Mathematatik IV
Numerik
Lutz Gröll – Klausur SoSe 2021

TINF19B2 – Viel größere Fans des Gröll!

13. Juni 2021

Maximale Punktzahl: 59 Punkte

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel: Taschenrechner + Formelblatt (für LA und Analysis, siehe Ordner)

Datum: 09.06.2021

In korrektem Wortlaut rekonstruiert - Satzzeichen teilweise korrigiert.
Format der folgenden Seiten ist dem der Klausur sehr ähnlich.

Aufgabe 1: (9 Punkte)

1. Notieren Sie die wichtigsten Schritte für das Erstellen eines numerischen Programms.

   (i) Geeigneten Algorithmus wählen

   (ii) Ein- und Ausgabevariablen festlegen (und Datentypen etc.)

   (iii) Kommentare schreiben (Funktion des Programms, Spezifikation der Schnittstelle und Quelle)

   (iv) Interne Variablen festlegen

   (v) Eigentliches Programm schreiben

   (vi) Testen

   (vii) Optional: Optimieren

   (viii) Numerische Bugs suchen und beseitigen (Singuläre Matrix?, Nahezu singulär? Negativer Radikant? etc.)

   (ix) Außerdem: Echtzeitanforderungen? Sicherheitsaspekte beachtet?

2. Nennen Sie 4 Verfahren zur numerischen Lösung eines Problems und stellen Sie das zugehörige analytische Problem (Beispiel) gegenüber.

Numerisches Verfahren:	Analytisches Problem:
Runge-Kutta-4-Verfahren	Lösen von DGLs
Trapezregel	Berechnung eines bestimmten Integrals
Newton-Raphson-Verfahren	Nullstellensuche
Newton-Verfahren	Nichtlineare Optimierung

Aufgabe 2: (11 Punkte)

1. Welchen Wert hat die Konditionszahl von $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ in der Zeilensummennorm?
   $\kappa_\infty(A) = ||A||_\infty \cdot ||A^{-1}||_\infty = 7 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4$

2. Formulieren Sie die Berechnung von $x = B^{-1}Cd$ in eine numerisch effiziente Form um.
   $Bx = Cd$

3. Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Addition numerisch nicht assoziativ ist.

   $(10^{-20} \,\tilde{+}\, 1) \,\tilde{+}\, (-1) \neq 10^{-20} \,\tilde{+}\, (1 \,\tilde{+}\, (-1))$

4. Nennen Sie die 3 Bedingungen für ein well-posed Problem.

   `Existenz einer Lösung, Eindeutigkeit der Lösung und stetige Abhängigkeit von den Eingangsdaten (Hadamard-Bedingungen).`

5. Notieren Sie ein Least-Squares-Problem mit Tikhonov Regularisierung.

   $||Ax - b||_2^2 + \mu \cdot ||x||_2^2 \rightarrow Min$
   `LS-Lösung (ineffizient):` $x = (A^T A + \mu \cdot I_n)^{-1} A^T b$

6. Warum kann es beim Lösen der Differentialgleichung $\dot{x_1} = x_2 - k\sqrt{x_1}$ mit $x \geq 0$ sinnvoll sein, eine Modifikation des Vektorfelds vorzunehmen? Welche Lösung schlagen Sie vor?
   `Nicht sicher, ob das die korrekte Lösung ist, aber es kann durch numerische Fehler passieren, dass plötzlich` $x_1 < 0$`, sodass der Radikant negativ wird.`
   `Meine Lösung:` $\dot{x_1} = x_2 - k\sqrt{max\{x_1, 0\}}$

7. Ein Algorithmus hat die Komplexität $\mathcal{O}(n^2)$. Heißt das, a) dass er weniger Aufwand als n^2 Operationen benötigt, b) mindestens n^2 Operationen benötigt, c) genau kn^2 mit $k \in \mathbb{N}$ Operationen benötigt oder ist d) keine der Aussagen richtig?
   `d) ist korrekt.`

8. Wodurch sind Testmatrizen für numerische Leistungstests gekennzeichnet?

   (i) In der Ordnung skalierbar (zum Beispiel zum Testen des Speicherverbrauchs)

   (ii) Lösung bekannt

   (iii) Testen numerische Grenzfälle aus (Singularitäten, nahezu singulär etc.)

