

## Lección 9

# Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

### 9.1. Introducción

En esta lección estudiaremos una forma de obtener analíticamente las soluciones de los sistemas lineales de primer orden y de coeficientes constantes. Trataremos, por lo tanto, con sistemas de la forma

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad (9.1)$$

siendo  $A$  una matriz de tamaño  $n \times n$  de números reales y  $\mathbf{b}(t)$  la función vectorial de términos independientes. La mayoría de los ejemplos de la Lección 8 eran sistemas de coeficientes constantes porque son los únicos para los que disponemos de métodos analíticos generales de resolución.

Conceptualmente, la parte importante corresponde al estudio de los sistemas homogéneos:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}. \quad (9.2)$$

La solución de los sistemas no homogéneos se obtiene de la de éstos aplicando el método de variación de las constantes; método que ya discutimos para las ecuaciones lineales no homogéneas. Nos centramos, entonces, en los sistemas homogéneos.

Tal y como indicamos en la Lección 8 el objetivo es encontrar un sistema fundamental de soluciones del sistema (9.2), o equivalentemente, una matriz fundamental de soluciones. La idea que nos dirige es muy simple, su realización un poco más complicada. La idea es la siguiente: para  $n = 1$  el sistema se convierte en una ecuación:

$$x' = ax$$

cuya solución general conocemos de sobra:

$$x(t) = ce^{at}$$

siendo  $c$  una constante arbitraria. Podríamos decir que cualquier solución de la ecuación  $x' = ax$  se obtiene como combinación lineal de la solución  $e^{at}$ . Como además,  $e^{at} \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , concluimos que para  $n = 1$ ,  $(e^{at})$  es una matriz (de tamaño  $1 \times 1$ ) fundamental de soluciones.

Extrapolando esta idea a sistemas generales de dimensión  $n$ , podríamos pensar que una matriz fundamental de soluciones del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  es

$$\mathbf{X}(t) = e^{tA},$$

y que, en consecuencia, la solución general del sistema es

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c}$$

siendo  $\mathbf{c}$  un vector arbitrario.

El problema es que si  $a$  es un número entonces sabemos lo que es  $e^a$ , pero si  $A$  es una matriz ¿qué es  $e^A$ ? Veremos en la próxima sección que se puede dar un significado muy preciso a la exponencial de una matriz y que  $\mathbf{X}(t) = e^{tA}$  es, en efecto, una matriz fundamental de soluciones de  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ . El resto de la lección la dedicaremos a calcular de forma expresa esta matriz y utilizarla para hallar soluciones analíticas de los sistemas homogéneos de ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

## 9.2. La exponencial de una matriz y soluciones de ecuaciones diferenciales

Hay varias formas de calcular la exponencial de una matriz, ninguna de ellas obvia. Nosotros procederemos por analogía con la definición de la exponencial de un número real

por medio de una serie de potencias. Recordemos que si  $a$  es un número real cualquiera entonces

$$e^a = 1 + a + \frac{1}{2!}a^2 + \frac{1}{3!}a^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}a^k.$$

En realidad esta es la forma que usan muchas calculadoras de bolsillo para calcular la exponencial de un número: realizan esta suma con un número grande de sumandos.

Por analogía definimos:

**Definición 9.1** .- La **exponencial de la matriz**  $A$ ,  $n \times n$ , se define como

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k. \quad (9.3)$$

En esta fórmula  $A^2 = AA$  es la matriz  $n \times n$  que se obtiene multiplicando  $A$  por sí misma,  $A^3 = AAA$  la que se obtiene multiplicando  $A$  por sí misma 3 veces, etc. Además, por convenio, supondremos que  $A^0 = I_n$  cualquiera que sea la matriz  $A$ . Por lo tanto, todos los sumandos de la serie en la definición de  $e^A$  son matrices de tamaño  $n \times n$ . Así que  $e^A$ , según esta definición, es una matriz  $n \times n$ , siempre y cuando la serie converja.

Que una serie infinita de matrices converge quiere decir que la sucesión de las sumas parciales

$$S_N = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!}A^k$$

es convergente. De hecho, para cada  $N$ ,  $S_N$  es una matriz de tamaño  $n \times n$  por lo que está compuesta de  $n^2$  elementos. Decir que la sucesión  $\{S_N\}$  converge quiere decir que las sucesiones de sus  $n^2$  elementos convergen. Lo que sucede es que estos elementos son expresiones muy complicadas que involucran los elementos de la matriz  $A$ , por lo que para estudiar la convergencia de la sucesión de sumas parciales  $\{S_N\}$  se emplean métodos que están muy lejos del alcance de este curso. Así que no nos preocuparemos de la convergencia y asumiremos que la serie (9.3) es convergente cualquiera que sea la matriz  $A$  y define una única matriz que llamaremos **exponencial de  $A$** .

La exponencial de una matriz es difícil de calcular, pero hay un caso en el que no:

**Ejemplo 9.2** .- Calcúlese la exponencial de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Puesto que  $A$  es diagonal, sus potencias son muy fáciles de hallar:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^3 & 0 \\ 0 & a_2^3 \end{pmatrix},$$

y así sucesivamente. Por consiguiente

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} a_1^3 & 0 \\ 0 & a_2^3 \end{pmatrix} + \cdots = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + a_1 + \frac{a_1^2}{2!} + \frac{a_1^3}{3!} + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + a_2 + \frac{a_2^2}{2!} + \frac{a_2^3}{3!} + \cdots \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 \\ 0 & e^{a_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En este ejemplo no hay, evidentemente, nada especial sobre la dimensión, 2, de la matriz. Lo mismo es válido para matrices cuadradas de cualquier tamaño: La exponencial de una matriz diagonal,  $A$ , de orden  $n$  es la matriz diagonal de orden  $n$  cuyos elementos diagonales son las exponenciales de los elementos diagonales de  $A$ . En particular, si  $A = aI_n$  entonces

$$e^{aI_n} = \begin{pmatrix} e^a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^a & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & e^a \end{pmatrix} = e^a I_n. \quad (9.4)$$

Y cuando  $a = 0$

$$e^{0I_n} = e^0 I_n = I_n. \quad (9.5)$$

Esto es, la exponencial de la matriz cero de orden  $n$  es la matriz identidad del mismo orden. Este hecho lo utilizaremos más adelante para probar que  $e^A$  es una matriz invertible cualquiera que sea la matriz  $A$ . Esto será necesario para demostrar que  $e^{tA}$  es una matriz fundamental de soluciones del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ . Por ahora concretemos cómo es la expresión de  $e^{tA}$  como una serie de potencias:

$$e^{tA} = I_n + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots.$$

Para cada valor de  $t$ ,  $e^{tA}$  es una matriz  $n \times n$ . Así pues, debemos considerar  $e^{tA}$  como una función de  $t \in \mathbb{R}$  cuyos valores son matrices  $n \times n$ . Esto es, en realidad, una pequeña generalización de las funciones vectoriales.

