Universidad Continental

Producto Académico N°3
COLABORATIVO
Programa a Distancia
Cálculo Integral ASUC01161

1. **Enunciados:**

PREGUNTA 1

Una empresa de ingeniería está diseñando un tanque de almacenamiento de forma parabólica truncada para una planta industrial. El tanque se generará a partir de la rotación de una región limitada por tres curvas, que están definidas por las siguientes ecuaciones:

$$y = 1 + \sqrt{6-2x} \quad ; \quad x + 3y - 6 = 0 \quad ; \quad y = x^3 + 2$$

Estas curvas representan secciones transversales del tanque que se cortan en un plano vertical. El tanque se formará haciendo girar la región limitada por estas tres curvas alrededor del eje Y.

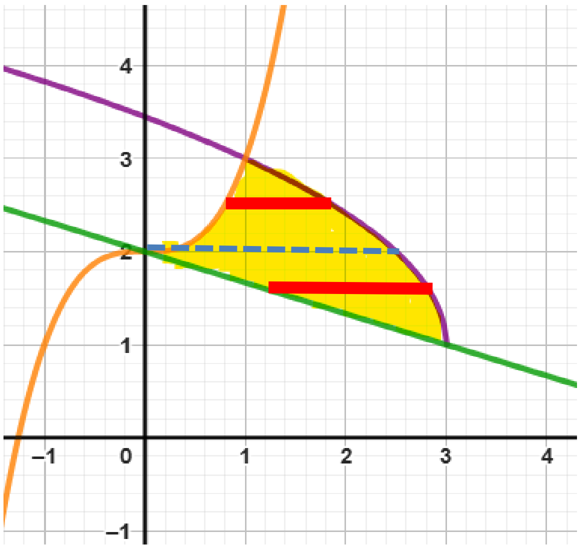
a) Grafique la región ***R*** comprendida por dichas curvas.

b) La tarea de los ingenieros es calcular el volumen del tanque, ya que deben determinar cuánta agua puede almacenar, y en función de eso, elegir el tamaño adecuado para la construcción. Aplicar el método del anillo para determinar el volumen del tanque.

SOLUCIÓN

a)

A	$y = 1 + \sqrt{6-2x}$	$x = \dfrac{6-(y-1)^2}{2}$
B	$x + 3y - 6 = 0$	$x = 6 - 3y$
C	$y = x^3 + 2$	$x = \sqrt[3]{y-2}$



b)

	Radio mayor	Radio menor
D_1	$R = A = \dfrac{6-(y-1)^2}{2}$	$r = A = 6 - 3y$
D_2	$R = A = \dfrac{6-(y-1)^2}{2}$	$r = C = \sqrt[3]{y-2}$

Luego,

$$V(S) = V(S_1) + V(S_2)$$

$$V(S) = \pi \int_{D_1} [R^2 - r^2]dy + \pi \int_{D_2} [R^2 - r^2]dy$$

$$V(S) = \pi \int_1^2 \left[\left(\frac{6-(y-1)^2}{2}\right)^2 - (6-3y)^2\right]dy + \pi \int_2^3 \left[\left(\frac{6-(y-1)^2}{2}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{y-2}\right)^2\right]dy$$

$$V(S) = \pi \int_1^2 \left[\frac{36 - 12(y-1)^2 + (y-1)^4}{4} - (6-3y)^2\right]dy + \pi \int_2^3 \left[\frac{36 - 12(y-1)^2 + (y-1)^4}{4} - (y-2)^{2/3}\right]dy$$

$$V(S) = \frac{\pi}{4}\int_1^2 [36 - 12(y-1)^2 + (y-1)^4 - 4(6-3y)^2]dy + \frac{\pi}{4}\int_2^3 [36 - 12(y-1)^2 + (y-1)^4 - 4(y-2)^{2/3}]dy$$

$$V(S) = \frac{\pi}{4}\left[36y - 4(y-1)^3 + \frac{(y-1)^5}{5} - \frac{4(6-3y)^3}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\right]_1^2 + \frac{\pi}{4}\left[36y - 4(y-1)^3 + \frac{(y-1)^5}{5} - 4\cdot\frac{3}{5}(y-2)^{5/3}\right]_2^3$$

