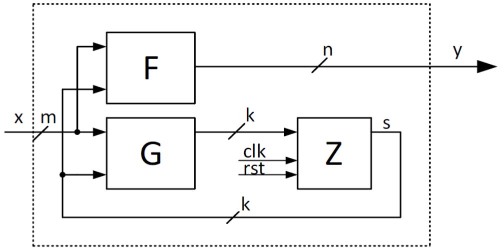


8.2 Systeme von FSM

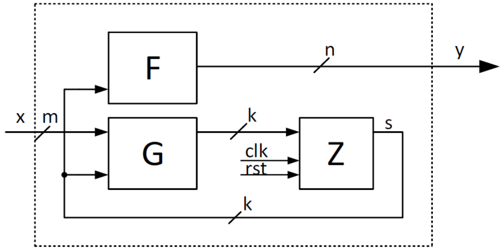
Mealy $y[i] = F(x[i], s[i])$ $d[i] = s[i+1] := G(x[i], s[i])$

Moore $y[i] = F(s[i])$ $d[i] = s[i+1] := G(x[i], s[i])$

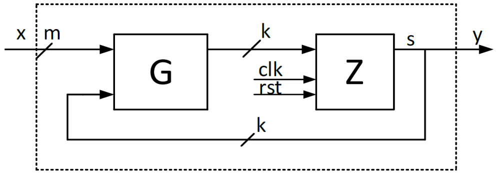
Medwedjew $y[i] = s[i] := G(x[i-1], s[i-1])$
$d[i] = s[i+1] := G(x[i], s[i])$



Mealy-System



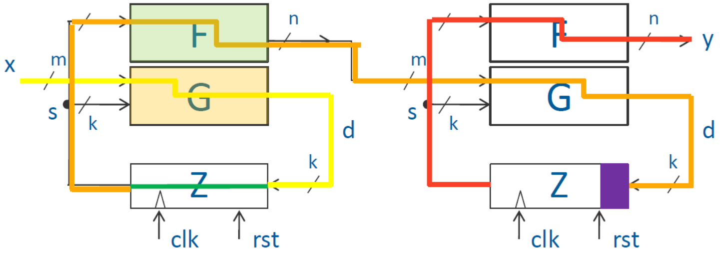
Moore-System



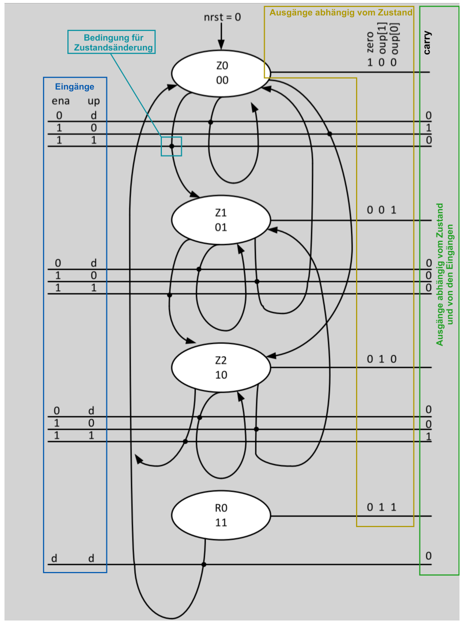
Medwedjew-System

8.3 Zykluszeit T einer FSM

Moore: $T_{Zyklus} = t_{p(FFz1)} + t_{LängsterPfad} + t_{su(FFz2)}$



8.4 Zustandsdiagramm (Handmethode) / Realisierung in Hardware



Zustandsdiagramm erstellen

1. Zustände zeichnen und benennen
2. Initialzustand bestimmen
3. Eingänge systematisch auflisten
4. Zustandsübergänge bestimmen
5. Ausgänge einzeichnen

Sequentielles System in HW realisieren

1. Zustandsdiagramm aufstellen
2. Zustandscodierung zuweisen
3. Zustandstabelle aus Zustandsdiagramm erstellen
4. Speicheransteuer-Funktion bestimmen (KV-Diagramm)
5. Ausgangs-Funktion bestimmen (KV-Diagramm)

Wichtig: Zustandswechsel passieren immer erst mit der nächsten aktiven Taktflanke! Die Ausgänge können aber kombinatorisch (sofort) umschalten

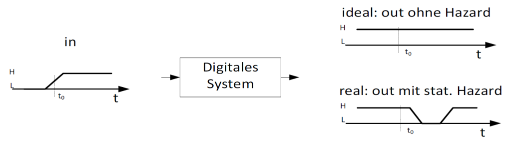
8.5 Zustandstabelle

Dezimal	Aktueller Zustand (Name)	(Code) s1	s0	Eingangsvar. ena	up	Folgezustand (Name)	(Code) d1	d0	Ausgangsvariablen oup[1]	oup[0]	zero	carry
0,1	Z0	0	0	0	d	Z0	0	0	0	0	1	0
2				1	0	Z2	1	0				1
3				1	1	Z1	0	1				0
4,5	Z1	0	1	0	d	Z1	0	1	0	1	0	0
6				1	0	Z0	0	0				0
7				1	1	Z2	1	0				0
8,9	Z2	1	0	0	d	Z2	1	0	1	0	0	0
10				1	0	Z1	0	1				0
11				1	1	Z0	0	0				1
12-15	R0	1	1	d	d	Z0	0	0	1	1	0	0

