Kellerautomaten

„Adventskalender“

Typ	Name	Erlaubte Produktionen	Akzeptierende Maschine	Beispiel
3	Regulär	N → wM N → w $w \in T^*$	Endlicher Automat	a^n
2	Kontextfrei	N → w $w \in (N \cup T)^*$	Kellerautomat	$a^n b^n$

Skript Worsch: Seite 51-56

Begrenztheit des endlichen Automaten

- Überprüfe, ob ein Eingabewort $w \in X^* = \{0,1\}^*$ die Form $0^n 1^n$ hat.
- Dieses Problem kann nicht von einem endlichen Akzeptor gelöst werden.
- Warum?

Erweiterung des endlichen Automaten

- Wie kann man DEA erweitern?

- Hinzunahme von unendlichem Speicher!

- Eingeschränkter Zugriff auf den unendlichen Speicher:
  nur das zuletzt geschriebene oberste Element kann gelesen werden

- Die entstehende Maschine heißt Keller oder Stapelmaschine

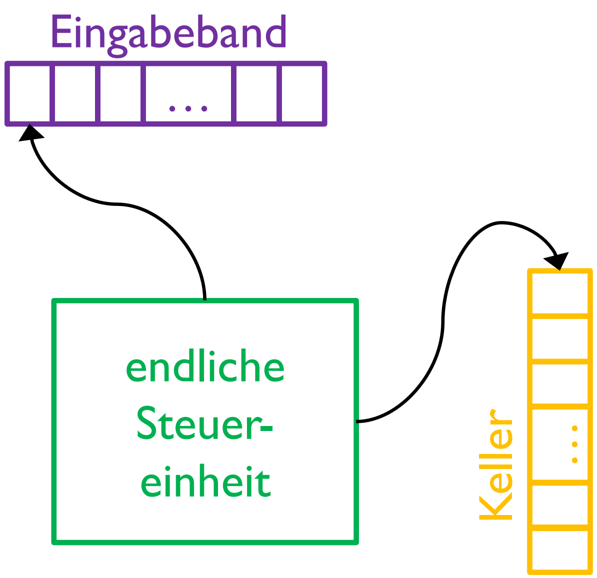
Formale Definition eines Kellerautomaten

- Wie ist ein DEA/NEA formal definiert?

- Was brauchen wir für die formale Definition eines Kellerautomaten?

Definition 4.1: nichtdeterministischer Kellerautomat

Ein nichtdeterministischer Kellerautomat (NKA) besteht aus endlicher Steuereinheit, Eingabeband und Keller(speicher).



- Eingabealphabet X
- Kelleralphabet Y
- Kelleranfangssymbol $y_0 \in Y$
- Endliche Zustandsmenge Z
- Anfangszustand $z_0 \in Z$
- Menge $F \subseteq Z$ akzeptierender Zustände
- Überführungsfunktion $f: Z \times Y \times (X \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^{Z \times Y^*}$

Arbeitsweise

Ist ein NKA in Zustand z und liest Kellersymbol y, kann er „entscheiden", ob ein Eingabesymbol gelesen wird oder nicht:

- ***kein* Eingabesymbol**: $f(z, y, \varepsilon)$ ist die (unter Umständen leere) Menge von möglichen „Aktionen" $(z', v) \in Z \times Y^*$. Dabei ist z' neuer Zustand und v Wort neuer Kellersymbole (letztes Symbol von v zuunterst, $\ldots$, erstes Symbol zuoberst gespeichert).

- **Eingabesymbol *x***: $f(z, y, x)$ ist die (unter Umständen leere) Menge von möglichen „Aktionen"$(z', v) \in Z \times Y^*$ für den Fall, dass das Eingabesymbol gerade x ist.

Arbeitsweise

- Immer, wenn das Kelleranfangssymbol y_0 aus dem Keller gelesen wird, soll es auch wieder zuunterst auf den Keller gelegt werden, d. h. in diesem Fall muss bei jeder „Aktion“ (z', v) das Wort v mit y_0 enden.

