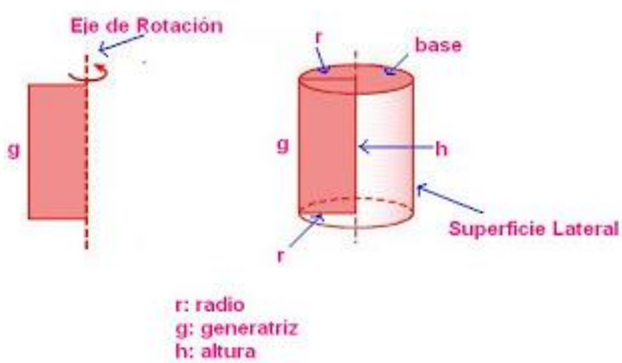
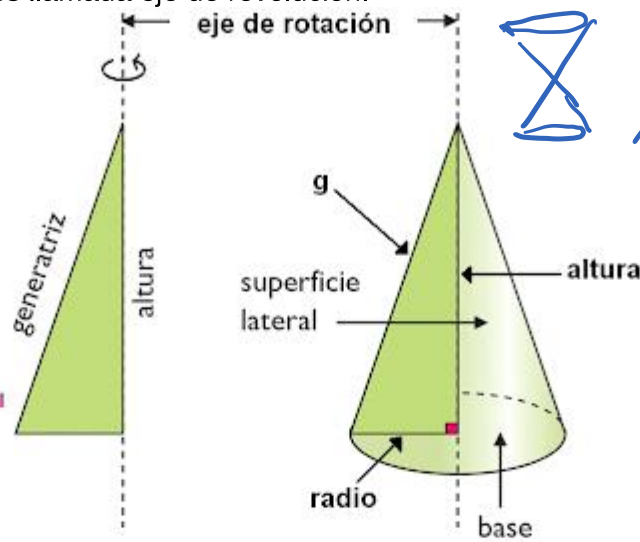
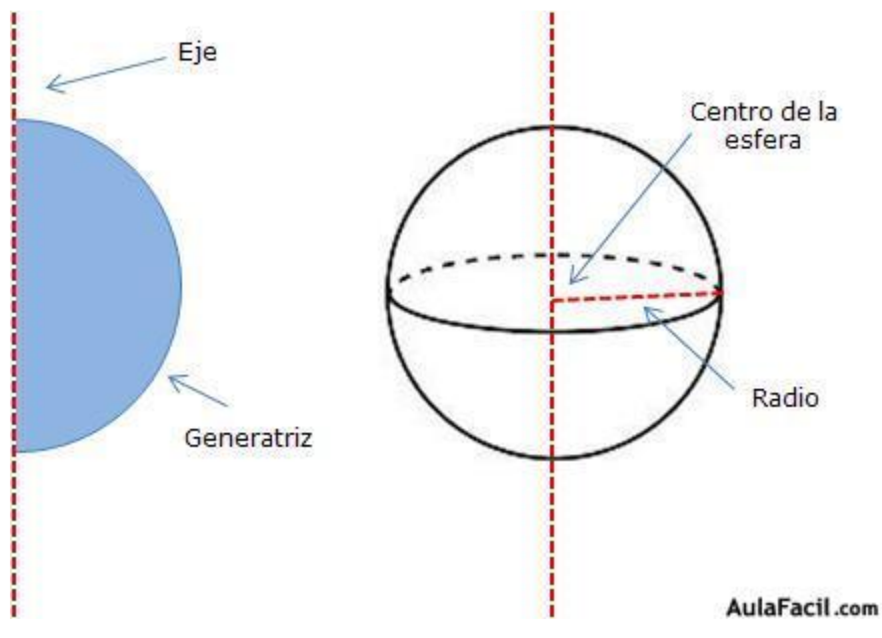
TEÓRICO PRÁCTICO Nº 13

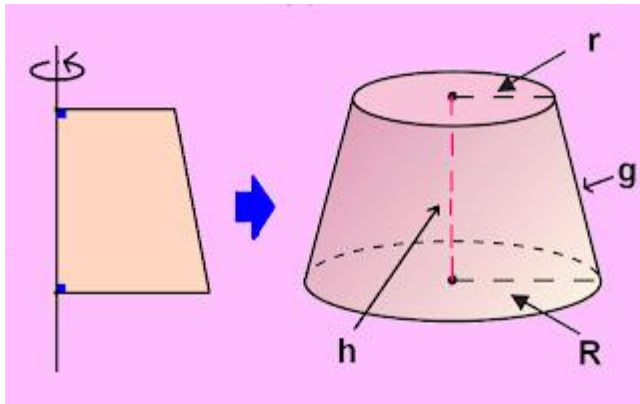
VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