Por otra parte, si  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  es un vector de  $n$  componentes, entonces  $e^{tA}\mathbf{v}$  es también un vector de  $\mathbb{R}^n$ . La siguiente proposición nos dice que  $\mathbf{X}(t) = e^{tA}$  es una matriz de soluciones del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ . Además nos da una expresión para la solución del problema de condiciones iniciales:

**Proposición 9.3** .- *Sea  $A$  una matriz  $n \times n$ . Entonces*

$$1. \quad \frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}.$$

2. *La función vectorial*

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}_0$$

*es la (única) solución del problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

**Demostración.**- Para probar la primera parte derivamos la serie de potencias:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tA} &= \frac{d}{dt}\left(I_n + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots\right) = \\ &= A + \frac{t}{1!}A^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \cdots = \\ &= A\left(I_n + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots\right) = \\ &= Ae^{tA} \end{aligned}$$

Y para probar la segunda parte derivamos  $\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}_0$ :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}_0\right) = \left(\frac{d}{dt}e^{(t-t_0)A}\right)\mathbf{x}_0 = \left(\frac{d}{dt}((t-t_0)A)\right)e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}(t).$$

Así que  $\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}_0$  es solución del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ . Además

$$\mathbf{x}(t_0) = e^{(t_0-t_0)A}\mathbf{x}_0 = e^{0 \cdot A}\mathbf{x}_0 = I_n\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0,$$

donde hemos usado que la exponencial de la matriz cero es la matriz identidad (9.5). ■

Ya tenemos que  $\mathbf{X}(t) = e^{tA}$  es una matriz de soluciones del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ . Ahora tenemos que demostrar que sus columnas son linealmente independientes; es decir que  $\det \mathbf{X}(t_0) \neq 0$  para algún valor de  $t$ . Veremos, que de hecho,  $\det \mathbf{X}(t) \neq 0$  para todos los valores de  $t \in \mathbb{R}$ . Para ello necesitamos las siguientes propiedades de la exponencial de una matriz:

**Proposición 9.4** .- Sean  $A$  y  $B$  matrices  $n \times n$ . Entonces

1.  $A$  conmuta con  $e^A$ ; es decir,  $Ae^A = e^A A$ .
2. Si  $A$  y  $B$  conmutan (i.e., si  $AB = BA$ ), entonces

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

3.  $e^A$  es no singular y su inversa es  $e^{-A}$ .

**Demostración.**- Para demostrar la primera parte utilizamos la definición de la exponencial de una matriz por serie de potencias:

$$\begin{aligned} Ae^A &= A \left( I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots \right) = \\ &= A + A^2 + \frac{1}{2!}A^3 + \frac{1}{3!}A^4 + \cdots = \\ &= \left( I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots \right) A = \\ &= e^A A. \end{aligned}$$

La segunda parte es una propiedad muy importante de la exponencial. Nos dice que la regla que usamos frecuentemente acerca de que el producto de dos exponenciales es la exponencial de la suma, es válida para matrices siempre y cuando éstas conmuten. Las demostraciones anteriores han sido todas muy fáciles. Ésta requiere un poco más de trabajo pero no es tampoco difícil. Primero calculamos  $e^A e^B$ , después  $e^{A+B}$  y comprobamos que obtenemos, en ambos casos, el mismo resultado. Aplicamos repetidas veces la propiedad distributiva del producto y suma de matrices y, cuando es necesario, la hipótesis de conmutatividad de  $A$  y  $B$ :

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \left( I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots \right) \left( I_n + B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \cdots \right) = \\ &= I_n + (A + B) + \frac{1}{2!}(A^2 + B^2) + AB + \frac{1}{3!}(A^3 + B^3) + \frac{1}{2!}AB^2 + \frac{1}{2!}A^2B + \cdots = \\ &= I_n + (A + B) + \frac{1}{2!}(A^2 + 2AB + B^2) + \frac{1}{3!}(A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) + \cdots \end{aligned} \tag{9.6}$$

Por otra parte en el desarrollo de  $e^{A+B}$  en serie de potencias aparecen potencias de  $(A + B)$ , pero

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Como  $AB = BA$  tenemos que  $AB + BA = 2AB$ , de modo que

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

De la misma forma

$$(A+B)^3 = (A+B)^2(A+B) = (A^2+2AB+B^2)(A+B) = A^3+A^2B+2ABA+2AB^2+B^2A+B^3$$

Y como  $A$  y  $B$  conmuta,  $ABA = A^2B$  y  $B^2A = AB^2$ . Así

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Y así sucesivamente. Por lo tanto

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= I_n + (A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2 + \frac{1}{3!}(A+B)^3 + \dots = \\ &= I_n + (A+B) + \frac{1}{2!}(A^2+2AB+B^2) + \frac{1}{3!}(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3) + \dots \end{aligned}$$

Esta expresión y la de (9.6) coinciden. Por lo tanto  $e^A e^B = e^{A+B}$  tal y como queríamos demostrar.

En cuanto a la tercera parte, se deduce fácilmente de la segunda. Puesto que  $A(-A) = (-A)A = -A^2$ , tenemos que

$$e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^{0I_n} = I_n,$$

donde en la última igualdad hemos utilizado la propiedad (9.5). ■

Si aplicamos la tercera parte de esta Proposición a la matriz  $\mathbf{X}(t) = e^{tA}$ , tenemos que para todo  $t \in \mathbb{R}$  la matriz  $\mathbf{X}(t)$  tiene inversa, y ésta es

$$\mathbf{X}(t)^{-1} = e^{-tA}.$$

En efecto,  $\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t)^{-1} = e^{tA}e^{-tA} = I_n$  y también  $\mathbf{X}(t)^{-1}\mathbf{X}(t) = I_n$ . Teniendo en cuenta que  $\det I_n = 1$  y aplicado que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes tenemos que

$$\det \mathbf{X}(t) \det \mathbf{X}(t)^{-1} = 1,$$

de donde concluimos que  $\det \mathbf{X}(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Como  $\mathbf{X}(t)$  es una matriz cuyas columnas son, todas, soluciones del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  y  $\det \mathbf{X}(t) \neq 0$  concluimos que

**Corolario 9.5** .- La matriz  $\mathbf{X}(t) = e^{tA}$  es una matriz fundamental de soluciones del sistema lineal homogéneo de coeficientes constantes  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ . Y la solución general de este sistema, escrita en forma vectorial, es

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c}$$

siendo  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  un vector arbitrario de  $n$  componentes.

Ya tenemos una matriz fundamental de soluciones: la exponencial de  $tA$ . También tenemos la definición de la exponencial como un desarrollo en serie de potencias. Desde un punto de vista conceptual todo esto está muy bien. Ahora bien, si lo que queremos es encontrar expresiones analíticas cerradas de las soluciones, el cálculo de la exponencial a través del desarrollo en serie de potencias no es muy práctico. Sin embargo veremos que utilizando ciertas propiedades de las matrices, este desarrollo en serie de potencias es muy útil para obtener expresiones analíticas de las soluciones. Las propiedades de las matrices que necesitamos están relacionadas con los valores propios.

### 9.3. Solución de sistemas diferenciales lineales de coeficientes constantes

#### 9.3.1. Matrices con un único valor propio

Empecemos con un ejemplo de una matriz no diagonal.

