

Mathematik III  
Numerik  
Lutz Gröll – Klausur WiSe 2022

TINF21B1  
Lutz Gröll, Connaisseur der imaginären Schwarzwälder Kirschtorte  
3. März 2023

Maximale Punktzahl: 69 Punkte

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel: Taschenrechner + Formelblatt (für LA und Analysis, siehe  
Ordner)

Datum: 06.12.2022

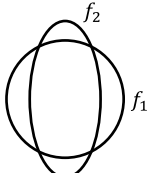
L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Dokument sowie teilweise Lösungen von 2021 übernommen  
Format der folgenden Seiten ist dem der Klausur sehr ähnlich.

## Aufgabe 1:

1. Notieren Sie die wichtigsten Schritte für das Erstellen eines numerischen Programms.  
(2022, 2021, 2019, 2018, 2016)

- (i) Geeigneten Algorithmus wählen
- (ii) Ein- und Ausgabevariablen festlegen
- (iii) Kommentare schreiben (Funktion des Programms, Spezifikation der Schnittstelle und Quelle)
- (iv) Interne Variablen festlegen
- (v) Eigentliches Programm
- (vi) Numerisches Testen
- (vii) Optional: Optimieren
- (viii) Numerische Bugs suchen und beseitigen
- (ix) Andere Aspekte: Echtzeitanforderungen, Sicherheit

2. Notieren Sie ein zweidimensionales Nullstellenproblem mit exakt 4 Lösungen (Formel und Skizze) (neu 2022, kein Originaltext)

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x^2 + 2 \cdot y^2 - 1.5 \end{bmatrix}$$


Hier wird effektiv nach dem Schnittpunkt eines Kreises mit einer Ellipse gefragt.

---

Sollten nur 2 Lösungen verlangt sein, so reicht es aus

2 verschobene Kreise zu nutzen:  $f(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ (x - 1)^2 + y^2 - 1 \end{bmatrix}$ .

Ist nach unendlich vielen Lösungen gefragt, reicht das Vorkommen der Faktorisierung einer Variable in beiden Formeln:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} (x^2 - 4) \cdot (y + 2) \\ (x + 2) \cdot (y - 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (y + 2) \\ (x + 2) \cdot (y - 2) \end{bmatrix}$$

Somit  $x = -2$  und  $y = \text{beliebig}$ . Natürlich lässt sich auch 2 mal der gleiche Term angeben, jedoch ist Herr Gröll damit sicherlich nicht begeistert.

3. Nennen Sie ein ill-posed Problem für eine eindimensionale numerische Integration.  
(neu 2022, kein Originaltext)

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$$

## Aufgabe 2:

1. Geben Sie eine  $2 \times 2$  Matrix an, welche verschiedene Konditionszahlen in der Spaltensummennorm und in der Zeilensummennorm hat. (neu 2022, kein Originaltext)

Ill-posed Problem. Die Konditionszahlen sind immer gleich. Da hat sich Herr Gröll bestimmt sehr amüsiert :)

---

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \kappa_1(A) &= \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 \\ &= \max\{|a| + |c|, |b| + |d|\} \cdot \max\left\{\frac{|d| + |-c|}{|\det(A)|}, \frac{|-b| + |a|}{|\det(A)|}\right\} \\ &= \max\left\{\frac{(|a|+|c|) \cdot (|c|+|d|)}{|\det(A)|}, \frac{(|a|+|c|) \cdot (|a|+|b|)}{|\det(A)|}, \frac{(|b|+|d|) \cdot (|c|+|d|)}{|\det(A)|}, \frac{(|b|+|d|) \cdot (|a|+|b|)}{|\det(A)|}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_\infty(A) &= \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty \\ &= \max\{|a| + |b|, |c| + |d|\} \cdot \max\left\{\frac{|d| + |-b|}{|\det(A)|}, \frac{|-c| + |a|}{|\det(A)|}\right\} \\ &= \max\left\{\frac{(|a|+|b|) \cdot (|b|+|d|)}{|\det(A)|}, \frac{(|a|+|b|) \cdot (|a|+|c|)}{|\det(A)|}, \frac{(|c|+|d|) \cdot (|b|+|d|)}{|\det(A)|}, \frac{(|c|+|d|) \cdot (|a|+|c|)}{|\det(A)|}\right\} \end{aligned}$$