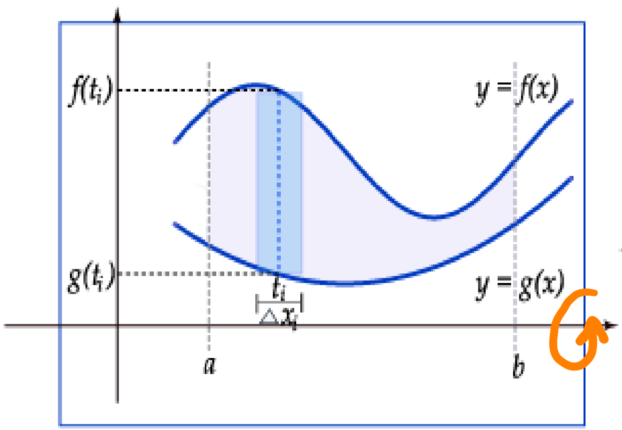
Definición (Sólido de Revolución)
Un sólido de revolución, es un sólido obtenido al rotar una región plana alrededor de una recta fija contenida en el plano de la región. La recta fija es llamada eje de revolución.

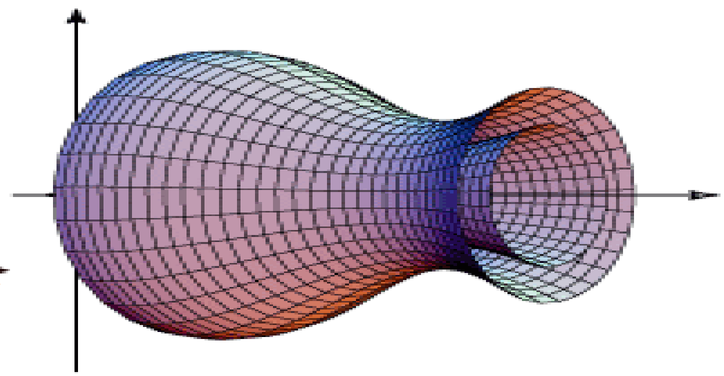






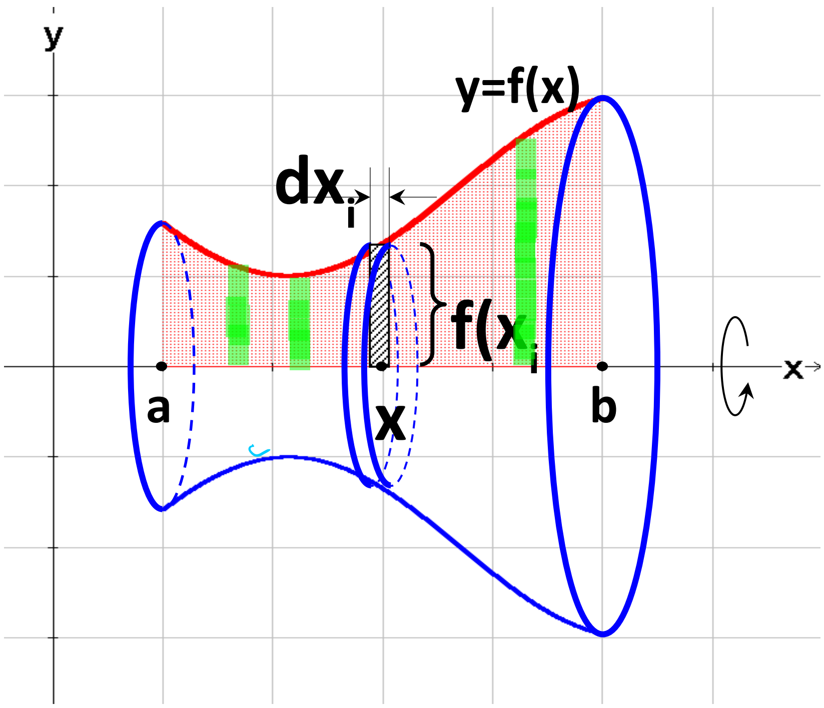

r
g
h
R

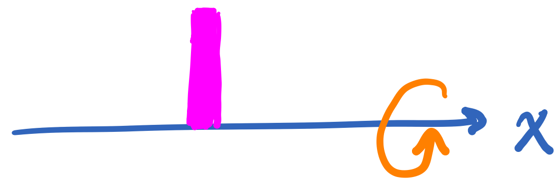

f(t_i)
y = f(x)
g(t_i)
y = g(x)
t_i
△x_i
a
b

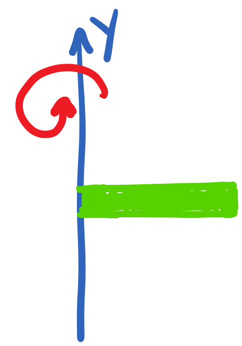


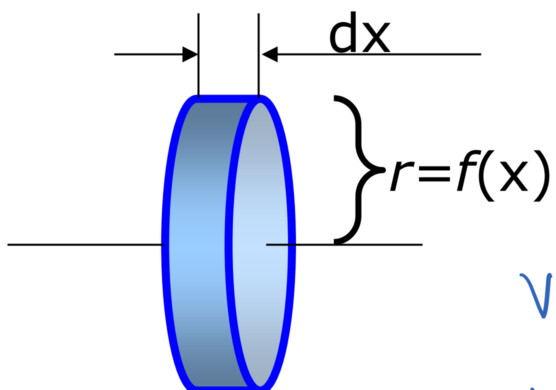
