Physik

Sammlung, gegliedert nach Modul

Fabian Suter, 1. Dezember 2023

`https://github.com/FabianSuter/Physik.git`

1 Statik

1.1 Schwerkraft (Gewichtskraft)

$$\boxed{\text{Allgemein:} \quad F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$

$$\boxed{\text{Erde:} \quad F_G = G \cdot \frac{m_E \cdot m}{r_E^2} = m \cdot g}$$

F_G	Gewichtskraft	$[F_G] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = \text{N}$
G	Gravitationskonstante	$6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$
m_i	Massen der Körper	$[m] = \text{kg}$
r	Abstand der Massen	$[r] = \text{m}$
g	Erdbeschleunigung	$9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
m_E	Masse der Erde	$5.972 \cdot 10^{24}$ kg
r_E	Erdradius	$6.378 \cdot 10^6$ m

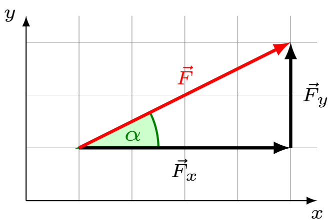
1.2 Normalkraft (Kontaktkraft)

(Sekundär-) Kraft, welche sich so anpasst, dass in Ruhe ein Kräftegleichgewicht herrscht:

$\boxed{F_G = -F_N}$ $\Rightarrow$ im Gleichgewicht auf horizontaler Oberfläche

1.3 Zerlegung von Kräften

Kraftvektoren kann man komponentenweise aufteilen:



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_Z$$

hilfreich beim Lösen von Aufgaben!

1.4 Gleichgewichtsbedingungen für Massepunkte

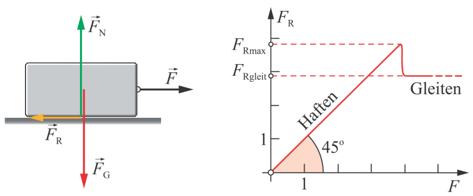
Der Massepunkt erfährt keine Beschleunigung
$\Rightarrow$ Summe aller wirkenden Kräfte ist 0

$$\boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \qquad \Rightarrow \text{komponentenweise}}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_x = \vec{0} \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_y = \vec{0} \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_z = \vec{0}}$$

1.5 Haftreibung / Gleitreibung

1.5.1 Trockene Festkörperreibung



$$\boxed{\text{Haftreibung:} \quad \vec{F}_{R,max} = \mu_H \cdot \vec{F}_N}$$

$$\boxed{|\vec{F}_R| \leq |\vec{F}_{R,max}|}$$

$$\boxed{\text{Gleitreibung:} \quad \vec{F}_{Gleit} \approx \mu_G \cdot \vec{F}_N}$$

$\vec{F}_R$	Reibungskraft	$[\vec{F}_R] = \text{N}$
$\vec{F}_{R,max}$	Haftreibungskraft	$[\vec{F}_{R,max}] = \text{N}$
$\vec{F}_{Gleit}$	Gleitreibungskraft	$[\vec{F}_{Gleit}] = \text{N}$

1.5.2 Viskose Reibung

Sobald Schmiermittel zum Einsatz kommen, ist die Reibungskraft abhängig von der Grösse der Berührungsfläche:

Bei gleicher Normalkraft $\vec{F}_N$ ist bei

- kleinerem Flächendruck die Reibung kleiner
- grösserem Flächendruck die Reibung grösser

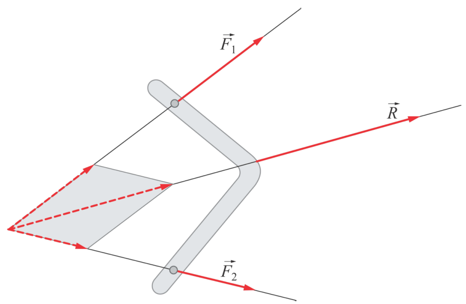
1.6 Starre Körper

- Ein starrer Körper wird durch angreifende Kräfte nicht deformiert
- Bei einem starren Körper kann die Kraft entlang ihrer Wirkungslinie beliebig verschoben werden

1.7 Addition von Kräften

1.7.1 Spezialfall: Ebene Kräftegruppe für schiefe Wirkungslinie

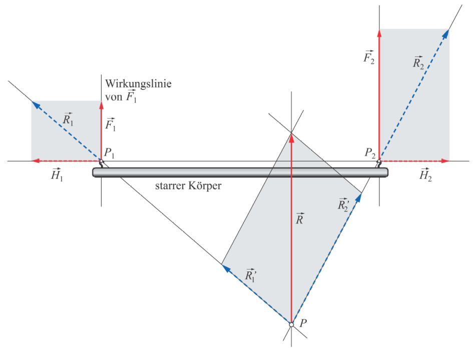
Kräfte entlang ihrer Wikungslinie verschieben
$\Rightarrow$ Im Schnittpunkt vektorielle Addition der Kräfte durchführen, um die resultierende Kraft zu erhalten.



Dieses Verfahren kann auch mehrfach angewendet werden!

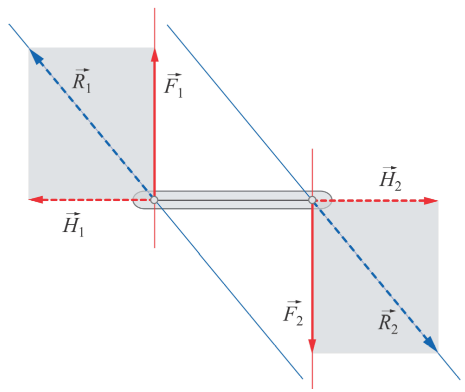
1.7.2 Spezialfall: Ebene Kräftegruppe für parallele Wirkungslinie

Zwei sich zu null addierende Hilfskräfte hinzufügen ($\vec{H}_1$, $\vec{H}_2$)



1.7.3 Spezialfall: Ebene Kräftegruppe für parallel, entgegengesetzt und gleich grosse Kräfte

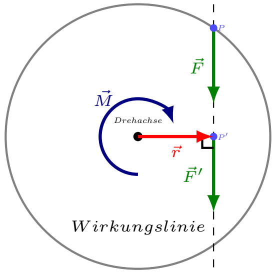
Kräftepaare können in andere Kräftepaare umgewandelt werden, aber <u>niemals zu einer</u> resultierenden Kraft $\vec{R}$ vereinfacht werden.



1.8 Drehmoment

Eine Drehwirkung auf einen starren Körper lässt sich auf zwei verschiedene Arten und Weisen erzeugen:

- Kräftepaar
- einzelne Kraft und Bezugspunkt (Drehzentrum)



$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = a \cdot |\vec{F}|$$

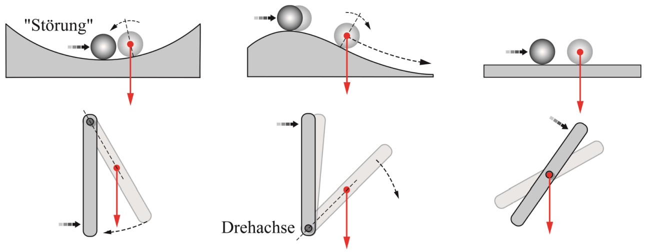
Die Länge a muss **senkrecht** zur wirkenden Kraft sein!

