PROBABILIDADE

Distribuições

Distribuições de Probabilidade

- Princípio teórico:

" Existe uma função que governa a probabilidade de obtermos determinados valores na observação de uma grandeza "

Função (Densidade) de Probabilidade (fdp)

- " Podemos entender uma distribuição de probabilidades como um equivalente teórico de uma distribuição empírica de freqüências " (Petrie e Watson)

Distribuições de Probabilidade

Variável aleatória: pode assumir diferentes valores, cada qual com uma dada probabilidade

Quantitativas (discreta/contínua)

Variável aleatória binária (0 ou 1, positivo ou negativo)

Distribuições de Probabilidade

Existem variáveis aleatórias que têm uma função de distribuição pertencente a uma classe de *distribuições teóricas*.

As distribuições teóricas, como o próprio nome indica, foram submetidas a estudos prévios e têm propriedades conhecidas; portanto, podem servir como modelo em determinadas situações em que a distribuição esteja identificada, poupando tempo na análise do problema estudado.

Distribuições de Probabilidade

As principais distribuições estudadas são:

- Caso discreto (para atributos)
  - Distribuição binomial
  - Distribuição de Poisson

- Caso contínuo (para variáveis)
  - Distribuição normal
  - Distribuição qui-quadrado
  - Distribuição ***t*** de Student
  - Distribuição ***F***

Distribuição Binomial

- Fenômenos cujos resultados só podem ser de dois tipos, sucesso e insucesso.
- Este fenômeno pode ser repetido tantas vezes quanto se queira (n vezes), nas mesmas condições.
- As provas repetidas devem ser independentes, isto é, o resultado de uma não deve afetar os resultados das sucessivas.
- P(x) = é a probabilidade de que o evento se realize x vezes em n provas.

Distribuição Binomial

- A variável aleatória ***X***, que é igual ao número de provas que resultam em um sucesso, tem uma distribuição binomial com parâmetros ***p*** e **n** em que ***0 < p < 1*** e ***n = {1, 2, 3, ..., n}***.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$Média: \quad E(X) = n\mu = np$$

$$Variância: \quad Var(X) = n\sigma^2 = np(1-p)$$

S T Q Q S S D

usando a formula

$$P(X=k) = \binom{4}{1} p^k (1-p)^{n-k}$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Substitui c/ valores

$$\binom{4}{1} \cdot 0{,}5^1 \cdot (1-0{,}5)^{4-1} = \frac{4!}{3!}$$

$$\frac{4!}{1!\,3!} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5^3 =$$

$$4 \cdot 0{,}5^4$$

$$\boxed{0{,}25}$$

spiral

Distribuição Binomial

Exemplo: Cada peça de uma linha de produção 10% de chance de ser defeituosa. Considere que as amostras sejam independentes e encontre a probabilidade de que, em uma amostra de tamanho 18, exatamente 2 sejam defeituosas.

Seja $\boldsymbol{X}$ = número de amostras defeituosas (sucessos); então, $\boldsymbol{X}$ é a variável aleatória binomial com $\boldsymbol{p = 0{,}1}$ e $\boldsymbol{n = 18}$. Assim,

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \therefore P(X=2) = \binom{18}{2} (0{,}1)^2 (0{,}9)^{16} = 0{,}284$$

Distribuição Binomial

Exemplo: Cada peça de uma linha de produção 10% de chance de ser defeituosa. Considere que as amostras sejam independentes e encontre a probabilidade de que, em uma amostra de tamanho 18, exatamente 2 sejam defeituosas.

$p = 10\% = 0,1 \quad n = 18 \quad K = 2$

$$\binom{18}{2} \cdot 0,1^2 \cdot (1-0,1)^{18-2}$$

$$\frac{18!}{16!\,2!} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{16} \qquad 153 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{16} = 0,284$$

Distribuição Binomial

Exemplo: Seguindo e exemplo anterior, determine a probabilidade de que o número de amostras defeituosas esteja entre 3 e 6.

$$P(3 \le X \le 6) = \sum_{x=3}^{6} \binom{18}{x} (0,1)^{x} (0,9)^{18-x} =$$
$$= 0,168 + 0,070 + 0,022 + 0,005 =$$
$$= 0,265$$

Distribuição Binomial

Congelamento

Exemplo: Seguindo e exemplo anterior, determine a probabilidade de que o número de amostras defeituosas esteja entre 3 e 6.

$n = 18 \quad p = 0,1$

$K=3 \qquad K=4 \qquad K=5 \qquad K=6$

Prob ser 3 + Prob ser 4 + Prob ser 5 + Prob 6

$$\binom{18}{3} \cdot 0,1^{3} \cdot 0,9^{15} + \binom{18}{4} \cdot 0,1^{4} \cdot 0,9^{14} + \binom{18}{5} \cdot 0,1^{5} \cdot 0,9^{13} + \binom{18}{6} \cdot 0,1^{6} \cdot 0,9^{12}$$

$$\frac{18!}{15!\,3!}\, 0,1^{3} \cdot 0,9^{15} + \frac{18!}{14!\,4!} \cdot 0,1^{4} \cdot 0,9^{14} + \frac{18!}{13!\,5!} \cdot 0,1^{5} \cdot 0,9^{13} + \frac{18!}{12!\,6!}\, 0,1^{6} \cdot 0,9^{12}$$

$$0,168 + 0,070 + 0,022 + 0,005 = 0,265$$

Distribuição Binomial

Exercícios:

Um engenheiro de inspeção extrai uma amostra de 15 itens aleatoriamente de um processo de fabricação sabido produzir 85% de itens aceitáveis. Qual a probabilidade de que 10 dos itens extraídos sejam aceitáveis?

Um inspetor de qualidade extrai uma amostra de 10 tubos aleatoriamente de uma carga muito grande de tubos que se sabe que contém 20% de tubos defeituosos. Qual é a probabilidade de que não mais do que 2 dos tubos extraídos sejam defeituosos?

Distribuição Binomial

Exercícios:

$$\frac{\cancel{15} \cdot \cancel{14}^{7} \cdot 13 \cdot \cancel{12}^{3} \cdot 11}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}$$