Einschränkungen beim deterministischen Kellerautomaten

- Die Zustandsübergangsfunktion muss eindeutig sein

- Die Entscheidung ob ein Eingabesymbol gelesen wird muss aus dem Zustand des Kellerautomaten bestimmbar sein

Definition 4.2: deterministischer Kellerautomat

Ein deterministischer Kellerautomat (DKA) ist definiert wie ein NKA, muss aber den folgenden Einschränkungen genügen:

- z und y bestimmen eindeutig, ob Eingabesymbol gelesen wird oder nicht:
  Entweder $f(z, y, \varepsilon) = \emptyset$ oder $\forall x \in X$: $f(z, y, x) = \emptyset$.
- Wenn $f(z, y, \varepsilon) = \emptyset$, dann
  enthält $f(z, y, x)$ für alle $x \in X$ genau eine Aktion (z', v).
- Wenn $f(z, y, \varepsilon) \neq \emptyset$, dann
  enthält es genau eine Aktion (z', v).

Definition 4.3: Sprache eines Kellerautomaten

Die von einem Kellerautomat K erkannte Sprache ist die Menge aller Eingabewörter $w \in X^*$ mit der folgenden Eigenschaft:

Wenn man K mit w als Eingabe startet und mit einem Keller, der nur das Kelleranfangssymbol enthält, dann gibt es für K (mindestens) eine Berechnung, bei der

- nach einigen Schritten alle Eingabesymbole gelesen sind und
- die Steuereinheit in einem akzeptierenden Zustand ist.
- Der Keller leer ist

Kellerautomat - Namenskonventionen

- Startzustand: z_0
- Akzeptierende Zustände: $\mathrm{F} = \{z_+\}$
- Fehlerzustand: z_-
- Kelleranfangssymbol: $*$

Beispiel

- Überprüfe, ob ein Eingabewort $w \in X^* = \{0,1\}^*$ die Form $0^k 1^k$ hat.
- Dieses Problem kann nicht von einem endlichen Akzeptor gelöst werden.
- Wie kann ein Kellerautomat vorgehen?

Beispiel

- Überprüfe, ob ein Eingabewort $w \in X^* = \{0,1\}^*$ die Form $0^k 1^k$ hat.
- Dieses Problem kann nicht von einem endlichen Akzeptor gelöst werden.
- Wie kann ein Kellerautomat vorgehen?
- **Idee:**
  - Erste Worthälfte „einkellern“.
  - Beim Einlesen der zweiten Worthälfte, die erste Worthälfte „auskellern“
  - Am Ende der Eingabe muss der Keller leer sein

Beispiel

Ist zum Beispiel das Eingabewort 00001111, dann werden nacheinander dessen Symbole gelesen und die durchlaufenen Zustände und Kellerinhalte sind:

z_0	$\mathbf{0}$	z_0	$\mathbf{0}$	z_0	$\mathbf{0}$	z_0	$\mathbf{0}$	z_0	$\mathbf{1}$	z_1	$\mathbf{1}$	z_1	$\mathbf{1}$	z_1	$\mathbf{1}$	z_1	ε	z_+
$*$		0		0		0		0		0		0		0		$*$		$*$
		$*$		0		0		0		0		0		$*$				
				$*$		0		0		0		$*$						
						$*$		0		$*$								
								$*$										

Alternative Darstellung des Ablaufs

gelesene Eingabe	Zustand	Neuer Kellerinhalt
	z_0	$*$
0	z_0	$0*$
00	z_0	$00*$
000	z_0	$000*$
0000	z_0	$0000*$
00001	z_1	$000*$
000011	z_1	$00*$
0000111	z_1	$0*$
00001111	z_1	$*$
00001111	z_+	$*$