   (iv) In der Kondition veränderlich

   (v) Stehen in Büchern!

Aufgabe 3: (9 Punkte)

1. Nennen Sie eine praktische Anwendung, für die eine Interpolation nach Lagrange in Frage kommt.
   Bei Hashtabellen zum Berechnen eines Zwischenwertes (falls die eigentliche Funktion zu aufwendig ist oder eine Approximation reicht).

2. Notieren Sie für $y = \frac{ax+b}{x^2+cx+d}$ einen linearen LS-Ansatz.
   Ausmultiplizieren gibt $yx^2+cyx+yd-ax-b=0$. Daraus dann den LS-Ansatz:

$$Ax = 0_n, \qquad A = \begin{bmatrix} y_1x_1^2 & y_1x_1 & y_1 & -x_1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_nx_n^2 & y_nx_n & y_n & -x_n & -1 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ c \\ d \\ a \\ b \end{bmatrix}.$$

3. Wie viele Stützwerte benötigen Sie mindestens, um die Parameter aus Teilaufgabe 2 eindeutig bestimmen zu können?
   4 Stützwerte

4. Wie viele Funktionsaufrufe benötigen Sie mindestens für die numerische Approximation einer dritten Ableitung?
   Für die $n = 3$ Ableitung benötigt man $n + 1$ Stützwerte.
   Hier also 4 Funktionsaufrufe.

5. In welchem Konflikt stehen Ingenieure, die online eine Ableitung berechnen müssen?

   Sie kennen die zukünftigen Werte nicht und können um den neusten Wert deshalb niemals symmetrisch differenzieren.

6. Was halten Sie von $f_k'' = -\frac{1}{12}f_{k-3} + \frac{1}{3}f_{k-2} + \frac{1}{2}f_{k-1} - \frac{5}{3}f_k + f_{k+1}$?
   Gar nichts. Die Summe der Gewichte müssen beim Ableiten 0 sein (wegen $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$. Außerdem muss man noch durch h^2 für die zweite Ableitung teilen.

7. Kann für $x^3(x-1)=1$ der exakte Wert für $x \approx -0.8$ durch die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{x_k-1}}$ berechnet werden? Führen Sie hierzu eine Konvergenzbetrachtung durch.

   $\Phi(x_k) = \sqrt[3]{\frac{1}{x_k-1}}, \quad \Phi'(x_k) = -\frac{1}{3} \cdot (x_k-1)^{-\frac{4}{3}}$ Tatsächlich $||\Phi'(-0.8)|| < 1$. Deshalb ja, denn der Fixpunkt ist attraktiv.

8. Warum werden Eigenwerte von Matrizen numerisch nicht wie in der Algebra üblich über die charakteristische Gleichug bestimmt? Was macht man stattdessen?

   Da Polynome numerisch unvorteilhaft sind (Überläufe, aufwendige Berechnung und aufwendige Nullstellensuche). Bei 100×100 Matrix ein Polynom 100. Grades. Stattdessen reelle QZ-Zerlegung (durch Gram-Schmidt-Orthogonalisierung).