$$V(S) = \frac{\pi}{4}\left[36y - 4(y-1)^3 + \frac{(y-1)^5}{5} + \frac{4(6-3y)^3}{9}\right]_1^2 + \frac{\pi}{4}\left[36y - 4(y-1)^3 + \frac{(y-1)^5}{5} - \frac{12}{5}(y-2)^{5/3}\right]_2^3$$

$$V(S) = \frac{\pi}{4}\left[72 - 4 + \frac{1}{5} + 0 - \left(36 + \frac{4(3)^3}{9}\right)\right] + \frac{\pi}{4}\left[108 - 4(2)^3 + \frac{(2)^5}{5} - \frac{12}{5} - \left(72 - 4 + \frac{1}{5} - 0\right)\right]$$

$$V(S) = \frac{\pi}{4}\left[\frac{341}{5} - 48\right] + \frac{\pi}{4}\left[80 - \frac{341}{5}\right]$$

$$V(S) = \frac{\pi}{4}\left[\frac{101}{5}\right] + \frac{\pi}{4}\left[\frac{59}{5}\right]$$

$$V(S) = \frac{32\pi}{4}$$

$$V(S) = 8\pi\ u^3$$

Universidad Continental

PREGUNTA 2

Dada las siguientes curvas:

$$y = \frac{24}{(x-3)^2+4} \;;\quad \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1;\;\; y = 3 - \ln(x)$$

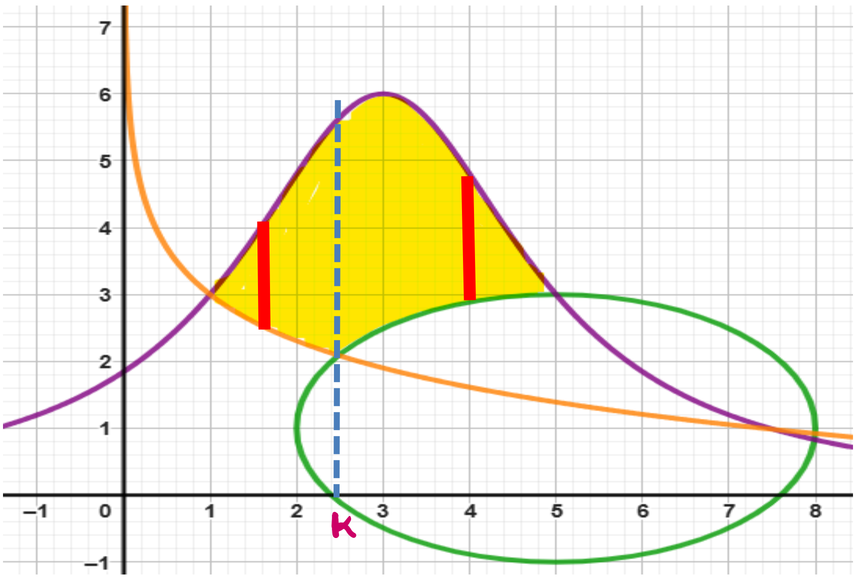
a) Grafique la región ***R*** comprendida por dichas curvas.

b) Plantee el volumen del sólido de revolución, cuando la región ***R*** gira alrededor del eje "Y" usando el método de capas cilíndricas, luego calcule el volumen del sólido.

SOLUCIÓN

a)

A	$y = \frac{24}{(x-3)^2+4}$	$y = \frac{24}{(x-3)^2+4}$
B	$\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$	$y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9-(x-5)^2} + 1$
C	$y = 3 - \ln(x)$	$y = 3 - \ln(x)$



b)

	Radio	**Altura**
D_1	$\mathbf{r} = x$	$\mathbf{h} = A - C = \frac{24}{(x-3)^2+4} - 3 + \ln(x)$
D_2	$\mathbf{r} = x$	$\mathbf{h} = A - B_+ = \frac{24}{(x-3)^2+4} - \frac{2}{3}\sqrt{9-(x-5)^2} - 1$

Luego,

$$V(S) = V(S_1) + V(S_2)$$

$$V(S) = \int_{D_1} r \cdot h\,dx + \int_{D_2} r \cdot h\,dx$$

$$V(S) = \int_1^k x \cdot \left[\frac{24}{(x-3)^2+4} - 3 + \ln(x)\right] dx + \int_k^5 x \cdot \left[\frac{24}{(x-3)^2+4} - \frac{2}{3}\sqrt{9-(x-5)^2} - 1\right] dx$$

$$V(S) = \int_1^k \left[\frac{\mathbf{24x}}{\mathbf{(x-3)^2+4}} - 3x + \mathbf{x\ln(x)}\right] dx + \int_k^5 \left[\frac{\mathbf{24x}}{\mathbf{(x-3)^2+4}} - \frac{2}{3}x\sqrt{\mathbf{9-(x-5)^2}} - x\right] dx$$

