Einführung in die Analysis

[0] Dieses Skript darf ohne Zustimmung der Autoren (Dr. Lutz Gröll, Dr. Markus Reischl) nicht vervielfältigt werden. Es ist nur für den Gebrauch in der Vorlesung bestimmt. Das Skript gibt nicht den gesamten Vorlesungsinhalt wieder!

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen und Reihen

(Vergleiche mit Kapitel 14 im *"Repetitorium Der Höheren Mathematik"*)

Analysis = Lehre von den Grenzwertbildungen

1.1 Folgen

Definition 1.1 (Folge) Eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt eine unendliche Folge reeller Zahlen, kurz Folge.
Schreibweise : $\{a_n\} = \{a_0, a_1, a_2 \ldots\}$, auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Folge = Funktion von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}$
Angabe des Bildungsgesetzes in der expliziter Form: $a_n = f(n); n \in \mathbb{N}$
Angabe des Bildungsgesetzes in Rekursionsform: $a_{n+1} = F(a_n, n);\ a_0 = 7$

Beispiel 1.1

$$\{a + nb\} = \{a, a + b, a + 2b, \ldots\} \qquad \text{arithmetische Folge}$$
$$a_{n+1} = a_n + b;\ a_0 = a$$
$$\left\{ \tfrac{1}{n+1} \right\} = \{\ 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots\ \} \qquad \text{harmonische Folge}$$
$$\{\ q^n\ \} = \{\ 1, q, q^2, q^3, \ldots\ \} \qquad \text{geometrische Folge}$$
$$a_{n+1} = a_n \cdot q; a_0 = 1$$
$$\{\ (-1)^n\ \} = \{\ 1, -1, 1, -1, \ldots\ \} \qquad \text{alternierende Folge}$$

Definition 1.2 (Teilfolge) Bezeichnet $\{a_n\}$ eine Folge, so heißt jede Folge $\{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3} \ldots\}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ Teilfolge.

Beispiel 1.2

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\right\} \qquad \text{Teilfolge der harmonischen Folge}$$
$$\left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\right\} \qquad \text{Teilfolge der harmonischen Folge}$$
$$\{a_n\} \qquad \text{Teilfolge von sich selbst}$$

Definition 1.3 (Nullfolge) Eine Folge heißt Nullfolge, wenn zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ ein Index N existiert, so dass $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
Man sagt : $\{a_n\}$ konvergiert (strebt) gegen null.

Beispiel 1.3 Um zu beweisen, dass die Folge $\{1/n\}$ gegen 0 konvergiert, wählt man zu vorgegebenem ε als N irgendeine natürliche Zahl, die größer als $1/\varepsilon$ ist. Für alle $n > N$ gilt dann

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Die erste Ungleichung folgt dabei aus $n > N$, die zweite aus $N > 1/\varepsilon$. Hiermit ist die geforderte Existenz des Index N gezeigt, die Zahl 0 ist Grenzwert der Folge $\{a_n\} = \{1/n\}$.

Definition 1.4 (Majorante) $\{a_n\}$ heißt Majorante von $\{b_n\}$, wenn $|b_n| \leq |a_n|$ für alle n.

Satz 1.1 Ist $\{a_n\}$ eine Nullfolge und eine Majorante von $\{b_n\}$, so ist $\{b_n\}$ eine Nullfolge. Sind $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ Nullfolgen, so sind dies auch $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}, \{a_n^k\}, \{c \cdot a_n\}$.

Definition 1.5 (Konvergenz) Eine Zahlenfolge heißt konvergent gegen eine reelle Zahl a, genannt Grenzwert (Limes; Plural: Limites; umgangssprachlich Limiten), wenn $\{a_n - a\}$ Nullfolge ist.
Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$

Definition 1.6 (Divergenz) Gilt $a_n \to \pm\infty$, dann heißt die Folge bestimmt divergent gegen $\pm\infty$. Ist die Folge weder konvergent noch bestimmt divergent, heißt sie unbestimmt divergent.

Beispiel 1.4

$\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$	bestimmt divergent
$\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$	unbestimmt divergent

Definition 1.7 (Häufungspunkt) Eine Zahl heißt Häufungspunkt, wenn sie Grenzwert einer konvergenten Teilfolge ist.

Äquivalent: Eine Zahl a heißt Häufungspunkt, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass unendlich viele Folgenglieder in $U_\varepsilon(a)$ liegen.

Beispiel 1.5 $\{(-1)^n\}$ hat $+1$ und -1 als Häufungspunkt.

Als Limes-Superior bezeichnet man jene Grenzwertbildung, die gegen den größten Häufungspunkt aller Teilfolgen strebt, während Limes-Inferior den kleinsten Häufungspunkt kennzeichnet.

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{m\to\infty} \sup\{x_n : n \geq m\} = \inf_m \sup_{n\geq m} x_n \tag{1}$$

Definition 1.8 (Beschränktheit und Monotonie) Eine Folge heißt

beschränkt	$\exists K \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: \ \lvert a_n \rvert \leq K$
von unten beschränkt	$\exists K \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \geq K$
von oben beschränkt	$\exists K \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leq K$
monoton wachsend	$\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} \geq a_n$
streng monoton wachsend	$\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} > a_n$
monoton fallend	$\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} \leq a_n$
streng monoton fallend	$\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} < a_n$

Mit den beiden nachstehenden Sätzen kann man auch ohne Kenntnis des Grenzwertes entscheiden, ob eine Folge konvergiert.

Satz 1.2 (Bolzano, erstes Hauptkriterium) Eine monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Definition 1.9 (Cauchy-Folge) Eine Folge $\{a_n\}$ heißt Cauchy-Folge (Fundamentalfolgen, konzentrierte Folgen oder in sich konvergente Folgen), wenn es zu jedem ε einen Index N gibt, so dass ab diesem Index alle Folgenglieder weniger als ε voneinander entfernt sind.
Cauchy-Folge: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n > N : |a_m - a_n| < \varepsilon$

Satz 1.3 (zweites Hauptkriterium) Eine Folge konvergiert in den reellen Zahlen genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Anmerkung: Die Folge $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n}$ konvergiert nicht in $\mathbb{Q}$, wohl aber in $\mathbb{R}$, nämlich gegen $\sqrt{2}$ (Newton-Iteration). Allgemeiner: In einem vollständigen Raum konvergiert jede Cauchy-Folge, das heißt, in einem solchen Raum besitzt jede Cauchy-Folge einen Grenzwert, der Element des Raumes ist.
Mit einer Cauchy-Folge kann nachgewiesen werden, dass ein Grenzwert existiert, sein genauer Wert ist dabei nicht von Bedeutung.

Beispiel 1.6 Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle N so, dass $N > 1/\varepsilon$ erfüllt ist. Seien $m \geq n > N$ beliebig, dann gilt:

$$\left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| = \left| \frac{n-m}{mn} \right| = \frac{m-n}{mn} \leq \frac{m}{mn} = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

1.2 Berechnung von Grenzwerten

1. **Rückführung auf Nullfolgen**
   Wenn a Grenzwert von $\{a_n\}$ ist, dann ist $\{a_n - a\}$ eine Nullfolge.

Beispiel 1.7

$$\begin{aligned}
\{a_n\} &= \left\{\frac{3^{n+1}+2^n}{3^n+1}\right\} \qquad \text{Vermutung: } a=3\\
\{a_n-3\} &= \left\{\frac{3^{n+1}+2^n-3^{n+1}-3}{3^n+1}\right\}\\
&= \left\{\frac{2^n-3}{3^n+1}\right\} \le \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0
\end{aligned}$$

2. **Mit Rechenregeln**
   Existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) &= a \pm b\\
\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) &= a \cdot b\\
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) &= \frac{a}{b}, \text{ wenn } b \neq 0, b_n \neq 0 \text{ für alle } n\\
\lim_{n\to\infty} f(a_n) &= f(a), \quad \text{wenn } f \text{ in } a \text{ stetig ist}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_p n^p + b_{p-1}n^{p-1}+\ldots+b_0}{a_q n^q + a_{q-1}n^{q-1}+\ldots+a_0} = \begin{cases} 0 & \text{für } p<q\\ \frac{b_p}{a_p} & \text{für } p=q\\ \operatorname{sign}(\frac{b_p}{a_q})\cdot\infty & \text{für } p>q\end{cases}$$

Beispiel 1.8

$$\begin{aligned}
\{a_n\} &= \left\{\frac{4n^3-6}{6n^3+2n}\right\}\\
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{6}{n^3}}{6+\frac{2}{n^2}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

3. Den speziellen Grenzwerten

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} &= 1\\
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \mathrm{e}^x\\
\lim_{n\to\infty} n(a^{1/n}-1) &= \ln a\\
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) &= \gamma \quad \text{Euler-Mascheroni-Konstante}
\end{aligned}$$

4. **Satz 1.4 (Einschließungskriterien)** Gilt $a_n \to g, b_n \to g$ und $a_n \le c_n \le b_n$ ab einem n_0 für alle n, dann gilt $c_n \to g$.

Beispiel 1.9 Wogegen konvergiert $\sqrt[n]{1+x^n}$ mit $|x|<1$?

$$\begin{aligned}
1-|x| &\le 1+x^n \le 2 \text{ für } |x|<1\\
\sqrt[n]{1-|x|} &\le \sqrt[n]{1+x^n} \le \sqrt[n]{2}\\
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1-|x|} &\le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\\
\Rightarrow 1 &\le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n} \le 1, \qquad \text{da } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1 \text{ für } c>0\\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n} &= 1
\end{aligned}$$

5. **Satz 1.5 (Cauchyscher Konvergenzsatz)** Es sei $\{A_n\}$ eine streng monoton wachsende, unbeschränkte Folge und $\{a_n\}$ irgendeine beliebige Folge. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = g \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = g.$$

Dies gilt auch, wenn $g=\infty$.

Dieser Satz eignet sich zur Berechnung von Grenzwerten, in denen a_n eine Folge von Quotienten ist, oder für Folgen $\sqrt[n]{a_n}$, die auf Quotientenfolgen a_{n+1}/a_n zurückgeführt werden können.

Beispiel 1.10 Zeige $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{1+p}$. Wähle $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^p; p\in\mathbb{N}$ und $A_n = n^{p+1}$, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

und mit dem Cauchyschen Konvergenzsatz kann der Grenzwert gefolgert werden.

Beispiel 1.11 Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = q$ mit $b_n>0$ aus $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = q$ folgt.

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \;\Rightarrow\; \ln q = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} (\ln b_{n+1} - \ln b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln b_{n+1} - \ln b_n}{(n+1)-n}$$

Aus dem rechtsstehenden Ausdruck folgt wegen $A_n = n$ (streng monoton wachsend) und $a_n = \ln b_n$ mit dem Cauchyschen Konvergenzsatz und der Stetigkeit von ln auf $(0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln b_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{b_n} = \ln q \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = q$$

Beispiel 1.12 Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Aus der Wurzelform $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}}$ liest man $b_n = \dfrac{n^n}{n!}$ ab. Grenzwert von $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{n^n\cdot(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

liefert $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}$.

6. **Behandlung als Funktion**

Satz 1.6 *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(n) = a_n$, dann folgt aus $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$ auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.*

Diese Technik gestattet die Verwendung der l'Hospitalschen-Regeln, vorausgesetzt f ist differenzierbar und die Regeln greifen.

1.3 Grenzwert von Funktionen

Definition 1.10 (Grenzwert)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, x_0 ein Häufungspunkt in D. Dann definiert man $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$, wenn für jede Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in D\backslash\{x_0\}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$. Sobald man auch $\pm\infty$ als Grenzwert in der Definition des Häufungspunktes zulässt, kann man genauso auch $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ definieren. Analog definiert man, wenn einschränkend für alle $x_n > x_0$ gilt, den rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = g$ und für $x_n < x_0$ den linksseitigen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = g$.

Bsp.: $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{x^2 - 1/4}{x - 1/2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^2 - 1/4}{x_n - 1/2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n + \dfrac{1}{2}\right) = 1 \qquad x_n \neq \dfrac{1}{2}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$

Anmerkung: Es gelten analoge Rechenregeln wie für Folgen. Zusätzlich kann ein Grenzwert von Funktionen (wenn er existiert) durch Verwenden einer spezielle Folge berechnet werden. Beispiel:

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

Beachte:

$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{x} - \lim_{x\to+0} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+0} 0 = 0$$

ist inkorrekt. Hierbei existieren die einzelnen Grenzwerte nicht, weshalb ein Zusammenfassen unzulässig ist. Wäre die Aufgabe in der Form

$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{x} - \lim_{y\to+0} \frac{1}{y}$$

gestellt worden, wäre man in die Zusammenfassfalle nicht getappt. Wird für die erste Nullfolge die Folge $x_n = 1/n$ und für die zweite $y_n = 1/n^2$ gewählt, ergibt sich $-\infty$ als scheinbare Lösung. Wird hingegen $x_n = 1/n^2$ und $y_n = 1/n$ gewählt, käme $+\infty$ heraus. Da aber bei einem Grenzwert unabhängig von der gewählten Folge immer das Gleiche rauskommen muss, hat die obige Aufgabe keine Lösung.
Wir werden später sehen (Regeln von l'Hospital), dass die Differenz zweier Grenzwerte $\infty-\infty$ durchaus auch mal $1/2$ sein kann.

Rechenregeln:

$$\limsup_{x\to a} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\sup\{f(x)\in E\cap B(a;\varepsilon)\backslash\{a\}\}\Big) \quad E \text{ metric space}$$

$$= \inf_{\varepsilon>0}\Big(\sup\{f(x)\in E\cap B(a;\varepsilon)\backslash\{a\}\}\Big)$$

$$= \inf_{\varepsilon>0}\sup_{x\in B_\varepsilon(a)} f(x) \quad f:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$$

$$= \max\{p\in\overline{\mathbb{R}} : \exists x_n\to a \text{ with } f(x_k)\to p\}$$

$$\liminf_{x\to a} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\inf\{f(x)\in E\cap B(a;\varepsilon)\backslash\{a\}\}\Big) \quad E \text{ metric space}$$

$$= \sup_{\varepsilon>0}\Big(\inf\{f(x)\in E\cap B(a;\varepsilon)\backslash\{a\}\}\Big)$$

$$= \sup_{\varepsilon>0}\inf_{x\in B_\varepsilon(a)} f(x) \quad f:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}}$$

$$= \min\{p\in\overline{\mathbb{R}} : \exists x_n\to a \text{ with } f(x_k)\to p\}$$

$$\inf_{x\in E} f(x) \le \liminf_{x\to a} f(x) \le \limsup_{x\to a} f(x) \le \sup_{x\in E} f(x)$$

$$\liminf_{x\to a} f(x) = \limsup_{x\to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = b$$

$$\liminf_{x\to a-} f(x) > \limsup_{x\to a+} f(x)$$ is possible for infinitely many a
for example $f(x) = -\lceil x\rceil$

$$\limsup_{x\to a} f(x) \le f(a)$$ defines upper semicontinuous at a

$$\limsup_{x\to a+} f(x) \le f(a)$$ defines right upper semicontinuous at a

$$\liminf_{x\to a} f(x) \ge f(a)$$ defines lower semicontinuous at a

$$\liminf_{x\to a-} f(x) \ge f(a)$$ defines left lower semicontinuous at a

$$\limsup_{x\to a} f(x) \le \limsup_{x\to a} g(x)$$ $f(x)\le g(x)$ monotony

$$\liminf_{x\to a} f(x) \le \liminf_{x\to a} g(x)$$ $f(x)\le g(x)$ monotony

$$\limsup_{x\to a}(f(x)+g(x)) \le \limsup_{x\to a} f(x) + \limsup_{x\to a} g(x)$$ subadditivity

$$\liminf_{x\to a}(f(x)+g(x)) \ge \liminf_{x\to a} f(x) + \liminf_{x\to a} g(x)$$ superadditivity

$$\limsup_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \limsup_{x\to a} f(x) + b$$ $f(x), g(x)$ bounded, $\lim_{x\to a} g(x) = b$

$$\liminf_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \liminf_{x\to a} f(x) + b$$ $f(x), g(x)$ bounded, $\lim_{x\to a} g(x) = b$

$$\limsup_{x\to a}(f(x)-g(x)) \le \limsup_{x\to a} f(x) - \liminf_{x\to a} f(x)$$

$$
\begin{aligned}
\limsup_{x\to a}(cf(x)) &= c\limsup_{x\to a} f(x) && 0\le c\le\infty,\ \text{positive homogenity}\\
\liminf_{x\to a}(cf(x)) &= c\liminf_{x\to a} f(x) && 0\le c\le\infty,\ \text{positive homogenity}\\
\limsup_{x\to a}(-f(x)) &= -\liminf_{x\to a} f(x)\\
\liminf_{x\to a}(-f(x)) &= -\limsup_{x\to a} f(x)\\
\limsup_{x\to a}(cf(x)) &= -c\limsup_{x\to a}(-f(x)) = c\liminf_{x\to a} f(x) && -\infty\le c\le 0\\
\liminf_{x\to a}(cf(x)) &= -c\liminf_{x\to a}(-f(x)) = c\limsup_{x\to a} f(x) && -\infty\le c\le 0\\
\limsup_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) &\le \limsup_{x\to a} f(x)\cdot\limsup_{x\to a} g(x) && f(x),g(x)\ge 0,\ \text{submuliplicativity}\\
\liminf_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) &\ge \liminf_{x\to a} f(x)\cdot\liminf_{x\to a} g(x) && f(x),g(x)\ge 0,\ \text{supermuliplicativity}\\
\limsup_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) &= b\cdot\limsup_{x\to a} g(x) && f(x),g(x)\ \text{bounded},\ \lim_{x\to a} f(x)=b\\
\liminf_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) &= b\cdot\liminf_{x\to a} g(x) && f(x),g(x)\ \text{bounded},\ \lim_{x\to a} f(x)=b\\
\limsup_{x\to a}\frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{\liminf_{x\to a} f(x)} && f(x)\ge 0\\
\liminf_{x\to a}\frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{\limsup_{x\to a} f(x)} && f(x)\ge 0\\
\limsup_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &\le \frac{1}{b}\limsup_{x\to a} f(x) && \liminf_{x\to a} g(x)=b>0
\end{aligned}
$$

1.4 Reihen

Definition 1.11 (Reihe) Die aus den Folgegliedern a_k gebildeten Summen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, also $s_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1, s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ldots$, heißen Partialsummen. Die Folge der Partialsummen $\{s_n\}$ heißt Reihe. Die Reihe heißt konvergent bzw. divergent, wenn die Folge $\{s_n\}$ konvergiert bzw. divergiert.

Beispiel 1.13

1. geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots$$

$$
\begin{aligned}
s_n &= 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n && n\text{-te Partialsumme}\\
&= \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{für } q\neq 1\\ n+1 & \text{für } q=1\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \text{falls } |q|<1$$

Zettel

2. harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \qquad \text{Die Reihe ist divergent!}$$

Fall $n = 2^m$

$$\begin{aligned}
s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) \ldots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right) \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{2 \text{ Glieder}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ Glieder}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ Glieder}} + \ldots \underbrace{\left(\frac{1}{2^m} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right)}_{2^{m-1} \text{ Glieder}} \\
&= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{m \text{ Glieder}} \\
&= 1 + m \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow[m \to \infty]{} \infty
\end{aligned}$$

Definition 1.12 Eine Reihe heißt absolut konvergent, wenn die Reihe der Absolutbeträge ihrer Glieder konvergiert, d.h., wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ endlich ist.
Reihen die konvergieren, aber nicht absolut konvergieren, heißen bedingt konvergente Reihen.
Anmerkung: Absolut konvergente Reihen sind der Normalfall.

Satz 1.7 Bei einer konvergenten Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ bilden die Glieder $\{a_k\}$ eine Nullfolge.
Die Umkehrung gilt nicht (siehe harmonische Reihe).

Satz 1.8 (Leibniz-Kriterium) Eine alternierende Reihe $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$ konvergiert, wenn die Folge $\{a_k\}$ monoton fällt.

Beispiel 1.14 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k+1} = \ln 2$
bedingt konvergente Reihe

Übung 1.1 Zeigen Sie, dass $\sin(1/x)$ für $x \to 0$ nicht konvergiert, indem Sie zwei Folgen angeben, die auf unterschiedliche Grenzwerte führen.

Übung 1.2 Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2n+1}{n+3}} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{3x+2}{x-1} \qquad \lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2}$$

1.5 Konvergenzkriterien für Reihen

Satz 1.9 (Majorantenkriterium) Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, und gilt $|b_k| \leq |a_k|$ für alle k ab einem k_0, so ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent.

Beispiel 1.15 Da $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ für $|q| < 1$ absolut konvergiert, konvergiert auch $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k}$ absolut.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^p}$, $p > 0$ divergiert, da $\displaystyle\frac{1}{(\ln k)^p} \geq \frac{1}{k}$ für hinreichend große k.

Satz 1.10 (Quotientenkriterium) Für eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ existiere $\lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = c$ ($a_k \neq 0$ für alle k), dann folgt absolute Konvergenz der Reihe für $c < 1$ und Divergenz für $c > 1$. Im Falle $c = 1$ ist keine Aussage möglich.
Der Limes darf für den Divergenznachweis durch $\liminf$ ersetzt werden. Eine weitergehende Verfeinerung des Kriteriums ist unzulässig, da es Reihen mit $\liminf\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1$ und $\liminf\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| > 1$ gibt, konvergieren und solche die divergieren.