Alternative Darstellung des Ablaufs

gelesene Eingabe	Zustand	Neuer Kellerinhalt	Kommentar
	z_0	$*$	start
0	z_0	$0\ *$	read 0; push 0
00	z_0	$00\ *$	read 0; push 0
000	z_0	$000\ *$	read 0; push 0
0000	z_0	$0000\ *$	read 0; push 0
00001	z_1	$000\ *$	read 1; switch $z_{1;}$ pop 0
000011	z_1	$00\ *$	read 1; pop 0
0000111	z_1	$0\ *$	read 1; pop 0
00001111	z_1	$*$	read 1; pop 0
00001111	z_+	$*$	accept

Beispiel

- Kelleralphabet $\{0,*\}$
- Kelleranfangssymbol $*$
- Zustandsmenge $\{z_0, z_1, z_+, z_-\}$
- Anfangszustand z_0
- Akzeptierende Zustände $\{z_+\}$
- Überführungsfunktion

	$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{z'}$	$\boldsymbol{v}$
	z_0	$*$	0		
	z_0	0	0		
	z_0	0	1		
	z_1	0	1		
	z_1	$*$	ε		
sonst	z	y	x		

Beispiel

- Kelleralphabet $\{0,*\}$
- Kelleranfangssymbol $*$
- Zustandsmenge $\{z_0, z_1, z_+, z_-\}$
- Anfangszustand z_0
- Akzeptierende Zustände $\{z_+\}$
- Überführungsfunktion

	$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{z'}$	$\boldsymbol{v}$
	z_0	$*$	0	z_0	$0*$
	z_0	0	0	z_0	00
	z_0	0	1	z_1	ε
	z_1	0	1	z_1	ε
	z_1	$*$	ε	z_+	$*$
sonst	z	y	x	z_-	y

Definition 4.4: Spiegelbild

- Für eine $w \in A^*$ bezeichne w^R das Spiegelbild von w:

$$
\begin{aligned}
& \varepsilon^R = \varepsilon \\
\forall x \in A, w \in A^*: \quad & (xw)^R = w^R x
\end{aligned}
$$

- Allgemein: $(w_1 w_2)^R = w_2^R w_1^R$

Was benötigt die Implementierung eines endlichen Automaten/Kellerautomaten?

Palindrome

- Ein Wort v mit der Eigenschaft $v^R = v$ heißt Palindrom.
- zum Beispiel: RELIEFPFEILER oder SAIPPUAKAUPPIAS (finnisch: Seifenhändler)
- $(ww^R)^R = ww^R$
- D. h.: Jedes Wort der Form $v = ww^R$ ist ein Palindrom, und zwar gerader Länge.
- Und: Jedes Palindrom gerader Länge hat die Form ww^R

Palindrome – Vorgehen?

- **Idee:**
  - Erste Worthälfte „einkellern“.
  - Beim Einlesen der zweiten Worthälfte,
  - diese mit dem Keller vergleichen

Beispiel

- Gesucht: Kellerautomat für $L_{pal} = \{ww^R | w \in \{a,b\}^*\}$
- Beispieleingabe: $abaaaaba$

z_i	a	z_i	b	z_i	a	z_i	a	z_i	ε	z_o	a	z_o	a	z_o	b	z_o	a	z_o	ε	z_+
$*$		a		b		a		a		a		a		b		a		$*$		$*$
		$*$		a		b		a		a		b		a		$*$				
				$*$		a		b		b		a		$*$						
						$*$		a		a		$*$								
								$*$		$*$										

Beispiel

- $Z = \{z_0, z_i, z_+, z_-\}$,
- Anfangszustand z_0,
- $\mathrm{F} = \{z_+\}$,
- $Y = \{a, b, *\}$
- Kelleranfangssymbol $*$

$\mathbf{z}$	$\mathbf{y}$	$\mathbf{x}$	$\mathbf{z'}$	$\mathbf{v}$
z_o	$*$	a		
z_o	$*$	b		
z_o	a	a		
z_o	a	b		
z_o	b	a		
z_o	b	b		
z_o	a	ε		
z_o	b	ε		
z_i	a	a		
z_i	a	b		
z_i	b	a		
z_i	b	b		
z_i	$*$	ε		
z	y	x	z_-	y