(i) $I_1 = \int \frac{24x}{(x-3)^2+4}dx = 24\int \frac{x}{(x-3)^2+4}dx$

$$I_1 = 24\int \frac{x}{(x-3)^2+4}dx$$

$$I_1 = 24\int \frac{x-3+3}{(x-3)^2+4}dx$$

$$I_1 = 12\int \left[\frac{2(x-3)}{(x-3)^2+4} + \frac{6}{(x-3)^2+4}\right]dx$$

$$I_1 = 12\left[\ln\left((x-3)^2+4\right) + \frac{6}{2}\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)\right]$$

$$I_1 = 12\left[\ln\left((x-3)^2+4\right) + 3\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)\right]$$

$$\mathbf{I_1 = 12\ln\left((x-3)^2+4\right) + 36\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)}$$

(ii) $I_2 = \int x\ln(x)\,dx$

Integración por partes:
$$\begin{array}{lll lll} u & = & \ln(x) & dv & = & xdx \\ du & = & \frac{1}{x}dx & v & = & \frac{x^2}{2} \end{array}$$

$$I_2 = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$I_2 = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$I_2 = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}$$

$$\mathbf{I_2 = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}}$$

(iii) $I_3 = \int x\sqrt{9-(x-5)^2}\ dx$

$$I_3 = \int (x-5+5)\sqrt{9-(x-5)^2}\ dx$$

$$I_3 = \int \left[(x-5)\sqrt{9-(x-5)^2} + 5\sqrt{9-(x-5)^2}\right]dx$$

$$I_3 = \int (x-5)\sqrt{9-(x-5)^2}\ dx + 5\int \sqrt{9-(x-5)^2}\ dx$$

$$I_3 = \int (x-5)\sqrt{9-(x-5)^2}\ dx + 5\int \sqrt{9-(x-5)^2}\ dx$$

Sustitución simple:
$$\begin{array}{lll} u & = & 9-(x-5)^2 \\ du & = & -2(x-5)\,dx \\ \frac{du}{-2} & = & (x-5)\,dx \end{array}$$

$$I_3 = \int \sqrt{u}\cdot\frac{du}{-2} + 5\int \sqrt{9-(x-5)^2}\ dx$$

$$I_3 = -\frac{1}{2}\int u^{1/2}\cdot du + 5\cdot\frac{1}{2}\left((x-5)\sqrt{9-(x-5)^2} + 9\cdot\arcsin\left(\frac{x-5}{3}\right)\right)$$

$$I_3 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}\left((x-5)\sqrt{9-(x-5)^2} + 9\cdot\arcsin\left(\frac{x-5}{3}\right)\right)$$

$$I_3 = -\frac{1}{3}\cdot\left(9-(x-5)^2\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}(x-5)\sqrt{9-(x-5)^2} + \frac{45}{2}\cdot \arcsin\left(\frac{x-5}{3}\right)$$

Luego,

$$V(S) = \left\{\frac{24x}{(x-3)^2+4} - 3x + x\ln(x)\right\}_1^k + \left\{\frac{24x}{(x-3)^2+4} - \frac{2}{3}x\sqrt{9-(x-5)^2} - x\right\}_k^5$$

$$V(S) = \left\{24\cdot\left[12\ln\left((x-3)^2+4\right) + 36\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)\right] - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right\}_1^k$$

$$+\left\{\begin{matrix} 24\cdot\left[12\ln\left((x-3)^2+4\right) + 36\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)\right] \\ -\frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}\cdot\left(9-(x-5)^2\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}(x-5)\sqrt{9-(x-5)^2} + \frac{45}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{x-5}{3}\right)\right] - \frac{x^2}{2}\end{matrix}\right\}_k^5$$

$$\Rightarrow V(S) = \left\{288\ln\left((x-3)^2+4\right) + 864\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right) + \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{7x^2}{4}\right\}_1^k$$