$n = 15$
$p = 0,85$
$k = 10$

$$\binom{15}{10}\, 0,85^{10} \cdot (1-0,85)^{15-10}$$

$$\frac{15!}{5!\,10!}\; 0,85^{10} \cdot 0,15^{5}$$

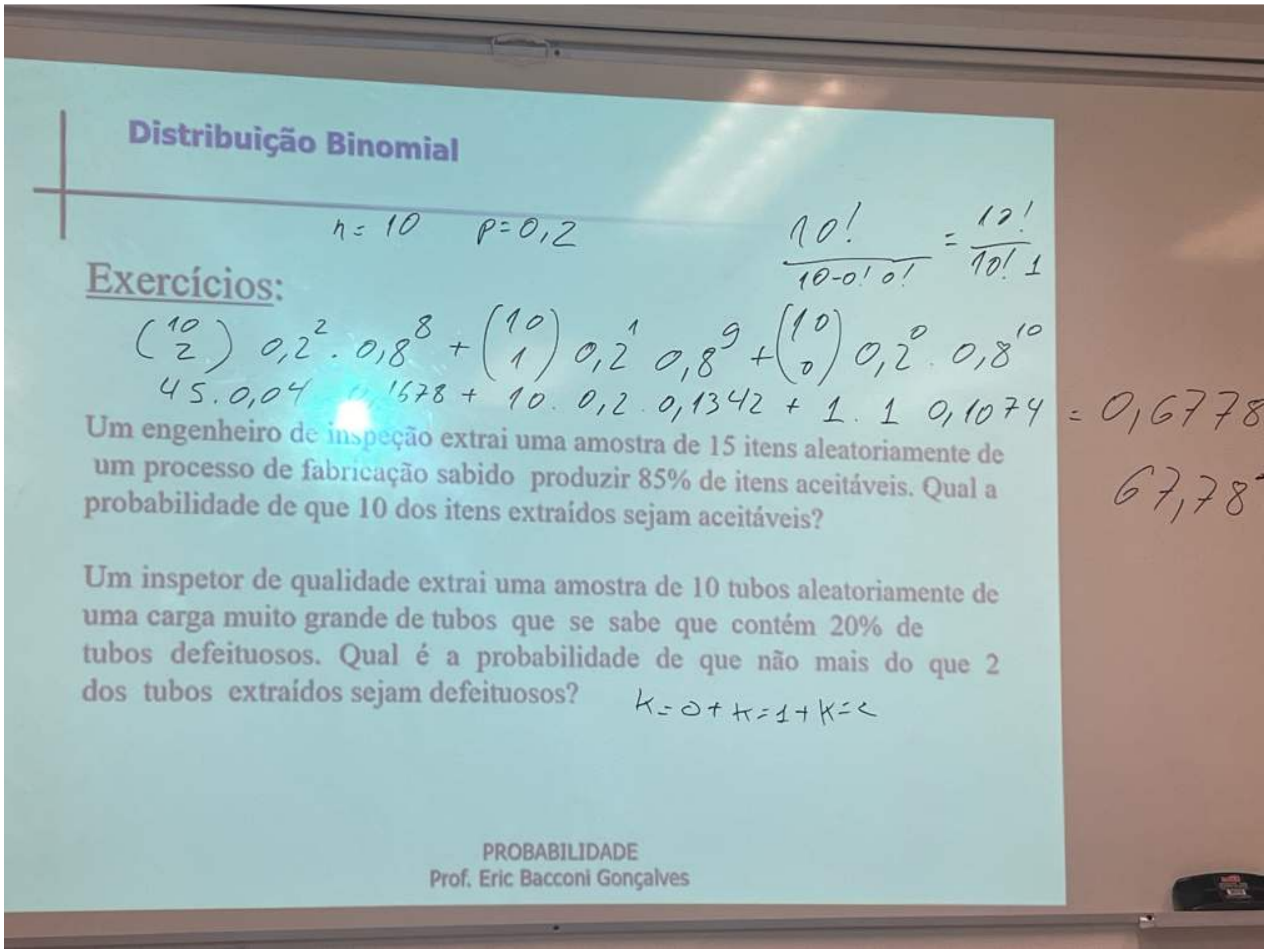
$$3003 \cdot 0,1969 \cdot 0,00008 = 0,0449$$

4,49%

Um engenheiro de inspeção extrai uma amostra de 15 itens aleatoriamente de um processo de fabricação sabido produzir 85% de itens aceitáveis. Qual a probabilidade de que 10 dos itens extraídos sejam aceitáveis?

Um inspetor de qualidade extrai uma amostra de 10 tubos aleatoriamente de uma carga muito grande de tubos que se sabe que contém 20% de tubos defeituosos. Qual é a probabilidade de que não mais do que 2 dos tubos extraídos sejam defeituosos?

e de que não mais do que 2



Distribuição de Poisson

- Nesta distribuição variável aleatória em estudo representa o número de ocorrências de um certo evento ao longo de um intervalo (tempo, comprimento, área ou volume).

- Os valores que a variável aleatória pode assumir são valores inteiros não negativos: 0, 1, ..., n

- O número de ocorrências em intervalos não sobrepostos são variáveis independentes.

- A probabilidade de um certo número de ocorrências se verificar é a mesma para intervalos da mesma dimensão; isto é, a probabilidade depende apenas da amplitude do intervalo e não da posição em que se situa nesse intervalo

Distribuição de Poisson

Se o número médio de ocorrências no intervalo em estudo for $\lambda > 0$, a variável aleatória X, que é igual ao número de ocorrências no intervalo, terá uma distribuição de Poisson, com parâmetro λ, sendo a função de distribuição de X dada por

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad , \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

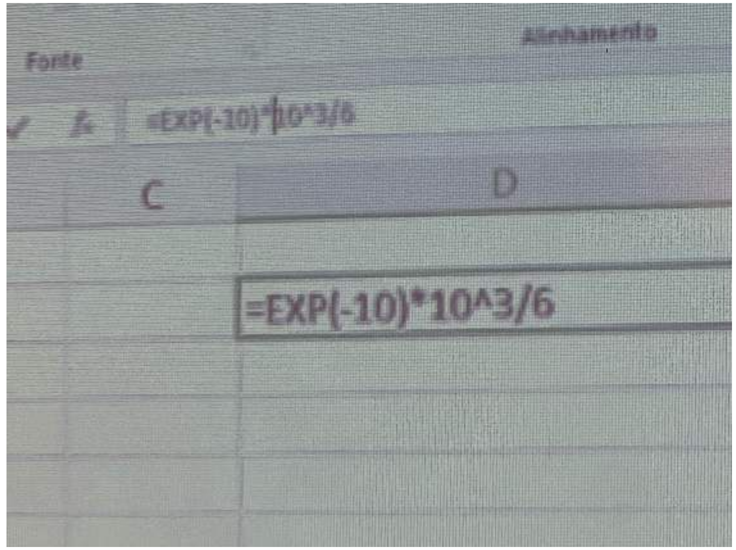
$$\begin{aligned} &Média: && E(X) = \lambda \\ &Variância: && Var(X) = \lambda \end{aligned}$$

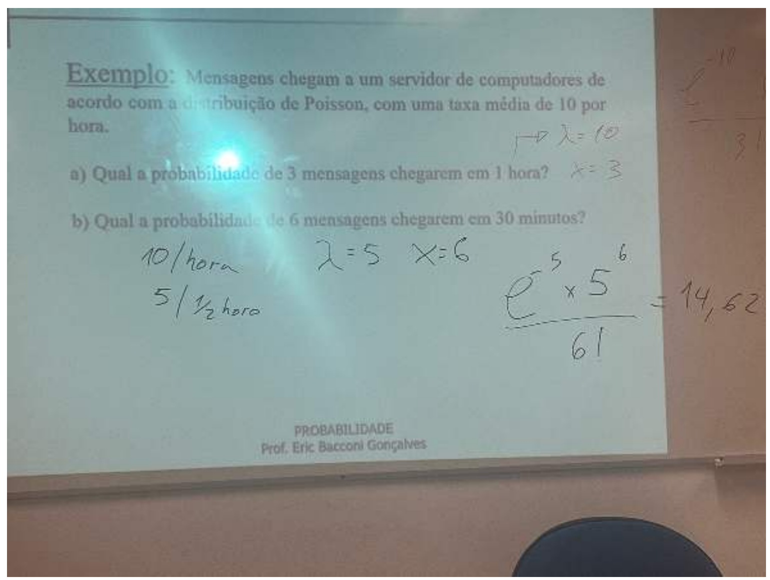
Distribuição de Poisson

Exemplo: Mensagens chegam a um servidor de computadores de acordo com a distribuição de Poisson, com uma taxa média de 10 por hora.

a) Qual a probabilidade de 3 mensagens chegarem em 1 hora?

b) Qual a probabilidade de 6 mensagens chegarem em 30 minutos?