Para calcular el volumen de un sólido de revolución se considera los métodos siguientes:

MÉTODO DEL DISCO









$\pi r^2 dx$

$V(S) = \int_a^b \pi r^2 \, dx$

$V(S) = \pi \int_a^b r^2 \, dx$

El volumen del sólido de revolución es: $V(S) = \pi \int_a^b (r)^2 \, dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx.$

EJEMPLOS

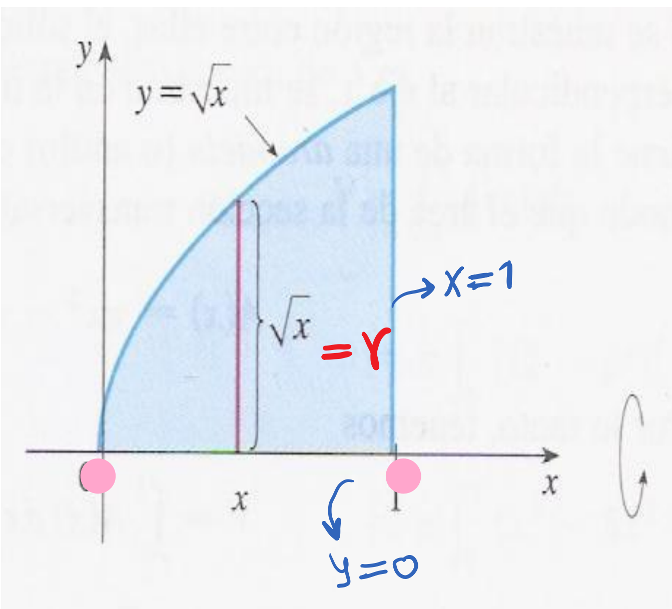
Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la región D limitada por las curvas dadas alrededor de la recta dada

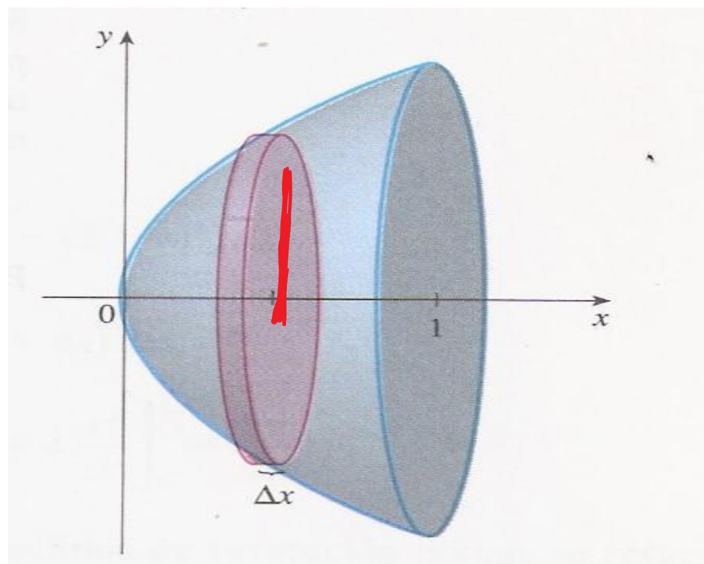
1) $y=\sqrt{x},\ y=0,\ x=1,\ L: eje\ X,$

