APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

Definición

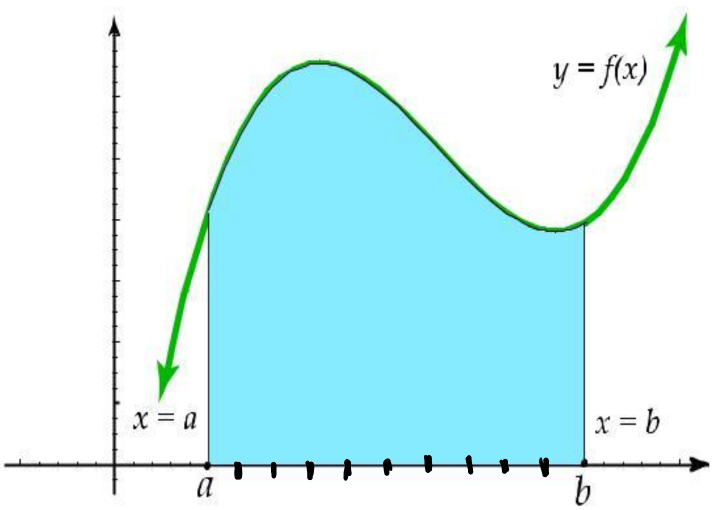
Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces la integral definida de f, de a en b, denotado por $\int_a^b f(x)dx$, se define como el límite de las sumas de Riemann.

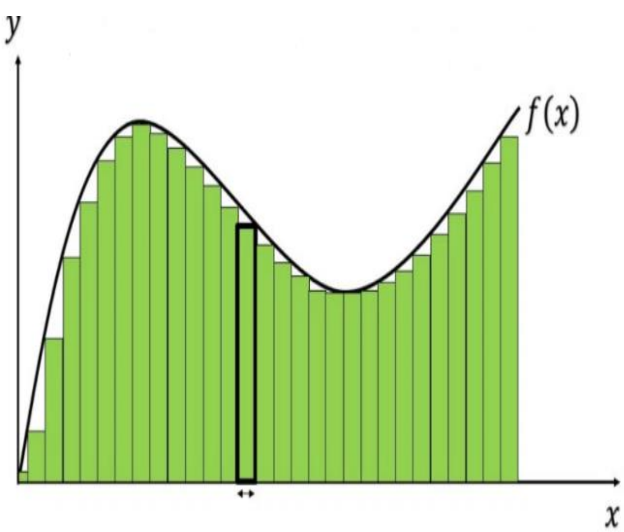
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x^*{}_i\right)\Delta x_i$$

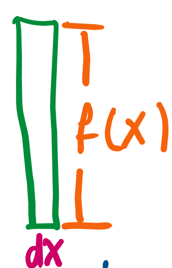
Donde a y b son los límites de integración inferior y superior respectivamente.