Fonte
Alinhamento
=EXP(-10)*10^3/6
C
D
=EXP(-10)*10^3/6


Exemplo: Mensagens chegam a um servidor de computadores de acordo com a distribuição de Poisson, com uma taxa média de 10 por hora.
λ=10
a) Qual a probabilidade de 3 mensagens chegarem em 1 hora?
x=3
b) Qual a probabilidade de 6 mensagens chegarem em 30 minutos?
10/hora
5/½ hora
λ=5
x=6
e^-5 x 5^6 / 6! = 14,62
PROBABILIDADE
Prof. Eric Bacconi Gonçalves

Distribuição de Poisson

Exemplo:

a) Seja X a representação do número de mensagens em 1 hora. Então $E(X) = 10.1 = 10$ mensagens e

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \therefore P(X = 3) = \frac{e^{-10}10^{3}}{3!} = 0{,}0076$$

b) Seja X a representação do número de mensagens em 30 minutos (0,5 hora). Então $E(X) = 10.0{,}5 = 5$ mensagens e

$$P(X = 6) = \frac{e^{-5}5^{6}}{6!} = 0{,}1462$$

Distribuição de Poisson

Exercício

A experiência passada indica que um número médio de 6 clientes por hora param para colocar gasolina numa bomba.

a) Qual é a probabilidade de 3 clientes pararem qualquer hora?
b) Qual é a probabilidade de 3 clientes ou menos pararem em qualquer h ora?

Para resolver este exercício usando a distribuição de Poisson no Excel, vamos utilizar a função POISSON.DIST. Primeiro, vou explicar como calcular cada item e depois fornecer as fórmulas do Excel.

A distribuição de Poisson é adequada para este problema porque temos:

- Um número médio de eventos ($\lambda = 6$ clientes por hora)
- Eventos independentes
- Uma taxa constante de ocorrência

a) Qual é a probabilidade de 3 clientes pararem qualquer hora?

Para este caso, usamos a probabilidade pontual de Poisson:
λ (lambda) = 6 (média de clientes por hora)
k (número de eventos) = 3
Queremos a probabilidade exata (não cumulativa)

Fórmula Excel:
=POISSON.DIST(3, 6, FALSE)

$\lambda = 6 \quad x = 3$

$$\frac{e^{-6} \cdot 6^{3}}{3!} = 8,92\%$$

=(EXP(-6)*(6^3))/6

D
0,76%
=(EXP(-6)*(6^3))/6
2,23%
1,49%
0,25%

$$\frac{e^{-6} \cdot 6^{2}}{2!} + \frac{e^{-6} \cdot 6^{1}}{1!} + \frac{e^{-6} \cdot 6^{0}}{0!} + 8,92\% =$$

2,23% 1,49% 0,25%

```
A1: Média de clientes por hora
B1: 6

A2: Número de clientes
B2: 3

A4: a) Probabilidade de exatamente 
B4: =POISSON.DIST(B2, B1, FALSE)

A5: b) Probabilidade de 3 clientes 
B5: =POISSON.DIST(B2, B1, TRUE)
```

b) Qual é a probabilidade de 3 clientes ou menos pararem em qualquer hora?

Neste caso, usamos a probabilidade cumulativa de Poisson:
λ (lambda) = 6 (média de clientes por hora)
k (número de eventos) = 3
Queremos a probabilidade cumulativa

Fórmula Excel:
=POISSON.DIST(3, 6, TRUE)

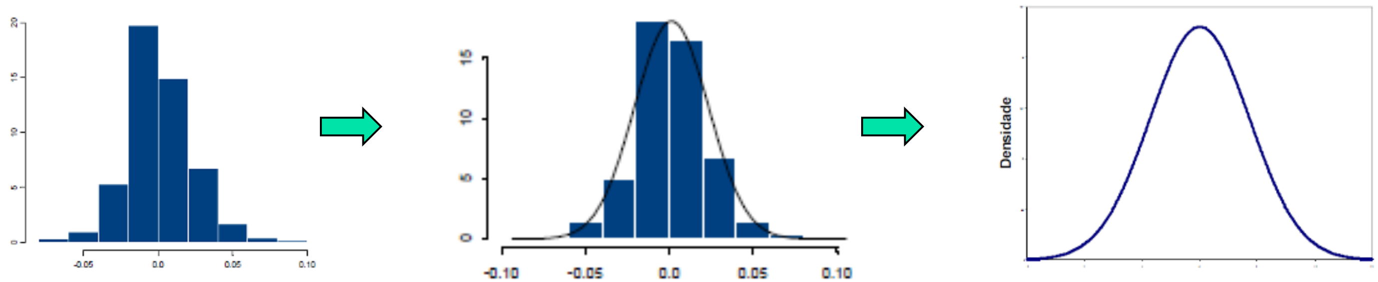
Cálculo de Probabilidade de Poisson no Excel
Click to open code

Neste artefato Excel:

1. As células A1 e B1 contêm a média de clientes por hora ($\lambda = 6$).
2. As células A2 e B2 contêm o número de clientes que estamos considerando ($k = 3$).
3. A célula B4 calcula a probabilidade para a questão (a) usando POISSON.DIST com FALSE para probabilidade pontual.
4. A célula B5 calcula a probabilidade para a questão (b) usando POISSON.DIST com TRUE para probabilidade cumulativa.

Você pode copiar essas fórmulas para uma planilha Excel e obter os resultados. Quer que eu explique mais detalhadamente como interpretar esses resultados?

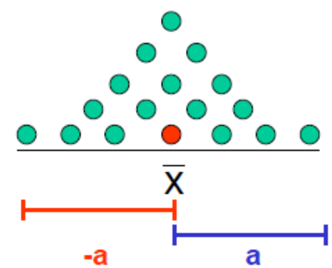
Distribuição Normal



Como saber se os dados seguem um modelo normal?

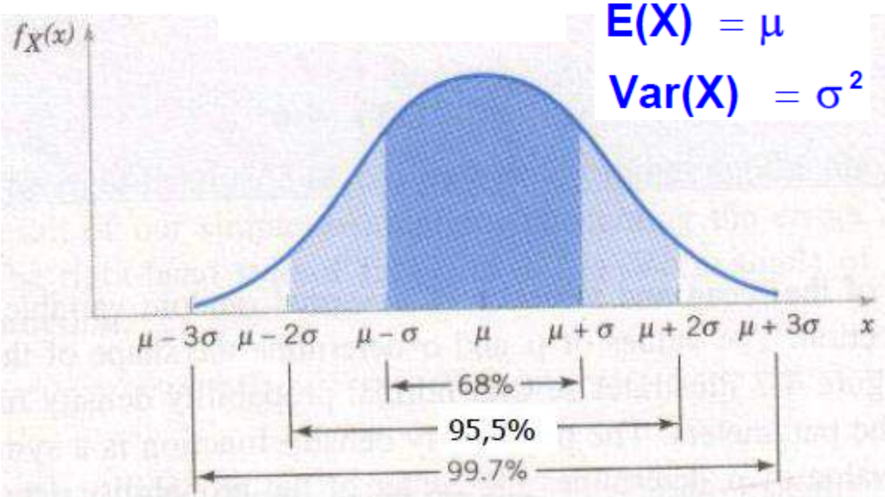
- Simetria
- Curtose: peso das caudas
  - Caudas pesadas = tendência a apresentar valores distantes da média
  - Caudas leves = a tendência acima é mais fraca

Distribuição simétrica



Numa distribuição simétrica, a média é o ponto de equilíbrio. Isso quer dizer que se existir um ponto a uma distância **a** acima da média existirá um outro ponto, localizado à mesma distância abaixo da média.