Durch die Beträge lassen sich die Multiplikationen der max-Funktionen kombinieren. Wie zu erkennen ist, handelt es sich bei beiden Normen um das Gleiche.

2. Formulieren Sie die Berechnung von  $x = B^{-1}Cd$  in eine numerisch effiziente Form um. (2022, 2021)

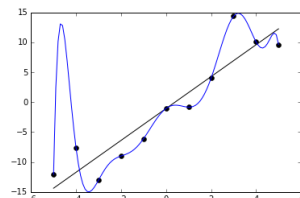
$$Bx = Cd$$

3. Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Addition numerisch nicht assoziativ ist. (2022, 2021, 2012)

$$\begin{aligned} (10^{-20} \widetilde{+} 1) \widetilde{+} (-1) &\neq 10^{-20} \widetilde{+} (1 \widetilde{+} (-1)) \\ \Leftrightarrow 0 &\neq 10^{-20} \end{aligned}$$

4. Was verstehen Sie unter Overfitting? (neu 2022, kein Originaltext)

Das mathematische Modell hat zu viele Parameter, wodurch sich die Approximation zu genau an die gegebenen Daten anpasst und somit für zukünftige Daten unbrauchbar wird.



5. Was ist Spaltenskalierung? (Formel und Zweck/Anwendung)  
(neu 2022, kein Originaltext)

$$AD \underbrace{D^{-1}x}_y = b \implies (AD)y = b \quad \text{und} \quad x = Dy$$

Zweck ist die numerische Verbesserung beim Lösen linearer Gleichungssysteme

6. Sie haben ein schlecht konditioniertes Ausgleichsproblem aus dem ein Signal entstehen soll. Sie wollen dabei die 2. Ableitung bestrafen. Notieren Sie die Least-Square Formel, sowie die Matrix zur Bestrafung der 2. Ableitung.  
(neu 2022, kein Originaltext)

$$\|Ax - b\|_2^2 + \mu \cdot \|Lx\|_2^2 \rightarrow \text{Min}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$L$  ist eine Differenzenmatrix und enthält wie zu sehen die Gewichte der numerischen 2. Ableitung.

7. Warum kann es beim Lösen der Differentialgleichung  $\dot{x}_1 = x_2 - k\sqrt{x_1}$  mit  $x \geq 0$  sinnvoll sein, eine Modifikation des Vektorfelds vorzunehmen? Welche Lösung schlagen Sie vor? (2022, 2021, 2020, 2019, 2018)

Durch numerische Fehler kann es passieren, dass  $x_1 < 0$ , sodass der Radikant negativ wird.

Lösung:  $\dot{x}_1 = x_2 - k\sqrt{\max\{x_1, 0\}}$

- Verifiziert durch Herr Gröll.

8. Wodurch sind Testmatrizen für numerische Leistungstests gekennzeichnet?  
(2022, 2021, 2018, 2016)

- (i) In der Ordnung skalierbar  
(zum Beispiel zum Testen des Speicherverbrauchs)
- (ii) Lösung bekannt
- (iii) Testen numerische Grenzfälle aus (Singularitäten, nahezu singulär etc.)
- (iv) In der Kondition veränderlich
- (v) Stehen in Büchern!

### Aufgabe 3:

1. Nennen Sie eine praktische Anwendung, für die eine Interpolation nach Lagrange in Frage kommt. (2022, 2021)

Bei Hashtabellen zum Berechnen eines Zwischenwertes (falls die eigentliche Funktion zu aufwendig ist oder eine Approximation reicht).