GEOMÉTRICAMENTE

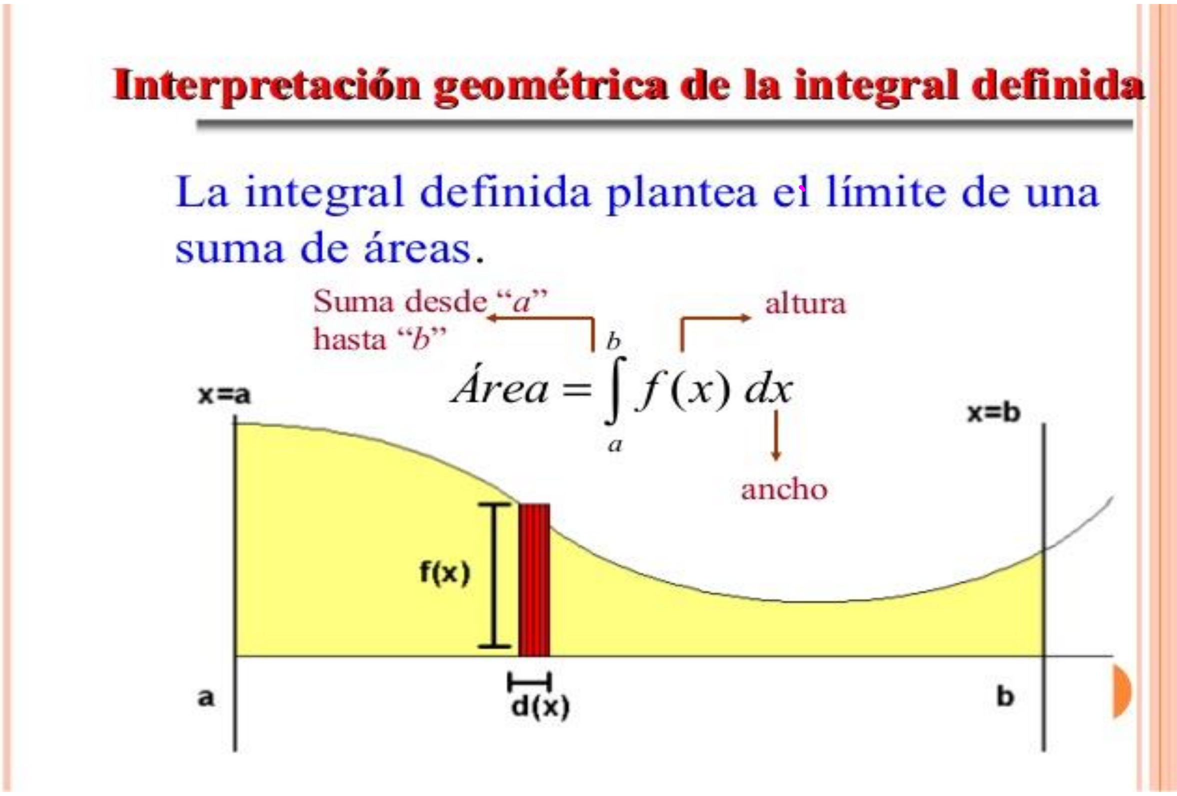
Definimos integral definida de f entre a y b, al área de la región limitada por la función $f(x)$ entre los puntos a y b, y el eje X.







$$A(D) = \int_a^b f(x)dx$$


Interpretación geométrica de la integral definida
La integral definida plantea el límite de una suma de áreas.
Suma desde "a" hasta "b"
altura
$Área = \int_a^b f(x)\,dx$
ancho
x=a
x=b
f(x)
a
d(x)
b

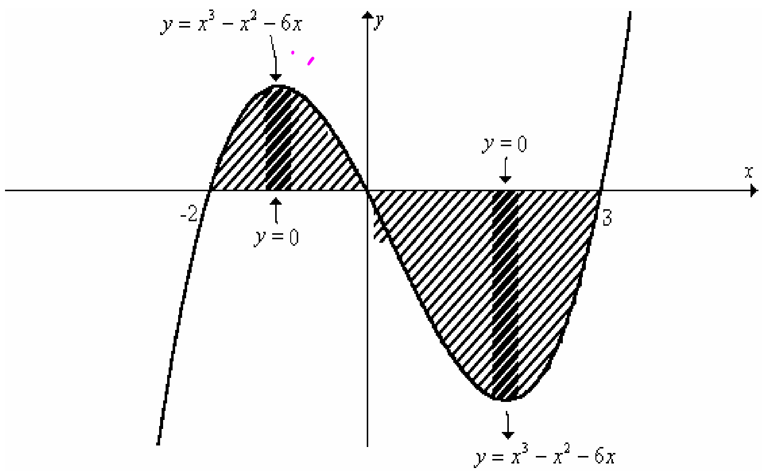
El área del elemento diferencial será: $dA = h\,dx = f(x)dx.$

