Lösung Numerik 2018

Aufgabe 1

1.1

- Auswahl eines in Frage kommenden Algorithmus
- Ein- und Ausgabewerte und Variablentypen festlegen und Toleranz vom Nutzer erfragen
- Kommentare
- Definition der internen Variablen (Generische Variablen, Abbruch- und Fallvariablen)
- Eigentliches Programm
- Numerisches Testen des Programms auf Basis der analytischen Lösung
- Code-Optimierung (Herausziehen von Operationen aus Schleifen)
- Programm auf potentielle numerische Bugs untersuchen (Division durch Null, Führender Koeffizient bei Polynom wird Null, Negativer Radikant)
- Programm auf Echtzeitfähigkeit prüfen

1.2

- Runge-Kutta: Differentialgleichung
- Newton-Raphson-Verfahren: Nullstellensuche
- Newton-Verfahren: Analytische Langrange-Optimierung
- Trapez-Regel: Analytisches Integrieren

Aufgabe 2

2.1

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\| = \left\|\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\right\| = 7 * 1 = 7$$

2.2

Inverse soll vermieden werden.

$$x = AB^{-1}c$$

Gleichungssystem aufstellen, um Inverse zu ersetzen.

$$c = Bz$$

$$x = AB^{-1}Bz$$

$$x = Az$$

2.3

Nein, da die Kondition des Problems nicht abhängig ist vom Algorithmus. Die Kondition ist eine Eigenschaft des Problems.

2.4

- Existenz einer Lösung
- Eindeutigkeit dieser Lösung
- Diese Lösung hängt stetig von den Eingangsdaten ab

2.5

Entfernen von Singularitäten aus Matrizen, dh aus singulären Matrizen werden reguläre. Bei der Tikhonov-Regularisierung wird ein kleiner Fehler eingebaut, dafür existiert aber nun eine Lösung.

2.6

wtf

2.7

a) nein

b) nein

c) nein

d) ja, keine ist richtig

2.8

- Testmatrizen sind in ihrer Größe skalierbar (n-skalierbar) und Kondition veränderbar
- n-Skalierung: Test für den Speicher
- Kondition: Test für die Stabilität
- Die Lösung muss hierbei bekannt sein

Aufgabe 3

3.1

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2{,}5 & 6{,}25 & 15{,}625 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T y$$

$$\hat{y} = \hat{a}_3 x^3 + \hat{a}_2^2 + \hat{a}_1 x + \hat{a}_0$$

$$\hat{y}'(p) = 3\hat{a}_3 p^2 + 2\hat{a}_2 p + \hat{a}_1$$

$$\hat{y}''(p) = 6\hat{a}_3 p + 2\hat{a}_2$$

3.2

Vier, da vier Stützstellen benötigt werden.

3.3

Ingenieure können keine Werte aus der Zukunft zum Differenzieren verwenden (Zeitverzug).

3.4

Die Summe der Gewichtungsfaktoren der Funktionswerte muss 0 ergeben, damit z.B. beim Ableiten einer konstanten Funktion das Ergebnis 0 lautet.

$$-\frac{1}{12}+\frac{4}{12}+\frac{6}{12}-\frac{20}{12}+\frac{12}{12}=\frac{1}{12}\neq 0$$

Die Summe ist ungleich 0, daher ist die Formel nicht zum numerischen Differenzieren geeignet.

3.5

$$x_{k+1}=-x_k^2+2$$

Es muss gelten:

$$x^* = -x^* + 2$$

Nullsetzen:

$$0=-x^{*2}+2-x^*$$

$$x_1^*=-2$$

$$x_2^*=1$$

Ableitung der Fixpunktgleichung:

$$\phi'(x)=-2x$$

$$|\phi'(x_1)|=4$$

$$|\phi'(x_2)|=2$$

Beide Fixpunkte sind repulsiv.

3.6

Fixpunktsatz von Banach:

$$K=\sup_{x\in \mathrm{U}}\left\|\frac{\partial\Phi(x)}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{T}}}\right\|<1$$

Aufgabe 4

4.1

Lösungsformel: $f\ddot{u}r\ A^{n\times m}; B^{m\times p}\ gilt{:}\, n*p*(2m-1)$

4.2

Hornerschema und prüfen, ob führender Koeffizient null ist.

4.3

Operationen müssen aufgeteilt werden können und dürfen nicht voneinander abhängig sein. Beispiel: Blockdiagonalmatrizen, Jacobi- und Hessematrizen. Beispiel: Berechnung einer Hessematrix mit 3 verschiedenen Variablen.

4.4

```
handleTan(double eps, double x-Wert) {

x-Wert = x-Wert % pi;

if(abs(pi/2 – x-Wert) <= eps) {

return “condition-number too large”;

} else {

return(tan(x-Wert));
```

}

4.5

Bei der Pivotisierung wird das betragsmäßig größte Element (zB beim Gaußalgorithmus) verwendet, da beim Teilen durch große Zahlen kleinere numerische Fehler auftreten.

