Mathematik IV
Numerik
Lutz Gröll – Klausur WiSe 2019/2020

TINF18B1 – (aber abgetippt von TINF19B2!)
Das "G" in Gröll steht für Genialität!

24. Mai 2022

Maximale Punktzahl: 59 Punkte

Bearbeitungszeit: 130 Minuten

Hilfsmittel: Taschenrechner

Datum: 04.02.2020

In korrektem Wortlaut rekonstruiert - Satzzeichen teilweise korrigiert.

Aufgabe 1: (9 Punkte)

1. Ihr Algorithmus soll in einem zeitkritischen technischen Prozess 24/7 laufen. Nennen Sie zwei Maßnahmen aus Informatiksicht, um das sicherzustellen, und zwei Maßnahmen aus numerischer Sicht.

2. Nennen Sie die Hadamardschen Bedingungen für ein korrekt gestelltes Problem.

3. Was unterscheidet Matlab von anderen Programmiersprachen wie Java, C++? Erklären Sie das am Beispiel der Skalarproduktberechnung.

4. Was unterscheidet Simulink von Matlab und anderen Programmiersprachen und wozu kann Simulink genutzt werden?

Aufgabe 2: (11 Punkte)

1. Welchen Wert hat die Konditionszahl von $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ in der Spaltensummennorm?

2. Was drückt die Konditionszahl aus?

3. Formulieren Sie die Berechnung von $x = c^T AB^{-1}d$ in eine numerisch effiziente Form um.

4. Es seien $A \in \mathbb{R}^{5\times10}$, $B \in \mathbb{R}^{10\times4}$ und $C \in \mathbb{R}^{4\times10}$ gegeben. Untersuchen Sie, ob ABC besser über $(AB)C$ oder über $A(BC)$ zu berechnen ist. Berechnen Sie hierzu die benötigten Flops beider Varianten.

5. Bei überbestimmten Ausgleichsproblemen kann eine Modifikation in Abhängigkeit von den Singulärwerten sinnvoll sein. Handelt es sich bei derartigen Modifikationen um Maßnahmen, die der Stabilitätsverbesserung des Algorithmus dienen oder Maßnahmen zur Konditionsverbesserung und warum?

6. Was ist eine Tikhonov-Regularisierung (Formel zur Gütefunktion und zur Lösung)? Welche Konsequenz hat das Anwenden auf die Lösung?

7. Warum kann es beim Lösen der Differentialgleichung $\dot{x_1} = x_2 - k\sqrt{x_1}$ mit $x \geq 0$ sinnvoll sein, eine Modifikation des Vektorfelds vorzunehmen? Welche Lösung schlagen Sie vor?

Aufgabe 3: (9 Punkte)

1. Gegeben sind die Stützwerte $(0, 1), (1, 4), (1.5, 6.25)$.

   (a) Berechnen Sie numerisch eine erste Ableitung in $x = 1.5$.

   (b) Berechnen Sie numerisch das Integral über $[0, 1.5]$.

   (c) Geben Sie ein Interpolationspolynom an.

2. Wie viele Funktionsaufrufe benötigen Sie mindestens für die numerische Approximation einer dritten Ableitung?

3. Warum ist die Summe der Koeffizienten einer numerischen Differentiationsformel immer 0?

4. Berechnen Sie die Fixpunkte von $x_{k+1} = \frac{x_k + 8/x_k}{2}$ analytisch.

5. Starten Sie die Iteration bei $x_0 = 3$ und rechnen Sie auf 10^{-3} genau.

6. Welche Konvergenzordnung liegt Ihrer Meinung nach vor? Begründen Sie empirisch oder verfahrensspezifisch.

Aufgabe 4: (9 Punkte)

1. Was verstehen Sie unter Kollinearität? Geben Sie eine geometrische Interpretation.

2. Was sind Sparse-Matrizen und wozu nutzt man sie?

3. Wie lässt sich eine Matrizenmultiplikation parallelisieren?

4. Schreiben Sie in Pseudocode einen Test, um numerische Bugs bei der Auswertung von $tan\, x$ zu verhindern.

5. Was verstehen Sie unter Pivotisierung?
   Erklären Sie, worin der Nutzen dieser Technik liegt.

6. Formulieren Sie das Lösen eines Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{C}^m$ um, um es mit einer reellen Algebra lösen zu können.

7. Bestimmen Sie ein ϵ, bis zu dem Sie sich $x = 1$ nähern können, ohne dass die Kondition von $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ den Wert $\kappa = 10^{10}$ übersteigt.

8. Geben Sie die Menge aller Funktionen an, die in $\mathcal{O}(n^2)$ liegen.

Aufgabe 5: (9 Punkte)

1. Leiten Sie das Newton-Verfahren zur Lösung von Optimierungsaufgaben her und geben Sie die recheneffiziente Version an.

2. Definieren Sie superlineare Konvergenz.

3. Warum ist das Newton-Verfahren zur Lösung von Aufgaben $c^T x \to \text{Max}$ unter $Ax = b$ und $Cx \leq d$ nicht geeignet?

4. Wie viele zweite Ableitungen benötigen Sie beim Newton-Verfahren bei einem p-parametrischen Problem mit zweimal stetig differenzierbarer[1] Zielfunktion?

5. Berechnen Sie den ersten Schritt der Newton-Raphson-Iteration zur Nullstellensuche von $f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 x_2 + x_2^2 \end{bmatrix}$, wenn Sie mit $\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ starten.

[1] Vergesst nicht den Satz von Schwarz (deshalb nennt er wie häufig stetig differenzierbar die Zielfunktion ist)!

Aufgabe 6: (12 Punkte)

1. Formen Sie die Differenzialgleichung $y'' + xy^2 = u(x)$ so um, dass Sie sie mit dem Runge-Kutta-Verfahren integrieren könnten.

2. Notieren Sie eine Funktiondefinition für das Hauptprogramm und für die Funktion, um obige Formel möglichst für viele unterschiedliche $u(x)$ zu nutzen.

3. Berechnen Sie den Wert $y(\frac{1}{2})$ der Differentialgleichung $y' = xy^2$ mit dem Runge-Kutta-4-Verfahren, wenn ihr Anfangswert $y(0) = 2$ ist. Wählen Sie die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

4. Definieren Sie Lipschitz-Stetigkeit und geben Sie eine stetige, aber nicht Lipschitz-stetige Funktion an.

5. Warum fordern Sie beim Lösen von Differentialgleichungen lokale Lipschitz-Stetigkeit?