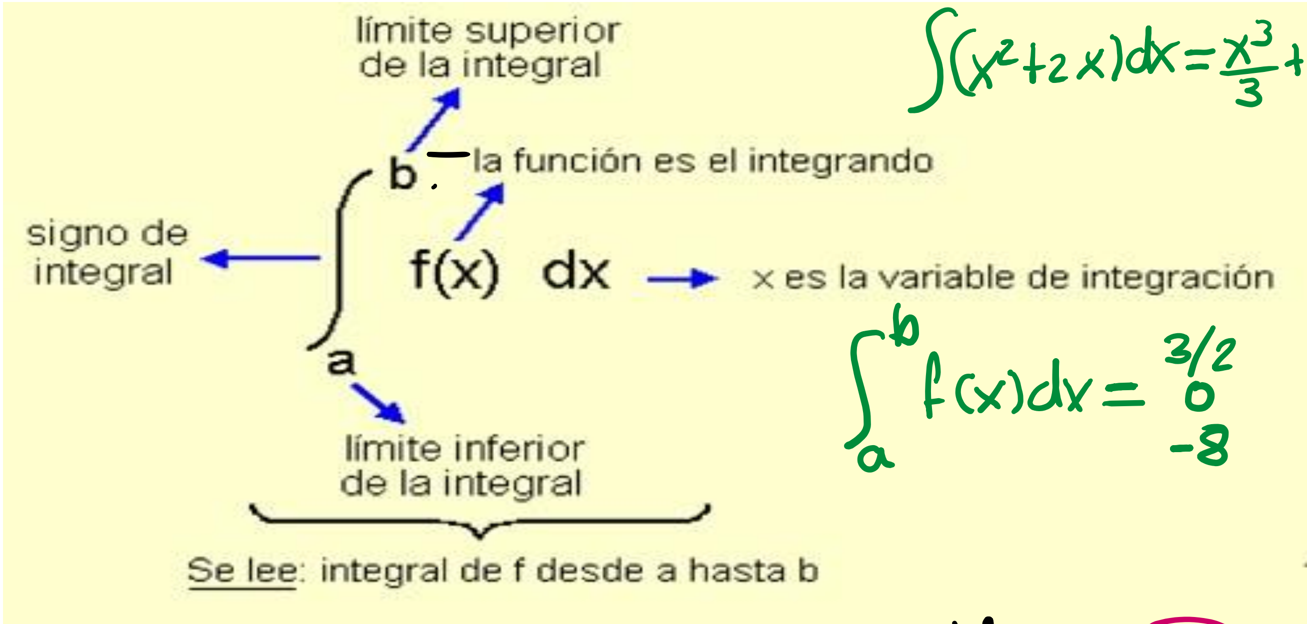
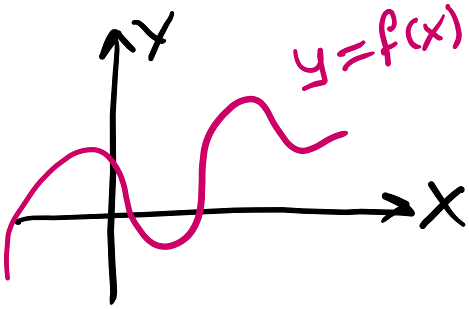
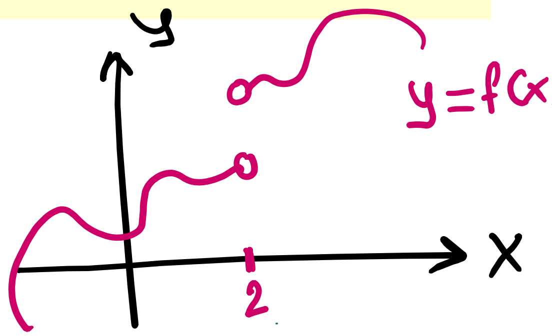
## LA INTEGRAL DEFINIDA




$$\int (x^2+2x)\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+C$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{matrix} 3/2 \\ 0 \\ -8 \end{matrix}$$




$f(2)=\frac{0}{0}$ no está definida

**EJEMPLO**

1) $I = \int_{2}^{4} (x^2 + 3x - 2)dx$

La integral existe, dado que la función $f(x) = x^2 + 3x - 2$ es continua en el intervalo $[2,4]$

2) $I = \int_{-3}^{3} \frac{3}{x-2} dx$

La integral no existe, dado que la función $f(x) = \frac{3}{x-2}$ no es continua en el intervalo $[-3,3]$

**Si $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \in [-3, 3]$**

**La función $f(x) = \frac{3}{x-2}$ no es está definida en el intervalo $[-3, 3]$**

3) $I = \int_{0}^{4} \frac{4x+2}{x+3} dx$

La integral existe, dado que la función $f(x) = \frac{4x+2}{x+3}$ es continua en el intervalo $[0,4]$

**Si $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \notin [0, 4]$**

**La función $f(x) = \frac{4x+2}{x+3}$ está definida en el intervalo $[0, 4]$**

## PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Dadas las funciones $f$ y $g$ integrables en $[a,b]$ y $k \in \Re$.

