

# Numerik Klausur Gröll WS 2018

Ein Fan des Gröll

Dezember 2018

## 1 Aufgabe

1. Notieren Sie die wichtigsten Schritte für das Erstellen eines numerischen Programms.
2. Nennen Sie die 4 Verfahren zur numerischen Lösung eines Problems und stellen Sie das zugehörige analytische Problem (Beispiel) gegenüber.

## 2 Aufgabe

1. Welchen Wert hat die Konditionszahl von  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$  in der Spaltensummennorm?
2. Formulieren Sie die Berechnung von  $x = AB^{-1}c$  in eine numerisch effiziente Form um.
3. Kann eine Effizienzverbesserung einer Berechnung eine Verbesserung der Kondition des Problems bewirken?
4. Nennen Sie die 3 Bedingungen für ein well-posed Problem.
5. Was ist eine Tikhonov-Regularisierung? Welche Konsequenz hat das Anwenden auf die Lösung?
6. Warum kann es beim Lösen einer Differenzialgleichung  $\dot{x}_1 = x_2 - k\sqrt{x_1}$  mit  $x_1 \geq 0$  sinnvoll sein, eine Modifikation des Vektorfelds vorzunehmen? Welche Lösung schlagen Sie vor?
7. Ein Algorithmus hat die Komplexität  $\mathcal{O}(n^2)$ ? Heißt das
  - (a) dass er weniger Aufwand hat  $n^2$  Operationen benötigt
  - (b) mindestens  $n^2$  Operationen benötigt
  - (c) genau  $kn^2$  mit  $k \in \mathbb{N}$  Operationen benötigt, oder ist
  - (d) keine der Aussagen richtig?
8. Wodurch sind Testmatrizen für numerische Leistungstests gekennzeichnet?

## 3 Aufgabe

1. Zur Berechnung der zweiten Ableitung an der Stelle  $x = 2$  einer Funktion stehen Ihnen nur die Stützwerte  $(0, y_1)$ ,  $1, y_2$ ,  $2.5, y_3$  und  $3, y_4$  zur Verfügung. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen und geben Sie benötigte Gleichungssysteme und Rechenwege an. Die Rechnung selbst brauchen Sie nicht ausführen.
2. Wie viele Funktionsaufrufe benötigen Sie mindestens für die numerische Approximation einer dritten Ableitung?
3. In welchem Konflikt stehen Ingenieure, die online eine Ableitung berechnen müssen?

4. Was halten Sie von  $f_k^n = -\frac{1}{12}f_{k-3} + \frac{1}{3}f_{k-2} + \frac{1}{2}f_{k-1} - \frac{5}{3}f_k + f_{k+1}$ ?
5. Wie lauten die Fixpunkte der Iteration  $x_{k+1} = -x_k^2 + 2$ ? Ist einer der Fixpunkte attraktiv?
6. Mit welchem Kriterium überprüfen Sie die lokale Konvergenz einer Fixpunktiteration?

## 4 Aufgabe

1. Gegeben seien ... Berechnen Sie die Flops für  $A(BC)$
2. Mit welchem Programm können Sie die Polynomrechnung numerisch effizient gestalten?
3. Welche Voraussetzung muss für eine Parallelisierung eines Programms vorliegen? Nennen Sie ein Beispiel, wo Parallelisierung auf 8 Rechenkerne leicht anwendbar ist und viel bringt
4. Schreiben Sie in Pseudocode einen Test, um numerische Bugs bei der Auswertung von  $\tan(x)$  zu verhindern.
5. Was verstehen Sie unter Pivotisierung? Erklären Sie worin der Nutzen dieser Technik liegt.
6. Formulieren Sie das Lösen des Gleichungssystems  $Ax = b$  mit  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  und  $b \in \mathbb{C}^m$  um, um es mit einer reellen Algebra lösen zu können.
7. Bestimmen Sie ein  $\epsilon$ , bis zu dem Sie sich  $x = 1$  nähern können, ohne dass die Kondition von  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$  den Wert  $\kappa = 10^5$  übersteigt.

## 5 Aufgabe

1. Leiten Sie das Newton-Verfahren zur Lösung von Optimierungsaufgaben her und geben Sie die rechen-effiziente Version an
2. Definieren Sie superlineare Konvergenz.
3. Warum ist das Newton-Verfahren zur Lösung der Aufgaben  $c^T x \rightarrow \text{Max}$  unter  $Ax = b$  und  $Cx \leq d$  nicht geeignet?
4. Wie viele zweite Ableitungen benötigen Sie beim Newton-Verfahren bei einem p-parametrischen Problem?
5. Berechnen Sie den ersten Schritt der Newton-Raphson-Iteration zur Nullstellensuche von  $f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2^2 \\ x_1 x_2 + x_2^2 \end{bmatrix}$ , wenn Sie mit  $\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$  starten.

## 6 Aufgabe

1. Formen Sie die Differenzialgleichung  $y'' + xy^2 = 1$  so um, dass Sie sie mit dem Runge-Kutta-Verfahren integrieren könnten.
2. Notieren Sie die Funktionsdefinition für das Lösen eines p-dimensionalen Differentialgleichungssystems erster Ordnung.
3. Berechnen Sie den Wert  $y(\frac{1}{2})$  der Differentialgleichung  $y' = xy^2 + x$  mit dem Runge-Kutta-4-Verfahren, wenn Ihr Anfangswert  $y(0) = 2$  ist. Wählen Sie die Schrittweite  $h = \frac{1}{2}$ .
4. Lösen Sie  $Q = \int_0^1 (x+1)^2 dx$  analytisch. Anschließend lösen Sie das Problem mit der Trapezregel numerisch. Verwenden Sie die Schrittweite  $h = \frac{1}{4}$ .