Kontextfreie Grammatiken

„Adventskalender“

Typ	Name	Erlaubte Produktionen	Akzeptierende Maschine	Beispiel
3	Regulär	N → wM N → w $w \in T^*$	Endlicher Automat	a^n
2	Kontextfrei	N → w $w \in (N \cup T)^*$		$a^n b^n$

Skript Worsch: Seite 49

Definition: Typ-2-Grammatik

Eine kontextfreie Grammatik oder Typ-2-Grammatik (T2G) ist eine Grammatik $G = (N, T, S, P)$, bei der alle Produktionen von der folgenden Form sind:

$$X \to w \qquad mit\ X \in N\ und\ w \in (N \cup T)^*$$

Definition: Kontextfreie Sprache

Eine Sprache heißt kontextfrei, wenn Sie von einer kontextfreien Grammatik erzeugt werden kann.

Kontextfreie Sprache: Beispiel

$$L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}_0\}$$

Ist ein Beispiel für eine kontextfreie Sprache. Wofür brauchen wir eine solche Sprache?

Kontextfreie Sprache: Nutzen

Klammern!

Ein Stück Programm-Code

```
while (i <= j) {
        while (arr[i] < pivot) {
                i++;
        }
        while (arr[j] > pivot) {
                j--;
        }
        if (i <= j) {
                int temp = arr[i];
                arr[i] = arr[j];
                arr[j] = temp;
                i++;
                j--;
        }
}
```

Schleifenrumpf

While-Schleife

Schleifenrumpf

While-Schleife

Bedingter Code

Bedingung

Kontextfreie Sprache: Grammatikproduktionen

$$L = \{(^n)^n | n \in \mathbb{N}_0\}$$

Wie kommen wir zu geeigneten Grammatikproduktionen?

Grammatikproduktionen herleiten

Ein Klammerpaar:

$S \rightarrow ()$

Verschachtelung durch Rekursion:

$S \rightarrow (S)$

$S \rightarrow \varepsilon$

Grammatikproduktionen herleiten

Wiederholung durch Rekursion:

$S \rightarrow SS$

$S \rightarrow (S)$

$S \rightarrow \varepsilon$

Erlaubt z.B.: (())()

Weitere Klammerarten:

$S \rightarrow SS$

$S \rightarrow (S)$ $S \rightarrow [S]$ $S \rightarrow \{S\}$

$S \rightarrow \varepsilon$

Erlaubt z.B.: {()([])}

Definition 4.8: Links-/Rechts-Ableitung

- Sei $G = (N, T, S, P)$ eine Grammatik, $X \to w \in P$ und $u, u' \in (N \cup T)^*$.

- Falls $u \in T^*$, heißt ein Ableitungsschritt $uXu' \Rightarrow uwu'$ mit Produktion $X \to w \in P$ *Linksableitungsschritt*, geschrieben $uXu' \overset{l}{\Rightarrow} uwu'$.
- $w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_k$ heißt *Linksableitung(sfolge)*, falls $w_0 \overset{l}{\Rightarrow} w_1 \overset{l}{\Rightarrow} \ldots \overset{l}{\Rightarrow} w_k$, geschrieben $w_0 \overset{l}{\Rightarrow}{}^* w_k$.

- Analog: *Rechtsableitungsschritt* $\overset{r}{\Rightarrow}$ und Rechtsableitung $\overset{r}{\Rightarrow}{}^*$.

Beispiel

- $G = (\{S\}, \{(,)\}, S, \{S \to \varepsilon | (S) | SS\})$

- Betrachte: $S \Rightarrow S\underline{S} \Rightarrow \underline{S}(S) \Rightarrow (\underline{S}) \Rightarrow (\,)$
  - *Keine* Linksableitung: zweiter Schritt falsch
  - *Keine* Rechtsableitung: dritter Schritt falsch

- Linksableitung: $S \Rightarrow \underline{S}S \Rightarrow \underline{S} \Rightarrow (\underline{S}) \Rightarrow (\,)$
- Rechtsableitung: $S \Rightarrow S\underline{S} \Rightarrow S(\underline{S}) \Rightarrow \underline{S}(\,) \Rightarrow (\,)$