Distribuição Normal



E(X) $= \mu$

Var(X) $= \sigma^2$

Johann Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 1777 – Göttingen, 1855)

Trabalhou em diversos campos da Matemática e da Física, entre eles a Teoria dos Números, Geometria Diferencial, Magnetismo, Astronomia e Óptica. Seu trabalho influenciou imensamente outras áreas.

Em probabilidade e estatística ficou famoso pelo desenvolvimento do método dos mínimos quadrados e pela descoberta da distribuição normal, agora também conhecida como a *Distribuição Gaussiniana*, a conhecida lei de probabilidade, definida graficamente por meio da chamada *Curva de Gauss*.

$$\boxed{X \sim N(\mu;\sigma^2)}$$

$$\boxed{f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}, \quad -\infty < X < +\infty$$

1) A distribuição é simétrica em relação a $x = \mu$, ou seja, nesse ponto a curva se divide em duas partes iguais.

2) A função f(x) tem um ponto de máximo para $x = \mu$.

3) As "caudas" da função f(x) são chamadas "assintóticas", ou seja, só atingem o ponto f(x) = 0 quando x tende a + infinito ou – infinito. Isso quer dizer que a curva jamais cruza o eixo x.

4) A função f(x) tem dois pontos de inflexão para $x = \mu + \sigma$ e $x = \mu - \sigma$. Nesses pontos a função acentua sua curvatura.

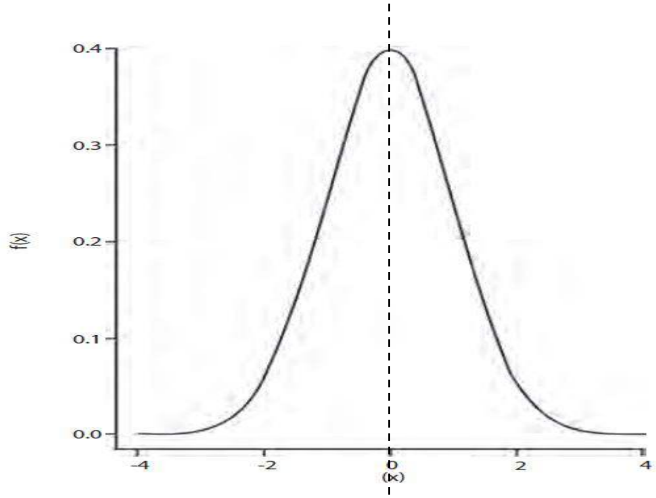
Distribuição Normal Padrão

- Mas é possível criar uma Variável Aleatória Z, com distribuição Normal, mas com Média Zero e Variância 1.

- Basta realizar a seguinte conta para todas as observações.

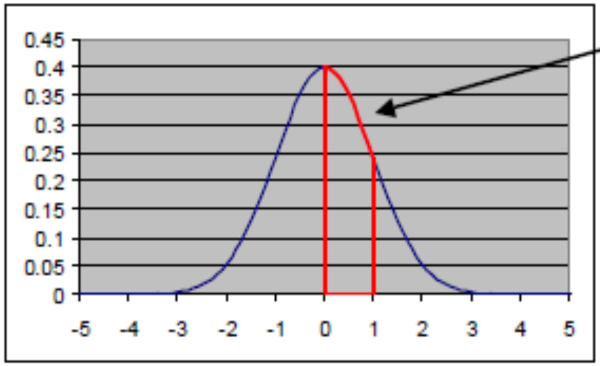
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow Z \sim N(0; 1).$$

que é a *variável normal padronizada* ou *reduzida Z*.



Distribuição Normal Padrão Acumulada

Qual a probabilidade da v. a. *Z* com distribuição normal padrão estar entre 0 e 1?