**Ejemplo 9.6** .- Cálculase la exponencial  $e^{tA}$  siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si intentáramos aplicar la definición de  $e^{tA}$  con esta matriz  $A$  no conseguiríamos gran cosa. Vamos a emplear un “truco” y después diremos por qué este truco siempre va a funcionar bien para las matrices que son como la que nos dan en este ejemplo. ¿Qué tiene de especial esta matriz?, que sólo tiene un valor propio. Calculemos sus valores propios:

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ 1 & \lambda + 3 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2.$$

Así que, en efecto,  $\lambda = -1$  es su único valor propio con multiplicidad algebraica 2.

Utilizando este valor propio vamos a escribir  $A$  de otra forma (este es el truco):

$$A = \lambda I_2 - (\lambda I_2 - A).$$

Como  $\lambda I_2$  conmuta siempre con  $\lambda I_2 - A$ , tenemos que

$$e^{tA} = e^{\lambda t I_2 - t(\lambda I_2 - A)} = e^{\lambda t I_2} e^{t(A - \lambda I_2)}.$$



Ahora recordemos que, (9.4),  $e^{\lambda t I_2} = e^{\lambda t} I_2$ . Usando, a demás la expansión en serie de potencias de  $e^{t(A-\lambda I_2)}$ , tenemos

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \left( I_2 + t(A - \lambda I_2) + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda I_2)^2 + \frac{t^3}{3!}(A - \lambda I_2)^3 + \dots \right).$$

No parece que hayamos avanzado mucho, la expresión en el paréntesis parece aún más difícil que la que tendríamos originalmente si hubieran expandido  $e^{tA}$  en serie de potencias. Pero aquí está la sorpresa:

$$A - \lambda I_2 = A + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A - \lambda I_2)^2 = (A + I_2)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De modo que

$$(A - \lambda I_2)^3 = (A - \lambda I_2)^4 = \dots = 0.$$

En definitiva

$$e^{tA} = e^{\lambda t} (I_2 + t(A - \lambda I_2)) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 + 2t & 4t \\ -t & 1 - 2t \end{pmatrix}$$

que es una expresión explícita y simple de la exponencial de  $tA$ .

¿Es realmente una casualidad que  $(A + I_2)^2 = 0$ ? No, no lo es. Es una consecuencia de un resultado general importante de Álgebra Lineal; un teorema conocido con el nombre de Teorema de Hamilton-Cayley. Para entender lo que dice este teorema tenemos que darnos cuenta de lo siguiente: si en un polinomio, por ejemplo,  $p(\lambda) = 3\lambda^2 - 2\lambda + 1$ , sustituímos  $\lambda$  por una matriz cuadrada  $A$ , entonces obtenemos una matriz. En el ejemplo

$$p(A) = 3 \cdot A^2 - 2 \cdot A + 1 \cdot A^0 = 3 \cdot A^2 - 2 \cdot A + I_n$$

donde hemos utilizado el convenio  $A^0 = I_n$ . Bien, pues el Teorema de Hamilton-Cayley nos dice que si en el polinomio característico de  $A$ ,  $p(\lambda)$ , sustituímos  $\lambda$  por  $A$  obtenemos siempre la matriz cero; es decir,  $p(A) = 0$ .

¿Cuál era el polinomio característico de la matriz del ejemplo? Era  $p(\lambda) = (\lambda + 1)^2$ . Si sustituímos  $\lambda$  por  $A$  y aplicamos el Teorema de Hamilton-Cayley tenemos que

$$(A + I_2)^2 = 0.$$

Pero el Teorema de Hamilton-Cayley se aplica a cualquier tipo de matrices. Entonces, si  $A$  es una matriz  $n \times n$  y tiene un sólo valor propio, digamos  $\lambda_0$ , su polinomio característico es  $(\lambda - \lambda_0)^n$ . Por lo tanto  $(A - \lambda_0 I_n)^n = 0$ , y la expansión en serie de potencias de  $e^{(A - \lambda_0 I_n)t}$  tiene todos sus sumandos igual a cero a partir del  $n$ -ésimo. De hecho, puede suceder que los sumandos sean ceros antes del  $n$ -ésimo, pero con seguridad, a partir de éste, todos los sumandos son cero. Estos comentarios son la base de la demostración de la siguiente proposición que nos da una expresión explícita de las soluciones del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  cuando todos los valores propios de  $A$  son iguales.

**Proposición 9.7** .- Supongamos que  $A$  es una matriz de tamaño  $n \times n$  que tiene un único valor propio  $\lambda$ . Entonces hay un número entero  $k \leq n$  tal que

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \left( I_n + t(A - \lambda I_n) + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda I_n)^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}(A - \lambda I_n)^k \right).$$

Una vez que disponemos de una expresión explícita de la matriz fundamental de soluciones, la expresión general de la solución del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  se obtiene mediante la expresión

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c}$$

siendo  $\mathbf{c}$  un vector arbitrario de  $n$  componentes. En el caso particular  $n = 2$  tenemos

$$e^{tA} = e^{\lambda t}(I_2 + t(A - \lambda I_2)),$$

la solución general del sistema es

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}(I_2 + t(A - \lambda I_2))\mathbf{c},$$

y la solución general del problema de condiciones iniciales  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}_0 = e^{\lambda(t-t_0)}(I_2 + (t-t_0)(A - \lambda I_2))\mathbf{x}_0$$

En el Ejemplo 9.6, si nos pidieran la solución general del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

ya hemos obtenido

$$e^{tA} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{pmatrix}.$$

Así que la solución general sería

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1(1+2t) + 4c_2t)e^{-t} \\ (-c_1t + c_2(1-2t))e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Y la solución que en  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  sería

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+6t)e^{-t} \\ (1-3t)e^{-t} \end{pmatrix}$$

Resolvemos un último ejemplo antes de pasar a estudiar el caso general en el que la matriz pueda tener varios valores propios distintos

**Ejemplo 9.8** .- Consideremos el sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcúlese un sistema fundamental de soluciones y obténgase la solución general del sistema.

La matriz de este sistema ya la estudiamos en el Ejemplo 8.15 de la Lección 8. Vimos entonces que el polinomio característico de  $A$  era  $(\lambda - 2)^3$ , por lo que sólo tiene un valor propio:  $\lambda = 2$ . La Proposición 9.7 nos asegura que hay un valor  $k \leq 3$  tal que  $(A - 2I_3)^k = 0$ . Veamos cuál es este valor:

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A - 2I_3)^3 = 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{2t} \left( I_3 + t(A - 2I_3) + \frac{t^2}{2!}(A - 2I_3)^2 \right) = \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 - 2t & -t & 0 \\ 4t & 1 + 2t & 0 \\ -t - t^2 & -t - t^2/2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un sistema fundamental de soluciones está formado por las columnas de la matriz  $e^{tA}$ . Así

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 4t \\ -t - t^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} -t \\ 1 + 2t \\ -t - t^2/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución general del sistema será

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 - 2t & -t & 0 \\ 4t & 1 + 2t & 0 \\ -t - t^2 & -t - t^2/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) + c_3 \mathbf{x}_3(t).$$