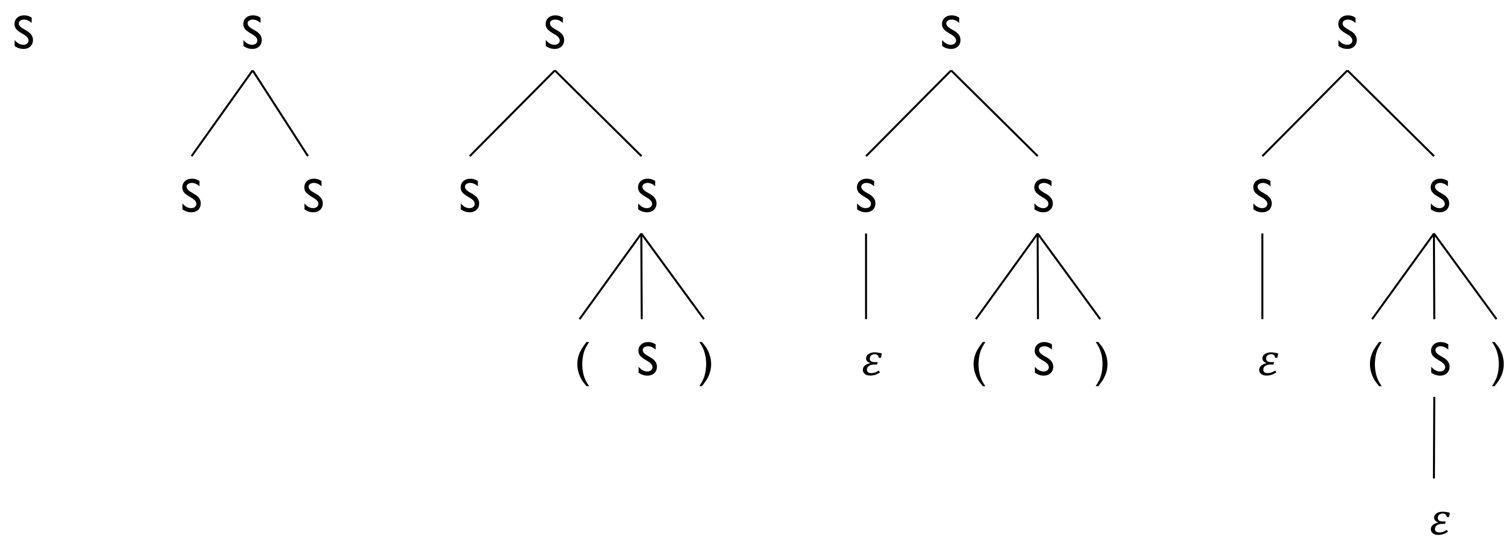
Definition 4.9: Ableitungsbaum

- Sei $G = (N, T, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik, $X, Y \in N$ und $\mathrm{w}, \mathrm{v} \in (N \cup T)^*$.

- Ableitungsbaum zu einer Ableitung $X \Rightarrow^* w$:
  - Graph, der ein Baum ist, und dessen Knoten beschriftet sind mit Nichtterminalsymbolen, Terminalsymbolen oder ε.
- Aufbau des Baumes:
  - Die Wurzel des Baumes ist mit X beschriftet.
  - Die Blätter des Baumes von links nach rechts ergeben w.
  - Gehört zu einer Ableitung $X \Rightarrow^* wYw'$ der Ableitungsbaum B‘, so ergibt sich der Ableitungsbaum B zu $X \Rightarrow^* wYw' \Rightarrow wvw'$ mit zuletzt angewandter Produktion $Y \rightarrow v$ daraus, indem an das mit Y beschriftete Blatt von B‘ Nachfolgeknoten angehängt werden, die mit den Symbolen von v beschriftet sind.

Beispiel

- $S \Rightarrow S\underline{S} \Rightarrow \underline{S}(S) \Rightarrow (\underline{S}) \Rightarrow (\,)$
- Schrittweiser Aufbau des Ableitungsbaums:



Beobachtung

- Ein Ableitungsbaum ist „allgemeiner“ als eine Ableitung

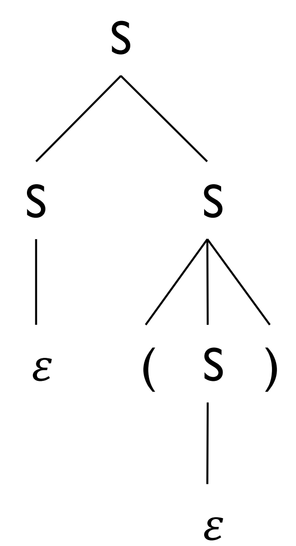
- Die Ableitungen

$$S \Rightarrow \underline{S}S \Rightarrow \underline{S} \Rightarrow (\underline{S}) \Rightarrow (\,)$$

und

$$S \Rightarrow S\underline{S} \Rightarrow S(\underline{S}) \Rightarrow \underline{S}(\,) \Rightarrow (\,)$$

liefern den gleichen Ableitungsbaum.



Beobachtung

- Aus jedem Ableitungsbaum ergibt sich genau eine Linksableitung
- und analog genau eine Rechtsableitung.

- Also:
  Zu jeder Ableitung gibt es eine „äquivalente“ Links- (bzw. Rechts-)ableitung.

Definition 4.10: Mehrdeutigkeit

- Eine Typ-2-Grammatik ist mehrdeutig, falls es für ein Wort zwei verschiedene Ableitungsbäume (Linksableitungen, Rechtsableitungen) gibt.
- Sonst heißt die Grammatik eindeutig.

- Eine kontextfreie Sprache ist (inhärent) mehrdeutig, falls jede sie erzeugende Typ-2-Grammatik mehrdeutig ist.

