Mathematik IV
Numerik
Lutz Gröll – Klausur WiSe 2019

TINF18B1 – (aber abgetippt von TINF19B2!)
Das "G" in Gröll steht für Genösse!

24. Mai 2022

Maximale Punktzahl: 59 Punkte

Bearbeitungszeit: unbekannt

Hilfsmittel: Taschenrechner

Datum: 28.11.2019

In korrektem Wortlaut rekonstruiert - Satzzeichen teilweise korrigiert.

Aufgabe 1: (9 Punkte)

1. Notieren Sie die wichtigsten Schritte für das Erstellen eines numerischen Programms.

2. Geben Sie eine Beispiel-Differentialgleichung mit Lösung zum Testen an.

3. Sie wollen den Programmierer eines zweidimensionalen Nullstellensuchprogramms ärgern und konstruieren ein Beispiel, das keine isolierten Lösungen hat.

Aufgabe 2: (11 Punkte)

1. Notieren Sie eine vollbesetzte (2×2)-Matrix, deren Konditionszahl unendlich ist.

2. Was gilt für die Konditionszahl von $A^T A$, wenn $\kappa(A)$ bekannt ist.

3. Formulieren Sie die Berechnung von $x = c^T A B^{-1} d$ in eine numerisch effiziente Form um.

4. Es seien $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$, $B \in \mathbb{R}^{10\times 3}$ und $C \in \mathbb{R}^{3\times 10}$ gegeben. Berechnen Sie die benötigten Flops von $A(BC)$ exakt.

5. Ihr Algorithmus soll in einem zeitkritischen technischen Prozess 24/7 laufen. Nennen Sie zwei Maßnahmen aus Informatiksicht, um das sicherzustellen, und zwei Maßnahmen aus numerischer Sicht.

6. Welche zwei Probleme erwachsen bei der Berechnung des Arkussinus?

7. Was ist im folgenden Programm falsch?
   `unsigned int i = 100; while(i >= 0) { i--; }`

8. Warum kann es beim Lösen der Differentialgleichung $\dot{x_1} = x_2 - k\sqrt{x_1}$ mit $x \geq 0$ sinnvoll sein, eine Modifikation des Vektorfelds vorzunehmen? Welche Lösung schlagen Sie vor?

Aufgabe 3: (9 Punkte)

1. Zur Berechnung der zweiten Ableitung an der Stelle $x = 2$ einer Funktion stehen Ihnen nur die Stützwerte $(0, y_1)$, $(1, y_2)$, $(2.5, y_3)$ und $(3, y_4)$ zur Verfügung. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen und geben Sie benötigte Gleichungssysteme und Rechenwege an. Die Rechnung selbst brauchen Sie nicht ausführen.

2. Wie viele Funktionsaufrufe benötigen Sie mindestens für die numerische Approximation einer dritten Ableitung?

3. Wodurch sind Testmatrizen für numerische Leistungstests gekennzeichnet?

4. Wie viele Flops benötigen Sie zur Berechnug des Terms $sin^2 x + (cosx) \cdot (cosx)$?

5. Konstruieren Sie eine Fixpunktiteration mit Scheinfixpunkten (Imaginäre Fixpunkte sind keine Fixpunkte in reeller Arithmetik).

6. Notieren Sie ein Kriterium zur Überprüfung der lokalen Konvergenz einer Fixpunktiteration?

Aufgabe 4: (9 Punkte)

1. Ein Algorithmus hat Komplexität $\mathcal{O}(n^2)$. Konvergiert er deshalb quadratisch?

2. Notieren Sie den Restterm einer Taylor-Approximation 3. Ordnung in Landauscher Symbolik.

3. Wie können Sie gebrochenrationale Polynome effizienter berechnen?

4. Welche Vorraussetzung muss eine für eine Parallelisierung eines Programms vorliegen? Nennen Sie ein Beispiel, wo Parallelisierung auf 8 Rechenkerne leicht anwendbar ist und viel bringt.

5. Schreiben Sie in Pseudocode einen Test, um numerische Bugs bei der Auswertung von $cot\, x$ zu verhindern.

6. Was verstehen Sie unter Pivotisierung?
   Zielt diese Technik auf eine Verbesserung der Stabilität oder Kondition ab?

7. Formulieren Sie das Lösen eines Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{C}^m$ um, um es mit einer reellen Algebra lösen zu können.

8. Bestimmen Sie ein ϵ, bis zu dem Sie sich $x = 2$ nähern können, ohne dass die Kondition von $f(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$ den Wert $\kappa = 10^6$ übersteigt.

Aufgabe 5: (9 Punkte)

1. Leiten Sie das Newton-Verfahren zur Lösung von Optimierungsaufgaben her und geben Sie das recheneffiziente Version an.

2. Welche Approximationsordnung hat das behandelte Runge-Kutta-Verfahren?

3. Skizzieren Sie einen Effekt bei Überapproximation.

4. Wie viele zweite Ableitungen benötigen Sie beim Verfahren des steilsten Abstiegs bei einem p-parametrischen Problem?

5. Berechnen Sie den ersten Schritt der Newton-Raphson-Iteration zur Nullstellensuche von $f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_1^2 \\ x_1 x_2 + x_1^2 \end{bmatrix}$, wenn Sie mit $\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ starten.

Aufgabe 6: (12 Punkte)

1. Formen Sie die Differenzialgleichung $y'''(x) + xy(x) = u(x)$ so um, dass Sie sie mit dem Runge-Kutta-Verfahren integrieren könnten.

2. Notieren Sie die drei Funktionsdefinitionen für das Lösen des oben ermittelten Differentialgleichungssystems erster Ordnung.

3. Berechnen Sie den Wert $y(\frac{1}{2})$ der Differentialgleichung $y' = xy^2 + x$ mit dem Runge-Kutta-4-Verfahren, wenn ihr Anfangswert $y(0) = 2$ ist. Wählen Sie die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

4. Skizzieren Sie eine konvergente Fixpunktiteration graphisch.