$$+\left\{\begin{matrix} 288\ln\left((x-3)^2+4\right) + 864\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right) \\ \frac{2}{9}\left(9-(x-5)^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{3}(x-5)\sqrt{9-(x-5)^2} - 15\cdot\arcsin\left(\frac{x-5}{3}\right) - \frac{x^2}{2}\end{matrix}\right\}_k^5$$

$$\Rightarrow V(S) = 288\ln\left((k-3)^2+4\right) + 864\arctan\left(\frac{k-3}{2}\right) + \frac{k^2}{2}\ln(k) - \frac{7k^2}{4} - \left(288\ln(8) + 864\arctan(-1) + \frac{1}{2}\ln(1) - \frac{1}{4}\right)$$

$$+288\ln(8) + 864\arctan(1) + \frac{2}{9}\cdot(3)^3 - \frac{5}{3}(0)\sqrt{9} - 15\cdot\arcsin(0) - \frac{25}{2} -$$

$$\left(\begin{matrix} 288\ln\left((k-3)^2+4\right) + 864\arctan\left(\frac{k-3}{2}\right) \\ +\frac{2}{9}\cdot\left(9-(k-5)^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{3}(k-5)\sqrt{9-(k-5)^2} - 15\cdot\arcsin\left(\frac{k-5}{3}\right) - \frac{k^2}{2}\end{matrix}\right)$$

$$\Rightarrow V(S) = 288\ln\left((k-3)^2+4\right) + 864\arctan\left(\frac{k-3}{2}\right) + \frac{k^2}{2}\ln(k) - \frac{7k^2}{4} - 288\ln(8) - 864\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 0 - \frac{1}{4} + 288\ln(8) + 864\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+6 - 0 - 0 - \frac{25}{2} - 288\ln\left((k-3)^2+4\right) - 864\arctan\left(\frac{k-3}{2}\right) - \frac{2}{9}\left(9-(k-5)^2\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{3}(k-5)\sqrt{9-(k-5)^2}$$

$$+15\cdot\arcsin\left(\frac{k-5}{3}\right) + \frac{k^2}{2}$$

$$\Rightarrow V(S) = \frac{k^2}{2}\ln(k) - \frac{7k^2}{4} + 216\pi - \frac{1}{4} + 216\pi + 6 - \frac{25}{2} - \frac{2}{9}\left(9-(k-5)^2\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{3}(k-5)\sqrt{9-(k-5)^2} + 15\cdot\arcsin\left(\frac{k-5}{3}\right) + \frac{k^2}{2}$$

$$\Rightarrow V(S) = \frac{k^2}{2}\ln(k) - \frac{2}{9}\left(9-(k-5)^2\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{3}(k-5)\sqrt{9-(k-5)^2} + 15\cdot\arcsin\left(\frac{k-5}{3}\right) - \frac{5k^2}{4} + 432\pi - \frac{27}{4}$$

Si $k \approx 2.5$

$$V(S) \approx -27.65 + 432\pi - \frac{27}{4}$$

$$V(S) \approx 1322.769\ u^3$$

PREGUNTA 3

Un ingeniero civil está diseñando una rampa en una autopista que conecta dos secciones de la carretera. La rampa tiene una pendiente que sigue la forma de una curva definida por una función matemática. El diseño debe ser tal que la longitud de la rampa se ajuste a ciertas especificaciones de espacio y seguridad. La curva que describe la rampa está dada por la siguiente ecuación:

$$f(x) = \frac{5}{48}\left(4x^{4/5}+1\right)^{3/2}$$

y la rampa se extiende desde el punto $x = 1$ hasta $x = 3$.

El ingeniero necesita calcular la longitud de la rampa entre estos dos puntos, ya que el material de la carretera y la estructura del suelo dependerán de la longitud total de la rampa. Además, la longitud de la rampa es importante para calcular el tiempo de construcción y los costos asociados.