2. Notieren Sie für  $y = \frac{ax+b}{x^2+cx+d}$  einen linearen LS-Ansatz. (2022, 2021)

Ausmultiplizieren gibt  $yx^2+cyx+yd-ax-b=0$ . Daraus dann den LS-Ansatz:

$$Ax = 0_n, \quad A = \begin{bmatrix} y_1 x_1^2 & y_1 x_1 & y_1 & -x_1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n x_n^2 & y_n x_n & y_n & -x_n & -1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ c \\ d \\ a \\ b \end{bmatrix}.$$

3. Wie viele Stützwerte benötigen Sie mindestens, um die Parameter aus Teilaufgabe 2 eindeutig bestimmen zu können? (2022, 2021)

4 Stützwerte

4. In welchem Konflikt stehen Ingenieure, die online eine Ableitung berechnen müssen? (2022, 2021, 2018)

Sie kennen die zukünftigen Werte nicht und können um den neusten Wert deshalb niemals symmetrisch differenzieren.

5. Was halten Sie von  $f_k'' = -\frac{1}{12}f_{k-3} + \frac{1}{3}f_{k-2} + \frac{1}{2}f_{k-1} - \frac{5}{3}f_k + f_{k+1}$ ? (2022, 2021, 2018)

Gar nichts. Die Summe der Gewichte müssen beim Ableiten 0 sein (wegen  $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$ ). Außerdem muss man noch durch  $h^2$  für die zweite Ableitung teilen.

6. Erstellen Sie für die Formel  $x^3(x-1) = 1$  zwei verschiedene Fixpunktiterationen.  
(neu 2022, kein Originaltext)

$$x^3 = \frac{1}{x-1}$$

$$x_{x+1} = \underbrace{\sqrt[3]{\frac{1}{x_k - 1}}}_{\Phi_1(x_k)}$$

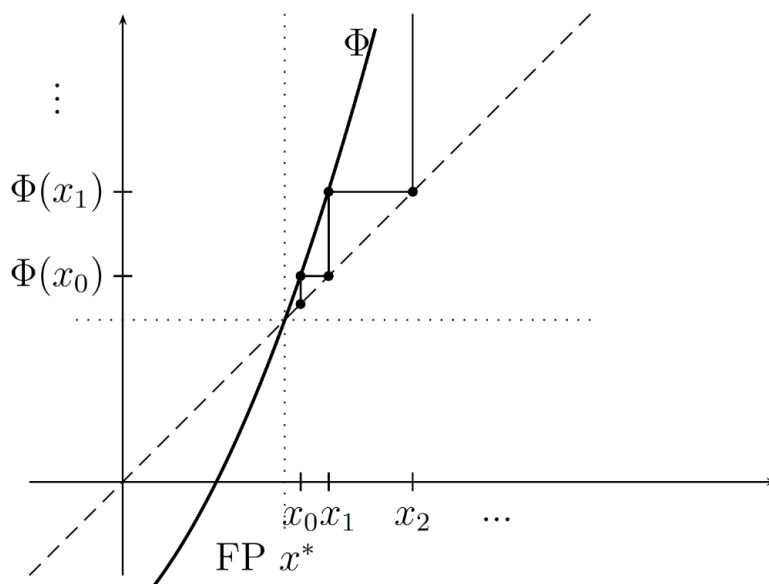
$$x-1 = \frac{1}{x^3}$$

$$x_{k+1} = \underbrace{\frac{1}{x_k^3} + 1}_{\Phi_2(x_k)}$$

7. Warum werden Eigenwerte von Matrizen numerisch nicht wie in der Algebra üblich über die charakteristische Gleichung bestimmt? Was macht man stattdessen?  
(2022, 2021)

Da Polynome numerisch unvorteilhaft sind (Überläufe, aufwendige Berechnung und aufwendige Nullstellensuche). Bei  $100 \times 100$  Matrix ein Polynom 100. Grades. Stattdessen reelle QZ-Zerlegung (durch Gram-Schmidt-Orthogonalisierung).