8.6 Hazards

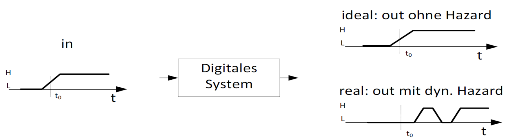
8.6.1 statische Hazards

Ausgang sollte nicht ändern, ändert aber kurzzeitig

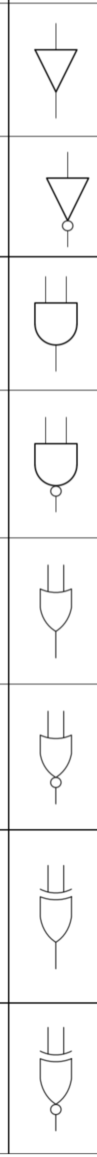
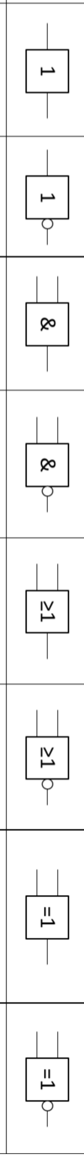
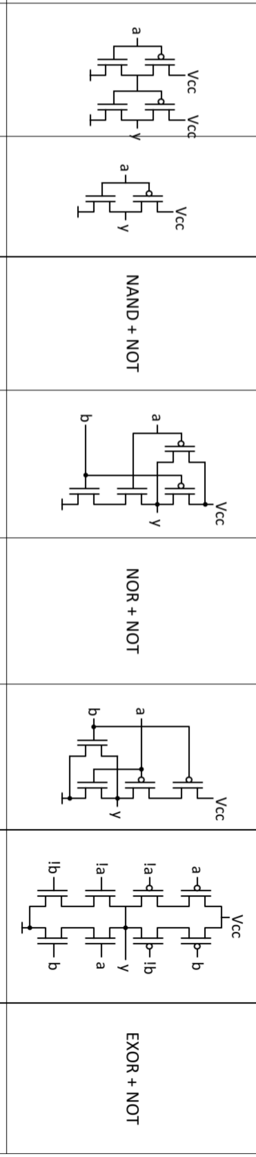


8.6.2 dynamische Hazards

Ausgang sollte einen Übergang zeigen, zeigt aber mehrere, bis er stabil wird



9 Übersicht Logikgatter

Funktion	Buffer	NOT Nicht Inverter	AND UND Konjunktion	NAND NICHT UND	OR ODER Disjunktion	NOR NICHT ODER	EXOR EXKLUSIV ODER Antivalenz	XNOR NICHT EX. ODER Äquivalenz
Formel	a a a	$\overline{a}$ $\neg a$ $!a$	$a \cdot b$ $a \wedge b$ $a\&b$	$\overline{a \cdot b}$ $\overline{a \wedge b}$ $!(a\&b)$	$a + b$ $a \vee b$ $a\#b$	$\overline{a + b}$ $\overline{a \vee b}$ $!(a\#b)$	$a \oplus b$ $a \underline{\vee} b$ $a\$b$	$\overline{a \oplus b}$ $\overline{a \underline{\vee} b}$ $!(a\$b)$
Symbol IEEE Std 91-1984 (distinctive-shape) 								
IEEE Std 91-1984 (rectangular-shape) 	1	1	&	&	≥1	≥1	=1	=1
CMOS-Realisierung 			NAND + NOT		NOR + NOT			EXOR + NOT
Wahrheitstabelle [a,b] = [0,0]	0	1	0	1	0	1	0	1
[a,b] = [0,1]			0	1	1	0	1	0
[a,b] = [1,0]	1	0	0	1	1	0	1	0
[a,b] = [1,1]			1	0	1	0	0	1
Kurzschreibweise KDNF	#(1)	#(0)	#(3)	#(1,2,3)	#(1,2,3)	#(0)	#(1,2)	#(0,3)
Kurzschreibweise KKNF	&(0)	&(1)	&(0,1,2)	&(3)	&(0)	&(1,2,3)	&(0,3)	&(1,2)
CHDL-Ausdruck	a	NOT a	a AND b	a NAND b	a OR b	a NOR b	a XOR b	a XNOR b
Anz. Transistoren	4	2	6	4	6	4	8	10