Satz 1.11 (Wurzelkriterium) Für eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ existiere $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = c$, dann folgt absolute Konvergenz der Reihe für $c < 1$ und Divergenz für $c > 1$. Im Falle $c = 1$ ist keine Aussage möglich.
Der Limes darf für den Konvergenz und Divergenznachweis durch $\limsup$ ersetzt werden.

Beispiel 1.16

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+1)q^{k+1}$, $|q| < 1$
$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+2)q^{k+2}}{(k+1)q^{(k+1)}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k+2}{k+1}|q| = |q| < 1 \Rightarrow \text{Konvergenz}$$
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$ ist konvergent, da $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} = 0$

Satz 1.12 (Integralkriterium) Kann man die Glieder der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ als Funktionswerte $a_k = f(k)$ einer in $\mathbb{R}^{>}$ stetigen, monoton fallenden Funktion $f(x)$ darstellen, dann ist die Reihe genau dann konvergent, wenn das Integral $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert.

Beispiel 1.17 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ konvergiert für $p > 1$ und divergiert für $0 < p \leq 1$. Wähle $f(x) = x^{-p}$

(f ist für $x \geq 1$ stetig, monoton fallend).

$$\int_1^\infty x^{-p}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^\infty = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & p > 1 \\ \infty & 0 < p \leq 1 \end{cases}$$

$p = 1$ ist die harmonische Reihe, die divergiert.

Übung 1.3 Berechne $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3} + 5\right)^k$ für $-18 < x < -12$ über die geometrische Reihe

Übung 1.4 Weise für die folgenden Reihen Konvergenz nach

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^k$$

1.6 Potenzreihen

Definition 1.13 (Potenzreihe) Reihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k; x, x_0, a_k \in \mathbb{R}$ heißen Potenzreihen. Ihre Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_n (x - x_0)^k$ sind Polynome.
Mit der Substitution $y := x - x_0$ brauchen nur Reihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ untersucht werden.

Satz 1.13
Jede Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hat ein Konvergenzintervall $(-r, r)$, wobei r der Konvergenzradius der Reihe ist. Außerhalb von $[-r, r]$ divergiert die Reihe.
Der Konvergenzradius ist durch

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \qquad \text{bzw.} \qquad r = \limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

gegeben.
$\limsup\limits_{k\to\infty} x_k$: größter Häufungspunkt der Folge.
Nach Resubstitution ergibt sich als Konvergenzintervall $(x_0 - r, x_0 + r)$

Beispiel 1.18
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$$
Konvergenz liegt vor für $|x| < 1$
Divergenz für $|x| > 1$, da $|\frac{x^k}{k}| \to \infty$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Konvergenz für} & x = 1 \\ \text{Divergenz für} & x = -1 \end{array}\right\}\text{unterschiedliches Verhalten an Randpunkten}$$

Beispiel 1.19 $\sum_{k=0}^{\infty}[5^k + (-5)^k]x^k = 2 + 0 + 2 \cdot 5^2 x^2 + 0 + 2 \cdot 5^4 x^4 + \dots$

Die Folge $\{\sqrt[k]{|a_k|}\} = \left\{ \begin{array}{ll} 5\sqrt[k]{2} & k \text{ gerade} \\ 0 & k \text{ ungerade} \end{array} \right\}$ hat die zwei Häufungspunkte 0 und 5, also ist $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 5$ und $r = 1/5$.

Übung 1.5 Berechne die Konvergenzradien für $\sum_{k=1}^{\infty} k^4 x^k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^k$.

2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

2.1 Einführung

(Vergleiche mit Seite 38 im *"Repetitorium Der Höheren Mathematik"*)

Häufig wird mit Stetigkeit die Anschauung verbunden, den Graph der Funktion ohne Absetzen zeichnen zu können. Diese Vorstellung hält aber keiner strengen Definition stand.

Definition 2.1 (Stetigkeit mit Hilfe des Folgenkriteriums) $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ ist stetig in x_0, wenn für jede Folge $\{x_k\}$ mit Elementen aus $\mathcal{D}$, die gegen x_0 konvergiert, auch $f(x_k)$ gegen $f(x_0)$ konvergiert. Kurz:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\lim_{k\to\infty} x_k)$$

Anmerkung: Außerhalb des Definitionsbereichs einer Funktion darf der Stetigkeitsbegriff nicht angewandt werden! Die Funktion $f(x) = 1/x$ ist auf $\mathbb{R}\backslash 0$ definiert. In $x = 0$ ist sie weder stetig noch unstetig, sondern nur nicht definiert.
Ist f an einem isolierten Punkt definiert, so ist f dort stetig, denn jede Folge, die gegen den Punkt konvergiert, ist ab einem k_0 durch $x_k = x_0$ gegeben, womit auch $f(x_k) = f(x_0)$ ist.
Stetigkeit bedeutet, dass Funktionswert- und Grenzwertbildung vertauschbar sind.

Beispiel 2.1 Hier versagt die Anschauung.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für irrationales } x > 0 \\ 1/q & \text{für rationales } x = p/q > 0 \end{cases}$$

f ist an den rationalen Stellen unstetig und an den irrationalen Stellen stetig!
Ist x_0 rational, so gilt $x_k = x_0 + \sqrt{2}/k \to x_0$ und $f(x_k) = 0 \to 0 \neq f(x_0) = 1/q$, d. h. Unstetigkeit. Die Stetigkeit für die irrationale Zahlen ergibt sich grob gesagt dadurch, dass je näher rationale Folgenglieder der irrationalen Zahl kommen, desto größer wird q, womit $f(x_k) = 1/q$ gegen null strebt. Die irrationalen Folgenglieder liefern ohnehin $f(x_k) = 0$.

Definition 2.2 (Stetigkeit mit Hilfe des Epsilon-Delta-Kriteriums)
$f : D \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in D$ stetig, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ stets $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ gilt.

Definition 2.3 Eine (mindestens) in einem Intervall $[x_0, x_0 + c], c > 0$ definierte Funktion f heißt an der Stelle x_0 rechtsseitig stetig, wenn

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

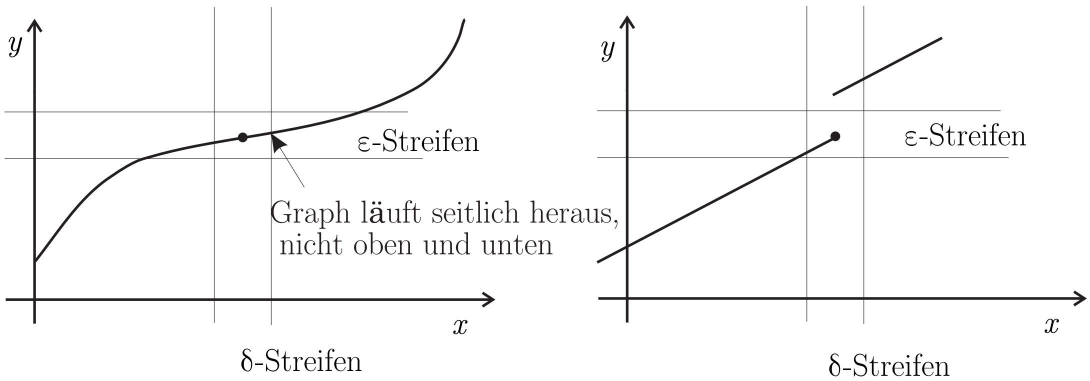


Abbildung 1: stetige, unstetige Funktion

Definition 2.4 Eine (mindestens) in einem Intervall $[x_0 - c, x_0], c > 0$ definierte Funktion f heißt an der Stelle x_0 linksseitig stetig, wenn

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

Definition 2.5 (Stetigkeit) Eine Funktion heißt auf einem Intervall stetig, wenn f

- in jedem inneren Punkt stetig ist und
- falls Randpunkte mit zum Intervall gehören, sie dort links- und rechtsseitig stetig ist.

Anmerkung: In derselben Weise definiert man Stetigkeit für Funktionen mit mehreren Variablen oder für komplexe Funktionen.

$$\forall \{x_n\} : \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n)$$

Beispiel 2.2

$f(x) = \sqrt{x}$	stetig in $[0, \infty)$ in $x_0 = 0$ rechtsseitig stetig
$f(x) = x^2$	stetig auf $\mathbb{R}$

2.2 Unstetigkeiten

(Vergleiche mit Seite 39 im *"Repetitorium Der Höheren Mathematik"*)

Fall 1) Die einseitigen Grenzwerte existieren und sind gleich, f ist in x_0 nicht definiert bzw. f ist in x_0 definiert und $f(x_0)$ weicht vom Grenzwert ab
$\Rightarrow$ hebbare Definitionslücke bzw. hebbare Unstetigkeit

Beispiel 2.3

$$f(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} \quad x \neq \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} & x \neq \frac{1}{2} \\ 1 & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}; \quad x \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Fall 2) Die links- und rechtsseitigen Grenzwerte existieren, sind aber verschieden,
z. B. $f(x) = \mathrm{sgn} x$.
Sprungstelle=Unstetigkeitsstelle 1.Art
$\Rightarrow$ Abschwächung: stückweise stetige Funktion (endl. viele Unstetigkeiten 1.Art)

Fall 3) Links- oder rechtsseitige Grenzwert divergiert
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$$

Fall 4) für $x \to x_0 + 0$ und $x \to x_0 - 0$ ist f unbestimmt divergent
oszillatorische Unstetigkeitsstelle
$f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad x \neq 0$

Übung 2.1 Welche der Funktionen sind auf $[-1, 1]$ stückweise stetig?

$$f(x) = \mathrm{sgn}\, x \qquad\qquad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}; \quad x \neq -1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1/x & x < 0 \\ \sin(1/x) & x > 0 \end{cases}$$

Übung 2.2 Skizzieren Sie nachfolgende Funktion $f : (0, 6) \to \mathbb{R}$ und untersuchen Sie die Stetigkeit.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (0, 1], x \in [5, 6) \\ (x - 3)^2 & x \in (1, 4) \\ 2 & x = 4 \\ 3 & x \in (4, 5) \end{cases}$$

2.3 Lipschitz-Stetigkeit

(Vergleiche mit Seite 422 im *"Repetitorium Der Höheren Mathematik"*)

Definition 2.6 (Lipschitz-Stetigkeit) Erfüllt $f : \mathcal{D} \to \mathcal{W}$ auf $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ die Lipschitz-Bedingung

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{M} : ||f(x_1) - f(x_2)|| \leq L||x_1 - x_2||,$$

so heißt f auf $\mathcal{M}$ Lipschitz-stetig. L ist eine endliche Konstante, die nicht von x_1, x_2 abhängt und wird Lipschitz-Konstante genannt.

L ist, salopp gesagt, die größte im Gebiet $\mathcal{M}$ vorkommende Steigung von f.
Funktionen mit beschränkten partiellen Ableitungen sind Lipschitz-stetig mit $L = \left\| \frac{\partial f}{\partial x^T} \right\|$.
Bedeutung: Stetigkeit ist meist eine zu schwache Voraussetzung. Man garantiert, dass kleine Änderungen der Eingangsgrößen, kleine Änderungen der Ausgangsgrößen bewirken und spricht auch von Dehnungsbeschränktheit. Lipschitz-stetige Funktionen sind fast überall differenzierbar (Satz von Rademacher).

Anwendungen:

- Optimierungsprobleme
- Differenzialgleichungen

Bedingung ist nicht erfüllt, wenn

- f unstetig
- f stetig, aber unendl. Anstieg $f(x) = \sqrt{|x|}$ bei $x = 0$
- f unbeschränkt variiert $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

Beispiel 2.4 $L_{\sin x} = 1$, d. h. $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ Beweis über Mittelwertsatz
$L_{x - \sin x} = 2$, denn $|x - \sin x - y + \sin y| \leq |x - y| + |\sin x - \sin y| \leq 2|x - y|$

2.4 Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 2.7 The function f is said to be continuous on S iff

$$\forall x_0 \in S \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \forall x \in S\colon \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{2}$$

The function f is not continuous on S iff

$$\exists x_0 \in S\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0 \exists x \in S\colon \quad |x - x_0| < \delta \text{ and } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon. \tag{3}$$

The function f is said to be uniformly continuous on S iff

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_0 \in S\ \forall x \in S\colon \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{4}$$

The function f is not uniformly continuous on S iff

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x_0 \in S\ \exists x \in S\colon \quad |x - x_0| < \delta \text{ and } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon. \tag{5}$$

Die einzige Differenz in den Definitionen sind die Quantoren. Wenn man beweisen will, dass f stetig ist, wird der Beweis die Form haben
Wähle $x_0 \in S$, wähle $\varepsilon > 0$. Setze $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$. Wähle $x \in S$
Nehme an $|x - x_0| < \delta$ und folgere $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

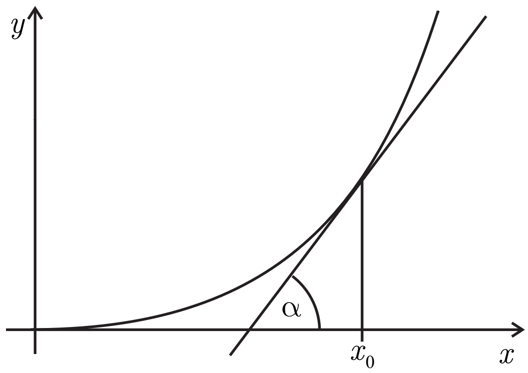
Der Ausdruck $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ kann von x_0 und ε abhängen, muss aber unabhängig von x sein.
Wenn man beweisen will, dass f gleichmäßig stetig ist, wird der Beweis die Form haben
Wähle $\varepsilon > 0$. Setze $\delta = \delta(\varepsilon)$. Wähle $x, x_0 \in S$
Nehme an $|x - x_0| < \delta$ und folgere $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Der Ausdruck $\delta = \delta(\varepsilon)$ darf nur von ε abhängen und muss unabhängig von x_0 und x sein. Es ist klar, dass gleichmäßige Stetigkeit Stetigkeit impliziert. Denn wenn wir ein δ finden, das für alle x_0 tut, dann tut es auch für ein beliebig gewähltes x_0.

Beispiel 2.5 Die Funktion $f(x) = 3x + 7$ ist gleichmäßig stetig auf $S = \mathbb{R}$. Die Funktion $f(x) = x^2$ ist gleichmäßig stetig auf jedem endlichen Intervall, aber nicht auf $[0, \infty)$. Eine auf S Lipschitz-stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig. Umgekehrt ist $f(x) = \sqrt{x}$ auf $(0, \infty)$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.

2.5 Differenzierbarkeit

Definition 2.8 (Ableitung) Eine in $U(x_0)$ definierte Funktion f heißt in x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert. Der Grenzwert wird 1. Ableitung genannt und durch $f'(x_0)$ oder $\dfrac{df}{dx}|_{x=x_0}$ bezeichnet.
Geometrische Deutung:



$\tan\alpha = f'(x_0)$
Anstieg der Bildkurve von f und der Tangente in $(x_0, f(x_0))$

Ist f in $[x_0, x_0{+}c], c > 0$ definiert und existiert der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{h\to+0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, dann heißt dieser Grenzwert rechtsseitige Ableitung $f'_{+0}(x_0)$.
Analog dazu definiert man die linksseitige Ableitung. $f'_{-0} \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{h\to-0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Definition 2.9 (n-te Ableitung) $f^{(n)}(x) \overset{\text{def}}{=} (f^{(n-1)}(x))'$

Elementare Rechenregeln:

$$\left.\begin{aligned}(f+g)^{(n)} &= f^{(n)} + g^{(n)}\\ (cf)^{(n)} &= c\cdot f^{(n)}\end{aligned}\right\}\quad \text{Linearität}$$

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \qquad \text{Leibnizsche Regel}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad \text{Quotientenregel}$$

$$[f(g)]' = f'(g)\cdot g' \qquad \text{Kettenregel}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(z)\big|_{z=f^{-1}(x)}} \qquad \text{Regel für Umkehrfunktion}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(\xi)\mathrm{d}\xi = f(x) \qquad \text{für stetige } f$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(\xi,x)\mathrm{d}\xi = f(\phi(x),x)\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x} - f(\psi(x),x)\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x} + \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(\xi,x)\mathrm{d}\xi$$

Rechenregeln für Basisfunktionen:
siehe Formelsammlung

Beispiel 2.6 Gesucht ist $g'(x)$ für $g(x) = \arcsin x$ für $|x| < \pi/2$.

$$\begin{aligned}
\text{Mit } g(x) &= f^{-1}(x) \text{ folgt} \\
\arcsin' x &= \frac{1}{\sin' z|_{z=\arcsin x}} \\
&= \frac{1}{\cos z|_{z=\arcsin x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 z}|_{z=\arcsin x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Definition 2.10 (Differenzierbarkeit)
Eine auf einem Intervall definierte Funktion f heißt auf $\mathcal{I}$ differenzierbar (oder differenzierbare Funktion auf $\mathcal{I}$), wenn

1. f in jedem inneren Punkt von $\mathcal{I}$ differenzierbar ist und
2. am linken bzw. rechten Randpunkt rechts- bzw. linksseitig differenzierbar ist.

Anmerkung:
Die Definition führt zu etwas paradoxen Situationen. Wenn f auf $[a, b]$ und $[b, c]$ differenzierbar ist, braucht es nicht auf $[a, c]$ differenzierbar sein, wenn in b nämlich ein Knick ist. Auch bedeutet auf $[a, b]$ differenzierbar nicht, dass f in a differenzierbar ist, sondern nur, dass es in a rechtsdifferenzierbar ist. Wenn eine Funktion stetig am Rand ist, muss sie nicht differenzierbar sein, wie $f(x) = \sqrt{x}$ in $[0, 1]$ wegen des unendlichen Anstiegs in 0 zeigt.

Anmerkung:
Ist f differenzierbar, gilt $-\infty < f'_-(x_0) = f'_+(x_0) < \infty$. Das ist nicht zu verwechseln mit $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0)$, was die Stetigkeit der Ableitung meint. Vgl.:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Die Ableitung einer überall differenzierbaren Funktion muss nicht stetig sein!

Anmerkung:
Eine differenzierbare Funktion ist stetig; eine stetige Funktion braucht nicht differenzierbar

zu sein, vgl. $f(x) = |x|$. Schlimmer noch, eine stetige Funktion kann nirgends differenzierbar sein:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (2/3)^k \sin(2^k x) \qquad \text{Weierstraß-Funktion}$$

Übung 2.3 Leiten Sie die Ableitungsregeln für $\tan x$ aus $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ und $\sinh x$ ab. Es gilt $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Übung 2.4 Berechnen Sie die ersten Ableitungen.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^5} - 3^x x^3 & \qquad f(x) &= \ln|\ln x| \\
f(x) &= \arctan\frac{1}{x} & f(x) &= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} \\
f(x) &= x^x & f(x) &= \frac{\sqrt{(x+1)(x-3)}}{(x^3+2)\sqrt[3]{x-2}}; \quad x > 3
\end{aligned}$$

2.6 Partielle Ableitung

(Vergleiche mit Seite 373 im *"Repetitorium Der Höheren Mathematik"*)

Definition 2.11 Eine Abbildung $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist in einem inneren Punkt partiell differenzierbar nach x_k, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{h}$$

existiert. Der Grenzwert heißt partielle Ableitung.
Schreibweise: $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x_1 \ldots, x_n), f_{x_k}(x_1, \ldots, x_n), D_k f(x)$

Definition 2.12 f heißt in x partiell differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen in x existieren.

Regel: Betrachte die jeweils nicht interessierenden Variablen als konstant.

Beispiel 2.7

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= xe^y \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= e^y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y
\end{aligned}$$

Definition 2.13 (Jacobi-Matrix) Die Matrix der partiellen Ableitung von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial f}{\partial x^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

heißt Jacobi-Matrix. Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt die Determinante dieser Matrix Jacobische Determinante oder Funktionaldeterminante.

Anwendungen:

- **Jacobi-Matrix:** Linearisieren von Systemen, Lösen nichtlinearer Gleichungssysteme.
- **Funktionaldeterminante:** Transformation von Wahrscheinlichkeitsdichten, Variablensubstitution bei Mehrfachintegralen, Berechnung inverser Funktionen.

