Nummerik 2011

Gröll

November 23, 2018

Aufgabe 1: (12 Punkte) Eine Aufgabe heißt korrekt gestellt, wenn es eine (lokal) eindeutige, stetig vom Fehler abhängige lösung gibt hat.

1. Nennen Sie ein Beispiel einer inkorrekt gestellten Aufgabe zur Nullstellensuche (1Pkt).
2. Ein Vektor x ist Element des Nullraumes $\mathcal{N}(\mathcal{A})$, wenn es senkrecht auf den Zeilen von A steht. Der Nullraum lässt sich durch eine Basis von Vektoren beschreiben. Welche Zusatzanforderungen würden Sie an die Basis stellen und warum? (2Pkte)

Eine konkret gestellte Aufgabe kann gut oder schlecht konditioniert sein.

3. Was verstehen Sie unter schlechter Kondition eines Problems? (1Pkt)
4. Berechne Sie die Kondition der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ unter Verwendung der Zeilensummennorm (3Pkte).
5. Formulieren Sie für das lin. Gleichungssystem $Ax = b$ ein Ersatzproblem, dass Freiheiten zur Konditionsverbesserung hat. Wie heißt diese Technik? (2Pkte)
6. Berechnen Sie die relative Kondition für die Tangensfunktion allgemein. Schätzen Sie einen Bereich ab, indem die relative Konditionszahl den Wert 1000 übersteigt (kleine-Winkel-Näherungen für trigonometrische Funktionen). (3Pkte)
   Hinweiß: $\tan' x = 1 + \tan^2 x + 1/\cos^2 x$

Aufgabe 2: (11Punkte)

1. Nennen Sie ein Beispiel dafür, das zeigt, dass es sich bei der numerischen Addition um keine Assoziative Operation handelt. (1Pkt)
2. Es seine $A \in \mathbb{R}^{10\times 5}, B \in \mathbb{R}^{5\times 2}$ und $C \in \mathbb{R}^{2\times 20}$ gegeben. Untersuche Sie, ob ABC besser über $(AB)C$ oder über $A(BC)$ zu berechnen ist. Berechnen Sie hierzu die benötigten Flops beider Varianten. (2Pkte)
3. Worauf müssen Sie bei der Anwendung der Arkustangensfunktion achten?" (2Pkte)
4. Formulierne Sie eine If-Abfrage, die einen numerischen Absturz bei Verwendung der Arkussinusfunktion verhindert. (1Pkt)
5. Ein Algorithmus hat die Komplexität $f(n) = 5n^2 + 3n - 2$. Schreiben Sie diese Aussage verkürzt in Landa'scher Notation mittels $\mathcal{O}(.)$. Warum dürfen Sie die erforderliche Angabe für die Grenzwertbildung verzichten? (2Pkte)
6. Schreiben Sie ein numerisch ausgefeiltes Programm, dass die euklidische Norm eines n-dimensionalen Vektors berechnet. (3Pkte)

Aufgabe 3: (9 Punkte)

1. Leiten Sie das Newton-Verfahren zur Lösung von Optimierungsaufgaben her. (4Pkte)
2. Veranschaulichen Sie das Verfahren für eine eindimensionale Minimierung grafisch. (1Pkt)
3. Welchen Vorteil bietet das Verfahren des steilsten Abstiegs gegenüber dem Newton-Verfahren kombiniert werden. (2Pkte)
4. Warum ist es sinnvoll bei der Bewertung von Optimierungsalgorithmen die Zahl der Funktionsaufrufe pro Iterationsschritt und den sonstigen Aufwand pro Schnitt separat zu behandeln? (1Pkt)
5. Warum kann das Newton-Verfahren nicht zur diskreten Optimierung (Optimierung über Integer-Zahlen oder Binärzahlen) verwendet werden (1Pkt)?

Aufgabe 4: (11 Punkte)

1. Berechnen Sie den Wert $y(4)$ der Differnetialgleichung $y' - \frac{y}{1+x}$ mit dem Runge-Kutta-4-Verfahren, wenn Ihr Anfangswert $y(3) = -1$ ist (4Pkte)? Das zugehörige Butcher-Schema lautet

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & 0 & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

2. Angenommen Sie finden keienn Download eines Runge-Kutta-4-Verfahrens und müssen das Verfahren selbst programmieren. geben Sie Ein- und Ausgabewerte an, die Sie in einem Funktionskopf übergeben würden (4Pkte). Definieren Sie zudem eine Funktion, die Ihnen die Funktionswerte für die Teilaufgabe 4.1 berechnet. (1Pkt)
3. Wie würden Sie das Programm aus 4.1/4.2 testen (1Pkt)?
4. Das Runge-Kutta-Verfahren arbeitet mit konstanter Schrittweite. Warum kann es sinnvoll sein, Verfahren mit variabler Schrittweite zu verwenden? (1Pkt)

Aufgabe 5: (11 Punkte)

1. Notieren Sie die Iterationsvorschrift eines Fixpunktverfahrens (1Pkt)?
2. Berechnen Sie die Fixpunkte der Iteration $x_{k+1} = (x_k + a/x_k)/2$ (2Pkte)?
3. Was passiert, wenn Sie Ihre Iteration in der Nähe eines repulsiven Fixpunktes starten (1Pkt)?
4. Definieren Sie den Begriff der Konvergenzordnung (2Pkte).
5. Warum ist es für differenzierbare Probleme oft sinnvoller, ein Fixpunktproblem in ein Nullstellenproblem umzuformen und dies mit dem Newton-Verfahren zu lösen?
6. Für zweimal stetig differenzierbare Funktionen ist das Halley-Verfahren zur Nullstellensuche kubisch konvergent

   $$x_{k+1} = x_k - \frac{2 \cdot f(x_k) f'(x_k)}{2f'(x_k)^2 - f(x_k) f''(x_k)}$$

   Leiten Sie zur Berechnung von $\sqrt{a}$ eine kompakte Formel her (3Pkte).
7. Warum ist es dennoch id diesem Fall ratsamer das Newton-Verfahren zu verwenden? (1Pkt)