En cualquiera de los dos casos

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} c_1(1 - 2t) - c_2t \\ 4c_1t + c_2(1 + 2t) \\ c_1(-t - t^2) + c_2(-t - t^2/2) + c_3 \end{pmatrix}.$$

### 9.3.2. Matrices con múltiples valores propios

La Proposición 9.7 es muy útil cuando la matriz del sistema tiene un solo valor propio, pero falla cuando tiene varios valores propios distintos. No obstante nos gustaría disponer de un resultado similar. Algo que nos permita que los sumandos de la serie de potencias de  $e^{(A-\lambda I_n)t}$  sean cero a partir de uno dado. La idea es la siguiente: sabemos que una matriz fundamental de soluciones del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  es  $e^{tA}$ . Pero hay muchas otras posibles. En realidad para conseguir una matriz fundamental de soluciones lo que necesitamos es un sistema fundamental de soluciones. Una forma de obtenerlo es a partir de  $n$  vectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  que sean linealmente independientes. En efecto, la matriz

$$\mathbf{X}(t) = e^{tA}\mathbf{V}$$

con  $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n)$  también es una matriz fundamental de soluciones. Por una parte

$$\det \mathbf{X}(t) = \det e^{tA} \det \mathbf{V} \neq 0,$$

ya que  $\det \mathbf{V} \neq 0$  por ser las columnas de  $\mathbf{V}$  linealmente independientes. Además

$$\mathbf{X}'(t) = Ae^{tA}\mathbf{V} = A\mathbf{X}(t).$$

Es decir,  $\mathbf{X}(t) = e^{tA}\mathbf{V}$  es una matriz de soluciones y su determinante es distinto de cero para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Esto es, es una matriz fundamental de soluciones.

Ahora bien, entre todos los posibles sistemas de  $n$  vectores linealmente independientes, que son infinitos, nos interesan aquellos que hagan que  $e^{tA}\mathbf{v}$  sea expresable analíticamente de forma sencilla. Resulta que los vectores propios asociados a los valores propios cumplen esta condición. En efecto, sea  $\lambda_0$  un valor propio de  $A$  y sea  $\mathbf{v}_0$  uno cualquier de sus vectores propios. Calculemos  $e^{tA}\mathbf{v}_0$ :

$$\begin{aligned} e^{tA}\mathbf{v}_0 &= e^{t\lambda_0 I_n + t(A - \lambda_0 I_n)}\mathbf{v}_0 = \\ &= e^{t\lambda_0 I_n} e^{t(A - \lambda_0 I_n)}\mathbf{v}_0 = \\ &= e^{\lambda_0 t} \left( I_n + t(A - \lambda_0 I_n) + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda_0 I_n)^2 + \frac{t^3}{3!}(A - \lambda_0 I_n)^3 + \dots \right) \mathbf{v}_0 = \\ &= e^{\lambda_0 t} \left( \mathbf{v}_0 + t(A - \lambda_0 I_n)\mathbf{v}_0 + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda_0 I_n)^2\mathbf{v}_0 + \dots \right) \end{aligned} \quad (9.7)$$

Ahora bien,  $\mathbf{v}_0$  es un vector propio de  $A$  asociado a  $\lambda_0$ , se tiene que  $(\lambda_0 I_n - A)\mathbf{v}_0 = 0$ . Pero entonces  $(\lambda_0 I_n - A)^2\mathbf{v}_0 = (\lambda_0 I_n - A)(\lambda_0 I_n - A)\mathbf{v}_0 = (\lambda_0 I_n - A)0 = 0$ ,  $(\lambda_0 I_n - A)^3\mathbf{v}_0 = 0$  y así sucesivamente. Por lo tanto

$$e^{tA}\mathbf{v}_0 = e^{\lambda_0 t}\mathbf{v}_0,$$

expresión, que analíticamente es muy simple. El siguiente ejemplo puede ayudar a clarificar estas ideas.

**Ejemplo 9.9** .- Encuéntrese un sistema fundamental de soluciones para el sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores propios de  $A$ :

$$\det(\lambda I_3 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 & -1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 1 & 3 & \lambda + 3 \end{pmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)^2.$$

De modo que los valores propios de  $A$  son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = -2$ , el primero tiene multiplicidad algebraica 1 y el segundo tiene multiplicidad algebraica 2.

Calculemos un vector propio para  $\lambda_1 = -1$ :

$$(\lambda_1 I_3 - A)\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow (-1I_3 - A)\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente  $\det((-1I_3 - A)) = 0$ , como debe ser, y la submatriz formada por las filas 1 y 3 y las columnas 1 y 2 es

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

que tiene determinante distinto de cero. Así pues,  $\text{rang}(-2I_3 - A) = 2$  y la multiplicidad geométrica de  $\lambda_1 = -1$  es  $n - \text{rang}(-2I_3 - A) = 1$ . Esto ya lo sabíamos después de la Observación 8.16 de la Lección 8 porque este valor propio tiene multiplicidad algebraica 1.

Utilizando la submatriz seleccionada, despejamos  $v_1$  y  $v_2$  en función de  $v_3$ :

$$\begin{cases} -2v_2 = v_3 \\ v_1 + 3v_2 = -2v_3 \end{cases} \Rightarrow v_1 = -v_3/2 \quad \text{y} \quad v_2 = -v_3/2.$$

Tomando  $v_3 = -2$ , tenemos que un vector propio asociado a  $\lambda_1 = -1$  es

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Tal y como hemos visto más arriba una solución del sistema es  $\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1$ . En nuestro caso:

$$\mathbf{x}_1 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Hallamos ahora vectores propios linealmente independientes asociados a  $\lambda_2 = -2$  que tiene multiplicidad algebraica 2. ¿Cuántos podemos encontrar?. Tanto como su multiplicidad geométrica. Calculémosla.

$$\lambda_2 I_3 - A = -2I_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde luego el determinante de esta matriz debe ser 0, y lo es porque tiene las columnas primera y tercera iguales. Además, la submatriz de tamaño  $2 \times 2$  formada por las dos primeras filas y columnas

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tiene determinante distinto de cero. Esto significa que  $\text{rang}(-2I_3 - A) = 2$  y que la multiplicidad geométrica de  $\lambda_2 = -2$  es  $n - \text{rang}(-2I_3 - A) = 3 - 2 = 1$ . En consecuencia el subespacio propio de  $A$  asociado al valor propio  $\lambda_2 = -2$  es 1 y no podemos encontrar dos vectores propios linealmente independientes asociados a este valor propio. Calculemos un vector propio. Usamos la submatriz seleccionada para despejar  $v_1$  y  $v_2$  en función de  $v_3$ :

$$\begin{cases} -v_1 - 2v_2 = v_3 \\ -v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = -v_3 \quad \text{y} \quad v_2 = 0.$$

Tomando  $v_3 = -1$ , obtenemos un vector propio:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Y con éste, otra solución del sistema

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es claro que  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  son linealmente independientes. Es éste un hecho que no tenemos que comprobar en cada ejemplo porque hay un resultado general de Álgebra Lineal que nos asegura que a valores propios distintos les corresponde vectores propios linealmente independientes. De esta forma, con seguridad,  $\mathbf{x}_1(t)$  y  $\mathbf{x}_2(t)$  son linealmente independientes.