Definition 2.14 (Gradient)
Der Vektor der partiellen Ableitungen einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Gradient genannt, kurz

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ oder auch } \nabla_x f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\nabla\text{: Nabla-Operator } \nabla_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot e_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot e_n$$

Noch allgemeiner definiert man die Ableitung einer skalaren Funktion nach einer Matrix

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{m1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{mn}} \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.8

$$\frac{\partial a^T x}{\partial x} = \frac{\partial (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)}{\partial x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a$$

a ist also Gradient von $f(x) = a^T x$.

$$\frac{\partial \operatorname{sp}(X)}{\partial X} = \frac{\partial \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ii}}{\partial X} = \frac{\partial (x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{nn})}{\partial X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Es sei } A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad ; \quad X = (x_1 \cdots x_m) \in \mathbb{R}^{n\times m}, \text{ dann gilt}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{sp}\,(AX)}{\partial X} &= \frac{a_1^T x_1 + a_2^T x_2 + \cdots + a_m^T x_m}{\partial X} \\ &= (a_1, a_2, \ldots, a_m) = A^T \end{aligned}$$

Rechenregeln: Es seien $X \in \mathbb{R}^{m\times n}, A \in \mathbb{R}^{r\times s}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ mit r, s, p, q so, dass die Matrizenprodukte existieren und die Funktionale der Matrixfunktionen definiert sind. Für Matrizenprodukte, die einen Skalar ergeben, können die Ableitungsregeln für die Spur benutzt werden, da $a = \mathrm{sp}\, a$ gilt.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial X}\,\mathrm{sp}\,(AXB) &= A^T B^T && X \in \mathbb{R}^{m\times n} \\
\frac{\partial}{\partial X}\,\mathrm{sp}\,(AX^T B) &= BA && X \in \mathbb{R}^{m\times n} \\
\frac{\partial}{\partial X}\,\mathrm{sp}\,(AXBX) &= A^T X^T B^T + B^T X^T A^T && \\
\frac{\partial}{\partial X}\,\mathrm{sp}\,(AXBX^T) &= AXB + A^T X B^T && \\
\frac{\partial}{\partial X}\,\mathrm{sp}\,(AXX^T B) &= (A^T B^T + BA)\,X && \\
\frac{\partial}{\partial X}\,\mathrm{sp}\,(AX^T XB) &= X\,(BA + A^T B^T) && \\
\frac{\partial}{\partial X}\,\mathrm{sp}\,(A\,X^{-1} B) &= -(X^{-1} BAX^{-1})^T && \\
\frac{\partial}{\partial X}\,||AXB + C||_F^{\gamma} &= \gamma\,||AXB + C||_F^{(\gamma-2)} A^T (A\,X\,B + C)\,B^T && X \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \gamma \in \mathbb{R} \\
\frac{\partial}{\partial X}\,\det(AXB) &= \det(AXB) \cdot \Big(B(AXB)^{-1}A\Big)^T && A, B, X \in \mathbb{R}_n^{n\times n} \\
\frac{\partial}{\partial X}\,\det(XAX^T) &= \det(XAX^T)(XA^T X^T)^{-1} X^T (A + A^T) && A, X \in \mathbb{R}_n^{n\times n} \\
\frac{\partial}{\partial X}\,\det(X^T AX) &= \det(X^T AX)(A + A^T) X (X^T AX)^{-1} && A, X \in \mathbb{R}_n^{n\times n}
\end{aligned}$$

Satz 2.1 (Satz von Schwarz) Der Wert einer gemischten Ableitung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}$ ist für gegebene x_1 und x_2 unabhängig von der Reihenfolge der Ableitungsbildung, wenn die gemischte Ableitung im betrachteten Punkt stetig ist.

Anmerkung: Ist die Voraussetzung des Satzes nicht erfüllt, gilt häufig $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \neq \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}$. Dass dem nicht immer so ist, zeigt

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)[\ln(x^2 + y^2) - 1] & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

Es gilt $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$, obwohl die Ableitungen in $(0,0)$ nicht stetig sind.

Definition 2.15 (Hesse-Matrix) Die Matrix der zweiten Ableitung einer skalaren Funktion heißt Hesse-Matrix

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x \partial x^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.9
$pV = nRT$ (Zustandsgleichung idealen Gases; mit $nR =$const.)
Gesucht ist:

$$\frac{\partial p}{\partial V} = ?, \qquad \frac{\partial V}{\partial T} = ?, \qquad \frac{\partial T}{\partial p} = ? \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = ?$$

- $\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{nRT}{V}\right) = -\frac{nRT}{V^2}$
- $\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{nRT}{p}\right) = \frac{nR}{p}$
- $\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{pV}{nR}\right) = \frac{V}{nR}$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{nRT}{V^2} \cdot \frac{nR}{p} \cdot \frac{V}{nR} = -\frac{nRT}{pV} = -1 \qquad (\text{da } pV = nRT \Rightarrow 1 = \frac{nRT}{pV})$$

Anmerkung:
An der Stelle $\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p}$ darf nicht gekürzt werden, da es sich hierbei nicht um Brüche, sondern um eine formale Schreibweise für partielle Ableitungen handelt!

Übung 2.5 Berechne die Jacobi-Matrix von

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos(y + \mathrm{e}^{xy}) \\ xy \arctan \frac{x}{y} \end{pmatrix}$$

Übung 2.6 Berechne für $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ z = z$ die Funktionaldeterminante.

Übung 2.7 Berechne $\nabla_x ||Ax||_2^2$.

Übung 2.8 Zeigen Sie, dass $x = (A^TA)^{-1}A^Tb$ die Minimallösung von $\frac{1}{2}||Ax - b||_2^2 \stackrel{!}{=} \text{Min}$ ist, wenn A vollen Spaltenrang hat.

2.7 Richtungsableitung

(Vergleiche mit Seite 385 im *"Repetitorium Der Höheren Mathematik"*)

Definition 2.16 (Richtungsableitung) Sei $f : \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in \mathcal{X}, \quad r \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor und x_0 ein innerer Punkt von $\{h \in \mathbb{R}; \quad x_0 + hr \in \mathcal{X}\}$, dann heißt der Grenzwert

$$f'(x;r) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hr) - f(x_0)}{h} = \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)|_{x=x_0} = r^T \cdot \nabla_x f(x_0)$$

Richtungsableitung von f in x_0 entlang r.
Anmerkung:
Durch die Substitution $r := r/||r||_2$ kann jedes r zum Einheitsvektor gemacht werden.

Beispiel 2.10

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \\
x_0 &= (2,1,1)^T, r = \frac{1}{3}(2,1,2)^T \\
\nabla f(x_0) &= \left.\begin{pmatrix} 4x_1 \\ 2x_2 \\ 4x_3 \end{pmatrix}\right|_{(2,1,1)^T} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
L_r f(x_0) &= r^T \cdot \nabla_x f(x_0) = \frac{1}{3}(2,1,2) \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{26}{3}
\end{aligned}$$

3 Differenzialrechnung

(Vergleiche mit Kapitel 12 im *"Repetitorium Der Höheren Mathematik"*)

3.1 Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

Satz 3.1 (Mittelwertsatz) Ist f auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar, so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ in diesem Intervall mit $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Anwendungen:

- Beweis von Ungleichungen (Konvexität)
- Ableiten von Eigenschaften differenzierbarer Funktionen
- Beweis der Taylorschen Formel

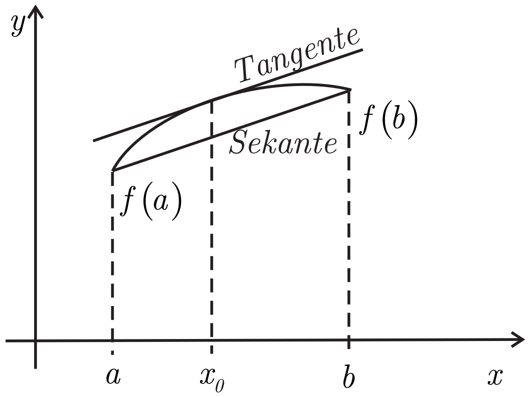


Abbildung 2: Illustration zum Mittelwertsatz

Beispiel 3.1 Für Funktionen mit beschränkten Ableitungen gilt per Mittelwertsatz

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\leq L} \cdot |x-y|$$

Speziell für $f(x) = \sin x$ wird so mit $|f'(\xi)| = |\cos \xi| \leq 1$ die globale Lipschitz-Konstante $L_{sinx} = 1$ gefunden.

3.2 Logarithmisches Differenzieren

Das log. Differenzieren dient der Bestimmung von Ableitungen für Funktionen des Typs

$$f(x) = \frac{u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u_n(x)}{v_1(x) \cdot v_2(x) \cdot \ldots \cdot v_n(x)}$$

und für

$$f(x) = (u(x))^{v(x)} \text{ mit } u(x) > 0$$

Voraussetzung ist, dass f auf einem Intervall differenzierbar und von „0" verschieden ist.

$$\begin{aligned} y(x) &= \ln|f(x)| \\ y'(x) &= \frac{f'(x)}{f(x)}, f(x) \neq 0 \\ f'(x) &= f(x) \cdot y'(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = f(x) \cdot (\ln|f(x)|)'}$$

Beispiel 3.2 Bestimmen Sie folgende Ableitung:

a) $f(x) = x^{\sin x} \qquad x > 0$

b) $f(x) = \dfrac{(x-2)e^{2x}}{(x-1)^3(x-3)^2} \qquad x \neq 1, x \neq 3$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\sin x} \qquad x > 0 \\ \ln|f(x)| &= \sin x \cdot \ln x \\ (\ln|f(x)|)' &= \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \\ f'(x) &= x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}), x > 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-2)e^{2x}}{(x-1)^3(x-3)^2} \qquad x \neq 1, x \neq 3 \\ \ln|f(x)| &= \ln|x-2| + 2x - 3\ln|x-1| - 2\ln|x-3| \\ (\ln|f(x)|)' &= \frac{1}{x-2} + 2 - \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-3} \\ f'(x) &= \frac{(x-2)e^{x}}{(x-1)^3(x-3)^2}\left(\frac{1}{x-2} + 2 - \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-3}\right) \end{aligned}$$

Übung 3.1 Leite die Quotientenregel durch logarithmisches Differenzieren her.

3.3 Regel von de l'Hospital

Kommentar: Marquis de l'Hospital (1661-1704) kaufte Regeln und Beweise von Johann Bernoulli und veröffentlichte diese 1696. Er schrieb das erste Lehrbuch der Differenzialrechnung. Studenten sprechen scherzhaft von der Krankenhausregel.

Satz 3.2 (Regel von de l'Hospital; "0/0"-Regel) Sind $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}, \quad g : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in \mathcal{I}$ und gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ sowie $f'(x_0) \neq 0$ und $g'(x_0) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{I}, \quad x \neq x_0$, so folgt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$$

falls die rechte und linke Seite konvergent oder bestimmt divergent sind.

Satz 3.3 ("∞/∞"-Regel) Die erste Regel bleibt gültig, wenn die Voraussetzung durch

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \text{ und } \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

ersetzt werden.

Anmerkung: Die Grenzwerte beider Funktionen müssen null oder unendlich sein, wenn man de l'Hospital anwenden möchte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x+2}{2x+1} = 2 \qquad \text{aber nach l'Hospital} \quad \lim_{x \to 0} \frac{3x+2}{2x+1} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(3x+2)}{\frac{d}{dx}(2x+1)} = \frac{3}{2}$$

Geht nicht! Falscher Grenzwert, da der Ausdruck weder $\frac{0}{0}$ noch $\frac{\infty}{\infty}$ ergibt!

Beweis 3.1

Es sei $x \neq x_0, \; x \in \mathcal{I}$, dann folgt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}}_{f(x_0) = g(x_0) = 0} = \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} \underset{x \to x_0}{\to} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Beispiel 3.3 Bestimmen Sie den Grenzwert von $\frac{\sin(x)}{e^x - 1}$ für $x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} = \frac{\cos(0)}{e^0} = 1$$

Beispiel 3.4

Bestimmen Sie den Grenzwert von $\frac{x^2}{e^x}$ für $x \to \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Beispiel 3.5

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}\overset{lH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\tan x=0$$

Mit etwas Nachdenken geht es auch ohne die Regeln von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$$

$\boxed{\text{Aber:}}$ Fälle, in denen die Regeln von de l'Hospital nichts taugen:

Beispiel 3.6

- de l'Hospital liefert keine Aussage

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\frac{1+\cos x}{1}\qquad \text{!!! unbestimmt divergent !!!}$$

$$\text{aber: }\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=1+0=1$$

- de l'Hospital wird unschön

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +0}\frac{\sqrt{x^2+\sin^2 x}}{x}&=\lim_{x\to +0}\frac{2x+2\sin x\cos(x)}{2\sqrt{x^2+\sin^2 x}}\\&=\lim_{x\to +0}(\frac{x}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}}+\frac{\sin x\ \cos x}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}})\end{aligned}$$

$$\text{aber: }\lim_{x\to +0}\sqrt{\frac{x^2+\sin^2 x}{x^2}}=\lim_{x\to +0}\sqrt{1+\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{1}}=\sqrt{2}$$

- de l'Hospital dreht sich im Kreis

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\overset{l'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$\longleftrightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\overset{l'H}{=}\cdots$$

$$\text{aber: }\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}+1}}=1$$

Definition 3.1 (”$0 \cdot \infty$”**-Regel)**

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \overset{\longrightarrow}{\text{weiter}} \ „\frac{0}{0}\text{”-Regel}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \overset{\longrightarrow}{\text{weiter}} \ „\frac{\infty}{\infty}\text{”-Regel}$$

Beispiel 3.7 Bestimmen Sie den Grenzwert von $x \ln x$ für $x \to +0$.

$$\lim_{x\to+0} x \ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0} (-x) = 0$$

aber

$$\lim_{x\to+0} x \ln x = \lim_{x\to+0} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to+0} \frac{1}{\underbrace{-\frac{1}{(\ln x)^2}}_{0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\infty}}$$

Definition 3.2 (”$+\infty - (+\infty)$”**-Fälle)**

Bilden des Hauptnenners:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2} = 0$$

Erweitern: $a - b = \dfrac{a^2 - b^2}{a+b}$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-1-(x^2+5)}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2+5}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x-6}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2+5}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2+5}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{\sqrt{x^2}} + \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

Definition 3.3 (”0^0”**-,** ”∞^0”**-,** ”$1^{\pm\infty}$”**-Regel)**

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$$

$$\text{Beweis: } y = (f(x))^{g(x)}$$

$$\ln y = g(x) \ln f(x)$$

$$e^{\ln y} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

Beispiel 3.8 Bestimmen Sie den Grenzwert von x^x für $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0} x \ln x} = e^0 = 1$$

Falls bei der Anwendung von l'Hospital $\infty - \infty$ folgt, wieder einen Doppelbruch erzeugen und "$\frac{0}{0}$"- oder "$\frac{\infty}{\infty}$"-Regel anwenden!

Übung 3.2 Berechne folgende Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} x^2 \mathrm{e}^{1/x^2} \qquad \lim_{x\to \pi/2} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2} \qquad \lim_{x\to +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$$

$$\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \qquad \lim_{x\to \infty} \sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$$

3.4 Implizites Differenzieren

Definition 3.4 (implizite Funktion) Die Funktion f mit $y = f(x)$ heißt durch die Gleichung $F(x,y) = 0$ implizit gegeben, wenn $F(x,y) = 0$ nach y lokal auflösbar ist; kurzum F heißt implizite Funktion.

Allgemeiner definiert man durch ein System reellwertiger einmal stetig differenzierbarer Funktionen F_j auf $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$F_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0; \qquad j = 1, \ldots, n$$
$$\text{kurz } F(x,y) = 0$$

eine implizite vektorwertige Funktion.

Beispiel 3.9

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 &= 0 && \text{(Ellipse)} \\ (a-x)y^2 - (a+x)x^2 &= 0 && \text{(Strophoide)} \\ x^3 - y^3 - 3axy &= 0 && \text{(Cartesisches Blatt)} \\ (x^2+y^2)^2 - 2ax(x^2+y^2) - a^2y^2 &= 0 && \text{(Kardioide)} \end{aligned}$$

(Siehe auch Repetitorium der Höheren Mathematik, 2. Auflage, S. 501 und S. 518)

Definition 3.5 Implizites Differenzieren = Differenzieren einer Gleichung

$$F(x,y) = F(x, f(x)) = 0 \qquad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dx} F(x, f(x)) &= F_x(x, (f(x)) + F_{f(x)}(x, f(x)) \cdot f'(x) \\ &= F_x(x,y) + F_y(x,y) \cdot \underbrace{y'}_{f'(x)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}}$$

Beispiel 3.10 $x^2 + y^2 - r^2 = 0$

1. Möglichkeit:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\mp x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

2. Möglichkeit:

$$f'(x) = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\mp x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Vorteil:
Um die Ableitung zu berechnen, benötigt man nur die Funktionswerte! (da $f'(x) = -\frac{x}{y}$ ist)

Beispiel 3.11

$$\begin{aligned} g(x,y) &= x^2y + 1 + xy^2 + \ln x = 0 \\ \frac{d}{dx}g(x,y) &= 2xy + y^2 + \frac{1}{x} + (x^2 + 2xy)y' = 0 \\ y' &= -\frac{2xy + y^2 + 1/x}{x^2 + 2xy} \end{aligned}$$

Übung 3.3 Berechne $y'(1)$, wenn $x^2 \sin 2y - y\cos(x-1) + 2y = \frac{\pi}{2}$ gilt.

3.5 Hauptsatz über inverse Funktionen

Ist $f : \mathcal{D} \to \mathcal{W}$ eine Funktion, dann heißt $f^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{D}$ Umkehrfunktion von f, wenn die Komposition $f^{-1} \circ f$ die Identität ist, d. h. $f^{-1}(f(x)) = x$. Nicht jede Funktion hat eine Inverse. Jene, die eine haben, werden invertierbare Funktionen genannt.
Beispiel: e^x hat die Umkehrfunktion $\ln x$.
Ferner ist die Umkehrfunktion von $y = Ax$ für reguläres A durch $x = A^{-1}y$ gegeben.

Während man im eindimensionalen Fall sowie im linearen mehrvariablen Fall die Umkehrfunktion durch Auflösen nach x erhält, ist dies im allgemeinen mehrvariablen Fall nicht mehr so einfach. Ja es ist nicht einmal klar, ob eine Umkehrfunktion existiert. Diese Aussage liefert der Hauptsatz über inverse Funktionen. Kann die Aussage mit Ja beantwortet werden, dann kann man die Umkehrfunktion numerisch bestimmen und in Tabellen oder anderweitig ablegen.

Satz 3.4 (inverse function theorem) Es sei f eine stetig differenzierbare, vektorwertige Abbildung der offenen Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{W} = f(\mathcal{D}) \subseteq \mathbb{R}^n$. Wenn im Punkt $x_0 \in \mathcal{D}$ gilt

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial x^T}(x_0)\right) \neq 0, \qquad \text{d. h., eine reguläre Jacobi-Matrix vorliegt,}$$

dann existiert eine eindeutig bestimmte Funktion f^{-1} und zwei offene Mengen $\mathcal{X} \in \mathcal{D}$ und $\mathcal{Y} \in \mathcal{W}$, sodass
1.) $x \in \mathcal{X}$ und $y \in \mathcal{Y}$
2.) $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$
3.) $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ist injektiv (mit 2. bedeutet dies Bijektivität)
4.) f^{-1} ist stetig differenzierbar auf $\mathcal{Y}$ und $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathcal{X}$.

Die Determinantenbedingung ist hinreichend, aber nicht notwendig, vgl. $f(x) = x^3$ an $x_0 = 0$. Dieser Hauptsatz kann als ein Spezialfall des Hauptsatzes über implizite Funktionen mit gleichen Dimensionen in x und y aufgefasst werden. Es gibt auch Varianten, die die stetige Differenzierbarkeit abschwächen.

3.6 Hauptsatz über implizite Funktionen

Dieser Satz beantwortet die Frage, welche Eigenschaften eine implizite Funktion haben muss, damit sie lokal eine explizite Darstellung besitzt. Er sagt also, wann die Umwandlung von einer impliziten Funktion in eine explizite Funktion möglich ist. Leider liefert er keine Vorschrift, um die explizite Darstellung in Formeln hinzuschreiben.

Satz 3.5 (implicit function theorem)
Auf offenen Mengen $\mathcal{W}, \mathcal{V}$ sei die implizite Funktion $F(x, y) = 0$

$$F : \mathcal{W} \times \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m;\ (x, y) \mapsto F(x, y),$$

mit den Eigenschaften

1. F sei k-fach stetig differenzierbar auf $\mathcal{W} \times \mathcal{V}$, $k \geq 1$.
2. $\exists (x_0, y_0) \in \mathcal{W} \times \mathcal{V} :\ F(x_0, y_0) = 0$
3. $\det \left. \dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y^T} \right|_{(x_0, y_0)} \neq 0.$

erklärt. Dann existiert eine Funktion $g(x)$ mit den Eigenschaften

(a) $\mathcal{U}_\varepsilon(x_0) \times \mathcal{U}_\delta(y_0) \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{V},\ F(x, g(x)) = 0\ \forall x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$

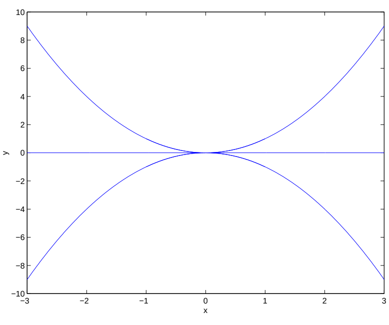
(b) $g(x_0) = y_0$

(c) $g \in C^k(\mathcal{U}_\delta(y_0))$

(d) $\forall\ (x, y) \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0) \times \mathcal{U}_\delta(y_0) :\ F(x, y) = 0 \Rightarrow y = g(x)$

Beispiel 3.12 (Gegenbeispiel zu Voraussetzung 1)

$$F(x, y) = \begin{cases} y - x^2, & y \geq x^2 \\ -y + \frac{y^2}{x^2}, & 0 \leq y \leq x^2 \\ -y - \frac{y^2}{x^2}, & 0 \geq y \geq -x^2 \\ y + x^2, & y \leq -x^2 \end{cases}$$



Graph von $F(x, y) = 0$

In $(0,0)$ sind Voraussetzungen 2 und 3 erfüllt, Voraussetzung 1 aber nicht, denn $\frac{\partial F}{\partial y^T}(0,-\varepsilon) = \infty$ und $\frac{\partial F}{\partial y^T}(0,\varepsilon) = -\infty$. Wählt man $(a,b) = (0,0)$, dann erfüllt F alle Bedingungen außer der Stetigkeit der Ableitung in $(0,0)$. Wird F nach $y = g(x)$ aufgelöst, erhält man drei Ergebnisse:

$$g(x) = x^2,\ g(x) = -x^2 \text{ und } g(x) \equiv 0.$$

Aber keines leistet das Gewünschte.