Aufgabe 4: (9 Punkte)

1. Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{30\times 10}, B \in \mathbb{R}^{10\times 100}, C \in \mathbb{R}^{100}$. Berechnen Sie die Flops für $A(BC)$.
   $D = BC, D \in \mathbb{R}^{10}$, $\quad Flop(A(BC)) = \underbrace{Flop(AD)}_{30\cdot 1\cdot(2\cdot 10-1)=570} + \underbrace{Flop(BC)}_{10\cdot 1\cdot(2\cdot 100-1)=1990} = 2560$

2. Mit welchem Algorithmus können Sie die Funktionsaufrufe für eine rationale Funktion reduzieren?
   `Über Kettenbrüche (konnte sich niemand mehr aktiv dran erinnern).`

3. Welche Vorraussetzung muss für eine Parallelisierung eines Programms vorliegen? Nennen Sie ein Beispiel, wo Prallelisierung auf 8 Rechnerkernen leicht anwendbar ist und viel bringt.
   `Unabhängige Teilaufgaben. Beispiel: Matrixmultiplikation mit Matrizen` $A \in \mathbb{R}^{8\times 8}, B \in \mathbb{R}^{8\times 8}, A \cdot B = C$

4. Schreiben Sie in Pseudocode einen Test, um numerische Bugs bei der Auswertung von $tan\, x$ zu verhindern.
```
double ownTangent(double x)
    x' := (x mod π) - π/2
    if (abs(x') ≤ eps) throw error;
    else return tan(x);
```

5. Was verstehen Sie unter Pivotisierung?
   Erklären Sie, worin der Nutzen dieser Technik liegt.

   `Das Auswählen eines Elementes nach einer definierten Strategie. Beim Gauß-Algorithmus sucht man das betragsmäßig größte Element der Spalte/Zeile oder Matrix und nimmt dieses als Pivotelement. Numerisch ist dies überlegen, da numerische Fehler minimiert werden.`

6. Weisen Sie nach, dass Matrizen vom Typ $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ die Möglichkeit bieten, konjugierte Eigenwerte in reeller Form darzustellen.

   `Charakteristisches Polynom:` $det(A - \lambda I_n) = (\alpha - \lambda)^2 + \beta^2 \overset{!}{=} 0$.
   `Offensichtlich gilt damit` $\alpha - \lambda = \pm i \cdot \beta \iff \lambda_{1/2} = \alpha \pm i \cdot \beta$. `QED.`

7. Bestimmen Sie ein ϵ, bis zu dem Sie sich $x = 1$ nähern können, ohne dass die Kondition von $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ den Wert $\kappa = 10^6$ übersteigt.

$\kappa_{rel} = 10^6 < |f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}|, \quad f'(x) = -2 \cdot (x-1)^{-3}$
$\implies 10^6 < 2 \cdot |(x-1)^{-3} \cdot (x-1)^2 \cdot x| = 2 \cdot |\frac{x}{x-1}||_{x=1\pm\epsilon}$
$\implies 10^6 < 2 \cdot |\frac{1\pm\epsilon}{1\pm\epsilon-1}| \approx \frac{2}{\epsilon}.$

Also $\epsilon < 2 \cdot 10^{-6}$.

Aufgabe 5: (9 Punkte)

1. Leiten Sie das Newton-Verfahren zur Lösung von Optimierungsaufgaben her und geben Sie die recheneffiziente Version an.
   g_k := Gradient an Stelle x_k, H_k := Hesse-Matrix an Stelle x_k.
   $Q(x) = Q(x_k) + g_k^T \cdot (x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k) \cdot H_k \cdot (x - x_k) + Rest$

   Quadratisches Ersatzproblem:
   $Q(x) = Q(x_k) + g_k^T \cdot (x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k) \cdot H_k \cdot (x - x_k)$
   $\frac{\delta Q}{\delta x} \stackrel{!}{=} 0 \iff g_k + H_k \cdot (x - x_k)|_{x=x_{opt}} = 0 \implies x_{k+1} := x_{opt} = x_k - H_k^{-1} \cdot g_k$

   Effiziente Variante:
   $x_{k+1} = x_k - \Delta x_k, \qquad H_k \cdot \Delta x_k = g_k$.

2. Erklären Sie das Prinzip der Aktiven Mengenstrategie in der Optimierung.
   ''Entlanghangeln'' an aktiven Constraints (Ungleichungen, die mit $=$ erfüllt werden) bis zum Minimierer oder z. B. bis der Gradient beim Gradientenabstiegsverfahren in einer andere Richtung zeigt.