Pero necesitamos una tercera solución que no podemos conseguir a base de vectores propios porque no hay más vectores propios linealmente independientes. Revisitamos la ecuación (9.7). Conseguimos una buena expresión analítica de la solución porque el vector propio hacía que todos los sumando de la expansión en serie de potencias de  $e^{t(A - \lambda_0 I_n)}$  fueran cero a partir del segundo sumando (truncamiento de la serie a partir del segundo sumando). Para los

dos valores propios de la matriz  $A$  de nuestro ejemplo ya no hay más vectores propios que produzcan este truncamiento de la serie. Pero puede haber otros vectores que produzcan el truncamiento a partir de algún otro sumando. Esto sólo puede suceder con valores propios cuya multiplicidad geométrica sea estrictamente menor que su multiplicidad algebraica. De nuevo éste es un resultado importante de Álgebra Lineal que damos sin demostración:

**Teorema 9.10** .- Si  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  con multiplicidad algebraica  $q$  hay un entero  $p \leq q$  tal que  $\text{rang}(\lambda I_n - A)^p = n - q$ .

Si aplicamos este Teorema a nuestro ejemplo y al valor propio  $\lambda_1 = -1$  tenemos que su multiplicidad algebraica es 1 (i.e.  $q = 1$ ). Y hemos visto que  $\text{rang}(\lambda_1 I_3 - A) = 2$ . Por lo tanto  $p = 1$ . Sin embargo, para  $\lambda_2 = -2$  su multiplicidad algebraica es 2 y  $\text{rang}(\lambda_2 I_3 - A) = 2$ , de modo que  $p \neq 1$ , por lo que debe ser  $p = 2$ . En otras palabras,

$$\text{rang}(\lambda_2 I_3 - A)^2 = n - q = 3 - 2 = 1,$$

y el sistema  $(\lambda_2 I_3 - A)^2 \mathbf{v} = 0$  tiene dos soluciones linealmente independientes. Una de ellas es el vector propio,  $\mathbf{v}_2$ , asociado a  $\lambda_2 = -2$  porque como  $(\lambda_2 I_3 - A)\mathbf{v}_2 = 0$  también  $(\lambda_2 I_3 - A)^2 \mathbf{v}_2 = 0$ . El Teorema 9.10 nos asegura que hay otro vector linealmente independiente con  $\mathbf{v}_2$  que es solución de  $(\lambda_2 I_3 - A)^2 \mathbf{v} = 0$ . Para hallarlo, calculamos

$$(\lambda_2 I_3 - A)^2 = (-2I_3 - A)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

que, en efecto, tiene rango 1. Seleccionamos una submatriz no nula de tamaño  $1 \times 1$ , por ejemplo, la formada por el 1 en la posición  $(1, 2)$  y despejamos  $v_2$  en función de  $v_1$  y  $v_3$ . En este caso, esto se reduce a la condición  $v_2 = 0$  porque  $v_1$  y  $v_3$  están, ambas, afectadas por coeficientes 0. Así la solución general del sistema es

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Necesitamos un vector de esta forma pero que sea linealmente independiente con

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Notamos que este vector corresponde a la solución cuando se escoge  $v_1 = 1$  y  $v_3 = -1$ . Para el restante vector linealmente independiente tenemos muchas posibles elecciones. Siempre es una buena idea escoger una muy simple; por ejemplo  $v_1 = 1$  y  $v_3 = 0$ . No debemos

preocuparnos en absoluto de los vectores calculados para los demás valores propios: con seguridad, tal y como hemos mencionado más arriba, son linealmente independientes de éstos. Así pues

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nos queda un último paso: calcular la solución del sistema diferencial  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  correspondiente a este vector. Esta solución es  $e^{tA}\mathbf{v}_3$ . Procediendo como en (9.7)

$$e^{tA}\mathbf{v}_3 = e^{-2t} \left( \mathbf{v}_3 + t(A + 2I_3)\mathbf{v}_3 + \frac{t^2}{2!}(A + 2I_3)^2\mathbf{v}_3 + \cdots \right)$$

Pero  $\mathbf{v}_3$  es solución del sistema  $(-2I_3 - A)^2\mathbf{v} = 0$ . Por consiguiente  $(A + 2I_3)^2\mathbf{v}_3 = 0$  y lo mismo sucede con las siguientes potencias. Es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_3(t) &= e^{tA}\mathbf{v}_3 = \\ &= e^{-2t}(\mathbf{v}_3 + t(A + 2I_3)\mathbf{v}_3) = \\ &= e^{-2t} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 1+t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tal y como hemos visto en este ejemplo, cuando los valores propios tienen multiplicidad algebraica mayor que 1, podemos calcular soluciones adicionales buscando vectores que solucionen un sistema de la forma  $(\lambda I_n - A)^p \mathbf{v} = 0$  para  $p > 1$ . El  $p$  necesario viene dado, según el Teorema 9.10, por la condición  $\text{rang}(\lambda I_n - A)^p = n - q$  siendo  $q$  la multiplicidad algebraica del valor propio  $\lambda$ . A los vectores  $\mathbf{v}$  que son solución de un sistema de la forma  $(\lambda I_n - A)^p \mathbf{v} = 0$  para algún  $p > 1$  se les llama **vectores propios generalizados**. Y al subespacio de vectores propios generalizados; esto es, el subespacio solución del sistema  $(\lambda I_n - A)^p \mathbf{v} = 0$ , para  $p > 1$ , se le llama **subespacio propio generalizado** de  $A$  asociado al valor propio  $\lambda$ . Y el número  $n - \text{rang}(\lambda I_n - A)^p$ , que nos da el número de soluciones linealmente independientes en el correspondiente subespacio generalizado, es la **dimensión** del subespacio propio generalizado.

A modo de resumen de todo lo visto hasta este momento exponemos un procedimiento en tres pasos para calcular  $q$  soluciones linealmente independientes correspondientes a un valor propio  $\lambda$  de multiplicidad algebraica  $q$ :

- 1 Encontrar el número entero más pequeño tal que  $\text{rang}(\lambda I_n - A)^p = n - q$ .