Beispiel 3.13 (Gegenbeispiel zu Voraussetzung 2)

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + 1$$

In $(1,1)$ sind Voraussetzungen 1, da $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, und 3, da $F_y(1,1) = 2 \neq 0$, erfüllt, Voraussetzung 2 aber nicht. Es existiert keine Lösungsfunktion g mit $F(x, g(x)) = 0$, da F nur positive Werte annimmt.

Beispiel 3.14 (Gegenbeispiel zu Voraussetzung 3)

$$F(x,y) = y^2 - x^2$$

In $(0,0)$ sind Voraussetzungen 1 und 2 erfüllt, Voraussetzung 3 aber nicht. Es sind offensichtlich alle Vorraussetzungen bis auf die dritte erfüllt. Mögliche Lösungsfunktionen:

$$g(x) = x,\ g(x) = -x,\ g(x) = |x|,\ g(x) = -|x|$$

Wenn die dritte Vorraussetzung nicht erfüllt ist, dann kann die Eindeutigkeit der Lösungsfunktion nicht garantiert werden.

3.7 Differenziale

Definition 3.6 (Differenzial) Das Differenzial einer unabhängigen Variablen x nennt man einen beliebigen Zuwachs der Größe x_0 gemäß

$$x - x_0 =: \Delta x =: h =: \mathrm{d}x$$

Das Differenzial einer Funktion $y = f(x)$ nennt man für einen gegebenen Wert x_0 und einen gegebenen Wert des Differenzials dx das Produkt $\mathrm{d}y = f'(x_0)dx$ bzw. $\mathrm{d}f = f'(x_0)\mathrm{d}x$

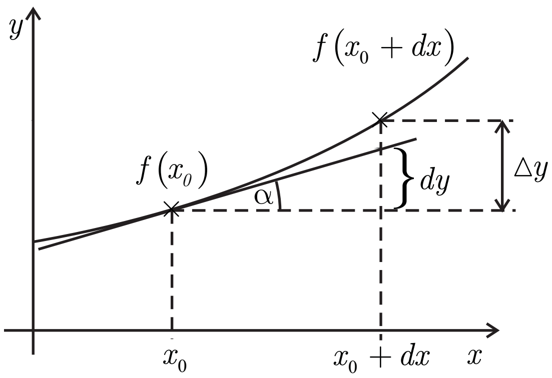
Definition 3.7 (vollständiges Differenzial) Bei einer Funktion $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ kann das Differenzial nach einer der Variablen gebildet werden, was durch

$$\mathrm{d}_{x_1} y = \mathrm{d}_{x_1} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots x_n) \cdot \mathrm{d}x_1$$

definiert ist und partielles Differenzial heißt. Die Summe aller partiellen Differenziale

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \\ &= grad^T f(x_0) \cdot \mathrm{d}x \\ &= \nabla_x^T f(x_0) \cdot \mathrm{d}x \end{aligned}$$

heißt vollständiges Differenzial.



Erklärungen zur Grafik:

- $\tan\alpha = f'(x)$
- dy = Zuwachs der Tangentenordinate bei einem Abszissenzuwachs dx

Abbildung 3: Geometrische Interpretation des Differenzials

Wichtig:

$$\Delta x = \mathrm{d}x \quad \underline{\text{aber}} \quad \Delta y \neq \mathrm{d}y$$

Das Differenzial ist eine Zahl, die nichts mit einer unendlichen kleinen Größe zu tun hat!

3.8 Fehlerrechnung

Definition 3.8
$\widetilde{a}$ sei Näherungswert von a, dann bezeichnet $\widetilde{a} - a$ den Fehler, $|\Delta a| \overset{\text{def}}{=} |\widetilde{a} - a|$ den absoluten Fehler und für $\widetilde{a} \neq 0$, $\quad |\frac{\Delta a}{\widetilde{a}}|$ den relativen Fehler. Entsteht $\widetilde{a}$ durch Rundung von a auf n Stellen nach dem Komma, dann heißt $|\Delta a| \leq 0,5 \cdot 10^{-n}$ Rundungsfehler (Hälfte der letzten Stelle) [1].

Anwendung:
Zwei Widerstände parallel mit der Genauigkeit Klasse 1
$\rightarrow 2 \cdot 1k\Omega$ parallel $\rightarrow R_G = 500\Omega$
Gesucht: Genauigkeit des R_G. Maximaler- und relativer Fehler.
Anmerkung:

[1] Anmerkung zum Runden: 'ungerade',5 wird auf-, 'gerade',5 abgerundet. Im Mittel hat man dadurch einen geringeren Fehler!

Während nachfolgend das Differenzial zur Fehlerrechnung herangezogen wird, nutzt man in der Matrizentheorie oft Ungleichungen für Normen.

Prinzip der Fehlerrechnung

Für kleine Δx gilt $\Delta y \approx dy$. Man ersetzt $\Delta x := dx$ und $\Delta y := dy$.

Beispiel 3.15

Berechne absoluten und relativen Fehler des Kugelvolumens, wenn $D = (6.35 \pm 0.02)cm$ ist.

$$\begin{aligned}
V &= \frac{\pi}{6} D^3 \\
1 \cdot \mathrm{d}V &= \frac{\pi}{6} 3D^2 dD \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}D} = \frac{\pi}{6} 3D^2 \\
\Rightarrow \Delta V &= \frac{\pi}{2} \widetilde{D}^2 \Delta D \qquad\qquad \mathrm{d}V = \frac{\pi}{2} D^2 dD \\
|\Delta V| &= \frac{\pi}{2} (6.35)^2 0.02 cm^3 = 1.27 cm^3 \qquad \text{absoluter maximaler Fehler} \\
\left|\frac{\Delta V}{V}\right| &= \frac{\pi \widetilde{D}^2 \Delta D}{2 \frac{\pi}{6} \widetilde{D}^3} = 3 \frac{\Delta D}{\widetilde{D}} = 0.95\% \qquad \text{relativer Fehler}
\end{aligned}$$

Beispiel 3.16

Schätzen Sie den absoluten Fehler ab, wenn $\sqrt{e+1}$ mit dem gerundeten Wert $e = 2.72$ berechnet wird.

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{x+1} \\
\mathrm{d}y &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \mathrm{d}x \qquad (\widetilde{e} = 2.72\ ; \quad |\Delta e| = 0.5 \cdot 10^{-2}) \\
\Rightarrow \Delta y &= \frac{1}{2\sqrt{3.72}} 0.5 \cdot 10^{-2} = 0.0014 \\
\left|\frac{\Delta y}{y}\right| &= \frac{0.5 \cdot 10^{-2}}{2\sqrt{3.72}\sqrt{3.72}} = 0.07\%
\end{aligned}$$

Übung 3.4 Bei der Ermittlung der spezifischen Wärme eines Körpers c_K nach der Mischungsmethode (ohne Berücksichtigung des Wasserwertes des Kalorimeters) gemäß

$$c_K m_K T_K = c_W m_W T_W$$

(c_K spezifische Wärme des Körpers, c_W spezifische Wärme des Wassers, m_K Masse des Körpers, m_W Masse des Wassers, T_K Temperaturänderung des Körpers, T_W Temperaturänderung des Wassers) ergibt sich auf Grund der Messwerte $m_K = 300g$, $m_W = 330g$, $T_K = 76.4K$, $T_W = 6.2K$, $c_W = 4.1868 kJ/(kg \cdot K)$. Geben Sie die spezifische Wärme des Körpers mit absolutem und relativem Fehler an.

Überlegen Sie sich, welche Absolutfehler für den Tafelwert von c_W und für die Temperaturänderung annehmen, wenn Sie eine digitale Temperaturmessung mit 0.1-Anzeige verwenden. Ihre Digitalwaage hat eine grammgenaue Anzeige.

3.9 Fréchet-Ableitung

Definition 3.9 Es sei $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ eine Abbildung (Operator, Funktional, Funktion) zwischen endlich-dimensionalen normierten Räumen.
f heißt an der Stelle $x_0 \in \mathcal{V}$ Fréchet-differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $Df(x_0;\cdot) : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ gibt, sodass für alle $h \in U(x_0)$ gilt:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0; h) + \underbrace{r(x_0; h)}_{\text{Rest}} \text{ mit } \lim_{h\to 0} \frac{r(x_0; h)}{||h||} = 0$$

Die lineare Abbildung $Df(x_0;\cdot)$ heißt Fréchet-Ableitung von f in x_0. Die Fréchet-Ableitung ist eindeutig, nicht aber ihre Darstellung.
Anmerkung: Die Fréchet-Ableitung stellt eine Verallgemeinerung der Ableitung dar.
Beachte: Die Existenz der partiellen Ableitung sichert nicht die Existenz der Fréchet-Ableitung. Die Existenz aller partiellen Ableitungen in einer Umgebung von x_0 und die Stetigkeit der partiellen Ableitungen ist hinreichend für die Existenz der Fréchet-Ableitung. Stetige Differenzierbarkeit einer Funktion ist hinreichend, aber nicht notwendig für Fréchet-Differenzierbarkeit, vgl. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|/(n + 1)$ für $1/(1 + n) \leq |x| < 1/n$ und $f(0) = 0$. Überdies kann ein Differenzial $Df(x_0; h)$ existieren, sodass der normierte Rest gegen null strebt, ohne dass eine Ableitung existiert, nämlich dann, wenn dieses Differenzial nicht linear in h ist, vgl. $f(x_1, x_2) = \operatorname{sgn}(x_2) \min\{|x_1|, |x_2|\}$ mit $Df(0; h_1, h_2) = f(h_1, h_2)$.

Beispiel 3.17 Zeigen Sie, dass die Abbildung $Df(x;.) = Jh$ mit der Jacobi-Matrix J von $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2)^T$ eine Fréchet-Ableitung in $(0,0)$ ist.

$$\begin{aligned}
J &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix} \\
h &= (h_1, h_2)^T \qquad ||h||_2 = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \\
f(0+h) &= (h_1, h_2)^T \\
Jh &= (h_1, 2x_2 h_2)^T \\
r(x_0; h) &= (0, h_2^2)^T \\
\lim_{h \to 0} \frac{r(x_0; h)}{||h||_2} &= \lim_{h \to 0} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{denn } 0 \leq \lim_{h \to 0} &\frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \lim_{h \to 0} \frac{h_2^2}{\sqrt{h_2^2}} = \lim_{h_2 \to 0} h_2 = 0.
\end{aligned}$$

Beispiel 3.18 Die nachfolgende Funktion ist überall stetig, hat überall partielle Ableitungen, besitzt aber in $(0,0)$ keine Fréchet-Ableitung.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
f_x(0,y) &= \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{(0+h)^3}{(0+h)^2+0} - 0}{h} = 1 & \text{für } y = 0 \\ \left. \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2xx^3}{(x^2+y^2)^2} \right|_{x=0} = 0 & \text{für } y \neq 0 \end{cases} \qquad \text{unstetig} \\
f_y(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0}{0+(0+h)^2} - 0}{h} = 0 \\
r(0,0; h_1, h_2) &= f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0,0) - f_x \cdot h_1 - f_y \cdot h_2 \\
&= \frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2} - 0 - h_1 = -\frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} \\
\lim_{h = h_1 = h_2 \to 0} \frac{r}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} &= \lim_{h \to 0} -\frac{h^3}{2h^2} \frac{1}{\sqrt{2h^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Es gelang, eine Nullfolge anzugeben, nämlich $h_1 \to 0$ und $h_2 \to 0$ mit $h_1 = h_2$, für die der normbezogene Rest nicht gegen null geht. Damit ist $f(x,y)$ in $(0,0)$ nicht Fréchet-differenzierbar, obwohl die Jacobi-Matrix, die hier der Zeilenvektor $(f_x(0,0), f_y(0,0)) = (1,0)$ ist, existiert!

3.10 Kurvendiskussion

1. Definitionsbereich festlegen
   - nicht definierte Punkte angeben
   - evtl. hebbare Unstetigkeiten beheben
2. Wertebereich angeben
3. Symmetrie
   - gerade Funktion: $f(-x) = f(x)$
   - ungerade Funktion: $f(-x) = -f(x)$
   - evtl. Nullpunktverschiebung
     $x^* = x - x_0$; $\quad y^* = y - y_0$
     $\Rightarrow$ Symmetrie bez. anderer Punkte
     Periodizität: $f(x+T) = f(x)$ (T = Periodendauer)
4. Nullstellen von $f,\ f',\ f''$
   - positive bzw. negative Bereiche $f(x) > 0;\ f(x) < 0$
   - streng monoton wachsend bzw. fallend $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$
   - streng konvex bzw. konkav $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$
5. Extremstellen
   - Nullstellen von f'
   - Zusammen mit f'' folgen Minimum und Maxiumum,
     wenn Wert > 0 (Minimum) oder < 0 (Maximum)
     Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x ein Minimum, wenn links und rechts der Stelle keine kleineren Werte von x sind.
     Strenges Minimum nur, wenn in der Umgebung von x_0 keine weiteren gleichen Werte vorhanden sind!

     Q = Minimum ($Q = \min f(x)$)
     x = Minimierer ($x = \arg\min f(x)$)
   - Randstellen
     evtl. globale oder lokale Minima / Maxima
   - Extremstellen nicht differenzierbarer Funktionen

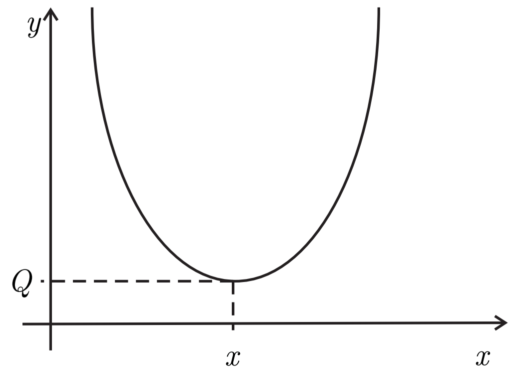


Abbildung 4: Extremstelle

6. Wendepunkte = „Nulldurchgänge von $f''(x)$“
   konvex- / konkav- Wechsel

7. Charakterisierung von Unstetigkeiten

   - Sprünge, Pole, Polwechsel, oszillatorische Unstetigkeit

8. Verhalten für $x \to \pm\infty$

   - Asymptoten (meist Geraden)
     Asymptote = einfache Funktion $h(x)$
     $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |f(x) - h(x)| = 0$

9. Verhalten bei $x = 0$
   Viele Funktionen haben Definitionsbereich $[0, \infty)$
   z.B. Ortskurve, Frequenzgänge
   $\lim\limits_{x \to 0} f(x); \quad \lim\limits_{x \to 0} f'(x)$

3.11 Lösen von Extremalaufgaben

Eine Optimierungsaufgabe ist dadurch gekennzeichnet, dass eine Menge $\mathcal{F}$, genannt Suchraum oder zulässiger Bereich, und eine binäre (zweistellige, zwei Elemente umfassende) Relation “besser“ gegeben sind.
Gesucht ist die Menge $\mathcal{X}_{\text{opt}} \subset \mathcal{F}$ von Optimallösungen $x_{\text{opt}} \in \mathcal{X}_{\text{opt}}$ mit

$$\forall x \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{X}_{\text{opt}}, \forall x_{\text{opt}} \in \mathcal{X}_{\text{opt}} : \qquad x_{\text{opt}} \text{ besser } x$$

bzw. (wenn nicht alle $x \in \mathcal{F}$ paarweise vergleichbar sind)

$$\nexists x \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{X}_{\text{opt}}, \forall x_{\text{opt}} \in \mathcal{X}_{\text{opt}} : \qquad x \text{ besser } x_{\text{opt}}$$

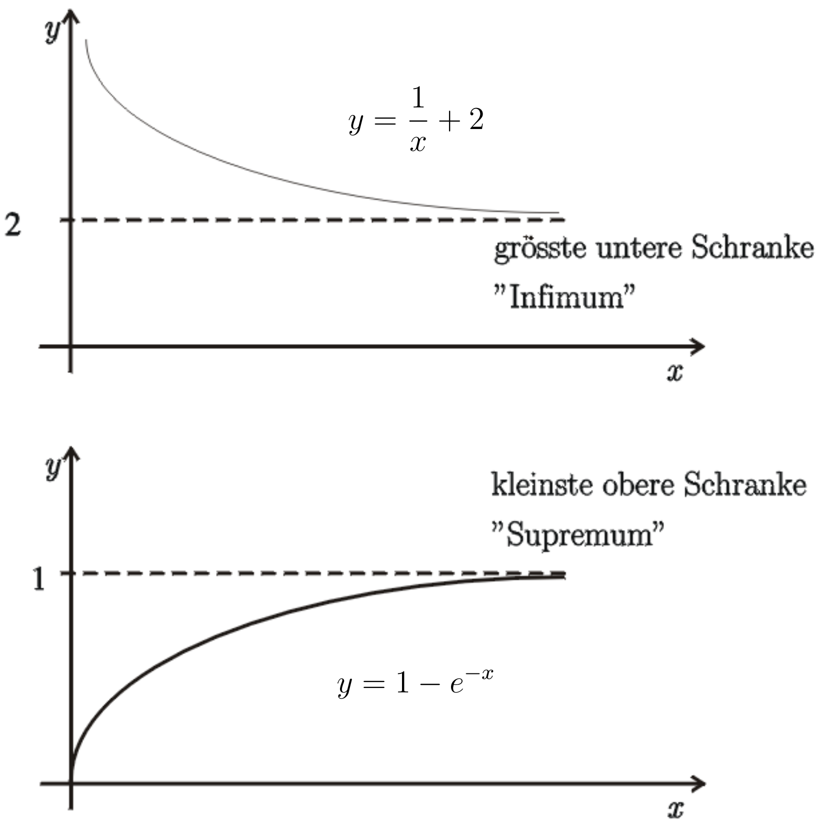


Abbildung 5: Infimum und Supremum

Aus der Frage nach den Elementen folgt die Festlegung von

Suchraum $+$ **Restriktionen** $=$ **zulässiger Bereich**

Aus der Frage nach der Relation "besser" folgt die Festlegung

Zielfunktion $+$ **Ordnungsrelation** $+$ **Optimierungssinn** $=$ **Gütekriterium**

Beides zusammen gibt

Gütekriterium $+$ **zulässiger Bereich** $=$ **Optimierungsaufgabe**

Bemerkung:
Wählt man für Vektoren den Vergleich über ihre Länge (euklidische Norm), so wird als Ord-

nungsrelation $\geq$ bzw. $\leq$ gewählt, je nachdem, ob ein Maximum oder ein Minimum bestimmt werden soll.
Wählt man für Vektoren den komponentenweisen Vergleich, so unterliegen die betrachteten Vektoren einer Halbordnung, da sich nicht alle Vektoren miteinander vergleichen lassen. Solche Fragestellungen führen auf die Gütevektoroptimierung.

Bezeichnung	Kürzel	Bedingung
Supremum von f kleinste obere Schranke	$\sup\limits_{x\in\mathcal{D}} f(x)$	$\sup\limits_{x\in\mathcal{D}} f(x) \overset{\text{def}}{=} \min\limits_{y\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}} \{y : y \geq f(x); x \in \mathcal{D}\}$
Infimum von f größte untere Schranke	$\inf\limits_{x\in\mathcal{D}} f(x)$	$\inf\limits_{x\in\mathcal{D}} f(x) \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{y\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}} \{y : y \leq f(x); x \in \mathcal{D}\}$
globales Minimum von f absolutes Minimum	$\min_{\mathcal{F}} f(x)$	$\forall x \in \mathcal{F} : f(x) \geq \min_{\mathcal{F}} f(x) = f_{\text{min}}$ und $\min_{\mathcal{F}} f(x) \in \mathcal{WB}(f)$
Extremum	f_{opt}	$f(x_{\text{opt}}) = \min\limits_{x\in\mathcal{F}} f(x)$ $f(x_{\text{opt}}) = \max\limits_{x\in\mathcal{F}} f(x)$
Minimierer von f Minimalpunkt	$\text{argmin} f(x)$	$f(\arg\min\limits_{x\in\mathcal{F}} f(x)) = \min\limits_{\mathcal{F}} f(x)$
Lösung	x_{opt}	$x_{\text{opt}} = \arg\min_{x\in\mathcal{F}} f(x)$ $x_{\text{opt}} = \text{argmax}_{\mathcal{F}} f(x)$
Lösungsmenge	$\mathcal{X}_{\text{opt}}$	$\mathcal{X}_{\text{opt}} = \{x \in \mathcal{F} : f(x) = \min\limits_{x\in\mathcal{F}} f(x)\}$ oder $\mathcal{X}_{\text{opt}} = \{x \in \mathcal{F} : f(x) = \max_{\mathcal{E}} f(x)\}$
ε-approximative Lösung	x_ε	$f(x_\varepsilon) \leq f(x_{\text{opt}})$ und $\lvert h(x_\varepsilon)\rvert \leq \varepsilon 1_m$ und $g(x_\varepsilon) \leq \varepsilon 1_n$
lokales Minimum von f relatives Minimum	$f(x_{\text{loc}})$	$\exists \mathcal{U}(x_{\text{loc}}) \subset \mathcal{V}$, $\forall x \in \mathcal{U}(x_{\text{loc}}) \cap \mathcal{F} : f(x) \geq f(x_{\text{loc}})$
strenges lokales Minimum isoliertes lokales Minimum		$\exists \mathcal{U}(x_{\text{loc}}) \subset \mathcal{V}$, $\forall x \in \mathcal{U}(x_{\text{loc}}) \cap \mathcal{F}\backslash\{x_{\text{loc}}\} : f(x) > f(x_{\text{loc}})$
stationärer Punkt kritischer Punkt	x_{stat}	$\forall v \in \mathcal{V} : Gf(x_{\text{stat}}; v) = 0$ Gâteaux-Ableitung verschwindet

Beispiel 3.19 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2 \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ hat bei $x_{\text{opt}} = 0$ das globale Minimum $f(0) = 0$. Dieses ist jedoch kein strenges Minimum, da sich in jeder noch so kleinen Umgebung weitere globale Minimierer mit $x_n = 1/(n\pi)$; $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ häufen.