$P(0 \le Z \le 1{,}0)$

$P[0 <= Z <= 1] = P[Z <= 1] – P[Z < 0] =$

Função Distribuição Acumulada da Distribuição Normal Padrão

Distribuição de Probabilidade Normal Acumulada

$$P\{Z \leq Z_o\} = \Phi(Z_o)$$

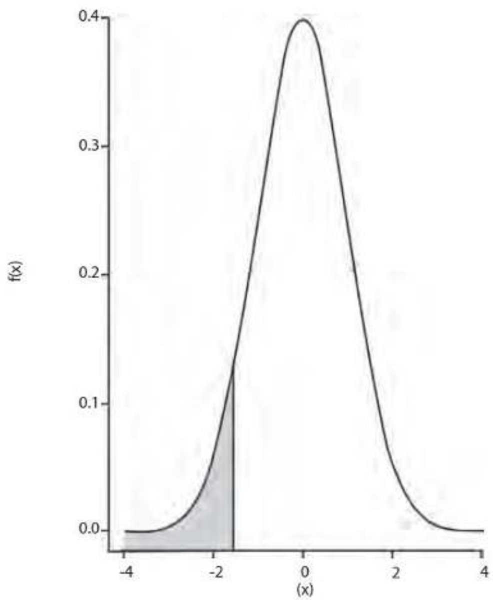
Zo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3,9	0,000048	0,000046	0,000044	0,000042	0,000041	0,000039	0,000037	0,000036	0,000034	0,000033
-3,8	0,000072	0,000069	0,000067	0,000064	0,000062	0,000059	0,000057	0,000054	0,000052	0,000050
-3,7	0,000108	0,000104	0,000100	0,000096	0,000092	0,000088	0,000085	0,000082	0,000078	0,000075
-3,6	0,000159	0,000153	0,000147	0,000142	0,000136	0,000131	0,000126	0,000121	0,000117	0,000112
-3,5	0,000233	0,000224	0,000216	0,000208	0,000200	0,000193	0,000185	0,000178	0,000172	0,000165
-3,4	0,000337	0,000325	0,000313	0,000302	0,000291	0,000280	0,000270	0,000260	0,000251	0,000242
-3,3	0,000483	0,000466	0,000450	0,000434	0,000419	0,000404	0,000390	0,000376	0,000362	0,000349
-3,2	0,000687	0,000664	0,000641	0,000619	0,000598	0,000577	0,000557	0,000538	0,000519	0,000501
-3,1	0,000968	0,000935	0,000904	0,000874	0,000845	0,000816	0,000789	0,000762	0,000736	0,000711
-3	0,001350	0,001306	0,001264	0,001223	0,001183	0,001144	0,001107	0,001070	0,001035	0,001001
-2,9	0,001866	0,001807	0,001750	0,001695	0,001641	0,001589	0,001538	0,001489	0,001441	0,001395
-2,8	0,002555	0,002477	0,002401	0,002327	0,002256	0,002186	0,002118	0,002052	0,001988	0,001926
-2,7	0,003467	0,003364	0,003264	0,003167	0,003072	0,002980	0,002890	0,002803	0,002718	0,002635
-2,6	0,004661	0,004527	0,004396	0,004269	0,004145	0,004025	0,003907	0,003793	0,003681	0,003573
-2,5	0,006210	0,006037	0,005868	0,005703	0,005543	0,005386	0,005234	0,005085	0,004940	0,004799
-2,4	0,008198	0,007976	0,007760	0,007549	0,007344	0,007143	0,006947	0,006756	0,006569	0,006387
-2,3	0,010724	0,010444	0,010170	0,009903	0,009642	0,009387	0,009137	0,008894	0,008656	0,008424
-2,2	0,013903	0,013553	0,013209	0,012874	0,012545	0,012224	0,011911	0,011604	0,011304	0,011011
-2,1	0,017864	0,017429	0,017003	0,016586	0,016177	0,015778	0,015386	0,015003	0,014629	0,014262
-2	0,022750	0,022216	0,021692	0,021178	0,020675	0,020182	0,019699	0,019226	0,018763	0,018309
-1,9	0,028717	0,028067	0,027429	0,026803	0,026190	0,025588	0,024998	0,024419	0,023852	0,023295
-1,8	0,035930	0,035148	0,034380	0,033625	0,032884	0,032157	0,031443	0,030742	0,030054	0,029379
-1,7	0,044565	0,043633	0,042716	0,041815	0,040930	0,040059	0,039204	0,038364	0,037538	0,036727
-1,6	0,054799	0,053699	0,052616	0,051551	0,050503	0,049471	0,048457	0,047460	0,046479	0,045514
-1,5	0,066807	0,065522	0,064255	0,063008	0,061780	0,060571	0,059380	0,058208	0,057053	0,055917
-1,4	0,080757	0,079270	0,077804	0,076359	0,074934	0,073529	0,072145	0,070781	0,069437	0,068112
-1,3	0,096800	0,095098	0,093418	0,091759	0,090123	0,088508	0,086915	0,085343	0,083793	0,082264
-1,2	0,115070	0,113139	0,111232	0,109349	0,107488	0,105650	0,103835	0,102042	0,100273	0,098525
-1,1	0,135666	0,133500	0,131357	0,129238	0,127143	0,125072	0,123024	0,121000	0,119000	0,117023
-1	0,158655	0,156248	0,153864	0,151505	0,149170	0,146859	0,144572	0,142310	0,140071	0,137857
-0,9	0,184060	0,181411	0,178786	0,176186	0,173609	0,171056	0,168528	0,166023	0,163543	0,161087
-0,8	0,211855	0,208970	0,206108	0,203269	0,200454	0,197663	0,194895	0,192150	0,189430	0,186733
-0,7	0,241964	0,238852	0,235762	0,232695	0,229650	0,226627	0,223627	0,220650	0,217695	0,214764
-0,6	0,274253	0,270931	0,267629	0,264347	0,261086	0,257846	0,254627	0,251429	0,248252	0,245097
-0,5	0,308538	0,305026	0,301532	0,298056	0,294599	0,291160	0,287740	0,284339	0,280957	0,277595
-0,4	0,344578	0,340903	0,337243	0,333598	0,329969	0,326355	0,322758	0,319178	0,315614	0,312067
-0,3	0,382089	0,378280	0,374484	0,370700	0,366928	0,363169	0,359424	0,355691	0,351973	0,348268
-0,2	0,420740	0,416834	0,412936	0,409046	0,405165	0,401294	0,397432	0,393580	0,389739	0,385908
-0,1	0,460172	0,456205	0,452242	0,448283	0,444330	0,440382	0,436441	0,432505	0,428576	0,424655
0	0,500000	0,496011	0,492022	0,488034	0,484047	0,480061	0,476078	0,472097	0,468119	0,464144

Exemplo Prático

Exemplo: Uma indústria fabrica peças mecânicas cujas medidas dos diâmetros externos são normalmente distribuídas com média 40,0mm e desvio-padrão de 2,0mm. Vamos calcular a percentagem de peças defeituosas fabricadas, sabendo-se que o setor de controle de qualidade dessa indústria classifica como defeituosas aquelas peças cujos diâmetros externos:

a) são inferiores a 37,0mm.

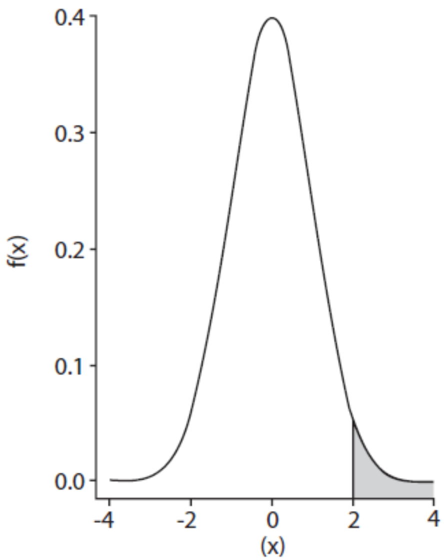
P(X<37) = P(Z<(37−40)/2) = P(Z<−1,5) = 0,067 ou 6,7%.



Exemplo Prático

b) São superiores a 44,0mm.

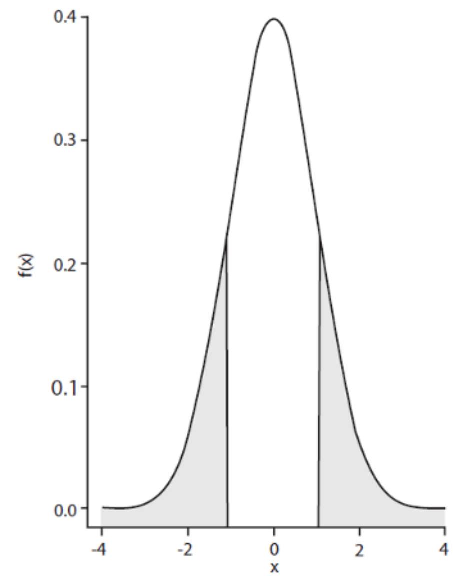
P(X>44) = P(Z>(44–40)/2) = P(Z>2) = 0,023 ou 2,3%.



c) Desviam-se mais de 2,0mm da média.

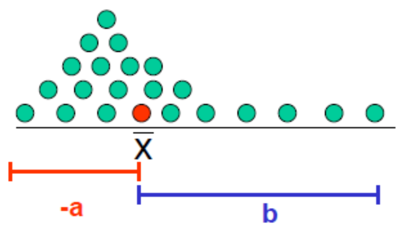
P(X<38) + P(X>42) = P(Z<(38–40)/2) + P(Z>(42–40)/2)

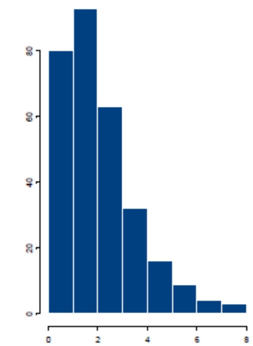
= P(Z<–1) + P(Z>1) = 0,1586 + 0,1586 = 0,3164 ou 31,64%.



Assimetria

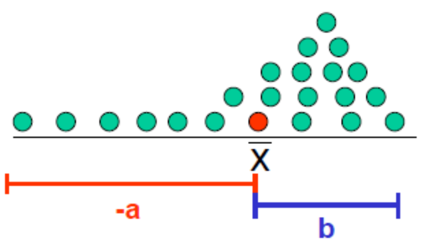
Assimetria Positiva

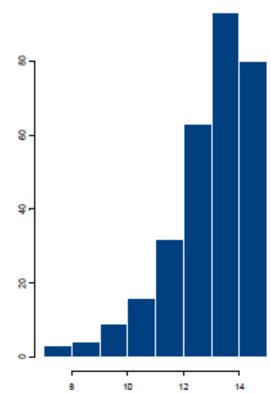




Numa distribuição assimétrica positiva, a tendência é que hajam desvios positivos muito maiores do que os negativos (vide figura).