$\vec{M}$	Drehmoment	$[M] = \mathrm{Nm}$
$\vec{r}$	Abstandsvektor	$[r] = \mathrm{m}$
$\vec{F}$	Angreifende Kraft	$[F] = \mathrm{N}$

1.9 Gleichgewichtsbedungungen für starre Körper

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \qquad \sum_{i=1}^{m} \vec{M}_i = \vec{0} \qquad \Rightarrow \text{komponentenweise}$$

1.10 Gleichgewichts-Arten



stabil — labil — indifferent

1.11 Deformierbare Körper

1.11.1 Spannungen

Zugspannung σ

senkrecht wirkende Kraft pro Flächeneinheit
Wenn $\sigma < 0$ spricht man von **Druck**

$$\boxed{\sigma = \frac{F_\perp}{A}} \qquad [\sigma] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Schubspannung τ (Scherung)

parallel wirkende Kraft pro Flächeneinheit

$$\boxed{\tau = \frac{F_{\parallel}}{A}} \qquad [\tau] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

1.11.2 Dehnung ϵ (Hook'sches Gesetz)

$$\boxed{\epsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma = \frac{1}{E} \cdot \frac{F_\perp}{A} = \frac{\Delta l}{l}}$$

ϵ	Dehnung	$[\epsilon] = 1$
E	Elastizitätsmodul (Materialeigenschaft)	$[E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$
l	Länge des Körpers vor Dehnung	$[l] = \mathrm{m}$
Δl	Längenunterschied bei Dehnung	$[\Delta l] = \mathrm{m}$
σ	Zugspannung	$[\sigma] = \mathrm{N}$
A	Querschnittsfläche	$[A] = \mathrm{m}^2$

⇒ **Das Hook'sche Gesetz gilt nur, solange die Deformation linear-elastisch ist!**

1.11.3 Querkontraktion ϵ_q

Wird ein Stab gedehnt (länger), so wird er automatisch auch dünner

$$\boxed{\epsilon_q = \frac{\Delta d}{d} = -\mu\,\epsilon} \qquad \mu \in (0\,;\,0.5)$$

ϵ_q	Querkontraktion	$[\epsilon_q] = 1$
d	Ursprüngliche Dicke des Materials	$[d] = \mathrm{m}$
Δd	Dicken-Änderung	$[\Delta d] = \mathrm{m}$
ϵ	(Längs-) Dehnung	$[\epsilon] = 1$
μ	Poisson-Zahl (Materialeigenschaft)	$[\mu] = 1$

1.11.4 Kompression $\frac{\Delta V}{V}$

Ein Körper wird von allen Seiten mit dem gleichen Druck belastet, sodass sich sein Volumen verkleinert

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \cdot \Delta p} \qquad \left(K = \frac{1}{\kappa}\right)$$

V	Ursprüngliches Volumen des Körpers	$[V] = \mathrm{m}^3$
ΔV	Volumenänderung	$[\Delta V] = \mathrm{m}^3$
κ	Kompressibilität	$[\kappa] = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{N}}$
Δp	Druckänderung	$[\Delta p] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}$

$$\boxed{\text{Würfel:} \quad \Rightarrow \kappa = \frac{3}{E}(1 - 2\,\mu)}$$

Völlig inkompressibler Körper: $\kappa = 0 \qquad K = \infty \qquad \mu = 0.5$

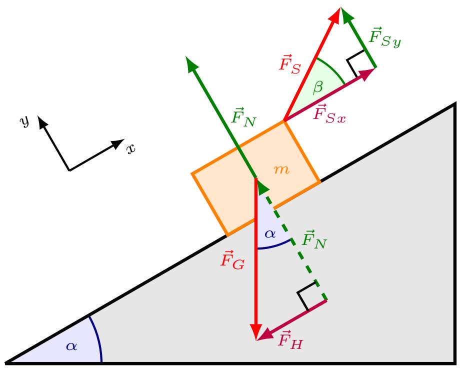
1.11.5 Schubbeanspruchung (Scherung)

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{G}\,\tau}$$

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad \text{(gilt für isotrope Materialen)}}$$

γ	Scherwinkel	$[\gamma] = {}^\circ$
G	Schubodul; Gleitmodul; Torsionsmodul	$[G] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$
τ	Schubspannung	$[\tau] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$
E	Elastizitätsmodul (Materialeigenschaft)	$[E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$
μ	Poisson-Zahl (Materialeigenschaft)	$[\mu] = 1$

1.12 Schiefe Ebene (mit Seil)



Wichtige Formeln und Zusammenhänge zur schiefen Ebene

$F = m \cdot a \qquad F_G = m \cdot g$

$F_N = m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \qquad F_H = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$

1.13 Rezept: Aufgaben zur Statik lösen

1. Koordinatensystem festlegen
2. Alle wirkenden Kräfte einzeichnen
3. Bezugspunkt P (Drehpunkt) festlegen
   ⇒ **Da wo viele Kräfte** (oder da wo sinnvoll)
4. Kräfte komponentenweise aufschreiben: $\sum \vec{F}_i = 0$
5. Drehmomente M aufschreiben und gleichsetzen: $\overleftarrow{M} = \overrightarrow{M}$

2 Kinematik

2.1 Geradlinige Bewegung (1D)

Die Bewegung erfolgt entlang einer Gerade (keine Richtungsänderung)

$$x(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} v(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} a(t) \qquad x(t) \xleftarrow{\int dt} v(t) \xleftarrow{\int dt} a(t)$$

2.1.1 Weg $x(t)$

Weg mit Zeit parametrisiert: $x = x(t)$

2.1.2 Geschwindigkeit $v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

momentane Geschw.: $\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t)$ (Tangente)

mittlere Geschw.: $\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$ (Sekante)

2.1.3 Beschleunigung $a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

momentane Beschleunigung: $\frac{d}{dt}v(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$

mittlere Beschleunigung: $\overline{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$

2.1.4 Ruck $j(t)$

Änderung der Beschleunigung pro Zeiteinheit: $j(t) = \dot{a}(t) = \dddot{x}(t)$

2.2 Gleichförmige Bewegung $a(t) = 0$

$a(t) = 0$

$v(t) = v_0 = \text{const}$

$x(t) = v_0 \cdot t + x_0$

2.3 Gleichm. beschleunigte Bewegung $a(t) = $ konst

Allgemein:

$a(t) = a_0 = \text{const}$

$v(t) = a_0 \cdot t + v_0$

$x(t) = \frac{1}{2}\, a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$

Anwendungsfall: Freier Fall

$a(t) = -g = \text{const}$

$v(t) = -g \cdot t$

$x(t) = -\frac{1}{2}\, g \cdot t^2 + h_0$

2.3.1 Höchsten Punkt x_{max} finden (Extremum)

Im Extremalpunkt gilt: $\frac{d}{dt}x(t) = v(t) \stackrel{!}{=} 0$

$0 \stackrel{!}{=} v(t_{max}) = -g \cdot t_{max} + v_0 \qquad \Rightarrow t_{max} = \frac{v_0}{g}$

Durch einsetzen von t_{max} in $x(t)$ erhält man die maximale Höhe:
$x(t_{max}) = -\frac{1}{2}\, g \cdot t_{max}^2 + v_0 \cdot t_{max} + h_0 = -\frac{v_0^2}{2\, g} + \frac{v_0^2}{g} + h_0$

2.4 Beliebige Bewegung (2D)

2.4.1 Geschwindigkeit (tangential zur Bahnkurve)

momentane Geschw.: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \frac{d}{dt}\vec{r} = \dot{\vec{r}}$

mittlere Geschw.: $\overline{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$

Betrag: $v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d}{dt} s$

2.4.2 Beschleunigung

momentane Beschl.: $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \ddot{\vec{r}}$

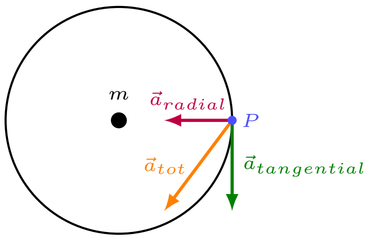
mittlere Beschl.: $\overline{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

Die Beschleunigung kann ungleich null sein, auch wenn der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist

2.5 Bahnkurven

Die Geschwindigkeitsänderung in einer Bahnkurve wird in zwei Komponenten aufgeteilt:
$\Delta \vec{v}_{radial}$ und $\Delta \vec{v}_{tangential}$

Der tangentiale Anteil ändert ausschliesslich den Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}|$
Der radiale Anteil ändert ausschliessich die Richtung der Geschwindigkeit $\vec{v}$



$a_{tangential} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$

$a_{radial} = \frac{v^2}{r}$

$$\boxed{F_{zentripetal} = m\,\frac{v^2}{r}}$$

2.6 Gleichförmige Bewegung $a_{tangential} = 0$

tangential (Tacho)

$a_{tangential} = 0$

$v(t) = v_0 = \text{const}$

$s(t) = v_0 \cdot t + s_0$

radial

$a_{radial} = \frac{v^2}{r}$

2.7 Gleichm. beschl. Bewegung $a_{tangential} = $ konst

tangential (Tacho)

$a_{tangential} = a_0 = \text{const}$

$v(t) = a_{tangential} \cdot t + v_0$

$s(t) = \frac{1}{2}\, a_{tangential} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$

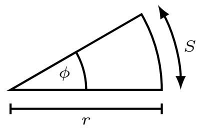
radial

$a_{radial} = \frac{v^2}{r}$

Die Gesamtbeschleunigung eines Systems $\vec{a}_{tot} = \vec{a}_{tangential} + \vec{a}_{radial}$ muss nicht zwingend konstant sein! Bei Änderungen der Richtung ändert die Gesamtbeschleunigung.

