Numerik – Juni 2012

Aufgabe 1: (12 Punkte) Eine Aufgabe heißt korrekt gestellt, wenn es eine (lokal) eindeutige, stetig vom Fehler abhängende Lösung hat.

1. Nennen Sie ein Beispiel einer inkorrekt gestellten Aufgabe zur Nullstellensuche (1Pkt).

2. Ein Vektor x ist Element des Nullraums $N(A)$, wenn er senkrecht auf den Zeilen von A steht, Der Nullraum lässt sich durch eine Basis von Vektoren beschreiben. Welche Zusatzanforderungen würden Sie aus numerischer Sicht an die Basis stellen und warum? (2Pkte)

Eine korrekt gestellte Aufgabe kann gut oder schlecht konditioniert sein.

3. Was verstehen Sie unter schlechter Kondition eines Problems? (1Pkt)

4. Berechnen Sie die Kondition der Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ unter Verwendung der Spaltensummennorm (3Pkte).

5. Formulieren Sie für das lin. Gleichungssystem $Ax = b$ ein Ersatzproblem, dass Freiheiten zur Konditionsverbesserung hat. Wie heißt diese Technik? (2Pkte)

6. Berechnen Sie die relative Kondition für die Kotangensfunktion allgemein. Schätzen Sie einen Bereich ab, indem die relative Konditionszahl den Wert 1000 übersteigt (kleine Winkel-Näherungen für trigonometrische Funktionen). (3Pkte)
   Hinweis: $etan'x = -1/sin^2x$

Aufgabe 2: (12 Punkte)

1. Nennen Sie ein Beispiel dafür, das zeigt, dass es sich bei der numerischen Addition um keine assoziative Operation handelt. (1Pkt)

2. Es seien $A = \mathbb{R}^{10 \times 4}, B \in \mathbb{R}^{4 \times 3}\ und\ C \in \mathbb{R}^{3 \times 20}$ gegeben. Untersuchen Sie, ob Sie ABC besser über $(AB)C$ oder über $A(BC)$ zu berechnen ist. Berechnen Sie hierzu die benötigten Flops beider Varianten. (2Pkte)

3. Worauf müssen Sie bei der Anwendung der Arkustangensfunktion achten? (2Pkte)

4. Formulieren Sie eine If-Abfrage, die einen numerischen Absturz bei Verwendung der Arkussinusfunktion verhindert. (1Pkt)

5. Ein Algorithmus hat die Komplexität $f(n) = 6n^2 + 3n - 2$. Schreiben Sie diese Aussage verkürzt in Landau'scher Notation mittels $\theta(.)$. Warum dürfen Sie auf die erforderliche Angabe für die Grenzwertbildung verzichten? (2Pkte)

6. Wo liegt aus numerischer Sicht das Problem bei der Rangbestimmung? (1Pkt)

7. Schreiben Sie ein numerisch ausgefeiltes Programm, dass die euklidische Norm eines n-dimensionalen Vektors berechnet. (3Pkte)

Aufgabe 3: (8 Punkte)

1. Notieren Sie die einfachste symmetrische Formel zur numerischen Berechnung der ersten Ableitung. Warum kann diese Formel nicht zur Online-Berechnung eingesetzt werden? (2Pkte)

2. Veranschaulichen Sie das Newton-Verfahren für eine eindimensionale Minimierung grafisch. (1Pkt)

3. Notieren Sie die Rechenvorschrift für das Verfahren des steilsten Abstiegs mit Dämpfungsterm. Welchen Nachteil hat das Verfahren gegenüber dem Newton-Verfahren? (2Pkte)

4. Welche lokale Konvergenzordnung hat das Newton-Verfahren zur Minimierung? (1Pkt)

5. Warum ist es sinnvoll, bei der Bewertung von Optimierungsalgorithmen die Zahl der Funktionsaufrufe pro Iterationsschritt und den sonstigen Aufwand pro Schritt separat zu behandeln? (1Pkt)

6. Warum kann das Newton-Verfahren nicht zur diskreten Optimierung (Optimierung über Integer-Zahlen oder Binärzahlen) verwendet werden (1Pkt)?

Aufgabe 4: (10 Punkte)

1. Berechnen Sie den Wert $y(2)$ der Differentialgleichung $y' = -xy^2$ mit dem Runge-Kutta-4-Verfahren, wenn Ihr Anfangswert $y(1) = 2$ ist (4Pkte)? Das zugehörige Butcherschema lautet

0	0		A	
1/2	1/2	0		
1/2	0	1/2	0	
1	0	0	1	0
	1/6	1/3	1/3	1/6

2. Angenommen Sie finden keinen Download eines Runge-Kutta-4-Verfahrens und müssen das Verfahren selbst programmieren. Geben Sie Ein- und Ausgabewerte an, die Sie in einem Funktionskopf übergeben würden (2Pkte). Definieren Sie zudem eine Funktion, die Ihnen die Funktionswerte für die Teilaufgabe 4.1 berechnet. (1Pkt)

3. Wie lautet die Lösung der Dgl. Zwecks Test? (3Pkte; Zusatz)?

4. Berechnen Sie das Integral $y = \int_0^2 x^2 dx$ mit der Trapezregel und $h = \frac{1}{2}$. (3Pkte)

Aufgabe 5: (9 Punkte)

1. Notieren Sie die Iterationsvorschrift eines Fixpunktverfahrens (1Pkt).

2. Berechnen Sie die Fixpunkte der Iteration $x_{k+1} = (x_k + a/x_k)/2$ (3Pkte).

3. Was passiert, wenn Sie Ihre Iteration in der Nähe eines repulsiven Fixpunktes starten (1Pkt)?

4. Für zweimal stetig differenzierbare Funktionen ist das Halley-Verfahren zur Nullstellensuche kubisch konvergent

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2 \cdot f(x_k) \cdot f'(x_k)}{2f'(x_k)^2 - f(x_k) \cdot f''(x_k)}$$

   Leiten Sie zur Berechnung von $\sqrt{n}$ eine kompakte Formel her (3Pkte).

5. Warum ist es dennoch in diesem Fall ratsamer das Newton-Verfahren zu verwenden? (1Pkt)