Alg.Lineal

Héctor Fabian Cabrera Vargas Juan Esteban Avila Bautista

Mayo 2025

1. Introducción

Rectas y Planos en el espacio

En el espacio, es decir en tres dimensiones, el estudio de las rectas y los planos nos sirven para resolver problemas en física, geometría espacial e ingeniería. A diferencia del plano bidimensional, en el que solo poseemos dos coordenadas (x,y), en el espacio debemos tener en cuenta una nueva dimensión, por lo que obtenemos las coordenadas (x,y,z).

Debido a esto, surgen nuevas formas de abordar los problemas que surgen con las rectas tridimensionales, y los planos que podemos introducir en el espacio.

2. Planteamiento del problema

El estudio de las rectas y planos en el espacio es extenso y ha sido abordado por múltiples autores a lo largo de la historia. Sus aplicaciones incluyen el cálculo de trayectorias, diseño de estructuras, gráficos por computadora y análisis de fuerzas en mecánica. Por lo que encuentra su mayor uso en los campos de la ciencia y la ingeniería.

Debido a esto, surge la necesidad de comprender y dominar estas temáticas en orden de aplicarlas a futuro, entendiendo cómo funcionan estos conceptos y las aplicaciones que poseen.

3. Metodología

Para este artículo, se utilizarán múltiples libros sobre algebra lineal para obtener la base conceptual de la temática, especialmente .Ālgebra Lineal "de Stanley Grossman. (Grossman y Flores, 2012), y los distintos ejercicios que se propongan serán resueltos tanto a mano, como utilizando distintas herramientas de Python, en orden de comparar y demostrar los resultados obtenidos. Principalmente, se utilizarán las distintas librerías que posee Python dedicadas a la resolución de problemas de algebra lineal, tales como Sympy y Numpy.

Para graficar los resultados de estos problemas, se utilizará la biblioteca matplotlib.

Vale la pena hacer esta distinción pues Python cuenta con miles de librerías, orientadas a distintos campos que no competen al desarrollo de esta investigación.

4. Rectas

En el plano, una recta es una colección infinita de puntos que poseen una única dirección y magnitud, además de ser completamente continua, es decir no hay puntos en los que no tenga imagen o esta varie respecto a la función. En el espacio, es decir en R3 , la recta se puede definir de la misma forma, sin embargo, ahora hay que tener en cuenta el nuevo eje z.

En el plano, la recta se puede definir si se tienen dos puntos, o bien un punto y la pendiente de la recta. En el espacio se puede intuir lo mismo (Grossman y Flores, 2012), la recta espacial se puede inferir si se tienen dos puntos, o el punto y la dirección de la recta.

Para hallar la ecuación de una recta espacial, nos valemos de un vector director que parte desde algún punto conocido de la recta, pero además tiene la misma dirección que la recta. Supongamos un punto A= (x1, y1, z1) y un punto P= (x, y, z). Un vector v= (a, b, c) debe cumplir que AP=tv, donde t es un número real, esto quiere decir que el vector director y la recta comparten la misma dirección. Ya que se poseen dos vectores, podemos encontrar una ecuación general de la forma p= a+tv, donde p es el vector desde el origen al punto P y a es el vector del origen al punto A.

Esto nos permite crear una serie de tres ecuaciones al momento de expandir la formula obtenida anteriormente de manera parametrizada, asociando los componentes de cada parte de la ecuación (Kolman y Hill, 2006), de tal forma que obtenemos una serie de tres ecuaciones, cada una asociada a un eje del espacio:

$$x = x_1 + ta \tag{1}$$

$$y = y_1 + tb$$

$$z = z_1 + tc$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de una recta (Kolman y Hill, 2006).

Al despejar t se obtienen las ecuaciones simétricas de una recta (Grossman y Flores, 2012).

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \tag{2}$$

Donde x_1, y_1 y z_1 son los puntos conocidos, mientras que a, b y c son las coordenadas del vector director.