2.8 Kreisbewegung

2.8.1 Winkel ϕ (zurückgelegter Weg)



$$\boxed{\text{Radiant: } \phi = \frac{s}{r}}$$

2.8.2 Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\phi}{t}$

$\omega := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$

Der Betrag v der (Bahn-) Geschwinndigkeit entspricht: $v = r \cdot \omega$

Umlaufzeit, Periode T — Umlaufzeit für vollständige Umdrehung

Drehzahl, Drehfrequenz f — inverse Umlaufzeit $f = \frac{1}{T}$

Wichtige Umrechnungsformeln

$v = r \cdot \omega$	$\Leftrightarrow$	$\omega = \frac{v}{r}$
$f = \frac{1}{T}$	$\Leftrightarrow$	$T = \frac{1}{f}$
$\omega = \frac{2\,\pi}{T}$	$\Leftrightarrow$	$T = \frac{2\,\pi}{f}$
$\omega = 2\,\pi\, f$	$\Leftrightarrow$	$f = \frac{\omega}{2\,\pi}$

2.8.3 Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{\omega}{t}$

$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\,\phi}{dt^2}\ddot{\phi}$

$a_{tangential} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} r \cdot \omega = r \cdot \alpha$

2.9 Gleichförmige Kreisbewegung

$\alpha(t) = 0$

$\omega(t) = \omega_0 = \text{const}$

$\phi(t) = \omega_0\, t + \phi_0$

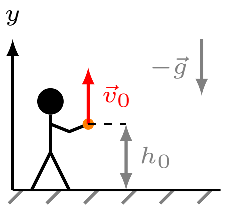
2.10 Gleichm. beschleunigte Kreisbewegung

$\alpha(t) = \alpha_0 = \text{const}$

$\omega(t) = \alpha_0 \cdot t + \omega_0$

$\phi(t) = \frac{1}{2}\,\alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \phi_0$

2.11 Senkrechter Wurf



$a = -g = \text{const}$

$v(t) = -g \cdot t + v_0$

$h(t) = -\frac{1}{2}\,g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0$

2.11.1 Maximale Flughöhe h_{max} bestimmen

Bei der maximalen Flughöhe h_{max} gilt: $v(t) \stackrel{!}{=} 0$

$v_0 - g \cdot t_{max} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_{max} = \frac{v_0}{g}$

Nun wird t_{max} in $h(t)$ eingesetzt:

$$h_{max} = h(t_{max}) = -\frac{g}{2}\,\frac{v_0^2}{g^2} + v_0\,\frac{v_0}{g} + h_0 = \frac{v_0^2}{2\,g} + h_0$$

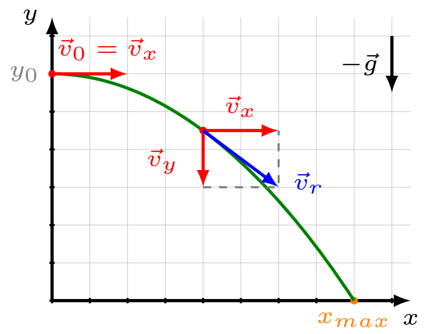
Hinweis: Die maximale Flughöhe kann auch über die potentielle und kinetische Energie berechnet werden!

$E_{kin} \stackrel{!}{=} 0 \qquad E_{pot} \stackrel{!}{=} m \cdot g \cdot h_{max}$

$\frac{1}{2}\,m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h_{max} \quad \Rightarrow \quad h_{max} = \frac{m\,v^2}{2\,m\,g} = \frac{v^2}{2\,g}$

$\Rightarrow$ für abgeschlossene Systeme!

2.12 Horizontaler Wurf



Der horizontale Wurf muss komponentenweise beschrieben werden
x-Achse: gleichförmige, unbeschleunigte Bewegung
y-Achse: gleichmässig beschleunigte Bewegung

x-Achse	**y-Achse**
$a_x = 0$	$a_y = -g$
$v_x = v_0$	$v_y = -g \cdot t$
$x = v_0 \cdot t + x_0$	$y = -\frac{1}{2}\,g \cdot t^2 + y_0$

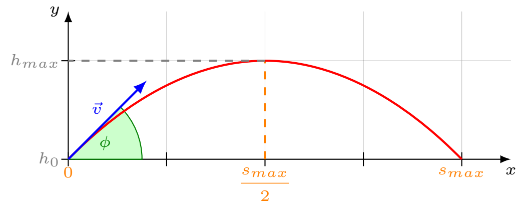
Tipp: Lege den Koordinatenursprung in den Abwurf-Ort

2.12.1 Beschreibung der Flugbahn (Eliminierung von t)

Die y-Koordinate soll als Funktion der x-Koordinate ausgedrückt werden: $y = f(x)$

$$x = v_0\,t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{x}{v_0} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}\,g \cdot t^2 = -\frac{g}{2}\,\frac{x^2}{v_0^2} = y(x)$$

2.13 Schiefer Wurf



Der schiefe Wurf muss komponentenweise beschrieben werden
x-Achse: gleichförmige, unbeschleuigte Bewegung
y-Achse: gleichmässig beschleunigte Bewegung

x-Achse	**y-Achse**
$a_x = 0$	$a_y = -g$
$v_x = v_0 \cdot \cos(\phi)$	$v_y = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin(\phi)$
$x = v_0 \cdot \cos(\phi) \cdot t + x_0$	$y = -\frac{1}{2}\,g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\phi) \cdot t + y_0$

Tipp: Lege den Koordinatenursprung in den Abwurf-Ort

2.13.1 Beschreibung der Flugbahn (Eliminierung von t)

Die y-Koordinate soll als Funktion der x-Koordinate ausgedrückt werden: $y = f(x)$

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(\phi) \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\phi)}$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{g}{2\,v_0^2 \cdot \cos^2(\phi)} \cdot x^2 + \tan(\phi) \cdot x = y(x)$$

2.13.2 Ansätze zur Bestimmung von Extrema

max. Wuftweite s_{max}: $y \stackrel{!}{=} 0 \quad (\phi \in \{45; 135\})$

$s_{max} = x_{max} \in \{0, \frac{2\,v_0^2}{g}\cos(\phi) \cdot \sin(\phi)\}$

Elevationswinkel: $\phi = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{g \cdot d}{v_0^2}\right) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{g \cdot x_{max}}{v_0^2}\right)$

max. Wurfhöhe: $v_y \stackrel{!}{=} 0$

$x_{maxHöhe} = h_{max} = \frac{s_{max}}{2} = \frac{x_{max}}{2}$

$y(x_{maxHöhe}) = \frac{v_0^2 \cdot sin^2(\phi)}{2\,g}$

3 Dynamik

3.1 Newtonsche Gesetze

Gesetze, welche Bewegungen beschreiben.

3.1.1 Erstes Newtonsches Gesetz: Trägheitsgesetz

Ein Körper verharrt in seine Zustand (Ruhe, gleichförmige geradlinige Bewegung), wenn er nicht durch eine Kraft gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Die **Trägheit** eines Körpers hängt von seiner (Trägheits-) Masse ab.

3.1.2 Zweites Newtonsches Gesetz: Aktionsgesetz

$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$

$\vec{F}$	Kraft	$[F] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$
m	(Trägheits-) Masse	$[m] = \text{kg}$
$\vec{a}$	Beschleunigung	$[a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$\Rightarrow$ Anwendung erfolgt meist komponentenweise!