3. Definieren Sie superlineare Konvergenz.
   $||x_{k+1} - x^*|| \leq c_k \cdot ||x_k - x*||^p, \quad c_k \to 0$ für $k \to \infty$
   Kontraktionskonstante c_k geht mit steigender Iteration gegen 0.

4. Warum ist das Newton-Verfahren zur Lösung von Aufgaben $c^T x \to Min$ unter $Ax = b$ und $Cx \leq d$ nicht geeignet?

   Weil $c^T x$ linear ist und somit die Hesse-Matrix der Nullmatrix entspricht und somit nicht invertierbar ist.

5. Wie viele zweite Ableitungen benötigen Sie beim Newton-Verfahren bei einem p-parametrischen Problem?

   $\frac{p \cdot (p+1)}{2}$ Ableitungen, solange Satz von Schwartz erfüllt ist (also gdw. stetige differenzierbar bzw. wie Gröll es schreiben würde $f \in \mathcal{C}^2$ (zweimal stetig differenzierbar).

6. Berechnen Sie den ersten Schritt der Newton-Raphson-Iteration zur Nullstellensuche von $f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1 x_2 + x_2^2 \end{bmatrix}$, wenn Sie mit $\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ starten.

$f(\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Also effektiv ist der Startwert bereits die Lösung.
Beachte: Die Jacobi-Matrix ist singulär und damit nicht invertierbar.
Du könntest also hier keine ohnehin keine Iteration durchrechnen.
Gröll meinte nach der Klausur, das sei ihm gar nicht aufgefallen,
da er immer nur an ein paar Zahlen aus Altklausuren rumdreht.

Aufgabe 6: (12 Punkte)

1. Formen Sie die Differenzialgleichung $y''' + x^2 y = 1$ so um, dass Sie sie mit dem Runge-Kutta-Verfahren integrieren könnten.
   `Substitutionen:` $y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y''$.

   `DGL-System:`

   (a) $y_1' = y_2$
   (b) $y_2' = y_3$
   (c) $y_3' = -x^2 y_1 + 1$

   `Anfangswerte nicht vergessen! (Fände Gröll gar nicht lustig!)`
   $y_1(x_{10}) = y_0, \quad y_2(x_{20}) = y_0', \quad y_3(x_{30}) = y_0''$

2. Notieren Sie für ein Cauchy-Problem eine Funktionsdefinition für das Lösen eines p-dimensionalen Differentialgleichungssystems erster Ordnung.

   ```
   [double[p, N], time[1,N]] ode(handle f, double[p] initvalues, double xstart,
           double xfinal, optional tol, optional verfahren)
   ```

3. Berechnen Sie den Wert $y(\frac{3}{2})$ der Differentialgleichung $y' = xy + x$ mit dem Runge-Kutta-4-Verfahren, wenn Ihr Anfangswert $y(1) = 2$ ist. Wählen Sie die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.
   $y_1 = y_0 + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

   $$k_1 = f(x_0, y_0)$$
   $$k_2 = f(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_1)$$
   $$k_3 = f(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_2)$$
   $$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + h \cdot k_3)$$

   `Das ist mir zu blöd. Rechnet das doch selbst.`

4. Lösen Sie $Q = \int_0^1 (x-1)^3 dx$ analytisch. Anschließend lösen Sie das Problem mit der Trapezregel numerisch. Verwenden Sie die Schrittweite $h = \frac{1}{4}$.
   $f(x) = (x-1)^3$
   `Analytisch` $[\frac{1}{4}(x-1)^4]_0^1 = -\frac{1}{4}$.
   `Trapez:` $h \cdot (\frac{1}{2}f(0) + f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4}) + \frac{1}{2}f(1)) \approx -0.26$ `(glaub ich; Erneut: Mach selbst!)`