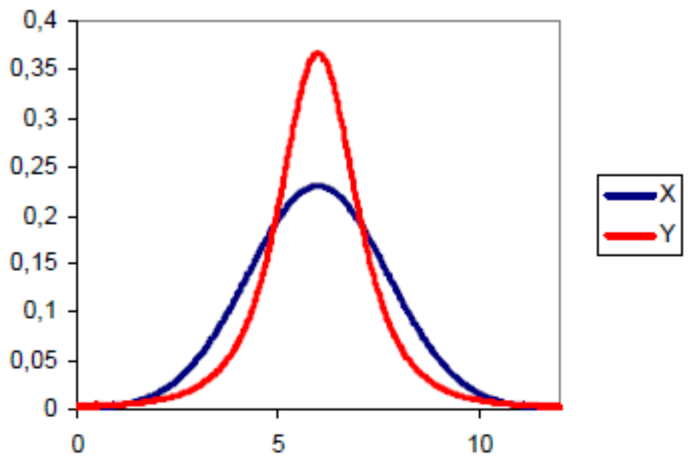
Assimetria Negativa

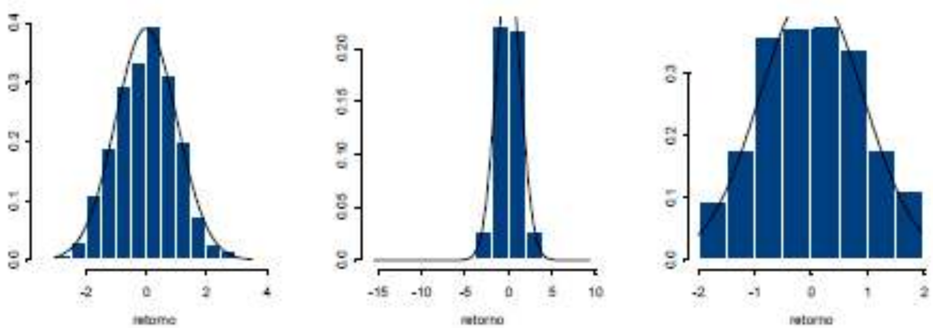




Numa distribuição assimétrica negativa, a tendência é que hajam desvios negativos muito maiores do que os positivos (vide figura).

Curtose





NORMAL   Caudas + pesadas   Caudas + leves

Teorema Central do Limite

Se tomarmos amostras grandes de uma população, as médias amostrais terão distribuição Normal mesmo que os dados originais não tenham distribuição Normal."

Exercícios 1

- Em uma curva Normal Padrão, a área entre -1,96 e 1,96 corresponde a 0,95. Para uma variável aleatória X normalmente distribuída com média 10 e variância 100, a área correspondente a 95% centrais dessa curva está situada entre:

  a) –9,6 e 29,6

  b) –8,6 e 10,6

  c) –9,6 e 11,6

  d) 18,6 e 20,6

  e) –186 e 206

- Suponha que a distribuição de salários de uma empresa americana segue uma distribuição normal, com média mensal de US$15.000,00 e desvio-padrão de US$2.000,00. Calcule a probabilidade de alguém ganhar menos de US$5.000,00.

- A força (em Newton) com que um tecido sintético se parte é representada por uma distribuição normal, dada por: $X \sim N(800,144)$. O comprador requer que o tecido tenha no mínimo uma força de ruptura igual a 772 N. A amostra de tecido é escolhida aleatoriamente. Calcule $P(X \geq 772N)$.

Distribuição t de Student

Trata-se de um modelo de distribuição contínua que se assemelha à distribuição normal padrão, ***N(0,1)***. É utilizada para inferências estatísticas, particularmente, quando se tem amostras com tamanhos inferiores a ***30***.

A distribuição ***t*** também possui um parâmetro denominado *grau de liberdade* (φ), e é simétrica em relação à sua média.

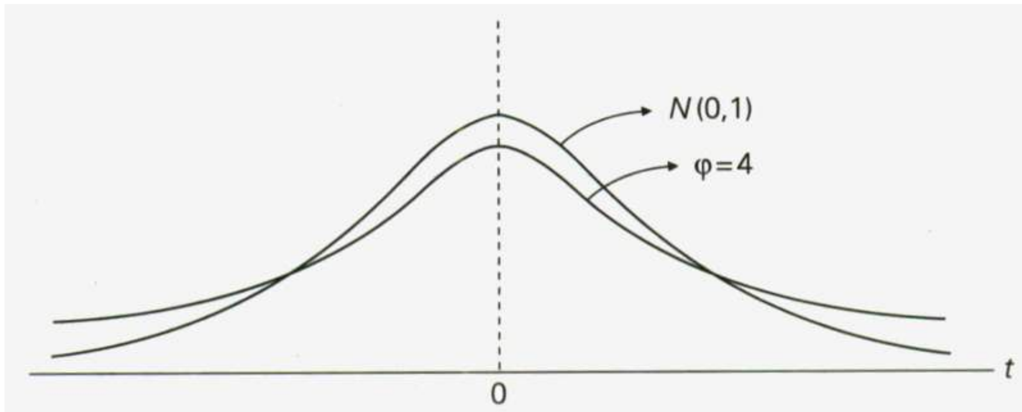
A média dessa distribuição é zero, e sua variância é dada por:

$$E[t_\varphi] = 0$$

$$Var\left[t_\varphi\right] = \sigma^2(t_\varphi) = \frac{\varphi}{\varphi - 2} \qquad (\varphi > 2)$$

Distribuição t de Student

Gráfico da distribuição ***t*** de Student (para $\varphi = 4$):



<u>Exemplo</u>:

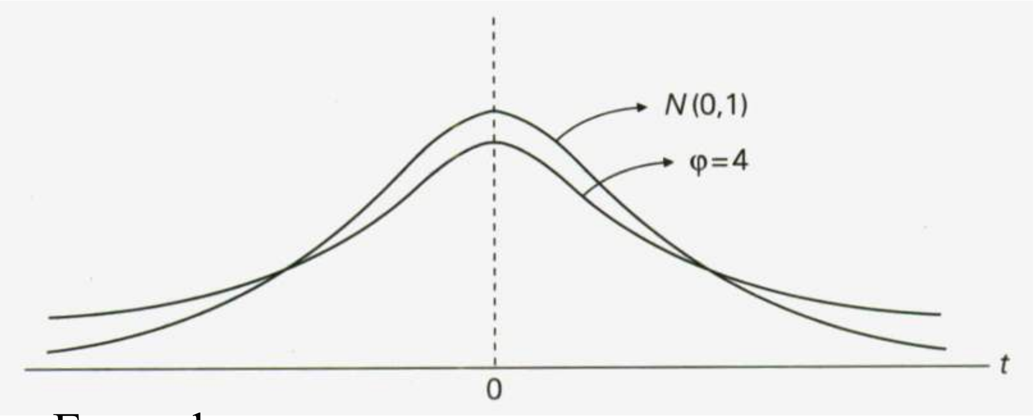
- Para $\varphi = 4$ tem-se: $\sigma(t_4) = \sqrt{\dfrac{4}{4-2}} = 1{,}41$

- Para $\varphi = 35$ tem-se: $\sigma(t_{35}) = \sqrt{\dfrac{35}{35-2}} = 1{,}03$