Methode von Lagrange:

1. Aufstellen der Lagrange-Funktion

Lagrange-Funktion $=$ Zielfunktion $+\ \lambda_1$*Restriktion$_1$ $+\ \ldots\ +\ \lambda_m$*Restriktion$_m$.

$$L(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x) + \lambda_1 \cdot h_1(x) + \ldots + \lambda_m \cdot h_m(x)$$

2. Partielles Ableiten der Lagrange-Funktion und Nullsetzen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &\stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &\stackrel{!}{=} 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial L}{\partial x_n} &\stackrel{!}{=} 0, \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= h_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad \text{hier stehen immer die Restriktionen} \\
&\vdots \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_m} &= h_m(x_1, \ldots, x_n) = 0
\end{aligned}$$

3. Lösen des im Allgemeinen nichtlinearen Gleichungssystems in den $m+n$ Variablen

4. Berechnung der Funktionswerte für alle Lösungspunkte
   Sieger ist der mit dem kleinsten Wert beim Minimieren und der mit dem größten beim Maximieren

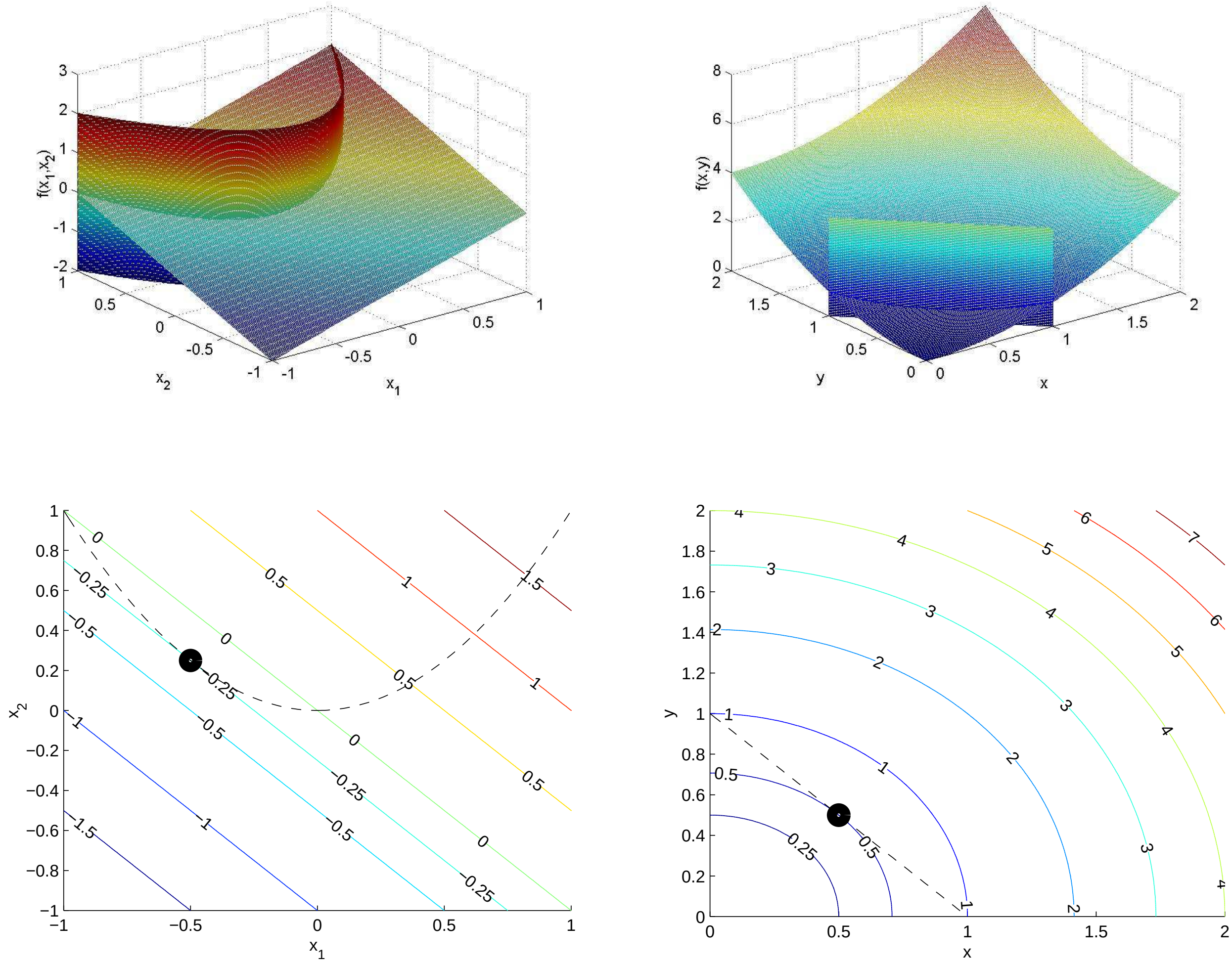
5. Antwortsatz

Kompakt, in der Schreibweise der Matrixableitung mit dem Lagrange-Vektor λ kann das Vorgehen in folgendem Satz zusammengefasst werden.

Satz 3.6 (Methode von Lagrange) :
Ist x_{opt} eine Minimalpunkt unter den Restriktionen $h(x) = 0_m$, dann existiert ein Vektor $\lambda_{\text{opt}} \in \mathbb{R}^m$ (Lagrange-Vektor, Lagrange-Multiplizierer), der die Gleichung

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_{\text{opt}}} + \frac{\partial h^T}{\partial x} \cdot \lambda_{\text{opt}} &= 0_n \\
h(x) &= 0_m
\end{aligned}$$

erfüllt.
Für Ungleichungen gibt es einen ähnlichen, wenngleich komplizierteren Satz (Kuhn-Tucker-Bedingung).



Grafische Darstellung der zwei folgenden Beispiele

Beispiel 3.20 (mit kompakter Form)

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \text{Min} \qquad\qquad f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2$$

$$h(x) = x_1^2 - x_2 = 0 \text{ (eindim. Abbildung)} \qquad\qquad f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$f\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial h}{\partial x} = \begin{pmatrix}2x_1\\-1\end{pmatrix}$$

Lagrange:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial h^T}{\partial x} \cdot \lambda_{\text{opt}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \lambda_{\text{opt}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
x_1^2 - x_2 &= 0 \\
\Rightarrow \text{ untere Gleichung (2) folgt } \lambda_{\text{opt}} &= 1 \\
\Rightarrow \text{ in (1) } x_{1_{\text{opt}}} &= -\frac{1}{2} \\
\Rightarrow \text{ in (3) } x_{2_{\text{opt}}} &= \frac{1}{4} \\
Q_{\min} = x_{1_{\text{opt}}} + x_{2_{\text{opt}}} &= -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

(mit ausführlicher Form)

Beispiel 3.21

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= x^2 + y^2 \text{ (Paraboloid)} \to \text{Min} \\
h(x,y) &= x + y - 1 = 0 \\
L(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda h(x,y) \quad \text{(Lagrange-Funktion)} \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x + \lambda \cdot 1 = 0 && (1) \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2y + \lambda \cdot 1 = 0 && (2) \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= h(x,y) \Rightarrow x + y - 1 = 0 && (3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1) - (2) &\Rightarrow 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y \\
\text{in (3)} \quad & 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2} \\
f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Übung 3.5 Lösen Sie das folgende Minimierungsproblem

$$
Q(\theta) = -\theta_1 - \theta_2 \overset{!}{=} \text{Min}, \ \text{wobei } \theta_1^2 - \theta_2 \leq 0,\ \theta_1^2 + \theta_2^2 - 1 \leq 0
$$

Zeichnen Sie hierzu den Parameterraum auf und tragen Sie die Restriktionen ein. Skizzieren Sie die Höhenlinien, das heißt Linien gleicher Höhe, also mit $Q(\theta) = c$, wobei c variiert wird. Zeichnen Sie die Gradienten für einige Punkte ein. Führen Sie Fallunterscheidungen bezüglich der Ränder des zulässigen Bereichs durch und lösen die entsprechenden Minimierungsaufgaben mit Gleichungsrestriktionen.

3.12 LS-Problem

Beispiel 3.22
Optimierungsaufgabe: Es liegen Messwerte einer Versuchsreihe vor, für die eine Nährerungsgerade ermittelt werden soll.
Die Messwerte lauten wie folgt: (0|0.8) (1|2.2) (2|3.0) und (3|3.9).
Ansatz: $a + bx = y$
Gesucht: a, b für Regressionsgerade

$$1 \cdot a + x_i \cdot b = y_i$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 2.2 \\ 3.0 \\ 3.9 \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.8 \\ 2.2 \\ 3.0 \\ 3.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe:
Gesucht sind a, b so, dass $\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2$ minimal wird.
Abkürzung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 2.2 \\ 3.0 \\ 3.9 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} Q &= \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2 = \epsilon^T \epsilon \\ &= (Ax - y)^T (Ax - y) \\ &= x^T A^T A x - 2y^T A x + y^T y \\ &= \mathrm{sp}\,(x^T A^T A x) - 2\mathrm{sp}\,(y^T A x) + \mathrm{sp}\,(y^T y) \end{aligned}$$

Lösung der Optimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\
&\Rightarrow \frac{\partial\, \mathrm{sp}\,(x^T A^T A x) - 2\mathrm{sp}\,(y^T A x) + \mathrm{sp}\,(y^T y)}{\partial x} \\
&\Rightarrow (A^T A + (A^T A)^T) x - 2(y^T A)^T + 0 = 0 \\
&\Rightarrow 2A^T A x - 2A^T y = 0 \\
&\Rightarrow A^T A x = A^T y \\
&\Rightarrow \boxed{\; x = (A^T A)^{-1} A^T y \;} \text{ Least-Squares-Lösungsformel}
\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 2.2 \\ 3.0 \\ 3.9 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 \\ 2.2 \\ 3.0 \\ 3.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.9 \\ 19.9 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9.9 \\ 19.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.96 \\ 1.01 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0.96 \\ 1.01 \end{pmatrix}$$

Die Lösung der Näherungsgerade lautet $y(x) = 1.01x + 0.96$

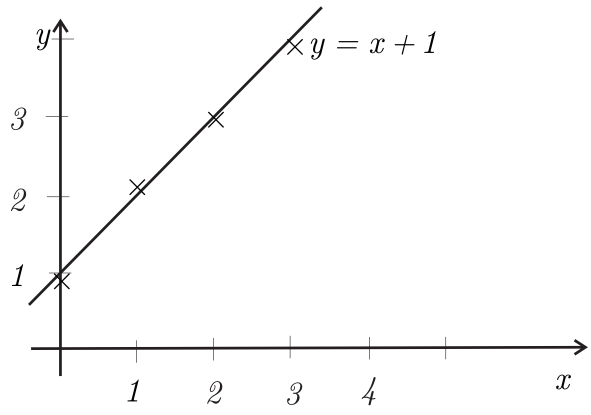


Abbildung 6: Näherungsgerade

4 Approximation von Funktionen

Definition 4.1 (Approximation) Ist $\mathcal{G}$ eine parametrische Familie von Abbildungen und $f \notin \mathcal{G}$ eine durch endlich viele Punkte (Datenapproximation) oder vollständig gegebene[2] (Abbildungsapproximation) Abbildung, dann heißt das Bestimmen eines $g \in \mathcal{G}$, das in einem bestimmten Sinne möglichst wenig von f abweicht, Approximation. g heißt Beste-Approximation von f in $\mathcal{G}$.
Die spezielle Form der Datenapproximation mit dem Ziel $g(x_i) = y_i$ für alle x_i, bei der $\mathcal{G}$ eine Teilmenge der expliziten oder impliziten Funktionen ist, heißt Interpolation. Eine Datenapproximation mit dem Ziel $\sum_{i=0}^{N} h(\mathrm{dist}(y_i, g(x_i))) \stackrel{!}{=} \text{Min}$ mit einer Bewertungsfunktion h und einer Abstandsfunktion (Metrik, Halbmetrik) dist heißt Ausgleich.
Je nach benutzter Abbildung werden die Abbildungsapproximationen in Funktionsapproximation ($f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), Matrixapproximation ($f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$) oder Systemapproximation ($f : L_2 \to L_2$) unterteilt.

Im Fall eines bekannten f kann eine Abbildungsapproximation über die so genannten Abtastfunktionale

$$g(x_i) = y_i = f(x_i) = \langle f(x), \delta(x - x_i) \rangle = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_i)\mathrm{d}x}_{\text{formale Schreibweise}};\ i = 0, \ldots, N \tag{6}$$

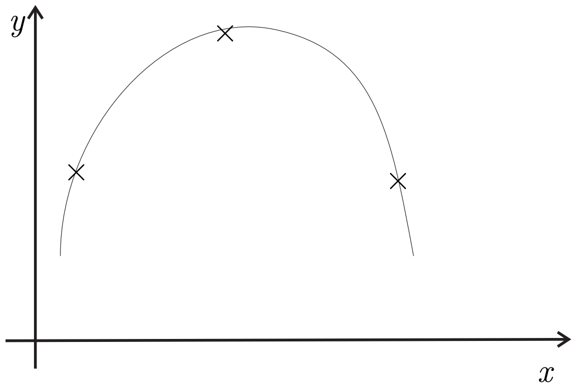
in eine Datenapproximation für die $N + 1$ Punkte überführt werden. Alle Methoden der

[2]Eine Abbildung heißt vollständig gegeben, wenn ein geschlossener Ausdruck existiert oder ein Algorithmus verfügbar ist, mit dem sich für jeden Wert (Vektor, Wertefolge, Funktion) das zugehörige Abbild berechen lässt.

Datenapproximation stehen dann zur Verfügung. Aus diesem Grund werden derartige Abbildungsapproximationen, die ausschließlich endlich viele Punkte zur Approximation nutzen, oft der Datenapproximation zugeordnet, selbst wenn f vollständig gegeben ist. Ob das erreichte Approximationsverhalten nach solch starker Reduktion der Information befriedigt, hängt vom Anwendungsfall ab. Zumindest bleibt der Vorteil einer im Allgemeinen einfacheren Behandlung von Datenapproximationsproblemen. Außerdem kann durch Modifikation der Stützwerte, f ist ja bekannt, eine Verbesserung des Approximationsverhaltens angestrebt werden.

Approximation

- Datenapproximation
  - Interpolation
    - stückweise definierte Funktionen
      - lokale Approximation (B-Splines, Akima-Splines)
      - globale Approximation (natürliche kubische Splines)
    - einheitlich definierte Funktionen
      - nur globale Approximation (Polynome, Potenzfunktionen, gebrochen rationale Funktionen)
  - Ausgleich
    - frei
      - LS
      - TLS
    - regularisiert
      - Glätter (Splines, Kernglätter)
      - Tikhonov-Regularisierung
      - Robuste TLS
    - restringiert
      - LSE
      - CTLS
- Abbildungsapproximation
  - Funktionsapproximation
    - Taylor-Approximation
    - Verallgemeinerte Interpolation
      - Hermite-Interpolation
      - Schönbergsche Spline-Interp.
    - L-Norm-Approximation
      - orthogonale Systeme
      - diverse Ansatzfunktionen
  - Matrixapproximation
    - normweise
    - komponentenweise
  - Systemapproximation
    - linear ⇨ linear
      - Padé-Approximation
      - Ordnungsreduktion
      - trajektorienbasierte Appr.
    - nichtlinear ⇨ linear
      - Tangentenlinearisierung
      - Carleman-Linearisierung
      - harmonische Linearisierung
      - stückweise Linearisierung
    - nichtlinear ⇨ nichtlinear
      - Bifurkationsnormalform
      - Poincaré-Linearisierung
      - Taylorentwicklung
    - Diskretisierung
      - Zeitdiskretisierung (Transf. mit Haltegliedern, Poincaré-Abbildung)
      - Ortsdiskretisierung (FEM, Kollokation)



4.1 Interpolation

(Vergleiche mit Seite 65 im *"Repetitorium Der Höheren Mathematik"*)

Globale Interpolation

Interpolationspolynome
Polynom durch Stützstellen.
durch Lagrange- oder Newton-Interpolation

Definition 4.2 (Lagrange-Interpolation) Seien $n+1$ verschiedene Stützstellen $x_0, x_1, ..., x_n$ einer Funktion mit $f(x_k) = y_k$ gegeben, dann gibt es genau ein Polynom n-ten Grades mit $p(x_k) = y_k; k = 0, 1, 2, ...n$.

Ansatz:

$$L(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + ... + y_n L_n(x)$$
$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)}$$

Es gilt

$$L_k(x_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} \quad (\delta = \text{ Kronecker-Symbol })$$

Beispiel 4.1
Gegeben seien die Punkte $(-1, 2)$, $(0, 3)$, $(1, 6)$.
Gesucht ist ein Polynom durch diese Punkte.

3 Punkte $\Rightarrow$ Parabel $\Rightarrow n = 2$

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = (x^2-x)/2 \\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = -x^2+1 \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = (x^2+x)/2 \\
L(x) &= y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) \\
&= 2 \cdot \frac{x^2-x}{2} + 3 \cdot (-x^2+1) + 6 \cdot \frac{x^2+x}{2} \\
&= x^2 + 2x + 3
\end{aligned}$$

Definition 4.3 (Newton-Interpolation)
$N(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + ... + a_n(x-x_0)...(x-x_{n-1})$
Bestimmung der a_i aus der Forderung $N(x_k) = y_k$

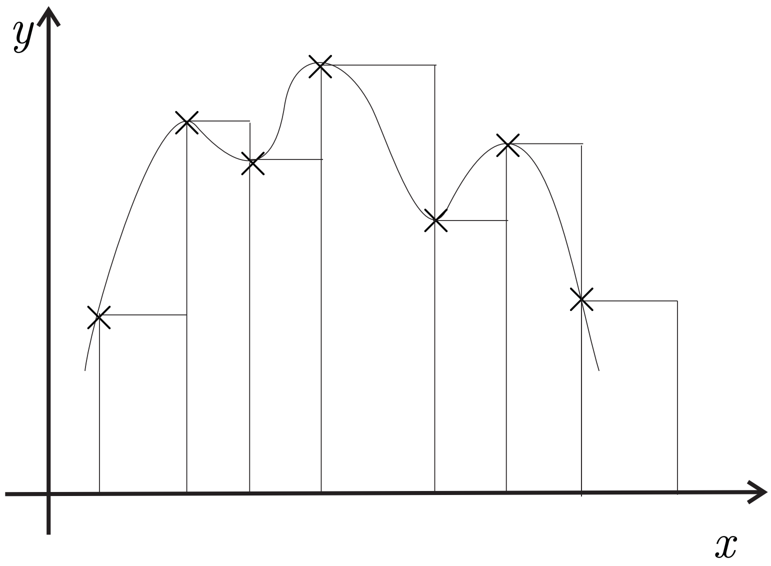
$$\begin{aligned}
N(x_0) &= y_0 = a_0 \\
N(x_1) &= y_1 = a_0 + a_1(x_1-x_0) \Rightarrow a_1 \\
&\vdots \\
N(x_n) &= y_n = a_0 + a_1(x_n-x_0) + ... + a_n(x_n-x_0)...(x_n-x_{n-1}) \Rightarrow a_n
\end{aligned}$$

Beispiel 4.2
Gegeben seien die Punkte $(-1,2)$, $(0,3)$, $(1,6)$.
Gesucht ist ein Polynom durch diese Punkte.
3 Punkte $\Rightarrow$ Parabel $\Rightarrow n = 2$

$$\begin{aligned}
N(x_0) &= y_0 = 2 = a_0 \\
N(x_1) &= y_1 = 3 = a_0 + a_1 \cdot (x_1-x_0) = 2 + a_1 \cdot 1 \Rightarrow a_1 = 1 \\
N(x_2) &= y_2 = 6 = a_0 + a_1 \cdot (x_2-x_0) + a_2 \cdot (x_2-x_0)(x_2-x_1) = 2 + 2 + a_2 \cdot 2 \Rightarrow a_2 = 1 \\
N(x) &= 2 + (x+1) + (x+1)(x) = 2 + x + 1 + x^2 + x \\
&= x^2 + 2x + 3
\end{aligned}$$

Lokale Interpolation
Treppenapproximation (stückweise Polynomapproximation)
Stückweise Polynomapproximation. In diesem Fall 0-ten Grades.