El área de la región plana es: $A(D) = \int_a^b f(x)dx.$

Nota

1. Si $f(x) > 0$ en $[a,b]$, entonces la integral definida es positiva: $Área = \int_a^b f(x)dx.$

2. Si $f(x) < 0$ en $[a,b]$, entonces la integral definida es negativa: $Área = -\int_a^b f(x)dx.$



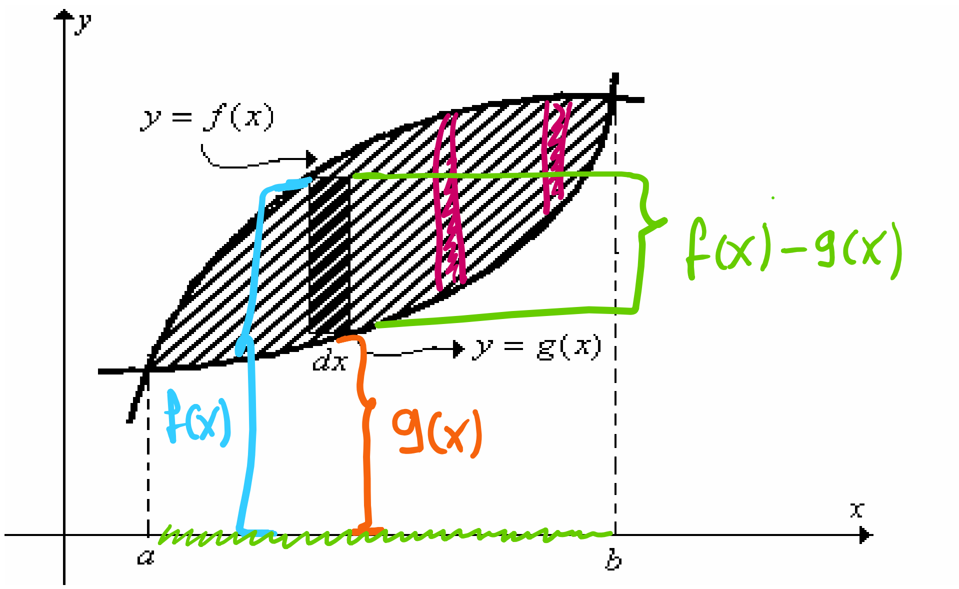
ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

TIPO I:

Sea D la región limitada por: $y=f(x),\quad y=g(x)\quad \wedge\quad x=a,\quad x=b.$

El área del elemento diferencial será: $dA=h\,dx=[f(x)-g(x)]\,dx$

El área de la región plana es: $A(D)=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx.$



superior inferior

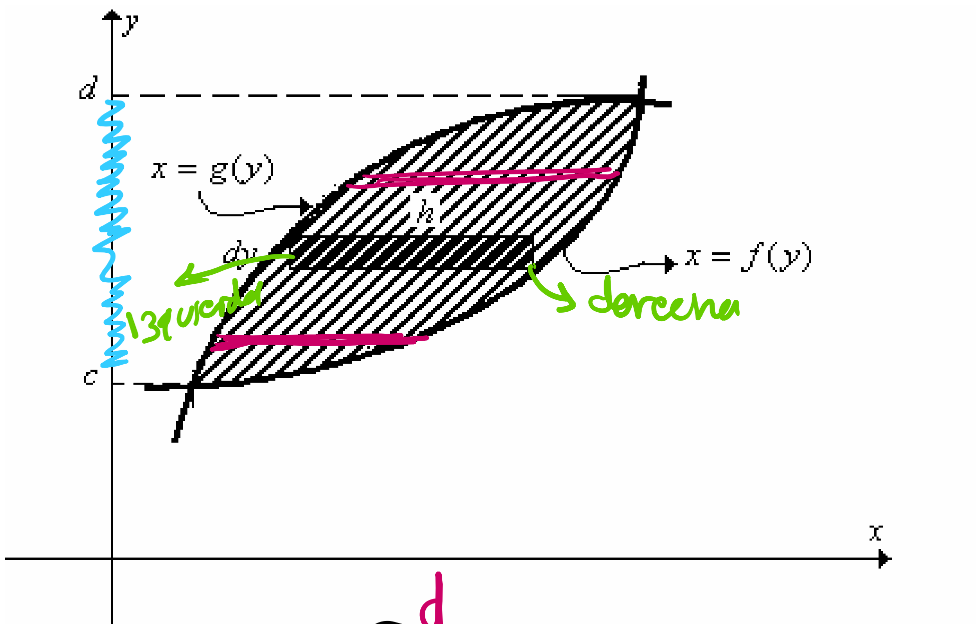
$$A(D)=\int_a^b \left[f(x)-g(x) \right] dx$$