3.1.3 Drittes Newtonsches Gesetz: Wechselwirkungsgesetz

Wirkt ein Körper A auf einen Körper B mit der Kraft $\vec{F}_{AB}$, so wirkt der Körper B auf A mit der Kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

3.2 Reibungskräfte

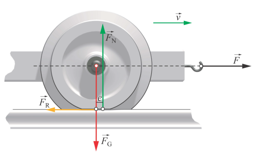
$$\boxed{\text{Haftreibung:}\quad \vec{F}_{R,max} = \mu_H \cdot \vec{F}_N}$$

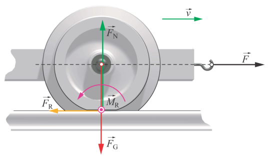
$$\boxed{\text{Gleitreibung:}\quad \vec{F}_{Gleit} \approx \mu_G \cdot \vec{F}_N}$$

$$\boxed{\text{Rollreibung:}\quad \vec{F}_{Roll} \approx \mu_R \cdot \vec{F}_N}$$

$\vec{F}_R$	Reibungskraft	$[\vec{F}_R] = \mathrm{N}$
$\vec{F}_{R,max}$	Haftreibungskraft	$[\vec{F}_{R,max}] = \mathrm{N}$
$\vec{F}_{Gleit}$	Gleitreibungskraft	$[\vec{F}_{Gleit}] = \mathrm{N}$

3.3 Rollreibungslänge e (Drehmoment)



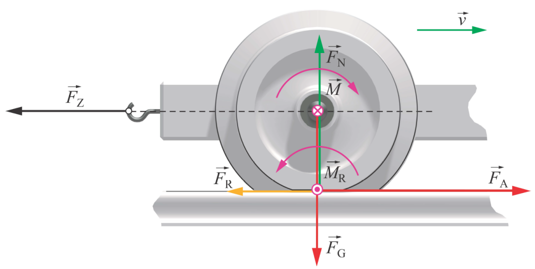


$$\boxed{e = \frac{r \cdot F}{F_N} = \frac{r \cdot F_R}{F_N} = \frac{r \cdot \mu_R \cdot F_R}{F_N} = \mu_R \cdot r}$$

$$\boxed{M_R = e \cdot F_N = \mu_R \cdot r \cdot F_N = r \cdot F_R = r \cdot F}$$

e	Rollreibungslänge	$[e] = \mathrm{m}$
r	Radius des Rades	$[r] = \mathrm{m}$
F_R	Rollreibungskraft	$[F_R] = \mathrm{N}$
F_N	Normalkraft	$[F_N] = \mathrm{N}$
μ_R	Rollreibungskoeffizient	$[\mu_R] = 1$
M_R	Rollreibungsmoment	$[M_R] = \mathrm{Nm}$

3.4 Angetriebenes Rad



$\vec{F}_Z$	Zugkraft	$[F_Z] = \mathrm{N}$
$\vec{F}_N$	Normalkraft	$[F_N] = \mathrm{N}$
$\vec{F}_R$	Rollreibungskraft	$[F_R] = \mathrm{N}$
$\vec{F}_A$	Haftreibungskraft	$[F_A] = \mathrm{N}$

3.4.1 Hinweise zu Reibung an Rädern

- Jedes Rad weist Rollreibung auf
- Zusätzlich zur Rollreibung weist ein angetriebenes Rad eine Haftreibung auf

3.5 Arbeit und Energie

3.5.1 Arbeit

Wird der Angriffspunkt einer Kraft $\vec{F}$ um die Strecke $d\vec{s}$ verschoben so leistet die Kraft die Arbeit W

$$\boxed{W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} \qquad \text{(Skalarprodukt)}}$$

Wenn die projizierte Kraft konstant ist: $\boxed{W = F \bullet s_{AB}}$

W	Arbeit	$[W] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{J}$
F	Kraft	$[F] = \mathrm{N}$
s	Weg	$[s] = \mathrm{m}$

3.5.2 Potentielle Energie W_{pot}

Beim Anheben eines Körpers gewinnt der Körper an potentieller Energie (Lageenergie)

$$\boxed{W_{pot} = m \cdot g \cdot h}$$

W_{pot}	Potentielle Energie	$[W] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{J}$
m	Masse des Körpers	$[m] = \mathrm{kg}$
g	Erdbeschleunigung	$[g] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
h	Höhe der Körpers	$[h] = \mathrm{m}$

Beispiel: Spannen einer Feder

Federkraft als Funktion der Auslenkung x $\qquad F = -k \cdot x$

$$\boxed{W_{pot} = \int_0^{x_0} -\vec{F} \bullet d\vec{x} = \int_0^{x_0} k \cdot x \, dx = \frac{1}{2} k \cdot x_0^2}$$

W_{pot}	Potentielle Energie	$[W] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{J}$
F	Federkraft	$[F] = \mathrm{N}$
k	Federkonstante	$[k] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$
x_0	Auslenkung der Feder	$[x_0] = \mathrm{m}$

3.5.3 Kinetische Energie W_{kin}

$$\boxed{W_{kin} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{s} = F \bullet s_{AB} = m\,a \cdot \frac{a}{2} t^2 = m \frac{a^2 \cdot t^2}{2} = \frac{1}{2} m \cdot v^2}$$

W_{kin}	Kinetische Energie	$[W] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{J}$
F	Kraft	$[F] = \mathrm{N}$
s	Wegstück (Kinematik)	$[s] = \mathrm{m}$
m	Masse des Körpers	$[m] = \mathrm{kg}$
a	Beschleunigung (Kinematik)	$[a] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
v	Geschwindigkeit (Kinematik)	$[v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

3.6 Energieerhaltung (in abgeschlossenen Systemen)

Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ist unveränderlich!

abgeschlossen: Es wird keine Masse hinzugefügt/entfernt und es wirken keine äusseren Kräfte!

$$\boxed{W = \underbrace{m \cdot g \cdot h}_{\text{pot. Energie}} = m \cdot g \cdot \underbrace{\frac{1}{2} g \cdot t^2}_{\text{h(t)}} = \underbrace{\frac{1}{2} m \cdot v^2}_{\text{kin. Energie}}}$$

Für nicht abgeschlossene Systeme kann eine Bilanzrechnung aufgestellt werden:
Die Energiezunahme im Gesamtsystem entspricht der von aussen zugeführten Energie.
Die Energieabnahme im Gesamtsystem entspricht der von aussen entzogenen Energie.

3.6.1 Energiesatz der Mechanik

$\boxed{E_{pot} + E_{kin} = E_{tot} = \text{const}}$ $\qquad$ (gilt zu jedem Zeitpunkt)

3.7 Leistung und Wirkungsgrad

3.7.1 Leistung

$$\boxed{P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \bullet \Delta\vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \bullet \vec{v}}$$

P	Leistung	$[P] = \mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$
ΔW	geleistete Arbeit	$[W] = \mathrm{J}$
Δt	verstrichene Zeit	$[t] = \mathrm{s}$
F	Kraft	$[F] = \mathrm{N}$
Δs	Wegstück	$[s] = \mathrm{m}$

Pferdestärken

$1\,\mathrm{PS} = 75\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 735.5\,\mathrm{W}$

3.7.2 Wirkungsgrad η

Faustregel: Je grösser eine Maschine, desto besser ihr Wirkungsgrad

$$\boxed{\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}} \qquad \eta < 1 \qquad [\eta] = 1$$

3.8 Impuls $\vec{p}$

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$$

2. Newton'sches Gesetz allgemeingültiger (relativistisch):

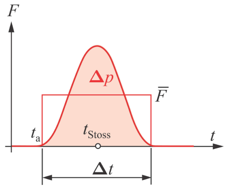
$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\,\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{d\,\vec{p}}{dt}}$$

$\vec{p}$	Impuls	$[\vec{p}] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$
m	Masse	$[m] = \text{kg}$
$\vec{v}$	Geschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
F	Kraft	$[F] = \text{N}$
$\vec{a}$	Beschleunigung	$[\vec{a}] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

3.8.1 Kraftstoss Δp

Ein Kraftstoss entspricht einer Impulsänderung und kann über die mittlere Kraft beschrieben werden.

$$\boxed{\int_{t_a}^{t_a+\Delta t} F(t)\,dt = \overline{F} \cdot \Delta t = \Delta p = p' - p}$$