Solución

Radio del disco: $r=\sqrt{x}$

Entonces $V(S)=\pi\int_0^1 r^2\,dx=\pi\int_0^1(\sqrt{x})^2\,dx=\pi\int_0^1 x\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}\left[x^2\right]_0^1=\frac{\pi}{2}\left[(1)^2-(0)^2\right]=\frac{\pi}{2}u^3.$





$$V(s) = \pi \int_0^1 r^2 \quad dx$$

$$V(s) = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx$$

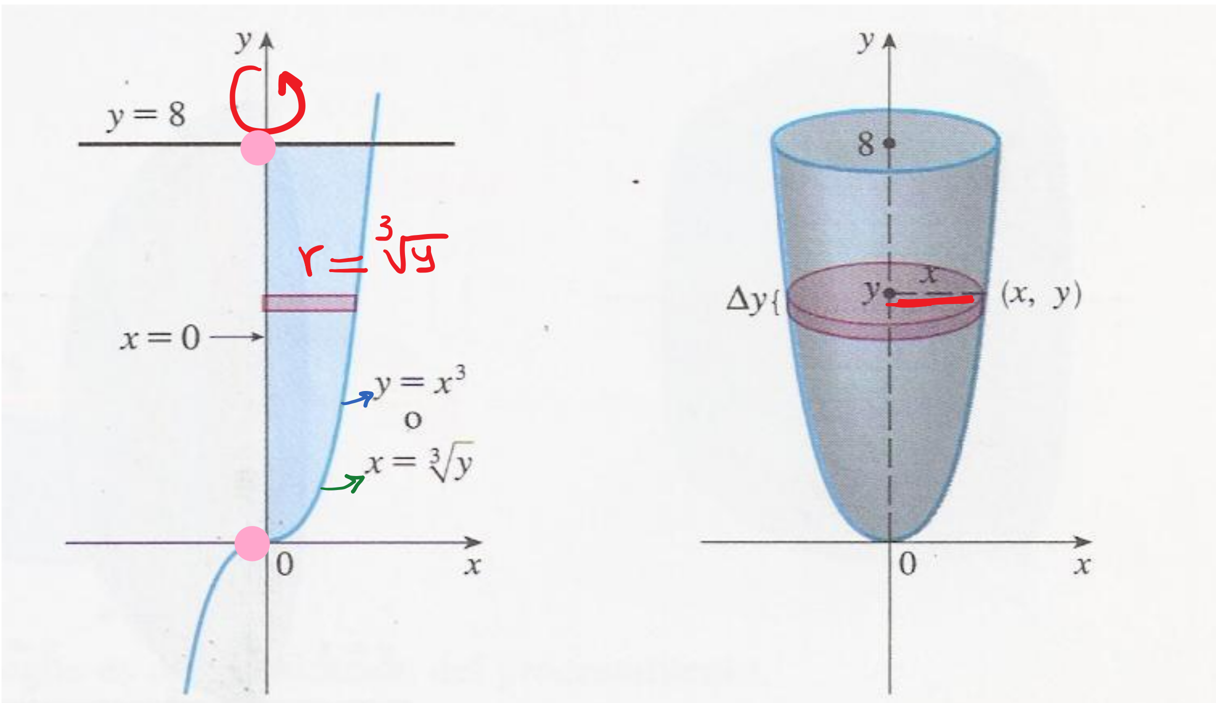
2) $y = x^3,\ x = 0,\ y = 8,\ L: eje\ Y,$

Solución

Radio del disco: $r = \sqrt[3]{y}$

Entonces $V(S) = \pi \int_0^8 r^2\,dy = \pi \int_0^8 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy = \pi \int_0^8 y^{2/3}\,dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3}\right]_0^8$

$$= \frac{3\pi}{5}\left[y^{5/3}\right]_0^8 = \frac{3\pi}{5}\left[\left(\sqrt[3]{8}\right)^5 - \left(\sqrt[3]{0}\right)^5\right] = \frac{96\pi}{5} u^3.$$

