Aufgabe 1 (9 Punkte)

1.) Notieren Sie die wichtigsten Schritte für das Erstellen eines numerischen Programms.

2.) Geben Sie mindestens 4 unterschiedliche Teststrategien für Algorithmen an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

1.) Welche Werte hat die Konditionszahl von $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ in der Spaltensummennorm?

2.) Formulieren Sie die Berechnung von $x = AB^{-1}c$ in eine numerisch effiziente Form um.

3.) Bedeutet eine Effizienzverbesserung einer Berechnung auch immer eine Verbesserung der Stabilität des Algorithmus?

4.) Warum wir für Skalierungen die Spaltensummennorm gegenüber der Frobenius-Norm bevorzugt?

5.) Wieso verbessern Sie durch eine Tikhonov-Regularisierung eines LS-Problems die Kondition?

6.) Angenommen Sie wissen, dass Ihre Lösung im zulässigen Zahlenbereich liegt, ihre Zwischenrechnungen aber diesen verlassen. Was können Sie in einem solchen Fall tun?

7.) Ein Algorithmus hat die Komplexität $O(n^2)$. Heißt das,

a.) dass er weniger Aufwand als n^2 Operationen benötigt
b.) mindestens n^2 Operationen benötigt
c.) genau $k*n^2$ mit $k \in \mathbb{N}$ Operationen benötigt oder ist
d.) keine der Aussagen richtig.

8.) Wodurch sind Testmatrizen für numerische Leistungstests gekennzeichnet?

Aufgabe 3 (9 Punkte)

1.) Zur Berechnung von Ableitungen an der Stelle x = 1 einer Funktion stehen Ihnen nur die Stützwerte (0,3), (0.5,4.25), (1,6) und (1.5,8.25) zur Verfügung. Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung numerisch.

2.) Wie viele Funktionsaufrufe benötigen Sie mindestens für die numerische Approximation einer dritten Ableitung?

3.) Warum ist die Summe der Gewichte für die einzelnen Funktionswerte einer numerischen Ableitung immer null?

4.) Das Newton-Raphson-Verfahren zur Berechnung einer Kubikwurzel lautet $x_{k+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{x_k^2} + 2x_k\right)$. Zeigen Sie über die Fixpunktgleichung, dass die Kubikwurzel von a in der Tat ein Fixpunkt ist.

5.) Kann für $x^3(x-1) = 1$ der exakte Wert für $x \approx -0.8$ durch die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{x_k - 1}}$ berechnet werden? Führen Sie hierzu eine Konvergenzbetrachtung durch.

6.) Wie viele Flops benötigen Sie minimal, wenn Sie $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^2} + x^2\right)$ berechnen müssen?

Aufgabe 4 (9 Punkte)

1.) Wie berechnen Sie Funktionswerte eines Polynoms numerisch effektiv?

2.) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Matrizenmultiplikation bzgl. des Aufwands nicht assoziativ ist.

3.) Nennen Sie ein praktisches Beispiel, für das eine Winkeldefinition (-π, π] sinnvoller ist als [0, 2π).

4.) Schreiben Sie in Pseudocode einen Test, um numerische Bugs bei der Auswertung von *tan x* zu verhindern.

5.) Was verstehen Sie unter Pivotisierung?
Erklären Sie, worin der Nutzen dieser Technik liegt.

6.) Wird durch die Pivotisierungsmaßnahme die Kondition verbessert?

7.) Formulieren Sie $Q(x) = Max$ in ein Minimierungsproblem um. ß

8.) Definieren Sie superlineare Konvergenz.

Aufgabe 5 (9 Punkte)

1.) Leiten Sie das Newton-Verfahren zur Lösung von Optimierungsaufgaben her und geben Sie die recheneffiziente Version an.

2.) Warum ist das Newton-Verfahren besonders effektiv, wenn man in der Nähe des Minimierers startet?

3.) Wie viele zweite Ableitungen benötigen Sie beim Newton-Verfahren bei einem p-parametrischen Problem?

4.) Berechnen Sie den ersten Schritt der Newton-Raphson-Iteration zur Nullstellensuche von $f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1 x_2 + x_2 \end{bmatrix}$, wenn Sie mit $\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ starten.

Aufgabe 6 (12 Punkte)

1.) Formen Sie die Differenzialgleichung $y'' + x^2 y = 1$ so um, dass Sie sie mit dem Runge-Kutta-Verfahren integrieren könnten.

2.) Notieren Sie eine Funktionsdefinition für das Lösen eines p-dimensionalen Differentialgleichungssystems erster Ordnung.

3.) Berechnen sie den Wert $y(\frac{1}{2})$ der Differenzialgleichung $y' = xy^2 + x$ mit dem Runge-Kutta-4-Verfahren, wenn Ihr Anfangswert y(0) = 1 ist. Wählen Sie die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

4.) Lösen Sie $Q = \int_1^2 (x+1)^3 dx$ analytisch. Anschließend lösen Sie das Problem mit der Trapezregel numerisch. Verwenden Sie die Schrittweite $h = \frac{1}{4}$.