8. Skizzieren Sie eine instabile Fixpunktiteration graphisch.  
(neu 2022, ähnlich zu 2019)





## Aufgabe 4:

1. Gegeben seien  $A \in \mathbb{R}^{30 \times 5}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{5 \times 100}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{100}$ . Berechnen Sie die Flops für  $A(BC)$ .  
(2022, sehr ähnlich zu 2021)

$$D = BC, D \in \mathbb{R}^{10}, \quad \text{Flop}(A(BC)) = \underbrace{\text{Flop}(AD)}_{30 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 5 - 1) = 270} + \underbrace{\text{Flop}(BC)}_{5 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 100 - 1) = 995} = 1265$$

2. Sie benutzen einen Microcontroller, der nur die 4 Grundrechenarten beherrscht. Damit müssen Sie öfters Polynome der Form  $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  berechnen. Wie viele Flops werden bei einer einfachen Berechnung benötigt? Wie viele hingegen, wenn das Horner-Schema zur Berechnung verwendet wird?  
(neu 2022, kein Originaltext)

Horner Schema:  $y = (((a_3) \cdot x + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0$

$$\begin{aligned} \text{Flop}_{\text{normal}} &= 7, \text{ wenn } x^3 \text{ durch } x^2 \cdot x \text{ berechnet wird, sonst } 9 \\ \text{Flop}_{\text{horner}} &= 6 \end{aligned}$$

3. Welche Voraussetzung muss für eine Parallelisierung eines Programms vorliegen? Nennen Sie ein Beispiel, wo Parallelisierung auf 8 Rechenkernen leicht anwendbar ist und viel bringt. (2022, 2021, 2019, 2018)

Unabhängige Teilaufgaben.

Beispiel: Matrixmultiplikation mit Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ ,  
 $A \cdot B = C$

4. Schreiben Sie in Pseudocode einen Test, um numerische Bugs bei der Auswertung von  $\tan x$  zu verhindern. (2022, 2021, 2020, 2018, 2016)

```
double ownTangent(double x)
    x' := (x -  $\frac{\pi}{2}$ ) mod  $\pi$ 
    if (abs(x') ≤ eps) throw error
    else return tan(x)
```

5. Verbessert Pivotisierung die Kondition? (neu 2022)

Nein, aber verbessert Stabilität

6. Wie schafft der Numeriker einen Spaltentausch im Gauß-Algorithmus durchzuführen, ohne eine Dummy-Variable zu verwenden? (neu 2022, kein Originaltext)

Der schlaue Numeriker hat natürlich einen extra Indizierungsvektor, womit er einfach die Indices der zu tauschenden Spalten tauschen kann. Dadurch entsteht jedoch eine doppelte Addressierung für den Zugriff auf ein Element der Matrix.

Inwiefern der Numeriker dann das Tauschen im Indizierungsvektor ohne Dummy-Variable bewerkstelligt ist ungewiss, jedoch ist dies das Einzige was in der Vorlesung besprochen wurde, was zu der Aufgabe passt.

7. Weisen Sie nach, dass Matrizen vom Typ  $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$  die Möglichkeit bieten, konjugierte Eigenwerte in reeller Form darzustellen. (2022, 2021)

Charakteristisches Polynom:  $\det(A - \lambda I_n) = (\alpha - \lambda)^2 + \beta^2 \stackrel{!}{=} 0$ .

$$\begin{aligned}
 & (\alpha - \lambda)^2 + \beta^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (\alpha - \lambda)^2 = -\beta^2 \\
 \Leftrightarrow & \alpha - \lambda = \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\beta^2} \\
 \Leftrightarrow & \alpha - \lambda = \pm i \cdot \beta \\
 \Leftrightarrow & \lambda = \alpha \mp i \cdot \beta \quad \text{QED.}
 \end{aligned}$$