4.1. Ejemplo

Consideremos una recta L que pasa por los puntos P=(1,3,2), y Q=(2,1,4). Notemos que poseemos dos puntos, pero nos falta un vector director, este se puede hallar al encontrar la distancia desde el punto final hasta el inicial, es decir v= Q-P, es decir, v= (2-1, 1-3, 4-2), por lo tanto v es el vector (1, -2, 2). Entonces podemos escribir las distintas ecuaciones de esta recta:

Ecuacion vectorial:

$$(x, y, z) = (1, 3, 2) + t(1, -2, 2) \tag{3}$$

o

$$(x, y, z) = (2, 1, 4) + t(1, -2, 2)$$

Ecuaciones parametricas:

$$x = 1 + t \tag{4}$$
$$y = 3 - 2t$$
$$z = 2 + 2t$$

o

$$x = 2 + t$$
$$y = 1 - 2t$$
$$z = 4 + 2t$$

Ecuaciones Simétricas:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{2} \tag{5}$$

o

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-4}{2}$$

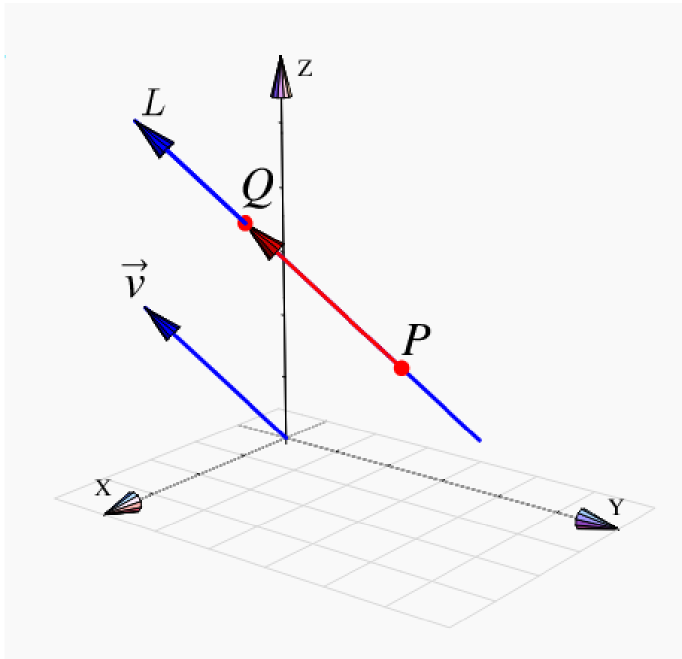

Figura 1: Grafica de la recta del ejemplo (Gutierrez y Mora, 2018)

4.2. Ejercicio

Dados los puntos P=(6,2,-3) y Q=(-2,3,3) hallar los puntos de la recta PQ que tienen al menos una coordenada nula.

Lo primero que debemos hacer es graficar esta recta para darnos a una idea de lo que está sucediendo:

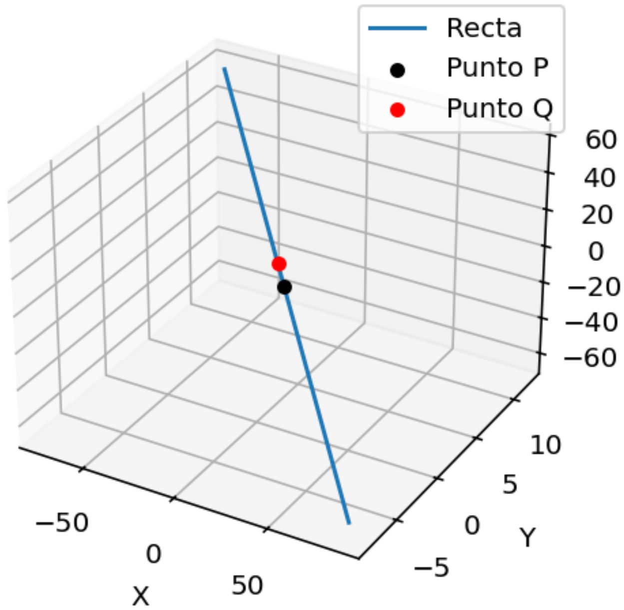

Figura 2: Grafica de la recta descrita usando Matplotlib

```python
#Para calculos
import numpy as np
#Para los graficos
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

#Determina la recta de forma parametrizada
t = np.linspace(-10, 10, 100)
P= np.array([6,2,-3])
Q= np.array([-2,3,3])
v= np.array([-8,1,6])
x = P[0]+v[0]*t
y = P[1]+v[1]*t
z = P[2]+v[2]*t

#Declarar recta
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
#Dibujar recta
ax.plot(x, y, z, label='Recta')
ax.scatter(*P, color='black',label='Punto P')
ax.scatter(*Q, color='red',label='Punto Q')
#Etiquetas
ax.set_xlabel('X')
ax.set_ylabel('Y')
ax.set_zlabel('Z')
ax.legend()
plt.show()
```

Figura 3: Codigo que genera esa grafica

Después, debemos entender que nos piden, en este caso, encontrar los puntos que se generan al reemplazar al menos una de las coordenadas por 0.

Primero determinemos la ecuación de esta recta:

$$P = (6, 2, -3)$$

$$Q = (-2, 3, 3) \rightarrow \vec{v} = \vec{PQ} = (-2-6, 3-2, 3+3)$$

$$(-8, 1, 6)$$

$$(x, y, z) = (6, 2, -3) + t(-8, 1, 6) //$$

Figura 4: Hallamos el vector director y determinamos la recta

Es más facil comprender la recta de forma parametrizada:

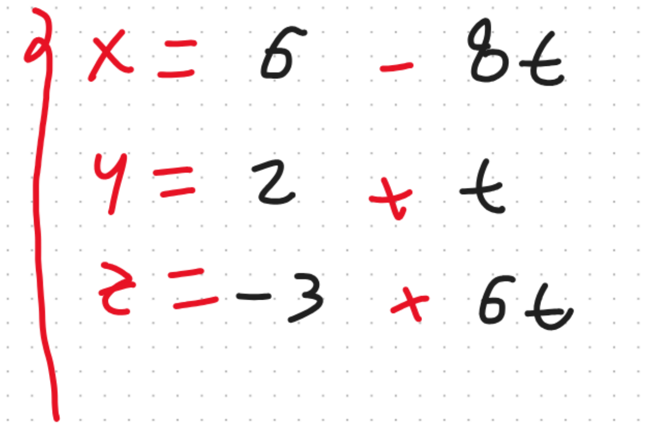

Figura 5: Forma parametrizada

Ahora podemos igualar cada coordenada a 0 para encontrar los valores de t:

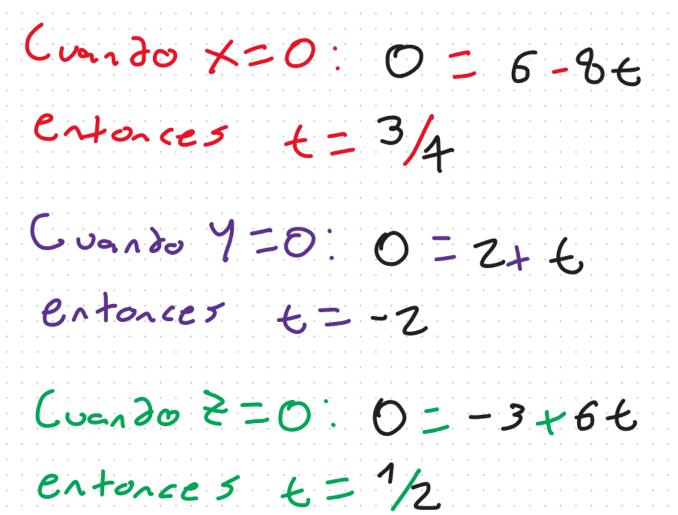

Figura 6: Valores de t al igualar a 0

Ya con los valores de t, podemos resolver las ecuaciones y encontrar los puntos:

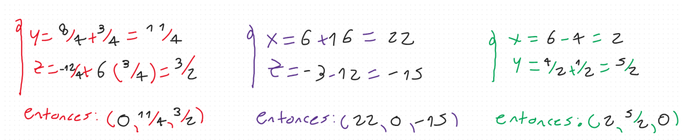

Figura 7: Puntos al resolver las ecuaciones

Nuestra respuesta final es que:

1) Cuando x=0, obtenemos el punto $(0, \frac{11}{4}, \frac{3}{2})$
2) Cuando y=0, obtenemos el punto $(22, 0, -15)$
3) Cuando z=0, obtenemos el punto $(2, \frac{5}{2}, 0)$

5. Planos

Un plano se define matemáticamente como un conjunto de puntos que cumplen con una determinada ecuación. Existen varias formas de definir un plano, dependiendo del contexto.De la forma analitica se puede definir como : Sea P un punto en el espacio, y n un vector diferente de 0, todos los puntos Q que satisfacen la ecuación PQ*n=0 son los que constituyen un plano en el espacio. En este caso, P es un punto genérico del plano(punto (x,y,z) por defecto), Q es algún punto conocido, y n es un vector normal perpendicular al vector PQ(Gutierrez y Mora, 2018).Una aplicacion o deduccion de esta definicion es que se puede determinar si dos planos son paralelos al calcular el producto cruz entre sus vectores normales. Si este es igual a 0, se dice que los planos son paralelos entre sí.

La forma cartesiana de esta ecuación es ax+by+cz=d, donde (a,b,c) son las componentes del vector normal n, y d es una constante que depende del punto P=(x0 ,y0 ,z0), tal que d=ax0 +by0 +cz0 . Esta forma es útil para expresar la ecuación del plano en términos de los ejes coordenados x,y,z.

Para analizar la relación entre dos planos, se puede utilizar el producto cruz entre sus vectores normales. Si el producto cruz es el vector nulo, es decir, n1 xn2 =0, entonces los vectores normales son paralelos o colineales, lo que implica que los planos son paralelos entre sí. Por otro lado, si el producto punto entre los vectores normales es cero, n1· n2 =0, los planos son perpendiculares

Además de su representación por medio de la ecuación PQ*n=0, un plano en el espacio puede describirse de diversas formas. Una de ellas es la ecuación vectorial del plano, que se expresa como r = r0+sv1+tv2 donde r0 es un punto conocido del plano y v1, v2 son vectores directores no colineales que lo recorre completamente al variar los parámetros s y t. Esta forma resulta muy útil cuando se conocen puntos y vectores que se encuentran dentro del plano(Grossman y Flores, 2012).

Otra expresión es la ecuación normal del plano la cual se expresa n*(r-r0)=0, esto indica que cualquier vector desde un punto fijo en el plano hasta otro arbitrario debe ser ortogonal al vector normal n.