$F(t)$	Kraftverlauf	$[F] = \text{N}$
$\overline{F}$	mittlere Kraft	$[\overline{F}] = \text{N}$
Δt	Zeitdauer des Kraftstosses	$[\Delta t] = \text{s}$
Δp	Impulsänderung	$[\Delta p] = \text{Ns}$
p	Impuls vor dem Stoss	$[p] = \text{Ns}$
p'	Impuls nach dem Stoss	$[p'] = \text{Ns}$
$\vec{a}$	Beschleunigung	$[\vec{a}] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

3.9 Impulserhaltungssatz (Impulssatz)

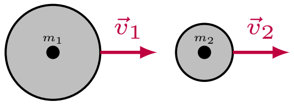
In einem **abgeschlossenen System** bleibt der Gesamtimpuls konstant
abgeschlossenes System: es wirken keine externen Kräfte

$$\boxed{\vec{p} = \int \underbrace{\frac{d\,\vec{p}}{dt}}_{F_{aussen}=0} dt = c = \text{const}}$$

3.10 Stösse

Elastizitätszahl: $k = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = -\frac{v_{rel}'}{v_{rel}} \geq 0$

Deformtionsarbeit: $Q = (E_1 + E_2) - (E_1' + E_2') \geq 0$



3.10.1 Gerader, zentraler, total elastischer Stoss

Die beiden Stosspartner verformen sich nicht!
⇒ Für die Deformationsarbeit gilt: $Q = 0$

Impulsatz: $p \stackrel{!}{=} p'$

$$m_1\,v_1 + m_2\,v_2 \stackrel{!}{=} m_1\,v_1' + m_2\,v_2'$$

Energiesatz: $E_{kin} \stackrel{!}{=} E_{kin}'$

$$\tfrac{1}{2}m_1\,v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\,v_2^2 \stackrel{!}{=} \tfrac{1}{2}m_1\,v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2\,v_2'^2$$

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2\,m}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

$$v_2' = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

3.10.2 Gerader, zentraler, total inelastischer Stoss

Die beiden Stosspartner haften nach dem Stoss aneinander und haben die gleiche Geschwindigkeit.
⇒ Für die Deformationsarbeit gilt: $Q \neq 0$

Impulssatz: $p \stackrel{!}{=} p'$

$$m_1\,v_1 + m_2\,v_2 \stackrel{!}{=} (m_1 + m_2)\,v'$$

Energiesatz: $E_{kin} \stackrel{!}{=} E_{kin}'$

$$\tfrac{1}{2}m_1\,v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\,v_2^2 \stackrel{!}{=} \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v'^2 + Q$$

Deformationsarbeit: $Q = \frac{m_1\,m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2}\mu \cdot v_{rel}^2$

Relativgeschw.: $v_{rel} := |v_1 - v_2|$

Reduzierte Masse: $\mu = \frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}$

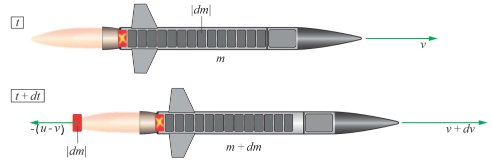
k	Elastizitätszahl	$[k] = 1$
$E_1,\,E_2$	Energien vor Stoss	$[E] = \text{J}$
$E_1',\,E_2'$	Energien nach Stoss	$[E'] = \text{J}$
$m_1,\,m_2$	stossende Massen	$[m] = \text{kg}$
$v_1,\,v_2$	Geschwindigkeit vor Stoss	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$v_1',\,v_2'$	Geschwindigkeit nach Stoss	$[v'] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Q	Deformationsarbeit	$[Q] = \text{J}$
v_{rel}	Relativgeschwindigkeit	$[v_{rel}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
μ	reduzierte Masse	$[\mu] = \text{kg}$

3.11 Rakete

3.11.1 Rakete im Flug

⇒ Masse ist hier veränderbar! $\quad m(t) = m = m_{Start} - \mu \cdot t$

Die Rakete verliert an Treibstoff, wodurch die Masse der Rakete abnimmt ($dm < 0$)



Impulssatz: $m \cdot v(t) = (m + dm)(v(t) + dv) + dm\,(u - v) \qquad dm < 0$

Raketengleichung: $v(t) = -u \cdot \ln(m) + v_0 + u \cdot \ln(m_0) = v_0 + u \cdot \ln(\frac{m_0}{m})$

Massenverhältnis: $\frac{Startmasse}{Endmasse}$

max. Geschwindigkeitsänderung: $\Delta v = v - v_0 = u \cdot \ln(\frac{m_0}{m})$

Schubkraft: $F_{Schub} = \frac{dp}{dt} = -\frac{u \cdot dm}{dt} = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{\mu}(-u) = \mu \cdot u$

⇒ Hier wurde noch keine Erdbeschleunigung (Anziehung) berücksichtigt!

u	Strahlgeschwindigkeit der Rakete	$[u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
m	Zeitlich veränderbare Masse $m(t)$	$[m] = \text{kg}$
m_0	Masse zum Startzeitpunkt	$[m] = \text{kg}$
v_0	Startgeschwindigkeit	$[v_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
F_{Schub}	Schubkraft der Rakete	$[F_{Schub}] = \text{N}$
μ	Treibstoffverbrauch pro Zeit	$[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$

3.11.2 Aufstieg der Rakete im Schwerefeld

Konstante Erdbeschleunigung g wird berücksichtigt

Veränderbare Masse: $m(t) = m = m_{Start} - \mu \cdot t$

Gesamtkraft: $m(t)\frac{dv}{dt} = m(t) \cdot a = F_{Schub} - F_G = \mu \cdot u - m \cdot g$

Beschleunigung: $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{\mu \cdot u}{m_0 - \mu \cdot t} - g$

Raketengleichung: $v(t) = u \cdot \ln(\frac{m_{Start}}{m(t)}) - g \cdot t$

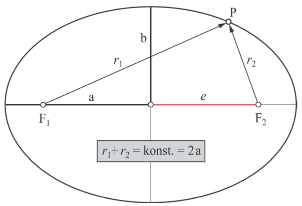
Spezifischer Impuls: $T = \frac{m(t)}{\mu} = \frac{u}{g}$

u	Strahlgeschwindigkeit der Rakete	$[u] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
m	Zeitlich veränderbare Masse $m(t)$	$[m] = \mathrm{kg}$
m_0	Masse zum Startzeitpunkt	$[m] = \mathrm{kg}$
v_0	Startgeschwindigkeit	$[v_0] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
g	Erdbeschleuigung	$[g] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
μ	Treibstoffverbrauch pro Zeit	$[\mu] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$
T	spezifischer Impuls (Zeit von konstantem Schub)	$[T] = \mathrm{s}$

3.12 Gravitation

3.12.1 Erstes Kepler'sches Gesetz

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren Brennpunkt sich die Sonne befindet.



a	grosse Halbachse
b	kleine Halbachse
F_1, F_2	Brennpunkte
e	Exzentrizität
ϵ	num. Exzentrizität $\epsilon = \frac{e}{a}$
r_{min}	minimaler Radius
	$r_{min} = a\,(1-\epsilon)$
r_{max}	maximaler Radius
	$r_{max} = a\,(1+\epsilon)$

3.12.2 Zweites Kepler'sches Gesetz

Der Fahrstrahl der Planeten überstreicht in der gleichen Zeit die gleiche Fläche.
$\Rightarrow$ Bei kleinerem Abstand zur Sonne ist die Geschwindigeit schneller!

3.12.3 Drittes Kepler'sches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der grossen Halbachsen.

$$a = \left(\frac{T}{T_{ref}}^{\frac{2}{3}} \cdot a_{ref}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{a}{a_{ref}}\right)^3 = \left(\frac{T}{T_{ref}}\right)^2$$

Als Referenz wird die Erde verwendet!