## Aufgabe 5: (9 Punkte)

1. Leiten Sie das Newton-Verfahren zur Lösung von Optimierungsaufgaben her und geben Sie die recheneffiziente Version an. (2022, 2021, 2020, 2019, 2018, 2016, 2013, 2011)

$g_k$  := Gradient an Stelle  $x_k$ ,  $H_k$  := Hesse-Matrix an Stelle  $x_k$ .

$$Q(x) = Q(x_k) + g_k^T \cdot (x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T \cdot H_k \cdot (x - x_k) + \mathcal{O}(\|x - x_k\|^3)$$

Quadratisches Ersatzproblem:

$$\tilde{Q}_k(x) = Q(x_k) + g_k^T \cdot (x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T \cdot H_k \cdot (x - x_k)$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}_k}{\partial x^T} \stackrel{!}{=} 0 \iff g_k + H_k \cdot (x - x_k)|_{x=x_{opt}} = 0 \implies x_{k+1} := x_{opt} = x_k - H_k^{-1} \cdot g_k$$

Effiziente Variante:

$$H_k \cdot \Delta x_k = g_k, \quad x_{k+1} = x_k + \Delta x_k.$$

Newton, newton raphson, fixpunktiteration

2. Erklären Sie das Prinzip der Aktiven Mengenstrategie in der Optimierung. (2022, 2021)

Aktive Mengenstrategie bezieht sich auf Ungleichungsrestriktionen. In Abhängigkeit davon ob die Ungleichungsrestriktion mit Gleichheit gilt, wird sie als aktiv betrachtet und in das Optimierungsproblem mit Gleichheit aufgenommen. Gilt sie dagegen als strikt, wird sie als inaktiv betrachtet und weggelassen (im aktuellen Optimierungsschritt nicht berücksichtigt).

- Original von Herr Gröll

3. Definieren Sie superlineare Konvergenz. (2022, 2021, 2020, 2018, 2016)

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c_k \cdot \|x_k - x^*\|^p, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$$

Kontraktionskonstante  $c_k$  geht mit steigender Iteration gegen 0.

4. Warum kann der Gradient einer  $p$ -dimensionalen Funktion in  $p+1$  Funktionsaufrufen berechnet werden? (neu 2022)

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{f(x_1, \dots, x_n+h, \dots, x_p) - f(x_1, \dots, x_n, \dots, x_p)}{h}$$

Der hintere Funktionsaufruf einer partiellen Ableitung ist bei allen partiellen Ableitungen gleich (1). Die vorderen Funktionsaufrufe sind alle unterschiedlich ( $p$ ).

Somit sind insgesamt  $p+1$  Funktionsaufrufe benötigt.

5. Wie viele zweite Ableitungen benötigen Sie beim Newton-Verfahren bei einem  $p$ -parametrischen Problem? (2022, 2021, 2018, 2016)

$\frac{p \cdot (p+1)}{2}$  Ableitungen, solange Satz von Schwartz erfüllt ist

---

Aufpassen, wenn wie 2019 nach dem Verfahren des steilsten Abstiegs gefragt ist, sind es natürlich 0.

6. Berechnen Sie den ersten Schritt der Newton-Raphson-Iteration zur Nullstellensuche von  $f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2 \\ x_1 x_2^2 + x_2 \end{bmatrix}$ , wenn Sie mit  $\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  starten. (2022)

$$J = \begin{bmatrix} 2x_1 & -1 \\ x_2^2 & 2x_1 x_2 + 1 \end{bmatrix} \quad J_k = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & -1 \\ (-1)^2 & 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$f(x_0) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1^2 - (-1) \\ 1 \cdot (-1)^2 + (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

---


$$J_k \cdot \Delta x = -f(x_k) \quad \text{oben nur berechnet für formel}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \Delta x_1 = -2 \\ &\Rightarrow \Delta x_2 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