SOLUCIÓN

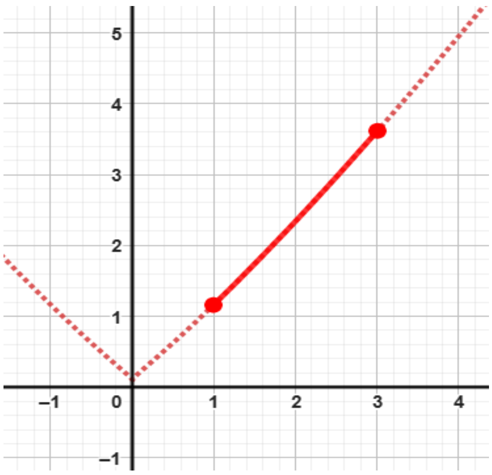
Derivando la función: $\mathrm{f(x)} = \frac{5}{48}\left(4x^{4/5}+1\right)^{3/2}$

*)

$$\mathrm{f'(x)} = \frac{5}{48}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(4x^{4/5}+1\right)^{1/2}\left(4\cdot\frac{4}{5}\cdot x^{-1/5}\right)$$

$$\mathrm{f'(x)} = \frac{5}{48}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{5}\cdot x^{-1/5}\left(4x^{4/5}+1\right)^{1/2}$$

$$\mathrm{f'(x)} = \frac{1}{2}\cdot x^{-1/5}\left(4x^{4/5}+1\right)^{1/2}$$



*)

$$\left(\mathrm{f'(x)}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot x^{-1/5}\left(4x^{4/5}+1\right)^{1/2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\mathrm{f'(x)}\right)^2 = \frac{1}{4}\mathrm{x}^{-\frac{2}{5}}\left(4x^{4/5}+1\right)$$

$$\Rightarrow \left(\mathrm{f'(x)}\right)^2 = \mathrm{x}^{2/5} + \frac{1}{4}\mathrm{x}^{-\frac{2}{5}}$$

*)

$$1 + \left(\mathrm{f'(x)}\right)^2 = 1 + \mathrm{x}^{2/5} + \frac{1}{4}\mathrm{x}^{-\frac{2}{5}}$$

$$\Rightarrow 1 + \left(\mathrm{f'(x)}\right)^2 = \mathrm{x}^{2/5} + 1 + \frac{1}{4}\mathrm{x}^{-\frac{2}{5}}$$

$$\Rightarrow 1 + \left(\mathrm{f'(x)}\right)^2 = \left(\mathrm{x}^{1/5} + \frac{1}{2}\mathrm{x}^{-\frac{1}{5}}\right)^2$$

Luego,

$$L(\mathrm{C}) = \int_1^3 \sqrt{1+\left(\mathrm{f'(x)}\right)^2}\; dx$$

$$L(\mathrm{C}) = \int_1^3 \sqrt{\left(\mathrm{x}^{1/5} + \frac{1}{2}\mathrm{x}^{-\frac{1}{5}}\right)^2}\; dx$$

$$L(\mathrm{C}) = \int_1^3 \left(\mathrm{x}^{1/5} + \frac{1}{2}\mathrm{x}^{-\frac{1}{5}}\right) dx$$

$$L(\mathrm{C}) = \left[\frac{5}{6}\mathrm{x}^{6/5} + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)\mathrm{x}^{\frac{4}{5}}\right]_1^3$$

$$L(\mathrm{C}) = \frac{5}{2}\left[\frac{1}{3}\mathrm{x}^{6/5} + \frac{1}{4}\mathrm{x}^{\frac{4}{5}}\right]_1^3$$

$$L(\mathrm{C}) = \frac{5}{2}\left[\frac{1}{3}(3)^{6/5} + \frac{1}{4}(3)^{\frac{4}{5}} - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$L(\mathrm{C}) = \frac{5}{2}\left[\frac{1}{3}(3)^{6/5} + \frac{1}{4}(3)^{\frac{4}{5}} - \frac{7}{12}\right] \approx 3.16$$

PREGUNTA 4

Un ingeniero hidráulico está diseñando un canal en forma de "V" que se utilizará para el flujo de agua. La sección del canal está delimitada por las siguientes curvas:

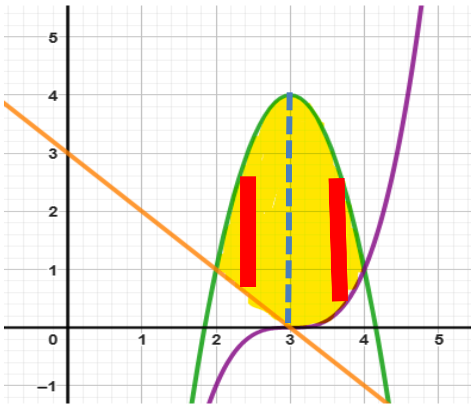
$$y = (x-3)^3, \qquad 3(x-3)^2 = -y+4, \qquad x+y=3$$

El ingeniero necesita calcular el centro de masa de la sección del canal para asegurarse de que el diseño sea eficiente y seguro.

a) Grafique la región ***R*** comprendida por dichas curvas (**Primer cuadrante)**.

b) Hallar el centroide o centro de masa de la región R.

