Numerik 2013

Gröll

November 23, 2018

Aufgabe 1 (10 Punkte)

1. Berechnen Sie die Fixpunkte der Iteration $x_{k+1} = \frac{x_k + \frac{9}{x_k}}{2}$?
2. Konvergiert die Iteration zu 1. global gegen die Fixpunkte?
3. Definieren Sie quadratische Konvergenz.
4. Kan für $x^2(x-1) = 1$ der exakte Wert für $x \approx -0,8$ durch Fixpunktiteration $x_{k+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{x_{k-1}}}$ berechnet werden? Führen Sie hierzu eine Konvergenzbetrachtung durch.
5. Wie berechnen SIe Funktionswerte eines Polynoms numerisch effektiv?
6. Es seien $A \in \mathbb{R}^{5\times 10}, B \in \mathbb{R}^{10\times 3}$ und $C \in \mathbb{R}^{3\times 10}$ gegeben. Untersuchen Sie, ob ABC besser über $(AB)C$ oder über $A(BC)$ zu berechnen ist. Berechnen Sie hierzu die benötigten Flops beider Varianten.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

1. Welchen Vorteil hat das Formulieren von Problemen in der euklidischen Norm oder Frobenius Norm in Bezug auf das Nutzen orthogonaler Matrizen in der numerischen Algorithmen?
2. Welchen Wert hat die Konditionszahl der Diagonalmatrix $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ in der Spaltensummennorm?
3. Was gilt für die Konditionszahl von $A^T A$, wenn $\kappa(A)$ bekannt ist?
4. Formulieren Sie die Berechnung von $x = AB^{-1}c$ in eine numerisch effiziente Form um.
5. Warum wird für Skalierung die Spaltensummennorm gegenüber der Frobenius-Norm bevorzugt?
6. Was verstehen Sie unter Regularisierung und nennen Sie ein Einsatzgebiet dieser Technik.
7. Nennen Sie ein Indiz dafür, dass die numerischen Aspekte in einem Algorithmus beachtet wurden.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

1. Ein Algorithmus hat die Komplexität $O(n^2)$. Heißt das
   (a) dass es weniger Aufwand als n^2 Operationen benötigt,
   (b) mindestens n^2 Operationen benötigt,
   (c) genau kn^2 mit $k \in \mathbb{N}$ Operationen benötigt.

2. Die Differenzialgleichung $x' = \sqrt{x}; x_0 = 0$ hat die parametrisierten Lösungen

$$x_a(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq a, a \geq 0 \\ \frac{(t-a)^2}{4} & t > a \end{cases}$$

   Handelt es sich um ein im Sinne von Hadamard korrekt gestelltes Problem?

3. Wie testen sie die schliche Richtigkeit eines Algorithmus?
4. Wodurch sind Testmatrizen für numerische Leistungstests gekennzeichnet?
5. Schreiben Sie ein Programm in Pseudocode, mit dem Sie die Rechenzeit eines Unterprogramms langsam bestimmen.
6. Nennen Sie ein praktisches Beispiel, für das eine Winkeldefinition $(-\pi, \pi]$ sinnvoller als $[0, 2\pi)$.
7. Welches Verfahren kennen Sie, um den Bildraum einer Matrix, d.h. den durch die Spalten aufgespannten Raum durch eine orthogonale Basis darzustellen.

Aufgabe 4

1. Notieren Sie das Newton-Verfahren zur Lösung von Optimierungsaufgaben.
2. Skizzieren Sie das Newton-Verfahren für eine eindimensionale Minimierung grafisch.
3. Warum ist das Newton-Verfahren besonders effektiv, wenn man in der Nähe des Minimierers startet?
4. Wie viele erste und zweite Ableitungen müssen Sie bei verfahren des steilsten Abstiegs bei einem p-parametrischen Problem berechnen?
5. Wie viele Funktionsaufrufe benötigen Sie mindestens für die numerische Approximation einer zweiten Ableitung.
6. Warum ist die Summe der Gewichte für die einzelene Funktionswerte einer numerischen Ableitung immer null?
7. Gegeben sind die Punnkte $(0 \mid 0)$, $(0.1 \mid 0.105)$, $(0.2 \mid 0.240)$, $(0.3 \mid 0.435)$. Bestimmen Sie nummerisch die erste Ableitung an der Stelle $x = 0.2$ möglichst gut.

Aufgabe 5 (13 Punkte)

1. Formen Sie die Differentialgleichung $x^2 y = y$ so um, dass Sie sie mit dem Runge-Kutta-Verfahren integrieren können.
2. Wie müssen Sie das Runge-Kutta-Verfahren modifizieren, um $y = -y + u$ mit $u(t)$ als beliebigen Signal anwenden zu können.

3. Berechnen Sie den Wert $y(\frac{1}{2})$ der Differentialgleichung $y' = xy^2 + x$ mit Runge-Kutta-4-Verfahren, wenn Ihr Anfangswert $y(0) = 1$ ist. Wählen Sie die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$. Das zugehörige Butcher-Schema lautet

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & & & \\
1/2 & 1/2 & 0 & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
\end{array}$$

4. Lösen Sie $Q = \int_2^3 x^3 dx$ analytisch. Anschlißend lösen Sie das Problem mit der Trapezregel numerisch. Verwenden Sie die Schrittweite $h = \frac{1}{4}$.