Beispiel Mehrdeutigkeit

- $G = (\{S\}, \{(,)\}, S, \{S \to \varepsilon | (S) | SS\})$ ist mehrdeutig.
- 2 Linksableitungen für das Wort ( )( )( ):

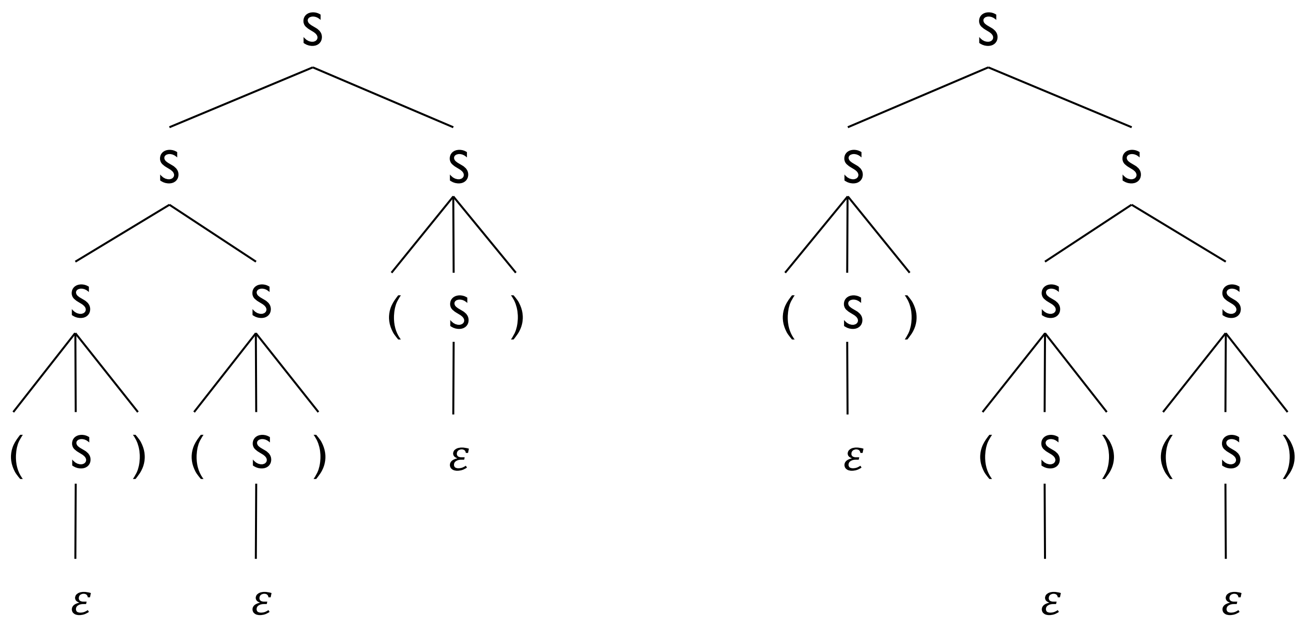
$$S \overset{l}{\Rightarrow} \underline{S}S \overset{l}{\Rightarrow} \underline{S}SS \overset{l}{\Rightarrow}{}^{*} (\,)\underline{S}S \overset{l}{\Rightarrow}{}^{*} (\,)(\,)(\,) \quad \text{und}$$

$$S \overset{l}{\Rightarrow} \underline{S}S \overset{l}{\Rightarrow} (\underline{S})S \overset{l}{\Rightarrow}{}^{*} (\,)(\,)\underline{S} \overset{l}{\Rightarrow}{}^{*} (\,)(\,)(\,)$$

Mehrdeutigkeit kommt von Regel S -> SS

Beispiel Mehrdeutigkeit

- Verschiedene Ableitungsbäume:



Was verursacht Mehrdeutigkeit?

Was verursacht Mehrdeutigkeit?

- Das doppelte Vorkommen des rekursiven Symbols S auf der rechten Seite
$$S \rightarrow SS$$

- Wie kann man Eindeutigkeit herstellen?

Wie vermeidet man Mehrdeutigkeit?

- Vermeiden der Doppelrekursion durch Einfügen eines Hilfsymbols

$$S \to ST$$
$$T \to (S)$$

- Die erzeugte formale Sprache ist *nicht* inhärent mehrdeutig.
- Eindeutige Grammatik:

$$G = (\{S, T\}, \{(,)\}, S, \{S \to \varepsilon | ST, T \to (S)\})$$

Kontextfreie Sprache: Lernziele

- Definition kontextfreie Grammatik
- Kontextfreie Grammatiken erkennen und erstellen können
- Ableitung, Ableitungsbaum und Mehrdeutigkeit verstehen

Kontextfreie Sprache: Mögliche Klausuraufgaben

- Erstelle eine kontextfreie Grammatik zu einer Sprachbeschreibung
- Beurteile ob eine Grammatik kontextfrei ist
- Erstelle eine Ableitung oder einen Ableitungsbaum