SOLUCIÓN



B	$y = (x-3)^3$	$y = (x-3)^3$
C	$3(x-3)^2 = -y+4$	$y = 4 - 3(x-3)^2$
E	$x+y=3$	$\mathrm{y} = 3 - \mathrm{x}$

(i) Área de la región R

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}(D) = \mathrm{A}(D_1) + \mathrm{A}(D_2)$$

$$\mathrm{A} = \int_{\mathrm{D}_1} [\mathbf{C} - \mathbf{E}]\, \mathrm{dx} + \int_{\mathrm{D}_2} [\mathbf{C} - \mathbf{B}]\, \mathrm{dx}$$

$$\mathrm{A} = \int_2^3 [4 - 3(x-3)^2 - (3-\mathrm{x})]\, \mathrm{dx} + \int_3^4 [4 - 3(x-3)^2 - (x-3)^3]\, \mathrm{dx}$$

$$\mathrm{A} = \int_2^3 [4 - 3(x-3)^2 + (\mathrm{x}-3)]\, \mathrm{dx} + \int_3^4 [4 - 3(x-3)^2 - (x-3)^3]\, \mathrm{dx}$$

$$\mathrm{A} = \left[4x - \frac{3(x-3)^3}{3} + \frac{(x-3)^2}{2}\right]_2^3 + \left[4x - \frac{3(x-3)^3}{3} - \frac{(\mathrm{x}-3)^4}{4}\right]_3^4$$

$$\mathrm{A} = 12 - \left(8 + 1 + \frac{1}{2}\right) + 16 - 1 - \frac{1}{4} - 12$$

$$\mathrm{A} = 12 - \frac{19}{2} + \frac{59}{4} - 12$$

$$\mathrm{A} = \frac{21}{4}\ u^2$$

(ii) El centro de masa o centroide está dado por:

*)

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{1}{A}\int_{\mathrm{D}_1} \mathrm{x}\,[\mathbf{C} - \mathbf{E}]\, \mathrm{dx} + \frac{1}{A}\int_{\mathrm{D}_2} \mathrm{x}\,[\mathbf{C} - \mathbf{B}]\, \mathrm{dx}$$

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{1}{A}\int_2^3 \mathrm{x}\,[4 - 3(x-3)^2 - (3-\mathrm{x})]\, \mathrm{dx} + \frac{1}{A}\int_3^4 \mathrm{x}\,[4 - 3(x-3)^2 - (x-3)^3]\, \mathrm{dx}$$

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{1}{\frac{21}{4}}\int_2^3 \mathrm{x}\,[4 - 3(x^2 - 6x + 9) - 3 + \mathrm{x}]\, \mathrm{dx} + \frac{1}{\frac{21}{4}}\int_3^4 \mathrm{x}\,[4 - 3(x^2 - 6x + 9) - (x^3 - 9x^2 + 27\mathrm{x} - 27)]\, \mathrm{dx}$$

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{4}{21}\int_2^3 \mathrm{x}\,[1 - 3x^2 + 18x - 27 + \mathrm{x}]\, \mathrm{dx} + \frac{4}{21}\int_3^4 \mathrm{x}\,[4 - 3x^2 + 18x - 27 - x^3 + 9x^2 - 27\mathrm{x} + 27]\, \mathrm{dx}$$

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{4}{21}\int_2^3 \mathrm{x}\,[-3x^2 + 19x - 26]\, \mathrm{dx} + \frac{4}{21}\int_3^4 \mathrm{x}\,[-x^3 + 6x^2 - 9\mathrm{x} + 4]\, \mathrm{dx}$$

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{4}{21}\int_{2}^{3} [-3x^3 + 19x^2 - 26x]\,\mathrm{dx} + \frac{4}{21}\int_{3}^{4} [-x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 4\mathrm{x}]\,\mathrm{dx}$$

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{4}{21}\left[-\frac{3x^4}{4} + \frac{19x^3}{3} - 13x^2\right]_2^3 + \frac{4}{21}\left[-\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} - 3x^3 + 2x^2\right]_3^4$$

