Aufgabe 1 (9 Punkte)

1.) Notieren Sie die wichtigsten Schritte für das Erstellen eines numerischen Programms.

Eazy

2.) Geben Sie mindestens 4 unterschiedliche Teststrategien für Algorithmen an.
Numerische Problemfälle testen
Schrittweite h --> 0 und Vergleich mit analytischer Lsg
Fehlerhafte Eingaben
Montecarlo-Methoden
Laufzeitmessung bei Echtzeitanwendungen

Aufgabe 2 (10 Punkte)

1.) Welche Werte hat die Konditionszahl von $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ in der Spaltensummennorm?

2,25

2.) Formulieren Sie die Berechnung von $x = AB^{-1}c$ in eine numerisch effiziente Form um.
1. Löse LGS nach z: Bz = c --> z
2. Matrix-Vektor-Produkt x = Az

3.) Bedeutet eine Effizienzverbesserung einer Berechnung auch immer eine Verbesserung der Stabilität des Algorithmus?
Nein, die Stabilität eines Algorithmus hängt nicht von der Effizienz des Algorithmus ab. Stabilität gibt an, wie empfindlich der Algorithmus im Vergleich zum abgebildeten Problem gegenüber Fehlern ist.

4.) Warum wir für Skalierungen die Spaltensummennorm gegenüber der Frobenius-Norm bevorzugt?
Die Berechnung der Frobenius-Norm ist aufgrund der Quadrate und der Quadratwurzel komplizierter als die der Spaltensummennorm, weil dort nur Summenbildungen und Vergleiche durchgeführt werden müssen.

5.) Wieso verbessern Sie durch eine Tikhonov-Regularisierung eines LS-Problems die Kondition?
Beseitigt Singularitäten,
Führt zu regularisierten Ersatzproblemen --> Bessere Kondition?

6.) Angenommen Sie wissen, dass Ihre Lösung im zulässigen Zahlenbereich liegt, ihre Zwischenrechnungen aber diesen verlassen. Was können Sie in einem solchen Fall tun?

Den Rechenweg geschickt umformulieren, also die Eingangsgrößen skalieren. (S. 11)

7.) Ein Algorithmus hat die Komplexität $O(n^2)$. Heißt das,

a.) dass er weniger Aufwand als n^2 Operationen benötigt
b.) mindestens n^2 Operationen benötigt
c.) genau $k*n^2$ mit $k \in \mathbb{N}$ Operationen benötigt oder ist
d.) keine der Aussagen richtig.

--> d.) ist richtig

8.) Wodurch sind Testmatrizen für numerische Leistungstests gekennzeichnet?
Durch einen Parameter zum Ändern des Schwierigkeitsgrads in der Matrix
In der Ordnung skalierbar
Enthalten exakte Lösung

Aufgabe 3 (9 Punkte)

1.) Zur Berechnung von Ableitungen an der Stelle x = 1 einer Funktion stehen Ihnen nur die Stützwerte (0,3), (0.5,4.25), (1,6) und (1.5,8.25) zur Verfügung. Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung numerisch.

Der Abstand zwischen den x ist hier h = 0,5

f'(1)=4 f''(1)=2

2.) Wie viele Funktionsaufrufe benötigen Sie mindestens für die numerische Approximation einer dritten Ableitung?

Man benötigt 4 Aufrufe, da man nach der Formel n+1 = 4 Stützpunkte benötigt.

3.) Warum ist die Summe der Gewichte für die einzelnen Funktionswerte einer numerischen Ableitung immer null?

Nur so kann gewährleistet werden, dass die Ableitung einer konstanten Funktion 0 ist.

4.) Das Newton-Raphson-Verfahren zur Berechnung einer Kubikwurzel lautet $x_{k+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{x_k^2} + 2x_k\right)$. Zeigen Sie über die Fixpunktgleichung, dass die Kubikwurzel von a in der Tat ein Fixpunkt ist.

phi'(x)= 1/3* (-2 a x^(-3) + 2) --> phi'(a^(1/3)=0 <1 --> erfüllt die Fixpunktgleichung

5.) Kann für $x^3(x-1) = 1$ der exakte Wert für $x \approx -0.8$ durch die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{x_k - 1}}$ berechnet werden? Führen Sie hierzu eine Konvergenzbetrachtung durch.

|phi'(0,8)|<1 --> Folge konvergiert für x=0,8 --> Ja, geht.