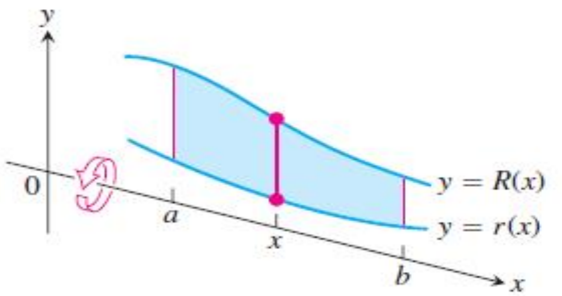


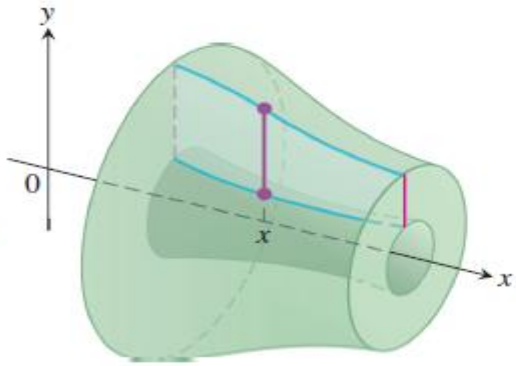
$$V(s) = \pi \int_0^8 r^2\,dy$$

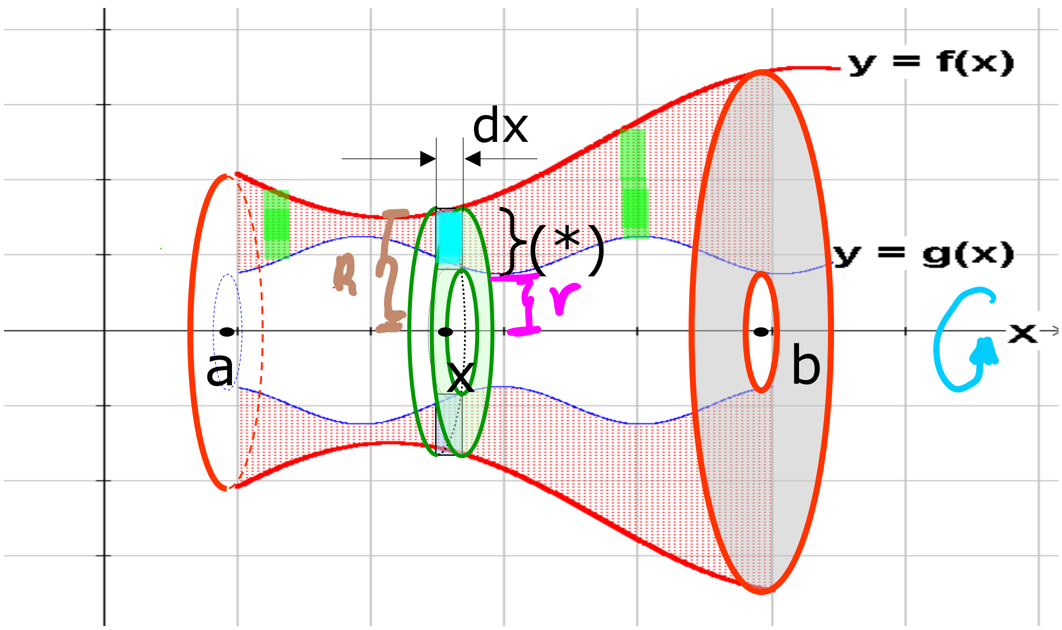
$$V(s) = \pi \int_0^8 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy$$