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{4}{21}\left[-\frac{243}{4} + 171 - 117 - \left(-12 + \frac{152}{3} - 52\right)\right] + \frac{4}{21}\left[-\frac{1024}{5} + 384 - 192 + 32 - \left(-\frac{243}{5} + \frac{243}{2} - 81 + 18\right)\right]$$

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{4}{21}\left[-\frac{27}{4} - \left(-\frac{40}{3}\right)\right] + \frac{4}{21}\left[\frac{96}{5} - \left(\frac{99}{10}\right)\right]$$

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{4}{21}\left[\frac{79}{12}\right] + \frac{4}{21}\left[\frac{93}{10}\right]$$

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{79}{63} + \frac{62}{35}$$

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{953}{315}$$

*)

$$\overline{\mathrm{Y}} = \frac{1}{2A}\int_{\mathrm{D}_1} [\mathbf{C^2} - \mathbf{B^2}]\,\mathrm{dx} + \frac{1}{2A}\int_{\mathrm{D}_2} [\mathbf{C^2} - \mathbf{E^2}]\,\mathrm{dx}$$

$$\overline{\mathrm{Y}} = \frac{1}{2\left(\frac{21}{4}\right)}\int_{2}^{3} [(4 - 3(x-3)^2)^2 - (3-\mathrm{x})^2]\,\mathrm{dx} + \frac{1}{2\left(\frac{21}{4}\right)}\int_{3}^{4} [(4 - 3(x-3)^2)^2 - ((x-3)^3)^2]\,\mathrm{dx}$$

$$\overline{\mathrm{Y}} = \frac{1}{\frac{21}{2}}\int_{2}^{3} [16 - 24(x-3)^2 + 9(x-3)^4 - (3-\mathrm{x})^2]\,\mathrm{dx} + \frac{1}{\frac{21}{2}}\int_{3}^{4} [16 - 24(x-3)^2 + 9(x-3)^4 - (x-3)^6]\,\mathrm{dx}$$

$$\overline{\mathrm{Y}} = \frac{2}{21}\int_{2}^{3} [16 - 24(x-3)^2 + 9(x-3)^4 - (3-\mathrm{x})^2]\,\mathrm{dx} + \frac{2}{21}\int_{3}^{4} [16 - 24(x-3)^2 + 9(x-3)^4 - (x-3)^6]\,\mathrm{dx}$$

$$\overline{\mathrm{Y}} = \frac{2}{21}\left[16x - 8(x-3)^3 + \frac{9(x-3)^5}{5} + \frac{(3-\mathrm{x})^3}{3}\right]_2^3 + \frac{2}{21}\left[16x - 8(x-3)^2 + \frac{9(x-3)^5}{5} - \frac{(x-3)^7}{7}\right]_3^4$$

$$\overline{\mathrm{Y}} = \frac{2}{21}\left[48 - \left(32 + 8 - \frac{9}{5} + \frac{1}{3}\right)\right] + \frac{2}{21}\left[64 - 8 + \frac{9}{5} - \frac{1}{7} - (48)\right]$$

$$\overline{\mathrm{Y}} = \frac{2}{21}\left[\frac{142}{15}\right] + \frac{2}{21}\left[\frac{338}{35}\right]$$

$$\overline{\mathrm{Y}} = \frac{284}{315} + \frac{676}{735}$$

$$\overline{\mathrm{Y}} = \frac{284}{315} + \frac{676}{735}$$

$$\overline{\mathrm{Y}} = \frac{4016}{2205}$$

Por tanto, $\mathrm{C} = (\overline{\mathrm{X}},\ \overline{\mathrm{Y}}) = \left(\frac{953}{315}, \frac{4016}{2205}\right) \approx (3.02\,;1.82)$

PREGUNTA 5

Analizar la convergencia o divergencia de la siguiente integral impropia

$$\int_2^{\sqrt{5}} \frac{\mathrm{x}\ln(\mathrm{x}^2-4)}{\sqrt{\mathrm{x}^2-4}}\mathrm{dx}$$

SOLUCIÓN

Integración por partes:

$$\begin{aligned} u &= \ln(x^2-4) & dv &= \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx \\ du &= \frac{2x}{x^2-4}dx & dv &= \int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx \\ du &= \frac{2x}{x^2-4}dx & v &= \sqrt{x^2-4} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A} = \int \frac{\mathrm{x}\ln(\mathrm{x}^2-4)}{\sqrt{\mathrm{x}^2-4}}\mathrm{dx}$$