- 2 Hallar  $q$  vectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q$ , linealmente independientes que sean solución del sistema  $(\lambda I_n - A)^p \mathbf{v} = 0$ .
- 3 Para cada vector  $\mathbf{v}_j$ ,  $1 \leq j \leq q$  tenemos la solución

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j(t) &= e^{tA} \mathbf{v}_j = \\ &= e^{\lambda t} \left( \mathbf{v}_j + t(A - \lambda I_n) \mathbf{v}_j + \frac{t^2}{2!} (A - \lambda I_n)^2 \mathbf{v}_j + \dots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} (A - \lambda I_n)^{p-1} \mathbf{v}_j \right). \end{aligned}$$

Los  $q$  vectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q$  del paso 2 es conveniente, aunque no imprescindible, escogerlos de la siguiente forma: Si para  $j = 1, \dots, p$ ,  $r_j = n - \text{rang}(\lambda I_n - A)^j$  es la dimensión del subespacio de soluciones del sistema  $(\lambda I_n - A)^j \mathbf{v} = 0$  (i.e., el número de posibles soluciones linealmente independientes) entonces se escogen  $r_1$  vectores linealmente independientes que sean solución de  $(\lambda I_n - A) \mathbf{v} = 0$  (i.e.,  $r_1$  vectores propios), a continuación,  $r_2$  vectores linealmente independientes que sean solución de  $(\lambda I_n - A)^2 \mathbf{v} = 0$  y que sean linealmente independientes con los  $r_1$  ya previamente elegidos. A continuación  $r_3$  vectores linealmente independientes que sean solución de  $(\lambda I_n - A)^3 \mathbf{v} = 0$  y que sean linealmente independientes con los  $r_1 + r_2$  ya previamente elegidos. Y así sucesivamente. Enseguida pondremos algunos ejemplos.

El procedimiento en tres pasos descrito más arriba resuelve completamente el problema de calcular un conjunto fundamental de soluciones. Sólo es necesario llevar a cabo este procedimiento para cada valor propio. De esta forma, para cada valor propio,  $\lambda_j$ , de multiplicidad algebraica  $q_j$ , encontramos  $q_j$  soluciones del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  que son linealmente independientes. Si  $A$  tiene  $k$  valores propios distintos, la suma de sus multiplicidades algebraicas es  $n$ . Por lo tanto obtenemos  $q_1 + \dots + q_k = n$  soluciones del sistema diferencial  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ . Admitiendo, sin demostración, que a valores propios distintos corresponden soluciones linealmente independientes, obtenemos, de esta forma, un sistema fundamental de soluciones.

Debemos observar que si el valor propio  $\lambda$  es un número real con multiplicidad algebraica  $q$  y  $\mathbf{x}_j(t)$  es una de las soluciones obtenidas por el procedimiento en tres pasos descrito más arriba, entonces

$$\mathbf{x}_j(t) = e^{\lambda t} \left( \mathbf{v}_j + t(A - \lambda I_n) \mathbf{v}_j + \frac{t^2}{2!} (A - \lambda I_n)^2 \mathbf{v}_j + \dots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} (A - \lambda I_n)^{p-1} \mathbf{v}_j \right).$$

Esta solución es el producto de  $e^{\lambda t}$  y un polinomio de grado menor que  $q$ .

Si el valor propio  $\lambda$  es un número complejo no real, digamos  $\lambda = \alpha + i\beta$  con  $\beta \neq 0$  entonces también  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  es valor propio de  $A$  (ver Anexo sobre los números complejos). Los correspondientes vectores propios tienen la misma propiedad: si  $\mathbf{v} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$  es un vector propio asociado a  $\lambda$  entonces  $\mathbf{v} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$  es un vector propio asociado a  $\bar{\lambda}$ . En efecto, como  $\lambda = \alpha + i\beta$  es valor propio de  $A$  y  $\mathbf{v} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$  es un vector propio asociado a  $\lambda$  entonces

$A\lambda = \lambda v$ . Así

$$Av = A(a + ib) = Aa + iAb.$$

Y por otra parte

$$\lambda v = (\alpha + i\beta)(a + ib) = \alpha a - \beta b + i(\alpha b + \beta a).$$

Como  $Av = \lambda v$  y dos números complejos son iguales si coinciden sus partes reales e imaginarias, concluimos que

$$Aa = \alpha a - \beta b \quad \text{y} \quad Ab = \alpha b + \beta a.$$

Pero entonces

$$A\bar{v} = Aa - iAb = \alpha a - \beta b - i(\alpha b + \beta a) = (\alpha - i\beta)(a - ib) = \bar{\lambda}\bar{v},$$

tal y como deseábamos probar.

El procedimiento en tres pasos de más arriba aplicado a un valor propio complejo  $\lambda = \alpha + i\beta$  proporciona soluciones complejas conjugadas en pares. La aritmética con números complejos, aunque conceptualmente igual que la de los números reales, cuando se realiza a mano es un poco más costosa en tiempo. Tiene la ventaja que, como los valores propios aparecen en pares conjugados, sólo hay que calcular los vectores propios y los vectores propios generalizados para uno de los dos valores propios conjugados. Los vectores propios y los generalizados del otro valor propio son los conjugados del primero. Más abajo veremos un ejemplo para aclarar esta situación. A partir de las soluciones complejas es fácil conseguir soluciones reales. El procedimiento es el siguiente:

- 1 Encontrar el número entero más pequeño tal que  $\text{rang}(\lambda I_n - A)^p = n - q$ .
- 2 Hallar  $q$  vectores  $w_1, w_2, \dots, w_q$ , linealmente independientes que sean solución del sistema  $(\lambda I_n - A)^p w = 0$ . Estos vectores serán, en general, complejos.
- 3 Para cada vector  $w_j$ ,  $1 \leq j \leq q$  tenemos la solución

$$\begin{aligned} z_j(t) &= e^{tA} w_j = \\ &= e^{\lambda t} \left( w_j + t(A - \lambda I_n)w_j + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda I_n)^2 w_j + \dots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}(A - \lambda I_n)^{p-1} w_j \right). \end{aligned}$$

Como  $\lambda$  es complejo y  $w_j$  es complejo esta solución es compleja. Para obtener soluciones reales tenemos que dar un paso más

- 4 Para  $1 \leq j \leq q$ , ponemos  $x(t) = \text{Re} z_j(t)$  (parte real de  $z_j(t)$ ) y  $y_j(t) = \text{Im} z_j(t)$  (parte imaginaria de  $z_j(t)$ ). Estas soluciones ya son reales. Obteniendo así  $2q$  soluciones para los valores propios conjugados  $\lambda$  y  $\bar{\lambda}$ .

Empleando la fórmula de Euler (ver Anexo sobre los números complejos) cada una de las soluciones  $\mathbf{x}_j(t)$ ,  $\mathbf{y}_j(t)$  tiene la siguiente forma:

$$e^{\alpha t}[P(t) \cos \beta t + Q(t) \sen \beta t]$$

siendo  $P$  y  $Q$  polinomios de grado menor que  $q$ .

Concretamos todo este procedimiento en tres ejemplos

**Ejemplo 9.11** .- Encuéntrese un sistema fundamental de soluciones para el sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  siendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de  $A$  es

$$\det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2).$$

Los valores propios son  $\lambda_1 = 2$  con multiplicidad algebraica  $q_1 = 1$  y  $\lambda_2 = -1$  con multiplicidad algebraica  $q_2 = 2$ .