In allen anderen Fällen

Beispiel

- $Z = \{z_0, z_i, z_+, z_-\}$,
- Anfangszustand z_0,
- $\mathrm{F} = \{z_+\}$,
- $Y = \{a, b, *\}$
- Kelleranfangssymbol $*$

z	**y**	**x**	**z′**	**v**
z_o	$*$	a	z_o	$a*$
z_o	$*$	b	z_o	$b*$
z_o	a	a	z_o	aa
z_o	a	b	z_o	ba
z_o	b	a	z_o	ab
z_o	b	b	z_o	bb
z_o	a	ε	z_i	a
z_o	b	ε	z_i	b
z_i	a	a	z_i	ε
z_i	a	b	z_-	ε
z_i	b	a	z_-	ε
z_i	b	b	z_i	ε
z_i	$*$	ε	z_+	$*$
z	y	x	z_-	y

In allen anderen Fällen: z, y, x → z_-, y

Palindrome – Nichtdeterministisch?

Palindrome – Nichtdeterministisch

- Die Länge des Eingabewortes ist im Voraus nicht bekannt
- Die Entscheidung ob die Wortmitte erreicht ist und damit das Umschalten von Einkellern auf Auskellern ist nichtdeterministisch

Beispiel

- $Z = \{z_0, z_i, z_+, z_-\}$,
- Anfangszustand z_0,
- $\mathrm{F} = \{z_+\}$,
- $Y = \{a, b, *\}$
- Kelleranfangssymbol $*$

	z	**y**	**x**	**z′**	**v**
	z_o	$*$	a	z_o	$a*$
	z_o	$*$	b	z_o	$b*$
	z_o	a	a	z_o	aa
	z_o	a	b	z_o	ba
	z_o	b	a	z_o	ab
	z_o	b	b	z_o	bb
	z_o	a	ε	z_i	a
	z_o	b	ε	z_i	b
	z_i	a	a	z_i	ε
	z_i	a	b	z_-	ε
	z_i	b	a	z_-	ε
	z_i	b	b	z_i	ε
	z_i	$*$	ε	z_+	$*$
In allen anderen Fällen	z	y	x	z_-	y

Mächtigkeit nichtdeterministischer Kellerautomat

- Beim endlichen Automaten sind nichtdeterministischer und deterministischer Automat äquivalent
- Bei der Turing Maschine ist das ebenso
- Warum gilt das nicht für die Kellermaschine?

Mächtigkeit nichtdeterministischer Kellerautomat

- Nichtdeterminismus auf der endliche Zustandsmenge lässt sich durch Potenzmenge deterministisch ausdrücken
- Nichtdeterminismus des Kellerinhalts bzw. Bandinhalts lässt sich durch Potenzmenge des deterministisch Keller/Bandalphabets ausdrücken
- Nichtdeterminismus bei der Tiefe des Kellers lässt sich nicht ausdrücken

Ausblick

- Es gibt formale Sprachen, die auch von keinem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt werden können.

- Beispiel: $L = \{0^k 1^k 2^k | k \in \mathbb{N}_0\}$

- Warum?

Ausblick

- Es gibt formale Sprachen, die auch von keinem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt werden können.

- Beispiel: $L = \{0^k 1^k 2^k | k \in \mathbb{N}_0\}$

- Warum?

- Der Keller kann sich die beliebig große Zahl k nur einmal merken

Kellerautomat: Lernziele

- Verstehen wie der Keller die Möglichkeiten des endlichen Automaten erweitert
- Den Keller als Basis für rekursive Abläufe verstehen

Kellerautomat: Mögliche Klausuraufgaben

- Definition eines Kellerautomaten
- Beschreibe wie ein Kellerautomat eine bestimmte Sprache erkennen kann
- Erstelle die Zustandsübergangstabelle für einen Kellerautomat um eine bestimmte Sprache zu erkennen
- Zeige die Berechnung mit der ein Kellerautomat ein Wort akzeptiert oder ablehnt