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{\mathrm{x}^2-4}\cdot\ln(\mathrm{x}^2-4) - \int \sqrt{\mathrm{x}^2-4}\cdot\frac{2x}{\mathrm{x}^2-4}\mathrm{dx}$$

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{\mathrm{x}^2-4}\cdot\ln(\mathrm{x}^2-4) - \int \frac{2x}{\sqrt{\mathrm{x}^2-4}}\mathrm{dx}$$

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{\mathrm{x}^2-4}\cdot\ln(\mathrm{x}^2-4) - 2\sqrt{\mathrm{x}^2-4}$$

Luego,

$$I = \int_2^{\sqrt{5}} \frac{\mathrm{x}\ln(\mathrm{x}^2-4)}{\sqrt{\mathrm{x}^2-4}}\mathrm{dx}$$

$$I = \lim_{t\to 2^+} \int_t^{\sqrt{5}} \frac{\mathrm{x}\ln(\mathrm{x}^2-4)}{\sqrt{\mathrm{x}^2-4}}\mathrm{dx}$$

$$I = \lim_{t\to 2^+} \left[\sqrt{\mathrm{x}^2-4}\cdot\ln(\mathrm{x}^2-4) - 2\sqrt{\mathrm{x}^2-4}\right]_t^{\sqrt{5}}$$

$$I = \lim_{t\to 2^+} \left[\sqrt{5-4}\cdot\ln(5-4) - 2\sqrt{5-4} - \sqrt{t^2-4}\cdot\ln(t^2-4) + 2\sqrt{t^2-4}\right]$$

$$I = \lim_{t\to 2^+} \left[\ln(1) - 2 - \sqrt{t^2-4}\cdot\ln(t^2-4) + 2\sqrt{t^2-4}\right]$$

$$I = \lim_{t\to 2^+} \left[-2 - \sqrt{t^2-4}\cdot\ln(t^2-4) + 2\sqrt{t^2-4}\right]$$

$$I = \lim_{t\to 2^+} \left[-2 + 2\sqrt{t^2-4}\right] - \lim_{t\to 2^+}\left[\sqrt{t^2-4}\cdot\ln(t^2-4)\right]$$

$$I = \lim_{t\to 2^+} \left[-2 + 2\sqrt{t^2-4}\right] - \lim_{t\to 2^+}\left[\frac{\ln(t^2-4)}{\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{t^2-4}}}\ \frac{\infty}{\infty}\ \mathbf{L'H}\right]$$

$$I = \lim_{t\to 2^+} \left[-2 + 2\sqrt{t^2-4}\right] - \lim_{t\to 2^+}\left[\frac{\ln(t^2-4)}{(t^2-4)^{-1/2}}\right]$$

$$I = \lim_{t\to 2^+} \left[-2 + 2\sqrt{t^2-4}\right] - \lim_{t\to 2^+}\left[\frac{\frac{2t}{t^2-4}}{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot \mathbf{2}\boldsymbol{t}(t^2-4)^{-3/2}}\right]$$

$$I = \lim_{t\to 2^+} \left[-2 + 2\sqrt{t^2-4}\right] - \lim_{t\to 2^+}\left[\frac{\frac{2t}{t^2-4}}{-\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{t}}{\mathbf{2}(t^2-4)^{3/2}}}\right]$$

$$I = \lim_{t\to 2^+}\left[-2\ + 2\sqrt{t^2-4}\right] - \lim_{t\to 2^+}\left[-\frac{\mathbf{2}(t^2-4)^{3/2}}{t^2-4}\right]$$

$$I = \lim_{t\to 2^+}\left[-2\ + 2\sqrt{t^2-4}\right] - \lim_{t\to 2^+}\left[-\mathbf{2}(t^2-4)^{\mathbf{3/2}}(t^2-4)^{\mathbf{-1}}\right]$$

$$I = \lim_{t\to 2^+}\left[-2\ + 2\sqrt{t^2-4}\right] - \lim_{t\to 2^+}\left[-\mathbf{2}(t^2-4)^{\mathbf{1/2}}\right]$$

$$I = -2 + 2(0) - 2(0) = -2$$

Por tanto,

$$\int_2^{\sqrt{5}} \frac{\mathrm{x}\ln(\mathrm{x}^2-4)}{\sqrt{\mathrm{x}^2-4}}\,\mathrm{dx} = -2$$

es convergente.