Mathematik III
Numerik
Lutz Gröll – Klausur WiSe 2022

TINF21B1
Lutz Gröll, Connaisseur der imaginären Schwarzwälder Kirschtorte

3. März 2023

Maximale Punktzahl: 69 Punkte

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel: Taschenrechner + Formelblatt (für LA und Analysis, siehe Ordner)

Datum: 06.12.2022

LaTeX-Dokument sowie teilweise Lösungen von 2021 übernommen
Format der folgenden Seiten ist dem der Klausur sehr ähnlich.

Aufgabe 1:

1. Notieren Sie die wichtigsten Schritte für das Erstellen eines numerischen Programms.

2. Notieren Sie ein zweidimensionales Nullstellenproblem mit exakt 4 Lösungen (Formel und Skizze) `(kein Originaltext)`

3. Nennen Sie ein ill-posed Problem für eine eindimensionale numerische Integration. `(kein Originaltext)`

Aufgabe 2:

1. Geben Sie eine 2×2 Matrix an, welche verschiedene Konditionszahlen in der Spaltensummennorm und in der Zeilensummennorm hat. (kein Originaltext)

2. Formulieren Sie die Berechnung von $x = B^{-1}Cd$ in eine numerisch effiziente Form um.

3. Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Addition numerisch nicht assoziativ ist.

4. Was verstehen Sie unter Overfitting? (kein Originaltext)

5. Was ist Spaltenskalierung? (Formel und Zweck/Anwendung) (kein Originaltext)

6. Sie haben ein schlecht konditioniertes Ausgleichsproblem aus dem ein Signal entstehen soll. Sie wollen dabei die 2. Ableitung bestrafen. Notieren Sie die Least-Square Formel, sowie die Matrix zur Bestrafung der 2. Ableitung. (kein Originaltext)

7. Warum kann es beim Lösen der Differentialgleichung $\dot{x_1} = x_2 - k\sqrt{x_1}$ mit $x \geq 0$ sinnvoll sein, eine Modifikation des Vektorfelds vorzunehmen? Welche Lösung schlagen Sie vor?

8. Wodurch sind Testmatrizen für numerische Leistungstests gekennzeichnet?

Aufgabe 3:

1. Nennen Sie eine praktische Anwendung, für die eine Interpolation nach Lagrange in Frage kommt.

2. Notieren Sie für $y = \frac{ax+b}{x^2+cx+d}$ einen linearen LS-Ansatz.

3. Wie viele Stützwerte benötigen Sie mindestens, um die Parameter aus Teilaufgabe 2 eindeutig bestimmen zu können?

4. In welchem Konflikt stehen Ingenieure, die online eine Ableitung berechnen müssen?

5. Was halten Sie von $f''_k = -\frac{1}{12}f_{k-3} + \frac{1}{3}f_{k-2} + \frac{1}{2}f_{k-1} - \frac{5}{3}f_k + f_{k+1}$?

6. Erstellen Sie für die Formel $x^3\,(x-1) = 1$ zwei verschiedene Fixpunktiterationen. (kein Originaltext)

7. Warum werden Eigenwerte von Matrizen numerisch nicht wie in der Algebra üblich über die charakteristische Gleichug bestimmt? Was macht man stattdessen?

8. Skizzieren Sie eine instabile Fixpunktiteration graphisch.

Aufgabe 4:

1. Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{30\times5}, B \in \mathbb{R}^{5\times100}, C \in \mathbb{R}^{100}$. Berechnen Sie die Flops für $A(BC)$.

2. Sie benutzen einen Microcontroller, der nur die 4 Grundrechenarten beherrscht. Damit müssen Sie öfters Polynome der Form $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ berechnen. Wie viele Flops werden bei einer einfachen Berechnung benötigt? Wie viele hingegen, wenn das Horner-Schema zur Berechnung verwendet wird?
   (kein Originaltext)

3. Welche Vorraussetzung muss für eine Parallelisierung eines Programms vorliegen? Nennen Sie ein Beispiel, wo Prallelisierung auf 8 Rechnerkernen leicht anwendbar ist und viel bringt.

4. Schreiben Sie in Pseudocode einen Test, um numerische Bugs bei der Auswertung von $tan\, x$ zu verhindern.

5. Verbessert Pivotisierung die Kondition?

6. Wie schafft der Numeriker einen Spaltentausch im Gauß-Algorithmus durchzuführen, ohne eine Dummy-Variable zu verwenden? (kein Originaltext)

7. Weisen Sie nach, dass Matrizen vom Typ $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ die Möglichkeit bieten, konjugierte Eigenwerte in reeller Form darzustellen.

Aufgabe 5: (9 Punkte)

1. Leiten Sie das Newton-Verfahren zur Lösung von Optimierungsaufgaben her und geben Sie die recheneffiziente Version an.

2. Erklären Sie das Prinzip der Aktiven Mengenstrategie in der Optimierung.

3. Definieren Sie superlineare Konvergenz.

4. Warum kann der Gradient einer p-dimensionalen Funktion in $p+1$ Funktionsaufrufen berechnet werden?

5. Wie viele zweite Ableitungen benötigen Sie beim Newton-Verfahren bei einem p-parametrischen Problem?

6. Berechnen Sie den ersten Schritt der Newton-Raphson-Iteration zur Nullstellensuche von $f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2 \\ x_1 x_2^2 + x_2 \end{bmatrix}$, wenn Sie mit $\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ starten.

Aufgabe 6: (9 Punkte)

1. Formen Sie die Differenzialgleichung $y''' + x^2 y = 1$ so um, dass Sie sie mit dem Runge-Kutta-Verfahren integrieren könnten.

2. Notieren Sie die Funktionsdefinition für das Lösen eines p-dimensionalen Differentialgleichungssystems erster Ordnung mit variabler Schrittweite.

3. Berechnen Sie den Wert $y(\frac{5}{2})$ der Differentialgleichung $y' = xy + x$ mit dem Runge-Kutta-4-Verfahren, wenn Ihr Anfangswert $y(2) = 0$ ist. Wählen Sie die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

4. Bestimmen Sie ein ϵ, bis zu dem Sie sich $x = 1$ nähern können, ohne dass die Kondition von $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ den Wert $\kappa = 10^6$ übersteigt.