6.) Wie viele Flops benötigen Sie minimal, wenn Sie $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^2} + x^2\right)$ berechnen müssen?

4

Aufgabe 4 (9 Punkte)

1.) Wie berechnen Sie Funktionswerte eines Polynoms numerisch effektiv?

Horner-Schema

2.) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Matrizenmultiplikation bzgl. des Aufwands nicht assoziativ ist. Schema: Flops ((2x2 * 2x2) * 2x1) != Flops (2x2 * (2x2 * 2x1))

...

3.) Nennen Sie ein praktisches Beispiel, für das eine Winkeldefinition (-π, π] sinnvoller ist als [0, 2π).

Auto bewegt sich auf einem Kreis, soll auf dem kürzesten Weg zu Punkt in diesem Kreis fahren

4.) Schreiben Sie in Pseudocode einen Test, um numerische Bugs bei der Auswertung von *tan x* zu verhindern.

```
if( abs( mod( x,pi ) - pi/2 ) < eps ) {
    warning();
} else {
    return tan(mod(x,pi))
}
```

5.) Was verstehen Sie unter Pivotisierung?
Erklären Sie, worin der Nutzen dieser Technik liegt.

Man versteht darunter die Auswahl eines geeigneten Pivotelements im Gauß-Algorithmus.
Dabei handelt es sich um die betragsmäßig größte Zahl in der jeweiligen Spalte.
Der Nutzen liegt darin, dass dadurch Rundungsfehler vermieden werden können.

6.) Wird durch die Pivotisierungsmaßnahme die Kondition verbessert?

Nein, nur die Konditionszahlen der durch den Gauß-Algorithmus bestimmten Matrizen wird besser.
Die Stabilität verbessert sich dadurch.

7.) Formulieren Sie $Q(x) = Max$ in ein Minimierungsproblem um. ß

-Q(x)=Min

8.) Definieren Sie superlineare Konvergenz.

Eine Folge ist superlinear konvergent, wenn gilt: ||x_(k-1) - x*|| <= c || x_k - x* ||^p Vk € N mit p>1

Aufgabe 5 (9 Punkte)

1.) Leiten Sie das Newton-Verfahren zur Lösung von Optimierungsaufgaben her und geben Sie die recheneffiziente Version an.

Q(x) =! Min
1. Formulierung eines Quadratischen Ersatzproblems (2-tes Taylor-Polynom)
2. Minimierung des Ersatzproblems dQ/dx=0
.....

2.) Warum ist das Newton-Verfahren besonders effektiv, wenn man in der Nähe des Minimums ~~Minimierers~~ startet?

Die Anzahl der gültigen Ziffern wächst exponentiell mit jedem Schritt

3.) Wie viele zweite Ableitungen benötigen Sie beim Newton-Verfahren bei einem p-parametrischen Problem?

Man benötigt p^2 zweite Ableitungen

4.) Berechnen Sie den ersten Schritt der Newton-Raphson-Iteration zur Nullstellensuche von $f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1 x_2 + x_2 \end{bmatrix}$, wenn Sie mit $\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ starten.

(8/7
-4/7)

Aufgabe 6 (12 Punkte)

1.) Formen Sie die Differenzialgleichung $y'' + x^2 y = 1$ so um, dass Sie sie mit dem Runge-Kutta-Verfahren integrieren könnten.

y''=1-x^2y

Mit Runge-Kutta nur DGL 1. Ordnung lösbar:
Substituieren: z1:=y z2:=y'
I. z2'=1-x^2y --> z2
II. z1'=z2 --> z1=y

2.) Notieren Sie eine Funktionsdefinition für das Lösen eines p-dimensionalen Differentialgleichungssystems erster Ordnung.

array[p] function ODE (handle func, double start, double end, array[p] initials, optional tol)

3.) Berechnen sie den Wert $y(\frac{1}{2})$ der Differenzialgleichung $y' = xy^2 + x$ mit dem Runge-Kutta-4-Verfahren, wenn Ihr Anfangswert y(0) = 1 ist. Wählen Sie die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

1,28800

4.) Lösen Sie $Q = \int_1^2 (x+1)^3 dx$ analytisch. Anschließend lösen Sie das Problem mit der Trapezregel numerisch. Verwenden Sie die Schrittweite $h = \frac{1}{4}$.

Analytisch: 16,25 Numerisch: 16,33