Partialbruchzerlegung

Bruch: $\dfrac{\text{Polynom} < n\text{ten Grades}}{\text{Polynom } n\text{ ten Grades}}$

1) Nullstellen des Nenners ermitteln

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{Zähler}}{(x-x_1)(x-x_2)(\ldots)\ldots}$$

2) Bruch mit Nullstellen gleichsetzen mit:

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner in Nullstellen}} = \boxed{\frac{a}{(x-x_1)} + \frac{b}{(x-x_2)} \cdots \frac{cx+d}{(x^2-x_3)}} \rightarrow \text{Partialbruchgleichung}$$

3) X den Nullstellen gleichsetzen, so a, b, ... ermitteln

$$\text{Zähler}(x_0) = a \cdot (\ldots)$$

$$\Rightarrow \quad a = ?$$

Ergebnis: $a = ?, \; b = ?, \ldots$

4) a, b, ... in Partialbruchgleichung einsetzen

Taylor'sche Form

Gegeben: Polynom n-ten Grades

x_0

g: Grad, in den die Funktion entwickelt werden soll

1) Funktion g mal ableiten

2) Taylor'sche Form bilden

$$\frac{f^{(n-n_0)}(x_0)}{(n-n_0)!}(x-x_0)^{(n-n_0)} + \dots + \frac{f^{(n-n)}(x}{(n-n)!}(x-x_0)^{(n-n)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{g} \frac{f^{(n-k)}(x_0)}{(n-k)!}(x-x_0)^{(n-k)}$$

Achtung: Taylor'sche Form nur bis zum gesuchten Grad bilden, also Glieder mit Ableitungen $> g$ <u>weglassen</u>!

3) Ergebnis der Taylor'schen Form ist ein Polynom des gesuchten Grades

Homogene Differentialgleichung

Gegeben: Funktion $ay^{(n)} + by^{(n-1)} + \ldots + dy$

n: Grad der Ableitung

$y^{(n)}(x) = e$ ← Werte bestimmter Stellen

$\vdots$

$y(x) = f$

1) $y^{(n)} \Rightarrow y$ durch λ ersetzen, mit λ^n, wobei n Grad d. Abl.

2) Nullstellen des so gewonnenen Polynoms bestimmen
   - Durch erraten
   - Durch Polynom div. + PQ-Formel/Mitternachtsformel

$$\boxed{PQ: \; p_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} \cancel{+} - q}}$$

Ergebnis: $(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n) = 0$

3) Ansatz:

$*_1$ $\begin{cases} \text{Für alle } (\lambda - \lambda_a)^1: & e^{\lambda_a x} \\ \text{Für alle } (\lambda - \lambda_a)^k: & a \cdot e^{\lambda_a x} + bx^{k-1} \cdot e^{\lambda_a x} + c \cdot x^{k-2} e^{\lambda_a x} \\ \text{Für alle } (\lambda - \lambda_a)^{a+bi} \text{ (komplex):} & \end{cases}$

Hat man für alle Klammern die entsprechenden e-Funktionen, werden diese als Summanden in eine neue Funktion eingesetzt.

$*_1$ $\begin{cases} \text{Für } (\lambda - \lambda_a)^2: & a \cdot e^{\lambda_0 x} + bxe^{\lambda_0 x} \\ \text{Für } (\lambda - \lambda_0)^3: & a \cdot e^{\lambda_0 x} + bx e^{\lambda_0 x} + cx^2 e^{\lambda_0 x} \end{cases}$

Ergebnis: z. B. $y(x) = ae^x + bxe^x + c \cdot e^{2x}$

Homogene Differentialgleichung (2)

4) Ableiten der Funktion aus dem Ansatz.
Damit kann man die angegebenen Werte der Punkte in den Ableitungsfunktionen nutzen.

$y'(x) = \ldots$
$y''(x) = \ldots$ usw.

5) Einsetzen der Werte in die Funktionen.
Ergebnis: Eine Reihe von Funktionen, die die Parameter $a - \ldots$ beinhalten.

6) Mehrere Gleichungen mit mehreren Unbekannten z.B. durch LGS lösen.
Ergebnis: Ermittlung der Parameter $a - \ldots$

7) Parameter $a - \ldots$ in Funktion des Ansatzes einsetzen

Fehlerrechnung

Gegeben: $f(x) = A, B, \ldots$

$A, B, \ldots$ = Parameter

1) Gesucht: Maximaler Fehler

Gegeben: Prozentzahlen der Parameter $\Rightarrow a, b, \ldots$

i) Formel: $\frac{df}{dA} \cdot (A \cdot a) + \frac{df}{dB} \cdot (B \cdot b) + \ldots$

ii) Einsetzen von $A, B, \ldots$ in die Formel von i)

Ergebnis: Maximaler Fehler

2) Gesucht: $f(x)$ für x_0

$\Rightarrow x_0, A, B, \ldots$ einsetzen, ausrechnen

3) Gesucht: Relativer maximaler Fehler für $x_0, A, B, \ldots$

Formel: $\dfrac{\text{maximaler Fehler für } x_0, A, B, \ldots}{\text{Wert von } f(x_0) \text{ mit } A, B, \ldots}$

n-Dimensionale Funktionen

Gegeben: $Q(x,y) = x \cdot y$

Restriktion: $y = ax + c$

1) Höhenlinien einzeichnen

Kreisfunktion: $r^2 = x^2 + y^2$

Gegeben: Q_0

i) Einsetzen: $Q_0 = x \cdot y$

ii) Auflösen nach y

iii) Einzeichnen

$\boxed{\text{Achtung: Zeichnen mit GTR}}$

2) Gradient einer Funktion in $P(p_1/p_2)$

Gegeben: Funktion $Q(x,y)$ oder ~~f(x)~~ $y = x$

i) Ableiten der Funktion nach x und y

Ziel: Vektor $\begin{pmatrix} \frac{dQ}{dx} \\ \frac{dQ}{dy} \end{pmatrix}$ ← x-Koordinate, ← y-Koordinate

ii) p_1 und p_2 in Vektor einsetzen (p_1 in x, p_2 in y).

iii) Vektor in P einzeichnen

Achtung: bei $x = y$ umformen in $h = x - y$

n-Dimensionale Funktionen (2)

3) ~~Neue Funktion erstellen~~ Optimierungsproblem

i) Neue Funktion erstellen:

$$L(x, y, \lambda) = Q(x, y) + \lambda \cdot h(x, y)$$ h = Restriktion

ii) Ableiten in alle Dimensionen

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dL}{dx} \\ \\ \frac{dL}{dy} \\ \\ \frac{dL}{d\lambda} \end{array}\right\} \text{LGS}$$

Falls 1 Lösung: 1 Punkt $P(x, y)$

Falls mehrere: größter Schnittpunkt

Falls keine Lösung: Restriktionsfunktion schneidet Zielfunktion nicht.