- Para $\varphi = 60$ tem-se: $\sigma(t_{60}) = \sqrt{\dfrac{60}{60-2}} = 1{,}02$

Distribuição t de Student

Gráfico da distribuição ***t*** de Student (para $\varphi = 4$):



<u>Exemplo</u>:

- Para $\varphi = 4$ tem-se: $$\sigma(t_4) = \sqrt{\frac{4}{4-2}} = 1{,}41$$

- Para $\varphi = 35$ tem-se: $$\sigma(t_{35}) = \sqrt{\frac{35}{35-2}} = 1{,}03$$

- Para $\varphi = 60$ tem-se: $$\sigma(t_{60}) = \sqrt{\frac{60}{60-2}} = 1{,}02$$

Distribuição t de Student

Uso da tabela de distribuição ***t*** de Student é similar ao uso em uma Normal Padrão

Trata-se de uma tabela bicaudal. Assim:

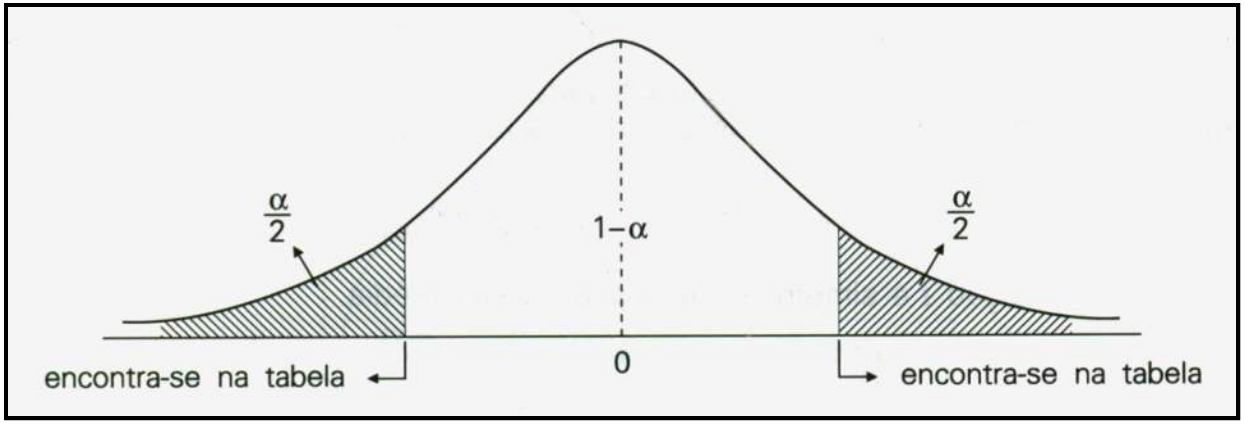
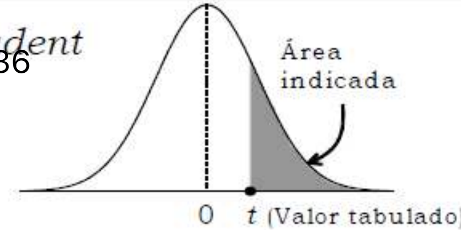


Tabela 5 Distribuição ***t*** de *Student*



	Área na cauda superior								
gl	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005
1	1,000	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	127,3	318,3	636,6
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,09	22,33	31,60
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,21	12,92
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,894	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421	3,689
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038	3,396	3,660
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,385	3,646
35	0,682	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	2,996	3,340	3,591
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	2,971	3,307	3,551
45	0,680	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690	2,952	3,281	3,520
50	0,679	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	2,937	3,261	3,496

Distribuição Qui-Quadrado

Trata-se de um modelo de distribuição contínua muito importante para a teoria da inferência estatística.

Seja x_1, x_2, ..., x_p, "p" variáveis aleatórias independentes, normalmente distribuídas, com média 0 e variância 1. Define-se variável aleatória com distribuição qui-quadrado, como uma combinação das variâncias dessas variáveis aleatória:

$$\chi_p^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2$$

onde "p" é um parâmetro da função densidade denominado *grau de liberdade*, normalmente indicado pela letra grega φ.

Distribuição Qui-Quadrado

Trata-se de um modelo de distribuição contínua muito importante para a teoria da inferência estatística.

Seja x_1, x_2, ..., x_p, "*p*" variáveis aleatórias independentes, normalmente distribuídas, com média ***0*** e variância ***1***. Define-se variável aleatória com distribuição qui-quadrado, como uma combinação das variâncias dessas variáveis aleatória:

$$\chi_p^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2$$

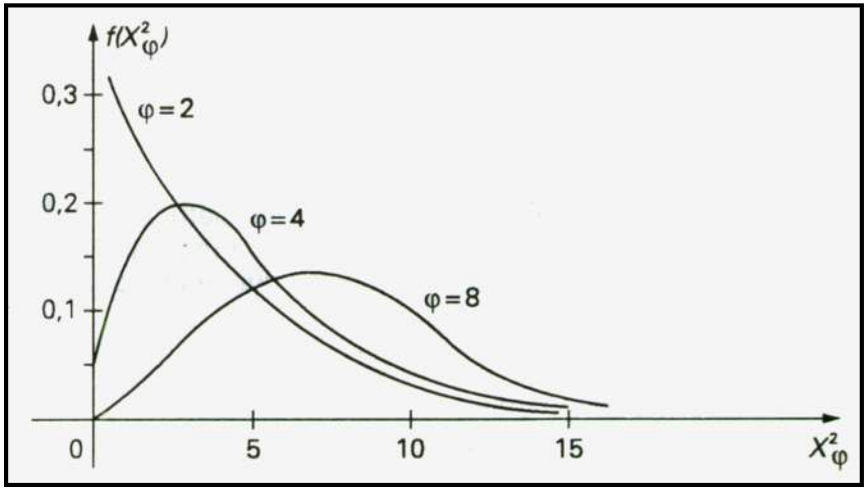
onde "*p*" é um parâmetro da função densidade denominado *grau de liberdade*, normalmente indicado pela letra grega φ.

$$E\left[\chi_\varphi^2\right] = \mu(\chi_\varphi^2) = \varphi$$

$$Var\left[\chi_p^2\right] = \sigma^2(\chi_\varphi^2) = 2\varphi$$

Distribuição Qui-Quadrado

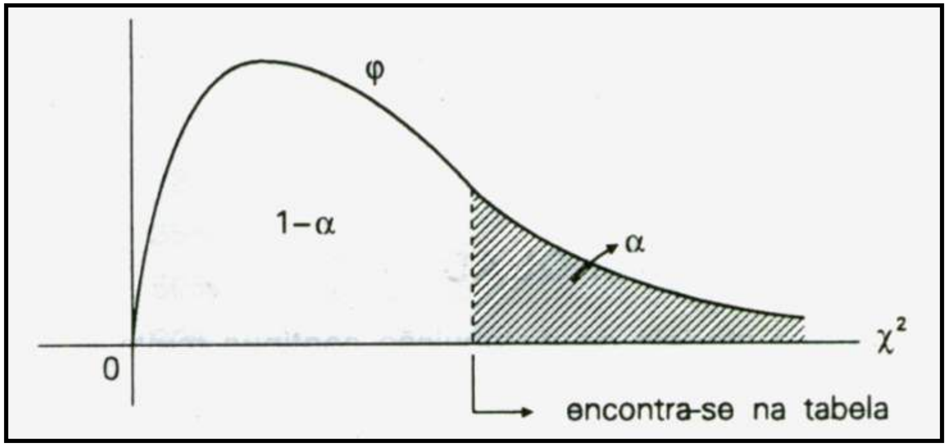
A forma da curva que descreve a função densidade varia conforme o valor do grau de liberdade (valor do parâmetro φ):