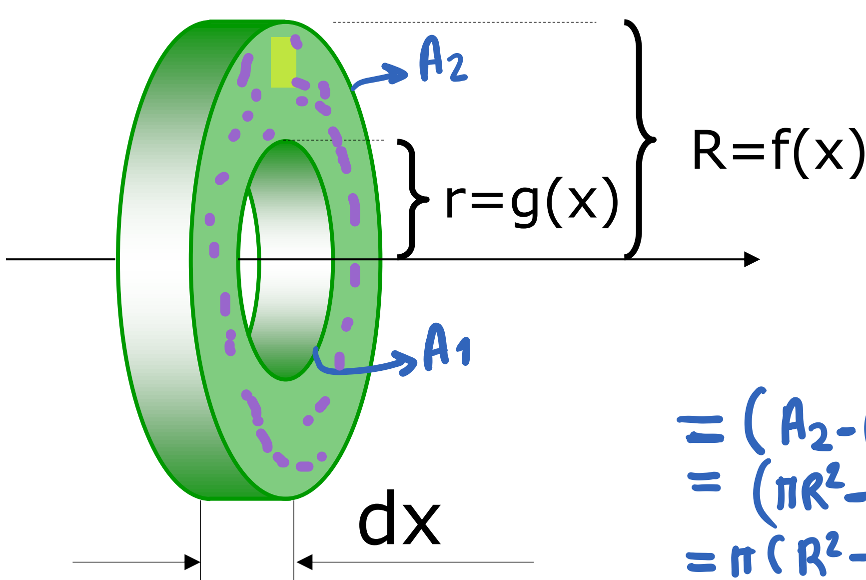
MÉTODO DEL ANILLO O ARANDELA

El método de los discos se extiende a sólidos huecos. La arandela se genera haciendo girar un rectángulo en torno a un eje.









$$= (A_2 - A_1)\,dx$$
$$= (\pi R^2 - \pi r^2)\,dx$$
$$= \pi (R^2 - r^2)\,dx$$
$$V(s) = \pi \int [R^2 - r^2]\,dx$$

El volumen del sólido de revolución es: $V(S)=\pi\int_a^b \left[R^2-r^2\right]dx=\pi\int_a^b\left[(f(x))^2-(g(x))^2\right]dx.$

EJEMPLOS

1) Dada la región D limitadas por las gráficas de :

$$y=-3x^3+1\,,\quad y-1=\sqrt{x}\,,\quad x+5y=19$$

a) Trace la gráfica de la región D.
b) Calcula el volumen del solido de revolución que se genera al girar la región D alrededor del eje X .

Sol

$D = D_1 \cup D_2$

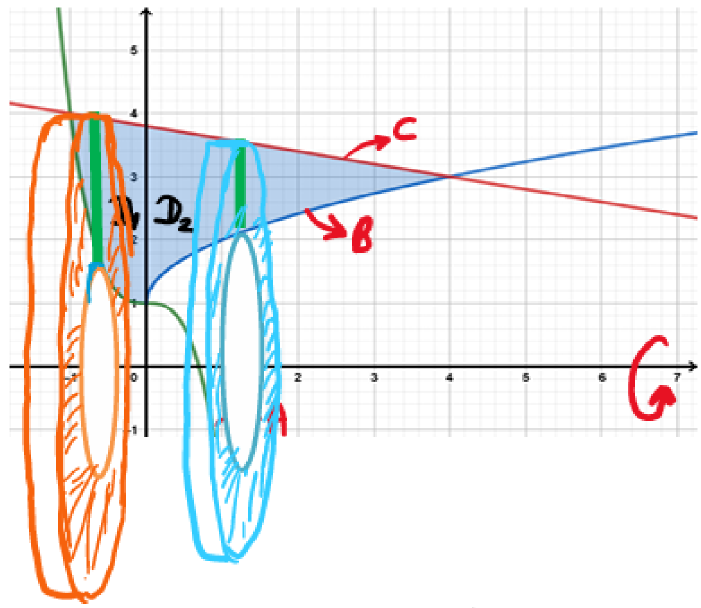
*) A: $\boxed{y=-3x^3+1}$

*) B: $y-1=\sqrt{x}$

$\boxed{y=\sqrt{x}+1}$

*) C: $x+5y=19$

$\Rightarrow \boxed{y=\dfrac{19-x}{5}}$



i) Región D_1

Radio mayor : $R = C = \dfrac{19-x}{5}$

Radio menor : $r = A = -3x^3+1$

ii) Región D_2

Radio mayor: $R = C = \dfrac{19-x}{5}$

Radio menor : $r = B = \sqrt{x}+1$

Luego,

$$V(S) = V(S_1) + V(S_2)$$

$$V(S) = \pi \int_{D_1} [R^2 - r^2]\,dx + \pi \int_{D_2} [R^2 - r^2]\,dx$$

$$V(S) = \pi \int_{-1}^{0} \left[\left(\frac{19-x}{2}\right)^2 - (-3x^3+1)^2\right] dx + \pi \int_{0}^{4} \left[\left(\frac{19-x}{5}\right)^2 - (\sqrt{x}+1)^2\right] dx$$

EJEMPLOS

1. Dada la región D limitada por las gráficas de: $y+2x=4$; $y=4-2(x-2)^2$; $y=2(x-2)^3$, IC.

a) Trace la gráfica de la región D.

b) Calcula el volumen del solido de revolución que se genera al girar la región D alrededor del eje X.