Astronomische Einheit: $a_{ref} = 1\,\mathrm{AE} = 149.6 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$

Referenzzeit: $T_{ref} = 1\,a = 1$ Jahr

a	grosse Halbachse gesuchtet Planet	$[a] = \mathrm{AE}$
a_{ref}	grosse Halbachse Erde	$[a_{ref}] = \mathrm{AE}$
T	Umlaufzeit Planet	$[T] =$ Jahre
T_{ref}	Umlaufzeit Erde	$[T] =$ Jahre

3.12.4 Gravitationsgesetz

$$\boxed{\text{Gravitationskraft:} \quad F_G = G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \text{mit } G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}}$$

3.12.5 Gravitationswirkung innerhalb einer Kugel

$$\boxed{F_G = G\,\frac{m_{Kern}(r)\,m}{r^2} = G\,\frac{4\,\pi\,r^3\,\rho\,m}{3\,r^2} = \frac{4\,pi}{3}\,G\,\rho\,m\,r}$$

F_G	Gravitationskraft	$[F_G] = \mathrm{N}$
G	Gravitationskonstante	$[G] = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$
r	Radius (Abstand vom Zentrum)	$[r] = \mathrm{m}$
ρ	homogene Dichte der Kugel	$[\rho] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
m	Masse vom Massepunkt	$[m] = \mathrm{kg}$
m_{Kern}	Masse des Kugelkerns	$[m_{Kern}] = \mathrm{kg}$

3.12.6 Gravitationswirkung ausserhalb einer Kugel

$$\boxed{F_G = G\,\frac{M \cdot m}{r^2}}$$

F_G	Gravitationskraft	$[F_G] = \mathrm{N}$
G	Gravitationskonstante	$[G] = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$
r	Radius (Abstand vom Zentrum)	$[r] = \mathrm{m}$
m	Masse vom Massepunkt	$[m] = \mathrm{kg}$
M	Gesamtmasse der Kugel	$[M] = \mathrm{kg}$

3.12.7 Gravitationspotential ϕ

Wenn eine Masse in einem Gravitationsfeld bewegt wird, so wird Arbeit verrrichtet.

$$\boxed{W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_G \bullet d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} G\,\frac{M \cdot m}{r^2}\,dr = G \cdot M \cdot m\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}$$

$$\boxed{\text{potentielle Energie:} \quad E_{pot}(r) = -G\,\frac{M\,m}{r}}$$

$$\boxed{\text{Gravitationspotential:} \quad \phi = \frac{E_{pot}}{m} = -\frac{G \cdot M}{r}}$$

Im Inneren eines homogenen Zentralkörpers gilt

$$\boxed{F_G = \frac{4\,\pi \cdot G \cdot \rho \cdot m \cdot r}{3}}$$

$$\boxed{E_{pot} = -\frac{2\,\pi \cdot G \cdot \rho \cdot m}{3}\,r^2 + c'}$$

$$\boxed{\phi = -\frac{2\,\pi \cdot G \cdot \rho}{3}\,r^2 + c = -\frac{G \cdot M(r)}{2\,r} + c = -\frac{G \cdot M(r)}{2\,r} - \frac{G \cdot M}{2\,R}}$$

W	Arbeit	$[W] = \mathrm{J}$
F_G	Gravitationskraft	$[F_G] = \mathrm{N}$
E_{pot}	potentielle Energie	$E_{pot} = \mathrm{J}$
G	Gravitationskonstante	$[G] = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$
r	Radius (Abstand vom Zentrum)	$[r] = \mathrm{m}$
ρ	homogene Dichte der Kugel	$[\rho] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
m	Masse vom Massepunkt	$[m] = \mathrm{kg}$
M	Gesamtmasse der Kugel	$[M] = \mathrm{kg}$
R	Radius der Kugeloberfläche	$[R] = \mathrm{m}$

3.13 Bezugssysteme: Inertialsystem

Inertialsystem: **unbeschleuigtes** Bezugssystem

Wenn die Newton'schen Gesetze im Bezugssystem S gelten, so gelten sie auch im Bezugssystem S', solange dieses nicht beschleunigt ist und nicht rotiert.
$\Rightarrow$ **In sämtlichen Inertialsystemen sind die mechanischen Gesetze identisch!**

3.13.1 Galilei-Transformation

Bezugssystem S' bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0:

$$v_0 = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Transformation zwischen S und S'

$$x = x' + v_x t$$
$$y = y' + v_y t$$
$$z = z' + v_z t$$
$$t = t'$$

3.14 Beschleunigte Bezugssysteme

In beschleunigten Bezugssystemen müssen **Trägheitskräfte** berücksichtigt werden!

3.14.1 Translatorisch beschleunigtes Bezugssystem

Beispiel: Zug beschleunigt auf gerader Schiene

Für einen Beobachter **im beschleunigten System** S' wirkt eine Trägheitskraft:

$$\boxed{\text{Gesamtkraft:} \quad \vec{F}' = \vec{F} - m \cdot \vec{a}_0 = \vec{F} + \vec{F}_{Trägheit}}$$

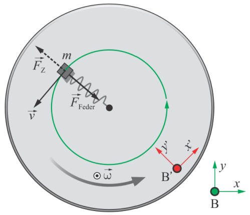
$\vec{F}'$	Gesamte im System wirkende Kraft	$[\vec{F}'] = \mathrm{N}$
$\vec{F}$	Statisch wirkende Kräfte	$[\vec{F}] = \mathrm{N}$
$\vec{F}_{Trägheit}$	Trägheitskraft	$[\vec{F}_{Trägheit}] = \mathrm{N}$
m	Masse im System	$[m] = \mathrm{kg}$
$\vec{a}_0$	Beschleunigung des Systems	$[\vec{a}_0] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

3.14.2 Gleichförmig rotierendes Bezugssystem (Scheinkräfte)

Fest verbundene Masse ⇒ Scheinkraft: Zentrifugalkraft

$$\boxed{\vec{F}_z = -m\,\vec{a}_z = -m\cdot\omega^2\cdot\vec{r}}$$

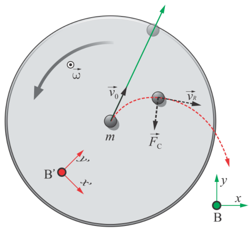
$$\boxed{\vec{F}_{Zentrifugal} \overset{!}{=} -\vec{F}_{Zentripetal}}$$



$\vec{F}_z$	Zentrifugalkraft (Trägheitskraft; Scheinkraft)	$[\vec{F}_z] = \mathrm{N}$
m	Masse im System	$[m] = \mathrm{kg}$
$\vec{a}_z$	Beschleunigung des Systems (a_{radial})	$[\vec{a}_z] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$
$\vec{r}$	Radius des Systems (nach innen zeigend)	$[\vec{r}] = \mathrm{m}$

lose Masse ⇒ Scheinkraft: Corioliskraft

$$\boxed{\vec{F}_c = -m\cdot\vec{a}_c = -m\cdot 2\,(\vec{\omega}\times\vec{v}_R)}$$



$\vec{F}_c$	Corioliskraft (Trägheitskraft; Scheinkraft)	$[\vec{F}_c] = \mathrm{N}$
m	Masse im System	$[m] = \mathrm{kg}$
$\vec{a}_c$	Coriolisbeschleunigung	$[\vec{a}_c] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$
$\vec{v}_R$	Relativgeschwindigkeit	$[\vec{v}_R] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

3.14.3 D'Alembert'sches Prinzip

Wird ein Körper in einem mitbewegten Koordinatensystem betrachtet, so bleibt er in Ruhe: $\vec{v}_R = 0$ und $\vec{a}_R = 0$

$$\boxed{\vec{F} + \underbrace{\vec{F}_z + \vec{F}_c}_{\text{Scheinkräfte}} = \vec{0}}$$

⇒ Statisches Gleichgewichtsproblem

3.15 Rotation starrer Körper

Rotation:	Drehung um feste Achse
Kreisel:	Drehung um starren Punkt
Kreiselbewegung	Drehung eines völlig freien, starren Körpers um seinen Schwerpunkt

3.15.1 Dynamisches Grundgesetz der Rotation

Es ist **nur die tangentiale Komponente** der Kraft (des Drehmoments) eines rotierenden Körpers relevant!