Kubische Splines
Eigenschaft: 1. und 2. Ableitung ist stetig! $\Rightarrow$ Die Kurve ist dadurch besser geglättet.



Polynomapproximation
Das Ziel der Tschebyschew-Polynome ist die

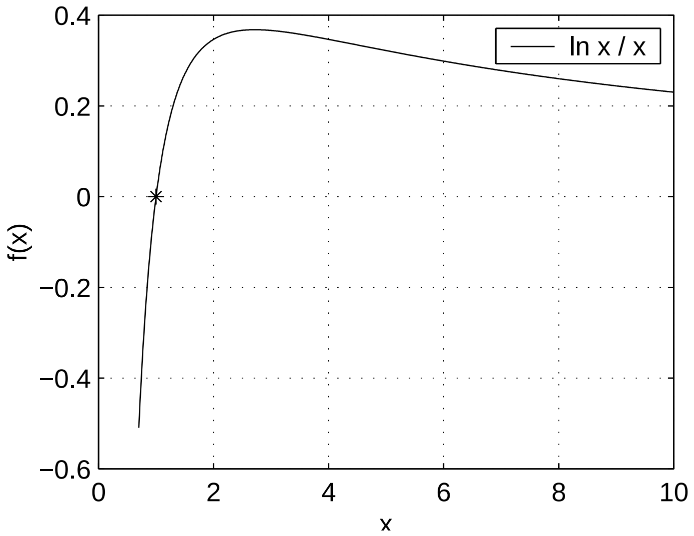
- beste Approximation bezüglich der Tschebyschew-Norm
- betragsmaximale Abweichung auf Intervall minimieren.

4.2 Taylorsche Formel

(Vergleiche mit Seite 354 im *"Repetitorium Der Höheren Mathematik"*)

Motivation:

- Approximation einer Funktion durch ein Polynom n-ten Grades, das in der Nähe des Punktes x_0 möglichst gut mit f übereinstimmt.
- Berechnung von Funktionswerten über Polynome



Definition 4.4 (Taylorsche Formel, Taylorsches Polynom, Taylorsche Reihe)

$$f(x) = T_n(x - x_0) + R_n(x - x_0) \qquad \text{mit} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x - x_0)}{||x - x_0||_2^n} = 0 \tag{7a}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{\text{Lagrange−Restglied}}, \qquad \xi \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x \tag{7b}$$

heißt Taylorsche Formel, T_n das Taylorsche Polynom n-ter Ordnung und R_n das Restglied n-ter Ordnung. Für $n \to \infty$ heißt $T_\infty(x - x_0)$ Taylorsche Reihe. Diese Reihe ist eine Potenzreihe.

Anmerkung:

- Die Darstellung (7b) erfordert, dass f $(n+1)$-mal in $U(x_0)$ differenzierbar ist (hinreichende Bedingung für die Existenz eines Taylor-Polynoms).

- Beachte: $f^{(k)}(x_0)$ meint die k-te Ableitung an der Stelle x_0.

$$f^{(k)}(x_0) = \begin{cases} f^{(k)}(x)|_{x=x_0} & \text{bei stetig differenzierbaren Funktionen} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f^{(k)}(x) & \text{bei hebbaren Definitionslücken} \\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f^{(k-1)}(x_0 + h) - f^{(k-1)}(x_0)}{h} & \text{sonstige Fktn, falls Grenzwert existiert} \end{cases}$$

  Betrachte $f'(0)$ für $f(x) = (\sin x)/x$ (Fall 2) und für $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ (Fall 3).

  Für $x_0 = 0$ spricht man auch von der MacLaurinschen Reihe.

- **analytische Funktion:** Funktion, die lokal durch eine konvergente Potenzreihe gegeben ist, d. h. Potenz-Reihe mit einem Konvergenzradius $r > 0$.

Beispiele sind $x^2, \sin x, \mathrm{e}^x$ und ein Gegenbeispiel ist die in $x_0 = 0$ glatte (d. h. unendlich oft differenzierbare) Funktion, die aber in x_0 nicht analytisch ist

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

mit den Taylor-Polynomen $T_k(x-0) \equiv 0$ für alle k und $r = 0$.

- Die Taylor-Reihen vieler Funktionen sind überall konvergent, $r = \infty$. Einige nicht. So konvergiert die Taylor-Reihe von $\tan x$ auf $|x| < \pi/2$ und die von $\ln(x+1)$ auf $-1 < x \leq 1$. Schlimmer noch ist die Funktion

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+x^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

die auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist, aber ihre Taylorreihe in $x_0 = 0$

$$T(x) = 1 - x^2 + 2!\,x^4 - 3!\,x^6 + 4!\,x^8 - + \dots$$

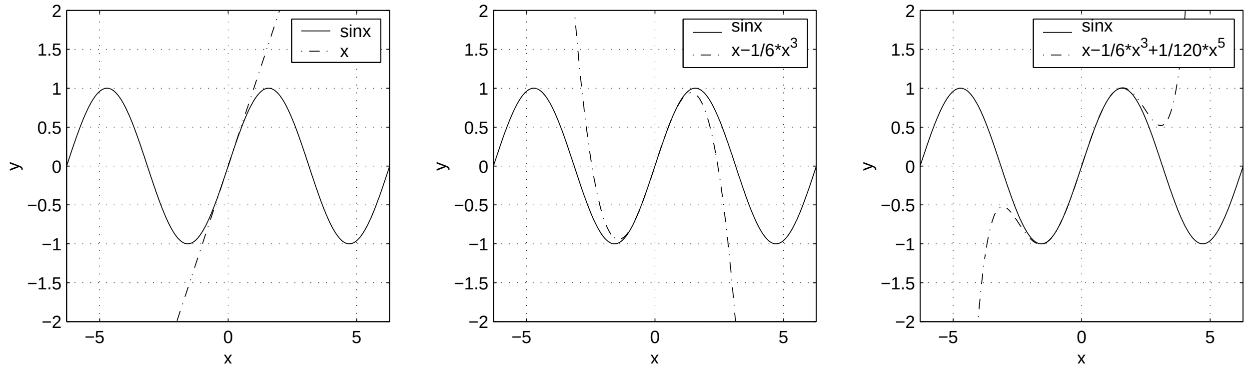
nur für $x = 0$ konvergiert (Konvergenzradius ist 0).
Nicht jede Taylor-Reihe taugt zur Approximation; sie muss zudem konvergent sein!
Manche konvergieren langsam, besonders nahe am Konvergenzrand. Dann: andere Entwicklungsstelle oder anderes Approximationsverfahren.

- Mit dem Restglied kann der Fehler der Approximation abgeschätzt werden.

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)|$$

Berechne für alle $x \in U(x_0)$ eine Fehlerschranke
Berechne alle x, die bei entsprechender Ordnung eine vorgegeben Fehlerschranke einhalten.

Beispiel 4.3 $f(x) = \sin x$ soll durch ein Näherungspolynom dritter Ordnung approximiert



werden ($x_0 = 0$) und der Fehler für $|x| \leq 5$ geschätzt werden.

$$f^{(0)}(x_0) = \sin x_0 = 0$$
$$f^{(1)}(x_0) = \cos x_0 = 1$$
$$f^{(2)}(x_0) = -\sin x_0 = 0$$
$$f^{(3)}(x_0) = -\cos x_0 = -1$$
$$\begin{aligned} f(x) &\approx \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x-x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \\ &\approx \frac{0}{1}(x-0)^0 + \frac{1}{1}(x-0) + \frac{0}{2!}(x-x_0)^2 - \frac{1}{3!}(x-0)^3 \\ \sin x &\approx x - \frac{1}{6}x^3 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= x \\ T_3(x) &= x - \frac{x^3}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f(x) - T_2(x)| &= |R_2(x)| \\ |\sin x - x| &= |R_2(x)| = |\frac{-\cos\xi}{3!}x^3| \leq \frac{|x^3|}{6} \\ |x| &\leq 5 = 5\frac{\pi}{180} = 0.0872 < 0.0873 \\ |\sin x - x| &< \frac{1}{6}(0.0873)^3 < 0.00012 \end{aligned}$$

Für Winkel zwischen ± 5 ist die Näherungsformel $\sin x \approx x$ auf mindestens 3 Stellen genau!
Taschenrechner: sin(0.1) (im RAD-Modus!) $= 0.099833416$
$x = 0.1000000$
$T_3(x) = 0.099833333333$

Beispiel 4.4
Bestimmen Sie das Taylorpolynom für $f(x) = e^x$ in $x_0 = 1$ und $x_0 = 0$.

$$f^{(0)}(0) = 1, \quad f^{(1)}(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = 1, \quad f^{(3)}(0) = 1$$
$$f^{(0)}(1) = e, \quad f^{(1)}(1) = e, \quad f^{(2)}(1) = e, \quad f^{(3)}(1) = e$$
$$f(x) \approx e\Big((1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3\Big) = e(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^3) \qquad \text{für } x_0 = 1$$
$$f(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} \qquad \text{für } x_0 = 0$$

Übung 4.1 Berechne die Taylor-Reihen für $\arctan x$ und $\sin x$.

4.3 Fourier-Reihe

(Vergleiche mit Seite 360 im *"Repetitorium Der Höheren Mathematik"*)

Definition 4.5 (L-periodische Funktion) Eine Funktion mit $f(x+L) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, heißt L-periodische Funktion, L heißt Periode:

Anmerkung:
Mit der Substitution $x := t \cdot \dfrac{L}{2\pi}$ kann man jede L-periodische in eine 2π-periodische Funktion

$$\hat{f}(t) := f(t\frac{L}{2\pi})$$

umformen.

Definition 4.6 Die Funktion $\varphi(x) \equiv 1$ und $\varphi_{s_n} = \sin nx, \varphi_{c_n} = \cos nx$; $n \in \mathbb{N}$ bilden ein trigonometrisches Funktionssystem.

Definition 4.7 (Fourier-Reihe) Eine Reihe der Gestalt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

heißt trigonometrische Reihe. Erfüllen die a_k, b_k die Bezeichnungen

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx \qquad k = 1, 2, \ldots$$

so heißt die Reihe Fourier-Reihe. Die Koeffizienten a_k, b_k heißen Fourier-Koeffizienten.
Anmerkung:
Die Partialsummme s_n der Fourier-Reihe approximiert die 2π-periodische Funktion im quadratischen Mittel, anders ausgedrückt

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))\right]^2 dx \to \text{Min}$$

Die Fourier-Reihe konvergiert im quadratischen Mittel gegen$f(x)$

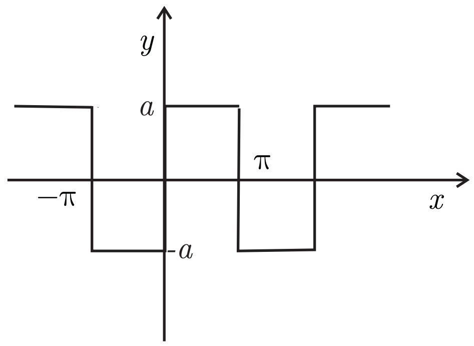
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - s_n(x))^2 dx = 0$$

Erfüllt die Funktion $f(x)$ die Dirichlet-Bedingung (hinreichende Bedingung)

- f ist stückweise stetig (endl. viele reelle Nullstellen, hebbare Unstetigkeiten)
- $f(x) = \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$
- f von beschränkter Variation $(\sup\limits_{n,x_k} \sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \infty)$ endlich viele Extrema im endlichen Intervall

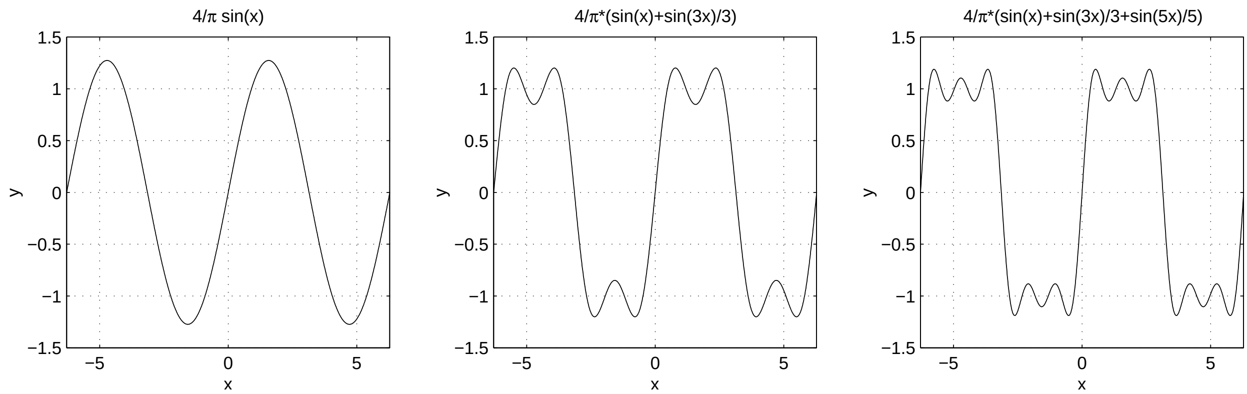
dann konvergiert die Fourier-Reihe punktweise gegen $f(x)$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ für alle x.

Beispiel 4.5 Rechteckfunktion $f(x) = \begin{cases} a & \text{für } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{für } x = 0, x = \pi \\ -a & \text{für } -\pi < x < 0 \end{cases}$



$$b_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} a \sin(kx) dx = \frac{2a}{\pi} \left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ \frac{4a}{k\pi} & \text{wenn } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4a}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$



Übung 4.2 Weisen Sie nach, dass die n-te Partialsumme der Fourier-Reihe eine 2π-periodische Funktion f im quadratischen Mittel approximiert.

5 Integral

(Vergleiche mit Kapitel 13 im *"Repetitorium Der Höheren Mathematik"*)

5.1 Unbestimmtes Integral

Definition 5.1 Es sei f eine auf einem offenem Intervall $\mathcal{I}$ definierte Funktion. Dann heißt jede differenzierbare Funktion F mit

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x) \qquad \forall x \in \mathcal{I}$$

Stammfunktion von f auf $\mathcal{I}$. Hat eine Funktion eine Stammfunktion, so hat sie derer unendlich viele, da alle $F(x) + c$ mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktionen sind. Die Menge aller Stammfunktionen heißt unbestimmtes Integral. Das unbestimmte Integral ist somit eine einparametrische Familie von Funktionen. Ist f auf $[a, b]$ integrierbar, aber nicht überall stetig, dann existiert zwar die Integralfunktion

$$I_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

die jedoch an den Stellen, an denen f unstetig ist, nicht differenzierbar ist, weshalb $I_a(x)$ dann keine Stammfunktion ist.

Rechenregeln:

- lineare Operationen: $\int \gamma \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \gamma \int f(x)\,\mathrm{d}x; \quad \gamma \neq 0$
  $\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)dx$
- für Grundfunktion siehe Formelsammlung
- Regel für die partielle Integration

  $$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

  folgt durch Integration der Produktregel

  $$(uv)' = u'v + v'u$$

Beispiel 5.1

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin x\, dx &= \int \sin x \cdot x^2 \,\mathrm{d}x = (-\cos x)x^2 - \int -(\cos x)\cdot 2x\, dx \\
&= -x^2\cos x + 2\int \cos x \cdot x\, dx \\
&= -x^2\cos x + 2\Big(\sin x \cdot x - \int \sin x \cdot 1\, dx\Big) \\
&= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c
\end{aligned}$$

Folgende Tricks sind hilfreich:

1. Einführen einer künstlichen 1: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$, klappt bei $\int \ln x\,\mathrm{d}x$. Wähle $v' = 1$.
2. Ausnutzen des trigonometrischen Pythagoras
3. Abräumen von Polynomen: $\int v'(x)p(x)\,\mathrm{d}x = v(x)p(x) - \int v(x)p'(x)\,\mathrm{d}x$.
   Die Polynomordnung des rechten Integrals ist um eins niedriger als die des linken. Solange wiederholen, bis das Polynom weg ist. Funktioniert gut, wenn $v'(x) = \mathrm{e}^x$ oder $v'(x) = \sin x$
4. Nachfolgendes Beispiel zeigt einen Trick für Fortgeschrittene.

Beispiel 5.2 Ein bereits bekanntes Integral wird so partiell zu integrieren, dass das gewünschte Integral entsteht. Um $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$ zu bestimmen, wird das folgende Integral partiell integriet:

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \int 1\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x && (8)\\
&= x\cdot\frac{1}{1+x^2} + \int x\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x && (9)\\
&= \frac{x}{1+x^2} + \int\left(\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{2}{(1+x^2)^2}\right)\mathrm{d}x - \int\frac{2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x && (10)\\
&= \frac{x}{1+x^2} + 2\int\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x - 2\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x && (11)\\
&= \frac{x}{1+x^2} + 2\arctan x - 2\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}. && (12)
\end{aligned}$$

Durch Umstellen folgt

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \arctan x\right).$$

- Substitutionsregel: Voraussetzung φ-bijektiv auf Integrationsintervall

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \qquad\qquad x = \varphi(t)$$
$$\int f(\varphi(t)) \cdot \frac{dx}{dt}dt \qquad\qquad dx = \varphi'(t)dt$$

- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|$
  $\int f'(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f^2(x)$
  $\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t|_{t=g(x)}$

Übung 5.1 Die an einem Widerstand durch Wechselspannung mit der Amplitude A umgesetzte Leistung soll der einer Gleichspannung der Amplitude B gleich sein. Wie lautet das Amplitudenverhältnis? Wie bezeichnet man die Amplitude B der Gleichspannung, bei der dieselbe Leistung umgesetzt wird, in der Elektrotechnik?

5.2 Partialbruchzerlegung

Eine Möglichkeit, das unbestimmte Integral gebrochen rationaler Funktionen zu berechnen, ist die Rückführung auf Partialbrüche, für die die Stammfunktionen bekannt sind.

Jede gebrochen rationale Funktion $r(x)$ lässt sich als Summe von einem Polynom $p(x)$ und einer echt gebrochen rationalen Funktion $q(x)$ darstellen. Die Partialbruchzerlegung ist ein Verfahren, um echt gebrochen rationale Funktionen in eine Summe aus Brüchen der Form $\frac{\beta_i}{(x-x_i)^m}$ zu überführen (mit Konstanten β_i und x_i, wobei x_i die Polstellen der Funktion (=Nullstellen des Nenners) sind, die β_i sind zu bestimmen). Jeder der Summanden wird Partialbruch oder Teilbruch genannt. Es gilt:

$$r(x) = p(x) + q(x) = p(x) + \sum_{i=1}^{d} \sum_{m=1}^{v(i)} \frac{\beta_{i,m}}{(x-x_i)^m}$$

$$d : \text{Anzahl disjunkter Nennernullstellen des Nenners}$$
$$v(i) : \text{Vielfachheit der } i\text{-ten Nennernullstelle.}$$

Um den Umgang mit komplexen Nullstellen und komplexen Koeffizienten β_i zu vermeiden, wird folgendermaßen vorgegangen (Beachte: Die Koeffizientenbezeichner lauten nun a_i, b_i):

1. Polynomdivision, wenn die rationale Funktion nicht echt gebrochen ist.

2. Nenner in ein Produkt zerlegen

3. Ansatz der Partialbrüche mit unbestimmten Koeffizienten. Es gilt:

   - Jede reelle, einfache Nullstelle des Nenners erhält einen Summanden $\frac{a_{i,1}}{x-x_i}$.
   - Jede reelle, m-fache Nullstelle des Nenners erhält m Summanden $\frac{a_{i,1}}{x-x_i}, \frac{a_{i,2}}{(x-x_i)^2} \cdots, \frac{a_{i,m}}{(x-x_i)^m}$.
   - Jede komplexe, einfache Nullstelle des Nenners erhält einen Summanden $\frac{a_{i,1}x+b_{i,1}}{x^2+n_1x+n_2}$.
   - Jede komplexe, m-fache Nullstelle des Nenners erhält m Summanden $\frac{a_{i,1}x+b_{i,1}}{(x^2+n_1x+n_2)}, \frac{a_{i,2}x+b_{i,2}}{(x^2+n_1x+n_2)^2} \cdots \frac{a_{i,m}x+b_{i,m}}{(x^2+n_1x+n_2)^m}$.

4. Koeffizientenbestimmung

Vorteil: Die Integrale der entstehenden Partialbrüche sind bekannt, es gilt:

- $\int \frac{a}{x+b} \,\mathrm{d}x = a \ln|x+b|$
- $\int \frac{a}{(x+b)^m} \,\mathrm{d}x = \frac{a}{1-m} \frac{1}{(x+b)^{m-1}}$
- $\int \frac{ax}{x^2+b} \,\mathrm{d}x = \frac{a}{2} \ln|x^2+b|$
- $\int \frac{ax}{(x^2+b)^m} \,\mathrm{d}x = \frac{a}{2(1-m)} \frac{1}{(x^2+b)^{m-1}}$
- $\int \frac{a}{x^2+b} \,\mathrm{d}x = \frac{a}{\sqrt{b}} \arctan \frac{x}{\sqrt{b}}$
- $\int \frac{a}{(x^2+b)^m} \,\mathrm{d}x$ und weitere Integrale aus Tabellen.