TIPO II:

Sea D la región limitada por: $x = f(y), \quad x = g(y) \quad \wedge \quad y = c, \quad y = d.$

El área del elemento diferencial será: $dA = h\,dy = [f(y) - g(y)]\,dy$

El área de la región plana es: $A(D) = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy.$

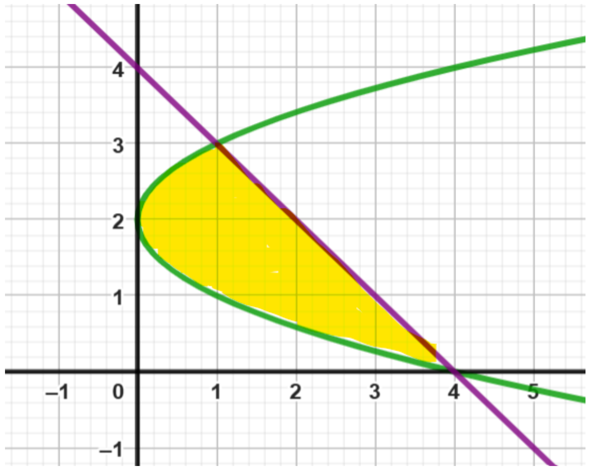


$$A(D) = \int_c^d \left[f(y) - g(y) \right] dy$$

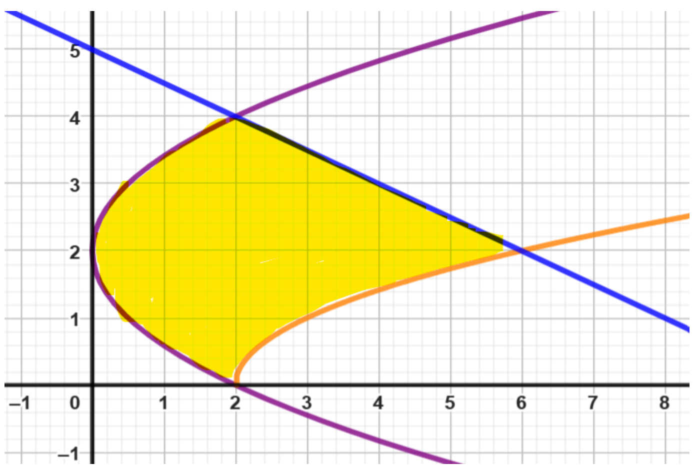
EJEMPLO

I. Calcular el área de la región D limitada por las gráficas de:

1) $x = (y-2)^2$, $x + y = 4$

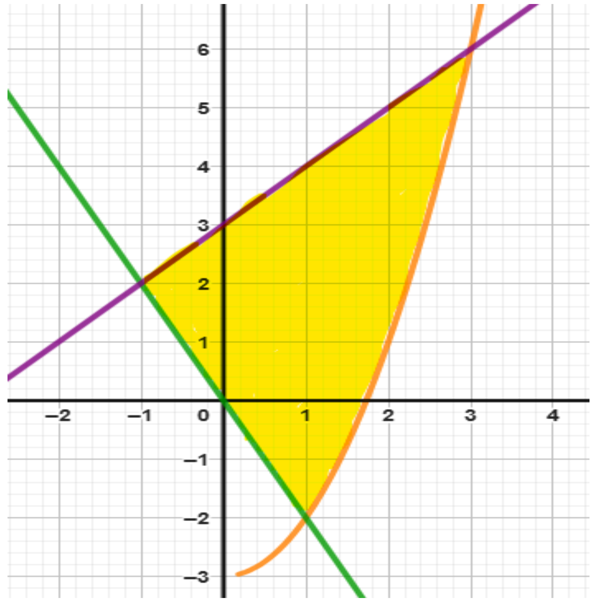


2) $2x = (y-2)^2$, $x + 2y = 10$, $y = \sqrt{x-2}$, IC

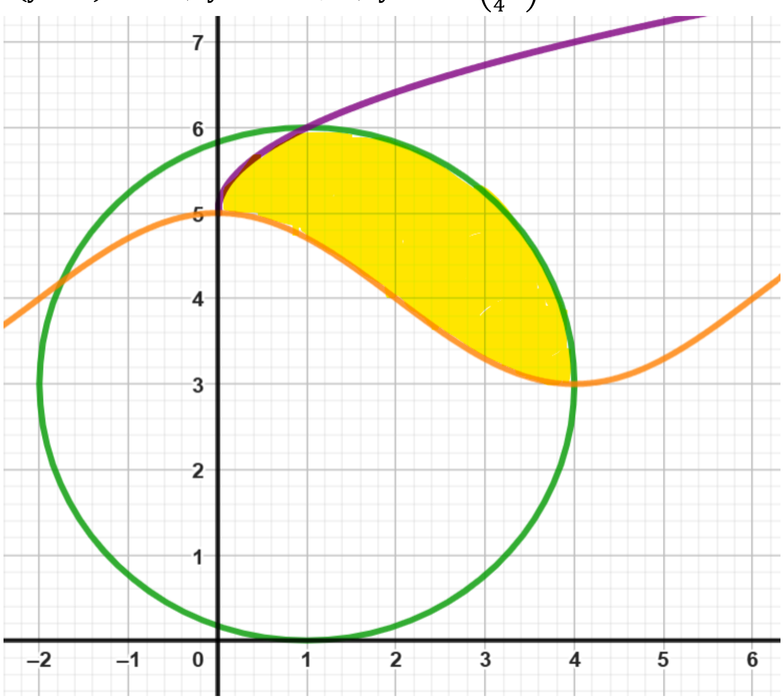


II. Dada la región D:

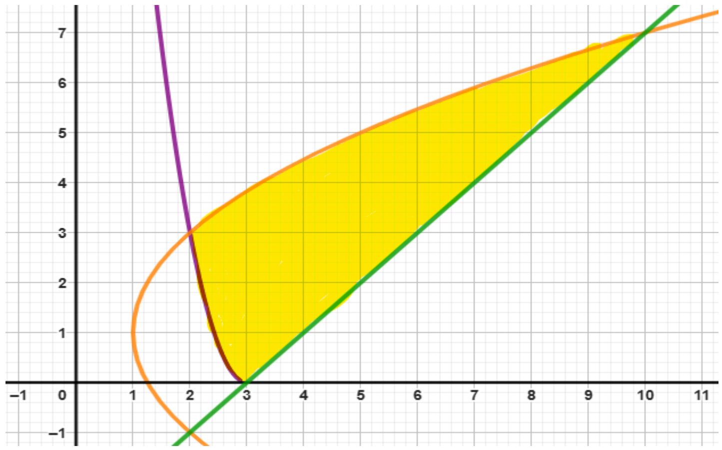
a) Plantear el área de la región D mediante integrales del tipo I y tipo II.
b) Calcular el área de la región D por uno de los dos tipos planteados en el ítem (a).
1) $x=\sqrt{y+3},\quad y=-2x,\quad y=x+3.$