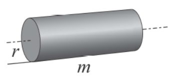
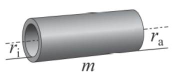
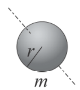
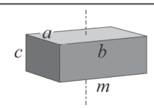
$$dM_t = r\cdot dF_t = r\cdot dm\cdot a_t = dm\cdot r^2\cdot\alpha$$

$$\boxed{M = \int dM = \int r^2\,\alpha\cdot dm = \alpha\underbrace{\int r^2\cdot dm}_{J_{Scheibe}=m\cdot r^2}}$$

$$\boxed{\Rightarrow\ M = J\cdot\alpha}$$

dM_t	kleine Tan.-Komponente des Drehmoments	$[dM_t] = \mathrm{Nm}$
M	(gesamtes) Drehmoment	$[M] = \mathrm{Nm}$
dF_t	kleine Tangentialkomponente der Kraft	$[dF_t] = \mathrm{N}$
r	Abstand Drehachse zu Massepunkt (Rand)	$[r] = \mathrm{m}$
dm	kleines Massestück des Körpers	$dm = \mathrm{kg}$
a_t	Tangentialbeschleunigung ($a_t = r\cdot\alpha$)	$[a_t] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
α	Winkelbescheunigung	$[\alpha] = \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$
J	(Massen-) Trägheitsmoment	$[J] = \mathrm{kg\,m^2}$

3.15.2 Massenträgheitsmomente

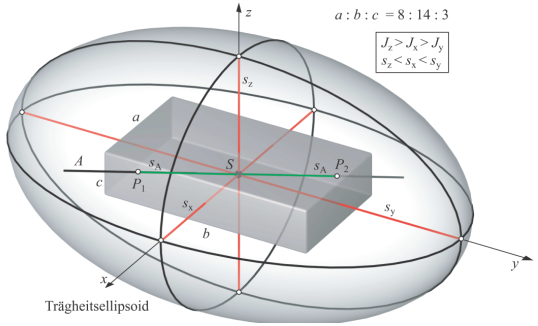
Körper		Trägheitsmoment
Vollzylinder		$\frac{m\,r^2}{2}$
Hohlzylinder		$\frac{m\,(r_a^2 + r_i^2)}{2}$
Kugel		$\frac{2}{5}\,m\,r^2$
Quader		$\frac{m\,(a^2 + b^2)}{12}$

3.16 Trägheitsellipsoid

Trägheitsradius r_0: als ob ganze Masse eines Körpers nur einen Radius hätte

$$\boxed{r_0 = \sqrt{\frac{J}{m}}} \qquad \boxed{s_0 = \frac{1}{r_0}}$$

r_0	Trägheitsradius	$[r_0] = \mathrm{m}$
m	Masse des Körpers	$[m] = \mathrm{kg}$
J	(Massen-) Trägheitsmoment	$[J] = \mathrm{kg\,m^2}$
s_0	reziproker Trägheitsradius	$[s_0] = \mathrm{m}$

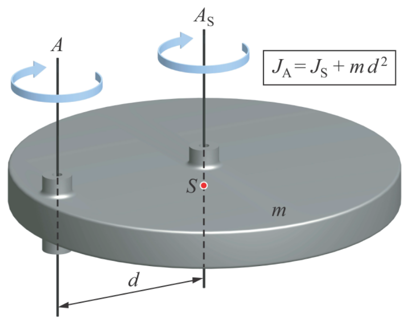


Hauptträgheits-Achsen (entsprechen immer Symmetrie-Achsen, falls vorhanden)

beliebige Achse J_A $\quad J_A = J_x\cdot\cos^2(\alpha) + J_y\cdot\cos^2(\beta) + J_z\cdot\cos^2(\gamma)$

3.17 Satz von Steiner

Beschreibt, wie man das Trägheitsmoment J berechnet, wenn die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt des rotierenden Körpers geht, sonden **parallel** dazu verläuft.



J_S	Trägheitsmoment (Rot. um Schwerp.)	$[J_S] = \mathrm{kg\,m^2}$
J_A	Trägheitsmoment (Rot. um bel. Punkt)	$[J_A] = \mathrm{kg\,m^2}$
m	Masse des Körpers	$[m] = \mathrm{kg}$
d	Abstand zum Schwerpunkt	$[d] = \mathrm{m}$

3.18 Arbeit und Leistung (Rotation)

$$dW = \vec{F}\bullet d\vec{s} = F_t\cdot ds = F_t\cdot r\cdot d\phi = M\cdot d\phi$$

$$P = \frac{dW}{dt} = M\frac{d\phi}{dt} = M\cdot\omega$$

F_t	**Tantentialer** Kraftanteil der Rotation	$[F_t] = N$
$d\phi$	zurückgelegter Kreiswinkel	$[d\phi] = rad$
P	Leistung	$[P] = W$
W	Energie	$[W] = J$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{rad}{s}$
M	Drehmoment	$[M] = Nm$

3.19 Rotationsenergie

Folgendes gilt nur für die Rotation um den Schwerpunkt eines Körpers!

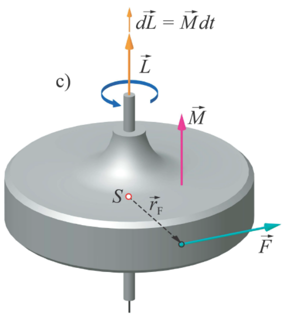
Die totale kinetische Energie ist die Summe aller kinetischer Energien eines Körpers

$$\boxed{E_{kin} = \int \frac{1}{2} v^2 \, dm = E_{trans} + E_{rot}}$$

$$\boxed{E_{trans} = \frac{1}{2} m \cdot v_s^2} \qquad \boxed{E_{rot} = \frac{1}{2} J_s \cdot \omega^2}$$

E_{trans}	Translationsenergie des Schwerpunkts	$[E_{trans}] = \mathrm{J}$
m	Masse des Körpers	$[m] = \mathrm{kg}$
v_s	Geschwindigkeit des Schwerpunkts	$[v_s] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
E_{rot}	Rotationsenergie	$[E_{rot}] = \mathrm{J}$
J_S	Trägheitsmoment (Rot. um Schwerp.)	$[J_S] = \mathrm{kg\,m^2}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

3.20 Drehimpuls $\vec{L}$ / Impulserhaltung (Rotation)



$$\boxed{\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} \cdot dm = \vec{r} \times \vec{p}}$$

$\vec{L}$	Drehimpuls	$[\vec{L}] = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}$
$\vec{r}$	Abstand Massepunkt zu Rot-Achse	$[\vec{r}] = \mathrm{m}$
$\vec{v}$	Rotationsgeschwindigkeit	$[\vec{v}] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
dm	kleines Masse-Stück	$[dm] = \mathrm{kg}$
$\vec{p}$	Impuls	$[\vec{p}] = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$

3.20.1 Drehmoment $\vec{M}$ vs. Drehimpuls $\vec{L}$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d}{dt}\vec{L} = \dot{\vec{L}}}$$

In einem abgschlossenen System ($\vec{M} = 0$) bleibt der Gesamtdrehimpuls erhalten
$\Rightarrow \vec{L} = \text{const}$

Impulserhaltung:	$L \overset{!}{=} L'$
	$J_1 \cdot \omega + J_2 \cdot \omega \overset{!}{=} J_1 \cdot \omega_1' + J_2 \cdot \omega_2'$
Energiesatz:	$E_{rot} \overset{!}{=} E_{rot}' + Q$
	$\frac{1}{2} J_1 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \cdot \omega_2^2 \overset{!}{=} \frac{1}{2} J_1 \cdot \omega_1'^2 + \frac{1}{2} J_2 \cdot \omega_2'^2 + Q$

$\vec{M}$	Drehmoment	$[\vec{M}] = \mathrm{Nm}$
$\vec{r}$	Abstand Massepunkt zu Rot-Achse	$[\vec{r}] = \mathrm{m}$
$\vec{F}$	Kraft, welche Drehmoment bewirkt	$[\vec{F}] = \mathrm{N}$
$\vec{p}$	Impuls	$[\vec{p}] = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$
$\vec{L}$	Drehimpuls	$[\vec{L}] = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}$
J	Massenträgheitsmoment	$[J] = \mathrm{kg\,m^2}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{1}{\mathrm{s}}$
Q	Deformationsarbeit	$[Q] = \mathrm{J}$

3.20.2 Drehimpuls $\vec{L}$ vs. Winkelgeschwindigkeit ω

$$\boxed{L = \int dL = \int r^2 \, \omega \, dm = \omega \int r^2 \, dm = J \, \omega}$$