4.6

$$Ax = b$$

$$\left(Re(A) + i * Im(A)\right)\left(Re(x) + i * Im(x)\right) = Re(b) + i * Im(b)$$

Ausmultiplizieren und in Realteilgleichung und Imaginärteilgleichung aufteilen:

$$Re(A) * Re(x) - Im(A) * Im(x) = Re(b)$$

$$Im(A) * Re(x) + Re(A) * Im(x) = Im(b)$$

$$\begin{pmatrix} Re(A) & -Im(A) \\ Im(A) & Re(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Re(x) \\ Im(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re(b) \\ Im(b) \end{pmatrix}$$

4.7

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} = (x-1)^{-2}$$

$$f'(x) = -2(x-1)^{-3}$$

$$\kappa_{rel} = |f'(x) * \frac{x}{f(x)}|$$

$$10^5 > -\frac{2x(x+\varepsilon-1)^2}{(x+\varepsilon-1)^3} = -\frac{2(x+\varepsilon)}{x+\varepsilon-1}$$

Annäherung an x=1:

$$10^5 > -\frac{2(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon-1} = -\frac{2+2\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{2}{\varepsilon} + 2$$

$$\varepsilon > -\frac{2}{10^5 - 2}$$

$$\varepsilon > 2 * 10^{-5}$$

Aufgabe 5

5.1

$$Q(x) \overset{!}{=} Min$$

Taylorreihe:

$$\tilde{Q}(x_k) = Q(x_k) + g_k * (x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T H_k (x - x_k)$$

$$\nabla\tilde{Q}(x_k) \overset{!}{=} 0_n$$

$$\nabla\tilde{Q}(x_k) = 0 + g_k + H_k(x - x_k) = 0_p$$

$$H_k * (x - x_k) = -g_k$$

$$x - x_k = -g_k H_k^{-1}$$

$$x_{opt} = -g_k H_k^{-1} + x_k$$

Da numerisch ungünstig:

$$\Delta x_k = x_{opt} - x_k$$

$$H_k \Delta x_k = -g_k$$

Lösen, dann:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$$

5.2

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c_k \|x_k - x^*\| \; mit \; c > 0 \; für \; c \to 0 : k \to \infty, k \in \mathbb{N}$$

5.3

Da für das Newton-Verfahren die Hessematrix und damit die zweite Ableitung benötigt wird, hier aber ein lineares Problem vorliegt, ist dieses Verfahren nicht geeignet.

5.4

$$\frac{(p^2 + p)}{2}$$

5.5

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ xy + y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2y \\ y & x + 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta x = -1{,}2$$

$$\Delta y = 1{,}2$$

$$x_1 = 2 + (-1{,}2) = 0{,}8$$

$$y_1 = -2 + 1{,}2 = -0{,}8$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -0{,}8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

6.1

$$y'' + xy^2 = 1$$

$$y'' + xy^2 - 1 = 0$$

$$y_1 = y \Longrightarrow y_1' = y' = y_2$$

$$y_2 = y' \Longrightarrow y_2' = y''$$

$$y_2' + xy_1^2 - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} {y_1}' \\ {y_2}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -xy_1 + 1 \end{pmatrix}$$

Mit $y_1(0) = y_a$ und $y_2(0) = y_b$

6.2

$$y' = f(x, y, u)$$

$$y'(x) = f\big(x, y(x), u(x)\big)$$

$$[p] = func\ ode(@f, double\ Anf, double\ End, [p]\ InitVal)$$

$$func\ f([p]\ x, double\ y, @u)$$

$$func\ u([p]\ x)$$

6.3

$$y\left(\frac{1}{2}\right); y' = xy^2 + x; y(0) = 2; h = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_0 = 2; x_0 = 0$$

$$k_1 = f(0{,}2) = 0$$

$$k_2 = f\left(\frac{1}{4}, 2\right) = \frac{5}{4}$$

$$k_3 = f\left(\frac{1}{4}, \frac{37}{16}\right) = 1{,}586$$

$$k_4 = f\left(\frac{1}{2}, 2{,}793\right) = 4{,}4$$

$$y_1 = 2 + \frac{1}{6}(0 + 2 * \frac{5}{4} + 2 * 1{,}586 + 4{,}4)$$

$$y_1 = 2{,}8389$$

6.4

$$\int_0^1 (x+1)^2 dx = \int_0^1 (x^2 + 2x + 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_0^1 = \frac{7}{3} \approx 2{,}33$$

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} * h = \frac{1}{4} * \left[\frac{f(0)}{2} + f(0{,}25) + f(0{,}5) + f(0{,}75) + \frac{f(1)}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4} * \left[\frac{8}{16} + \frac{25}{16} + \frac{36}{16} + \frac{49}{16} + \frac{32}{16}\right] = \frac{150}{64} \approx 2{,}34$$