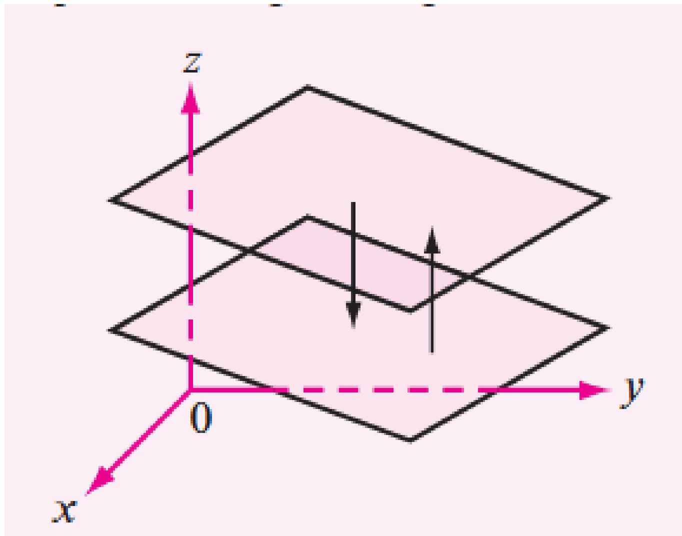

Figura 8: Planos Paralelos entre si (Grossman y Flores, 2012)

6. Aplicaciones

Las aplicaciones de estos temas se ven en cualquier campo de estudio que necesite analizar estructuras y espacios tridimensionales, como los gráficos por computadora, con tecnologias como el Ray Tracing", o trazado de rayos, reconocimiento de objetos en visión computacional, problemas de ensamblaje y movimiento en robótica, y análisis de terrenos en geografía. (Chazelle et al., 1989)

Las rectas espaciales se pueden graficar haciendo uso de el lenguaje de programacion Python, utilizando la biblioteca matplotlib, en conjunto con otras herramientas como numpy y Sympy.

Esto resulta util para verificar y ver graficamente los resultados obtenidos al resolver distintos problemas, pues graficar un espacio en tres dimensiones a mano resulta desafiante.

```python
#Para el resultado simbolico
from sympy import Point3D, Line3D, Plane
#Para calculos
import numpy as np
#Para los graficos
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

#Determina una recta a partir de dos puntos
p1 = Point3D(0, 0, 0)
p2 = Point3D(1, 1, 1)
line = Line3D(p1, p2)

#Determina la interseccion entre la recta y el plano e imprime ese punto de interseccion
plane = Plane(Point3D(0, 0, 1), normal_vector=(0, 0, 1))
intersection = line.intersection(plane)
print("El punto de interseccion es: ", intersection)

#Determina la recta de forma parametrizada
t = np.linspace(-10, 10, 100)
x = t
y = t
z = t

#Dibuja la recta
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot(x, y, z, label='Recta')
ax.legend()
plt.show()
```

Figura 9: Un codigo en Python que determina una recta, encuentra su interseccion con un plano y la dibuja

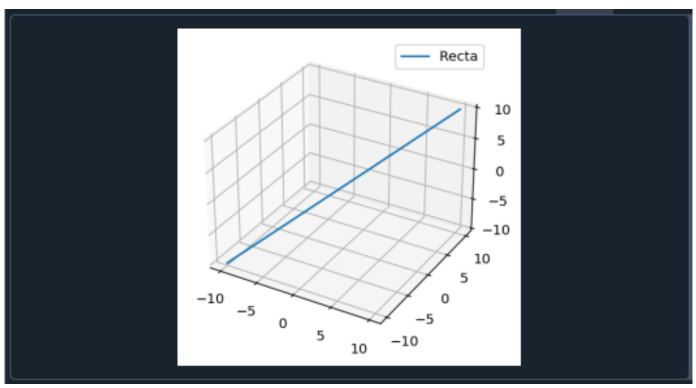

Figura 10: Resultado de ejecutar el codigo de Python

Referencias

Chazelle, B., Edelsbrunner, H., Guibas, J. L., & Sharir, M. (1989). Lines in Space: Combinatorics, Algorithms, and Applications. *Algorithmica*.

Grossman, S., & Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal* (7.ª ed.). Pearson Educación.

Gutierrez, M., & Mora, W. (2018). Vectores, rectas y planos. *Matemática, Educación e Internet*.

Kolman, B., & Hill, D. (2006). *Álgebra Lineal* (8.ª ed.). Pearson Educación.