L	Drehimpuls	$[L] = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}$
r	Abstand Massepunkt zu Rot-Achse	$[r] = \mathrm{m}$
dm	kleines Masse-Stück	$[dm] = \mathrm{kg}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$
J	(Massen-) Trägheitsmoment (hier Tensor)	$[J] = \mathrm{kg\,m^2}$

3.21 Rotation vs. Translation

Drehbewegung		Lineare Bewegung	
Drehwinkel	$\Delta\theta$	Verschiebung	Δx
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	Geschwindigkeit	$v = \frac{dx}{dt}$
Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	Beschleunigung	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
Gleichungen für den Fall konstanter Winkelbeschleunigung	$\omega = \omega_0 + \alpha\, t$ $\Delta\theta = \langle\omega\rangle \Delta t$ $\langle\omega\rangle = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ $\theta = \theta_0 + \omega_0\, t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\,\alpha\,\Delta\theta$	Gleichungen für den Fall konstanter Beschleunigung	$v = v_0 + a\, t$ $\Delta x = \langle v\rangle \Delta t$ $\langle v\rangle = \frac{1}{2}(v_0 + v)$ $x = x_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}a\, t^2$ $v^2 = v_0^2 + 2\,a\,\Delta x$
Drehmoment	M	Kraft	F
Trägheitsmoment	I	Masse	m
Arbeit	$dW = M\, d\theta$	Arbeit	$dW = F\, ds$
Kinetische Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2} I\, \omega^2$	Kinetische Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2} m\, v^2$
Leistung	$P = M\, \omega$	Leistung	$P = F\, v$
Drehimpuls	$L = I\, \omega$	Impuls	$p = m\, v$
Zweites Newton'sches Axiom	$M_{ext} = I\, \alpha = \frac{dL}{dt}$	Zweites Newton'sches Axiom	$F_{ext} = m\, a = \frac{dp}{dt}$

4 Vektorrechnung

4.1 Betrag eines Vektors

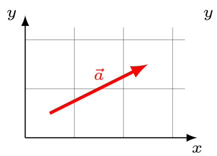
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

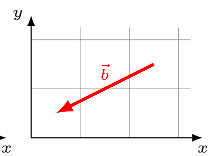
4.2 Gleichheit zweier Vektoren

Zwei Vektoren sind gleich, wenn alle Komponenten identisch sind:

- $A_x = B_x$
- $A_y = B_y$
- $A_z = B_z$

4.3 Negative eines Vektors



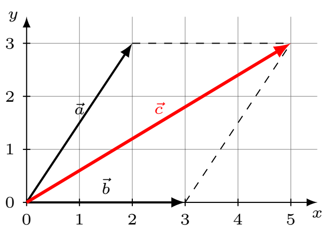


$b_x = -a_x$

$b_y = -a_y$

$b_z = -a_z$

4.4 Addition zweier Vektoren

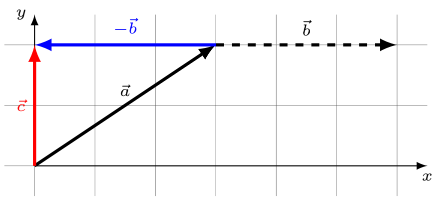


$c_x = a_x + b_x$

$c_y = a_y + b_y$

$c_z = a_z + b_z$

4.5 Subtraktion zweier Vektoren



$c_x = a_x - b_x$

$c_y = a_y - b_y$

$c_z = a_z - b_z$

4.6 Multiplikation eines Vektros mit einem Skalar

$\vec{b} = s\,\vec{a} \quad |\vec{B}| = |s| \cdot |\vec{a}|$

$b_x = s \cdot a_x$

$b_y = s \cdot a_y$

$b_z = s \cdot a_y$

4.7 Skalarprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\, \cos(\varphi)$$

4.8 Kreuzprodukt (nur in 3D)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -(a_1b_3 - a_3b_1) \\ a_1b_2 - a_2b_2 \end{pmatrix}$$

5 Statistik

5.1 Arithmetisches Mittel $\overline{x}_{arith}$

$$\overline{x}_{arith} := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

5.2 Geometrisches Mittel $\overline{x}_{geom}$

Nur für positive Zahlenreihen x_i definiert!

$$\overline{x}_{geom} := \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i} \qquad \Rightarrow \overline{x}_{geom} \leq \overline{x}_{arith}$$

5.3 Quadratisches Mittel QMW (RMS)

Wechselstromtechnik; Effektivwert

$$QMW := \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

5.4 Harmonisches Mittel $\overline{x}_{harm}$

$$\overline{x}_{harm} := \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}}$$

Kann sinnvoll eingesetzt werden, wenn man für die $i-te$ Teilstrecke s_i eine Zeit t_i benötigt (also eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $v_i = \frac{s_i}{t_i}$ und eine Durchschnittsgeschwindigkeit über N Teilstrecken ermitteln will:

$$\overline{v}_{harm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} s_i}{\sum_{i=1}^{N} t_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} s_i}{\sum_{i=1}^{N} \frac{s_i}{v_i}} \qquad \text{gewichtetes harm. Mittel}$$

5.5 Standardabweichung σ

Varianz: $\sigma^2 := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}_{arith})^2$

Standardabweichung: $\sigma := \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}_{arith})^2}$

5.6 Standardabweichung des Mittelwerts

Gilt nur, wenn eine Normalverteilung vorliegt!
Beschreibt nur statistische Fehler

$\sigma(\overline{x}_{arith}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

6 Mathematik-Hilfe

6.1 Trigonometrie

Sinus	Cosinus	Tangens
$\frac{GK}{H}$	$\frac{AK}{H}$	$\frac{AK}{GK}$

6.2 Schwerpunkt

Die Koordinaten des Schwerpunkts müssen komponentenweise berechnet werden:

$x_s = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{M} \qquad y_s = \frac{\sum y_i \cdot m_i}{M} \qquad z_s = \frac{\sum z_i \cdot m_i}{M}$

x_s , y_s , z_s	Koordinaten des Schwerpunkts
x_i , y_i , z_i	Koordinaten von kleinen Massepunkten
m_i	Kleine Massepunkte an entsprechenden Koordinaten
M	Gesamtmasse des Körpers

6.3 Polarkoordinaten (Kreisbewegung)

polar → kartesisch $\quad \vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\phi) \\ r \cdot \sin(\phi) \end{pmatrix}$

kartesisch → polar $\quad \vec{P} = \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\left(\frac{x}{y}\right) \end{pmatrix}$

6.4 Ableitungsregeln S .445-448

6.4.1 Elementare Regeln

Potenzen:	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3\,x^2$
	$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
Linearität:	$f(x) = c \cdot x^2$	$f'(x) = c \cdot 2\,x$
Summe:	$(u(x) + v(x) - w(x))'$	$= u'(x) + v'(x) - w'(x)$
Konstanten:	$c = const \rightarrow c' = 0$	

6.4.2 Produktregel

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

6.4.3 Quotientenregel

$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \quad \rightarrow$ als Produkt schreiben

$u(x) \cdot \left(\frac{1)}{v(x)}\right)' = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \frac{-v'(x)}{v(x)^2}$

6.4.4 Kettenregel

$g(f(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$

6.4.5 Umkehrfunktion

$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

6.5 Allgemeine Logarithmus-Ableitung

$(\log_b(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)}\right)' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot (\ln(x))' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}$

6.6 Integrationsregeln S. 494-496

Linearität: $\int\limits_a^b \alpha\, f(x)\, dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\, dx$

6.6.1 Rechenregeln mit Integralen S. 508-510

Zerlegung: $\int\limits_a^b f_1(x)\, dx + f_2(x)\, dx = \int\limits_a^b f_1(x)\, dx + \int\limits_a^b f_2(x)\, dx$

$\int\limits_a^c f(x)\, dx = \int\limits_a^b f(x)\, dx + \int\limits_b^c f(x)\, dx$

Grenzen tauschen: $\int\limits_a^b f(x)\, dx = -\int\limits_b^a f(x)\, dx$

Gleiche Grenzen: $\int\limits_a^a f(x)\, dx = 0$

6.7 Wichtige Integrale S. 495

$\int\limits_a^b x^2\, dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

$\int\limits_a^b x\, dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

$\int\limits_a^b 1\, dx = b - a$ (Rechteck)