1. $\int_a^b k\ f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

3. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ , si $f(x)$ es impar

   Función impar:
   $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$

   **Por ejemplo**
   Calcular el valor de

$$I = \int_{-2}^{2} (x^3 + 3x)dx$$

**Solución**

Verificar si $f(x) = x^3 + 3x$ es una función impar

Si $\mathbf{f(-x)} = (-x)^3 + 3(-x) = -x^3 - 3x = -(x^3 + 3x) = \mathbf{-f(x)}$

Luego, la función es impar.

Por tanto, $I = \int_{-2}^{2}(x^3 + 3x)dx = 0$

4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, si $a > b$.

   **Por ejemplo**

$$\int_3^0 (x^2 - 3x)dx = -\int_0^3 (x^2 - 3x)$$

5. Si $c$ es un punto interior de $[a,b]$ entonces: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

**Por ejemplo**
Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ x^2 & \text{si} \quad 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 \sin(x)\,dx + \int_2^4 x^2\,dx$$

**TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO**

Sea $f$ una función continua en el intervalo $[a,b]$. y sea $F$ una función tal que $F'(x)=f(x) \quad \forall \in [a,b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

Por ejemplo:

$$\int_0^1 (x^2+2)dx = \left[\frac{x^3}{3}+2x\right|_0^1$$

$$= \frac{(1)^3}{3}+2(1) - \left(\frac{(0)^3}{3}+2(0)\right)$$

$$= \frac{7}{3}$$

**EJEMPLO**

1) Evalúe la siguiente integral $\int_{-\pi/3}^{\pi} f(x)dx$ donde

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi\ x^9}{4}\right) & , \quad -\pi/3 \le x \le \pi/3 \\ \\ \cos^2(3x) & , \quad \pi/3 < x < \pi \end{cases}$$

2) Evalúe la siguiente integral $\int_{0}^{2\pi} f(x)dx$ donde

$$f(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{\pi}{5} & , \quad 0 \le x \le \pi/2 \\ \\ \left(\frac{3}{\pi}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{5x}{2}\right) & , \quad \pi/2 < x < 2\pi \end{cases}$$

3) Evalúe la siguiente integral

$$\int_{0}^{2\pi} r(x)dx$$

donde

$$r(x) = \begin{cases} -\frac{6}{\pi^2}(x - \frac{\pi}{2})^2 + 1, & 0 \le x < \frac{\pi}{6} \\ \sec^2\left(\frac{x}{2}\right), & \frac{\pi}{6} \le x < 2\pi \end{cases}$$

4) Evalúe la siguiente integral

$$\int_{-\pi/4}^{\pi} g(x)\ dx$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} \sin^3\left(\frac{\pi\ x^{15}}{15}\right) - 12 & , \quad -\pi/4 \le x \le \pi/4 \\ \\ 2 + \cos^2(4x) & , \quad \pi/4 < x < \pi \end{cases}$$

**EJEMPLO** (cambio de variable)

1) Dada la integral

$$I = \int_{-1}^{4} (5ax + 1)\sqrt{x + 5}\ \ dx\ ,$$

determinar el valor de la constante $a$ si:

$$\tfrac{1}{2}(I - 9) = 15.$$

2) Dada la integral

$$I = \int_{1}^{17} \left(5x - \frac{3}{2} \cdot z\right) \sqrt{26 - x} \; dx$$

determinar el valor de la constante $z$ si:

$$3(I - 277) = 7063$$

3) Dada la integral

$$I = \int_{-2}^{5} (1 - 3bx^2) \sqrt[3]{3 + x} \, dx \; ,$$

determinar el valor de la constante $a$ si:

$$\frac{100}{3807}\left(I - \frac{45}{2}\right) = -2$$

4) Dada la integral

$$I = \int_{-3}^{4} \left(x^2 + \frac{2}{3} \cdot t\right) \sqrt[3]{5 - x} \; dx \; ,$$

determinar el valor de la constante $t$ si:

$$2\left(I - \frac{6141}{140}\right) = 45$$

**EJEMPLO** (por partes recurrencia)

1) Sea

$$I_n = \int_{0}^{1} (3x)^n e^{x/2} dx \quad \text{para } n \geq 0$$

Y la fórmula recursiva $n \geq 1$,

$$I_n = 2(3)^n e^{1/2} - 6nI_{n-1}$$

Hallar $I_3$

2) Sea $I_n = \int_{0}^{2} (2 + 3x)^n \cdot e^{-4x} dx$ para $n \geq 0$.

a) Verifique que para $n \geq 1$, se cumple

$$I_n = -\frac{8^n e^{-8}}{4} + \frac{2^n}{4} + \frac{3n}{4} \cdot I_{n-1}$$

b) Halle $I_2$

3) Sea $I_n = \int_{0}^{2} (2 + 3x)^n \cdot e^{-4x} dx$ para $n \geq 0$. Halle $I_2$

4) Sea $I_n = \int_{-5}^{0} (1 - 5x)^n \cdot e^{7x} dx$ para $n \geq 0$. Halle $I_2$