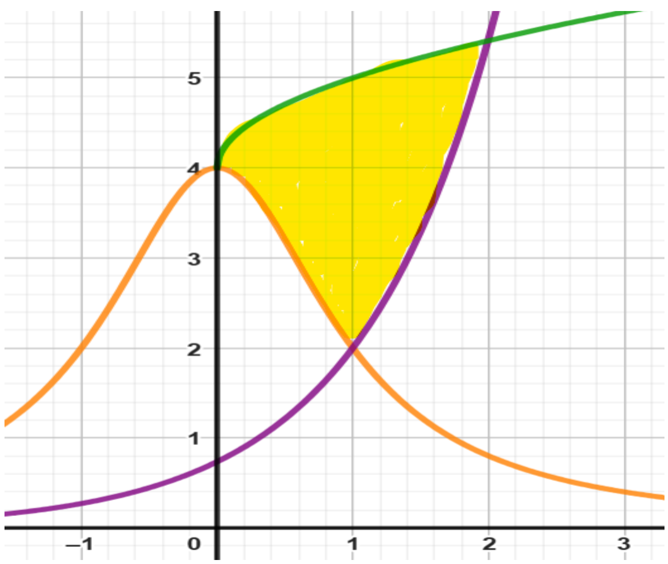
2) $(x-1)^2+(y-3)^2=9\ ,\ y=5+\sqrt{x}\ ,\ y=\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)+4$



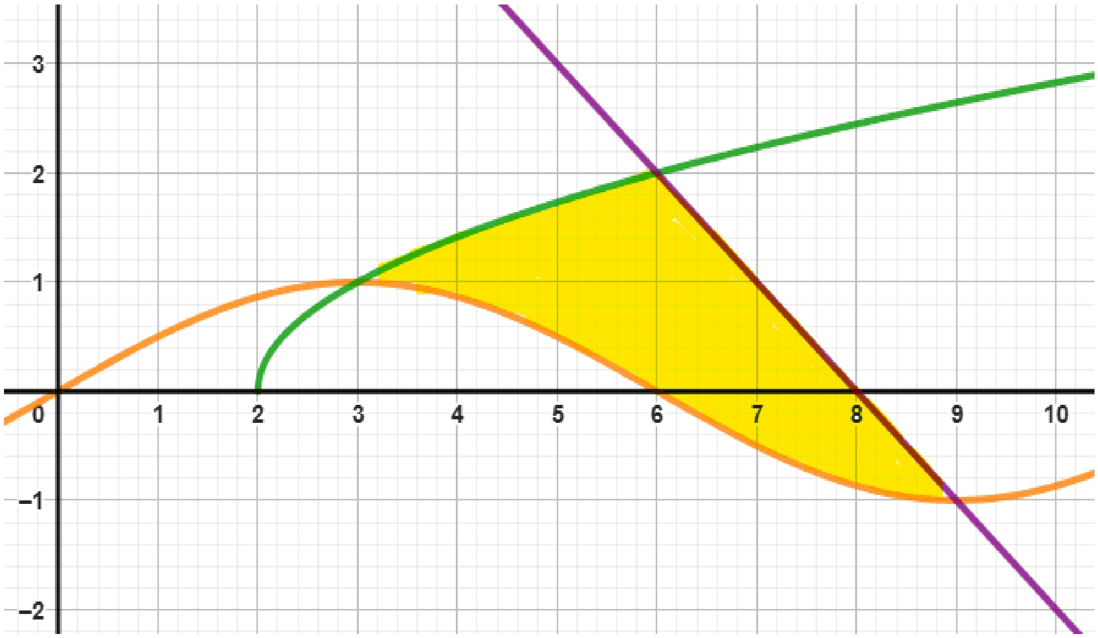
3) $(y-1)^2-4x+4=0\,,\quad y=x-3\,,\quad x=3-\sqrt{\dfrac{y}{3}}$



4) $y=\frac{4}{1+x^2}$, $y=2e^{x-1}$, $y=4+\sqrt{x}$



5) $y = \cos\left(\frac{\pi x}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + 2, \quad y = \sqrt{x-2}, \quad x + y = 8$



6) $(x-4)^2 = \frac{5}{y} - 1$; $\quad (x-4)^2 = 4y$; $\quad 2x + 4y = 8.$