Hydrostatisches Gleichgewicht. Allgemeiner Zusammenhang zwischen wirkender Beschleunigung (hier: nur Schwerebeschleunigung $\vec{g}$), Dichte ρ und resultierendem Gradienten des Drucks p im Gleichgwicht:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p = \vec{g}\rho. \tag{1}$$

Im radialsymmetrischen, eindimensionalen Fall wird daraus

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,r} = -g\rho \tag{2}$$

bzw.

$$p(r) = -\int_0^r g(r')\rho(r')\,\mathrm{d}\,r', \tag{3}$$

wobei r für den Abstand vom Zentrum und g für den Betrag der lokalen Fallbeschleunigung steht. Letztere ergibt sich aus der eingeschlossenen Masse $m(r)$:

$$g(r) = \frac{GM(<r)}{r^2}, \tag{4}$$

$$m(r) = \int_0^r 4\pi\rho(r')r'^2\,\mathrm{d}\,r'. \tag{5}$$

Damit gilt für den Druck

$$p(r) - p(0) = -\int_0^r \rho(r')\frac{G}{r'^2}\int_0^{r'} 4\pi\rho(r'')r''^2\,\mathrm{d}\,r''\,\mathrm{d}\,r' = -4\pi G\int_0^r \frac{\rho(r')}{r'^2}\int_0^{r'} \rho(r'')r''^2\,\mathrm{d}\,r''\,\mathrm{d}\,r'. \tag{6}$$

Da der Zentrumsdruck eine zunächst unbekannte Größe ist, bietet es sich an, die äußere Integration unzudrehen und vom äußeren Rand (Gesamtradius R), wo der Druck verschwindet ($p(R) = 0$), zu beginnen:

$$p(r) = \int_R^r \rho(r')\frac{G}{r'^2}\int_0^{r'} 4\pi\rho(r'')r''^2\,\mathrm{d}\,r''\,\mathrm{d}\,r' = 4\pi G\int_R^r \frac{\rho(r')}{r'^2}\int_0^{r'} \rho(r'')r''^2\,\mathrm{d}\,r''\,\mathrm{d}\,r'. \tag{7}$$

Zustandsgleichung. Dichte p, Druck ρ und Temperatur T hängen nun über die materialspezifische (x) Zustandsgleichung zusammen:

$$p = p(\rho, T, x) \qquad \text{bzw.} \qquad \rho = \rho(p, T, x). \tag{8}$$

Für ideale Gase (die sehr gut Planetenatmosphären und Hauptreihensterne widerspiegeln) hätte man hier z. B.

$$p = nkT = \frac{\rho}{\mu u}kT, \tag{9}$$

mit dem mittleren Molekülgewicht μ, der atomaren Masseneinheit, u, und der Boltzmann-Konstante, k. Für dichtere Gase, Flüssigkeiten und Festkörper gibt es meist aus Labordaten gewonnene Zusammenhänge. Im einfachsten Fall kann das ein (ggf. temperaturabhängiges) Kompressionsmodul K (Einheit: Druck) sein,

$$K \equiv -V\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,V} = \rho\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,\rho}, \tag{10}$$

das den Zusammenhang zwischen p und ρ herstellt.

Diskretisierung. Um Gleichung (11) zu lösen, benötigt man in der Regel numerische Methoden und damit auch eine Diskretisierung. Anschaulich zerlegt man sich die Kugel mit Gesamtradius R in einzelne Kugelschalen der Dicke Δr_i (anstelle des Infinitesimals $\mathrm{d}\,r$), durchnumeriert mit Index i. Alternativ ist auch eine Zerlegung in Schalen gegebener Masse Δm_i (statt $\mathrm{d}\,m$) denkbar. Letzteres bietet sich an, wenn die Gesamtmasse des Planeten vorgegeben und der Gesamtradius gesucht sein soll. In diesem Fall hat man

$$p(m) = G \int_M^m \frac{1}{4\pi r(m')^4} \int_0^{m'} \mathrm{d}\,m'' \,\mathrm{d}\,m', \tag{11}$$

wobei

$$r(m') = \int_0^{m'} \frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,m} \,\mathrm{d}\,m \tag{12}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,m} = \left(\frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,r}\right)^{-1} = \frac{1}{4\pi\rho r^2}. \tag{13}$$

In diskreter Form gilt für das Verhältnis aus Dicke und Masse einer Kugelschale

$$\frac{\Delta r_i}{\Delta m_i} = \frac{1}{4\pi\rho_i r_i^2}. \tag{14}$$

Die Dichte ρ_i ergibt sich wieder aus der Zustandsgleichung $\rho_i = \rho_i(p_i, T_i, x_i)$, also aus lokalem Druck, Temperatur und Material der Schale i. Stellt man sich das Integral in Gleichung (12) als Stapelung diskreter Kugelschalen der (konstanten, vorgegeben) Masse Δm_j sowie der zu bestimmenden Dichte ρ_j und Dicke Δr_j vor, folgt für den Radius bis zur i-ten Schale:

$$r_i = \sum_{j=1}^{i-1} \Delta r_j = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\rho_j r_j^2} \Delta m_j. \tag{15}$$

Gleichzeitig hat man die Druckschichtung

$$p_i = \sum_{j=N}^{i+1} \Delta p_j = G \sum_{j=N}^{i+1} \frac{1}{4\pi r_j^4} m_j, \tag{16}$$

mit der Masse

$$m_j = \sum_{k=1}^{j} \Delta m_k \tag{17}$$

bis einschließlich der j-ten Schale. Kennt man p_i, dann kann man (über die Zustandgleichung sowie ggf. T_i und das Material x_i) die Dichte ρ_i und daraus dann die radiale Schichtung r_i ermitteln. Andererseits braucht man r_i um p_i zu bestimmen. Die beiden Integrale bzw. Summen sind also gekoppelt, wie physikalisch zu erwarten war.

Lösung. Man sucht also eine Lösung für p_i (bzw. r_i oder ρ_i), die beide Gleichungen erfüllt und damit sowohl hydrostatischem Gleichgewicht also auch Zustandsgleichung gerecht wird. Praktisch kann man iterativ vorgehen und zum Beispiel mit konstanter Dichte beginnen, daraus die r_i und p_i sowie schließlich neue ρ_i berechnen usw. Es handelt sich dann um ein Optimierungsproblem, bei dem man z.Ḃ. den Abstand zwischen aktuell angenommenem ρ_i und anschließend aus p_i und r_i ermitteltem ρ_i minimiert. Der zu optimierende Zustandsvektor wäre dann $\{\rho_i\}$ (oder $\{p_i\}$), also die Dichten (oder Drücke) aller betrachteten diskreten Schichten. Das kann schnell ein recht hochdimensionales System werden (z. B. $N = 100$), sodass sich ein Monte-Carlo-Markov-Ketten-Ansatz (MCMC) anbietet, für den es für viele Programmiersprachen fertige Pakete gibt (z. B. `emcee` für Python).