Beispiel 5.3
Wie lautet die Partialbruchzerlegung von $\frac{x^5+5x^4+9x^3+9x^2+8x+54}{x^5+5x^4+9x^3+9x^2+8x+4}$?
Hinweis: $x^5+5x^4+9x^3+9x^2+8x+4$ enthält die Faktoren $(x+1)$ und (x^2+1)

1. Polynomdivision:

$$\frac{x^5+5x^4+9x^3+9x^2+8x+54}{x^5+5x^4+9x^3+9x^2+8x+4} = 1 + \frac{50}{x^5+5x^4+9x^3+9x^2+8x+4}$$

   Also Partialbruchzerlegung von $\frac{50}{x^5+5x^4+9x^3+9x^2+8x+4}$ durchführen.

2. Nenner in Produkt zerlegen (z.B. durch Polynomdivision)

$$\frac{50}{x^5+5x^4+9x^3+9x^2+8x+4} = \frac{50}{(x+1)(x+2)^2(x^2+1)}$$

3. Ansatz der Partialbrüche:
$$\frac{50}{(x+1)(x+2)^2(x^2+1)} = \frac{a_{1,1}}{x+1} + \frac{a_{2,1}}{x+2} + \frac{a_{2,2}}{(x+2)^2} + \frac{a_{3,1}x + b_{3,1}}{x^2+1}$$

4. Bestimmung der Koeffizienten

   - Durchmultiplizieren mit dem Hauptnenner:
$$\begin{aligned} 50 =& a_{1,1}(x+2)^2(x^2+1) + a_{2,1}(x+1)(x+2)(x^2+1) + a_{2,2}(x+1)(x^2+1) \\ &+ (a_{3,1}x + b_{3,1})(x+1)(x+2)^2 \end{aligned}$$

   - Einsetzen der Nullstellen des Nenners (oder beliebiger anderer Werte):
$$\begin{aligned} x := -1 \quad &\Leftrightarrow \quad 50 = 2a_{1,1} \\ x := -2 \quad &\Leftrightarrow \quad 50 = -5a_{2,2} \\ x := 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 50 = 4a_{1,1} + 2a_{2,1} + a_{2,2} + 4b_{3,1} \\ x := 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 50 = 18a_{1,1} + 12a_{2,1} + 4a_{2,2} + 18a_{3,1} + 18b_{3,1} \\ x := 2 \quad &\Leftrightarrow \quad 50 = 80a_{1,1} + 60a_{2,1} + 15a_{2,2} + 96a_{3,1} + 48b_{3,1} \end{aligned}$$

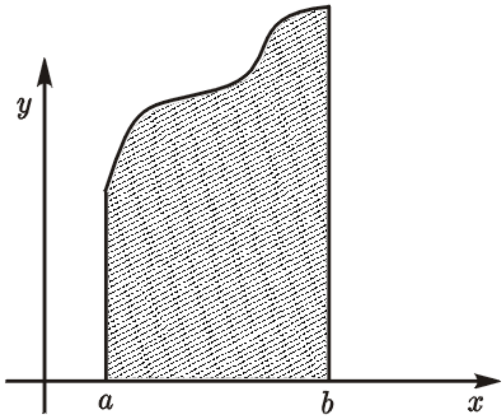
   - Lösen des Gleichungssystems:
$$a_{1,1} = 25, \quad a_{2,1} = -18, \quad a_{2,2} = -10, \quad a_{3,1} = -7, \quad b_{3,1} = -1$$

Ergebnis:
$$\frac{x^5+5x^4+9x^3+9x^2+8x+54}{x^5+5x^4+9x^3+9x^2+8x+4} = 1 + \frac{25}{x+1} - \frac{18}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2} - \frac{7x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}$$

Übung 5.2 Wie lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{(x+1)(x+2)^3(x^2+1)(x^2+2)^3}$?

Übung 5.3 Lösen Sie
$$\int x\cos x \,\mathrm{d}x, \qquad \int |x|\,dx, \qquad \int \left(\cos 2x + 3x^4 + 4^x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x, \qquad \int x\,\exp(-x^2)\,dx$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}, \qquad \int \frac{x^3-3x+4}{x^2+2x-15}\,\mathrm{d}x,$$

5.3 Bestimmte Integrale



Definition 5.2 Die schraffierte Punktmenge heißt Fläche von f auf $[a, b]$. Das dieser Fläche zugeordnete Maß (Inhalt) heißt bestimmtes Integral.

Anmerkung: Das bestimmte Integral ist eine Zahl.

5.3.1 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Es sei f auf $[a, b]$ stetig, so ist

$$F_a(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dx} \int\limits_a^x f(t)dt = f(x).$$

Kurzum $F_a(x)$ ist eine Stammfunktion. Aussage: Differentiation und Integration sind Umkehrfunktionen

Satz 5.1 (Hauptsatz der Integralrechnung) Ist f auf $[a, b]$ stetig und F eine beliebige Stammfunktion von f auf $[a, b]$, dann gilt

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Aussage: Bestimmte Integrale lassen sich über Stammfunktionen berechnen.

Satz 5.2 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung)

- f, g auf $[a, b]$ integrierbar
- $f(x) \geq 0$ oder $f(x) \leq 0$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(\xi)\int\limits_a^b f(x)dx \qquad \min_{[a,b]} g(x) \leq g(\xi) \leq \max_{[a,b]} g(x)$$

- speziell für $f(x) = 1$ gilt $\int\limits_a^b g(x)dx = g(\xi)(b-a)$ erster MWS

5.4 Das Uneigentliche Integral

Definition 5.3 Uneigentliche Integrale sind solche, bei denen das Integrationsgebiet unendlich groß ist oder deren Integrand singuläre Punkte enthält.
Für stetige Funktionen definiert man:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \lim_{a\to-\infty, b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Definition 5.4 Hat

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

einen endlichen Wert, so heißt dieser Cauchy'scher Hauptwert.

Schreibweise $CH\int$

Beispiel 5.4

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty} \frac{x^4}{4}\bigg|_a^b \qquad \text{Grenzwert existiert nicht}$$

$$\begin{aligned} CH\int_{-\infty}^{\infty} x^3\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} x^3\mathrm{d}x \\ &= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{a^4}{4}-\frac{(-a)^4}{4}\right) = 0 \end{aligned}$$

Wenn $f(x)$ eine Singularität in den Integrationsgrenzen hat, definiert man

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\epsilon\to+0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Liegt die Singularität x_0 im Integrationsintervall $[a,b]$, definiert man

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\epsilon_1\to+0}\int_a^{x_0-\epsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\epsilon_2\to+0}\int_{x_0+\epsilon_2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Wenn

$$CH\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_a^{x_0-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\epsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

für gleiche ϵ ein endlicher Wert ist, heißt dieser Cauchy'scher Hauptwert.

Beispiel 5.5

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{1} = 0-0=0 \qquad \text{falscher Weg!!! (zufällig richtiges Ergebnis)}$$

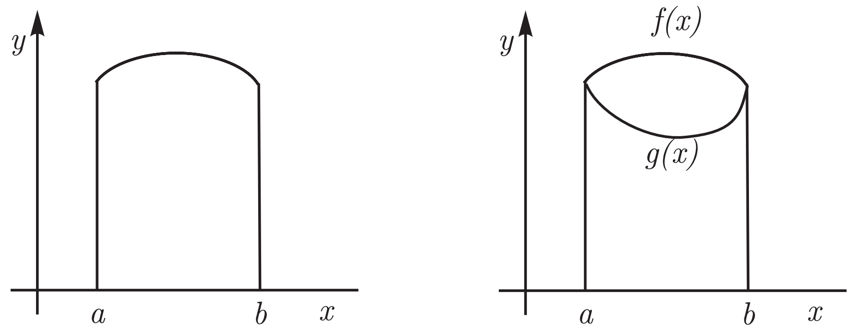
$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x} + \int_{0}^{1}\frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{0} + \ln|x|\Big|_{0}^{1} \qquad \text{Singularität nicht beachtet}$$

$$\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-1}^{0-\epsilon}\frac{dx}{x}+\lim_{\epsilon\to+0}\int_{0+\epsilon}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon\to+0}(\ln|-\epsilon|-\ln|-1|)+\lim_{\epsilon\to+0}(\ln 1-\ln\epsilon) = -\infty-(-\infty) \qquad \text{keine Lösung}$$

Cauchyscher Hauptwert (richtiger Weg)

$$\lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{0-\epsilon}\frac{dx}{x}+\int_{0+\epsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right) = \lim_{\epsilon\to+0}(\ln|-\varepsilon|-\ln|-1|+\ln 1-\ln|\varepsilon|) = 0$$

5.4.1 Bereichsintegrale



$F_1 = \int\limits_a^b \lvert f(x)\rvert \,\mathrm{d}x$:	Für Flächeninhalte werden Beträge verwendet, damit sich positive und negative Funktionswerte nicht auslöschen können.
$F_2 = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$:	Die Fläche zwischen zwei Funktionen entspricht dem Integral ihrer Differenz.

F_2 lässt sich aber auch als $F_2 = \int\limits_a^b \int\limits_{g(x)}^{f(x)} 1 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ darstellen.

Allgemeiner:

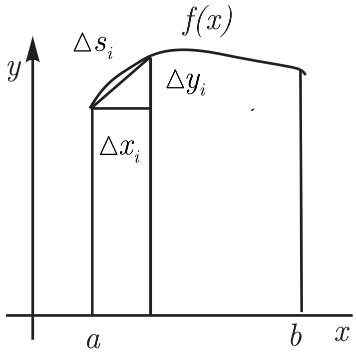
$$F = \int\limits_a^b \int\limits_{g(x)}^{f(x)} h(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

mit $h(x)$: Funktion über den Normalbereich

$h(x,y) = 1$	2-dimensionale Flächendichte
$h(x,y) = \frac{x}{F_B}$	x-Komponente der Schwerpunkte wobei F_B Flächeninhalt (Normalbereich)
$h(x,y) = \frac{y}{F_B}$	y-Komponente der Schwerpunkte,....

5.4.2 Kurvenintegral 1. Art

Gesucht ist die Länge eines Kurvenstückes, s. auch Papula S.488 für alternative Herleitung:



$$\begin{aligned}
\triangle s_i &= \sqrt{(\triangle x_i)^2 + (\triangle y_i)^2} \quad \text{Pythagoras} \\
\triangle s_i &= \sqrt{(\triangle x_i)^2 + (f'(\xi_i) \cdot \triangle x_i)^2} \\
&= \triangle x_i \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}
\end{aligned}$$

Länge des Sehnenpolynoms: $\tilde{s} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \cdot \triangle x_i$

Länge des Kurvenstückes: $s = \lim\limits_{\triangle x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \cdot \triangle x_i$

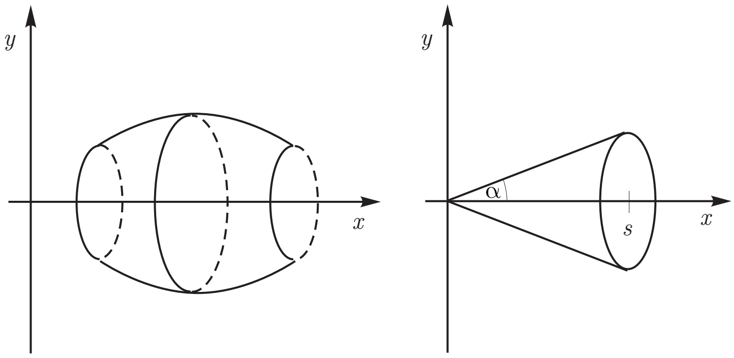
Satz 5.3 Für die Bogenlänge des Kurvenstückes $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ gilt

$$S = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Beispiel 5.6
Berechne Bogenlänge von $y = \frac{1}{3}x^2 \quad (0 \leq x \leq 6)$

$$S = \int_0^6 \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^2}\, dx \qquad z = \frac{2}{3}x \qquad z_{oben} = 4, z_{unten} = 0 \qquad \mathrm{d}z = \frac{2}{3}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
S &= \int\limits_0^4 \frac{3}{2}\sqrt{1 + z^2}\,\mathrm{d}z \qquad\qquad \mathrm{d}x = \frac{3}{2}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\left(z\sqrt{z^2+1} + \operatorname{ar\,sinh} z\right)\right]\Bigg|_0^4 \\
&= \frac{3}{4}\left(z\sqrt{z^2+1} + \ln(z + \sqrt{1+z^2})\right]\Bigg|_0^4 \\
&\approx 13.94
\end{aligned}$$



5.5 Rotationskörper

Volumen bei Rotationen um die x-Achse:

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

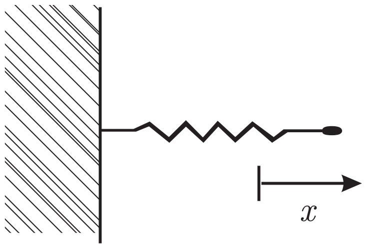
Mantelfläche:

$$M_x = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

6 Differenzialgleichung

(Vergleiche mit Kapitel 16 im *"Repetitorium Der Höheren Mathematik"*)

Problem: Viele Prozesse in der Natur, Technik, Gesellschaft werden durch Gleichungen beschrieben, in denen neben der abhängigen Variablen auch deren zeitliche Ableitung vorkommen.



Satz 6.1 Für die Anfangswertaufgaben

$$y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}); y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

existiert eine Lösung, wenn f bezüglich seiner Argumente im Definitionsbereich stetig ist und dort stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial y}, \ldots \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ hat. Die Lösung ist dann zudem eindeutig.

Anmerkung: Wie man zu der Lösung kommt, sagt der Satz nicht. Sind die Bedingungen nicht erfüllt, können dennoch Lösungen existieren.

Beispiel 6.1

$$y' = \frac{1}{2y}, y(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = \pm\sqrt{x}$$

Definition 6.1 Liegen für die Lösung einer gewöhnlichen Differenzialgleichung Bedingungen für eine einzige Stelle vor, so spricht man von einer Anfangswertaufgabe. Sind hingegen für mehrere Stellen Bedingungen einzuhalten, so nennt man dies Randwertaufgabe.

Beispiel 6.2

$y'' = f(x);$	$y'(3) = 1, y(3) = 2$
	Anfangswertaufgabe
$y'' = f(x);$	$y(3) = 2, y(4) = 1$
	Randwertaufgabe

6.1 Typen von Differenzialgleichungen

- homogene und inhomogene Differenzialgleichungen

$$y' + \alpha y = f(x) \qquad \text{inhomogene Dgl.}$$
$$y' + 2y = 0 \qquad \text{homogene Dgl.}$$

- gewöhnliche Differenzialgleichung in expliziter Gestalt

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right)$$

- gewöhnliche Differenzialgleichung in impliziter Gestalt

$$F\left(t, y(t), \ldots, y^{(n)}(t)\right) = 0$$

- Differenzendifferenzialgleichung (keine gewöhnliche Dgl., da neben t auch Differenzen bezüglich t als Argument auftreten)

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t-1) + x(t-2) = 0$$

- partielle Differenzialgleichungen

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

6.2 Trennung der Variablen (zu Differenzialgleichung)

Differenzialgleichungen vom Typ

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \qquad h(y) \neq 0$$

Dieser Typ kann mit Hilfe der Methode Trennung der Variablen gelöst werden:

$$\begin{aligned} y'(x) = \frac{dy}{dx} &= g(x) \cdot h(y) \\ \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} &= g(x)dx \qquad \text{für } h(y) \neq 0 \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} &= \int g(x)dx + C \end{aligned}$$

Die erhaltene Lösung ist durch Einsetzen in die Differenzialgleichung zu überprüfen!

Beispiel 6.3

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= x \cdot (y+1) \\
y'(x) = \frac{dy}{dx} &= x \cdot (y+1) \\
\Rightarrow \frac{dy}{(y+1)} &= x \cdot dx \qquad \text{wenn } y \neq -1 \\
\Rightarrow \int \frac{dy}{(y+1)} &= \int x \cdot dx + C \\
\Rightarrow \ln|y+1| &= \frac{1}{2}x^2 + C \qquad |e^x \\
|y+1| &= e^{x^2/2+C} = e^{x^2/2}\underbrace{e^C}_{K} \\
|y+1| &= Ke^{x^2/2} \\
(y+1) &= Ke^{x^2/2} \qquad \text{für } y(x) > -1 \qquad \Rightarrow y(x) = Ke^{x^2/2} - 1 \\
-(y+1) &= Ke^{x^2/2} \qquad \text{für } y(x) < -1 \qquad \Rightarrow y(x) = -Ke^{x^2/2} - 1
\end{aligned}
$$

Für den oben ausgeschlossenen Fall $y = -1$ gilt:

$$y(x) = -1 \qquad \text{sobald der Wert } y = -1 \text{ angenommen wird}$$

Beispiel 6.4

$$T\dot{x}(t) + x(t) = 0 \qquad\qquad x(0) = x_0$$

$$
\begin{aligned}
T\frac{dx}{dt} + x &= 0 \\
T\frac{dx}{dt} &= -x \\
\frac{dx}{x} &= -\frac{1}{T}dt \\
\int \frac{dx}{x} &= -\frac{1}{T}\int dt \\
\ln|x| &= -\frac{t}{T} + C \\
x(t) = e^{-t/T+C} &= e^{-t/T} \cdot \underbrace{e^C}_{\beta} = \beta e^{-t/T}
\end{aligned}
$$

6.3 Lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

Satz 6.2 Jede k-fache Lösung der charakteristischen Gleichung liefert k Lösungen der Differenzialgleichung.

Lösungen der char. Gleichung		Basislösungen der Dgl.
λ	1-fach reell	$\mathrm{e}^{\lambda x}$
λ	k-fach reell	$\mathrm{e}^{\lambda x}, x\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$
$\lambda = a \pm \mathrm{i}b$	1-fach komplex	$\mathrm{e}^{ax}\cos(bx), \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$
$\lambda = a \pm \mathrm{i}b$	k-fach komplex	$\mathrm{e}^{ax}\cos(bx), \mathrm{e}^{ax}\sin(bx), x\mathrm{e}^{ax}\cos(bx), x\mathrm{e}^{ax}\sin(bx), \ldots$ $x^{k-1}\mathrm{e}^{ax}\cos(bx), x^{k-1}\mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$

Lösungsweg

- charakteristische Gleichung aufstellen, d. h. $y^{(k)}(x)$ wird formal ersetzt durch λ^k

  $$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

  z. B. $y^{(5)}(x) - 2y^{(4)}(x) + 8y^{(2)}(x) - 12y'(x) + 8y(x) = 0$

- Nullstellen der charakteristischen Gleichung berechnen
  $\lambda^5 - 2\lambda^4 + 8\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (\lambda + 2)(\lambda - (\mathrm{i} + 1))^2(\lambda - (1 - \mathrm{i}))^2$,
  d. h. $\lambda_1 = -2$; 1-fach, $\lambda_{2/3} = 1 \pm 1\mathrm{i}$; 2-fach

- Zuordnen der n Basislösungen $y_i(x)$ zu den Nullstellen
  $\mathrm{e}^{-2x}, \mathrm{e}^x\cos x, \mathrm{e}^x\sin x, x\,\mathrm{e}^x\cos x, x\,\mathrm{e}^x\sin x$

- allgemeine Lösung bestimmen

  $$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$$

  für das Beispiel: $y(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + (c_2 + c_3x)\mathrm{e}^x\cos x + (c_4 + c_5x)\mathrm{e}^x\sin x$

- fixieren der $c_1, \ldots, c_n$ durch Einsetzen der Anfangs- bzw. Randwerte

7 Lösungen zu den Übungen

Lösung 1.1

$$\{x_n\} = \{\tfrac{1}{n\pi}\} \qquad \lim_{x_n\to 0} \sin\tfrac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin(n\pi) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\{x_n\} = \tfrac{2}{(4n+1)\pi} \qquad \lim_{x_n\to 0} \sin\tfrac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin(\tfrac{(4n+1)\pi}{2}) = \lim_{n\to\infty} \sin(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1$$

Lösung 1.2

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2n+1}{n+3}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}} = \sqrt{\frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \text{ da } -\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x} \qquad \text{Einschließungskriterium}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2}\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0\cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}}_{=1} = 1$$

$$0 < \sin x < x < \tan x \qquad \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0} 1 > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0}\cos x = 1 \qquad \text{Einschließungskriterium}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} = \text{ existiert nicht}$$

$$\lim_{x\to +0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to +0}\frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to -0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to -0}\frac{x}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+2}{x-1} = \frac{\lim_{x\to 0} 3x+2}{\lim_{x\to 0} x-1} = -2$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2}(x-2) = -4$$

Lösung 1.3 Substitution: $q = \frac{x}{3} + 5$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}+5\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-(x/3+5)} = -\frac{3}{x+12}$$

Achtung: Gilt nur für $-18 < x < -12$. Keine Konvergenz außerhalb, was bei Einsetzen in ganz rechte Formel aber nicht sichtbar ist.