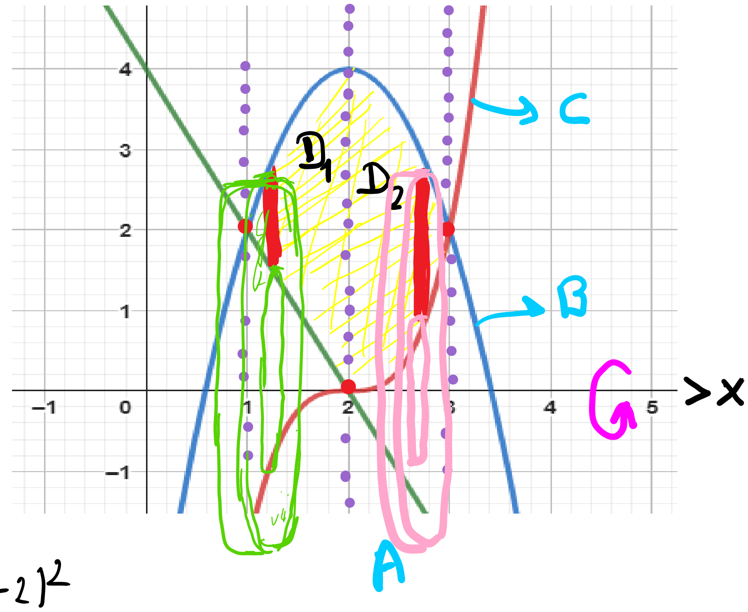
SOLUCIÓN

•) A: $y+2x=4$

$\Rightarrow \boxed{y=4-2x}$

•) B: $\boxed{y=4-2(x-2)^2}$

•) C: $\boxed{y=2(x-2)^3}$



i) Región D1

Radio mayor: $R = B = 4-2(x-2)^2$

Radio menor: $r = A = 4-2x$

$$V(S_1) = \pi\int [R^2 - r^2]\,dx$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{a}$$

$$V(S_1) = \pi\int_1^2 \left[\left(4-2(x-2)^2\right)^2 - (4-2x)^2\right] dx$$

$$V(S_1) = \pi\int_1^2 \left[16 - 16(x-2)^2 + 4(x-2)^4 - (4-2x)^2\right] dx$$

$$V(S_1) = \pi\left[16x - 16.\frac{(x-2)^3}{3} + 4\frac{(x-2)^5}{5} - \frac{(4-2x)^3}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\Bigg|_1^2$$

$$V(S_1) = \pi\left[32 - \left(16 + \frac{16}{3} - \frac{4}{5} + \frac{4}{3}\right)\right]$$

$$V(S_1) = \frac{152\pi}{15}$$

ii) Región D_2

Radio mayor: $R = B = 4-2(x-2)^2$
Radio menor: $r = C = 2(x-2)^3$

$$V(S_2) = \pi \int [R^2 - r^2]\,dx$$

$$V(S_2) = \pi \int_2^3 \left[\left(4-2(x-2)^2\right)^2 - \left(2(x-2)^3\right)^2 \right] dx$$

$$V(S_2) = \pi \int_2^3 \left[16 - 16(x-2)^2 + 4(x-2)^4 - 4(x-2)^6 \right] dx$$

$$V(S_2) = \pi \left[16x - \frac{16(x-2)^3}{3} + \frac{4(x-2)^5}{5} - \frac{4(x-2)^7}{7} \right]_2^3$$

$$V(S_2) = \pi \left[48 - \frac{16}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} - (32) \right]$$

$$V(S_2) = \frac{1144\pi}{105}$$

Luego,

$$V(S) = V(S_1) + V(S_2)$$

$$= \frac{152}{15}\pi + \frac{1144}{105}\pi$$

$$V(S) = \frac{736}{35}\pi\ u^3$$

2. Dada la región D limitadas por las gráficas de: $x - y = 1$; $(x-1)^2 = 2 - y$;
$y = 2 + \sqrt{x-1}$

a) Trace la gráfica de la región D.

b) Calcula el volumen del solido de revolución que se genera al girar la región D alrededor del eje Y .