Calculamos un vector propio para  $\lambda_1 = 2$ :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Claramente  $\det(2I_3 - A) = 0$  y su rango es 2 (como debe ser porque por ser  $q_1 = 1$ , la multiplicidad geométrica también es 1). Una submatriz de tamaño  $2 \times 2$  con determinante distinto de cero es

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Usando esta submatriz despejamos  $v_1$  y  $v_2$  en función de  $v_3$  obteniendo

$$v_1 = 0 \quad \text{y} \quad v_2 = \frac{1}{2}v_3$$

Tomando  $v_3 = 2$ , un vector propio asociado a  $\lambda_1 = 2$  es

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Y una solución del sistema:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{tA}\mathbf{v}_1 = e^{2t}\mathbf{v}_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Para el valor propio  $\lambda = -1$  calculamos tantos vectores propios como podamos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (9.8)$$

De nuevo  $\det(-1I_3 - A) = 0$  y su rango es 2. Por lo tanto, la multiplicidad geométrica de  $\lambda_2 = -1$  es  $n - \text{rang}(-1I_3 - A) = 3 - 2 = 1$ . La dimensión del subespacio propio es 1. No podemos encontrar dos vectores propios linealmente independientes. Debemos obtener un vector propio generalizado. Planteamos el sistema  $(-1I_3 - A)^2\mathbf{v} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 18 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (9.9)$$

Ahora  $\text{rang}(-1I_3 - A)^2 = 1$  y el espacio de soluciones del sistema  $(-1I_3 - A)^2\mathbf{v} = 0$  es  $2 = q_2$ . Podemos encontrar dos soluciones linealmente independientes. Una la calculamos como solución del sistema  $(-1I_3 - A)\mathbf{v} = 0$ ; i. e. un vector propio. Este sistema ya está planteado más arriba (9.8). Una submatriz  $2 \times 2$  con determinante distinto de cero es, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix},$$

que corresponde a despejar  $v_2$  y  $v_3$  en función de  $v_1$ . La solución que se obtiene es

$$v_2 = 0 \quad \text{y} \quad v_3 = 0.$$

Tomando  $v_1 = 1$ , un vector propio será

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y una solución del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{tA}\mathbf{v}_2 = e^{-t}\mathbf{v}_2 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación resolvemos el sistema (9.9). Ya sabemos que el rango de la matriz de este sistema es 1. Una submatriz de tamaño  $1 \times 1$  distinta de cero es, por ejemplo, la formada

por el elemento en la posición (2, 2). Así despejamos  $v_2$  en función de  $v_1$  y  $v_3$  en la segunda ecuación

$$9v_2 = 9v_3 \Rightarrow v_2 = v_3$$

La solución general de este sistema es

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

debemos escoger un vector linealmente independientes con  $\mathbf{v}_2$ . Basta escoger  $v_1 = 0$  y  $v_3 = 1$ , por ejemplo. Así, un vector propio generalizado asociado al valor propio  $\lambda_2 = -1$  es

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y la solución correspondiente del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  es:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_3(t) &= e^{tA}\mathbf{v}_3 = \\ &= e^{-t}(\mathbf{v}_3 + t(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{v}_3) = \\ &= e^{-t} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La solución general del sistema sería

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + c_3\mathbf{x}_3(t) = \begin{pmatrix} c_2e^{-t} - c_3te^{-t} \\ c_1e^{2t} + c_3e^{-t} \\ 2c_1e^{2t} + c_3e^{-t} \end{pmatrix}$$

Para sistemas de dimensión  $n \leq 3$  se pueden hacer las operaciones a mano. Para sistemas de dimensión mayor, el trabajo se convierte en tedioso y conceptualmente no aporta nada nuevo. Por ello es recomendable el uso del ordenador para calcular los valores y vectores propios. Recordemos que en la página <http://wims.unice.fr/wims/> se proporciona los programa **Matrix Calculator**, **Factoris**, **Matrix Multiplier** y **Solucionador de sistemas lineales**, que nos permiten calcular los valores y vectores propios (incluso los generalizados) de una matriz. Explicaremos cómo hacer esto último en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 9.12** .- Hállese un sistema fundamental de soluciones y la solución general del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & -5 & 4 \\ -4 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz del sistema es la misma que la del Ejemplo 8.18 de la Lección 8 para la que obtuvimos el siguiente resultado: tiene dos valores propios  $\lambda_1 = -1$  de multiplicidad algebraica  $q_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 1$  de multiplicidad algebraica  $q_2 = 3$ . Para el primero tenemos el vector propio

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

con lo que una solución del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  asociada a este valor propio es:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{tA}\mathbf{v}_1 = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 = e^{-t}\mathbf{v}_1 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para el segundo valor propio tenemos dos vectores propios (usamos los proporcionados por el sistema WIMS):

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Esto indica que la multiplicidad geométrica del valor propio  $\lambda_2 = 1$  es 2. Como su multiplicidad algebraica es 3, necesitamos un vector propio generalizado. Pero podemos dar ya dos soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales correspondientes a estos vectores:

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_3(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_3 = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nos falta una solución que debe provenir de un vector propio generalizado asociado a  $\lambda_2 = 1$ . Calculamos  $(\lambda_2 I_n - A)^2 = (I_4 - A)^2$  y resolvemos el sistema  $(I_4 - A)^2 \mathbf{v} = 0$ . Lo hacemos con ayuda de WIMS: Seleccionamos el programa **Matrix calculator** para hallar que  $\text{rang}((I_4 - A)^2) = 1$ , por lo que la dimensión del espacio de soluciones de  $(I_4 - A)^2 \mathbf{v} = 0$

es  $3 = q_2$ , la multiplicidad algebraica de  $\lambda_2 = 1$ . Esto significa que podemos encontrar 3 soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo  $(I_4 - A)^2 \mathbf{v} = 0$ . Ya hemos obtenido dos de ellas: los vectores propios. Necesitamos una tercera. Por ello hallamos la solución general del sistema  $(I_4 - A)^2 \mathbf{v} = 0$  con **Solucionador de sistemas lineales**, y obtenemos

$$x_1 = -(2r_3 - r_2 + r_1)/2, x_2 = r_3, x_3 = r_2, x_4 = r_1$$

La solución  $\mathbf{v}_2$  se obtiene dando los valores  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 2$  y  $r_3 = 0$ , mientras que la solución  $\mathbf{v}_3$  se obtiene dando los valores  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = 1$  y  $r_3 = 1$ . Necesitamos una tercera elección de forma que el vector  $\mathbf{v}_4$  que obtengamos sea linealmente independiente con  $\mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$ . Ponemos

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

Las dos elecciones de  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  hechas más arriba nos proporcionan los vectores  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  que son linealmente independientes:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hay que escoger un tercer vector  $\mathbf{r}$  linealmente independiente con estos dos. Una forma de hacerlo es escoger la tercera columna de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & r_1 \\ 2 & 1 & r_2 \\ 0 & 1 & r_3 \end{pmatrix}$$

para que su determinante sea distinto de cero. Una posibilidad es  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = r_3 = 0$ . Pero con un ojo puesto en la expresión de  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  y  $x_4$ , una mejor elección es  $r_1 = -2$ ,  $r_2 = r_3 = 0$ . Así  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$  y  $x_4 = -2$ . Entonces

$$\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Y la cuarta solución del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  será

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_4(t) &= e^{tA}\mathbf{v}_4 = \\ &= e^t(\mathbf{v}_4 + t(A - I_4)\mathbf{v}_4) = \\ &= e^t\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \\ &= e^t\begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 0 \\ 4t \\ -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nótese que en efecto, todas las soluciones son de la forma  $e^{\lambda_i t}P(t)$  con  $P(t)$  un polinomio de grado menor que  $q_i$ .