Lösung 1.4

$\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\frac{k^k}{k!}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)k^k}{(k+1)^{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{k^k}{(k+1)^k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = 1/\mathrm{e} < 1$

$\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{k}{2^k}} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{2^k}} = \frac{1}{2} < 1$

$\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{(\frac{x}{k})^k} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{x}{k} = 0 < 1$

Lösung 1.5

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 x^k$$

$$r = \lim_{k\to\infty}\frac{k^4}{(k+1)^4} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{k})^4} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^k = \lim_{k\to 1}\left(\frac{x}{k}\right)^k$$

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k^k}}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}} = \infty \text{ überall konvergent}$$

Lösung 2.1

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \quad \lim\limits_{x\to+0}\operatorname{sgn} x = 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \quad \lim\limits_{x\to-0}\operatorname{sgn} x = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \text{Sprungstelle} \\ \Rightarrow \text{stückweise stetig} \end{array}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}, \quad x \neq -1 \quad \lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to-1} x - 1 = -2 \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \text{hebbare Unstetigkeit} \\ \Rightarrow \text{stückweise stetig} \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \text{Unstetigkeit} \\ \Rightarrow \text{stückweise stetig} \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & x < 0 \\ \sin\frac{1}{x} & x > 0 \end{cases} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = -\infty \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \text{Polstelle} \\ \Rightarrow \text{nicht stückweise stetig} \end{array}$$

Lösung 2.2

$x_0 = 1$ linksseitig stetig, (halbseitig stetig nach unten)
$x_1 = 4$ unstetig (weder stetig noch halbstetig)
$x_2 = 5$ rechtsseitig stetig (halbstetig nach oben)

Lösung 2.3

$$(\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\sinh x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

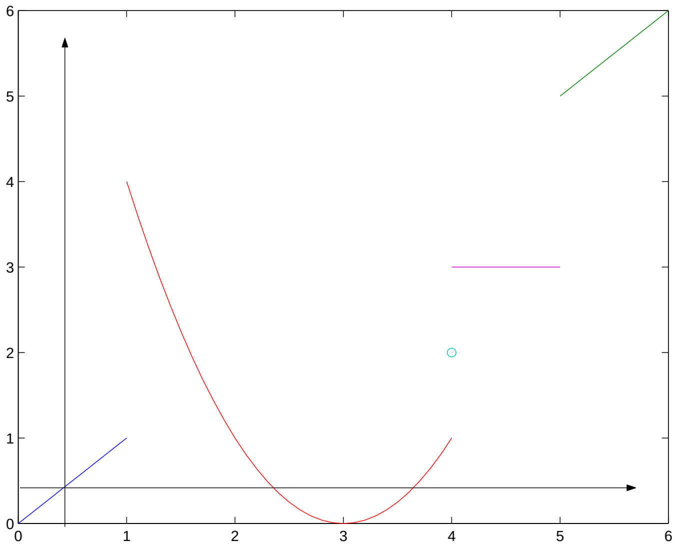


Abbildung 7: Lösung 2.2

Lösung 2.4

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{2}{x^5}-3^x x^3\right)' &= (x^{-\frac{3}{2}}+2x^{-5}-3^x x^3)' \\
&= -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}-10x^{-6}-3^x(\ln 3\cdot x^3+3x^2) \\
&= \frac{-3}{2\sqrt{x^5}}-\frac{10}{x^6}-x^2 3^x(x\ln 3+3) \\
(\ln|\ln x|)' &= \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} \qquad x>0, x\neq 1 \\
\left(\arctan\frac{1}{x}\right)' &= \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\cdot -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{1+x^2} \\
\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right)' &= -\frac{1}{3}(x^2+1)^{-\frac{4}{3}}\cdot 2x = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^4}} \\
(x^x)' \Rightarrow y = x^x &\to \ln y = x\ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \\
&x^x(\ln x+1) \\
\left(\frac{\sqrt{(x+1)(x-3)}}{(x^3+2)\sqrt[3]{x-2}}\right)' &= \frac{\sqrt{(x+1)(x-3)}}{(x^3+2)\sqrt[3]{x-2}}\cdot\left(\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-3)}-\frac{3x^2}{x^3+2}-\frac{1}{3(x-2)}\right)
\end{aligned}$$

Lösung 2.5

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{\partial(\arctan\frac{x}{y})}{\partial x} = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{1}{y} \qquad \frac{\partial\arctan\frac{x}{y}}{\partial y} = -\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \cos(y+e^{xy}) - xye^{xy}\sin(y+e^{xy}) & -x(1+xe^{xy})\sin(y+e^{xy}) \\ y\arctan\frac{x}{y} + \frac{xy^2}{x^2+y^2} & x\arctan\frac{x}{y} - \frac{x^2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Lösung 2.6 $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ z = z$

$$\det\frac{\partial}{\partial(r,\phi,z)}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r$$

Lösung 2.7

$$\nabla_x ||Ax||_2^2 = \nabla_x x^T A^T A x = \nabla_x (x_1, x_2, \ldots, x_n) A^T A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} x^T A^T A x &= \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) A^T A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= e_1^T A^T A x + x^T A^T A e_1 = e_1^T A^T A x + e_1^T A^T A x = 2e_1^T A^T A x \\
\frac{\partial}{\partial x_i} x^T A^T A x &= 2\begin{pmatrix} e_1^T A^T A x \\ \vdots \\ e_n^T A^T A x \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{pmatrix} A^T A x = 2 I_n A^T A x \\
&= 2A^T A x
\end{aligned}$$

Vgl.:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(ax)^2}{\partial x} &= a \cdot 2ax \\
\frac{\partial ||Ax||_2^2}{\partial x} &= 2A^T A x = \underbrace{A^T}_{\text{innere Ableitung}} \cdot \underbrace{2Ax}_{\text{äußere Ableitung}}
\end{aligned}$$

Lösung 2.8

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}||Ax-b||_2^2 &\overset{!}{=} \text{Min} \\
\frac{1}{2}(Ax-b)^T(Ax-b) &\overset{!}{=} \text{Min} \\
\frac{1}{2}\left(x^TA^TAx - \underbrace{b^TAx - x^TA^Tb}_{2x} + b^Tb\right) &\overset{!}{=} \text{Min} \\
Q = \frac{1}{2}x^TA^TAx - x^TA^Tb + \frac{1}{2}b^Tb &\overset{!}{=} \text{Min} \\
\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{sp}\,(x^TA^TAx)}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{sp}\,(x^TA^Tb)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}b^Tb &= 0 \\
A^TAx - A^Tb &= 0 \\
x_{opt} &= (A^TA)^{-1}A^Tb
\end{aligned}$$

Lösung 3.1

$$\begin{aligned}
y &= \frac{u}{v} \\
\ln y &= \ln u - \ln v \\
\frac{y'}{y} &= \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} \\
y' &= \frac{u'}{u}\cdot y - \frac{v'}{v}\cdot y = \frac{u'}{u}\cdot\frac{u}{v} - \frac{v'}{v}\cdot\frac{u}{v} \\
&= \frac{u'v - v'u}{v^2}
\end{aligned}$$

Lösung 3.2

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} x^2 \mathrm{e}^{1/x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x^2}}{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^{1/x^2}\cdot(2/x^3)}{(-2/x^3)} = \lim_{x\to 0} e^{1/x^2} = +\infty \\
\lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{4(\pi-2x)}\right) = -\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x)'}{(\pi-2x)'} \\
&= -\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{-2} = -\frac{1}{8} \\
\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^x &= \lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+a/x)}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{((1+a/x))'}{(1/x)'} \\
&= \frac{1\,(-1/x^2)\,a}{(1+a/x)\,(-1/x^2)} = a \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(1+a/x)^x} = e^a \\
\lim_{x\to+0}\sin x\cdot\lim_{x\to+0}\ln\frac{1}{x} &= -\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'} = \lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\frac{1}{\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{\cos x} = 0 \\
\Rightarrow \lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} &= \lim_{x\to+0} e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}} = e^0 = 1 \\
\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x &= \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{3} \\
\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a - b^x\ln b}{1} = \ln\frac{a}{b}
\end{aligned}
$$

Lösung 3.3

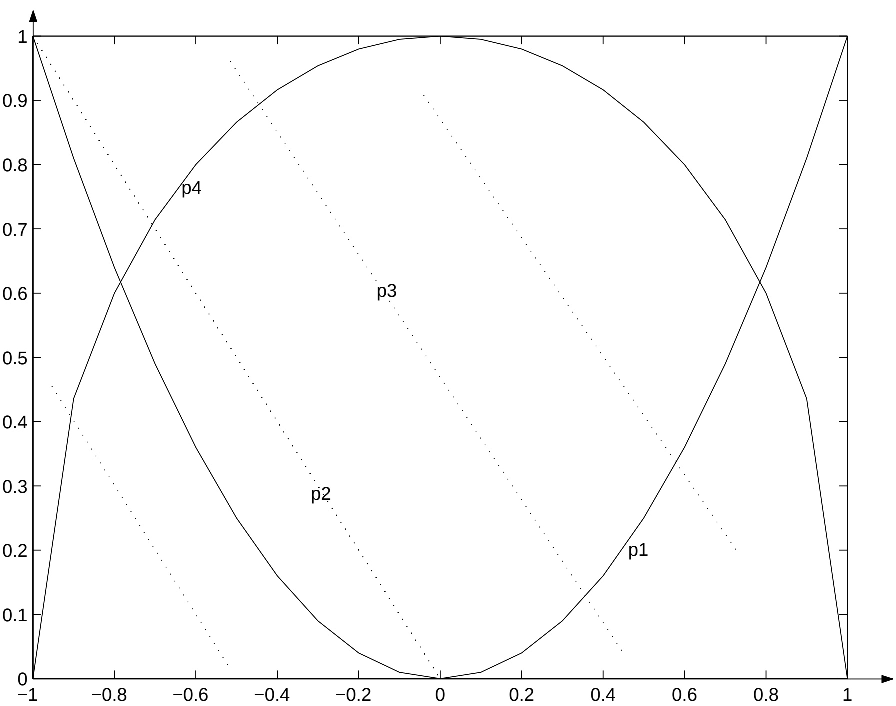
$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= x^2\sin(2y) - y\cos(x-1) + 2y - \frac{\pi}{2} = 0 \\
F_x(x,y) &= 2x\sin(2y) + y\sin(x-1) \\
F_y(x,y) &= 2x^2\cos(2y) - \cos(x-1) + 2 \\
f'(x) &= -\frac{2x\sin(2y)+y\sin(x-1)}{2x^2\cos(2y)-\cos(x-1)+2} \\
x = 1 &\Rightarrow F(1,y) = \sin(2y) - y + 2y - \frac{\pi}{2} = 0 \\
&\to y = \frac{\pi}{2} \\
f'(1) &= -\frac{2\sin\pi - \frac{\pi}{2}\sin 0}{2\cos\pi - \cos 0 + 2} = 0
\end{aligned}
$$

Lösung 3.4

$$c_k = \frac{c_w m_w T_w}{m_k T_k} = \frac{4.1868 \text{ kJ} \cdot 330 \text{ g} \cdot 6.2 \text{ K}}{\text{kg K} \cdot 300 \text{ g} \cdot 76.4 \text{ K}} = 0.374 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

$$\begin{aligned}
\text{Annahme: } \triangle m_k &= 0.5 \text{ g} \\
\triangle m_w &= 0.5 \text{ g} \\
\triangle c_w &= 0 \text{ fehlerfrei} \\
\triangle T_w &= 0.1 \text{ K} \qquad \text{2*Temperaturmessung mit 0.05K Fehler} \\
\triangle T_k &= 0.1 \text{ K} \qquad \text{2*Temperaturmessung mit 0.05K Fehler} \\
\delta &= \frac{\triangle c_k}{c_k} = \left(\left| \frac{\triangle m_k}{m_k} \right| + \left| \frac{\triangle m_w}{m_w} \right| + \left| \frac{\triangle T_k}{T_k} \right| + \left| \frac{\triangle T_w}{T_w} \right| \right) \approx \left| \frac{\triangle T_w}{T_w} \right| \approx 1.7\% \\
dc_k &= \frac{m_w T_w}{m_k T_k} dc_w + \frac{c_w T_w}{m_k T_k} dm_w + \frac{c_w m_w}{m_k T_k} dT_w - \frac{c_w m_w T_w}{m_k^2 T_k} dm_k - \frac{c_w m_w T_w}{m_k T_k^2} dT_k \\
\frac{dc_k}{c_k} &= \frac{dc_w}{c_w} + \frac{dm_w}{m_w} + \frac{dT_w}{T_w} - \frac{dm_k}{m_k} - \frac{dT_k}{T_k} \\
\left| \frac{\triangle c_k}{c_k} \right| &= \left| \frac{\triangle m_k}{m_k} \right| + \left| \frac{\triangle m_w}{m_w} \right| + \left| \frac{\triangle T_k}{T_k} \right| + \left| \frac{\triangle T_w}{T_w} \right| \\
\delta &= \left| \frac{\triangle c_k}{c_k} \right| \Rightarrow \triangle c_k = \delta \cdot c_k \\
&= 0.374 \cdot 0.017 = 0.0064
\end{aligned}$$

Lösung 3.5



1.Fall keine Restriktion

$-\theta_1 - \theta_2 \overset{!}{=} \text{Min}$

kein Extremum, denn $\nabla_\theta Q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ nie Null werden

2.Fall zwei Restriktionen

$$\theta_1^2 = \theta_2 \qquad \theta_1^2 + \theta_2^2 - 1 = 0$$
$$\theta_2^2 + \theta_2 - 1 = 0$$
$$\theta_2 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$$
$$\theta_{21} = 0.62 \Rightarrow \theta_{12} = \pm 0.79 \qquad \text{Schnittpunkte}$$
$$\theta_{22} = -1.62 \Rightarrow \text{Scheinlösung.}$$

3.Fall eine Restriktion

a)

$$\theta_1^2 - \theta_2 = 0$$
$$-\theta_1 - \theta_1^2 \overset{!}{=} \text{Min}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial \theta_1} = -2\theta_1 - 1 = 0$$
$$\theta_1 = -0.5 \qquad \theta_2 = 0.25 \qquad \text{Maximierer mit Maximum } Q = \tfrac{1}{4}$$

b)

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 - 1 = 0$$
$$-\theta_1 - \theta_2 + \lambda(\theta_1^2 + \theta_2^2 - 1) \overset{!}{=} \text{Min}$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -1 + 2\lambda\theta_1 = 0 \\ -1 + 2\lambda\theta_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 2\lambda(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ \theta_1 = \theta_2 \end{matrix}$$
$$\theta_1^2 + \theta_2^2 - 1 = 0$$
$$2\theta_1^2 = 1$$
$$\theta_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \left(+\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{Minimierer mit } Q = -\sqrt{2}$$
$$Q\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Lösung 4.1

$$\begin{aligned}
\sin' x &= \cos x\\
\sin'' x &= \cos' x = -\sin x\\
\sin''' x &= -\sin x = -\cos x\\
\sin^{(n)}(x) &= \begin{cases} \sin x & n = 4k\\ \cos x & n = 4k+1\\ -\sin x & n = 4k+2\\ -\cos x & n = 4k+3 \end{cases}\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x)}{n!} x^n = 0 + \frac{x}{1} + 0\frac{x^3}{6} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{für } |x| < \infty\\
\arctan' x &= \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k \qquad |x| < 1\\
\arctan'' x &= \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = (-1) \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2}\\
\arctan''' x &= 1 \cdot 2(1+x^2)^{-2} - 4x(1+x^2)^{-3}\\
\arctan &= \int \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}
\end{aligned}$$

Lösung 4.2

$$
\begin{aligned}
Q =& \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-s_n(x))^2\,\mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f^2(x)-2f(x)s_n(x)+s_n^2(x)\right]\,\mathrm{d}x \overset{!}{=} \underset{a_k,b_k}{\mathrm{Min}} \\
s_n(x) =& \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{k}\left[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right] \\
\frac{\partial Q}{\partial a_0} =& -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\pi} f(x)\frac{\partial s_n(x)}{\partial a_0}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial s_n^2(x)}{\partial a_0}\,\mathrm{d}x \\
=& -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right]\right\}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x \overset{!}{=} 0 \\
& \Rightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}x = \pi a_0 \\
& \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(0x)\,\mathrm{d}x \\
\frac{\partial Q}{\partial a_k} =& -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\partial s_n(x)}{\partial a_k}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\text{ß}}^{\pi}\frac{\partial s_n^2(x)}{\partial a_k}\,\mathrm{d}x \\
=& -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
& + \underbrace{\frac{a_0}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{i=1}^{k}\left[a_i\cos(ix)+b_i\sin(ix)\right]\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x}_{=a_k} \overset{!}{=} 0
\end{aligned}
$$

Nutze:

$$
\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(ix)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & k\neq i \\ \pi & k=i \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(ix)\cos(ix)\,\mathrm{d}x = 0
$$

$$
\Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x
$$

Lösung 5.1

$$P(t) = \frac{u^2(t)}{R} \qquad \text{elektrische Leistung}$$

$$E = \int_0^{T_p} P(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{elektrische Energie über ein } T_p\text{-Intervall}$$

$$u(t) = \begin{cases} B & \text{Gleichspannung} \\ A\sin\omega t & \text{Wechselspannung} \quad \omega = 2\pi f \end{cases}$$

$$T_p = 1/f \qquad \text{Periodendauer}$$

$$E_{We} = \frac{1}{R}\int_0^{1/f} A^2 \sin^2\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{R}\int_0^{1/f} A^2(1-\cos^2\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{R}A^2 t\Big|_0^{1/f} - \frac{1}{R}\int_0^{1/f} A^2\cos^2\omega t\,\mathrm{d}t \qquad \text{partielle Integration}$$

$$= \frac{1}{R}\frac{A^2}{f} - \underbrace{\frac{1}{R}A^2\frac{\sin\omega t}{\omega}\cos\omega t\Big|_0^{1/f}}_{=0} - \frac{1}{R}\int A^2\frac{\sin\omega t}{\omega}\cdot\omega\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

bringe rechten Term auf die linke Seite

$$\frac{2}{R}\int_0^{1/f} A^2\sin^2\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{R}\frac{A^2}{f} \qquad \Rightarrow \qquad 2E_{We} = \frac{1}{R}\frac{A^2}{f} \qquad \Rightarrow \qquad E_{We} = \frac{A^2}{2R\cdot f}$$

$$E_{Gl} = \int_0^{1/f}\frac{B^2}{R}\,\mathrm{d}t = \frac{B^2}{R\cdot f}$$

Gleichsetzen $E_{Gl} = E_{We}$:

$$\frac{B^2}{R\cdot f} = \frac{A^2}{2R\cdot f} \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{1}{\sqrt{2}}A$$

Lösung 5.2

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^3(x^2+1)(x^2+2)^3} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \frac{a_3}{(x+2)^2} + \frac{a_4}{(x+2)^3} + \frac{a_5x+a_6}{x^2+1} + \frac{a_7x+a_8}{x^2+2} + \frac{a_9x+a_{10}}{(x^2+2)^2} + \frac{a_{11}x+a_{12}}{(x^2+2)^3}$$

(Anstatt $a_{i,j}$ und $b_{i,j}$ können - wenn gewünscht, s.o. - auch einfach indizierte Konstanten verwendet werden.)

Lösung 5.3

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c$$

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases} = \frac{1}{2}x|x|$$

$$\int \left(\cos 2x + 3x^4 + 4^x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{3}{5}x^5 + \frac{4^x}{\ln 4} + \ln|x| + c$$

$$\begin{aligned} \int x\ \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{xe^{-t}}{2x}\,\mathrm{d}t \quad (\text{mit } x^2 = t, 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t) \\ &= -\frac{1}{2}e^{-t}\bigg|_{t=x^2} + c = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\,\mathrm{d}t}{2x\sqrt{1-t}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = -\sqrt{1-t}\big|_{t=r} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = 2 \cdot \frac{\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} \\ \cos x &= \frac{1 - \tan 2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} \\ t &= \tan\frac{x}{2} \to x = 2\arctan t \qquad -\pi < x < \pi \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \ln \|1-t| + \ln|1+t| + c = \ln|1-t^2| + c \\ &= \ln\left|1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c \int \frac{x^3 - 3x + 4}{x^2 + 2x - 15}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(x - 2 + \frac{16x - 26}{x^2 + 2x - 15}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \left(x - 2 + \frac{11}{4(x-3)} + \frac{53}{4(x+5)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{11}{4}\ln|x-3| + \frac{53}{4}\ln|x+5 < +c \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrrl} (\ x^3 & & -3x & +4\ ) : & (x^2 + 2x - 15) = x - 2 + \dfrac{16x - 26}{x^2 + 2x - 15} \\ -(\ \underline{x^3} & \underline{+2x^2} & \underline{-15x)} & & \\ & -2x^2 & +12x & +4 & \\ & -(\ \underline{-2x^2} & \underline{-4x} & \underline{+30}\ ) & \\ & & 16x & -26 & \end{array}$$

Partialbruchzerlegung liefert: $\frac{16x-26}{x^2+2x-15} = \frac{53/4}{x+5} + \frac{11/4}{x-3}$, also:
$\int \frac{x^3-3x+4}{x^2+2x-15}\,\mathrm{d}x = \int (x - 2 + \frac{53/4}{x+5} + \frac{11/4}{x-3})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{53}{4}\ln|x+5| + \frac{11}{4}\ln|x-3|$