## Aufgabe 6: (9 Punkte)

1. Formen Sie die Differenzialgleichung  $y''' + x^2y = 1$  so um, dass Sie sie mit dem Runge-Kutta-Verfahren integrieren könnten. (2022, 2021)

Substitutionen:  $y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y''.$

DGL-System:

- (a)  $y'_1 = y_2$
- (b)  $y'_2 = y_3$
- (c)  $y'_3 = -x^2y_1 + 1$

Anfangswerte:  $y_1(x_{10}) = y_0, \quad y_2(x_{20}) = y'_0, \quad y_3(x_{30}) = y''_0$

2. Notieren Sie die Funktionsdefinition für das Lösen eines p-dimensionalen Differentialgleichungssystems erster Ordnung mit variabler Schrittweite. (neu 2022)

```
(double[n, p] Lösungsvektor) function ODE(
    handle rechteSeiteODE,
    double[n] xstützpunkte, // variable Stützwerte anstatt xinit und xfinal
    double[p] yinit,
    optional tol
)
```

3. Berechnen Sie den Wert  $y(\frac{5}{2})$  der Differentialgleichung  $y' = xy + x$  mit dem Runge-Kutta-4-Verfahren, wenn Ihr Anfangswert  $y(2) = 0$  ist. Wählen Sie die Schrittweite  $h = \frac{1}{2}$ . (2022, gleiche Funktion wie 2021)

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_0; y_0) = f(2; 0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(\frac{9}{4}; \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{4} = \frac{27}{8}$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\left(\frac{9}{4}; \frac{27}{32}\right) = \frac{9}{4} \cdot \frac{27}{32} + \frac{9}{4} = \frac{531}{128}$$

$$k_4 = f(x_0 + h; y_0 + h \cdot k_3) = f\left(\frac{5}{2}; \frac{531}{256}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{531}{256} + \frac{5}{2} = \frac{3935}{512}$$

$$y\left(\frac{5}{2}\right) = y(2) + \frac{0.5}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y\left(\frac{5}{2}\right) = 0 + \frac{1}{12} \cdot \left(2 + 2 \cdot \frac{27}{8} + 2 \cdot \frac{531}{128} + \frac{3935}{512}\right)$$

$$y\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4221}{2048} \approx 2.061$$

4. Bestimmen Sie ein  $\epsilon$ , bis zu dem Sie sich  $x = 1$  nähern können, ohne dass die Kondition von  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$  den Wert  $\kappa = 10^6$  übersteigt. (2022, 2021, ähnlich zu 2020, 2019, 2018)

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}$$

noch aufschreiben

$$\begin{aligned} & \left| f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} \right| \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{-2}{(x-1)^3} \cdot \frac{x}{\frac{1}{(x-1)^2}} \right| \\ \Leftrightarrow & \left| -2 \cdot (x-1)^{-3} \cdot x \cdot (x-1)^2 \right| \\ \Leftrightarrow & \left| -2 \cdot \frac{x}{(x-1)^1} \right| \\ \Leftrightarrow & \left| -2 \right| \cdot \left| \frac{x}{x-1} \right|_{x=1 \pm \epsilon} > 10^6 \\ \Leftrightarrow & 2 \cdot \left| \frac{\overbrace{1 \pm \epsilon}^{\approx 1}}{\underbrace{1 \pm \epsilon - 1}_{\approx \pm \epsilon}} \right| > 10^6 \\ \Leftrightarrow & 2 \cdot \left| \frac{1}{\pm \epsilon} \right| > 10^6 \\ \Leftrightarrow & \epsilon < 2 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Bis zu einem  $\epsilon$  von  $2 \cdot 10^{-6}$  kann man sich  $x = 1$  nähern, ohne dass die Kondition von  $f(x)$  den Wert  $\kappa = 10^6$  übersteigt.