SOLUCIÓN

*) A : $x - y = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1 + y}$

*) B: $(x-1)^2 = 2 - y$

$\Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{2-y}$

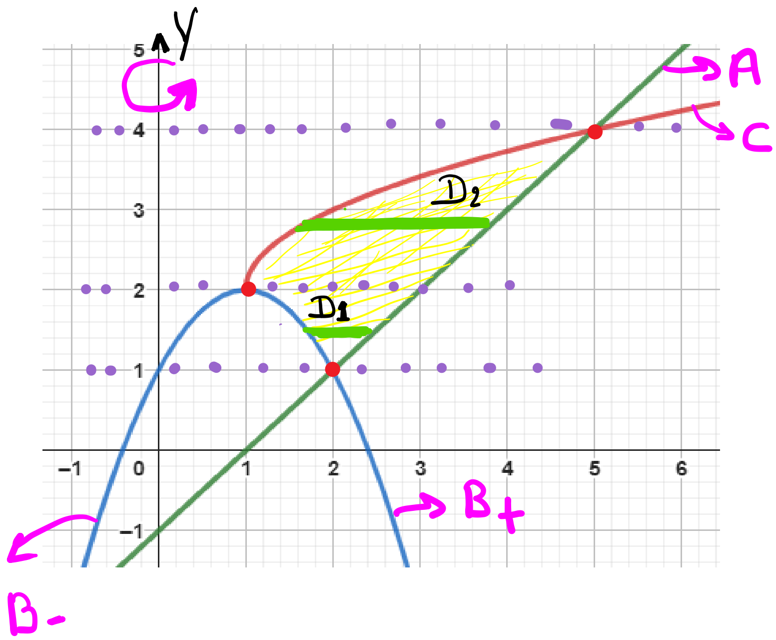
$\Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{2-y} + 1}$

*) C : $y = 2 + \sqrt{x-1}$

$\Rightarrow y - 2 = \sqrt{x-1}$

$\Rightarrow (y-2)^2 = x - 1$

$\Rightarrow \boxed{x = (y-2)^2 + 1}$



i) Región D1

Radio mayor: $R = A = 1 + y$

Radio menor: $r = B_+ = \sqrt{2-y} + 1$

$$V(S_1) = \pi \int [R^2 - r^2]\, dy$$

$$V(S_1) = \pi \int_1^2 \left[(1+y)^2 - \left(\sqrt{2-y} + 1\right)^2 \right] dy$$

$$V(S_1) = \pi \int_1^2 \left[(1+y)^2 - \left(2 - y + 2(2-y)^{1/2} + 1\right) \right] dy$$

$$V(S_1) = \pi \int_1^2 \left[(1+y)^2 - 2(2-y)^{1/2} + y - 3 \right] dy$$

$$V(S_1) = \pi\left[\frac{(1+y)^3}{3} - 2\cdot\frac{2}{3}(2-y)^{3/2}(-1) + \frac{y^2}{2} - 3y\right|_1^2$$

$$V(S_1) = \pi\left[\frac{27}{3} + \frac{4}{2} - 6 - \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} - 3\right)\right] \Rightarrow \boxed{V(S_1) = \frac{7}{2}\pi}$$

ii) Región D_2

Radio mayor : $R = A = 1+y$

Radio menor : $r = C = (y-2)^2+1$

$$V(S_2) = \pi\int[R^2 - r^2]\,dy$$

$$V(S_2) = \pi\int_2^4\left[(1+y)^2 - \left((y-2)^2+1\right)^2\right]dy$$

$$V(S_2) = \pi\int_2^4\left[(1+y)^2 - \left((y-2)^4 + 2(y-2)^2 + 1\right)\right]dy$$

$$V(S_2) = \pi\left[\frac{(1+y)^3}{3} - \frac{(y-2)^5}{5} - \frac{2(y-2)^3}{3} - y\right|_2^4$$

$$V(S_2) = \pi\left[\frac{125}{3} - \frac{32}{5} - \frac{16}{3} - 4 - \left(\frac{27}{3}\right)\right]$$

$$\boxed{V(S_2) = \frac{38\pi}{3}}$$

Luego, $V(S) = V(S_1) + V(S_2)$

$$V(S) = \frac{17}{2}\pi + \frac{38}{3}\pi$$

$$\boxed{V(S) = \frac{127\pi}{6}\ u^3}$$