Distribuição Qui-Quadrado

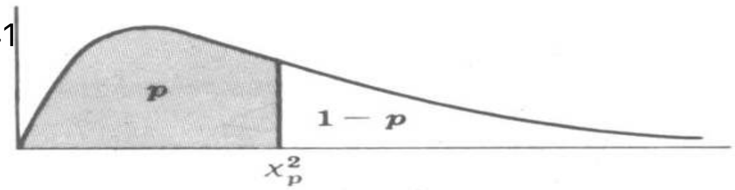
Uso da tabela de distribuição qui-quadrado

A distribuição qui-quadrado está tabelada. A tabela fornece a abscissa da distribuição para diversas áreas (probabilidades) da cauda à direita. Assim:



APÊNDICE E

Valores dos Percentis (χ^2_p) para a Distribuição Qui-Quadrado com ν graus de liberdade



ν	$\chi^2_{.005}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.10}$	$\chi^2_{.25}$	$\chi^2_{.50}$	$\chi^2_{.75}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.999}$
1	,0000	,0002	,0010	,0039	,0158	,102	,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	,0100	,0201	,0506	,103	,211	,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	,0717	,115	,216	,352	,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	,207	,297	,484	,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	,412	,554	,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	,676	,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5.90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24.7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40.3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40.3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7
40	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1	33,7	39,3	45,6	51.8	55,8	59.3	63,7	66,8	73,4
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	42,9	49,3	56,3	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5	86,7
60	35,5	37,5	40,5	43,2	46,5	52,3	59,3	67,0	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0	99,6
70	43,3	45,4	48,8	51,7	55,3	61,7	69,3	77,6	85,5	90,5	95,0	100	104	112
80	51,2	53,5	57,2	60,4	64,3	71,1	79,3	88,1	96,6	102	107	112	116	125
90	59,2	61,8	65,6	69,1	73,3	80,6	89,3	98,6	108	113	118	124	128	137
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	90,1	99,3	109	118	124	130	136	140	149

FONTE: **PEARSON** E.S. e **HARTLEY** H.O. *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1 (1966), Tábua 8, págs. 137 e 138. Com permissão.

Distribuição F

Trata-se de um modelo de distribuição contínua também útil para inferências estatísticas.

A distribuição ***F*** é a razão entre duas variáveis aleatórias independentes com distribuições qui-quadrado. Assim, uma distribuição ***F*** com ***p*** graus de liberdade no numerador e ***q*** graus de liberdade no denominador é expressa por:

$$F(p,q)=\frac{\dfrac{\chi_p^2}{p}}{\dfrac{\chi_q^2}{q}}=\frac{\chi_p^2}{\chi_q^2}\cdot\frac{q}{p}$$

Distribuição F

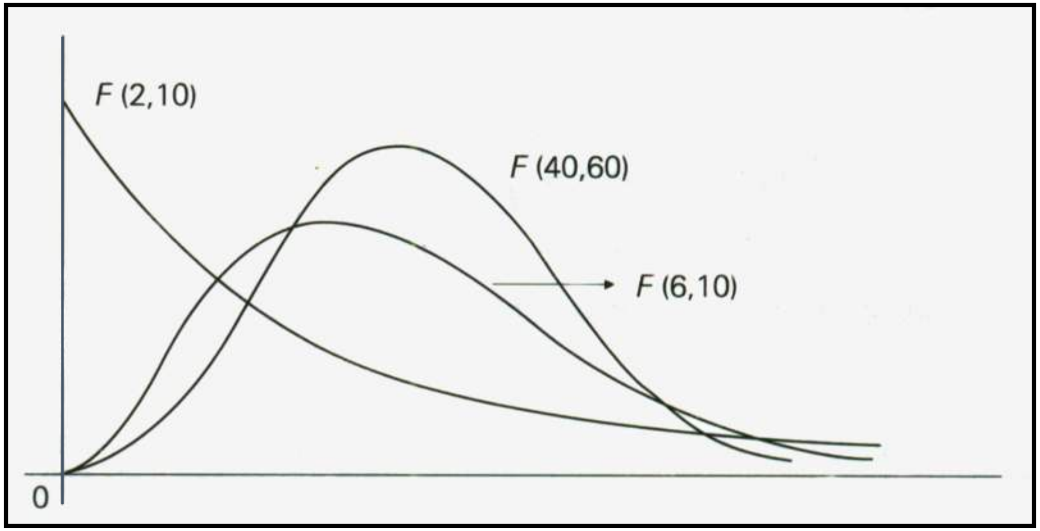
Trata-se de um modelo de distribuição contínua também útil para inferências estatísticas.

A distribuição ***F*** é a razão entre duas variáveis aleatórias independentes com distribuições qui-quadrado. Assim, uma distribuição ***F*** com ***p*** graus de liberdade no numerador e ***q*** graus de liberdade no denominador é expressa por:

$$F(p,q) = \frac{\dfrac{\chi_p^2}{p}}{\dfrac{\chi_q^2}{q}} = \frac{\chi_p^2}{\chi_q^2} \cdot \frac{q}{p}$$

Distribuição F

Formas de gráficos da distribuição ***F*** :



Distribuição F

Uso da tabela de distribuição *F*

A tabela fornece as abscissas que deixam $\boldsymbol{\alpha}$ na cauda à direita, dados os parâmetros φ_1 e φ_2.

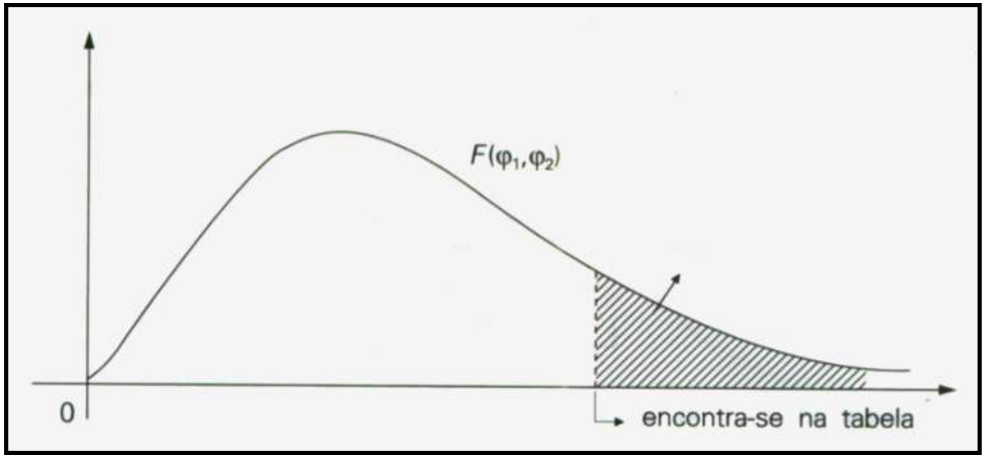


Tabela 1 *Valores de F para o nível de significância de 1% segundo o número de graus de liberdade do numerador e do denominador.*

Nº de graus de liberdade do denominador	Número de graus de liberdade do numerador								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022
2	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41