La solución general del sistema

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + c_3\mathbf{x}_3(t) + c_4\mathbf{x}_4(t) = \\ &= c_1e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_4e^t\begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 0 \\ 4t \\ -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_1e^{-t} + (c_2 + c_4(1 + 2t))e^t \\ c_3e^t \\ 2c_1e^{-t} + (2c_2 + c_3 + 4c_4)e^t \\ -c_1e^{-t} - (c_3 + 2c_4)e^t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Necesitamos, finalmente un ejemplo con números complejos.

**Ejemplo 9.13** .- Calcúlese un sistema fundamental de soluciones del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  siendo

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -3 & 2 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \\ 8 & 7 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Usando **Matrix calculator** obtenemos la siguiente tabla:

Value	Multiplicity	Vector
$-1 - i$	2	$(1, 0, 2, -(i + 1)/2)$
$-1 + i$	2	$(1, 0, 2, (i - 1)/2)$



Haciendo el desarrollo más amplio como en el ejercicio anterior se obtiene el mismo resultado. Vemos que los dos valores propios  $\lambda_1 = -1 + i$  y  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -1 - i$  son conjugados y tienen la misma multiplicidad algebraica  $q_1 = q_2 = 2$ . Además como sólo obtenemos un vector propio para cada uno de ellos (obsérvese que son también conjugados), su multiplicidad geométrica es 1. Necesitamos un vector propio generalizado. Para ello calculamos (todos los cálculos los hacemos con ayuda de WIMS)

$$(\lambda_1 I_4 - A)^2 = ((-1 + i)I_4 - A)^2 = \begin{pmatrix} 2 - 14i & 3 - 12i & -2 + 6i & -4i \\ 8i & -2 + 6i & -4i & 0 \\ 8 - 16i & 6 - 14i & -6 + 6i & -8i \\ -2 - 2i & -1 & 1 + 2i & -2 + 2i \end{pmatrix}$$

cuyo rango es 2 de modo que el espacio de soluciones del sistema  $((-1 + i)I_4 - A)^2 \mathbf{v} = 0$  es 2, igual a la multiplicidad algebraica de  $\lambda_1 = -1 + i$ . Hallamos la solución general de este sistema:

$$x_1 = (i(r_2 + 8r_1) + 7r_2 + 4r_1)/8, x_2 = -(r_2 + 2ir_1 + 2r_1)/2, x_3 = r_2, x_4 = r_1$$

Para simplificar los cálculos tomamos como  $\mathbf{w}_1$  el vector

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 + i \end{pmatrix}$$

que también es valor propio asociado a  $\lambda_1 = -1 + i$ . Este vector se obtiene haciendo  $r_1 = (i-1)$  y  $r_2 = 4$ . Poniendo  $r_1 = 2$  y  $r_2 = 0$  obtenemos otro vector linealmente independiente con  $\mathbf{w}_1$ . Así

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 + i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ -2 - 2i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Estos dos vectores nos proporcionan dos soluciones complejas:

$$\mathbf{z}_1(t) = e^{tA} \mathbf{w}_1 = e^{\lambda_1 t} \mathbf{w}_1 = e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 + i \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z}_2(t) &= e^{tA} \mathbf{w}_2 = \\
 &= e^{\lambda_1 t} (\mathbf{w}_2 + t(A - \lambda_2 I_4) \mathbf{w}_2) = \\
 &= e^{(-1+i)t} \left( \begin{pmatrix} 1+2i \\ -2-2i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 2+2i \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \\
 &= e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} (1+t) + (2+t)i \\ -2-2i \\ 2t+2ti \\ 2-t \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Las partes reales y complejas de estas dos soluciones nos proporcionan las 4 soluciones que forman un sistema fundamental de soluciones del sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ . Para ello utilizamos la fórmula de Euler para escribir

$$e^{(-1+i)t} = e^{-t}(\cos t + i \operatorname{sen} t)$$

y multiplicamos

$$\begin{aligned}
 (\cos t + i \operatorname{sen} t) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1+i \end{pmatrix} &= (\cos t + i \operatorname{sen} t) + \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \\
 &= \cos t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \operatorname{sen} t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \left( \operatorname{sen} t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 0 \\ 4 \cos t \\ \operatorname{sen} t - \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \operatorname{sen} t \\ 0 \\ 4 \operatorname{sen} t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

De aquí obtenemos dos soluciones

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 0 \\ 4 \cos t \\ \operatorname{sen} t - \cos t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \operatorname{sen} t \\ 0 \\ 4 \operatorname{sen} t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

Para obtener las otras dos calculamos las partes reales e imaginarias de  $\mathbf{z}_2(t)$ :

$$\begin{aligned}
 (\cos t + i \operatorname{sen} t) \begin{pmatrix} (1+t) + (2+t)i \\ -2 - 2i \\ 2t + 2ti \\ 2 - t \end{pmatrix} &= (\cos t + i \operatorname{sen} t) \left( \begin{pmatrix} 1+t \\ -2 \\ 2t \\ 2-t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2+t \\ -2 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \\
 &= \cos t \begin{pmatrix} 1+t \\ -2 \\ 2t \\ 2-t \end{pmatrix} - \operatorname{sen} t \begin{pmatrix} 2+t \\ -2 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} + i \left( \operatorname{sen} t \begin{pmatrix} 1+t \\ -2 \\ 2t \\ 2-t \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 2+t \\ -2 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \\
 &= \begin{pmatrix} (1+t) \cos t - (2+t) \operatorname{sen} t \\ -2 \cos t + 2 \operatorname{sen} t \\ 2t \cos t - 2t \operatorname{sen} t \\ (2-t) \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} (1+t) \operatorname{sen} t + (2+t) \cos t \\ -2 \operatorname{sen} t - 2 \cos t \\ 2t \operatorname{sen} t - 2t \cos t \\ (2-t) \operatorname{sen} t \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{x}_3(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} (1+t) \cos t - (2+t) \operatorname{sen} t \\ -2 \cos t + 2 \operatorname{sen} t \\ 2t \cos t - 2t \operatorname{sen} t \\ (2-t) \cos t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_4(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} (1+t) \operatorname{sen} t + (2+t) \cos t \\ -2 \operatorname{sen} t - 2 \cos t \\ 2t \operatorname{sen} t - 2t \cos t \\ (2-t) \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

Notemos de nuevo que no se utiliza la información acerca del segundo valor propio  $\lambda_2 = -1 - i$  sino que se saca provecho del hecho de que éste sea el conjugado de  $\lambda_1 = -1 + i$ . Y observemos finalmente que todas las soluciones son de la forma

$$e^{\alpha t} [P(t) \cos \beta t + Q(t) \operatorname{sen} \beta t]$$

siendo  $\lambda = \alpha + i\beta$  el valor propio y  $P(t)$  y  $Q(t)$  polinomios de grado menor que  $q$ , la multiplicidad algebraica de  $\lambda$ .

